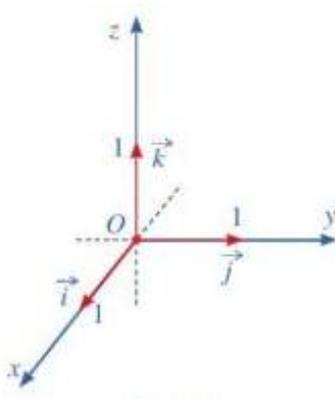


BÀI 2, 3

**TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ**

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Hệ trục gồm ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc nhau được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ trục tọa độ $Oxyz$.



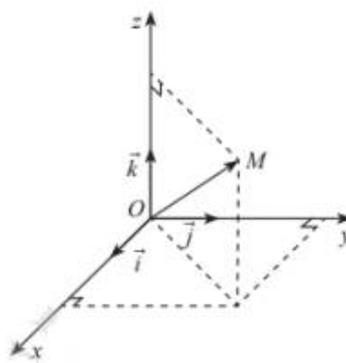
Chú ý:

- Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các **vector đơn vị** trên các trục Ox , Oy , Oz .
- Trong không gian $Oxyz$, ta gọi:
 - + Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.
 - + Trục Ox : **trục hoành**, Trục Oy : **trục tung**, Trục Oz : **trục cao**.
 - + Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.
- Các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc nhau.

2. Tọa độ của một điểm và của một vectơ

a. Tọa độ của một điểm

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Nếu $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$ của điểm M .



b. Tọa độ của một vector

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vector \vec{a} . Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vector \vec{a} đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Chú ý: Trong không gian $Oxyz$, ta có:

• Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Ngược lại, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

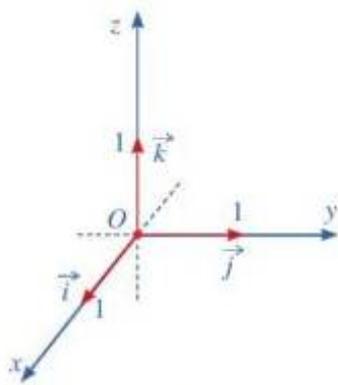
• Tọa độ của điểm M là tọa độ của vector \overrightarrow{OM} : $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$

• Điều kiện hai vector bằng nhau: Cho $\vec{a} = (x; y; z)$, $\vec{b} = (x'; y'; z')$, khi đó $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

• Vector đơn vị trên trục Ox có tọa độ là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Vector đơn vị trên trục Oy có tọa độ là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Vector đơn vị trên trục Oz có tọa độ là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.



QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

• $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x; \text{ ngược dấu } y, z)]{\text{Nhã xoay qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y, \text{ trục } x, z)]{\text{Nhô xoay qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } z, \text{ trục } x, y)]{\text{Nhô xoay qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$

Đôi xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, y, \text{ trục } z)]{\text{Nhô xoay qua } Oxy} M_1(x_M; y_M; -z_M)$

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, z, \text{ trục } y)]{\text{Nhô xoay qua } Oxz} M_2(x_M; -y_M; z_M)$

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y, z, \text{ trục } x)]{\text{Nhô xoay qua } Oyz} M_3(-x_M; y_M; z_M)$

3. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

- **Tổng hai vector:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

- **Hiệu hai vector:** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ($k \in \mathbb{R}$)

- \vec{a} cùng phương \vec{b} ($\vec{b} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$ ($k \in \mathbb{R}$)

4. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$.

- Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$; $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

- Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

- Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

- Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

- Tích vô hướng 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$

- Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, ta có:

+ Hai vector vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

+ Góc hai vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

CHỦ ĐỀ 1

TỌA ĐỘ VÀ BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1

CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

• $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

• Tổng hai vectơ: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

• Hiệu hai vectơ: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

• $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3) \quad (k \in \mathbb{R})$

• $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

• \vec{a} cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$

• $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

• Tích vô hướng 2 vectơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

• Hai vectơ vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

• Góc hai vectơ: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ vector \vec{u} trong các trường hợp sau:

- a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. b) $\vec{u} = 2025\vec{i} - 2024\vec{j}$. c) $\vec{u} = -\vec{i} - 5\vec{k}$. d) $\vec{u} = -2025\vec{k}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ vector \vec{u} theo các vector đơn vị $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ trong các trường hợp sau:

- a) $\vec{u} = (1; -3; -4)$. b) $\vec{u} = (-2; 3; 0)$. c) $\vec{u} = (0; -2024; 2025)$. d) $\vec{u} = (0; -2025; 0)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ và vector $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$.

- a) Tìm tọa độ của \vec{u} .
 b) Biểu diễn \vec{v} theo các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
 c) Tìm tọa độ của $\vec{a} = 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -1; 5), \vec{b} = (0; 3; -3), \vec{c} = (1; 4; -2)$.

- a) Hai vector \vec{a} và \vec{b} có cùng phương không?
 b) Tìm tọa độ của vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$
 c) Tìm tọa độ của vector $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và $\vec{b} = (-2; 3; -2)$.

- a) Tính độ dài của vector \vec{a} .
 b) Tìm $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
 c) Tìm (\vec{a}, \vec{b}) .

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$.

- a) Tìm số thực m sao cho $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
 b) Tìm số thực m sao cho $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 c) Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa \vec{u}, \vec{v} bằng 135° .

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3), \vec{b} = (1; 3; -2n), \vec{c} = (1; 4; -2)$.

- a) Tìm số thực m sao cho $\vec{a} \perp \vec{c}$.
 b) Tìm số thực n sao cho $|\vec{b}| = |\vec{c}|$.
 c) Tìm m, n để các vector \vec{a}, \vec{b} cùng hướng.

DẠNG 2

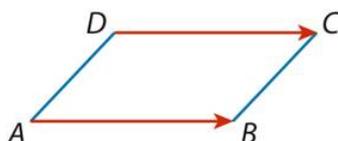
TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM

TÌM TỌA ĐỘ VECTƠ

ĐỘ DÀI ĐƯỜNG THẲNG

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \quad (k \in \mathbb{R})$
- Ba điểm A, B, C không thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \neq k \overrightarrow{AC} \quad (k \in \mathbb{R})$
- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

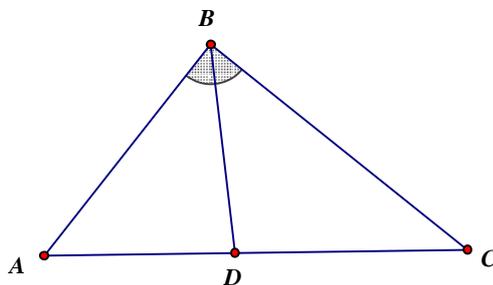


- $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$
- $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

- Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Khi đó ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \frac{BA}{BC} \overrightarrow{DC}$$



Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;-4)$.

- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Oz .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy) .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxz) .

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$.

- Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua trục Ox .
- Tìm tọa độ điểm A_2 đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) .

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;2), B(1;2;3), C(2;1;2)$.

- Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$.
- Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- Tính các độ dài AB, BC, CA .

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;1), B(0;1;2), C(1;0;1)$.

- Tìm tọa độ trung điểm M của AB .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2;-1;4), B(3;5;-1), C(-1;1;2)$.

- Tìm tọa độ của \overrightarrow{AB} .
- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $A(7;3;3), B(1;2;4), C(2;3;5)$.

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Tính $\cos \widehat{BAC}$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $A(5;-3;0), B(2;1;-1), C(4;1;2)$.

- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$.
- Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$.

Bài 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$.

- Tìm tọa độ điểm Q thuộc trục Ox sao cho $AQ = 3$.

b) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng Oxz sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC .

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$.

a) Tính tọa độ các đỉnh của hình hộp.

b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Bài 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(-2024; 2025; 2026)$.

a) Tìm điểm $M_1 \in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM_1 ngắn nhất.

b) Tìm điểm $M_2 \in (Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM_2 ngắn nhất.

Bài 2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 2; -3), B(0; 2; 1), C(-1; 2; 1)$.

a) Tìm $M \in Oy$ sao cho biểu thức $T = |\overline{MA} + \overline{MB}|$ để đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho điểm $M(2; 1; a)$. Tìm a sao cho biểu thức $T = |\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}|$ để đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ \vec{a} là

- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(2; -1; -3)$. D. $(-3; 2; -1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ \vec{u} là

- A. $(-2; 3; 1)$. B. $(2; 3; -1)$. C. $(2; -3; -1)$. D. $(2; 3; 1)$.

Câu 3. Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ \vec{a} là:

- A. $\vec{a}(-1; 2; -3)$. B. $\vec{a}(2; -3; -1)$. C. $\vec{a}(-3; 2; -1)$. D. $\vec{a}(2; -1; -3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 3; 5)$. Tọa độ của vectơ \overrightarrow{OA} là:

- A. $(-2; 3; 5)$. B. $(2; -3; 5)$. C. $(-2; -3; 5)$. D. $(2; -3; -5)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là

- A. $(1; 2; 3)$ B. $(-1; -2; 3)$ C. $(3; 5; 1)$ D. $(3; 4; 1)$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

- A. $B(2; 5; 0)$. B. $B(0; -1; -2)$. C. $B(0; 1; 2)$. D. $B(-2; -5; 0)$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A. $(0; 5; 2)$. B. $(0; 5; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 0; 2)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(3; 0; -1)$. B. $(0; 1; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 0; -1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(3; -1; 0)$. B. $(0; 0; 1)$. C. $(0; -1; 0)$. D. $(3; 0; 0)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(0; 2; -3)$. B. $(1; 0; -3)$. C. $(1; 2; 0)$. D. $(1; 0; 0)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

- A. $(0; 1; 0)$. B. $(2; 1; 0)$. C. $(0; 1; -1)$. D. $(2; 0; -1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3; 0; 0)$ B. $N(0; -1; 1)$ C. $P(0; -1; 0)$ D. $Q(0; 0; 1)$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A. $M(3; 4; 0)$. B. $P(-2; 0; 3)$. C. $Q(2; 0; 0)$. D. $N(0; 4; -1)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4; 5; 6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A. $M'(4; 5; 0)$. B. $M'(4; 0; 6)$. C. $M'(4; 0; 0)$. D. $M'(0; 5; 6)$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x; y; z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; y; -z)$.
 B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x; y; -z)$.
 C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x; y; -z)$.
 D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x; 2y; 0)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A. $(0; 2; 3)$. B. $(-1; -2; -3)$. C. $(-1; 2; 3)$. D. $(1; 2; -3)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A. $A'(2; 3; 5)$. B. $A'(2; -3; -5)$. C. $A'(-2; -3; 5)$. D. $A'(-2; -3; -5)$.

Câu 18. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; -\sqrt{2}; \sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Ox$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(-1; 0; 0)$. B. $M'(1; 0; 0)$. C. $M'(1; 0; \sqrt{3})$. D. $M'(1; -\sqrt{2}; 0)$.

Câu 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(\sqrt{2}; 0; \sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oy$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(0; -\sqrt{2}; 0)$. B. $M'(\sqrt{2}; 0; 0)$. C. $M'(0; 0; \sqrt{3})$. D. $M'(0; 0; 0)$.

Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; 2; -\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1; 0; -\sqrt{3})$. B. $M'(0; 2; -\sqrt{3})$. C. $M'(0; 0; -\sqrt{3})$. D. $M'(0; 0; \sqrt{3})$.

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;2)$. Tìm điểm $A' \in (Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng AA' ngắn nhất.

- A. $A'(-1;1;0)$. B. $A'(1;1;0)$. C. $A'(2;2;0)$. D. $A'(2;-1;2)$.

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5})$. Tìm điểm $M' \in (Oxz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1;1+\sqrt{2};2-\sqrt{5})$. B. $M'(1;1-\sqrt{2};0)$.
C. $M'(1;0;2+\sqrt{5})$. D. $M'(0;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5})$.

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1+\sqrt{2};2;1-\sqrt{2})$. Tìm điểm $M' \in (Oyz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1+\sqrt{2};0;1-\sqrt{2})$. B. $M'(0;2;1-\sqrt{2})$.
C. $M'(0;-2;1-\sqrt{2})$. D. $M'(0;-2;1+\sqrt{2})$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-4;-2;9)$. B. $D(-4;2;9)$. C. $D(4;-2;9)$. D. $D(4;2;-9)$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A. $OA = \sqrt{5}$ B. $OA = 5$ C. $OA = 3$ D. $OA = 9$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài AB .

- A. 26. B. 22. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{22}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A. $(4;2;2)$. B. $(2;1;1)$. C. $(2;0;-2)$. D. $(1;0;-1)$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

- A. $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$. B. $B(-4;9;8)$. C. $B(5;3;-7)$. D. $B(5;-3;-7)$.

Câu 29. Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;5)$, $C(0;0;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(0;0;3)$. B. $G(0;0;9)$. C. $G(-1;0;3)$. D. $G(0;0;1)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$ và $D(1;-1;1)$. Tọa độ điểm C là

- A. $(2;0;2)$. B. $(2;2;2)$. C. $(2;-2;2)$. D. $(0;-2;0)$.

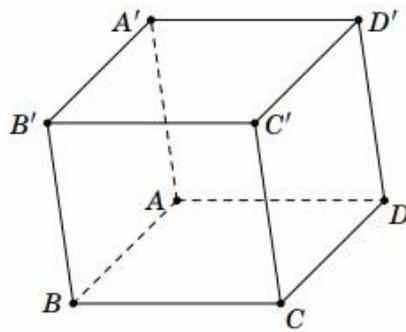
Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G(2;1;-3)$. Tọa độ của vector $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ là

- A. $(3;6;3)$. B. $(3;6;-3)$. C. $(3;-3;6)$. D. $(3;2;1)$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2), B(2;1;-3), C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ có tọa độ là:

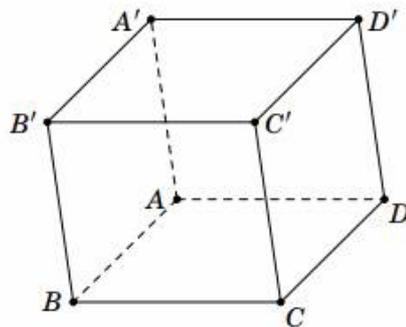
- A. $G(2;-1;-1)$. B. $G(2;-2;-1)$. C. $G(0;-1;-1)$. D. $G(6;-3;-3)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.



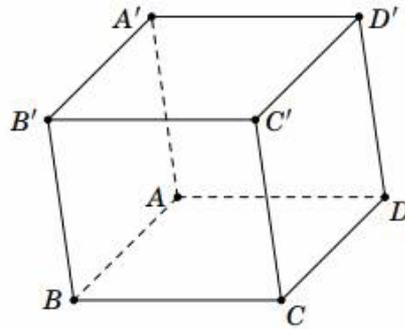
- A. $A'(4;6;-5)$. B. $A'(2;0;2)$. C. $A'(3;5;-6)$. D. $A'(3;4;-6)$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0), B(0;2;0), D(0;0;1), A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C' .



- A. $C'(10;4;4)$. B. $C'(-13;4;4)$. C. $C'(13;4;4)$. D. $C'(7;4;4)$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0), B(4;0;0), C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là



- A. $B'(8;4;10)$. B. $B'(6;12;0)$. C. $B'(10;8;6)$. D. $B'(13;0;17)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -4; 0)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 1)$. Vectơ $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

- A. $(-2; -10; 3)$. B. $(-2; -6; 3)$. C. $(-4; -8; 4)$. D. $(-2; -10; -3)$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là:

- A. $(3; 4; -3)$. B. $(-1; 2; -3)$. C. $(-1; 2; -1)$. D. $(1; -2; 1)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(3; 4; 1)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(1; 2; 3)$.

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1; 2; 3); \vec{b}(2; 2; -1); \vec{c}(4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A. $\vec{d}(-7; 0; -4)$ B. $\vec{d}(-7; 0; 4)$ C. $\vec{d}(7; 0; -4)$ D. $\vec{d}(7; 0; 4)$

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- A. $\vec{a} = (4; 1; -1)$. B. $\vec{a} = (3; 1; -4)$. C. $\vec{a} = (0; 1; -1)$. D. $\vec{a} = (4; 1; -5)$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. B. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$. C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. D. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; 7; 2)$. B. $(1; 5; 2)$. C. $(3; 7; 2)$. D. $(1; 7; 3)$.

Câu 45. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2; 2; 0), \vec{b}(2; 2; 0), \vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

- A. 6. B. 11. C. $2\sqrt{11}$. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector \vec{a}, \vec{b} cùng phương.

- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. C. $m = 4; n = -3$. D. $m = 1; n = 0$.

Câu 48. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2; -2; 1), B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

- A. $M(4; -5; 0)$. B. $M(2; -3; 0)$. C. $M(0; 0; 1)$. D. $M(4; 5; 0)$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Câu 50. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Câu 51. Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3), \vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.

Câu 52. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = -2$.

Câu 53. Trong không gian Oxyz, cho hai vector \vec{u} và \vec{v} tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 5$.

Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$

- A. $\sqrt{19}$. B. -5 . C. 7. D. $\sqrt{39}$.

Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ \vec{i} và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Cosin của góc giữa \vec{a} và \vec{b} bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.

Câu 57. Cho $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; -1; 0)$, góc giữa hai vectơ \vec{u} và \vec{v} là

- A. 120° . B. 45° . C. 135° . D. 60° .

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 vectơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

- A. $m = -5$. B. $m = 5$. C. $m = 1$. D. $m = -2$

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa \vec{u} , \vec{v} bằng 45° .

- A. $m = 2$. B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. C. $m = 2 - \sqrt{6}$. D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Câu 60. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$ $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc \widehat{BAC} là

- A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. B. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. D. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 2; 3); B(-1; 2; 1); C(3; -1; -2)$. Tính tích vô hướng $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

- A. -6 . B. -14 . C. 14 . D. 6 .

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5; 3; -1), B(2; 3; -4)$, $C(3; 1; -2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

- A. $9 - 2\sqrt{6}$. B. $9 - 3\sqrt{6}$. C. $9 + 3\sqrt{6}$. D. $9 + 2\sqrt{6}$.

Câu 64. Cho bốn điểm $S(1, 2, 3); A(2, 2, 3); B(1, 3, 3); C(1, 2, 4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

- A. $(5; 9; 13)$. B. $(\frac{5}{3}; 3; \frac{13}{3})$. C. $(1; \frac{7}{4}; \frac{9}{4})$. D. $(\frac{5}{4}; \frac{9}{4}; \frac{13}{4})$

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Tìm điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overline{CE} = 2\overline{EB}$.

- A. $(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3})$ B. $(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3})$. C. $(3; 3; -\frac{8}{3})$ D. $(1; 2; \frac{1}{3})$

sai.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

c) $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

d) \vec{a} và \vec{b} cùng phương

Câu 72. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2\sqrt{91}}{91}$

d) $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$

Câu 73. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

a) $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

b) $\vec{b} - \vec{c} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$

c) $3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} = (11; 22; 18)$

d) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-4; -2; 6)$,

$\vec{c} = (m-1; 2; 0)$

a) \vec{a} cùng hướng với \vec{b} .

b) $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

d) Nếu $\vec{b} \perp \vec{c}$ thì $m = 1$

Câu 75. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$.

a) $|\vec{b}| = 4$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 17$

c) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

d) Biết vectơ $\vec{c} = (x; y; 1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a} = (1; 3; 4), \vec{b} = (-1; 2; 3)$. Khi đó $x + y = \frac{6}{5}$.

Câu 76. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 0; 1), \vec{b} = (1; -1; -2), \vec{c} = (2; 1; -1)$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

b) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{15}}{30}$

d) Cho $\vec{d} = (1; 7; -3)$, khi đó $\vec{d} \perp \vec{a}$.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3), B(0; 0; -1), C(1; 0; -1), D(0; 1; -1)$.

a) $|\overline{AB}| = 4$

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$.

c) $AB \perp AC$

d) $\cos(\overline{AB}, \overline{BD}) = 1$

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1; 1; 2), B(1; 0; 3), C(0; 2; -2)$.

a) $\overline{BC} = (-1; 2; -5)$

b) $\overline{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

c) Tọa độ tâm hình bình hành là $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.

d) $\overline{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1), B(7; x; 1), C(9; 2; y)$.

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.

b) Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A thì $x = -1, y = 13$.

d) Tích vô hướng của $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3x + 2y + 41$.

Câu 80. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 2; 0), D'(-1; 3; 5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A', ADD'A'$.

a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$.

b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$.

c) Tọa độ $\overline{MN} = (-1; 1; 0)$.

d) $|\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CC'}| = \sqrt{29}$.

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2;1;0), C(0;3;0), C'(-1;2;1), D'(0;-2;0)$.

a) Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1;0;-1), B'(0;4;2)$.

b) Tọa độ các điểm B, D là $B(1;5;1), D(1;-1;-1)$.

c) Tọa độ vector \overline{AB} là $\overline{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

d) Tọa độ vector \overline{AB} là $\overline{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Câu 82. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1;-3;3); B(2;-4;5), C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó.

a) Gọi M là trung điểm đoạn thẳng AB , khi đó tọa độ điểm M là $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

b) Tọa độ vector là $\overline{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

c) $a + b + c = -2$

d) $\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = -\frac{14\sqrt{57}}{57}$

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;-2), B(2;-1;3), C(1;3;-2), D(5;-1;8)$.

a) $\overline{AB} = (2; -2; 5)$

b) $AC = \sqrt{5}$

c) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng.

d) Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;3;-2), B(3;2;-4), C(2;1;0), D(3;5;-1)$.

a) $AB = 3$

b) $AB \perp CD$.

c) Tam giác BCD là tam giác đều.

d) $\cos(\overline{MA}, \overline{MD}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 85. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$.

a) $\overline{AB} = (3; -2; 3)$

b) Lấy điểm $N \in Oy$. Độ dài đoạn thẳng NA ngắn nhất bằng 4.

c) Lấy điểm $Q \in (Oxz)$. Độ dài đoạn thẳng QB ngắn nhất khi đó tọa độ điểm Q là $(3;0;1)$.

d) Biết tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overline{AM} = 3\overline{AB}$. Khi đó $x + y - z = 11$.

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2), B(3;2;5), C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.

- a) $\overrightarrow{AA'} = (4; 0; -1)$
 b) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$
 c) Tọa độ đỉnh B' là $(x; y; z)$. Khi đó $x + y + z = 13$.
 d) Tọa độ đỉnh C' là $(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c = 16$.

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0), B(3; 0; 0), D(0; 3; 0), D'(0; 3; -3)$.

- a) $AB = 3$
 b) Tọa độ đỉnh $C(2; 3; 0)$
 c) Tọa độ đỉnh A', B' lần lượt là $A'(0; 0; -3)$ và $B'(3; 0; -3)$.
 d) Gọi $G(x_G; y_G; z_G)$ là tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$. Khi đó $x_G + y_G + z_G = 5$.

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$.

- a) $BA = \sqrt{26}$ và $BC = 2\sqrt{26}$
 b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -26$
 c) Gọi $M(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}$. Khi đó $x + y + z = 2$.
 d) Gọi $D(a; b; c)$ là tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Khi đó $a + b + c = 4$.

Câu 89. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1), B(2; 0; -1), C(6; 1; 0)$. Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2)$
 b) $BC = 3\sqrt{2}$
 c) $BC = 2AD$
 d) Giả sử đỉnh D có tọa độ $D(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c = 6$.

Câu 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có điểm $A(-2; 3; 1), B(2; 1; 0), C(-3; -1; 1)$. Biết $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 23$
 b) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{70}}{70}$
 c) $AD = 3BC$
 d) Biết đỉnh D có tọa độ $D(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c = 10$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Biết vector $3\vec{a} + 2\vec{b} = (x_0; y_0; z_0)$. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.

Trả lời:

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$, $\vec{u} = (x; y; z)$ thỏa mãn $\vec{a} + 2\vec{u} = \vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $T = 2x + 2y + z$.

Trả lời:

Câu 93. Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m + 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} là góc tù?

Trả lời:

Câu 94. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (1; -1; 0)$. Xác định k để vector $\vec{u} = (2; 2k - 1; 0)$ cùng phương với vector \vec{a} .

Trả lời:

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

Trả lời:

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3; 7; 2)$, $N(5; 1; -1)$ và $P(4; -4; -2)$. Gọi $G(a; b; c)$ là trọng tâm của tam giác MNP . Tính giá trị biểu thức $T = a + 3b + 3c$.

Trả lời:

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$, $B(a; b; c)$ và $M(2; 1; -2)$. Biết M là trung điểm của AB , tính $T = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; -3)$, $B(2; 5; 7)$, $C(-3; 1; 4)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(0; 1; -2)$, $B(x; y; z)$, $C(0; -2; 1)$, $D(1; 0; -1)$. Tính giá trị biểu thức $T = x + y + z$.

Trả lời:

Câu 100. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Gọi tọa độ $A'(a; b; c)$ là điểm đối xứng với A qua trục Oy . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Để ba điểm A, B, M thẳng hàng thì giá trị của $x + y$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-1), B(-1;-x;1), C(7;-1;y)$. Khi A, B, C thẳng hàng thì giá trị biểu thức $x + y$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 104. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1), B(3;-1;5)$. Biết tọa độ của điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn hệ thức $\overline{MA} = 3\overline{MB}$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2), B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, biết tọa độ điểm M là $(a;b;c)$. Khi đó $a + 3b + c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M có tọa độ $(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + 2c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 108. Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .

Trả lời:

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1), B(2;0;-1), C(6;1;0)$ và hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a + b + c$

Trả lời:

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1), B(2;1;0), C(-3;-1;1)$. Gọi $D(a;b;c)$ là điểm sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AD và diện tích hình thang $ABCD$ bằng 4 lần diện tích tam giác ABC . Tính $a + b + c$.

Trả lời:

Câu 111. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Trong không gian gọi điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ và không trùng với các điểm A, B, C, O . Tính giá trị của $3x + 6y + 3z$.

Trả lời:

Câu 112. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;1;-1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA \cdot \overline{MA} = 4MB \cdot \overline{MB}$. Giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 113. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1)$, $B(-2;-6;2)$, $C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $|\overline{MB} - 2\overline{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 114. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$, $B(2;2;1)$, $M(a;b;c) \in Ox$. Khi biểu thức $T = |\overline{MA} + \overline{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính $2a + b + c$.

Trả lời:

Câu 115. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(0;2;3)$, $B(2;1;1)$, $C(1;2;3)$, $M(a;b;c) \in Oz$. Khi biểu thức $T = |\overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính $a + b + 2c$.

Trả lời:

Câu 116. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(5;-2;0)$, $B(4;5;-2)$ và $C(0;3;2)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox . Đặt $Q = 2|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| + 3|\overline{MB} + \overline{MC}|$. Biết giá trị nhỏ nhất của Q có dạng $a\sqrt{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và b là số nguyên tố. Tính $a + b$.

Trả lời:

Câu 117. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;1;0)$, $C(2;-3;1)$. Lấy điểm $S(a;b;c)$ sao cho biểu thức $SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 2a + b + 3c$

Trả lời:

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ $D(2;2;-1)$. Biết $M(x;y;z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $4x + 2y + z$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 119. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1)$, $B(-2;-6;2)$, $C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$. Để biểu thức $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;0), B(2;0;-2)$ và điểm $M(a,b,c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a+2b-c-1=0$. Biết $MA=MB$ và góc \widehat{AMB} có số đo lớn nhất. Tính $S=11a+22b+33c$.

Trả lời:

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 121. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -2; \frac{1}{4})$, $\vec{b} = (-2; 1; 1)$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

- Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$
- Tính độ dài của vector \vec{c} .
- Tính các tích vô hướng $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{c}\vec{b}$. Trong ba vector trên có các cặp vector nào vuông góc ?
- Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, $\cos(\vec{a}, \vec{i})$

Câu 122. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$

- Tìm tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ theo các vector đơn vị $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$
- Tính độ dài của vector $|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}|$.
- Tính $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$.
- Tính góc giữa 2 vector \vec{a} và \vec{b} .

Câu 123. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$.

- Tìm tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ theo các vector đơn vị $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$
- Tính độ dài của vector $|\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}|$.
- Tính $(\vec{a} - 2\vec{b})\vec{c}$.
- Tìm tọa độ vector \vec{u} , biết rằng: $\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{u} \perp \vec{b}$, $\vec{u}\vec{c} = -6$.

Câu 124. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$.

- Tính $(\vec{a} + 3\vec{b})\vec{b}$.
- Tính $(2\vec{a} - 5\vec{b})\vec{c}$.
- Tìm tọa độ vector \vec{u} , biết rằng: $\vec{a}\vec{u} = -5$, $\vec{u}\vec{b} = -11$, $\vec{u}\vec{c} = 20$.

Câu 125. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; -1; -3)$, $\vec{b} = (m-1; 3; -2)$, $\vec{c} = (1; 2n-1; -1)$.

- Tìm số thực m sao cho $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Tìm tất cả giá trị của n để góc giữa \vec{a} , \vec{c} bằng 45° .
- Tìm m, n để các vector \vec{b}, \vec{c} cùng phương.

Câu 126. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$.

- Tính $(\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$.
- Tìm m để $\vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b}$ cùng phương.

Câu 127. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; -7; 9)$, $\vec{b} = (3; -6; 1)$, $\vec{c} = (2; 1; -7)$.

- Tìm tọa độ vector $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ theo các vector đơn vị $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$

b) Tính góc giữa 2 vector \vec{a} và \vec{b} .

c) Biểu diễn vector $\vec{u} = (-4; 13; -6)$ theo các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Câu 128. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho ba vector $\vec{a} = (1; -1; 1), \vec{b} = (0; 1; 2), \vec{c} = (4; 2; 3)$.

a) Tìm tọa độ vector \vec{d} thỏa mãn $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d} = \vec{0}$

b) Trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, có các cặp vector nào vuông góc?

c) Biểu diễn vector $\vec{u} = (1; 2; -2)$ theo các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Câu 129. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4), \vec{b} = (6; 0; -3), \vec{c} = (3; 2; -1)$.

a) Tính $(2\vec{a} + \vec{b})\vec{c}$.

b) Xác định các số thực m, n để $m\vec{a} - 3n\vec{b} = \vec{c}$.

Câu 130. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho 3 vector: $\vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; -3; 2), \vec{c} = (3; 2; -4)$.

a) Tính $(3\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{c})$.

b) Xác định các số thực m, n để $\frac{m}{3}\vec{a} - n\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 131. Trong không gian tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(4; 2; 3), B(-2; 1; -1), C(3; 8; 7)$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

b) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

d) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{MC} = 3\vec{MB}$

f) Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC .

g) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

Câu 132. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(3; -4; 7), B(-5; 3; -2), C(1; 2; -3)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành ΔABC .

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

c) Tìm tọa độ trọng tâm của ΔABC .

d) Tính góc \widehat{ABC} .

e) Tính độ dài đường cao BH của ΔABC

Câu 133. Trong hệ tọa độ Oxyz cho: $A(1; -1; 1), B(2; -3; 2), C(4; -2; 2), D(3; 0; 1), E(1; 2; 3)$

a) Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích của nó.

b) Tính góc \widehat{ABC} .

c) Tìm trên đường thẳng Oy điểm cách đều hai điểm AB

d) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$

Câu 134. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(2; 5; 3)$, $B(3; 7; 4)$, $C(x; y; 6)$.

- Tìm tọa độ điểm M sao cho $2\overline{AM} = \overline{AB}$.
- Tìm $x; y$ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Tìm $x; y$ để ba điểm A, B, C tạo thành tam giác ABC vuông cân tại A .

Câu 135. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$.

- Tìm tọa độ điểm Q thuộc trục Oy sao cho $BQ = 2\sqrt{6}$.
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng Oyz sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overline{AM} = 2\overline{MB}$.

Câu 136. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(4; -1; 2)$; $B(7; 3; 2)$.

- Tìm tọa độ điểm $M \in Ox$ và cách đều hai điểm A, B .
- Tìm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác ABM vuông cân tại A .

Câu 137. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; -3)$, $B(0; 3; 7)$, $C(2; 5; 0)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành tam giác ABC .
- Tính $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tính góc \widehat{ABC} .
- Tính diện tích ΔABC . Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC .

Câu 138. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng:

$(1; 2; -1)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(-1; -1; 2)$, $D'(2; -2; -3)$

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng BD' và $B'D$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta AA'C$.
- Tìm tọa độ điểm M thỏa $2\overline{MA} + \overline{MB'} = \overline{MD}$

Câu 139. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng:

$A(0; 2; 2)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-1; 1; 1)$, $C'(1; -2; -1)$

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng AC' và $A'C$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta B'DD'$.

Câu 140. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng:

$B(2; 0; 0)$, $C(2; 3; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $A'(0; 0; 5)$

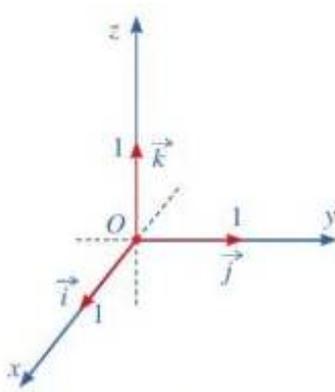
- Chứng minh hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.
- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật chữ nhật.
- Tính $\widehat{BA'D}$ của tam giác $A'BD$.

BÀI 2, 3

**TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ**

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ trục tọa độ $Oxyz$.



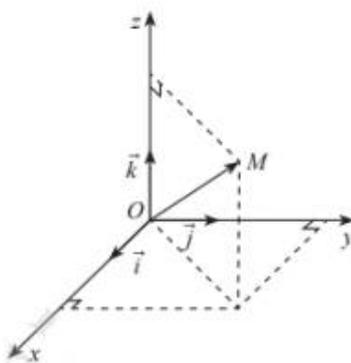
Chú ý:

- Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các **vector đơn vị** trên các trục Ox, Oy, Oz .
- Trong không gian $Oxyz$, ta gọi:
 - + Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.
 - + Trục Ox : **trục hoành**, Trục Oy : **trục tung**, Trục Oz : **trục cao**.
 - + Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.
- Các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc nhau.

2. Tọa độ của một điểm và của một vectơ

a. Tọa độ của một điểm

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$ của điểm M .



b. Tọa độ của một vector

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vector \vec{a} . Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vector \vec{a} đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Chú ý: Trong không gian $Oxyz$, ta có:

• Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Ngược lại, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

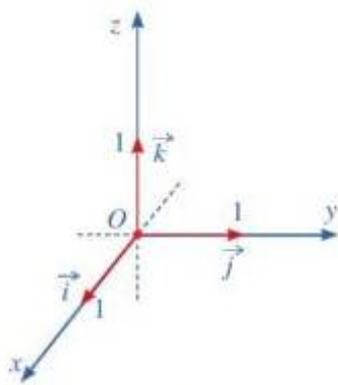
• Tọa độ của điểm M là tọa độ của vector \overrightarrow{OM} : $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$

• Điều kiện hai vector bằng nhau: Cho $\vec{a} = (x; y; z)$, $\vec{b} = (x'; y'; z')$, khi đó $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

• Vector đơn vị trên trục Ox có tọa độ là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Vector đơn vị trên trục Oy có tọa độ là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Vector đơn vị trên trục Oz có tọa độ là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.



QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$

• Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

• $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x; \text{ ngược dấu } y, z)]{\text{Nhã xoay qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y, \text{ trục } x, z)]{\text{Nhã xoay qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } z, \text{ trục } x, y)]{\text{Nhã xoay qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$

Đôi xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, y, \text{ trục } z)]{\text{Nhã xoay qua } Oxy} M_1(x_M; y_M; -z_M)$

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, z, \text{ trục } y)]{\text{Nhã xoay qua } Oxz} M_2(x_M; -y_M; z_M)$

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y, z, \text{ trục } x)]{\text{Nhã xoay qua } Oyz} M_3(-x_M; y_M; z_M)$

3. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

- **Tổng hai vector:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

- **Hiệu hai vector:** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3) \quad (k \in \mathbb{R})$

- \vec{a} cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

4. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$.

- Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$; $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

- Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

- Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

- Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

- Tích vô hướng 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$

- Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, ta có:

+ Hai vector vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

+ Góc hai vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

CHỦ ĐỀ 1

TỌA ĐỘ VÀ BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN A

TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1

CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

• $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

• Tổng hai vectơ: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

• Hiệu hai vectơ: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

• $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3) \quad (k \in \mathbb{R})$

• $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

• \vec{a} cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$

• $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

• Tích vô hướng 2 vectơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

• Hai vectơ vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

• Góc hai vectơ: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ vector \vec{u} trong các trường hợp sau:

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. b) $\vec{u} = 2025\vec{i} - 2024\vec{j}$. c) $\vec{u} = -\vec{i} - 5\vec{k}$. d) $\vec{u} = -2025\vec{k}$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Do đó:

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (2; 3; -1)$.

b) $\vec{u} = 2025\vec{i} - 2024\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (2025; 2024; 0)$.

c) $\vec{u} = -\vec{i} - 5\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (-1; 0; -5)$.

d) $\vec{u} = -2025\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (0; 0; -2025)$.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ vector \vec{u} theo các vector đơn vị $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{u} = (1; -3; -4)$. b) $\vec{u} = (-2; 3; 0)$. c) $\vec{u} = (0; -2024; 2025)$. d) $\vec{u} = (0; -2025; 0)$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Do đó:

a) $\vec{u} = (1; -3; -4) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

b) $\vec{u} = (-2; 3; 0) \Leftrightarrow \vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.

c) $\vec{u} = (0; -2024; 2025) \Leftrightarrow \vec{u} = -2024\vec{j} + 2025\vec{k}$.

d) $\vec{u} = (0; -2025; 0) \Leftrightarrow \vec{u} = -2025\vec{j}$.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ và vector $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$.

a) Tìm tọa độ của \vec{u} .

b) Biểu diễn \vec{v} theo các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

c) Tìm tọa độ của $\vec{a} = 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.

Lời giải

a) Vì $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ nên $\vec{u} = \left(-2; 3; \frac{3}{4}\right)$.

b) Vì $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$ nên $\vec{v} = 3\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} + 2\vec{k}$.

c) Biểu diễn \vec{a} qua các vector đơn vị:

$$\vec{a} = 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 2\left(-2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}\right) + \frac{1}{3}\left(3\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} + 2\vec{k}\right) = -3\vec{i} + \frac{67}{12}\vec{j} + \frac{13}{6}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(-3; \frac{67}{12}; \frac{13}{6}\right)$$

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -1; 5)$, $\vec{b} = (0; 3; -3)$, $\vec{c} = (1; 4; -2)$.

- Hai vectơ \vec{a} và \vec{b} có cùng phương không?
- Tìm tọa độ của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$
- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{0}{2} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{-3}{5}$ Do đó hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương.

b) Ta có: $3\vec{a} = 3(2; -1; 5) = (6; -3; 15)$; $-2\vec{b} = -2(0; 3; -3) = (0; -6; 6)$
 $\Rightarrow 3\vec{a} - 2\vec{b} = (6; 3; 9)$

c) Ta có $2\vec{a} = (4; -2; 10)$; $\frac{1}{5}\vec{b} = \left(0; \frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right)$; $3\vec{c} = (3; 12; -6)$.

Do đó $\vec{d} = \left(4 - 0 + 3; -2 - \frac{3}{5} + 12; 10 - \left(-\frac{3}{5}\right) + (-6)\right)$, hay $\vec{d} = \left(7; \frac{47}{5}; \frac{23}{5}\right)$.

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và $\vec{b} = (-2; 3; -2)$.

- Tính độ dài của vectơ \vec{a} .
- Tìm $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- Tìm (\vec{a}, \vec{b}) .

Lời giải

a) Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

b) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) = 3$

c) Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) \approx 75,96^\circ$.

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$.

- Tìm số thực m sao cho $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
- Tìm số thực m sao cho $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa \vec{u} , \vec{v} bằng 135° .

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \Leftrightarrow 3 - m = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Ta có: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$

c) $(\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9+m^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+9)} = m-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ 2m^2 + 6m + 18 = 0 \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases}$$

Vậy không có giá trị m nào thỏa yêu cầu bài toán

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$, $\vec{c} = (1; 4; -2)$.

- Tìm số thực m sao cho $\vec{a} \perp \vec{c}$.
- Tìm số thực n sao cho $|\vec{b}| = |\vec{c}|$.
- Tìm m, n để các vectơ \vec{a}, \vec{b} cùng hướng.

Lời giải

a) $\vec{a} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + (m-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Ta có:

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2n)^2} = \sqrt{4n^2 + 10}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

Mà $|\vec{b}| = |\vec{c}|$ nên $\sqrt{4n^2 + 10} = \sqrt{21} \Leftrightarrow 4n^2 = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{\sqrt{11}}{2} \\ n = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$

Vậy $n = -\frac{\sqrt{11}}{2}$ hoặc $n = \frac{\sqrt{11}}{2}$

c) \vec{a} và \vec{b} cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}$. Vậy $m = 7; n = -\frac{3}{4}$

DẠNG 2

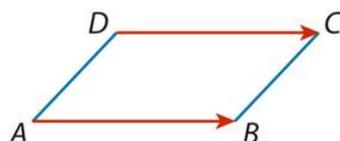
TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM

TÌM TỌA ĐỘ VECTƠ

ĐỘ DÀI ĐƯỜNG THẲNG

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

- $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \vec{AB}$ cùng phương $\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} = k \vec{AC} \quad (k \in \mathbb{R})$
- Ba điểm A, B, C không thẳng hàng $\Leftrightarrow \vec{AB}$ không cùng phương $\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} \neq k \vec{AC} \quad (k \in \mathbb{R})$
- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$.

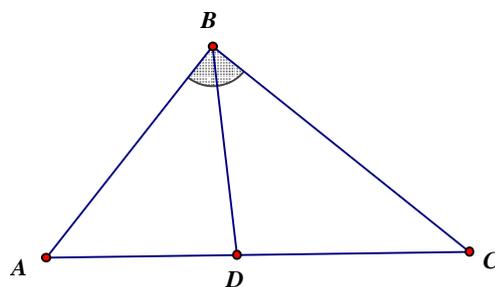


- $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$
- $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

- Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Khi đó ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \vec{DA} = \frac{BA}{BC} \vec{DC}$$



Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;-4)$.

- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Oz .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy) .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxz) .

Lời giải

- Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox là $(-2;0;0)$.
- Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy là $(0;1;0)$.
- Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Oz là $(0;0;-4)$.
- Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy) là $(-2;1;0)$.
- Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là $(0;1;-4)$.
- Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxz) là $(-2;0;-4)$.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$.

- Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua trục Ox .
- Tìm tọa độ điểm A_2 đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) .

Lời giải

- Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox là $B(3;0;0)$.

A_1 đối xứng với A qua trục Ox nên B là trung điểm đoạn thẳng AA_1

Do đó

$$x_{A_1} = 2x_B - x_A = 3$$

$$y_{A_1} = 2y_B - y_A = 0$$

$$z_{A_1} = 2z_B - z_A = 2$$

Vậy $A_1(3;0;2)$.

- Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là $C(0;0;-2)$.

A_2 đối xứng với A qua mặt phẳng nên C là trung điểm đoạn thẳng AA_2

Do đó

$$x_{A_2} = 2x_C - x_A = -3$$

$$y_{A_2} = 2y_C - y_A = 0$$

$$z_{A_2} = 2z_C - z_A = -2$$

Vậy $A_2(-3; 0; -2)$.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 2), B(1; 2; 3), C(2; 1; 2)$.

- Tìm tọa độ của các vector $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$.
- Biểu diễn các vector $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ theo các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- Tính các độ dài AB, BC, CA .

Lời giải

a) Ta có:

$$\overline{AB} = (1 - 2; 2 - 0; 3 - 2) = (-1; 2; 1)$$

$$\overline{BC} = (2 - 1; 1 - 2; 2 - 3) = (1; -1; -1)$$

$$\overline{CA} = (2 - 2; 0 - 1; 2 - 2) = (0; -1; 0)$$

b) Ta có:

$$\overline{AB} = (-1; 2; 1) \Leftrightarrow \overline{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overline{BC} = (1; -1; -1) \Leftrightarrow \overline{BC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\overline{CA} = (0; -1; 0) \Leftrightarrow \overline{CA} = -\vec{j}$$

c) Ta có:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$BC = |\overline{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$CA = |\overline{CA}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$$

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; -1; 1), B(0; 1; 2), C(1; 0; 1)$.

- Tìm tọa độ trung điểm M của AB .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

a) Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$M\left(\frac{1+0}{2}; \frac{-1+1}{2}; \frac{1+2}{2}\right) \text{ hay } M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right).$$

b) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{1+0+1}{3}; \frac{-1+1+0}{3}; \frac{1+2+1}{3}\right) \text{ hay } G\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right).$$

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng

$A(2; -1; 4), B(3; 5; -1), C(-1; 1; 2)$.

- Tìm tọa độ của \overline{AB} .
- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

d) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Vì $A(2; -1; 4)$ và $B(3; 5; -1)$ nên $\overrightarrow{AB} = (3 - 2; 5 - (-1); -1 - 4)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = (1; 6; -5)$.

b) $\overrightarrow{AB} = (1; 6; -5); \overrightarrow{AC} = (-3; 2; -2)$

Ta có $\frac{1}{-3} \neq \frac{6}{2} \neq \frac{-5}{-2}$ do đó hai vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} không cùng phương hay ba điểm A, B, C không thẳng

Suy ra ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác

c) G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3}$$

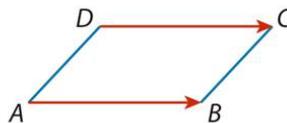
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{5}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{5}{3}$$

Vậy $G\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

d) A, B, C không thẳng hàng nên để $ABCD$ là hình bình hành thì điểm D phải thỏa mãn điều kiện

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$



Gọi $(x_D; y_D; z_D)$ là tọa độ điểm D .

Ta có: $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; 1 - y_D; 2 - z_D)$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 1 \\ 1 - y_D = 6 \\ 2 - z_D = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -5 \\ z_D = 7 \end{cases}$$

Vậy $D(-2; -5; 7)$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3), B(1; 2; 4), C(2; 3; 5)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) Tính $\cos \widehat{BAC}$.

a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-6; -1; 1); \overrightarrow{BC} = (1; 1; 1)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -6$$

b) Ta có:

$$\overline{AB} = (-6; -1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{38}$$

$$\overline{AC} = (-5; 0; 2) \Rightarrow AC = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{30 + 0 + 2}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{38 \cdot 29}}$$

a) Ta có $\overline{BC} = (1; 1; 1)$.

Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A .

$$\text{Suy ra } \overline{BH} = (x - 1; y - 2; z - 4).$$

\overline{BH} cùng phương với \overline{BC} , do đó $x - 1 = t; y - 2 = t; z - 4 = t$, suy ra $H(1 + t; 2 + t; 4 + t)$.

$$\text{Ta có } \overline{AH} = (x_H - x_A; y_H - y_A; z_H - z_A) = (t - 6; t - 1; t + 1).$$

$$\overline{AH} \perp \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow t - 6 + t - 1 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2.$$

Vậy $H(3; 4; 6)$.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $A(5; -3; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(4; 1; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\overline{AB} + \overline{AC} - 5\overline{BC}$

b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overline{NA} = -\overline{NB}$

Lời giải

a) Ta có $\overline{AB} = (-3; 4; -1)$; $\overline{AC} = (-1; 4; 2)$; $\overline{BC} = (2; 0; 3) \Rightarrow \vec{u} = (-17; 12; -15)$

b) Gọi $N(x; y; z)$ khi đó $\overline{NA} = (5 - x; -3 - y; -z)$; $\overline{NB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$

$$2\overline{NA} = -\overline{NB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5 - x) = -2 + x \\ 2(-3 - y) = -1 + y \\ -2z = 1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(4; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Bài 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$.

a) Tìm tọa độ điểm Q thuộc trục Ox sao cho $AQ = 3$.

b) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng Oxz sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{AM} = 3\overline{AB}$.

Lời giải

a) $Q \in Ox$ nên $Q(x; 0; 0)$.

Ta có:

$$AQ = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2 + (0+2)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy có hai điểm Q cần tìm là $Q(-1;0;0)$ và $Q(1;0;0)$.

b) $N \in (Oxz)$ nên $N(x;0;z)$.

Ta có: $\overline{AB} = (3; -2; 3)$, $\overline{AN} = (x; -1; z+2)$

Ba điểm A, B, N thẳng hàng nên hai $\overline{AN}, \overline{AB}$ cùng phương hay $\overline{AN} = k\overline{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ -1 = -2k \\ z + 2 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$$

Vậy $N\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$

c) Gọi $M(x; y; z)$.

Ta có: $\overline{AM} = (x; y-1; z+2)$; $\overline{AB} = (3; -2; 3)$.

$$\overline{AM} = 3\overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y - 1 = -6 \\ z + 2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}$$

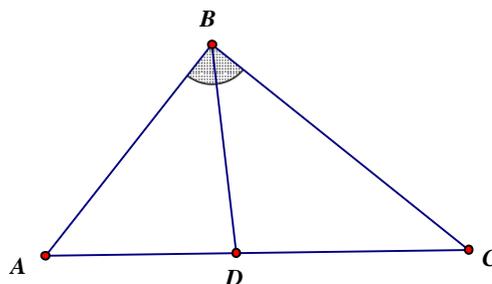
Vậy $M(9; -5; 7)$.

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC .

Lời giải



a) G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{8}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{7}{3}$$

Vậy $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

b) Ta có:

$$\overline{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overline{BA}| = \sqrt{26}$$

$$\overline{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overline{BC}| = 2\sqrt{26}$$

Gọi $D(x; y; z)$ là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

Ta có: $\frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}; \overline{DC} = (-4 - x; 7 - y; 5 - z); \overline{DA} = (1 - x; 2 - y; -1 - z)$

$$\text{Mà: } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overline{DC} = -2\overline{DA} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - x = -2(1 - x) \\ -7 - y = -2(2 - y) \\ 5 - z = -2(-1 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

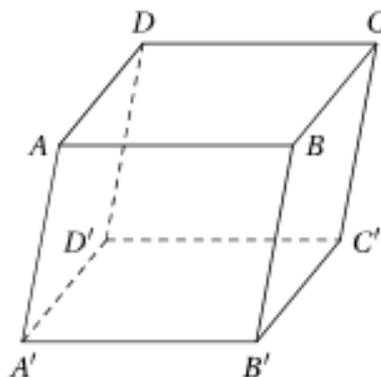
Vậy tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$.

a) Tính tọa độ các đỉnh của hình hộp.

b) Tính $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

Lời giải



a) Gọi $(x_C; y_C; z_C)$ là tọa độ điểm C .

Ta có: $\overline{AB} = (1; 1; 1)$; $\overline{DC} = (x_C - 1; y_C + 1; z_C - 1)$

$$ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = 1 \\ y_C + 1 = 1 \\ z_C - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2; 0; 2)$$

Tương tự như trên ta tính được tọa độ các điểm A', B', D'

$$ACC'A' \text{ là hình bình hành nên } \overline{AC} = \overline{A'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4 - x_{A'} \\ 0 = 5 - y_{A'} \\ 1 = -5 - z_{A'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 3 \\ y_{A'} = 5 \\ z_{A'} = -6 \end{cases} \Rightarrow A'(3; 5; -6)$$

$$BCC'B' \text{ là hình bình hành nên } \overline{BC} = \overline{B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 - x_{B'} \\ -1 = 5 - y_{B'} \\ 0 = -5 - z_{B'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 4 \\ y_{B'} = 6 \\ z_{B'} = -5 \end{cases} \Rightarrow B'(4; 6; -5)$$

$$DCC'D' \text{ là hình bình hành nên } \overline{DC} = \overline{D'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 - x_{D'} \\ 1 = -y_{D'} \\ 1 = 2 - z_{D'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} = 1 \\ y_{D'} = -1 \\ z_{D'} = 1 \end{cases} \Rightarrow D'(1; -1; 1)$$

b) $\overline{AB} = (1; 1; 1), \overline{AD} = (0; -1; 0) \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AD} = -1$

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Bài 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(-2024; 2025; 2026)$.

- a) Tìm điểm $M_1 \in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM_1 ngắn nhất.
 b) Tìm điểm $M_2 \in (Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM_2 ngắn nhất.

Lời giải

- a) MM_1 ngắn nhất khi điểm M_1 là hình chiếu điểm M trên trục $Oz \Rightarrow M_1(0; 0; 2026)$
 b) MM_2 ngắn nhất khi điểm M_2 là hình chiếu điểm M trên $(Oxy) \Rightarrow M_2(-2024; 2025; 0)$

Bài 2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 2; -3), B(0; 2; 1), C(-1; 2; 1)$.

- a) Tìm $M \in Oy$ sao cho biểu thức $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ để đạt giá trị nhỏ nhất.
 b) Cho điểm $M(2; 1; a)$. Tìm a sao cho biểu thức $T = |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ để đạt giá trị nhỏ nhất.
 c) Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Vì $M \in Oy$ nên $M(0; y; 0)$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (-1; 2 - y; -3); \overrightarrow{MB} = (0; 2 - y; 1)$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (-1; 4 - 2y; -2)$

$$\Rightarrow T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \sqrt{(-1)^2 + (4 - 2y)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4y^2 - 16y + 21} = \sqrt{4(y - 2)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow T_{\min} = \sqrt{5} \text{ khi } y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

Vậy $M(0; 2; 0)$

b) Ta có:

$\overrightarrow{MA} = (-3; 1; -3 - a)$

$\overrightarrow{MB} = (-2; 1; 1 - a) \Rightarrow -3\overrightarrow{MB} = (6; -3; -3 + 3a)$

$\overrightarrow{MC} = (-3; 1; 1 - a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (0; -1; -5 + a)$

$$\Rightarrow T = |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-5 + a)^2} = \sqrt{(a - 5)^2 + 1} \geq 1$$

$$\Rightarrow T_{\min} = \sqrt{5} \text{ khi } a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5$$

Vậy $M(2; 1; 5)$

c) Gọi $I(x; y; z)$ là điểm sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{IA} = (-1 - x; 2 - y; -3 - z)$$

$$2\overrightarrow{IB} = (-2x; 4 - 2y; 2 - 2z)$$

$$\overrightarrow{IC} = (-1 - x; 2 - y; 1 - z)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = (-2 - 4x; 8 - 4y; -4z)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \text{ nên } \begin{cases} -2 - 4x = 0 \\ 8 - 4y = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; 2; 0\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 4\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 \\ &= 4MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do } IA^2 + 2IB^2 + IC^2 \text{ không đổi nên } T_{\min} \Leftrightarrow 4MI_{\min}^2 \Leftrightarrow M \equiv I \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 2; 0\right)$$

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector \vec{a} là

- A.** $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(-1; 2; -3).$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ \vec{u} là

- A.** $(-2; 3; 1)$. **B.** $(2; 3; -1)$. **C.** $(2; -3; -1)$. **D.** $(2; 3; 1)$.

Lời giải

Chọn B.

Theo định nghĩa ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Do đó, } \vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (2; 3; -1).$$

Câu 3. Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector \vec{a} là:

- A.** $\vec{a}(-1; 2; -3)$. **B.** $\vec{a}(2; -3; -1)$. **C.** $\vec{a}(-3; 2; -1)$. **D.** $\vec{a}(2; -1; -3)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(x; y; z) \text{ nên } \vec{a}(-1; 2; -3).$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 3; 5)$. Tọa độ của vectơ \overline{OA} là:

- A.** $(-2; 3; 5)$. **B.** $(2; -3; 5)$. **C.** $(-2; -3; 5)$. **D.** $(2; -3; -5)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } \overline{OA} = (x_A; y_A; z_A) = (-2; 3; 5)$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ \overline{AB} có tọa độ là

- A.** $(1; 2; 3)$ **B.** $(-1; -2; 3)$ **C.** $(3; 5; 1)$ **D.** $(3; 4; 1)$

Lời giải

Chọn A

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1; 2; 3)$$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overline{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

- A. $B(2; 5; 0)$. B. $B(0; -1; -2)$. C. $B(0; 1; 2)$. D. $B(-2; -5; 0)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $B(x; y; z)$

$$\text{Có } \overline{AB} = (1; 3; 1) = (x-1; y-2; z+1) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 0)$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A. $(0; 5; 2)$. B. $(0; 5; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là $(3; 0; 0)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(3; 0; -1)$. B. $(0; 1; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0; 1; 0)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(3; -1; 0)$. B. $(0; 0; 1)$. C. $(0; -1; 0)$. D. $(3; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0; 0; 1)$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(0; 2; -3)$. B. $(1; 0; -3)$. C. $(1; 2; 0)$. D. $(1; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn C.

Hình chiếu của điểm $A(a; b; c)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(a; b; 0)$ nên hình chiếu của điểm $A(1; 2; -3)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $A'(1; 2; 0)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

- A. $(0;1;0)$. B. $(2;1;0)$. C. $(0;1;-1)$. D. $(2;0;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(2;1;-1)$ lên mặt phẳng (Oxz) là điểm có tọa độ $(2;0;-1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3;0;0)$ B. $N(0;-1;1)$ C. $P(0;-1;0)$ D. $Q(0;0;1)$

Lời giải

Chọn B

Khi chiếu vuông góc một điểm trong không gian lên mặt phẳng (Oyz) , ta giữ lại các thành phần tung độ và cao độ nên hình chiếu của $A(3;-1;1)$ lên (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A. $M(3;4;0)$. B. $P(-2;0;3)$. C. $Q(2;0;0)$. D. $N(0;4;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là $x=0 \Rightarrow N(0;4;-1) \in (Oyz)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;6)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng (Oyz) là $M'(0;5;6)$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x; y; z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; y; -z)$.
B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x; y; -z)$.
C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x; y; -z)$.
D. Nếu M' đối xứng với M qua góc tọa độ O thì $M'(2x; 2y; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; -y; z)$. Do đó phương án A sai.

Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(-x; y; -z)$. Do đó phương án B sai.

Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(-x; -y; -z)$. Do đó phương án D sai.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A. $(0; 2; 3)$. B. $(-1; -2; -3)$. C. $(-1; 2; 3)$. D. $(1; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(0; 2; 3)$

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-1; 2; 3)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A. $A'(2; 3; 5)$. B. $A'(2; -3; -5)$. C. $A'(-2; -3; 5)$. D. $A'(-2; -3; -5)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2; -3; 5)$ lên Oy . Suy ra $H(0; -3; 0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA' .

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2; -3; -5).$$

Câu 18. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; -\sqrt{2}; \sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Ox$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(-1; 0; 0)$. B. $M'(1; 0; 0)$. C. $M'(1; 0; \sqrt{3})$. D. $M'(1; -\sqrt{2}; 0)$.

Lời giải

Chọn B.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục $Ox \Rightarrow M'(1; 0; 0)$

Câu 19. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(\sqrt{2}; 0; \sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oy$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(0; -\sqrt{2}; 0)$. B. $M'(\sqrt{2}; 0; 0)$. C. $M'(0; 0; \sqrt{3})$. D. $M'(0; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn D.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục $Oy \Rightarrow M'(0;0;0)$

Câu 20. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;-\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Oz$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1;0;-\sqrt{3})$. B. $M'(0;2;-\sqrt{3})$. C. $M'(0;0;-\sqrt{3})$. D. $M'(0;0;\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn C.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên trục $Oz \Rightarrow M'(0;0;-\sqrt{3})$

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;2)$. Tìm điểm $A' \in (Oxy)$ sao cho độ dài đoạn thẳng AA' ngắn nhất.

- A. $A'(-1;1;0)$. B. $A'(1;1;0)$. C. $A'(2;2;0)$. D. $A'(2;-1;2)$.

Lời giải

Chọn B.

AA' ngắn nhất khi điểm A' là hình chiếu điểm A trên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A'(1;1;0)$

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5})$. Tìm điểm $M' \in (Oxz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1;1+\sqrt{2};2-\sqrt{5})$. B. $M'(1;1-\sqrt{2};0)$.
C. $M'(1;0;2+\sqrt{5})$. D. $M'(0;1-\sqrt{2};2+\sqrt{5})$.

Lời giải

Chọn C.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên mặt phẳng $(Oxz) \Rightarrow M'(1;0;2+\sqrt{5})$

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1+\sqrt{2};2;1-\sqrt{2})$. Tìm điểm $M' \in (Oyz)$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất.

- A. $M'(1+\sqrt{2};0;1-\sqrt{2})$. B. $M'(0;2;1-\sqrt{2})$.
C. $M'(0;-2;1-\sqrt{2})$. D. $M'(0;-2;1+\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn B.

MM' ngắn nhất khi điểm M' là hình chiếu điểm M trên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow M'(0;2;1-\sqrt{2})$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-4;-2;9)$. B. $D(-4;2;9)$. C. $D(4;-2;9)$. D. $D(4;2;-9)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x; y; z)$.

$$\text{Để } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3 - x; 1 - y; 2 - z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9).$$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

A. $OA = \sqrt{5}$

B. $OA = 5$

C. $OA = 3$

D. $OA = 9$

Lời giải

Chọn C

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .

A. 26.

B. 22.

C. $\sqrt{26}$.

D. $\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overline{AB} = (2; 3; -3) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(3; 1; 0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4; 2; 2)$.

B. $(2; 1; 1)$.

C. $(2; 0; -2)$.

D. $(1; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } AB \text{ ta có: } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$

Vậy $M(2; 1; 1)$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

A. $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$.

B. $B(-4; 9; 8)$.

C. $B(5; 3; -7)$.

D. $B(5; -3; -7)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $B(x_B; y_B; z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \\ -2 = \frac{3 + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}$$

Vậy $B(5; -3; -7)$.

Câu 29. Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3), B(-1; 2; 5), C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A.** $G(0; 0; 3)$. **B.** $G(0; 0; 9)$. **C.** $G(-1; 0; 3)$. **D.** $G(0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC bằng:
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 - 1 + 0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2 + 2 + 0}{3} = 0 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3 + 5 + 1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0; 0; 3)$$

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2)$ và $D(1; -1; 1)$. Tọa độ điểm C là

- A.** $(2; 0; 2)$. **B.** $(2; 2; 2)$. **C.** $(2; -2; 2)$. **D.** $(0; -2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ điểm C là $(x; y; z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DC} = (x - 1; y + 1; z - 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$

Suy ra
$$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y + 1 = 1 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C là $(2; 0; 2)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; -1; -2)$ và trọng tâm $G(2; 1; -3)$. Tọa độ của vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

- A.** $(3; 6; 3)$. **B.** $(3; 6; -3)$. **C.** $(3; -3; 6)$. **D.** $(3; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là trung điểm cạnh BC . Ta có: $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} = 2 \cdot \frac{3}{2} \vec{AG} = 3\vec{AG} = (3; 6; -3)$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; -4; 2), B(2; 1; -3), C(3; 0; -2)$ và $D(2; -5; -1)$. Điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ có tọa độ là:

- A. $G(2; -1; -1)$. B. $G(2; -2; -1)$. C. $G(0; -1; -1)$. D. $G(6; -3; -3)$.

Lời giải

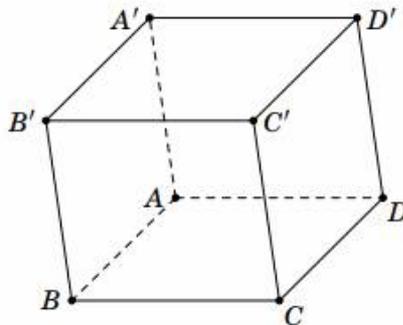
Chọn B

Ta có: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GO} + \vec{OA} + \vec{GO} + \vec{OB} + \vec{GO} + \vec{OC} + \vec{GO} + \vec{OD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} \Leftrightarrow \vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) = 2 \\ y_G = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) = -2. \text{ Vậy } G(2; -2; -1). \\ z_G = \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) = -1 \end{cases}$$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1), C'(4; 5; -5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.



- A. $A'(4; 6; -5)$. B. $A'(2; 0; 2)$. C. $A'(3; 5; -6)$. D. $A'(3; 4; -6)$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$.

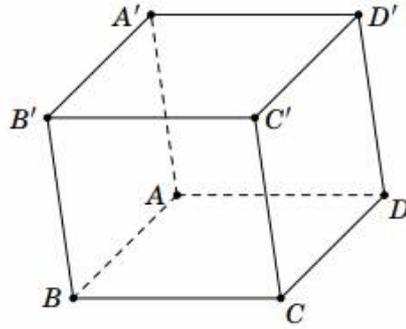
Suy ra $\vec{AA'} = \vec{AC'} - \vec{AB} - \vec{AD}$.

Lại có: $\vec{AC'} = (3; 5; -6), \vec{AB} = (1; 1; 1), \vec{AD} = (0; -1; 0)$.

Do đó: $\vec{AA'} = (2; 5; -7)$.

Suy ra $A'(3; 5; -6)$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3; 0; 0), B(0; 2; 0), D(0; 0; 1), A'(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm C' .



- A. $C'(10;4;4)$. B. $C'(-13;4;4)$. C. $C'(13;4;4)$. D. $C'(7;4;4)$.

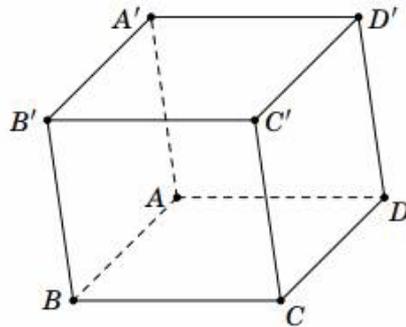
Lời giải

Chọn C

Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (3; 0; 1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4; 2; 3)$.

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10; 4; 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13; 4; 4).$$

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(-1; 4; -7)$ và $D'(6; 8; 10)$. Tọa độ điểm B' là



- A. $B'(8; 4; 10)$. B. $B'(6; 12; 0)$. C. $B'(10; 8; 6)$. D. $B'(13; 0; 17)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $D(a; b; c)$, $B'(a'; b'; c')$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{DD'} = (9; 0; 17)$, $\overrightarrow{BB'} = (a' - 4; b'; c')$.

$$\text{Do } ABCD.A'B'C'D' \text{ là hình hộp nên } \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 0 \\ c' = 17 \end{cases}.$$

Vậy $B'(13;0;17)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; -4; 0)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 1)$. Vector $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

- A. $(-2; -10; 3)$. B. $(-2; -6; 3)$. C. $(-4; -8; 4)$. D. $(-2; -10; -3)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $3\vec{v} = (-3; -6; 3)$.

Do đó $\vec{u} + 3\vec{v} = (-2; -10; 3)$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ vector $\vec{u} - \vec{v}$ là:

- A. $(3; 4; -3)$. B. $(-1; 2; -3)$. C. $(-1; 2; -1)$. D. $(1; -2; 1)$.

Lời giải

Chọn C.

$\vec{u} - \vec{v} = (-1; 2; -1)$

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vector $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(3; 4; 1)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(1; 2; 3)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (2 - 1; 3 - 1; 2 + 1) = (1; 2; 3)$.

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}(1; 2; 3); \vec{b}(2; 2; -1); \vec{c}(4; 0; -4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A. $\vec{d}(-7; 0; -4)$ B. $\vec{d}(-7; 0; 4)$ C. $\vec{d}(7; 0; -4)$ D. $\vec{d}(7; 0; 4)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1 - 2 + 2 \cdot 4; 2 - 2 + 2 \cdot 0; 3 + 1 + 2 \cdot (-4)) = (7; 0; -4)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $2\vec{a} = (4; -6; 6)$, $3\vec{b} = (0; 6; -3)$, $-2\vec{c} = (-6; 2; -10) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm

tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Lời giải

Chọn B.

Có $2\vec{a} = (4; -6; 6)$; $3\vec{b} = (0; 6; -3)$; $-2\vec{c} = (-6; 2; -10)$.

Khi đó: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ

của vector $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- A. $\vec{a} = (4; 1; -1)$. B. $\vec{a} = (3; 1; -4)$. C. $\vec{a} = (0; 1; -1)$. D. $\vec{a} = (4; 1; -5)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $2\vec{y} = (2; 0; -2)$.

$\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} = (2 + 2; 1 + 0; -3 - 2) = (4; 1; -5)$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính

tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. B. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$. C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. D. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Do đó, $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; 7; 2)$. B. $(1; 5; 2)$. C. $(3; 7; 2)$. D. $(1; 7; 3)$.

Lời giải

Chọn A.

Có $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, gọi $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2.1 + (-1) = 1 \\ c_2 = 2.2 + 3 = 7 \\ c_3 = 2.1 + 0 = 2 \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = (1; 7; 2)$

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2; 2; 0)$, $\vec{b}(2; 2; 0)$, $\vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

A. 6.

B. 11.

C. $2\sqrt{11}$.

D. $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2; 6; 2)$.

Vậy $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2\sqrt{11}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

Khi đó $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ và $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$

Do đó $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m , n để các vectơ \vec{a} , \vec{b} cùng phương.

A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$.

B. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

C. $m = 4; n = -3$.

D. $m = 1; n = 0$.

Lời giải

Chọn A.

Các vectơ \vec{a} , \vec{b} cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 6 \\ 3 = 2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A , B , M thẳng hàng là

A. $M(4; -5; 0)$.

B. $M(2; -3; 0)$.

C. $M(0; 0; 1)$.

D. $M(4; 5; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$; $\overline{AB} = (-2; 3; 1)$; $\overline{AM} = (x-2; y+2; -1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AM} cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$.

Vậy $M(4; -5; 0)$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$.

Câu 50. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1; 3)$.

Do đó, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Câu 51. Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.

Lời giải

Chọn C.

$\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11$.

Câu 52. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \Leftrightarrow 3 - m = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector \vec{u} và \vec{v} tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$.

Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$

- A. $\sqrt{19}$. B. -5 . C. 7 . D. $\sqrt{39}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $(|\vec{u} + \vec{v}|)^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2$

$$= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5^2 = 19.$$

Suy ra $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}.$

Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}.$

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector \vec{i} và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. $120^\circ.$ B. $60^\circ.$ C. $150^\circ.$ D. $30^\circ.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0).$

Vậy: $\cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa \vec{a} và \vec{b} bằng

- A. $\frac{3}{13}.$ B. $\frac{5}{6}.$ C. $-\frac{5}{6}.$ D. $-\frac{3}{13}.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{-3}{13}.$

Câu 57. Cho $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; -1; 0)$, góc giữa hai vectơ \vec{u} và \vec{v} là

- A. $120^\circ.$ B. $45^\circ.$ C. $135^\circ.$ D. $60^\circ.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ.$

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

- A. $m = -5$. B. $m = 5$. C. $m = 1$. D. $m = -2$

Lời giải

Chọn B.

$$(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa \vec{u} , \vec{v} bằng 45° .

- A. $m = 2$. B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. C. $m = 2 - \sqrt{6}$. D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.

$$+ (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2 + 1)} = 1 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ 3m^2 + 3 = 1 - 4m + 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

Câu 60. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

$$\text{Khi đó: } \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$ $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc \widehat{BAC} là

- A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. B. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. D. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}(1; 5; -2)$; $\overrightarrow{AC}(5; 4; -1)$.

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{5 + 20 + 2}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 2; 3)$; $B(-1; 2; 1)$; $C(3; -1; -2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. -6.

B. -14.

C. 14.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overline{AB} = (-2; 0; -2); \overline{AC} = (2; -3; -5) \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5; 3; -1), B(2; 3; -4), C(3; 1; -2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

A. $9 - 2\sqrt{6}$.

B. $9 - 3\sqrt{6}$.

C. $9 + 3\sqrt{6}$.

D. $9 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AC^2 + BC^2 = 9 + 9 = AB^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C .

$$\text{Suy ra: } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}CA \cdot CB}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 9 - 3\sqrt{6}$$

Câu 64. Cho bốn điểm $S(1, 2, 3); A(2, 2, 3); B(1, 3, 3); C(1, 2, 4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

A. $(5; 9; 13)$.

B. $(\frac{5}{3}; 3; \frac{13}{3})$.

C. $(1; \frac{7}{4}; \frac{9}{4})$.

D. $(\frac{5}{4}; \frac{9}{4}; \frac{13}{4})$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $G(x, y, z)$ là trọng tâm của hình chóp $SABC$ suy ra

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C + x_S}{4} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C + y_S}{4} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C + z_S}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+1+1+1}{4} = \frac{5}{4} \\ y = \frac{2+3+2+2}{4} = \frac{9}{4} \\ z = \frac{3+3+4+3}{4} = \frac{13}{4} \end{cases}$$

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1; 2; -3), C(7; 4; -2)$. Tìm điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overline{CE} = 2\overline{EB}$.

A. $(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3})$

B. $(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3})$.

C. $(3; 3; -\frac{8}{3})$

D. $(1; 2; \frac{1}{3})$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\overline{CE} = (x - 7; y - 4; z + 2); 2\overline{EB} = (2 - 2x; 4 - 2y; -6 - 2z)$

$$\overline{CE} = 2\overline{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 2-2x \\ y-4 = 4-2y \\ z+2 = -6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{8}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$ B. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$
 C. $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$ D. $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $D(x; 0; 0) \in Ox$

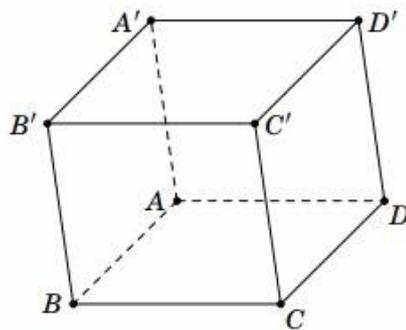
$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$; $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

- A. $|a|$. B. $2|a|$. C. $3|a|$. D. $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overline{AB} = (a; 0; 0)$; $\overline{AD} = (0; 2a; 0)$; $\overline{AA'} = (0; 0; 2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'} = \overline{AC'} \Leftrightarrow \overline{AC'} = (a; 2a; 2a)$.

Suy ra $AC = |\overline{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3; 0; 8)$, $D(-5; -4; 0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overline{CA} + \overline{CB}|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$.

B. $6\sqrt{10}$.

C. $10\sqrt{6}$.

D. $5\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overline{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow BD = 12 \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow MC = 3\sqrt{10}$.

$$|\overline{CA} + \overline{CB}| = |2\overline{CM}| = 2CM = 6\sqrt{10}.$$

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a+2b+c$?

A. 1.

B. 3.

C. 6.

D. -9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overline{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

\Rightarrow tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a+2b+c = 3.$$

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overline{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2; 2; 0)$ và $C(4; 1; -1)$.

Trên mặt phẳng (Oxz) , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C .

A. $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $N\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$.

C. $P\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$.

D. $Q\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } A(2; 2; 2) \text{ và } PA = PB = PC = \frac{3\sqrt{21}}{4}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

c) $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

d) \vec{a} và \vec{b} cùng phương

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

a) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

a) $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

a) $\vec{a} = 2(1; -1; -2) \neq \vec{b} = (1; -1; 1)$. Suy ra \vec{a} và \vec{b} không cùng phương.

Câu 72. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2\sqrt{91}}{91}$

d) $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

a) $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1} = \sqrt{14}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 15$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{4\sqrt{91}}{91}$

d) Đặt: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, với $m, n, p \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m \cdot (2; 3; 1) + n \cdot (-1; 5; 2) + p \cdot (4; -1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases} .$$

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 73. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

a) $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

b) $\vec{b} - \vec{c} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$

c) $3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} = (11; 22; 18)$

d) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $\vec{a} + \vec{b} = (2; -3; 2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

b) $\vec{b} - \vec{c} = (-1; -5; -3) \Rightarrow \vec{b} - \vec{c} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$

c) $3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} = (11; 22; 18)$

d) Ta có: $\frac{1}{2}\vec{a} = \left(1; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $\frac{4}{3}\vec{b} = \left(0; \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$, $2\vec{c} = (2; 14; 4)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$$

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-4; -2; 6)$,

$\vec{c} = (m-1; 2; 0)$

a) \vec{a} cùng hướng với \vec{b} .

b) $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

d) Nếu $\vec{b} \perp \vec{c}$ thì $m = 1$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $\vec{a} = (2; 1; -3)$, $\vec{b} = -2(2; 1; -3) \Rightarrow \vec{b} = -2\vec{a}$ suy ra vector \vec{a} ngược hướng với vector \vec{b}

b) $\vec{b} = -2\vec{a} \Rightarrow |\vec{b}| = 2|\vec{a}|.$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 6 = -28 \neq 0.$

d) $\vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + (-2) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Câu 75. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4), \vec{b} = (-1; 2; 3).$

a) $|\vec{b}| = 4$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 17$

c) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

d) Biết vector $\vec{c} = (x; y; 1)$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4), \vec{b} = (-1; 2; 3).$ Khi đó $x + y = \frac{6}{5}.$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 17$

c) $\vec{a} = (1; 3; 4) \Rightarrow \vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

d) ta có vector $\vec{c} = (x; y; 1)$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4), \vec{b} = (-1; 2; 3).$ nên

$$\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 3y + 4 \cdot 1 = 0 \\ -1x + 2y + 3 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = -\frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \left(\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$$

$\Rightarrow x + y = -\frac{6}{5}$

Câu 76. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (3; 0; 1), \vec{b} = (1; -1; -2), \vec{c} = (2; 1; -1).$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1.$

b) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{15}}{30}$

d) Cho $\vec{d} = (1; 7; -3),$ khi đó $\vec{d} \perp \vec{a}.$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 1$

b) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 3$

c) Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}; |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{30}$$

d) Ta có $\vec{d} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{a}$

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$.

a) $|\overline{AB}| = 4$

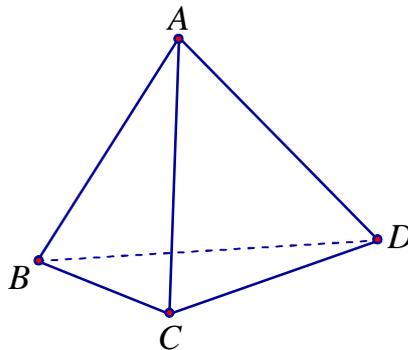
b) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$.

c) $AB \perp AC$

d) $\cos(\overline{AB}, \overline{BD}) = 1$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI



a) Ta có $\overline{AB} = (0; 0; -4) \Rightarrow |\overline{AB}| = 4$

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{0+0+1}{3}; \frac{0+0+0}{3}; \frac{3-1-1}{3}\right)$ hay $\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$

c) Ta có $\overline{AB} = (0; 0; -4)$, $\overline{AC} = (1; 0; -4) \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16 \neq 0 \Rightarrow AB$ và AC không vuông góc.

d) Ta có $\overline{AB} = (0; 0; -4)$, $\overline{BD} = (0; 1; 0)$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BD} = 0 \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BD} \Rightarrow (\overline{AB}, \overline{BD}) = 90^\circ \Rightarrow \cos(\overline{AB}, \overline{BD}) = 0$$

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1; 1; 2)$, $B(1; 0; 3)$, $C(0; 2; -2)$.

a) $\overline{BC} = (-1; 2; -5)$

b) $\vec{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

c) Tọa độ tâm hình bình hành là $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.

d) $\vec{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) $\vec{BC} = (-1; 2; -5)$

b) $\vec{AB} = (2; -1; 1) \Rightarrow \vec{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

c) Tọa độ tâm hình bình hành là trung điểm AC hay $\left(\frac{-1+0}{2}; \frac{1+2}{2}; \frac{2-2}{2}\right)$ hay $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$

d) Gọi tọa độ điểm D là $(x; y; z)$

$\vec{AB} = (2; -1; 1)$

$\vec{DC} = (-x; 2 - y; -2 - z)$

Vì ABCD là hình bình hành nên $\vec{DC} = \vec{AB}$

Suy ra $\begin{cases} -x = 2 \\ 2 - y = -1 \\ -2 - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$. $A(-1; 1; 2), B(1; 0; 3), C(0; 2; -2)$

$\Rightarrow \vec{AD} = (-1; 2; -5) \Rightarrow \vec{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$

Câu 79. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(3; 5; -1), B(7; x; 1), C(9; 2; y)$.

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.

b) Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A thì $x = -1, y = 13$.

d) Tích vô hướng của $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3x + 2y + 41$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có $\vec{AB} = (4; x - 5; 2), \vec{AC} = (6; -3; y + 1)$

$$\text{Đề ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overline{AB} = k \cdot \overline{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k \cdot 6 \\ x - 5 = k(-3) \\ 2 = k(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $x + y = 5$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} \frac{3+7+9}{3} = \frac{19}{3} \\ \frac{5+x+2}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{-1+1+y}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

c) Ta có $\overline{AB} = (4; x - 5; 2)$, $\overline{AC} = (6; -3; y + 1)$

Khi đó: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24 + (x - 5)(-3) + 2(y + 1)$. Với $\begin{cases} x = 13 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$

d) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24 + (x - 5)(-3) + 2(y + 1) = -3x + 2y + 41$.

Câu 80. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;2;0)$, $D'(-1;3;5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.

a) Tọa độ $D(0;2;0)$.

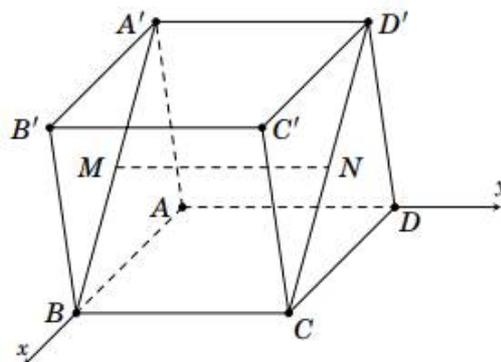
b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.

c) Tọa độ $\overline{MN} = (-1;1;0)$.

d) $|\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CC'}| = \sqrt{29}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI



a) Theo qui tắc hình bình hành, ta có $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AB} = (0;2;0) \Rightarrow D(0;2;0)$.

b) Ta có $\overline{AA'} = \overline{DD'} = (-1;1;5) \Rightarrow A'(-1;1;5)$.

c) Theo hình vẽ $\overline{MN} = \overline{BC} = (0; 2; 0)$.

d) Ta có $\overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'} = (0; 3; 5)$.

$$\text{Xét } |\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CC'}| = |\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'}| = |\overline{AC'}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2; 1; 0), C(0; 3; 0), C'(-1; 2; 1), D'(0; -2; 0)$.

a) Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1; 0; -1), B'(0; 4; 2)$.

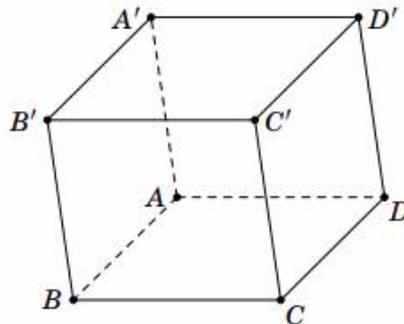
b) Tọa độ các điểm B, D là $B(1; 5; 1), D(1; -1; -1)$.

c) Tọa độ vector \overline{AB} là $\overline{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

d) Tọa độ vector \overline{AB} là $\overline{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG



Gọi tọa độ điểm A' là $(x; y; z)$

$$\overline{A'C'} = (-1 - x; 2 - y; 1 - z)$$

$$\overline{AC} = (-2; 2; 0)$$

Vì $A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overline{A'C'} = \overline{AC}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -1 - x = -2 \\ 2 - y = 2 \\ 1 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 0; 1)$$

Làm tương tự ta có: $B'(0; 4; 2); B(1; 5; 1); D(1; -1; -1)$

$$\overline{AB} = (1; 4; 1) \Rightarrow \overline{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overline{B'D} = (1; -5; -3) \Rightarrow \overline{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

Câu 82. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1; -3; 3); B(2; -4; 5), C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của nó.

a) Gọi M là trung điểm đoạn thẳng AB , khi đó tọa độ điểm M là $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

b) Tọa độ vector là $\overline{AB} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

c) $a + b + c = -2$

d) $\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = -\frac{14\sqrt{57}}{57}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) M là trung điểm đoạn thẳng AB nên $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

b) $\overline{AB} = (1; -1; 2) \Rightarrow \overline{AB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

c) $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm tam giác ABC nên
$$\begin{cases} 1 = \frac{1+2+a}{3} \\ c = \frac{-3-4-2}{3} \\ 3 = \frac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy: $a + b + c = -2$

d) $\overline{AB} = (1; -1; 2), \overline{AC} = (-1; 1; -6)$

$$\Rightarrow \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-6)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-6)^2}} = -\frac{7\sqrt{57}}{57}$$

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; 1; -2), B(2; -1; 3), C(1; 3; -2), D(5; -1; 8)$.

a) $\overline{AB} = (2; -2; 5)$

b) $AC = \sqrt{5}$

c) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng.

d) Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) $\overline{AB} = (2; -2; 5)$

b) $\overline{AC} = (1; 2; 0) \Rightarrow AC = \sqrt{5}$

c) Ta có: $\overline{AB} = (2; -2; 5), \overline{AC} = (1; 2; 0)$. Vì $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-2}$ nên hai vector $\overline{AB}, \overline{AC}$ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

d) Ta có $\overrightarrow{CD} = (4; -4; 10)$. Xét tọa độ của hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$, ta thấy: $\frac{4}{2} = \frac{-4}{-2} = \frac{10}{5}$.

Các đẳng thức trên chứng tỏ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} là hai vector cùng phương. Suy ra AB và CD song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này không thể trùng nhau (do A, B, C không thẳng hàng). Vậy $AB // CD$.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 3; -2), B(3; 2; -4), C(2; 1; 0), D(3; 5; -1)$.

a) $AB = 3$

b) $AB \perp CD$.

c) Tam giác BCD là tam giác đều.

d) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $\overrightarrow{AB} = (2; -1; -2) \Rightarrow AB = 3$

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -1; -2), \overrightarrow{CD} = (1; 4; -1)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB \perp CD$.

b) Tính ba cạnh của tam giác BCD :

$$\overrightarrow{CD} = (1; 4; -1) \Rightarrow CD = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-3)^2 + (1-2)^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(3-3)^2 + (5-2)^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Suy ra BCD là tam giác đều.

c) Ta có $\widehat{AMD} = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD})$.

Vì M là trung điểm của BC nên $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -2\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ và $\overrightarrow{MD} = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 1\right)$.

$$\text{Từ đó ta tính được: } \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) = \frac{-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + 0 \cdot 1}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 85. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$

b) Lấy điểm $N \in Oy$. Độ dài đoạn thẳng NA ngắn nhất bằng 4.

c) Lấy điểm $Q \in (Oxz)$. Độ dài đoạn thẳng QB ngắn nhất khi đó tọa độ điểm Q là $(3; 0; 1)$.

d) Biết tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$. Khi đó $x + y - z = 11$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$

b) NA ngắn nhất khi điểm N là hình chiếu điểm A trên trục $Oy \Rightarrow N(0; 1; 0)$

Do đó: $\overrightarrow{NA} = (0; 0; -2) \Rightarrow NA = 2$

b) QB ngắn nhất khi điểm Q là hình chiếu điểm B trên $(Oxz) \Rightarrow Q(3; 0; 1)$

d) Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x; y - 1; z + 2)$; $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y - 1 = -6 \\ z + 2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}$$

Vậy $x + y + z = 11$

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1; 0; 2), B(3; 2; 5), C(7; -3; 9)$ và $A'(5; 0; 1)$.

a) $\overrightarrow{AA'} = (4; 0; -1)$

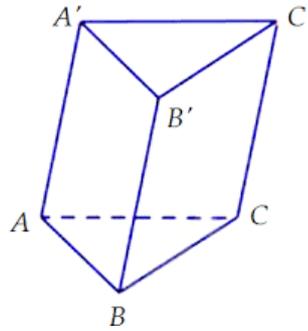
b) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$

c) Tọa độ đỉnh B' là $(x; y; z)$. Khi đó $x + y + z = 13$.

d) Tọa độ đỉnh C' là $(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c = 16$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG



a) Ta có: $\overrightarrow{AA'} = (x_{A'} - x_A; y_{A'} - y_A; z_{A'} - z_A) = (4; 0; -1)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AA'} = (4; 0; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -5; 4)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$$

c) Gọi tọa độ của điểm B' là $(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{BB'} = (x - 3; y - 2; z - 5)$.

Vì $ABCA'B'C'$ là hình lăng trụ nên $ABB'A'$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} x - 3 = 4 \\ y - 2 = 0 \\ z - 5 = -1 \end{cases} \text{ hay } x = 7, y = 2, z = 4.$$

Vậy $B'(7; 2; 4) \Rightarrow x + y + z = 13$

d) Lập luận tương tự câu c) suy ra $C'(11; -3; 8) \Rightarrow a + b + c = 16$

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$.

a) $AB = 3$

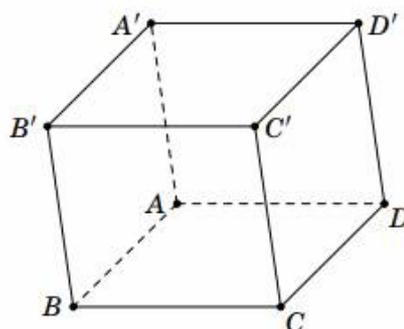
b) Tọa độ đỉnh $C(2; 3; 0)$

c) Tọa độ đỉnh A', B' lần lượt là $A'(0; 0; -3)$ và $B'(3; 0; -3)$.

d) Gọi $G(x_G; y_G; z_G)$ là tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$. Khi đó $x_G + y_G + z_G = 5$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI



a) Ta có $\overline{AB} = (3; 0; 0) \Rightarrow AB = 3$

b) Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overline{DC} = (x; y-3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

c) Ta có $\overline{AD} = (0; 3; 0)$.

Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overline{A'D'} = (-x'; 3-y'; -3-z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overline{A'B'} = (x_0; y_0; z_0+3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

d) G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2) \Rightarrow x_G + y_G + z_G = 1$

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$.

a) $BA = \sqrt{26}$ và $BC = 2\sqrt{26}$

b) $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -26$

c) Gọi $M(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overline{MA} + \overline{MC} = 3\overline{MB}$. Khi đó $x + y + z = 2$.

d) Gọi $D(a; b; c)$ là tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Khi đó $a + b + c = 4$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Ta có: $\overline{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overline{BA}| = \sqrt{26}; \overline{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overline{BC}| = 2\sqrt{26}$.

b) $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (-1) \cdot (-6) + (-3) \cdot 8 + 4 \cdot 2 = -10$

c) Ta có:

$\overline{MA} = (1-x; 2-y; -1-z)$

$\overline{MC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$

$3\overline{MB} = (6-3x; -3-3y; 9-3z)$

Mà $\overline{MA} + \overline{MC} = 3\overline{MB}$ nên $\begin{cases} 1-x-4-x = 6-3x \\ 2-y+7-y = -3-3y \\ -1-z+5-z = 9-3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -12 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow M(9; -12; 5) \Rightarrow x + y + z = 2$

d) Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

Suy ra : $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overline{DC} = -2\overline{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$.

$\Rightarrow a + b + c = 4$.

Câu 89. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$.

a) $\overline{AB} = (1; -2; -2)$

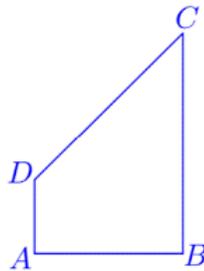
b) $BC = 3\sqrt{2}$

c) $BC = 2AD$

d) Giả sử đỉnh D có tọa độ $D(a;b;c)$. Khi đó $a + b + c = 6$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG



a) Ta có $\overline{AB} = (1; -2; -2)$

b) Ta có $\overline{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overline{BC}| = 3\sqrt{2}$.

c) Ta có $\overline{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overline{AB}| = 3$

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên:

$$\frac{1}{2}AB(AD + BC) = 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC \Rightarrow BC = 3AD.$$

d) Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có
$$\begin{cases} a-1 = \frac{4}{3} \\ b-2 = \frac{1}{3} \\ c-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6.$$

Câu 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Biết $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

a) $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 23$

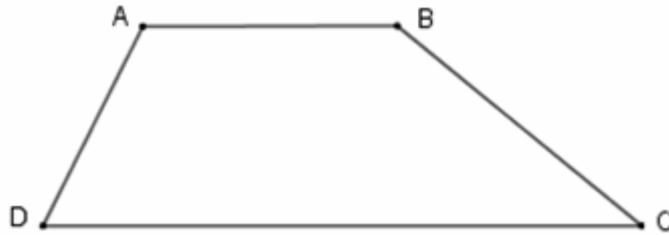
b) $\cos(\overline{AB}, \overline{BC}) = \frac{\sqrt{70}}{70}$

c) $AD = 3BC$

d) Biết đỉnh D có tọa độ $D(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c = 10$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI



a) Ta có: $\overline{AB} = (-4; -2; -1)$, $\overline{BC} = (-5; -2; 1) \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 23$

b) Ta có:

$$\overline{AB} = (-4; -2; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{21}$$

$$\overline{BC} = (-5; -2; 1) \Rightarrow BC = \sqrt{30}$$

$$\cos(\overline{AB}, \overline{BC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{23}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{30}} = \frac{23\sqrt{70}}{210}$$

c) Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC)$

$$\Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

d) Ta có $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overline{AD} = 2\overline{BC}$ (1).

$$\overline{BC} = (-5; -2; 1), \overline{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12; -1; 3) \Rightarrow a+b+c = -10$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 5)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Biết vector $3\vec{a} + 2\vec{b} = (x_0; y_0; z_0)$. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 34

Ta có

$$3\vec{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot 1; 3 \cdot 5) = (6; 3; 15)$$

$$2\vec{b} = (2 \cdot 2; 2 \cdot 2; 2 \cdot 1) = (4; 4; 2)$$

$$\text{Do đó } 3\vec{a} + 2\vec{b} = (6 + 4; 3 + 4; 15 + 2) = (10; 7; 17)$$

$$\Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 34$$

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$, $\vec{u} = (x; y; z)$ thỏa mãn $\vec{a} + 2\vec{u} = \vec{b}$. Tính giá trị biểu thức $T = 2x + 2y + z$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -4

Ta có:

$$2\vec{u} = (2x; 2y; 2z) \Rightarrow \vec{a} + 2\vec{u} = (5 + 2x; 4 + 2y; -1 + 2z)$$

$$\vec{b} = (2; -5; 3)$$

$$\text{Vì } \vec{a} + 2\vec{u} = \vec{b} \text{ nên: } \begin{cases} 5 + 2x = 2 \\ 4 + 2y = -5 \\ -1 + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{9}{2} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2\right)$$

$$\text{Do đó: } \Rightarrow T = 2x + 2y + z = -4$$

Câu 93. Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m + 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} là góc tù?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3m - 9}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{2m^2 + 6m + 10}}$$

Góc giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Leftrightarrow 3m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 94. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1; -1; 0)$. Xác định k để vectơ $\vec{u} = (2; 2k - 1; 0)$ cùng phương với vectơ \vec{a} .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $-0,5$

$$\text{Ta có : } \vec{u} = (2; 2k - 1; 0) = 2\left(1; \frac{2k - 1}{2}; 0\right)$$

$$\text{vectơ } \vec{u} \text{ cùng phương với vectơ } \vec{a} \text{ khi } \frac{2k - 1}{2} = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$.

Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có

$$\overline{NM} = (3; 2; -2), \overline{NP} = (2; m - 2; 1).$$

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overline{NM} \cdot \overline{NP} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot (m - 2) - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3; 7; 2)$, $N(5; 1; -1)$ và $P(4; -4; -2)$. Gọi $G(a; b; c)$ là trọng tâm của tam giác MNP . Tính giá trị biểu thức $T = a + 3b + 3c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 7

Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm theo tọa độ các đỉnh của tam giác MNP , ta có

$$G\left(\frac{3+5+4}{3}; \frac{7+1-4}{3}; \frac{2-1-2}{3}\right), \text{ hay } G\left(4; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow T = a + 3b + 3c = 7$$

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$, $B(a; b; c)$ và $M(2; 1; -2)$. Biết M là trung điểm của AB , tính $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -5

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + a}{2} \\ y_M = \frac{y_A + b}{2} \\ z_M = \frac{z_A + c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + a}{2} \\ 1 = \frac{5 + b}{2} \\ -2 = \frac{3 + c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = -7 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = -5.$$

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(-3;1;4)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -12

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3 - a \\ 3 = 1 - b \\ 10 = 4 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = a + b + c = -12$$

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(0;1;-2)$, $B(x; y; z)$, $C(0;-2;1)$, $D(1;0;-1)$. Tính giá trị biểu thức $T = x + y + z$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -2

Tọa độ điểm B là $(x; y; z)$

$$\overline{BA} = (-x; 1 - y; -2 - z)$$

$$\overline{CD} = (1; 2; -2)$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overline{BA} = \overline{CD}$

$$\text{Suy ra} \begin{cases} -x = 1 \\ 1 - y = 2 \\ -2 - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = x + y + z = -2$$

Câu 100. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với A qua trục Oy . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -10

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;5)$ lên Oy . Suy ra $H(0;-3;0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA' .

$$\begin{cases} a = 2x_H - x_A = -2 \\ b = 2y_H - y_A = -3 \Rightarrow A'(-2; -3; -5) \Rightarrow T = a + b + c = -10. \\ c = 2z_H - z_A = -5 \end{cases}$$

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi tọa độ $A'(a; b; c)$ là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

Tọa độ hình chiếu của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là $(1; 0; 3)$.

Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $A'(1; -2; 3) \Rightarrow T = a + b + c = 2$

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5), B(5; -5; 7), M(x; y; 1)$. Để ba điểm A, B, M thẳng hàng thì giá trị của $x + y$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2), \overrightarrow{AM} = (x - 2; y + 1; -4)$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$x + y = 3$$

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; -1), B(-1; -x; 1), C(7; -1; y)$. Khi A, B, C thẳng hàng thì giá trị biểu thức $x + y$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -8

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -x - 2; 2); \overrightarrow{AC} = (4; -3; y + 1)$.

$$\text{Để } A, B, C \text{ thẳng hàng thì } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = k.4 \\ -x - 2 = k.(-3) \\ 2 = k.(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x + y = -5 - 3 = -8.$$

Câu 104. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1), B(3; -1; 5)$. Biết tọa độ của điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 9

$$\text{Ta có } \vec{MA} = 3\vec{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - 3x_B}{1-3} = 4 \\ y_M = \frac{y_A - 3y_B}{1-3} = -3 \\ z_M = \frac{z_A - 3z_B}{1-3} = 8 \end{cases} \Rightarrow M(4; -3; 8).$$

$$\Rightarrow T = a + b + c = 9$$

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -2)$, $B(2; -3; 5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, biết tọa độ điểm M là $(a; b; c)$. Khi đó $a + 3b + c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $M(a; b; c)$.

$$\text{Vì } M \text{ thuộc đoạn } AB \text{ nên } \vec{MA} = -2\vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a = -2(2 - a) \\ 1 - b = -2(-3 - b) \\ -2 - c = -2(5 - c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = -\frac{5}{3} \\ c = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Suy ra $a + 3b + c = 0$

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M có tọa độ $(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -9

$$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$$

$$\vec{AB} = (7; 3; 1)$$

$$\vec{AM} = (x + 2; -3; z - 1)$$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \vec{AM} = k \cdot \vec{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z - 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0)$$

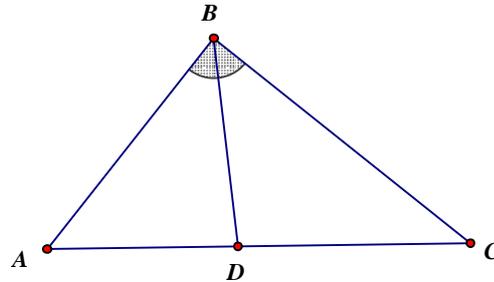
$$\Rightarrow T = a + b + c = -9$$

Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a+b+2c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 5



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x; y; z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (1).

Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$.

$$\text{Do đó (1)} \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a+b+2c = 5.$$

Câu 108. Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1;-1;1)$, $B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi $D(x; y; z)$ khi đó $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{DC} = (-1-x; -y; 3-z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-1-x}{2} = \frac{-y}{2} = \frac{3-z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 7 \\ y = 2z - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-1; y+1; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (x+1; y; z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2z-8; 2z-5; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (2z-6; 2z-6; z-3) \end{cases}$$

$$\cos(\overline{AD}, \overline{CD}) = \frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)} \cdot \sqrt{9(z-3)^2}} = \frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2(z^2 - 6z + 9) = z^2 - 6z + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -3; y = -2 \end{cases}$$

Vậy $D(1; 2; 4)$ hoặc $D(-3; -2; 2)$.

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1), B(2; 0; -1), C(6; 1; 0)$ và hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a; b; c)$. Tính $a + b + c$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 6

Ta có $\overline{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overline{AB}| = 3; \overline{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overline{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên

$$\frac{1}{2}AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$$

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{BC}$.

Giả sử $D(a; b; c)$ khi đó ta có
$$\begin{cases} a-1 = \frac{4}{3} \\ b-2 = \frac{1}{3} \\ c-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6$$

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1), B(2; 1; 0), C(-3; -1; 1)$. Gọi $D(a; b; c)$ là điểm sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AD và diện tích hình thang $ABCD$ bằng 4 lần diện tích tam giác ABC . Tính $a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -16

Ta có $S_{ABCD} = 4S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(BC, AD)(BC + AD) = 4 \cdot \frac{1}{2}d(BC, AD)BC$

$\Leftrightarrow BC + AD = 4BC \Leftrightarrow AD = 3BC$. Do $ABCD$ là hình thang có đáy $AD \Rightarrow \overline{AD} = 3\overline{BC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = -15 \\ b-3 = -6 \\ c-1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -17 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -16$$

Câu 111. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Trong không gian gọi điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ và không trùng với các điểm A, B, C, O . Tính giá trị của $3x + 6y + 3z$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 8

$$\text{Gọi } M(x; y; z). \text{ Ta có: } \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + y(y-2) + z^2 = 0 \\ x^2 + y(y-2) + z(z-2) = 0 \\ x(x-2) + y^2 + z(z-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(0;0;0) \equiv O \\ M\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow 3x + 6y + 3z = 8.$$

Câu 112. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;1;-1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB}$. Giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 6

Do $MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB}$ nên \overrightarrow{MA} cùng hướng \overrightarrow{MB} .

$$MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow MA = 2MB \Rightarrow B \text{ là trung điểm } AM \Rightarrow M(7;4;-5).$$

$$\text{Khi đó } a + b + c = 7 + 4 + (-5) = 6$$

Câu 113. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1)$, $B(-2;-6;2)$, $C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

$$\overrightarrow{AC}(-1;-3;-2), \overrightarrow{MB}(-2-m;-6-m;2-m)$$

$$|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m-6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m-2)^2 + 24}$$

$$\text{Để } |\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| \text{ nhỏ nhất thì } m = 2$$

Câu 114. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3), B(2;2;1), M(a;b;c) \in Ox$. Khi biểu thức

$$T = |\overline{MA} + \overline{MB}| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính } 2a + b + c.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 3

$$M \in Ox \Rightarrow M(a;0;0)$$

$$\overline{MA} = (1-a;2;3)$$

$$\overline{MB} = (2-a;2;1)$$

$$\Rightarrow \overline{MA} + \overline{MB} = (3-2a;4;4)$$

$$\Rightarrow T = |\overline{MA} + \overline{MB}| = \sqrt{(3-2a)^2 + 32} \geq \sqrt{32}$$

$$\Rightarrow T_{\min} = \sqrt{32} \Leftrightarrow 3-2a=0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0;0\right) \Rightarrow 2a + b + c = 3$$

Câu 115. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(0;2;3), B(2;1;1), C(1;2;3), M(a;b;c) \in Oz$. Khi

biểu thức $T = |\overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính $a + b + 2c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 7

$$\text{Làm tương tự như trên ta được: } M\left(0;0;\frac{7}{2}\right) \Rightarrow a + b + 2c = 7$$

Câu 116. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(5;-2;0), B(4;5;-2)$ và $C(0;3;2)$. Điểm M di

chuyển trên trục Ox . Đặt $Q = 2|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| + 3|\overline{MB} + \overline{MC}|$. Biết giá trị nhỏ nhất của Q có dạng

$a\sqrt{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và b là số nguyên tố. Tính $a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 43

$$\text{Ta có } Q = 2|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| + 3|\overline{MB} + \overline{MC}| = 2|\overline{3MG} + \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}| + 3|2\overline{MI} + \overline{IB} + \overline{IC}|$$

Với $G(3;2;0)$ là trọng tâm của tam giác ABC và $I(2;4;0)$ là trung điểm BC , ta có:

$$Q = 2|3\overline{MG}| + 3|2\overline{MI}| = 6(MG + MI),$$

Do G và I nằm cùng phía so với Ox nên gọi $G'(3;-2;0)$ là điểm đối xứng của G qua Ox .

Khi đó $Q = 2|3\overline{MG}| + 3|2\overline{MI}| = 6(MG + MI) = 6(MG' + MI) \geq 6G'I = 6\sqrt{37}$.

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $G'I$ và Ox .

$$\Rightarrow a + b = 6 + 37 = 43$$

Câu 117. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-2;1;0), C(2;-3;1)$. Lấy điểm $S(a;b;c)$ sao cho biểu thức $SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 2a + b + 3c$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: -1

Gọi G là điểm sao cho $\overline{GA} + 2\overline{GB} + 3\overline{GC} = \vec{0} \Rightarrow G\left(\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{aligned} SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2 &= \overline{SA}^2 + 2\overline{SB}^2 + 3\overline{SC}^2 \\ &= (\overline{SG} + \overline{GA})^2 + 2(\overline{SG} + \overline{GB})^2 + 3(\overline{SG} + \overline{GC})^2 \\ &= 6SG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 3GC^2 \geq 6SG^2 \end{aligned}$$

$SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ nhỏ nhất khi SG^2 nhỏ nhất hay $S \equiv G$ hay $S\left(\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{3}\right)$.

$$T = 2a + b + 3c = -1.$$

Câu 118. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3) D(2;2;-1)$.

Biết $M(x; y; z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $4x + 2y + z$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 14

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right)$.

$$Ta\ có: MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv G\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right) \Rightarrow 4x + 2y + z = 14$.

Câu 119. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$. Để biểu thức $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4

$$\overrightarrow{MA} = (2 - m; 5 - m; 1 - m)$$

$$\overrightarrow{MB} = (-2 - m; -6 - m; 2 - m)$$

$$\overrightarrow{MC} = (1 - m; 2 - m; -1 - m)$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m - 4)^2 \leq 28$$

Để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $m = 4$

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 0)$, $B(2; 0; -2)$ và điểm $M(a, b, c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a + 2b - c - 1 = 0$. Biết $MA = MB$ và góc \widehat{AMB} có số đo lớn nhất. Tính $S = 11a + 22b + 33c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 15

Vì $MA = MB$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB .

Ta có $(P): y + z = 0$ nên $\begin{cases} b + c = 0 \\ a + 2b - c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = 1 - 3b \end{cases}$.

$$\overrightarrow{MA} = (1 + 3b; 2 - b; b), \overrightarrow{MB} = (1 + 3b; -b; -2 + b)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \widehat{AMB} &= \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} = \frac{(1 + 3b)^2 + 2b(b - 2)}{\sqrt{(1 + 3b)^2 + (b - 2)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(1 + 3b)^2 + (b - 2)^2 + b^2}} \\ &= \frac{9b^2 + 6b + 1 + 2b^2 - 4b}{9b^2 + 6b + 1 + 2b^2 - 4b + 4} = \frac{11b^2 + 2b + 1}{11b^2 + 2b + 5} \end{aligned}$$

Xét $f(b) = \frac{11b^2 + 2b + 1}{11b^2 + 2b + 5}$ có $f'(b) = \frac{4(22b + 2)}{11b^2 + 2b + 5} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{11}$

Lập bảng biến thiên ta có: $f(b)$ nhỏ nhất tại $b = -\frac{1}{11} \Rightarrow a = \frac{14}{11}, c = \frac{1}{11}$

Nên $11a + 22b + 33c = 11 \cdot \frac{14}{11} - 22 \cdot \frac{1}{11} + 33 \cdot \frac{1}{11} = 15$

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 121. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -2; \frac{1}{4})$, $\vec{b} = (-2; 1; 1)$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

- Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$
- Tính độ dài của vector \vec{c} .
- Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{b}$. Trong ba vector trên có các cặp vector nào vuông góc ?
- Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, $\cos(\vec{a}, \vec{i})$

Câu 122. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$

- Tìm tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ theo các vector đơn vị $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$
- Tính độ dài của vector $|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}|$.
- Tính $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.
- Tính góc giữa 2 vector \vec{a} và \vec{b} .

Câu 123. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$.

- Tìm tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ theo các vector đơn vị $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$
- Tính độ dài của vector $|\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}|$.
- Tính $(\vec{a} - 2\vec{b})\vec{c}$.
- Tìm tọa độ vector \vec{u} , biết rằng: $\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{u} \perp \vec{b}$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = -6$.

Câu 124. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$.

- Tính $(\vec{a} + 3\vec{b})\vec{b}$.
- Tính $(2\vec{a} - 5\vec{b})\vec{c}$.
- Tìm tọa độ vector \vec{u} , biết rằng: $\vec{a} \cdot \vec{u} = -5$, $\vec{u} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = 20$.

Câu 125. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; -1; -3)$, $\vec{b} = (m-1; 3; -2)$, $\vec{c} = (1; 2n-1; -1)$.

- Tìm số thực m sao cho $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Tìm tất cả giá trị của n để góc giữa \vec{a} , \vec{c} bằng 45° .
- Tìm m, n để các vector \vec{b}, \vec{c} cùng phương.

Câu 126. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$.

- Tính $(\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$.
- Tìm m để $\vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b}$ cùng phương.

Câu 127. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; -7; 9)$, $\vec{b} = (3; -6; 1)$, $\vec{c} = (2; 1; -7)$.

- Tìm tọa độ vector $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ theo các vector đơn vị $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$

b) Tính góc giữa 2 vector \vec{a} và \vec{b} .

c) Biểu diễn vector $\vec{u} = (-4; 13; -6)$ theo các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Câu 128. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho ba vector $\vec{a} = (1; -1; 1), \vec{b} = (0; 1; 2), \vec{c} = (4; 2; 3)$.

a) Tìm tọa độ vector \vec{d} thỏa mãn $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d} = \vec{0}$

b) Trong ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, có các cặp vector nào vuông góc?

c) Biểu diễn vector $\vec{u} = (1; 2; -2)$ theo các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Câu 129. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4), \vec{b} = (6; 0; -3), \vec{c} = (3; 2; -1)$.

a) Tính $(2\vec{a} + \vec{b})\vec{c}$.

b) Xác định các số thực m, n để $m\vec{a} - 3n\vec{b} = \vec{c}$.

Câu 130. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho 3 vector: $\vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; -3; 2), \vec{c} = (3; 2; -4)$.

a) Tính $(3\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{c})$.

b) Xác định các số thực m, n để $\frac{m}{3}\vec{a} - n\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 131. Trong không gian tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(4; 2; 3), B(-2; 1; -1), C(3; 8; 7)$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AB .

b) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

d) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{MC} = 3\vec{MB}$

f) Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC .

g) Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

Câu 132. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(3; -4; 7), B(-5; 3; -2), C(1; 2; -3)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành ΔABC .

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

c) Tìm tọa độ trọng tâm của ΔABC .

d) Tính góc \widehat{ABC} .

e) Tính độ dài đường cao BH của ΔABC

Câu 133. Trong hệ tọa độ Oxyz cho: $A(1; -1; 1), B(2; -3; 2), C(4; -2; 2), D(3; 0; 1), E(1; 2; 3)$

a) Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích của nó.

b) Tính góc \widehat{ABC} .

c) Tìm trên đường thẳng Oy điểm cách đều hai điểm AB

d) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$

Câu 134. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(2; 5; 3)$, $B(3; 7; 4)$, $C(x; y; 6)$.

- Tìm tọa độ điểm M sao cho $2\overline{AM} = \overline{AB}$.
- Tìm $x; y$ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Tìm $x; y$ để ba điểm A, B, C tạo thành tam giác ABC vuông cân tại A .

Câu 135. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$.

- Tìm tọa độ điểm Q thuộc trục Oy sao cho $BQ = 2\sqrt{6}$.
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng Oyz sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overline{AM} = 2\overline{MB}$.

Câu 136. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(4; -1; 2)$; $B(7; 3; 2)$.

- Tìm tọa độ điểm $M \in Ox$ và cách đều hai điểm A, B .
- Tìm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác ABM vuông cân tại A .

Câu 137. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; -3)$, $B(0; 3; 7)$, $C(2; 5; 0)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành tam giác ABC .
- Tính $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tính góc \widehat{ABC} .
- Tính diện tích ΔABC . Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC .

Câu 138. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng:

$(1; 2; -1)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(-1; -1; 2)$, $D'(2; -2; -3)$

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng BD' và $B'D$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta AA'C$.
- Tìm tọa độ điểm M thỏa $2\overline{MA} + \overline{MB'} = \overline{MD}$

Câu 139. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng:

$A(0; 2; 2)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-1; 1; 1)$, $C'(1; -2; -1)$

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng AC' và $A'C$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta B'DD'$.

Câu 140. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng:

$B(2; 0; 0)$, $C(2; 3; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $A'(0; 0; 5)$

- Chứng minh hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.
- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật chữ nhật.
- Tính $\widehat{BA'D}$ của tam giác $A'BD$.

CHỦ ĐỀ 2

ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

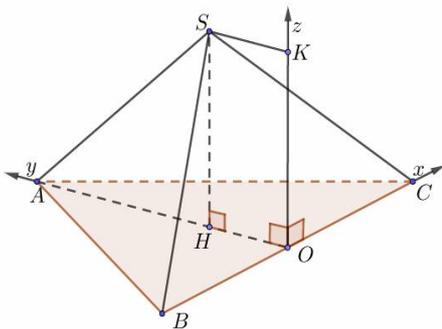
DẠNG 1

ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶC BIỆT

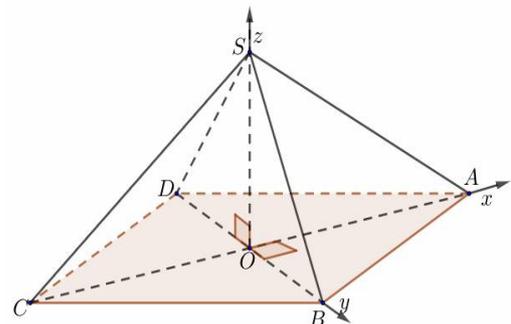
Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, đặt $AB = 1$.
- Dựng hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$,
 $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{OK}{SH}\right)$.

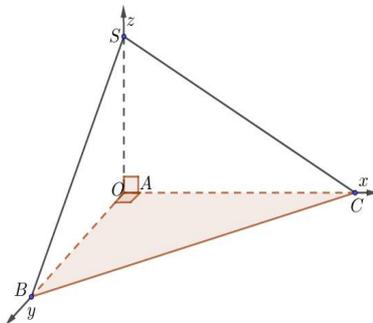
Hình chóp tứ giác đều



- Chọn hệ trục như hình, đặt $AB = 1$.
- Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,
 $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $D\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $S(0;0;SO)$.

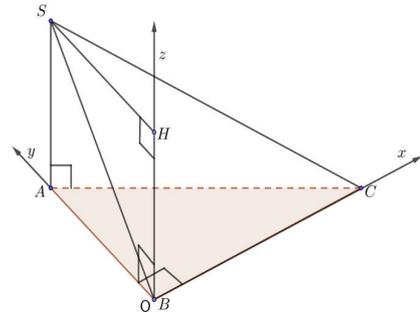
Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác vuông tại A



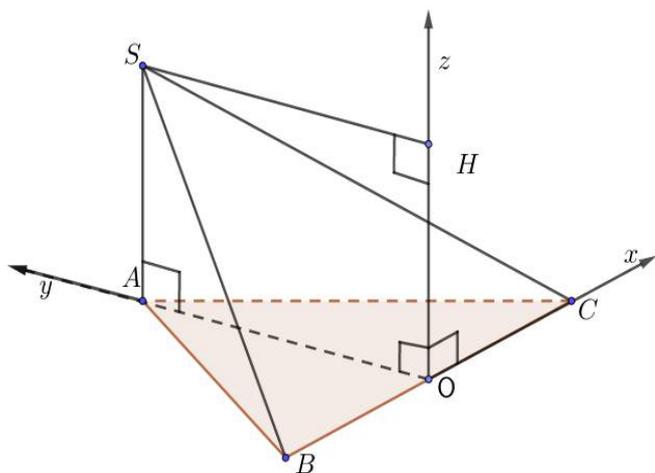
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$,
 $B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là tam giác vuông tại B



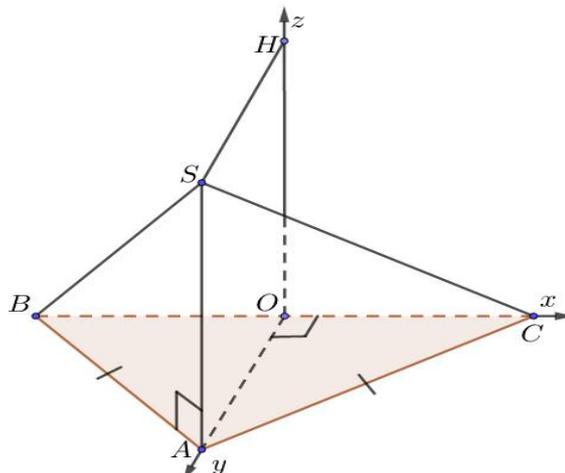
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$, $A(0;AB;0)$,
 $C(BC,0;0)$, $S\left(0;AB; \frac{BH}{SA}\right)$.

Đáy là tam giác đều



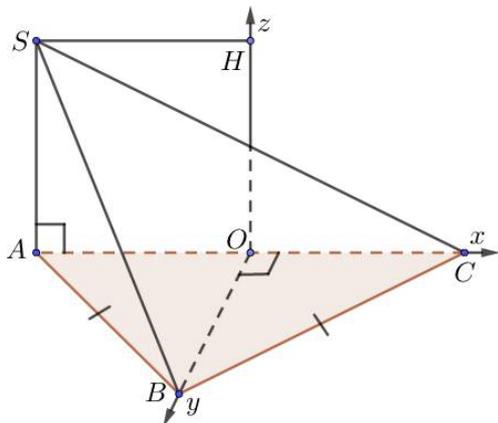
- Gọi O là trung điểm BC .
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = 1$.
- Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$,
 $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại A



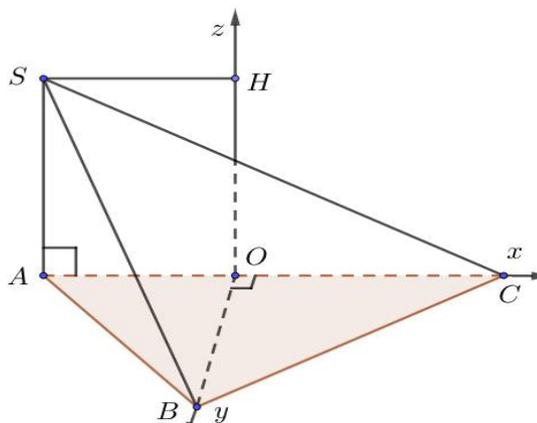
- Gọi O là trung điểm BC .
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,
 $B(-OB;0;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại B



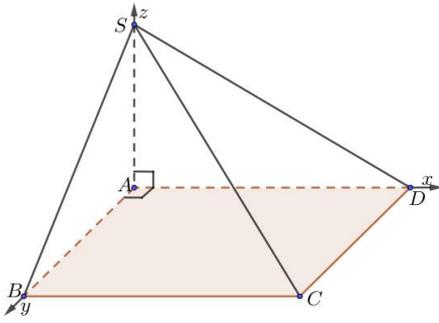
- Gọi O là trung điểm AC .
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,
 $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác thường



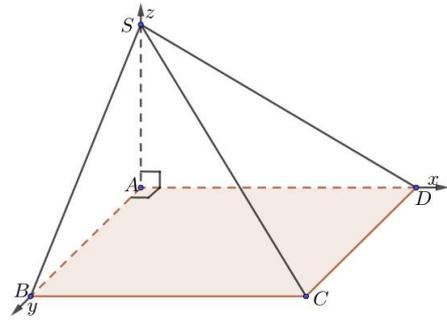
- Dựng đường cao BO của ΔABC .
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,
 $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là hình vuông



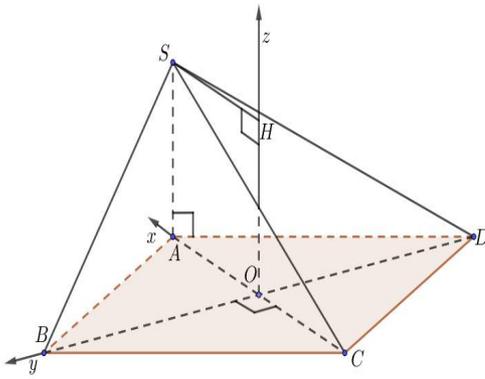
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là hình chữ nhật



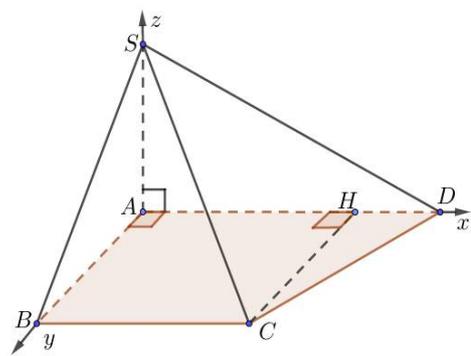
- Chọn hệ trục như hình vẽ
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là hình thoi



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $S(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA})$.

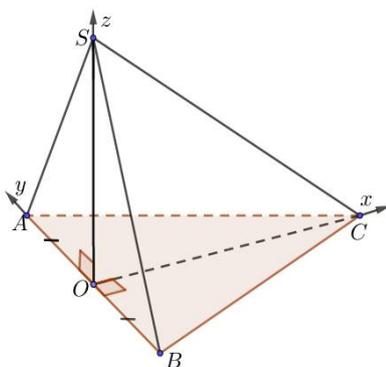
Đáy là hình thang vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

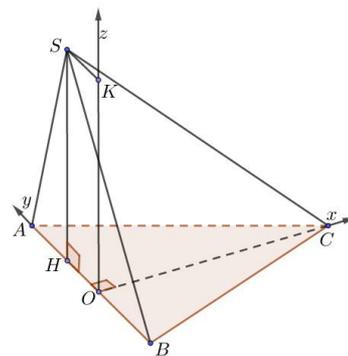
Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



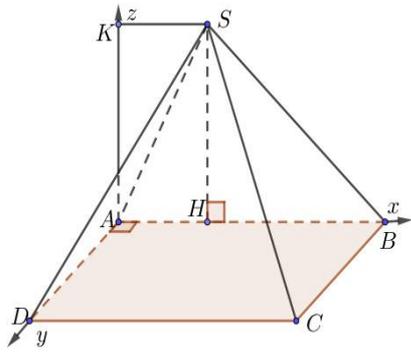
- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



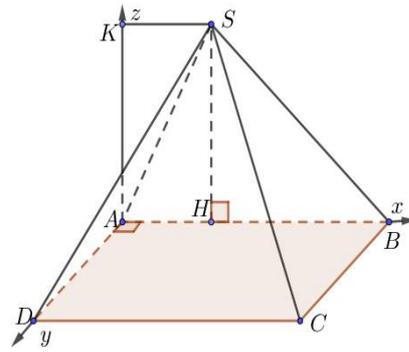
- Vẽ đường cao CO trong ΔABC , chọn hệ trục như hình.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;OH;OK)$

Đáy là hình vuông



- Chọn hệ trục như hình
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underset{=SH}{AK} \right)$

Đáy là hình chữ nhật

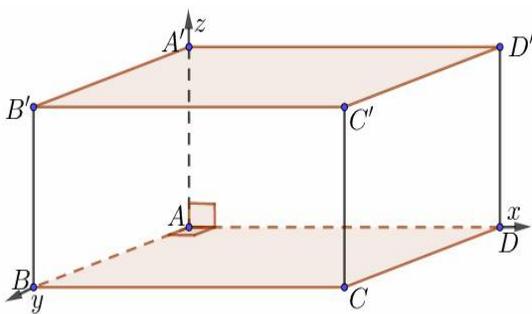


- Chọn hệ trục như hình
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underset{=SH}{AK} \right)$

2. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

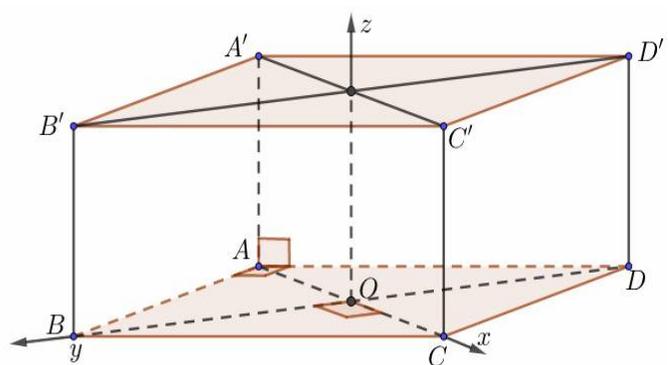
Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



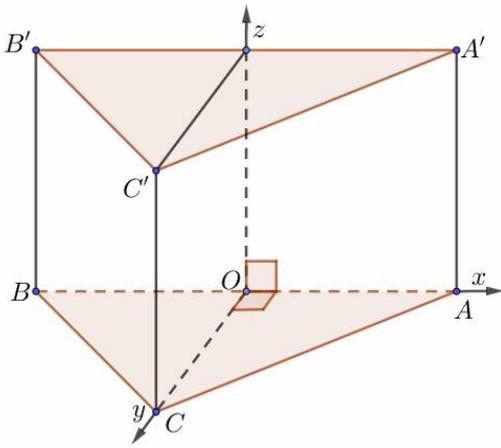
- Dựng hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ điểm:
 $A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AD;AB;0), D(AD;0;0), A'(0;0;AA'), B'(0;AB;AA'), C'(AD;AB;AA'), D'(AD;0;AA')$

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi



- Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình.
- Tọa độ điểm:
 $O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0;OB;0), C(OC;0;0), D(0;-OD;0), A'(-OA;0;AA'), B'(0;OB;AA'), C'(OC;0;CC'), D'(0;-OD;DD')$

Lăng trụ có đáy tam giác đều hoặc cân



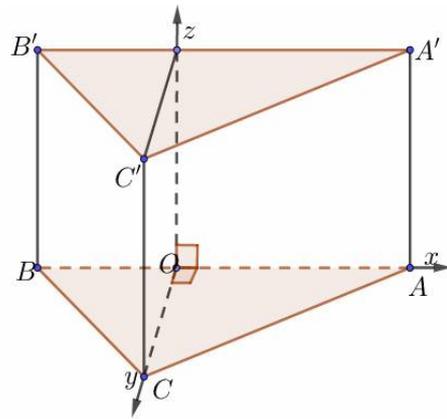
• Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ .

• Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(\frac{AB}{2};0;0\right), B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right), C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'), B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right), C'(0;OC;CC').$$

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



• Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ .

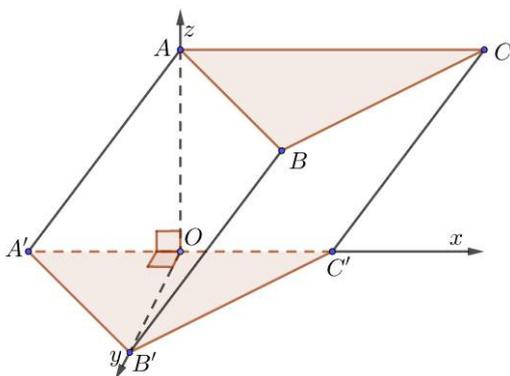
• Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(-OB;0;0), C(0;OC;0),$$

$$A'(OA;0;AA'), B'(-OB;0;BB'), C'(0;OC;CC').$$

Lăng trụ xiên

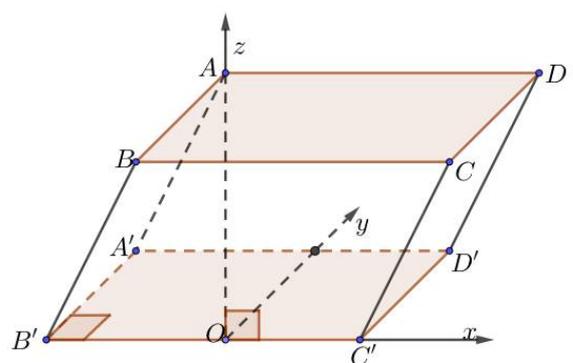
Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



• Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.

• Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



• Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D, A.

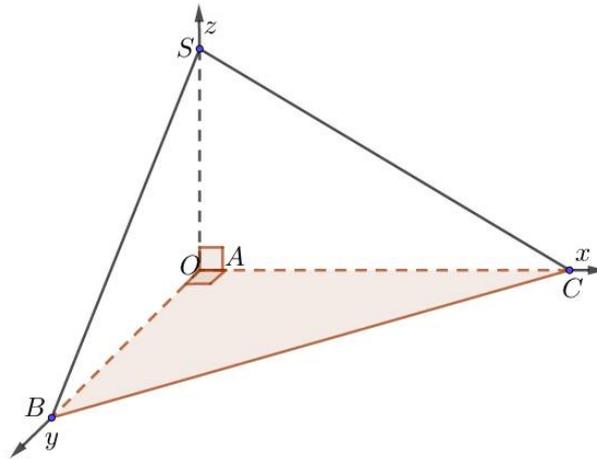
• Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 8, AD = 6, AA' = 4$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và \overrightarrow{AM} với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh $C'D'$. Tìm tọa độ vectơ \overrightarrow{AM} .

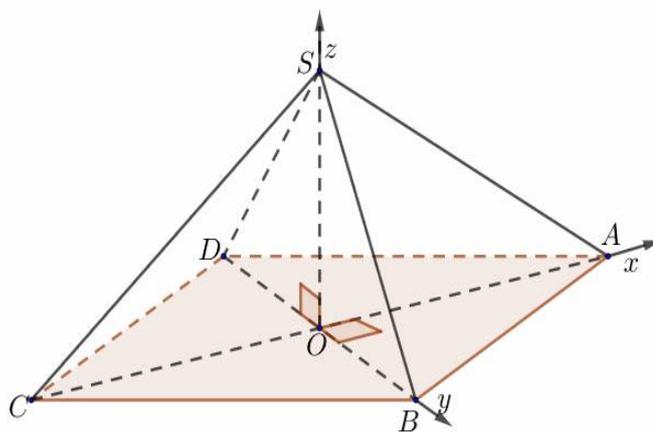
Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, AB, AC đôi một vuông góc và $AS = 2025; AB = AC = 2026$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AC, AB, AS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm tọa độ vectơ \overrightarrow{SG} .

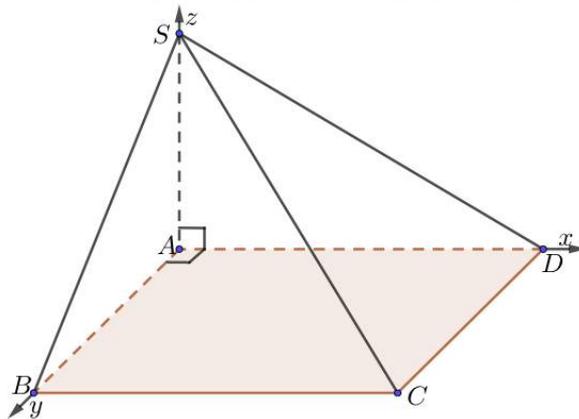
Bài 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = \sqrt{2}, SA = \sqrt{10}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng tâm hình vuông $ABCD$ và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OA, OB, OS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB

b) Tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SD}$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



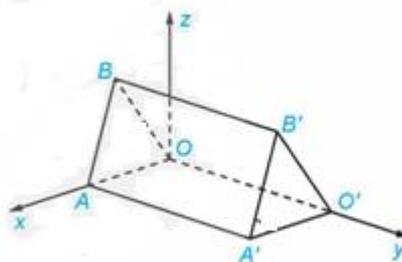
a) Tìm tọa độ tâm hình vuông $ABCD$.

b) Tính $(\overline{SC}, \overline{SD})$.

Bài 5. Những căn nhà gỗ trong Hình a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình b với OAB là tam giác cân tại B . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình b (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240;450;0)$ và $(120;450;300)$. Tính kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ.



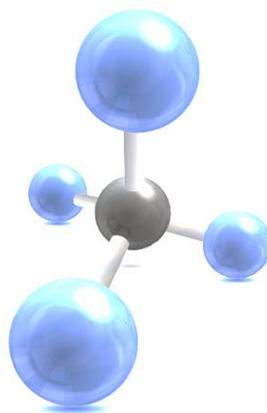
a)



b)

Bài 6. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó.

Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H - C - H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này.

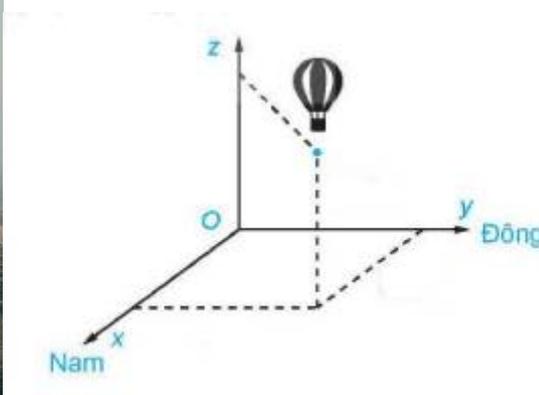


DẠNG 2

ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

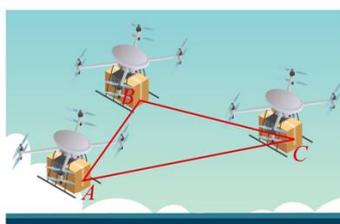
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



- a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- b) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Bài 2. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1;1;1)$, $B(5;7;9)$, $C(9;11;4)$.

- a) Tính các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.
- b) Tính góc \widehat{BAC} .



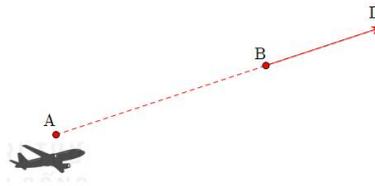
Bài 3. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực \vec{F} tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N , thì công A sinh bởi lực \vec{F} được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$.

Trong không gian $Oxyz$, một người tác động một lực không đổi $\vec{F} = (2;3;-1)$ vào một vật đang ở gốc tọa độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1;2;1)$. Biết lực tính bằng newton (N) và đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, làm thế nào để tính công A (đơn vị: J) sinh ra bởi lực \vec{F} trong tình huống này?

Bài 4. Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là $30km$. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ tọa độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Bài 5. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 25 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 25 phút tiếp theo như thế nào?

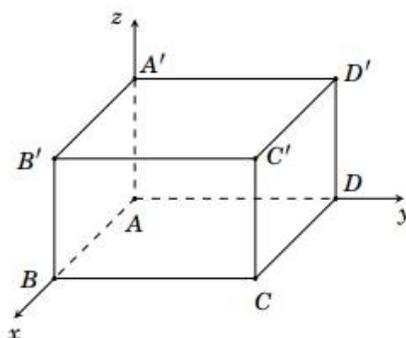


PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

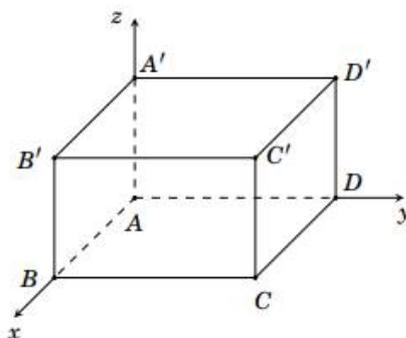
Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (góc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm C' là

- A. $C'(2;2;0)$ B. $C'(2;2;2)$ C. $C'(2;0;2)$ D. $C'(2;0;0)$

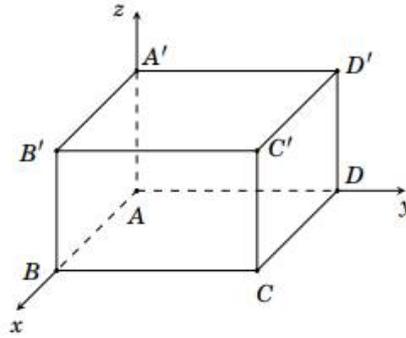
Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (góc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm B' là

- A. $B(2;0;2)$ B. $B(2;2;2)$ C. $B(2;2;0)$ D. $B(0;2;0)$

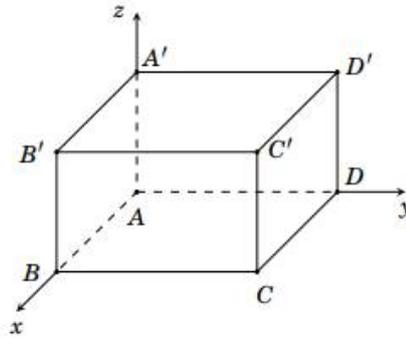
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = 1, AD = 2$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Tọa độ điểm E là

- A. $E\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ B. $E\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ C. $E\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ D. $E\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$

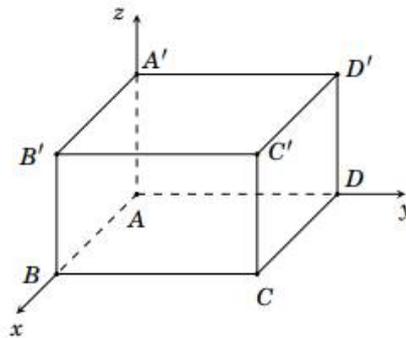
Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2, AA'=3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Tọa độ điểm E là

- A. $E(1; 2; 3)$ B. $E(1; 2; 6)$ C. $E\left(\frac{1}{2}; 1; 3\right)$ D. $E\left(3; \frac{1}{2}; 1\right)$

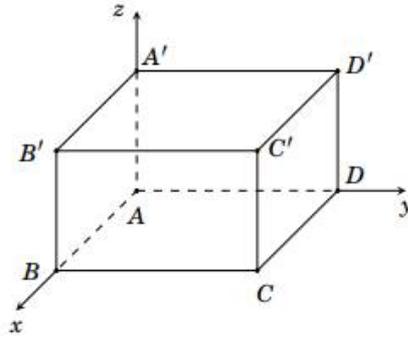
Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2, AA'=3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tọa độ điểm E là

- A. $E\left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$ B. $E\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ C. $E\left(\frac{1}{2}; 1; 3\right)$ D. $E\left(3; \frac{1}{2}; 1\right)$

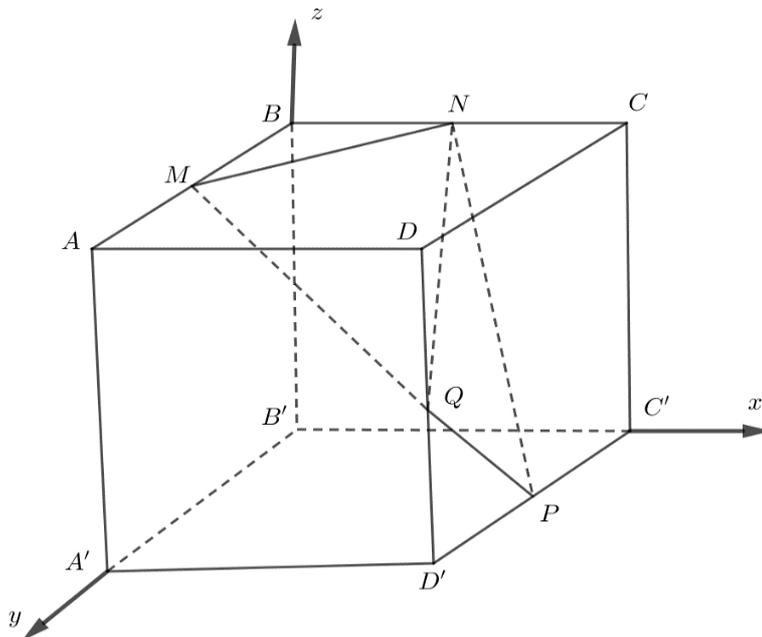
Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2, AA'=3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Tọa độ $\overrightarrow{B'D}$ là

- A. $(1; 2; 3)$ B. $(-1; 2; -3)$ C. $(1; 2; -3)$ D. $(-1; 2; 3)$

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng B' và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia $B'C', B'A', B'B$ như hình vẽ. Xác định tọa độ các điểm M, N, P, Q .



A. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P(1; 1; 0), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

C. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

D. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (góc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ \overrightarrow{SC} là:

- A. $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$. B. $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.
- C. $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$. D. $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.

Câu 11. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 5, OB = 2, OC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN . Khoảng cách từ G đến K là:

- A. $GK = \frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $GK = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $GK = \frac{1}{2}$ D. $GK = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE . Độ dài BG là:

- A. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{6}$. B. $BG = \frac{a\sqrt{113}}{6}$. C. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{2}$. D. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{3}$.

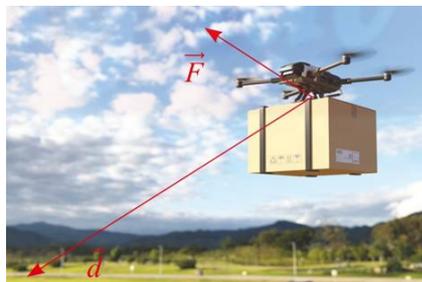
Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD . Độ dài MG là:

- A. $MG = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $MG = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $MG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $MG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB = 4, AD = 3, AA' = 5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB' . Độ dài BG là:

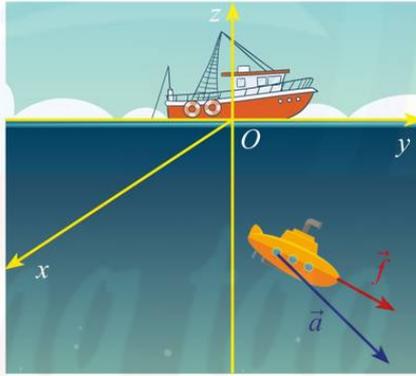
- A. $BG = \frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $BG = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15. Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = (20; 30; -10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (Hình vẽ) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150; 200; 100)$ (đơn vị: m).



- A. $3200J$. B. $8000J$. C. $10000J$. D. $5800J$.

Câu 16. Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình vẽ) được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực \vec{f} .



- A. 510J . B. 350J . C. 700J . D. 450J .

Câu 17. Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía Tây, trục Oy hướng về phía Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía Nam với tốc độ không đổi là 890 km/h trong 45 phút. Xác định tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong 45 phút đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét.



- A. $(0;890;0)$. B. $(0;667,5;0)$. C. $(0;0;667,5)$. D. $(667,5;0;667,5)$.

Câu 18. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 40 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 20 phút tiếp theo là gì?

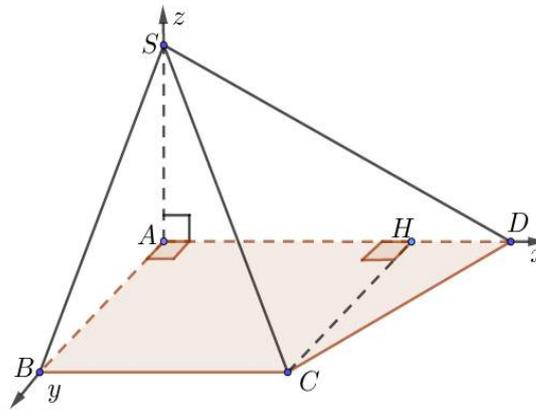


- A. $(910;575;8,5)$ B. $(1010;550;17)$ C. $(1010;575;17)$ D. $(1010;575;8,5)$

Câu 19. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình vẽ .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 4$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 4$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm A, B, C, D, H lần lượt là :

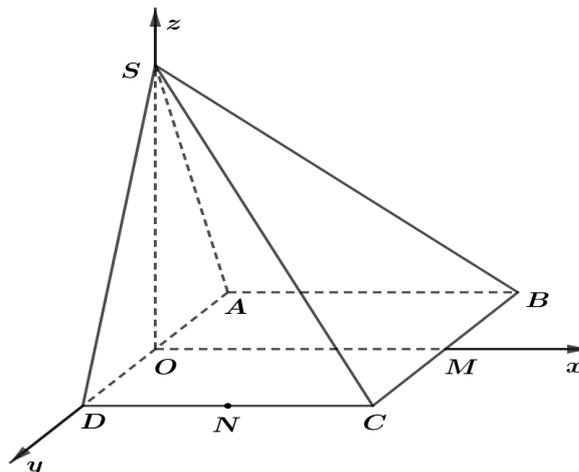
$$A(0;0;0), B(0;2;0), C(2;2;0), D(4;0;0), S(0;0;4), H(2;0;0)$$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC . Khi đó, tọa độ vectơ \overrightarrow{AG} là $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

c) $HG = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng trung điểm cạnh AD và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OM, OD, OS như hình vẽ.



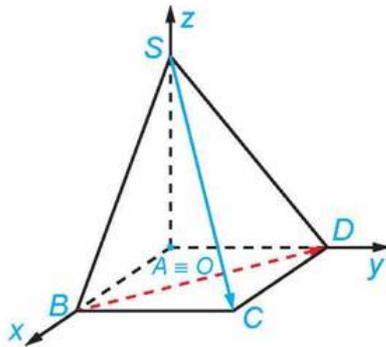
a) Tọa độ các điểm A, B, C, D lần lượt là : $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right), C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

b) Tọa độ các điểm M, N, S lần lượt là : $M(1; 0; 0), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) $\overline{SA} \cdot \overline{MN} = -\frac{1}{4}$

d) $\cos \overline{SA} \cdot \overline{MN} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $SA = 2, AB = 3, AD = 4$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS như hình vẽ.



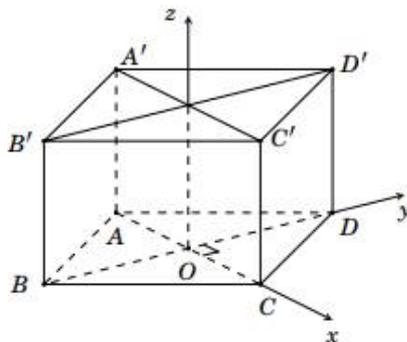
a) Tọa độ các điểm S, A, B, C, D lần lượt là : $S(0; 0; 2), A(0; 0; 0), B(3; 0; 0), C(3; 4; 0), D(0; 4; 0)$.

b) Gọi I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng SC . Khi đó, tọa độ điểm I là $\left(\frac{3}{2}; 2; 0\right)$.

c) $SC = \sqrt{29}$

c) $\cos(\overline{BD}, \overline{SC}) = \frac{7}{5\sqrt{29}}$

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$).



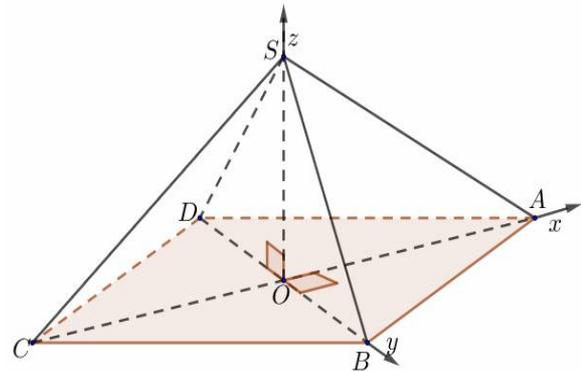
a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$.

b) $\overline{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.

c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.

d) $\overrightarrow{BD'} = (0; 0; 2)$.

Câu 25. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98m và cạnh đáy 180m. Mô hình hoá kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với $ABCD$ là đáy. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng tâm tứ giác $ABCD$ và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OA, OB, OS như hình vẽ (đơn vị: mét).



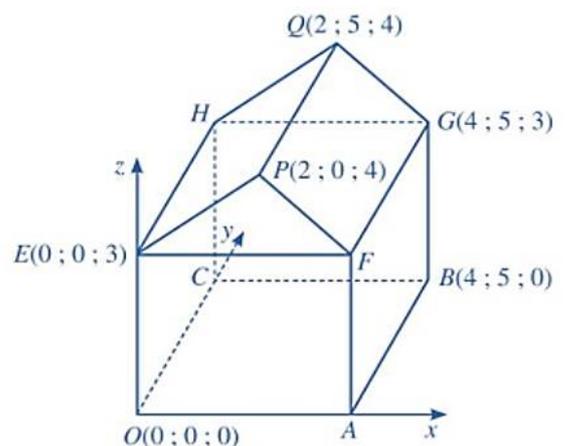
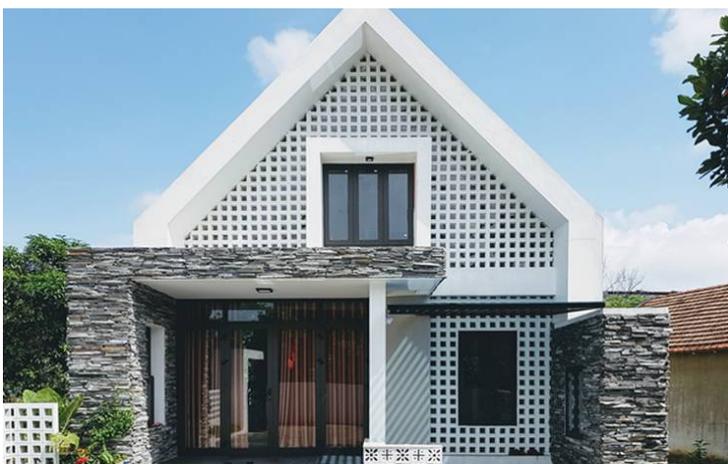
a) Tọa độ các điểm S, A, B, C, D lần lượt là : $S(0; 0; 2), A(0; 0; 0), B(3; 0; 0), C(3; 4; 0), D(0; 0; 4)$.

b) Gọi I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng SC . Khi đó, tọa độ điểm I là $\left(\frac{3}{2}; 2; 0\right)$.

c) $SC = \sqrt{29}$

c) $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}) = \frac{7}{5\sqrt{29}}$

Câu 26. Một ngôi nhà được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



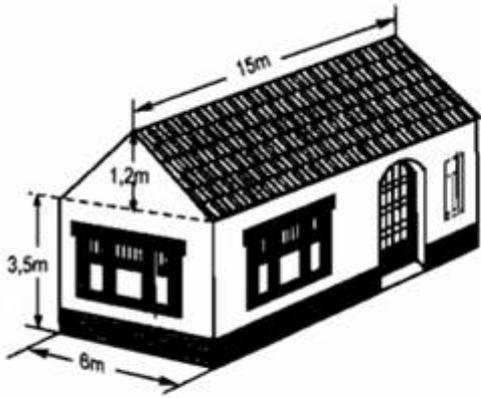
a) Tọa độ điểm H là $(0; 5; 3)$.

b) $AH = \sqrt{2}$

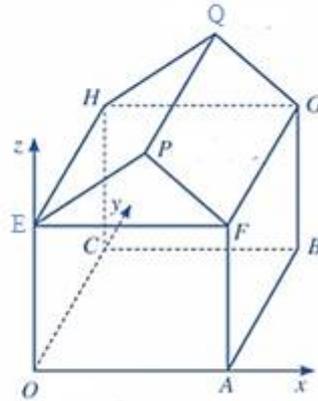
c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 9$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)

Câu 27. Thầy Nam muốn xây một ngôi nhà có kích thước như hình 1. Ngôi nhà được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 2 (đơn vị: mét), trong đó nền nhà, bốn bức tường là hình chữ nhật và hai mái nhà là hai hình chữ nhật bằng nhau.



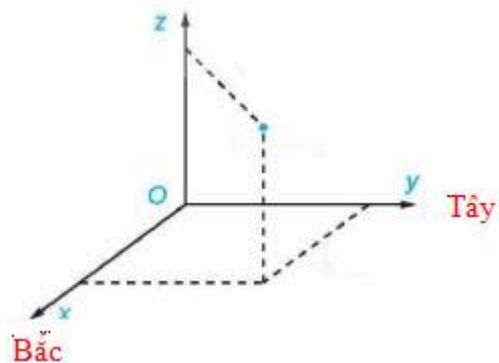
Hình 1



Hình 2

- a) $\vec{OP} = (4; 0; 4, 7)$
- b) $AQ = \sqrt{290} (m)$
- c) Thầy Nam muốn treo bóng đèn tại trung điểm cạnh PQ . Tọa độ vị trí bóng đèn là $(4; 7, 5; 4, 7)$.
- d) Hai mái nhà hợp nhau một góc bằng $33,4^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

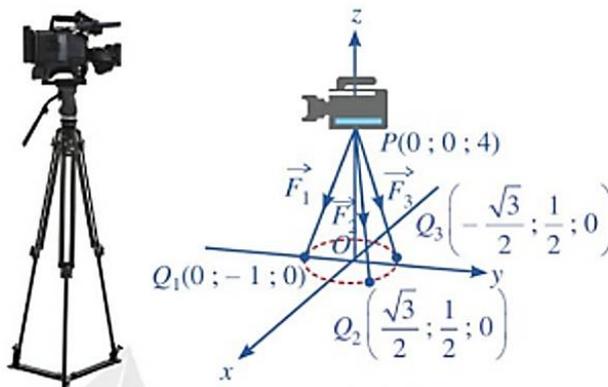
Câu 28. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



- a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(-100; -80; 1)$.
- b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(70; 60; 0, 8)$.
- c) Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là $128(km)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Khoảng cách giữa chiếc kính khí cầu thứ nhất và chiếc kính khí cầu thứ hai là $220(km)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 29. Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $P(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $Q_1(0;-1;0)$, $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ (Hình vẽ). Biết rằng trọng lượng của máy quay là $360 N$.



a) $\overrightarrow{PQ_1} = (0; -1; -4)$

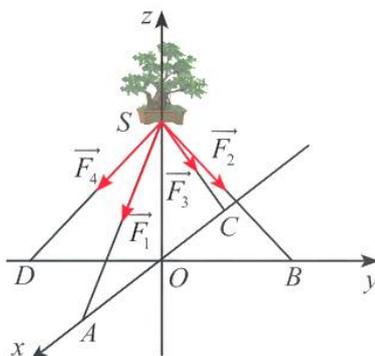
b) $PQ_1 = PQ_2 = PQ_3 = \sqrt{17}$

c) Trọng lực \vec{F} tác dụng lên máy quay có tọa độ là: $(0;0;360)$

d) Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ tác dụng lên giá đỡ có tọa độ lần lượt là:

$\vec{F}_1 = (0; -30; -120); \vec{F}_2 = (15\sqrt{3}; 15; -120); \vec{F}_3 = (-15\sqrt{3}; 15; -120)$

Câu 30. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20;0;0), B(0;20;0), C(-20;0;0), D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn $40 N$ và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình vẽ. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn $1 N$).



a) $\overrightarrow{SA} = (20;0;-20)$

b) $SB = 20$

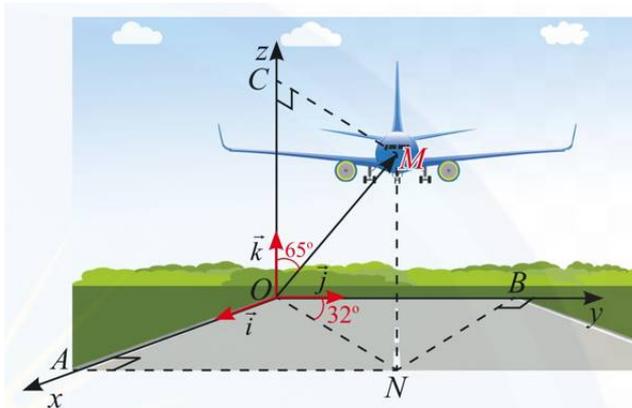
c) $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}) = 120^\circ$

d) Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có tọa độ lần lượt là:

$$\vec{F}_1 = (10; 0; -10), \vec{F}_2 = (0; 10; -10), \vec{F}_3 = (-10; 0; -10), \vec{F}_4 = (0; -10; -10).$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 31. Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình vẽ, cho biết $OM = 14, \widehat{NOB} = 32^\circ, \widehat{MOC} = 65^\circ$. Vị trí máy bay ở điểm M có tọa độ (a, b, c) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$ (kết quả làm tròn đến phần trăm).



Trả lời:

Câu 32. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra ã phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không ðổi từ ðiểm $M(500; 200; 8)$ ðến ðiểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa ðộ của máy bay sau 5 phút tiếp theo có tọa ðộ là (a, b, c) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + 2c$.



Trả lời:

Câu 33. Trong không gian chọn hệ trục tọa ðộ cho trước, đơn vị ðo lấy kilômét, ra ã phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không ðổi từ ðiểm $M(1000; 600; 14)$ ðến ðiểm $N(a, b, c)$ trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa ðộ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400; 800; 16)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + 2c$.



Trả lời:

Câu 34. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó (kết quả làm tròn đến phần chục, đơn vị: km).



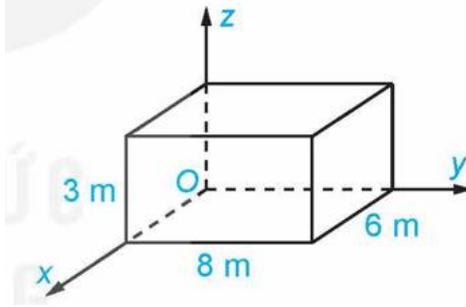
Trả lời:

Câu 35. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo: km).



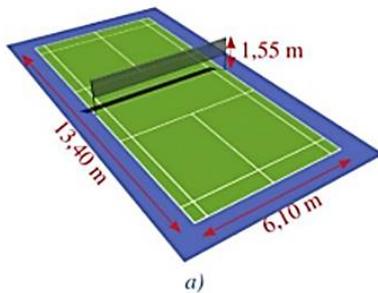
Trả lời:

Câu 36. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là $8m$, chiều rộng là $6m$ và chiều cao là $3m$. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Giả sử tọa độ của điểm treo đèn là (a, b, c) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.



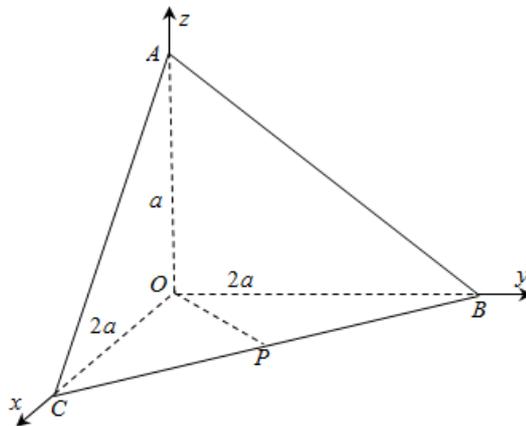
Trả lời:

Câu 37. Hình a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như ở Hình b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới và có tọa độ của vectơ \overline{AB} là (a, b, c) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + 100c$.



Trả lời:

Câu 38. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ). Khi $a = 1$ xác định tung độ của vectơ \overline{AP}

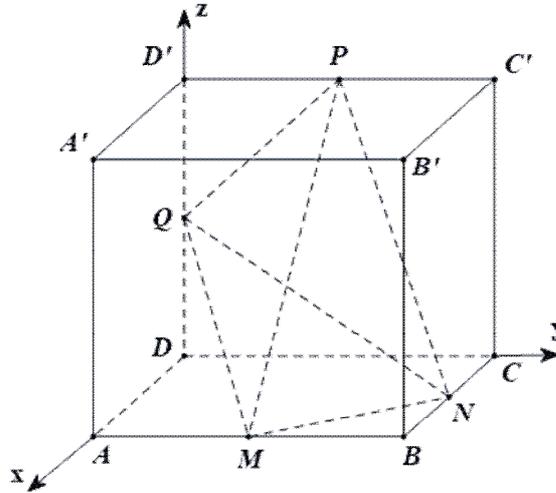


Trả lời:

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2, AB = AC = 1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD . Biết độ dài $BI = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a + b$.

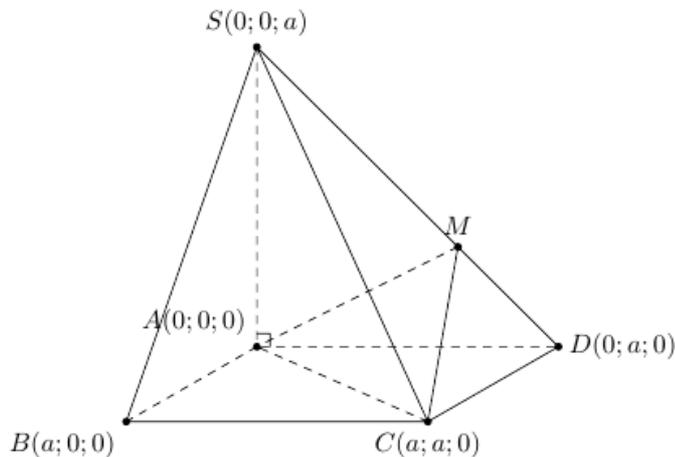
Trả lời:

Câu 40. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Tổng các vector $\overline{MN} + \overline{MP} + \overline{MQ}$ có tọa độ là $(m; n; p)$. Hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m + n + 4p$.



Trả lời:

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với đáy ($ABCD$). Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Khi $a = 1$ thì tổng bình phương hoành độ, tung độ, cao độ của vector \overline{AC} bằng bao nhiêu?

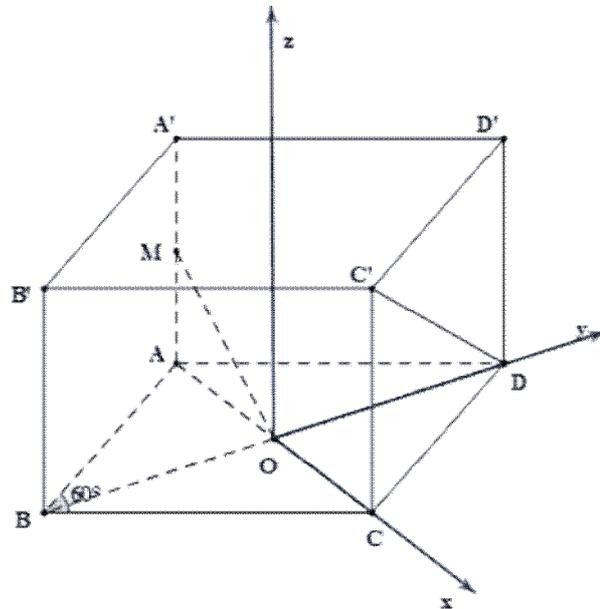


Trả lời:

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN . Biết độ dài cạnh $DG = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m + n$.

Trả lời:

Câu 43. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh 1, $AA' = 1$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Vector $\overline{OC'}$ có tọa độ là $(m; n; p)$. Hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m + n + p$.

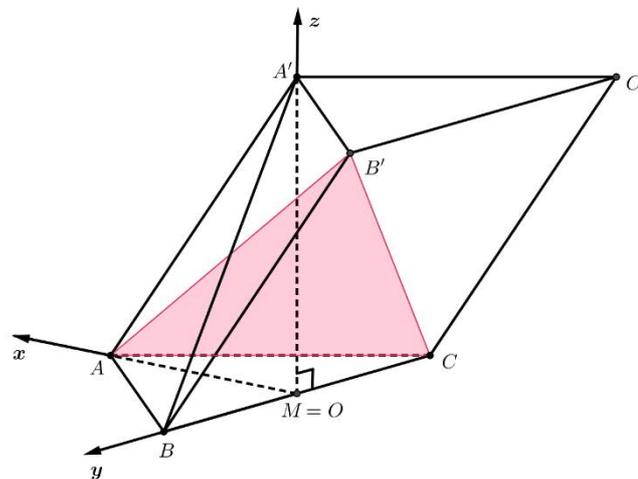


Trả lời:

Câu 44. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD$. Biết độ dài cạnh $C'G = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

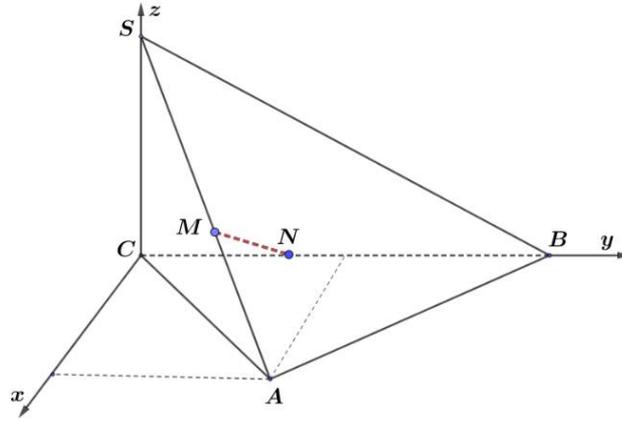
Trả lời:

Câu 45. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC . Khi $a=1$ thì tung độ của $\vec{A'B}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời:

Câu 46. Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = 3\sqrt{2}$, SC vuông góc (ABC) , tam giác ABC vuông tại A , các điểm M và N lần lượt thuộc SA và BC sao cho $AM = CN = 2$. Tung độ của \vec{NB} khi đó bằng bao nhiêu?

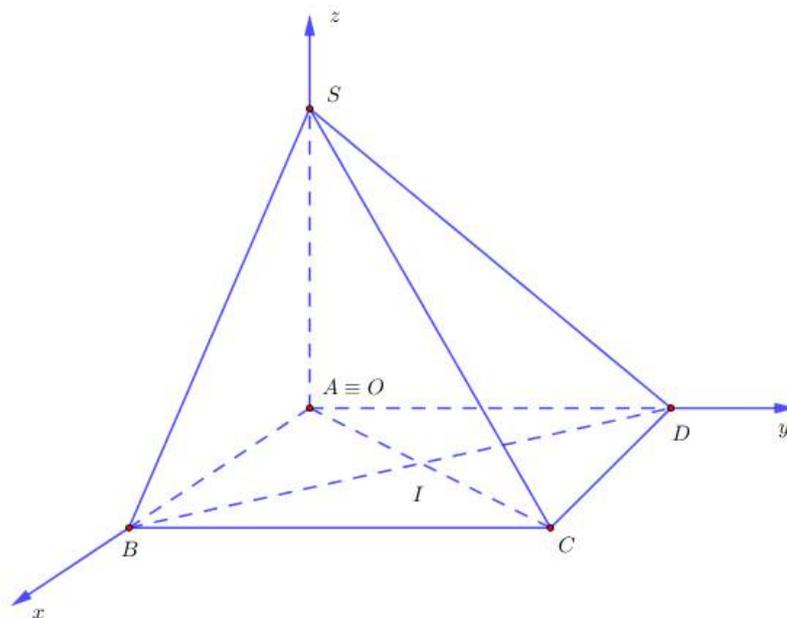


Trả lời:

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD . Biết độ dài cạnh $CG = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời:

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tâm I và độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì tọa độ điểm I là (a, b, c) . Tính $a+b+c$.

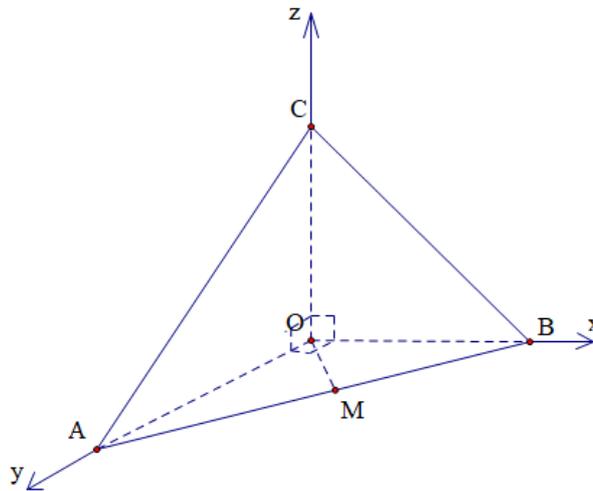


Trả lời:

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Góc NMG của tam giác NMG bằng bao nhiêu độ (kết quả làm tròn đến phần mười độ).

Trả lời:

Câu 50. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OB, OA, OC như hình vẽ. Góc tạo bởi hai vectơ \overrightarrow{BC} và \overrightarrow{OM} bằng bao nhiêu độ?



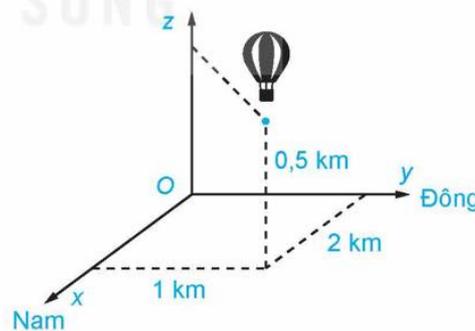
Trả lời:

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 51. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{ km}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5\text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{ km}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.

- a) Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.
- b) Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



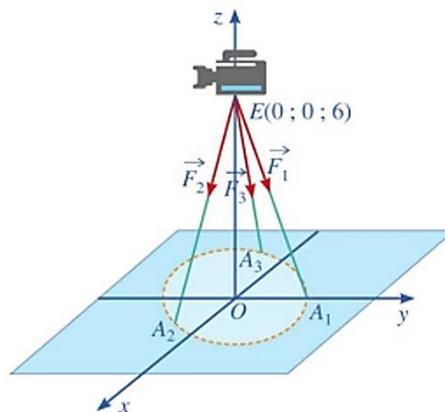
Câu 52. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(\text{km})$ và về phía Nam $40(\text{km})$, đồng thời cách mặt đất $2(\text{km})$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(\text{km})$ và về phía Tây $50(\text{km})$, đồng thời cách mặt đất $4(\text{km})$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



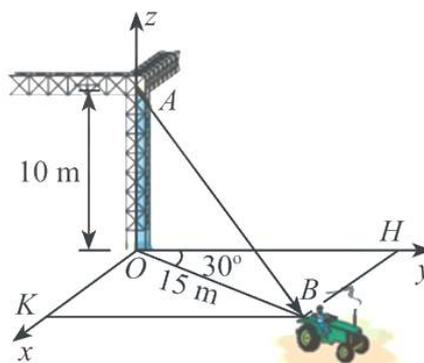
a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Câu 53. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0; 0; 6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0; 1; 0), A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$. Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là $300 N$. Tìm được tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ khi đó tích vô hướng của \vec{F}_1, \vec{F}_2 bằng?



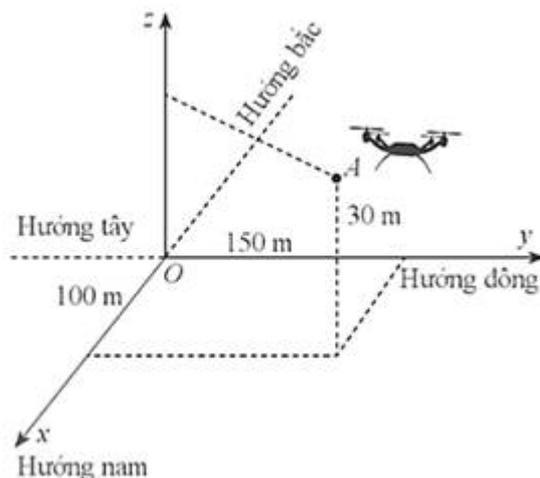
Câu 54. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình vẽ với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1 m$. Tìm được tọa độ của vectơ \vec{AB}



Câu 55. Một người điều khiển một flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Đầu tiên flycam ở vị trí A cách vị trí điều khiển $100 m$ về phía nam và $150 m$ về phía đông, đồng thời cách

mặt đất 30 m (hình vẽ). Để thực hiện nhiệm vụ tiếp theo, người điều khiển flycam đến vị trí B cách vị trí điều khiển 80 m về phía bắc và 120 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 50 m.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 m.



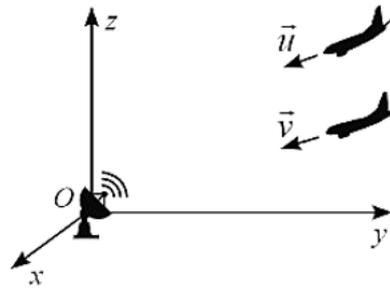
- Xác định tọa độ của flycam tại mỗi vị trí A, B đối với hệ tọa độ đã chọn.
- Tính quãng đường flycam bay từ vị trí A đến vị trí B , biết flycam bay từ vị trí A đến vị trí B theo một đường thẳng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Câu 56. Radar của một trung tâm kiểm soát không lưu sân bay có phạm vi theo dõi 500 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời như hình vẽ bên dưới, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét.



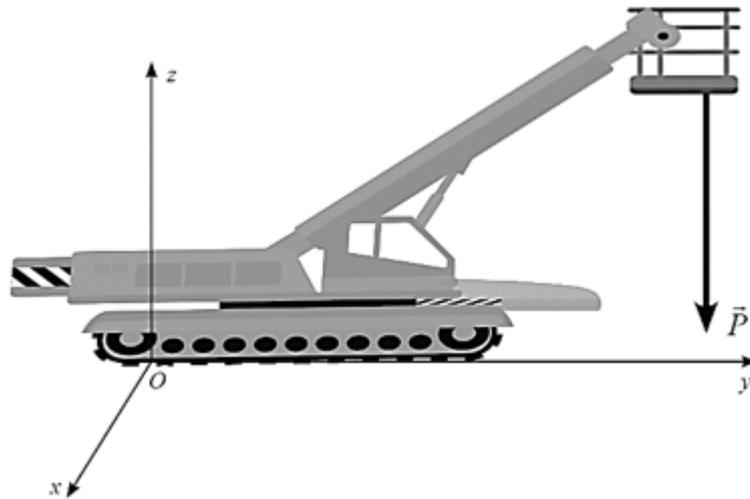
Hỏi radar trung tâm kiểm soát không lưu có thể phát hiện được máy bay tại vị trí A có tọa độ $(-200; 400; 200)$ đối với hệ trục tọa độ không?

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$ được thiết lập tại một sân bay, người ta ghi nhận hai máy bay đang bay đến với các vector vận tốc $\vec{u} = (100; -90; -140)$, $\vec{v} = (90; -70; -80)$.

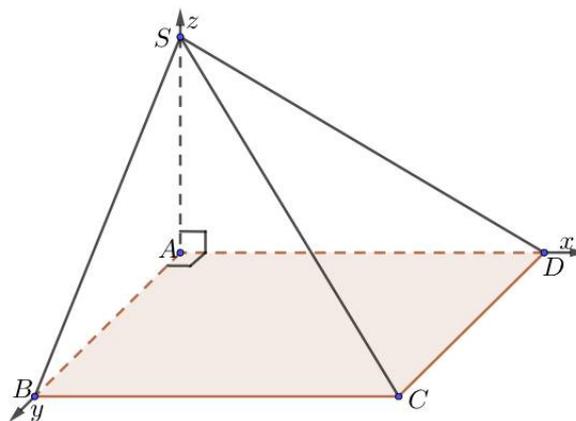


Tính góc giữa hai vector vận tốc nói trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của độ).

Câu 58. Một robot cắt dây đã di chuyển một lực $\vec{P} = (0; 0; -150)$ (đơn vị: N) theo độ dời $\vec{d} = (0; -8; -10)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực \vec{P} khi thực hiện độ dời nói trên.

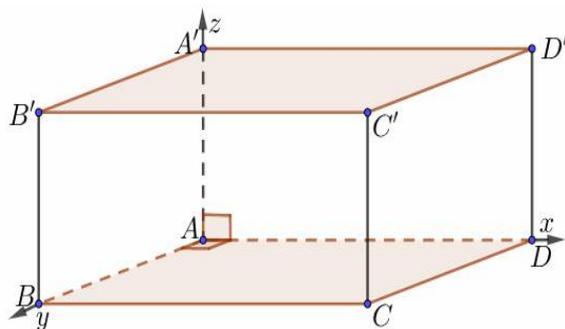


Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3, AD = 4$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết mặt bên (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



- Tìm tọa độ các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác BCD .
- Tính (\vec{SD}, \vec{AC}) .
- Tìm tọa độ điểm M trên đoạn BD sao cho $BM = \frac{2}{3}MD$.

Câu 60. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AA' như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Tính $(\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{D'C})$.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{B'M} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$.

CHỦ ĐỀ 2

ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

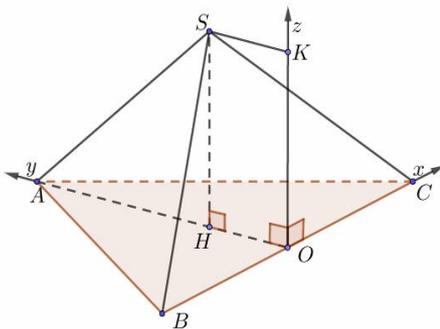
DẠNG 1

ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ TRONG BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH CHÓP ĐẶC BIỆT

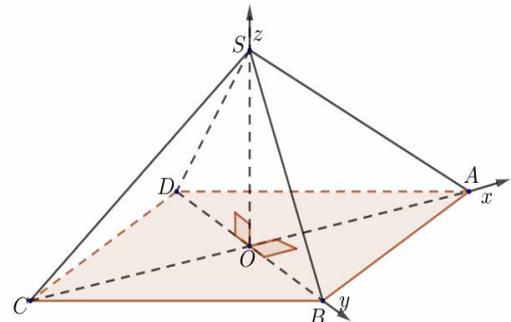
Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, đặt $AB = 1$.
- Dựng hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$,
 $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{OK}{SH}\right)$.

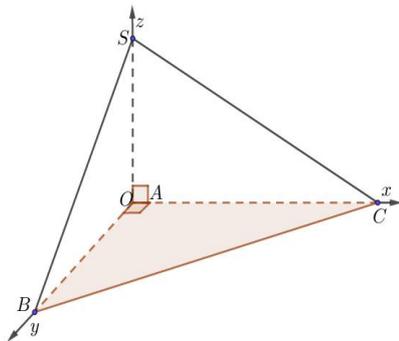
Hình chóp tứ giác đều



- Chọn hệ trục như hình, đặt $AB = 1$.
- Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,
 $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $D\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $S(0;0;SO)$.

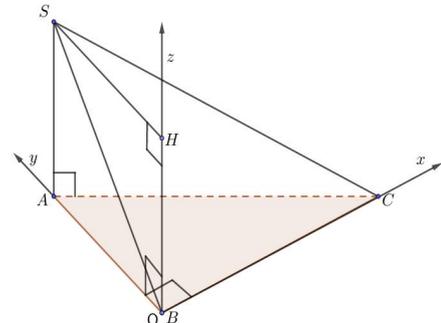
Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác vuông tại A



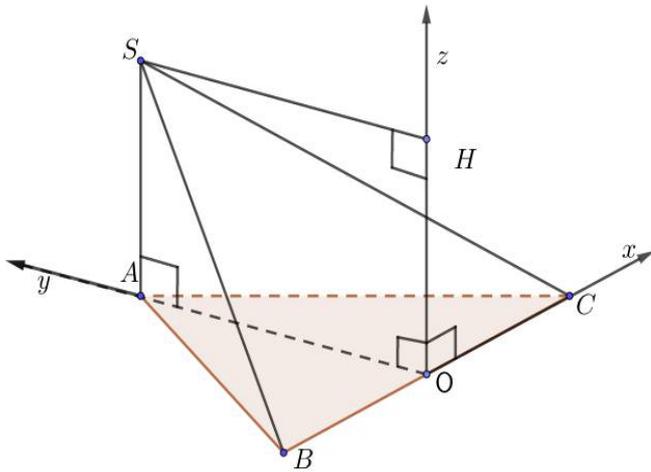
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$,
 $B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là tam giác vuông tại B



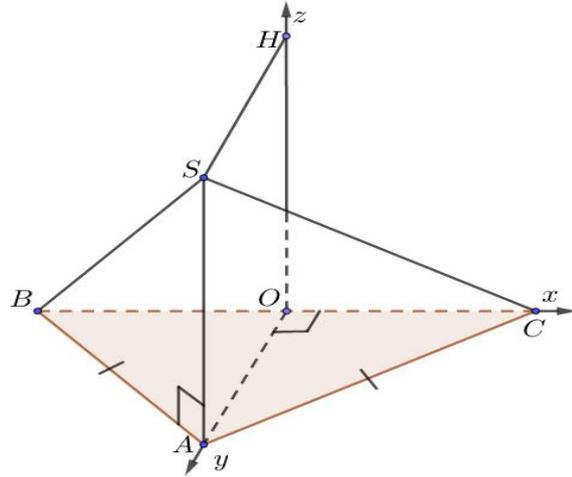
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$, $A(0;AB;0)$,
 $C(BC;0;0)$, $S\left(0;AB; \frac{BH}{SA}\right)$.

Đáy là tam giác đều



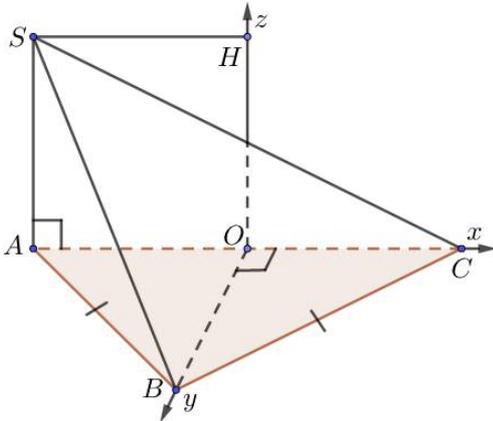
- Gọi O là trung điểm BC .
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = 1$.
- Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$,
 $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại A



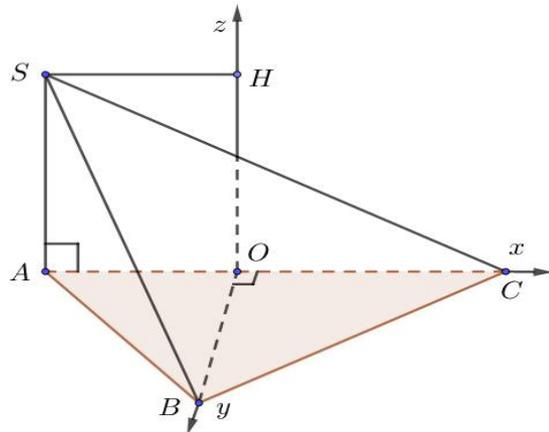
- Gọi O là trung điểm BC .
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm là: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,
 $B(-OB;0;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại B



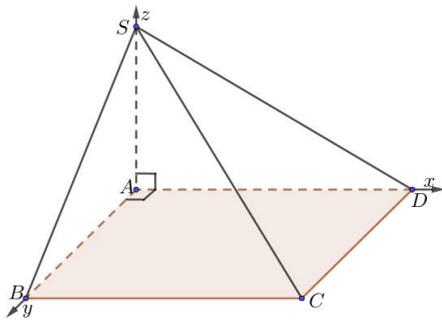
- Gọi O là trung điểm AC .
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,
 $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác thường



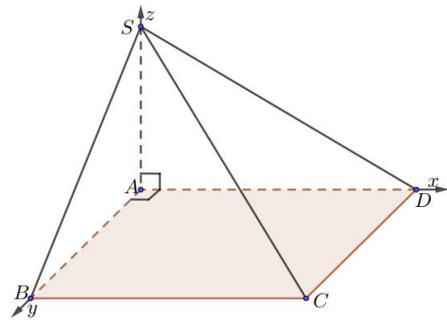
- Dựng đường cao BO của ΔABC .
- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,
 $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là hình vuông



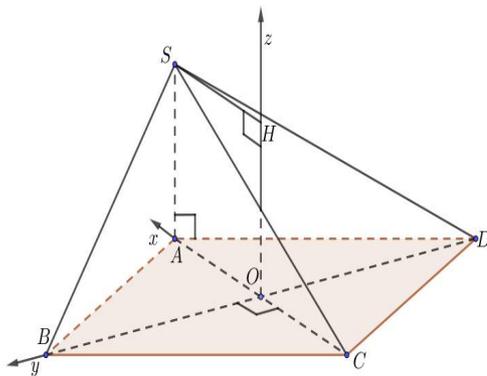
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là hình chữ nhật



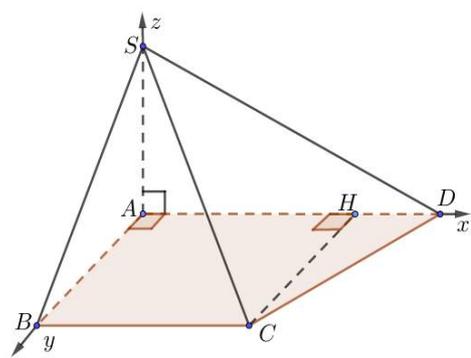
- Chọn hệ trục như hình vẽ
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là hình thoi



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $S(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA})$.

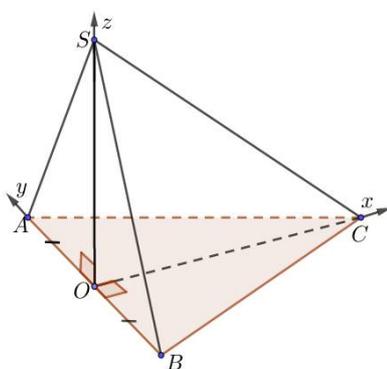
Đáy là hình thang vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

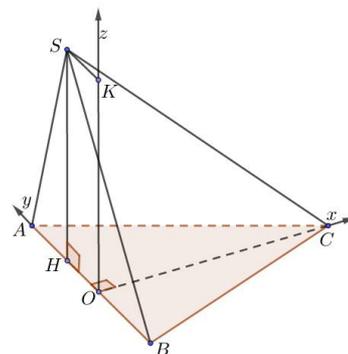
Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



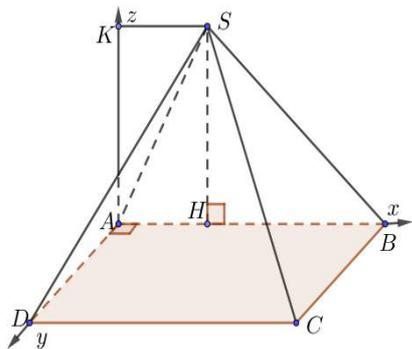
- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



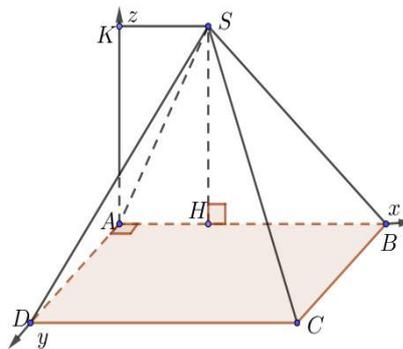
- Vẽ đường cao CO trong ΔABC , chọn hệ trục như hình.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;OH;OK)$

Đáy là hình vuông



- Chọn hệ trục như hình
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underset{=SH}{AK} \right)$

Đáy là hình chữ nhật

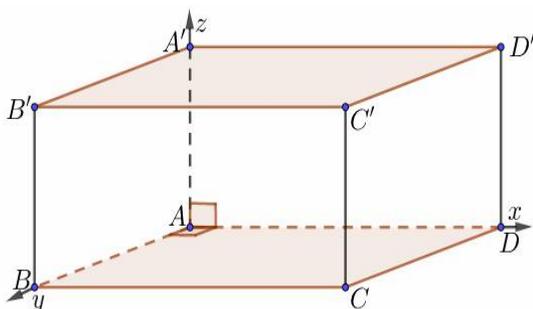


- Chọn hệ trục như hình
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underset{=SH}{AK} \right)$

2. GẮN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

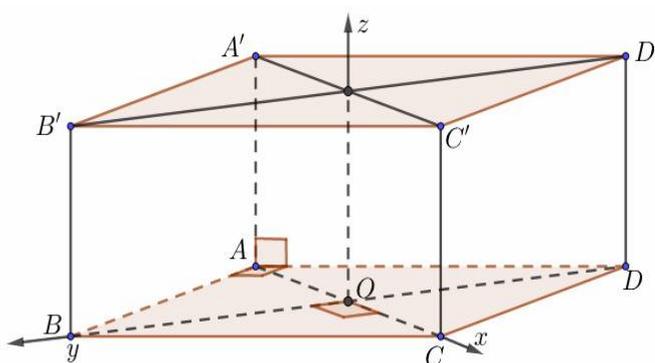
Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



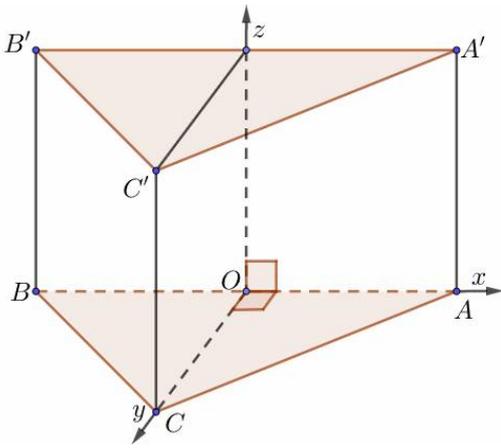
- Dựng hệ trục như hình vẽ.
- Tọa độ điểm:
 $A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AD;AB;0), D(AD;0;0), A'(0;0;AA'), B'(0;AB;AA'), C'(AD;AB;AA'), D'(AD;0;AA')$

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi



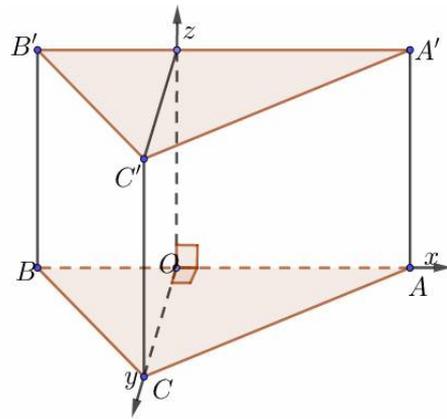
- Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình.
- Tọa độ điểm:
 $O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0;OB;0), C(OC;0;0), D(0;-OD;0), A'(-OA;0;AA'), B'(0;OB;AA'), C'(OC;0;CC'), D'(0;-OD;DD')$

Lăng trụ có đáy tam giác đều hoặc cân



- Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ .
- Tọa độ điểm:
 $O(0;0;0)$, $A\left(\frac{AB}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right)$, $C(0;OC;0)$,
 $A'(OA;0;AA')$, $B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right)$, $C'(0;OC;CC')$.

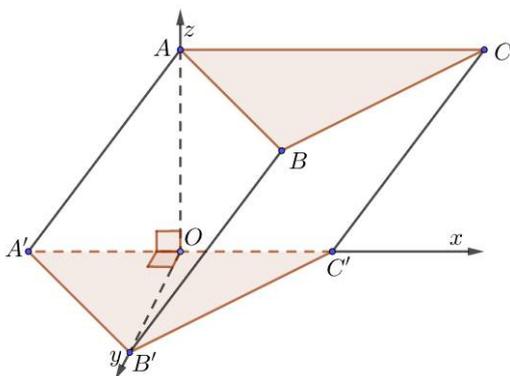
Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



- Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ .
- Tọa độ điểm:
 $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$,
 $A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

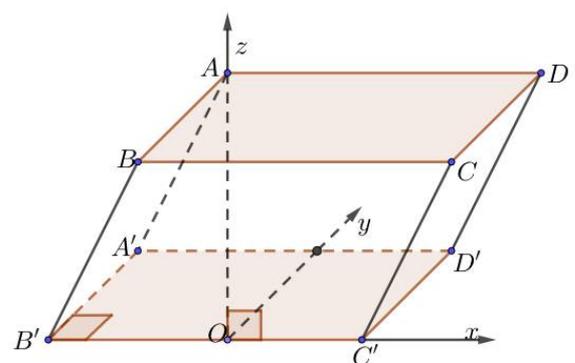
Lăng trụ xiên

Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D, A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

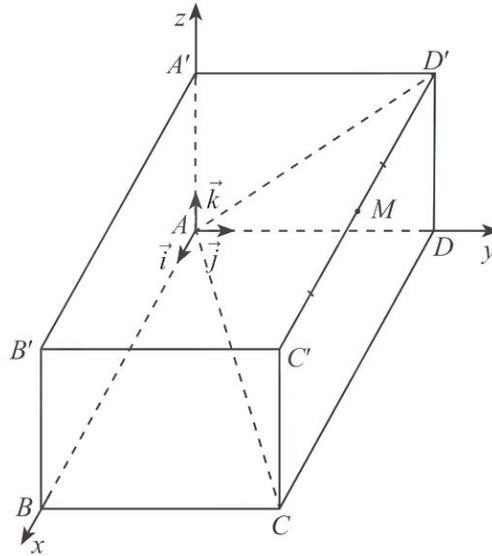
Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 8, AD = 6, AA' = 4$.

a) Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và \overrightarrow{AM} với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh $C'D'$. Tìm tọa độ vectơ \overrightarrow{AM} .

Lời giải

Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có hệ trục như sau:



Để tìm tọa độ của vectơ \overrightarrow{AB} , ta cần biểu diễn \overrightarrow{AB} theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Do \overrightarrow{AB} cùng hướng với \vec{i} và $|\overrightarrow{AB}| = AB = 8 = 8|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}, \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$.

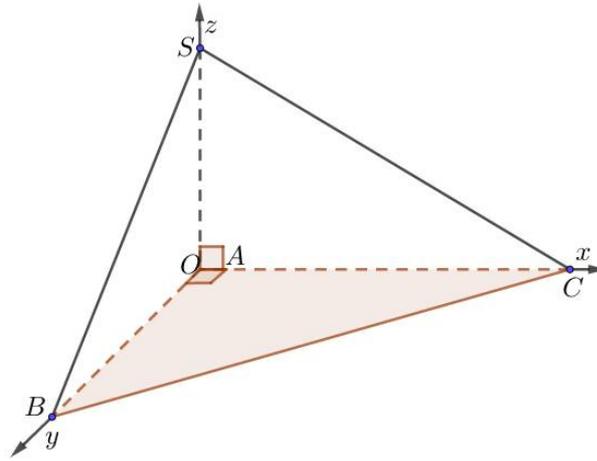
Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (8; 0; 0); \overrightarrow{AC} = (8; 6; 0); \overrightarrow{AC'} = (8; 6; 4)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \frac{1}{2}(8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} + 6\vec{j} + 4\vec{k}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (4; 6; 4)$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, AB, AC đôi một vuông góc và $AS = 2025; AB = AC = 2026$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AC, AB, AS như hình vẽ.



- a) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S
 b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm tọa độ vector \overrightarrow{SG} .

Lời giải

a) Ta có: $A(0;0;0), B(0;2026;0), C(2026;0;0), S(0;0;2025)$

b) G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2026}{3}$$

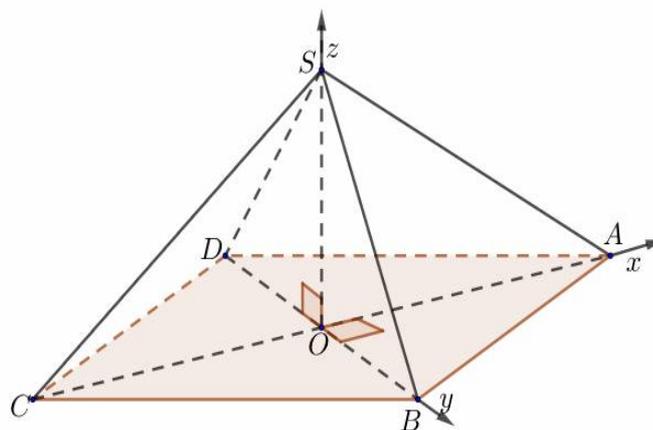
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2026}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{2026}{3}; \frac{2026}{3}; 0\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SG} = \left(\frac{2026}{3}; \frac{2026}{3}; -2025\right)$$

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = \sqrt{2}$, $SA = \sqrt{10}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng tâm hình vuông $ABCD$ và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OA, OB, OS như hình vẽ.



- a) Tìm tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB
 b) Tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SD}$.

Lời giải

$ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = \sqrt{2} \Rightarrow AC = 2$

O trùng tâm hình vuông $ABCD$ nên $OA = OB = OC = OD = \frac{AC}{2} = 1$

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 3$$

Ta có: $O(0;0;0), A(1;0;0), B(0;1;0), C(-1;0;0), D(0;-1;0), S(0;0;3)$

a) Gọi I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB

$$I\left(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}\right) \text{ hay } I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

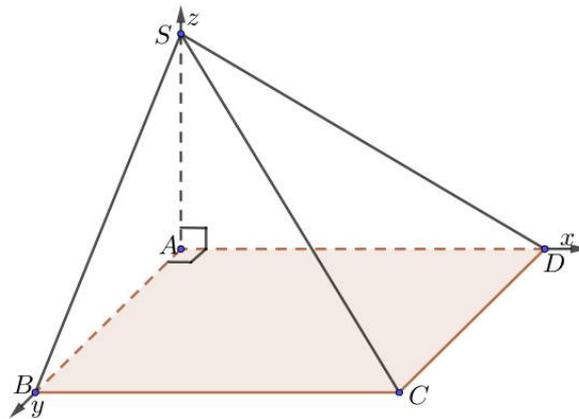
b) Ta có:

$$\overrightarrow{SC} = (-1; 0; -3)$$

$$\overrightarrow{SD} = (0; -1; -3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SD} = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3) = 9$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ tâm hình vuông $ABCD$.

b) Tính $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD})$.

Lời giải

$ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3 $\Rightarrow AC = 3\sqrt{2}$

SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = 3\sqrt{2}$

Ta có: $A \equiv O(0;0;0), B(0;3;0), C(3;3;0), D(3;0;0), S(0;0;3\sqrt{2})$

a) Gọi I là tọa độ tâm hình vuông $ABCD$, suy ra I là trung điểm đoạn thẳng AC

$$I\left(\frac{0+3}{2}; \frac{0+3}{2}; \frac{0+0}{2}\right) \text{ hay } I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right).$$

b) Ta có:

$$\overline{SC} = (3; 3; 3\sqrt{2}) \Rightarrow SC = 6$$

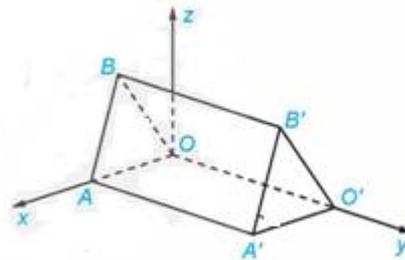
$$\overline{SD} = (3; 0; 3\sqrt{2}) \Rightarrow SD = 3\sqrt{3}$$

$$\cos(\overline{SC}, \overline{SD}) = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SD}}{|\overline{SC}| \cdot |\overline{SD}|} = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{6 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\overline{SC}, \overline{SD}) = 60^\circ$$

Bài 5. Những căn nhà gỗ trong Hình a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình b với OAB là tam giác cân tại B . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình b (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Tính kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ.



a)



b)

Lời giải

Vì điểm A' có tọa độ là $(240; 450; 0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là 450cm và 240cm . Suy ra $A'A = 450\text{cm}$ và $A'O = 240\text{cm}$.

Từ giả thiết suy ra $\overline{A'B'} = (-120; 0; 300)$, do đó $A'B' = |\overline{A'B'}| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{cm})$.

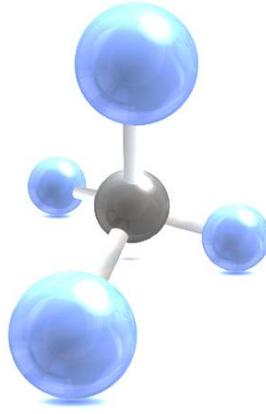
Vì $O'O = A'A = 450\text{cm}$ và O' nằm trên trục Oy nên tọa độ của điểm O' là $(0; 450; 0)$.

Do đó $\overline{O'B'} = (120; 0; 300)$ và $O'B' = |\overline{O'B'}| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{cm})$.

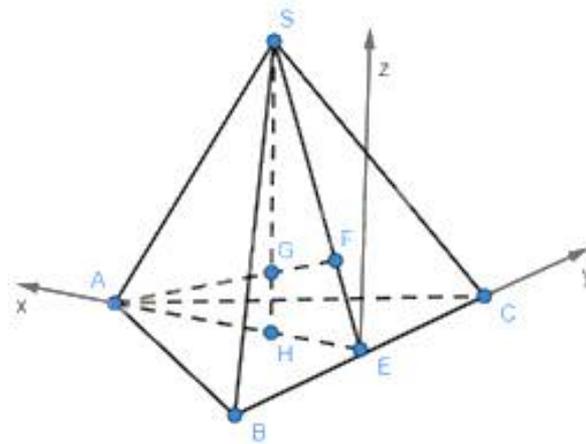
Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là 450cm , chiều rộng là 240cm , mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323cm .

Bài 6. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó.

Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H - C - H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này.



Lời giải



Từ hình vẽ ta thấy góc liên kết là góc (\vec{GA}, \vec{GS})

Ta có: $AE \perp BC, SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AE \\ SH \perp BC \end{cases}$ nên ta có hệ trục tọa độ như hình với E trùng với gốc

tọa độ O

Giả sử các cạnh của tứ diện có độ dài là a

$$\text{Ta có: } SE = AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$$

$$HE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow H\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right)$$

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$$

Lại có: $\frac{FE}{SE} = \frac{HE}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow FH \parallel SA$ và AF cắt SH tại G nên $\frac{GH}{GS} = \frac{GF}{GE} = \frac{FH}{SA} = \frac{HE}{AE} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow GH = \frac{1}{4}SH = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$$

Do đó: $\vec{GA} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; -\frac{a\sqrt{6}}{12}\right) \Rightarrow GA = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$$\vec{GS} = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{4} \right) \Rightarrow GS = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

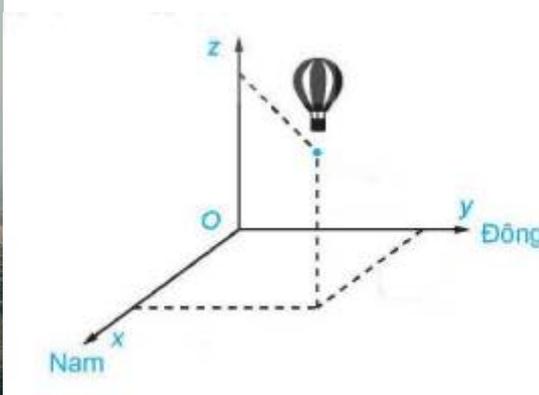
$$\text{Ta có: } \cos(\vec{GA}, \vec{GS}) = \frac{-\frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\vec{GA}, \vec{GS}) \approx 109,5^\circ$$

DẠNG 2

ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



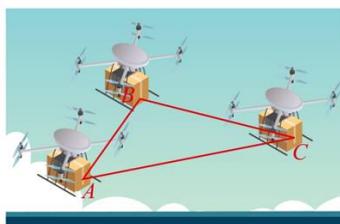
- a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- b) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Lời giải

- a) Chiếc khinh khí cầu có tọa độ $(5;10;0,4)$.
- b) Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{5^2 + 10^2 + (0,4)^2} \approx 11,2(km)$

Bài 2. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1;1;1)$, $B(5;7;9)$, $C(9;11;4)$.

- a) Tính các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.
- b) Tính góc \widehat{BAC} .



Lời giải

- a) Ta có:

$$\overline{AB} = (4; 6; 8) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2} = 2\sqrt{29}$$

$$\overline{AC} = (8; 10; 3) \Rightarrow \sqrt{8^2 + 10^2 + 3^2} = \sqrt{173}$$

$$\overline{BC} = (4; 4; -5) \Rightarrow \sqrt{4^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{57}$$

$$b) \cos \widehat{BAC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{4 \cdot 8 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 3}{2\sqrt{29} \cdot \sqrt{173}} \approx 0,82 \Rightarrow \widehat{BAC} = 35,03^\circ$$

Bài 3. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực \vec{F} tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N , thì công A sinh bởi lực \vec{F} được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \overline{MN}$.

Trong không gian $Oxyz$, một người tác động một lực không đổi $\vec{F} = (2; 3; -1)$ vào một vật đang ở gốc tọa độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1; 2; 1)$. Biết lực tính bằng newton (N) và đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, làm thế nào để tính công A (đơn vị: J) sinh ra bởi lực \vec{F} trong tình huống này?

Lời giải

Trong không gian $Oxyz$, một người đã tác động một lực không đổi $\vec{F} = (2; 3; -1)$ vào một vật đang ở gốc tọa độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1; 2; 1)$.

Ta có $\overline{OM} = (1; 2; 1)$. Từ đó ta tính được công sinh ra bởi lực \vec{F} là:

$$A = \vec{F} \cdot \overline{OM} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 7.$$

Như vậy công sinh ra bởi lực \vec{F} trong tình huống này là $A = 7$ (J).

Bài 4. Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km . Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(25; 15; -10)$ đối với hệ tọa độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



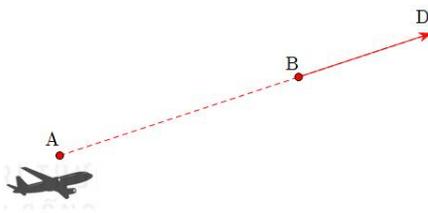
Lời giải

$$\text{Vì } \overline{OM}(25; 15; -10) \Rightarrow OM = \sqrt{25^2 + 15^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{38} > 30$$

Do đó, ra đa không thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(25; 15; -10)$ đối với hệ tọa độ nói trên.

Bài 5. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm

$B(940;550;8)$ trong 25 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 25 phút tiếp theo như thế nào?



Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 25 phút bay tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

Vì hướng của máy bay không đổi nên \overline{AB} và \overline{BD} cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên $AB = BD \Rightarrow \overline{BD} = \overline{AB}$.

Ta có:

$$\overline{AB} = (140; 50; 1)$$

$$\overline{BD} = (x - 940; y - 550; z - 8)$$

$$\text{Mà } \overline{BD} = \overline{AB} \text{ nên } \begin{cases} x - 940 = 140 \\ y - 550 = 50 \\ z - 8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases} \Rightarrow D(1080; 600; 9)$$

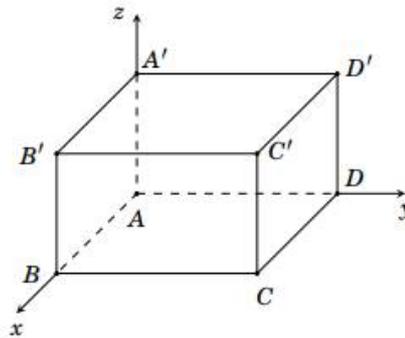
Vậy tọa độ của máy bay trong 25 phút tiếp theo là $(1080; 600; 9)$.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (góc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm C' là

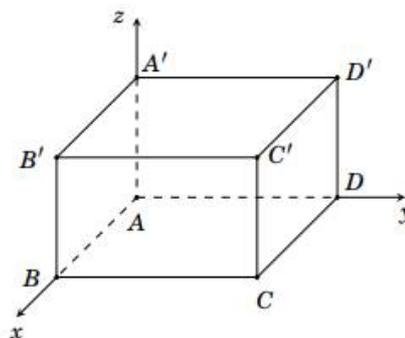
- A. $C'(2;2;0)$ B. $C'(2;2;2)$ C. $C'(2;0;2)$ D. $C'(2;0;0)$

Lời giải

Chọn C.

Với A là gốc tọa độ thì $C'(2;0;2)$

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (góc tọa độ O trùng với điểm A).



Tọa độ điểm B' là

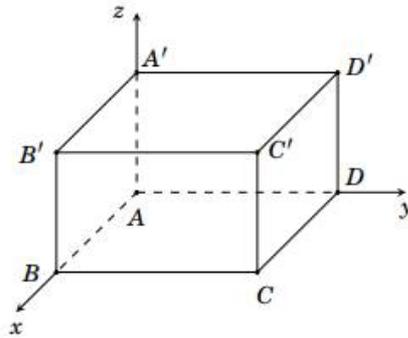
- A. $B(2;0;2)$ B. $B(2;2;2)$ C. $B(2;2;0)$ D. $B(0;2;0)$

Lời giải

Chọn A.

Với A là gốc tọa độ thì $B(2;0;2)$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Tọa độ điểm E là

- A.** $E\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ **B.** $E\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ **C.** $E\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ **D.** $E\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$

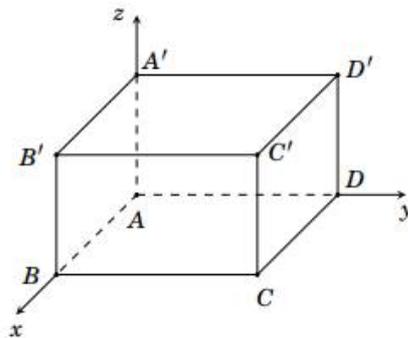
Lời giải

Chọn A.

$$A(0;0;0), C(1;2;0)$$

E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ nên điểm E là trung điểm $AC \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};1;0\right)$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2, AA'=3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Tọa độ điểm E là

- A.** $E(1;2;3)$ **B.** $E(1;2;6)$ **C.** $E\left(\frac{1}{2};1;3\right)$ **D.** $E\left(3;\frac{1}{2};1\right)$

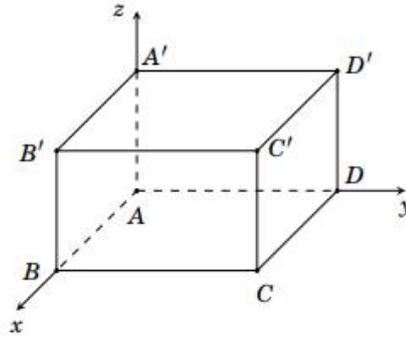
Lời giải

Chọn C.

$$A'(0;0;3), C'(1;2;3)$$

E là tâm của hình chữ nhật $A'B'C'D'$ nên điểm E là trung điểm $A'C' \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};1;3\right)$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2, AA'=3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Gọi E là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tọa độ điểm E là

- A. $E\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$ B. $E\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)$ C. $E\left(\frac{1}{2};1;3\right)$ D. $E\left(3;\frac{1}{2};1\right)$

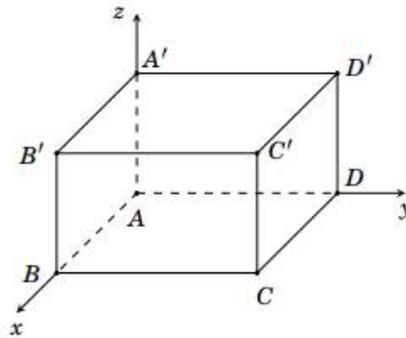
Lời giải

Chọn B.

$$A(0;0;0), C'(1;2;3)$$

E là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên điểm E là trung điểm $AC' \Rightarrow E\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=1, AD=2, AA'=3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây.



Tọa độ $\overline{B'D}$ là

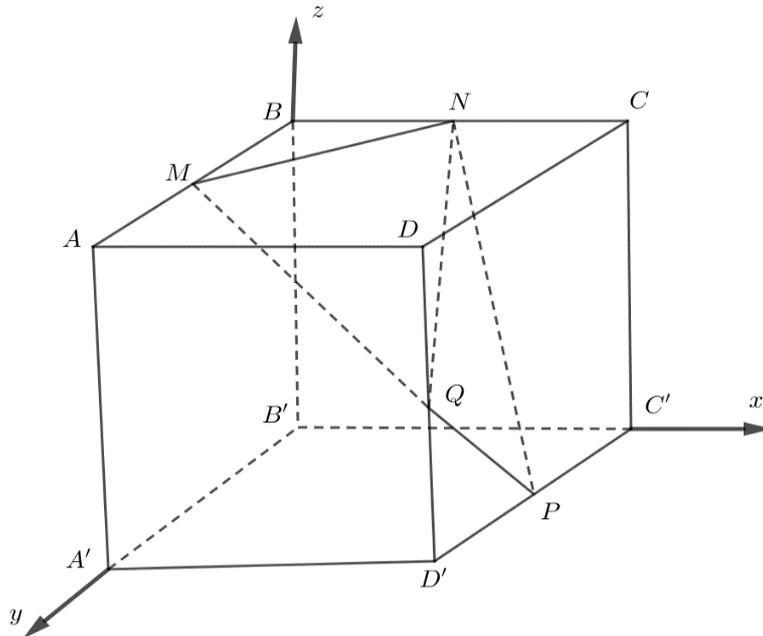
- A. $(1;2;3)$ B. $(-1;2;-3)$ C. $(1;2;-3)$ D. $(-1;2;3)$

Lời giải

Chọn B.

$$B'(1;0;3), D(0;2;0) \Rightarrow \overline{B'D} = (-1;2;-3)$$

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng B' và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia $B'C', B'A', B'B$ như hình vẽ. Xác định tọa độ các điểm M, N, P, Q .



- A. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.
- B. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P(1; 1; 0), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.
- C.** $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.
- D. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

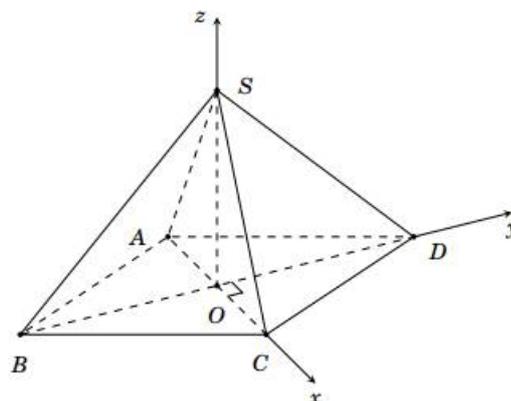
Lời giải

Chọn C.

Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc $O \equiv B'$.

Khi đó: $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ \overline{SC} là:



A. $\vec{SC} = (2a; 0; -2a)$

B. $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$

C. $\vec{SC} = (2a; -a; -2a)$

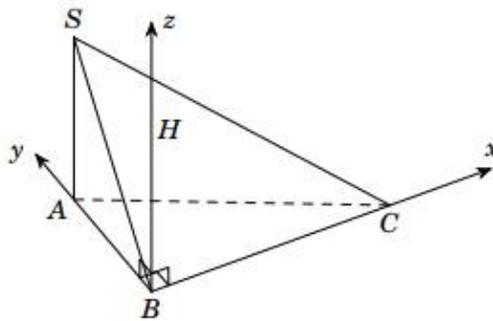
D. $\vec{SC} = (a; 0; 2a)$

Lời giải

Chọn B.

Tọa độ \vec{SC} là $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$.

Câu 9. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm B). Tìm khẳng định **sai**



A. $A(0; 2; 0)$

B. $S(-2; 2; 2)$

C. $C(0; 0; 3)$

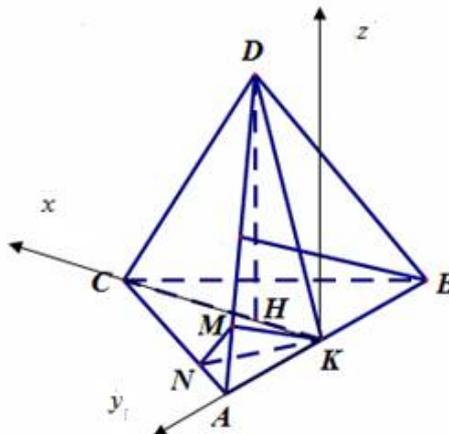
D. $B(0; 0; 0)$

Lời giải

Chọn B.

Tọa độ điểm $S(0; 2; 2)$

Câu 10. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a và H là tâm của tam giác ABC . Gọi K là trung điểm AB , gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng K và các tia Ox, Oy lần lượt trùng với các tia KC, KA và tia Oz vuông góc mặt phẳng (ABC) tại K như hình vẽ. Xác định tọa độ các điểm M, N theo a .



A. $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$.

B. $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.

C. $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$.

D. $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $KC = \frac{\sqrt{3}}{2}a; DH = \frac{\sqrt{6}}{3}a; HK = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

$AN = \frac{1}{4}AC; AM = \frac{1}{4}AD$

Theo hình vẽ ta có: $K \equiv O(0;0;0), A\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), D\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$

Vậy $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$

Câu 11. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 5, OB = 2, OC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN . Khoảng cách từ G đến K là:

A. $GK = \frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $GK = \frac{\sqrt{3}}{2}$

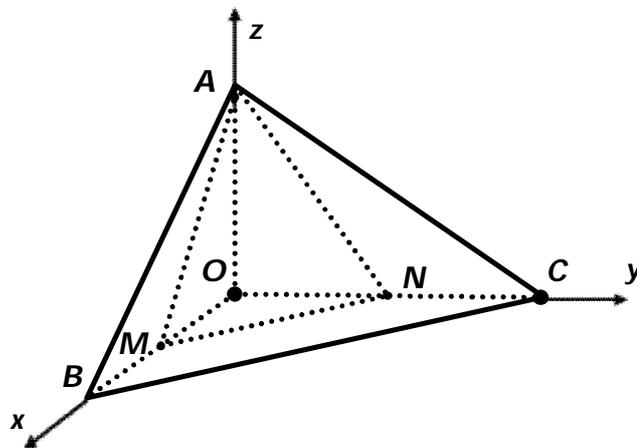
C. $GK = \frac{1}{2}$

D. $GK = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0), A \in Oz, B \in Ox, C \in Oys$ sao cho $AO = 5, OB = 2, OC = 4$

$\Rightarrow A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0)$.

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1; 0; 0)$

N là trung điểm OC nên $N(0; 2; 0)$.

K là trọng tâm tam giác AMN nên $K\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

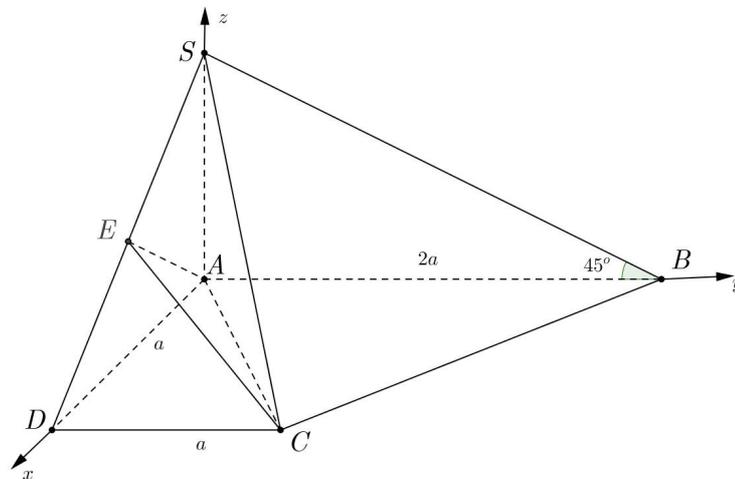
Khoảng cách từ G đến K là: $GK = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE . Độ dài BG là:

- A. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{6}$. B. $BG = \frac{a\sqrt{113}}{6}$. C. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{2}$. D. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AB \Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Tam giác SAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0; 0; 0)$, $B(2a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$, $D(a; 0; 0)$, $S(0; 0; 2a)$,

$E\left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ACE \Rightarrow G\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$

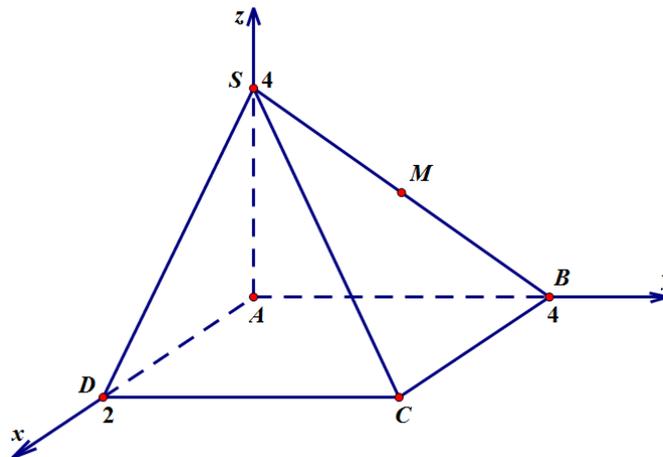
Độ dài BG là: $BG = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 2a\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 0\right)^2} = \frac{a\sqrt{113}}{6}$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD . Độ dài MG là:

- A. $MG = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $MG = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $MG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $MG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ : $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$.

M là trung điểm của $SB \Rightarrow M(0;2;2)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;4;0)$.

G là trọng tâm của tam giác $SCD \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$

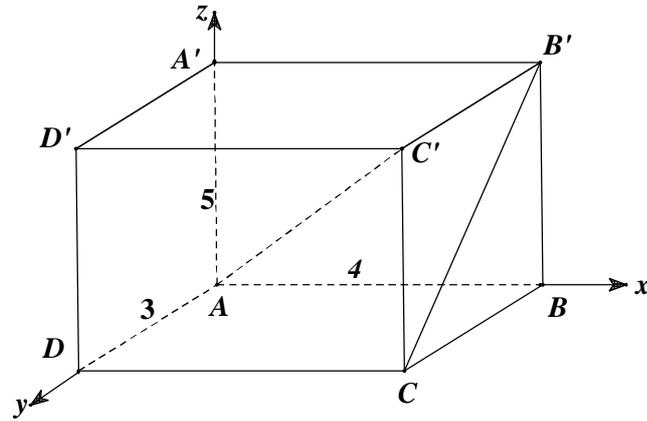
Độ dài MG là: $MG = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB = 4, AD = 3, AA' = 5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB' . Độ dài BG là:

- A. $BG = \frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $BG = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



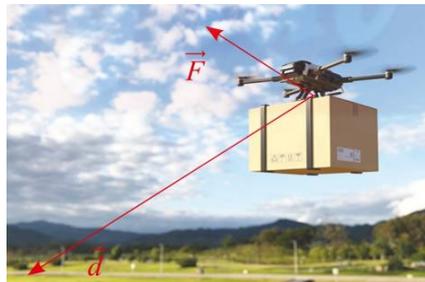
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Có $A(0;0;0), C(4;3;0), B'(4;0;5), B(4;0;0),$

G là trọng tâm của tam giác $ACB' \Rightarrow G\left(\frac{8}{3}; 1; \frac{5}{3}\right)$

Độ dài BG là: $BG = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-4\right)^2 + (1-0)^2 + \left(\frac{5}{3}-0\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

Câu 15. Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = (20; 30; -10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (Hình vẽ) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150; 200; 100)$ (đơn vị: m).



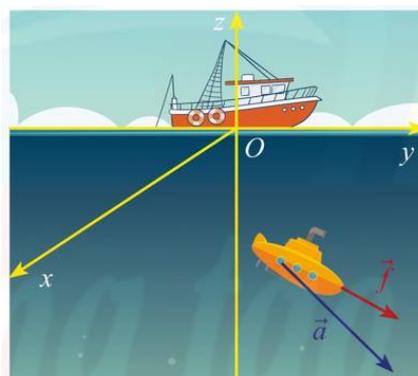
- A. 3200J . B. 8000J . C. 10000J . D. 5800J .

Lời giải

Chọn B

Công sinh bởi lực \vec{F} là: $A = \vec{F} \cdot \vec{d} = 20.150 + 30.200 - 10.100 = 8000J$

Câu 16. Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình vẽ) được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực \vec{f} .



A. 510J .

B. 350J .

C. 700J .

D. 450J .

Lời giải

Chọn A

Công sinh bởi lực \vec{f} là: $A = \vec{f} \cdot \vec{a} = 5.70 + 4.20 - 2 \cdot (-40) = 510J$

Câu 17. Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía Tây, trục Oy hướng về phía Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía Nam với tốc độ không đổi là 890 km/h trong 45 phút. Xác định tọa độ của vector biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong 45 phút đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét.



A. $(0; 890; 0)$.

B. $(0; 667,5; 0)$.

C. $(0; 0; 667,5)$.

D. $(667,5; 0; 667,5)$.

Lời giải

Chọn B

Quãng đường máy bay bay được với vận tốc 890 km/h trong 45 phút là: $890 \cdot \frac{45}{60} = 667,5(\text{km})$

Vì máy bay duy trì hướng bay về phía nam nên tọa độ của vector biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó với hệ tọa độ đã chọn là $(0; 667,5; 0)$.

Câu 18. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 40 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 20 phút tiếp theo là gì?



A. $(910; 575; 8,5)$

B. $(1010; 550; 17)$

C. $(1010; 575; 17)$

D. $(1010; 575; 8,5)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 20 phút tiếp theo.

Vì hướng của máy bay không đổi nên \overline{AB} và \overline{BC} cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC \Rightarrow \overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Ta có:

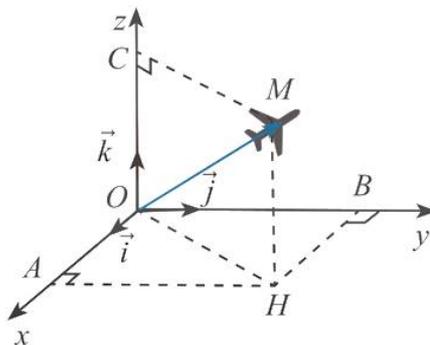
$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{8-7}{2} \right) = (70; 25; 0,5).$$

$$\overline{BC} = (x-940; y-550; z-8)$$

$$\text{Mà } \overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \text{ nên } \begin{cases} x-940 = 70 \\ y-550 = 25 \\ z-8 = 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 8,5 \end{cases} \Rightarrow C(1010; 575; 8,5)$$

Vậy tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010; 575; 8,5)$.

Câu 19. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình vẽ.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50, (\vec{i}, \overline{OH}) = 64^\circ, (\overline{OH}, \overline{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M (kết quả làm tròn đến phần trăm)

A. $M(30,07; 14,67; 37,16)$

B. $M(14,67; 30,07; 37,16)$

C. $M(37,16; 14,67; 30,07)$

D. $M(14,67; 37,16; 30,07)$

Lời giải

Chọn B

$$OC = MH = OM \cdot \sin(\overline{OH}; \overline{OM}) = 50 \cdot \sin 48^\circ \approx 37,16$$

$$OH = OM \cdot \cos(\overline{OH}; \overline{OM}) = 50 \cdot \cos 48^\circ = 50 \cdot \cos 48^\circ \approx 33,46$$

$$OA = OH \cdot \cos(\vec{i}; \overline{OH}) = 33,46 \cdot \cos 64^\circ = 33,46 \cdot \cos 64^\circ \approx 14,67$$

$$OB = OH \cdot \cos(90^\circ - (\vec{i}; \overline{OH})) = 33,46 \cdot \cos(90^\circ - 64^\circ) = 33,46 \cdot \cos 26^\circ \approx 30,07$$

$$\Rightarrow M(14,67; 30,07; 37,16)$$

Câu 20. Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A .



Tính tốc độ của máy bay B (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

- A. 1414 km/h B. 1515 km/h C. 1717 km/h D. 1616 km/h

Lời giải

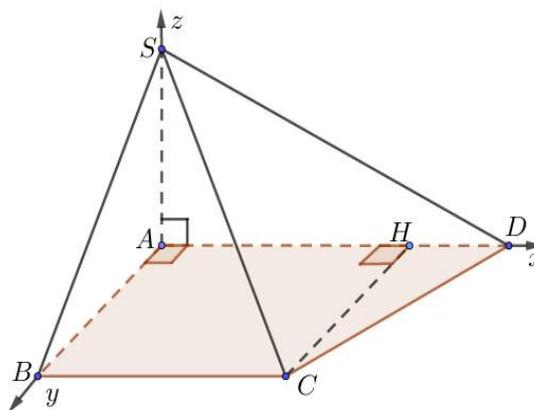
Chọn D

Gọi vectơ $\vec{b} = (x; y; z)$ (đơn vị: km/h) là vectơ vận tốc của máy bay B

$$\text{Ta có: } 3\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.300 = x \\ 3.200 = y \\ 3.400 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \\ z = 1200 \end{cases} \Rightarrow \vec{b} = (900; 600; 1200)$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 4$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 4$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm A, B, C, D, H lần lượt là :

$$A(0;0;0), B(0;2;0), C(2;2;0), D(4;0;0), S(0;0;4), H(2;0;0)$$

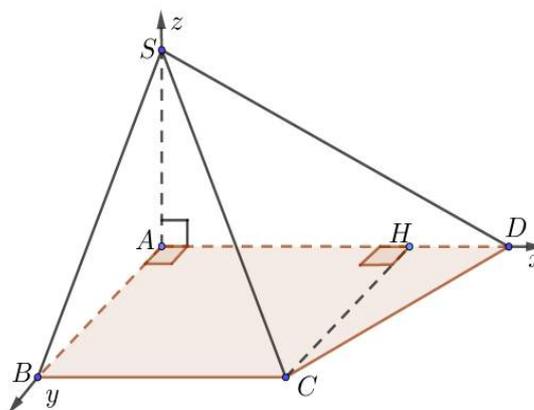
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC . Khi đó, tọa độ vector \overrightarrow{AG} là $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

c) $HG = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI



Dễ tính được $AB = BC = AH = CH = 4$

a) ta có $A(0;0;0), B(0;2;0), C(2;2;0), D(4;0;0), S(0;0;4), H(2;0;0)$

b) G là trọng tâm của tam giác SBC nên

$$x_G = \frac{x_S + x_B + x_C}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_G = \frac{y_S + y_B + y_C}{3} = \frac{4}{3}$$

$$z_G = \frac{z_S + z_B + z_C}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

$$c) \overrightarrow{HG} = \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow HG = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

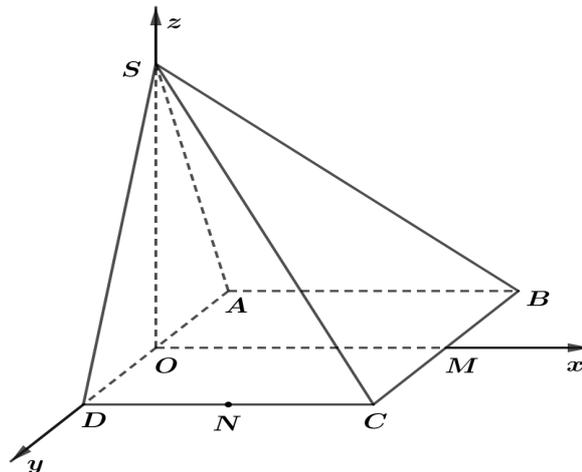
d) Ta có:

$$\overrightarrow{SB} = (0; 2; -4)$$

$$\overrightarrow{CD} = (2; -2; 0)$$

$$\cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + (-4) \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng trung điểm cạnh AD và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OM, OD, OS như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm A, B, C, D lần lượt là : $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right), C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

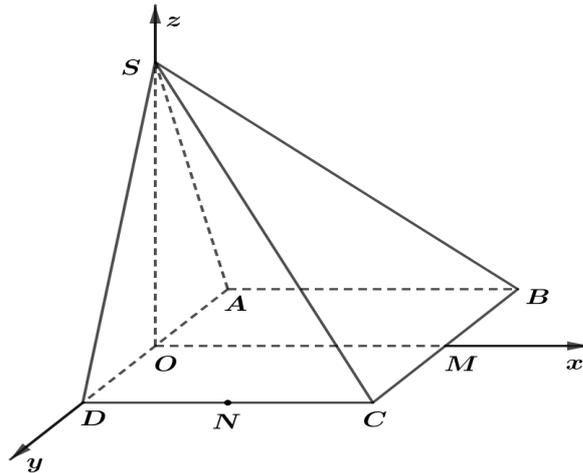
b) Tọa độ các điểm M, N, S lần lượt là : $M\left(1; 0; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{4}$

d) $\cos \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{MN} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG



SAD là tam giác đều có cạnh $AD = 1$ nên $SO = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right), C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$

b) $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M(1; 0; 0), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$

c) Ta có:

$$\overrightarrow{SA} = \left(0; -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

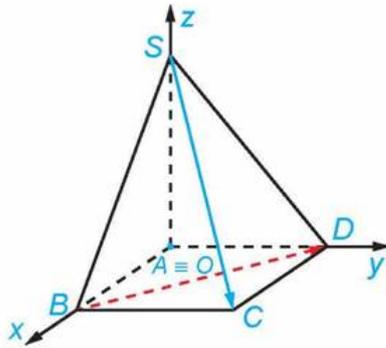
$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 0 = -\frac{1}{4}$$

d) Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{MN}) = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{MN}|} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $SA = 2, AB = 3, AD = 4$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm S, A, B, C, D lần lượt là : $S(0; 0; 2), A(0; 0; 0), B(3; 0; 0), C(3; 4; 0), D(0; 0; 4)$.

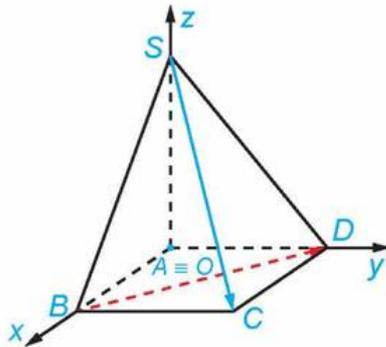
b) Gọi I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng SC . Khi đó, tọa độ điểm I là $\left(\frac{3}{2}; 2; 0\right)$.

c) $SC = \sqrt{29}$

c) $\cos(\overline{BD}, \overline{SC}) = \frac{7}{5\sqrt{29}}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG



a) Vì A trùng gốc tọa độ nên $A(0; 0; 0)$.

Vì B thuộc tia Ox và $AB = 3$ nên $B(3; 0; 0)$.

Vì D thuộc tia Oy và $AD = 4$ nên $D(0; 4; 0)$.

Vì S thuộc tia Oz và $AS = 2$ nên $S(0; 0; 2)$.

Vì hình chiếu của C lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3; 4; 0)$.

b) I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng SC

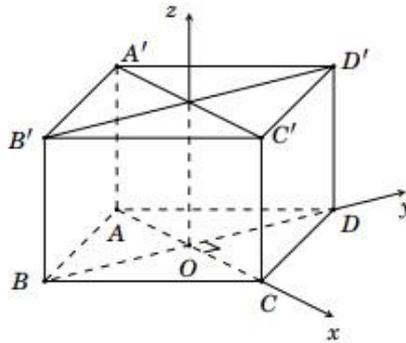
$$I\left(\frac{0+3}{2}; \frac{0+4}{2}; \frac{2+0}{2}\right) \text{ hay } I\left(\frac{3}{2}; 2; 1\right).$$

c) Ta có $\overrightarrow{SC} = (3-0; 4-0; 0-2) = (3; 4; -2)$, suy ra $SC = |\overrightarrow{SC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.

d) Ta có $\overrightarrow{BD} = (0-3; 4-0; 0-0) = (-3; 4; 0)$, suy ra $BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = 5$.

Do đó: $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}) = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{(-3) \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-2)}{5\sqrt{29}} = \frac{7}{5\sqrt{29}}$

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$).



a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$.

b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.

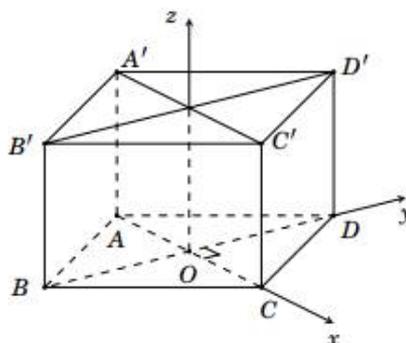
c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.

d) $\overrightarrow{BD'} = (0; 0; 2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì



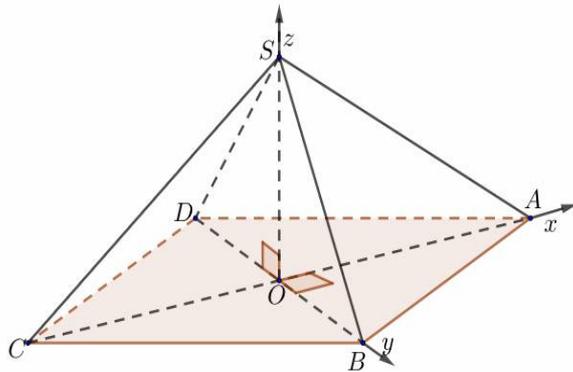
a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = \sqrt{2}$ nên $A(-\sqrt{2}; 0; 0)$.

b) Tọa độ $C'(\sqrt{2}; 0; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.

c) Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D(0; \sqrt{2}; 0)$ và $DD' = 2$ nên $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.

d) Tọa độ $B(0; -\sqrt{2}; 0), D'(0; \sqrt{2}; 2)$. Suy ra $\overline{BD'} = (0; 2\sqrt{2}; 2)$.

Câu 25. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98m và cạnh đáy 180m. Mô hình hoá kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với $ABCD$ là đáy. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng tâm tứ giác $ABCD$ và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OA, OB, OS như hình vẽ (đơn vị: mét).



a) Tọa độ các điểm S, A, B, C, D lần lượt là : $S(0; 0; 2), A(0; 0; 0), B(3; 0; 0), C(3; 4; 0), D(0; 0; 4)$.

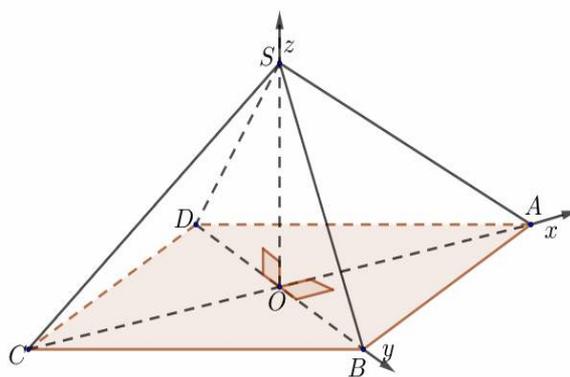
b) Gọi I là tọa độ trung điểm đoạn thẳng SC . Khi đó, tọa độ điểm I là $\left(\frac{3}{2}; 2; 0\right)$.

c) $SC = \sqrt{29}$

c) $\cos(\overline{BD}, \overline{SC}) = \frac{7}{5\sqrt{29}}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG



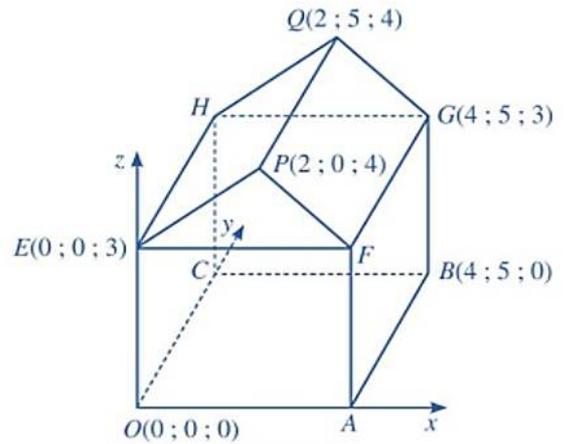
Mô hình hoá kim tự tháp bằng chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy.

Vậy $AB = 180m, SO = 98m$ suy ra $\Rightarrow OA = OB = OC = OD = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 90\sqrt{2}m$

a) Tọa độ các điểm S, A, B, C, D lần lượt là :

$S(0; 0; 98), A(90\sqrt{2}; 0; 0), B(0; 90\sqrt{2}; 0), C(-90\sqrt{2}; 0; 0), D(0; -90\sqrt{2}; 0)$.

Câu 26. Một ngôi nhà được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ điểm H là $(0;5;3)$.

b) $AH = \sqrt{2}$

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 9$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4$, $y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$. Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5$, $z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$. Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4$; $z_F = z_E = 3$. Do F nằm trên mặt phẳng (Ozx) nên tọa độ điểm F là $(4;0;3)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AH} = (-4;5;3) \Rightarrow AH = 5\sqrt{2}$

c) $\overrightarrow{AF} = (0;0;3)$

Suy ra $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 + 0 + 9 = 9$

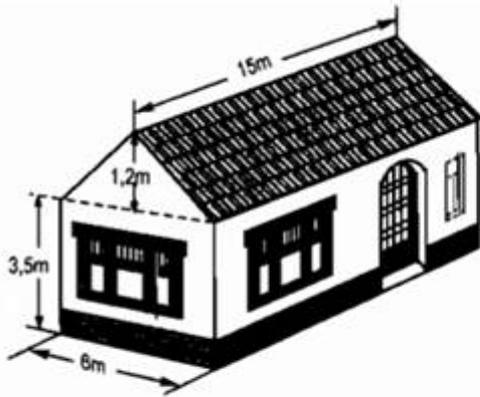
d) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó.

Ta có: $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1)$, $\overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$.

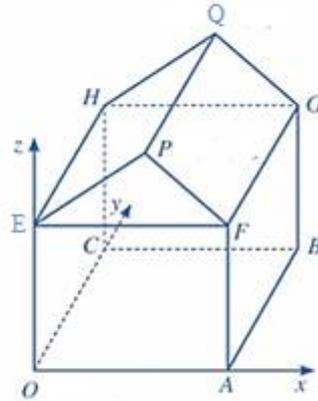
$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} = \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

Câu 27. Thầy Nam muốn xây một ngôi nhà có kích thước như hình 1. Ngôi nhà được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình 2 (đơn vị: mét), trong đó nền nhà, bốn bức tường là hình chữ nhật và hai mái nhà là hai hình chữ nhật bằng nhau.



Hình 1



Hình 2

- a) $\overline{OP} = (4; 0; 4, 7)$
 b) $AQ = \sqrt{290} (m)$
 c) Thầy Nam muốn treo bóng đèn tại trung điểm cạnh PQ . Tọa độ vị trí bóng đèn là $(4; 7, 5; 4, 7)$.
 d) Hai mái nhà hợp nhau một góc bằng $33,4^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Từ hình vẽ, ta có kích thước ngôi nhà như sau:

$$OA = CB = HG = EF = 8m$$

$$OC = AB = FG = EH = PQ = 15m$$

Tọa độ các điểm là :

$$O(0; 0; 0), A(8; 0; 0), B(8; 15; 0), C(0; 15; 0), E(0; 0; 3, 5), F(8; 0; 3, 5), G(8; 15; 3, 5), H(0; 15; 3, 5).$$

$$P(4; 0; 4, 7), Q(4; 15; 4, 7)$$

a) $\overline{OP} = (4; 0; 4, 7)$

b) $\overline{AQ} = (-4; 15; 7) \Rightarrow AQ = \sqrt{290} (m)$

c) Tọa độ trung điểm cạnh PQ là $(4; 7, 5; 4, 7)$

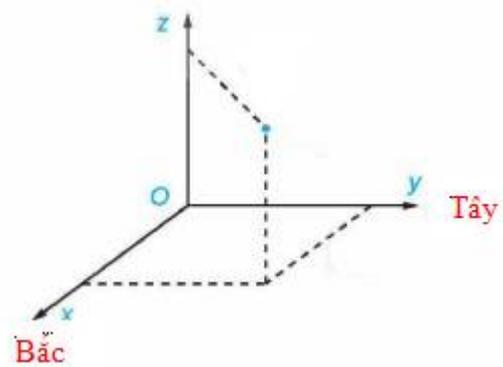
d) góc hợp bởi hai mái nhà là góc hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(EHQP)$ hay góc EPF

Ta có: $\overline{PE} = (-4; 0; -1, 2), \overline{PF} = (4; 0; -1, 2)$.

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{EPF} = \cos(\overrightarrow{PE}, \overrightarrow{PF}) = \frac{\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}}{|\overrightarrow{PE}| \cdot |\overrightarrow{PF}|} = \frac{(-4) \cdot (4) + 0 \cdot 0 + (-1, 2) \cdot (-1, 2)}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-1, 2)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + (-1, 2)^2}} = -\frac{91}{109}.$$

$\Rightarrow \widehat{EPF} \approx 146,6^\circ$. Vậy hai mái nhà hợp nhau một góc bằng $146,6^\circ$.

Câu 28. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



- a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(-100; -80; 1)$.
- b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(70; 60; 0,8)$.
- c) Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là $128(km)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là $220(km)$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

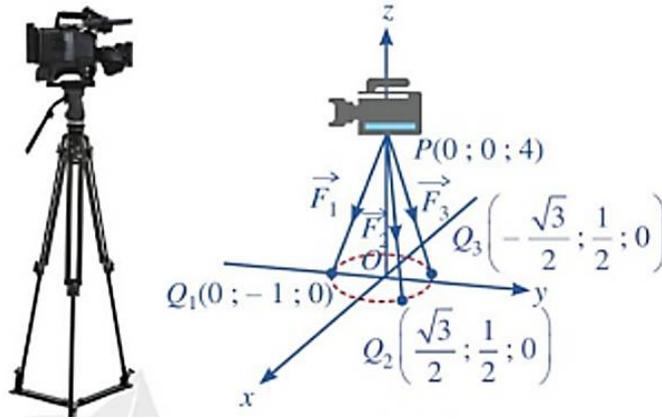
- a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(-100; -80; 1)$.
- b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(70; 60; 0,8)$.
- c) khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{(-100)^2 + (-80)^2 + 1^2} \approx 128(km)$$

- d) khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là:

$$\sqrt{(-100 - 70)^2 + (-80 - 60)^2 + (1 - 0,8)^2} \approx 220(km)$$

Câu 29. Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $P(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $Q_1(0;-1;0)$, $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ (Hình vẽ). Biết rằng trọng lượng của máy quay là 360 N .



- a) $\overrightarrow{PQ_1} = (0; -1; -4)$
- b) $PQ_1 = PQ_2 = PQ_3 = \sqrt{17}$
- c) Trọng lực \vec{F} tác dụng lên máy quay có tọa độ là: $(0; 0; 360)$
- d) Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ tác dụng lên giá đỡ có tọa độ lần lượt là:
- $\vec{F}_1 = (0; -30; -120); \vec{F}_2 = (15\sqrt{3}; 15; -120); \vec{F}_3 = (-15\sqrt{3}; 15; -120)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Theo giả thiết, ta có các điểm $P(0;0;4), Q_1(0;-1;0), Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right), Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

a) Ta có: $\overrightarrow{PQ_1} = (0-0; -1-0; 0-4)$ hay $\overrightarrow{PQ_1} = (0; -1; -4)$

b) Ta có: $\overrightarrow{PQ_1} = (0; -1; -4) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ_1}| = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0; \frac{1}{2}-0; 0-4\right)$ hay $\overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -4\right) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ_2}| = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0; \frac{1}{2}-0; 0-4\right)$ hay $\overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -4\right) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ_3}| = \sqrt{17}$

Suy ra $|\overrightarrow{PQ_1}| = |\overrightarrow{PQ_2}| = |\overrightarrow{PQ_3}| = \sqrt{17}$.

c) Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$, với $\vec{F} = (0; 0; -360)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay.

d) Ta có $|\overrightarrow{PQ_1}| = |\overrightarrow{PQ_2}| = |\overrightarrow{PQ_3}| = \sqrt{17}$ nên $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.

Vì vậy, tồn tại hằng số $k \neq 0$ sao cho:

$$\vec{F}_1 = k\vec{PQ}_1 = (0; -k; -4k)$$

$$\vec{F}_2 = k\vec{PQ}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k; \frac{1}{2}k; -4k \right)$$

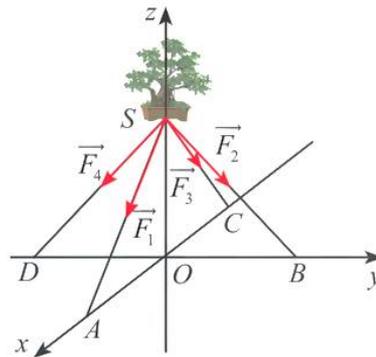
$$\vec{F}_3 = k\vec{PQ}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k; \frac{1}{2}k; -4k \right)$$

Suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -12k)$.

Mặt khác, ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$, trong đó $\vec{F} = (0; 0; -360)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay. Suy ra $-12k = -360$, tức là $k = 30$.

Vậy $\vec{F}_1 = (0; -30; -120); \vec{F}_2 = (15\sqrt{3}; 15; -120); \vec{F}_3 = (-15\sqrt{3}; 15; -120)$.

Câu 30. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0), B(0; 20; 0), C(-20; 0; 0), D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn $40N$ và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình vẽ. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimét biểu diễn $1N$).



a) $\vec{SA} = (20; 0; -20)$

b) $SB = 20$

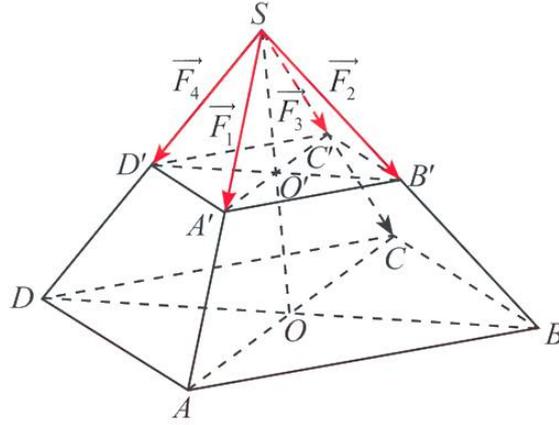
c) $(\vec{SC}, \vec{SD}) = 120^\circ$

d) Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có tọa độ lần lượt là:

$$\vec{F}_1 = (10; 0; -10), \vec{F}_2 = (0; 10; -10), \vec{F}_3 = (-10; 0; -10), \vec{F}_4 = (0; -10; -10).$$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG



Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

a) Ta có: $\overrightarrow{SA} = (20; 0; -20)$

b) $\overrightarrow{SB} = (0; 20; -20) \Rightarrow |\overrightarrow{SB}| = 20\sqrt{2}$

c) Ta có:

$$\overrightarrow{SC} = (-20; 0; -20) \Rightarrow |\overrightarrow{SC}| = 20\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{SD} = (0; -20; -20) \Rightarrow |\overrightarrow{SD}| = 20\sqrt{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SD}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SD}|} = \frac{(-20) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-20) \cdot (-20)}{20\sqrt{2} \cdot 20\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}) = 60^\circ$$

d) Ta có: $SA = SB = SC = SD = 20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các vectơ $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D' .

Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi \overrightarrow{F} là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB'} + \overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SD'} = 4\overrightarrow{SO'}$$

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{F}| = 40, \text{ suy ra } |\overrightarrow{SO'}| = SO' = 10.$$

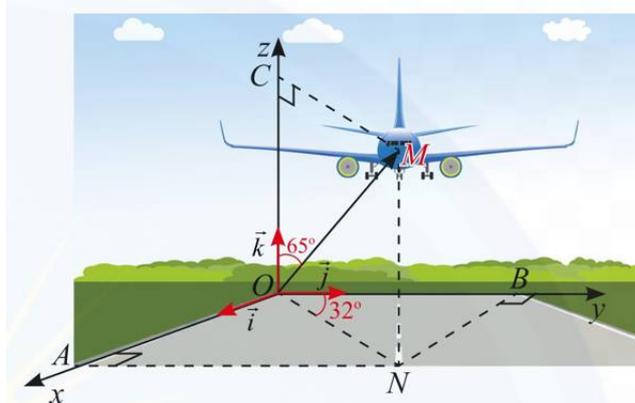
Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA' = SO' \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} = \frac{1}{2}SA$, suy ra $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{SA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} = (10; 0; -10)$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = (0; 10; -10), \overrightarrow{F_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = (-10; 0; -10), \overrightarrow{F_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = (0; -10; -10).$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 31. Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình vẽ, cho biết $OM = 14, \widehat{NOB} = 32^\circ, \widehat{MOC} = 65^\circ$. Vị trí máy bay ở điểm M có tọa độ (a, b, c) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$ (kết quả làm tròn đến phần trăm).



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 23,4

Xét tam giác COM vuông tại C :

$$CO = OM \cdot \cos 65^\circ = 14 \cdot \cos 65^\circ \approx 5,92$$

$$CM = OM \cdot \sin 65^\circ = 14 \cdot \sin 65^\circ \approx 12,69$$

Xét tam giác BON vuông tại B :

$$OB = ON \cdot \cos 32^\circ = CM \cdot \cos 32^\circ = 12,69 \cdot \cos 32^\circ \approx 10,76$$

Xét tam giác AON vuông tại A :

$$OA = ON \cdot \cos(90^\circ - 32^\circ) = 12,69 \cdot \cos 58^\circ = 6,72$$

Vậy tọa độ của M là $(6,72; 10,76; 5,92)$

$$\Rightarrow T = a + b + c = 6,72 + 10,76 + 5,92 = 23,4$$

Câu 32. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo có tọa độ là (a, b, c) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + 2c$.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1221

Gọi $Q(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MN} = (300; 100; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (x - 800; y - 300; z - 10)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên \overrightarrow{MN} và \overrightarrow{NQ} cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow N$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $MN = 4NQ$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 4(x - 800) \\ 100 = 4(y - 300) \\ 2 = 4(z - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 875 \\ y = 325 \\ z = 10,5 \end{cases} \Rightarrow Q(875; 325; 10,5)$$

Tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(875; 325; 10,5)$

$$\Rightarrow T = a + b + 2c = 1221$$

Câu 33. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000; 600; 14)$ đến điểm $N(a, b, c)$ trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400; 800; 16)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + 2c$.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2081

Gọi $N(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MQ} = (400; 200; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (1400 - x; 800 - y; 16 - z)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên \overrightarrow{MQ} và \overrightarrow{NQ} cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $\overline{MQ} = 4\overline{NQ}$

$$\text{Suy ra } \overline{MQ} = 4\overline{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 400 = 4(1400 - x) \\ 200 = 4(800 - y) \\ 2 = 4(16 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1300 \\ y = 750 \\ z = 15,5 \end{cases} \Rightarrow N(1300; 750; 15,5)$$

Tọa độ vị trí điểm N là $(1300; 750; 15,5)$

$$T = a + b + 2c = 2081.$$

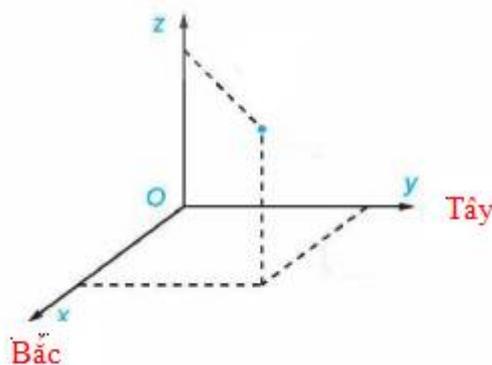
Câu 34. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó (kết quả làm tròn đến phần chục, đơn vị: km).



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 53,9



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Suy ra chiếc máy bay có tọa độ $(50; 20; 1)$.

Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{50^2 + 20^2 + 1^2} \approx 53,9(km)$

Câu 35. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt

đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo: km).

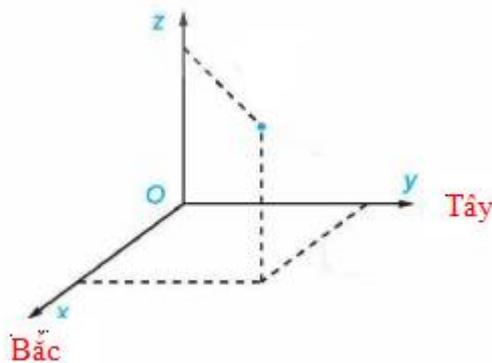


Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 61

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

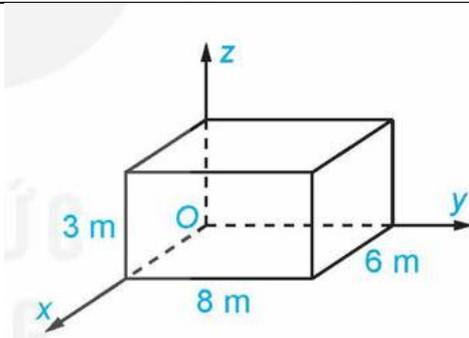


Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20;10;0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30;-25;1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $\sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} \approx 61(km)$

Câu 36. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là $8m$, chiều rộng là $6m$ và chiều cao là $3m$. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Giả sử tọa độ của điểm treo đèn là (a,b,c) . Tính giá trị biểu thức $T = a+b+c$.

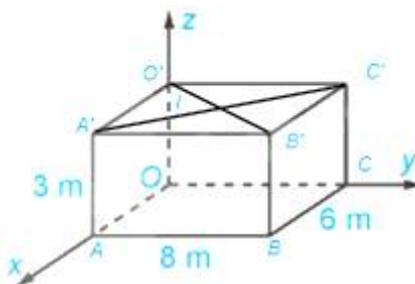


Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 10

Đặt tên các điểm như hình vẽ.



Khi đó, $O'(0;0;3), B'(8;6;3)$.

Vì phòng học thiết kế dạng hình hộp chữ nhật nên hình $O'C'B'A'$ là hình chữ nhật. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo $O'B'$ và $A'C'$ nên I là trung điểm của $O'B'$.

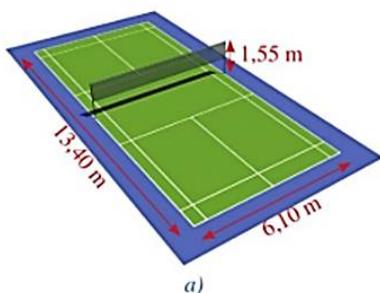
Vì đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học nên đèn trùng với I .

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x_I = \frac{x_{O'} + x_{B'}}{2} = 4 \\ y_I = \frac{y_{O'} + y_{B'}}{2} = 3. \\ z_I = \frac{z_{O'} + z_{B'}}{2} = 3 \end{cases}$$

Vậy điểm treo đèn là $(4;3;3)$

$$\Rightarrow T = a + b + c = 10$$

Câu 37. Hình a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như ở Hình b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới và có tọa độ của vectơ \overline{AB} là (a, b, c) . Tính giá trị biểu thức $T = a + b + 100c$.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 155

Gọi tọa độ điểm A là $(x_A; y_A; z_A)$.

Vì chiều rộng của sân là $6,1m$ nên $x_A = 6,1$. Do một nửa chiều dài của sân là $6,7m$ nên $y_A = 6,7$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A = 0$. Vì vậy, điểm A có tọa độ là $(6,1; 6,7; 0)$.

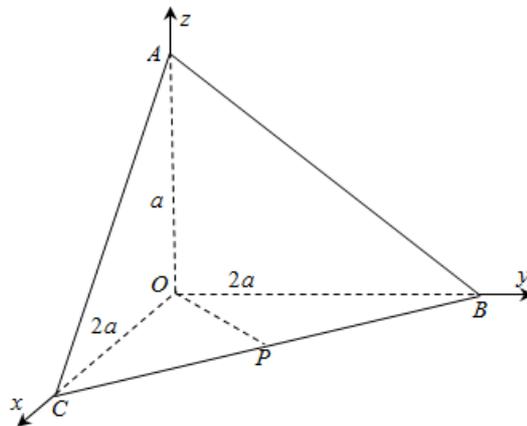
Độ dài đoạn thẳng AB là $1,55m$ nên điểm B có tọa độ là $(6,1; 6,7; 1,55)$.

Vậy ta có: $\overline{AB} = (6,1 - 6,1; 6,7 - 6,7; 1,55 - 0)$, tức là $\overline{AB} = (0; 0; 1,55)$.

$\Rightarrow T = a + b + 100c = 155$

Câu 38. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = a$ và $OB = OC = 2a$.

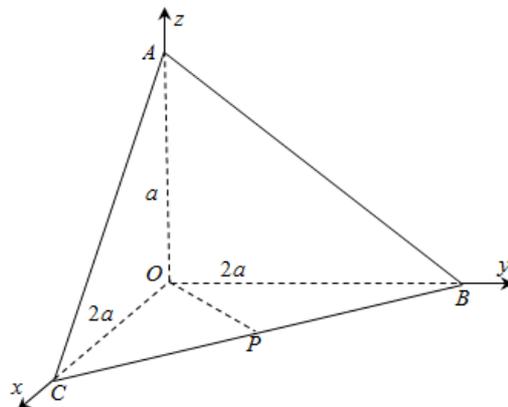
Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ). Khi $a = 1$ xác định tung độ của vectơ \overline{AP}



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2



Đặt khối tứ diện $O.ABC$ vào hệ trục tọa độ gốc $Oxyz$: các điểm A, B, C lần lượt thuộc các trục tọa độ Oz, Oy, Ox .

Ta có: $O(0;0;0), A(0;0;1), B(0;2;0), C(2;0;0), P(1;1;0), \overline{AP} = (1;1;-1)$.

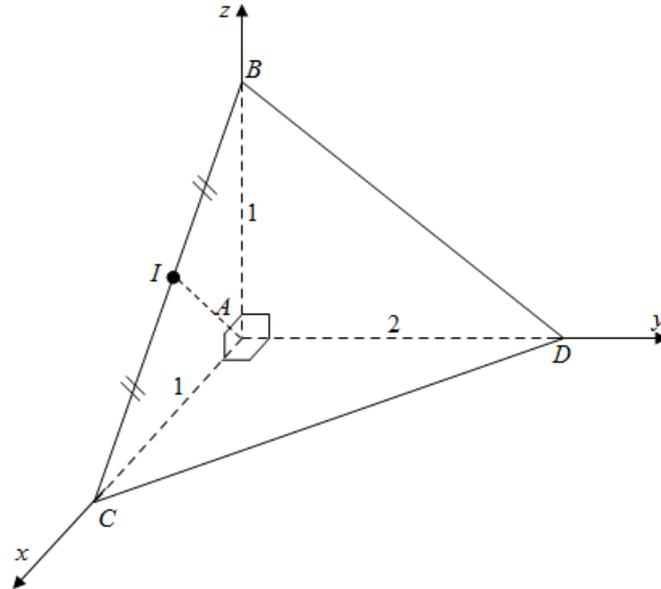
Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2, AB = AC = 1$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD . Biết độ dài $BI = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4



Vì tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, nên ta chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ (với A là gốc tọa độ, đường thẳng AC nằm trên trục Ax , AD nằm trên trục Ay và AB nằm trên trục Az).

Từ đó suy ra:

$$A(0;0;0), B(0;0;1) \text{ vì } B \in Az, C(1;0;0) \text{ vì } C \in Ax, D(0;2;0) \text{ vì } D \in Ay.$$

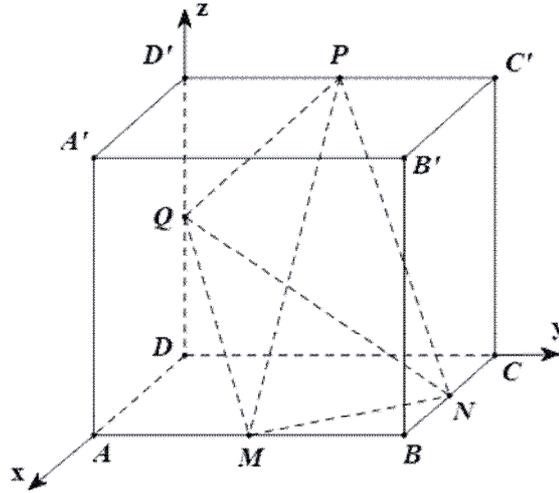
$$\text{Vì } I \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } I\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABD \Rightarrow G\left(\frac{1}{6}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Độ dài } BI \text{ là: } BI = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^2 + (0 - 0)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a + b = 4.$$

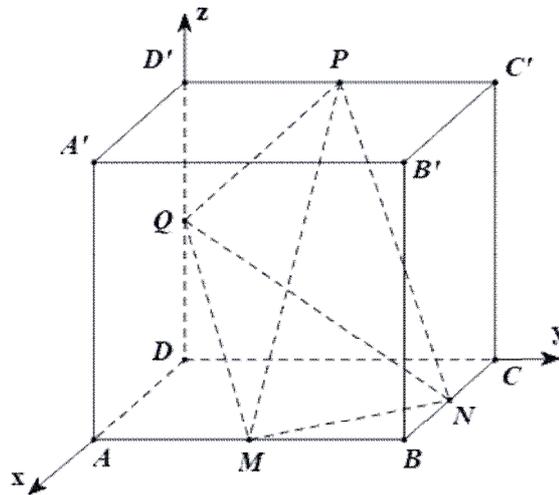
Câu 40. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Tổng các vector $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ có tọa độ là $(m; n; p)$. Hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m + n + 4p$.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có $D(0;0;0), A(1;0;0), B(1;1;0), C(0;1;0), A'(1;0;1), B'(1;1;1), C'(0;1;1), D'(0;0;1)$.

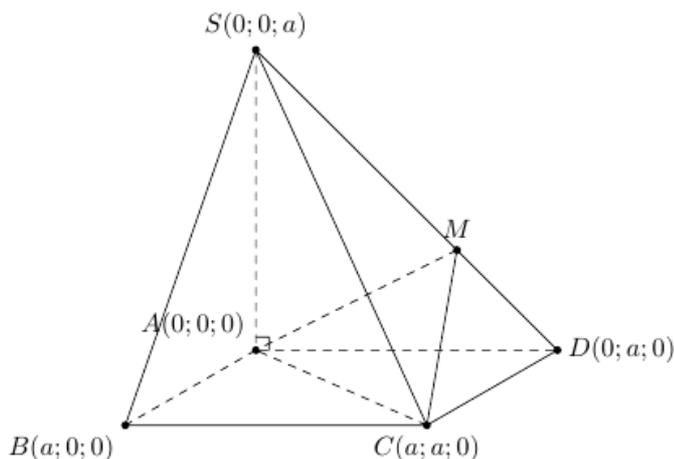
Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' nên

$$M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right), P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), Q\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{MP} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{MQ} = \left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow T = m + 2n + 4p = 0$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \left(-\frac{5}{2}; 0; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow T = 2m + n + 4p = 1$$

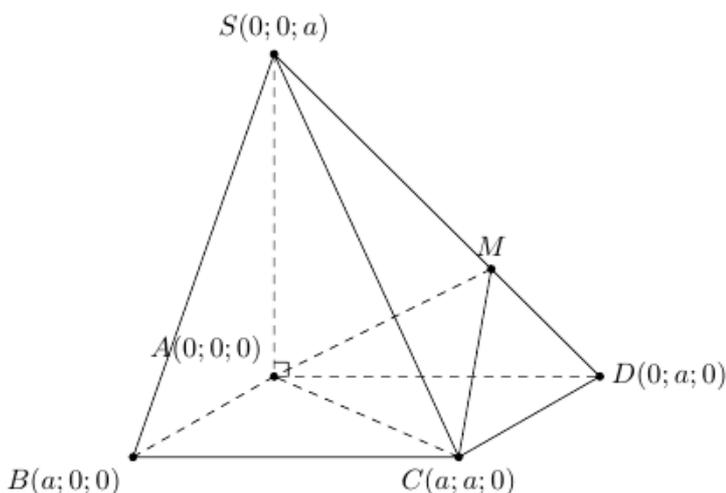
Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Khi $a = 1$ thì tổng bình phương hoành độ, tung độ, cao độ của vector \overrightarrow{AC} bằng bao nhiêu?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A \equiv O$, các điểm B, D, S lần lượt thuộc chiều dương các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Suy ra tọa độ các điểm như trên hình vẽ.

Do M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$

$$\text{suy ra: } \overrightarrow{SM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SD} \Rightarrow M\left(0; \frac{2a}{3}; \frac{a}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(0; \frac{2a}{3}; \frac{a}{3}\right) \\ \overrightarrow{AC} = (a; a; 0) \end{cases} \xrightarrow{a=1} \overrightarrow{AC} = (1; 1; 0) \Rightarrow 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$

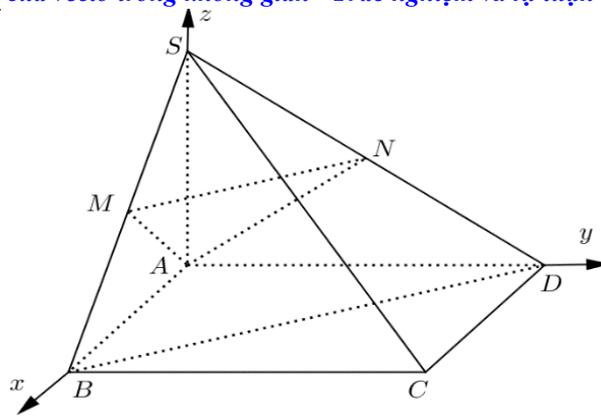
Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác

AMN . Biết độ dài cạnh $DG = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 11



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn: $A \equiv O, B(a;0;0), D(0;a;0), S(0;0;a)$ (như minh họa hình vẽ),

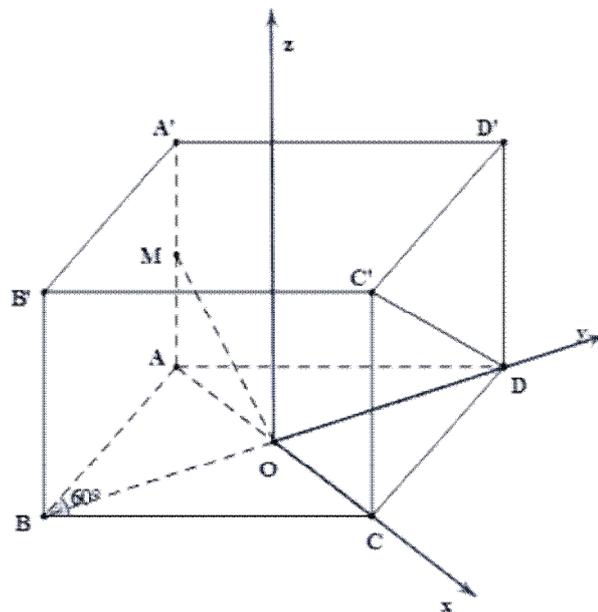
suy ra $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$ và $N\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

G là trọng tâm của tam giác $AMN \Rightarrow G\left(\frac{a}{6};\frac{a}{6};\frac{a}{3}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DG} = \left(\frac{a}{6}; -\frac{5a}{6}; \frac{a}{3}\right) \Rightarrow DG = \sqrt{\left(\frac{a}{6}\right)^2 + \left(-\frac{5a}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\Rightarrow m+n=11$$

Câu 43. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh 1, $AA'=1$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Vector $\overrightarrow{OC'}$ có tọa độ là $(m;n;p)$. Hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m + n + p$.

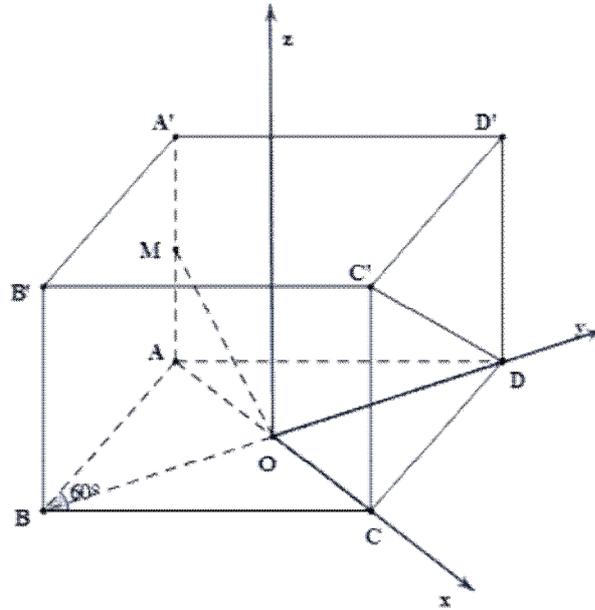


Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 2

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Để dàng tính được $O(0;0;0)$, $M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $C'\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{C'D} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$ và $\overrightarrow{OC'} = \left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

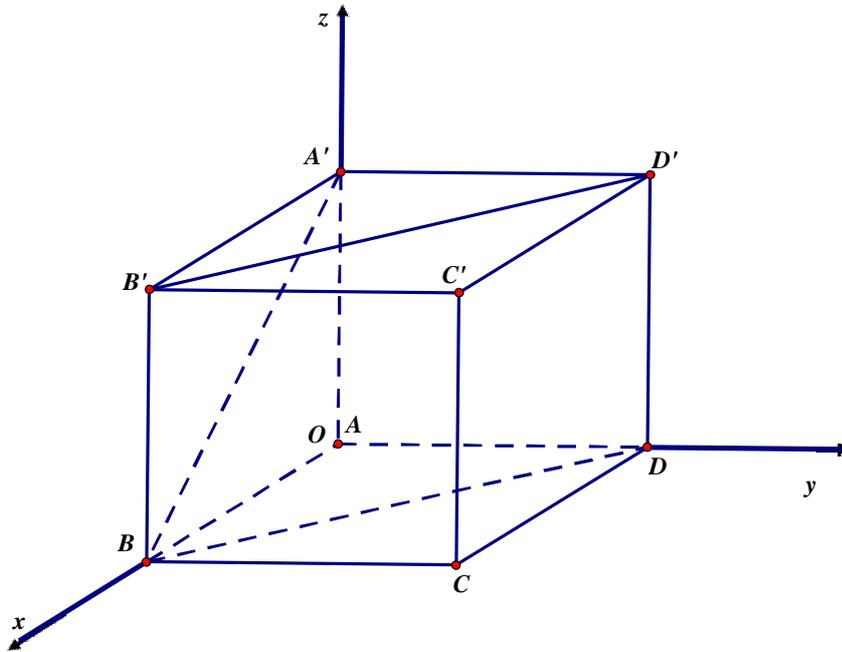
$$\text{Khi đó } \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = 0 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow T = 2m + n + p = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 1 = 2.$$

Câu 44. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD$. Biết độ dài cạnh $C'G = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 7



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a),$

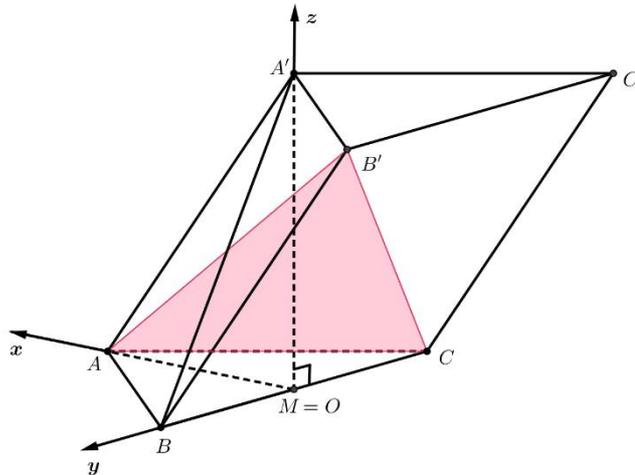
$B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a).$

G là trọng tâm của tam giác $A'BD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$

$$\text{Độ dài } C'G \text{ là: } C'G = \sqrt{\left(\frac{a}{3}-a\right)^2 + \left(\frac{a}{3}-a\right)^2 + \left(\frac{a}{3}-a\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow m+n=7$$

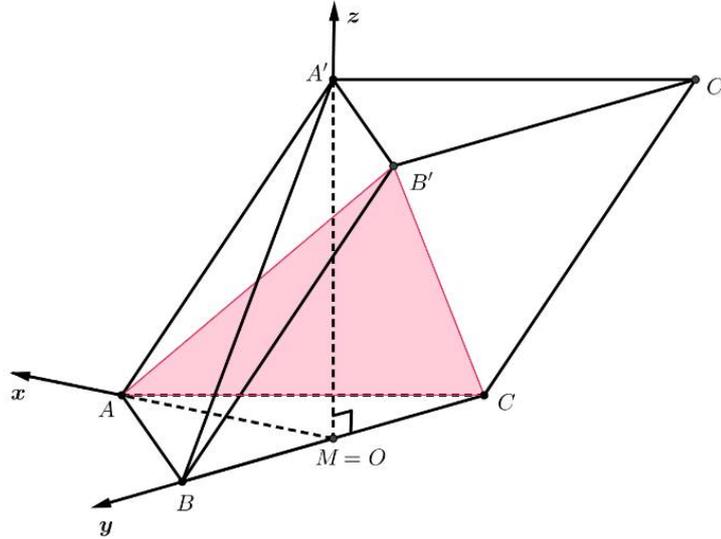
Câu 45. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC . Khi $a=1$ thì tung độ của $\overrightarrow{A'B}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1



Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'BM} = 60^\circ$.

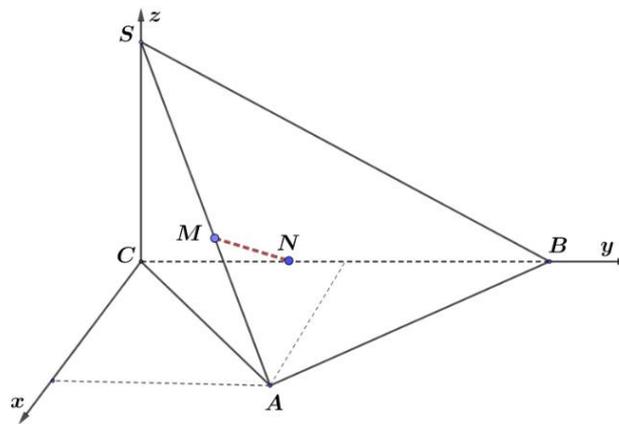
Ta có $A'M = BM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: khi đó $A(\sqrt{3}; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; -1; 0)$,

$A'(0; 0; \sqrt{3})$. Gọi $B'(x_0; y_0; z_0)$, $\overline{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 - \sqrt{3})$, $\overline{AB} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$.

Vì $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ nên $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{3} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow B'(-\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}) \Rightarrow \overline{AB'} = (-2\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.

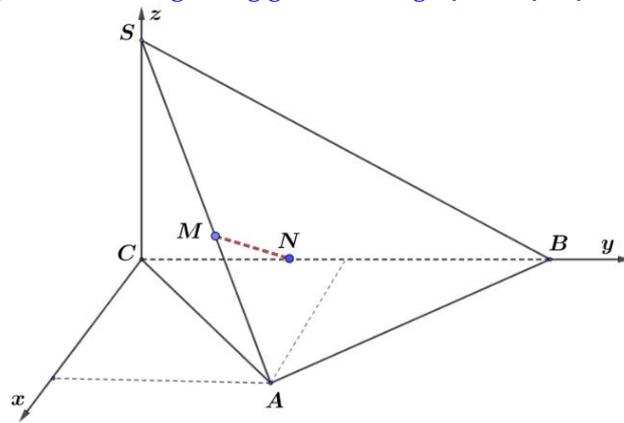
Câu 46. Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = 3\sqrt{2}$, SC vuông góc (ABC) , tam giác ABC vuông tại A , các điểm M và N lần lượt thuộc SA và BC sao cho $AM = CN = 2$. Tung độ của \overline{NB} khi đó bằng bao nhiêu?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 4



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa $C(0;0;0) \equiv O$ như hình vẽ.

Điểm $B(0;6;0) \in Oy$, $S(0;0;3\sqrt{2}) \in Oz$, $A(3;3;0)$.

Khi đó tọa độ $N(0;2;0)$; $M(2;2;\sqrt{2})$.

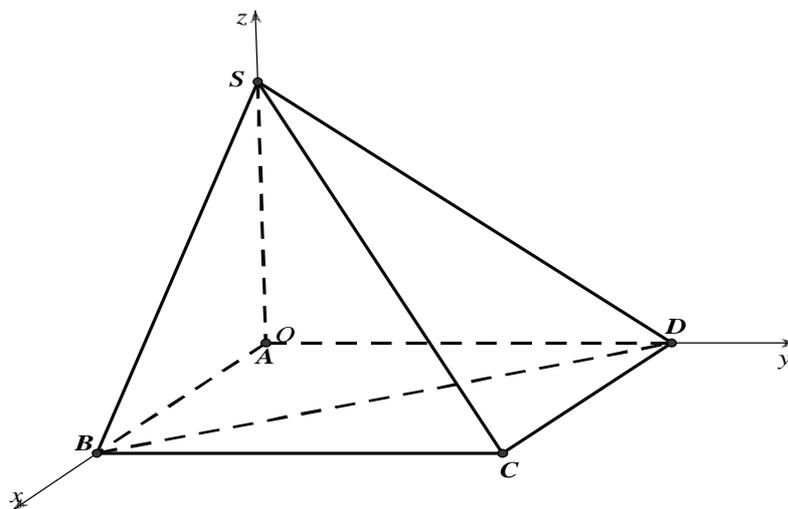
$\overline{NM} = (2;0;\sqrt{2})$; $\overline{SB} = (0;6;-3\sqrt{2})$ và $\overline{NB} = (0;4;0)$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD . Biết độ dài cạnh $CG = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 26



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có:

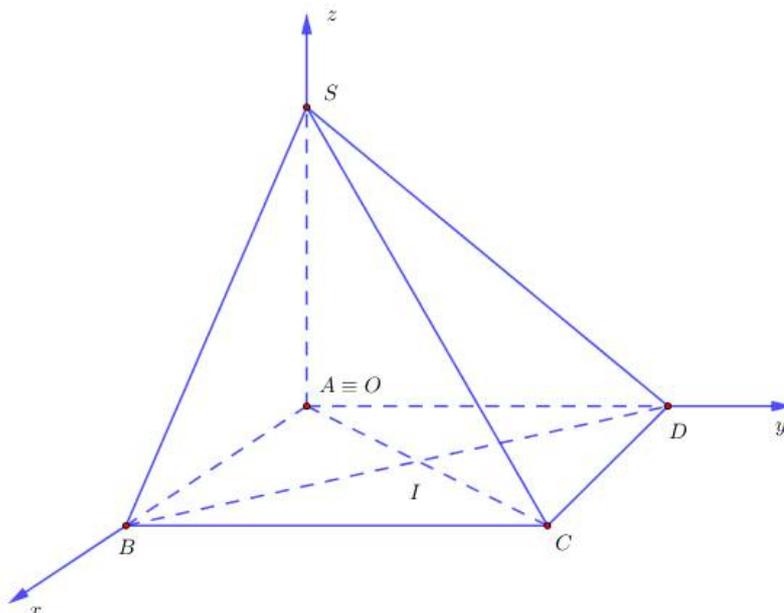
$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a\sqrt{3};0)$, $D(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;0;a)$.

G là trọng tâm của tam giác $SBD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{a}{3}\right)$

Độ dài CG là: $CG = \sqrt{\left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 0\right)^2} = a\sqrt{\frac{17}{9}}$

$\Rightarrow m + n = 26$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tâm I và độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì tọa độ điểm I là (a, b, c) . Tính $a + b + c$.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng 1.

Ta có $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (SI; AI) = \widehat{SIA}$.

Ta có $\tan \alpha = \tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;1)$.

$\Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow a + b + c = 1$

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và

M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Góc NMG của tam giác NMG bằng bao nhiêu độ (kết quả làm tròn đến phần mười độ).

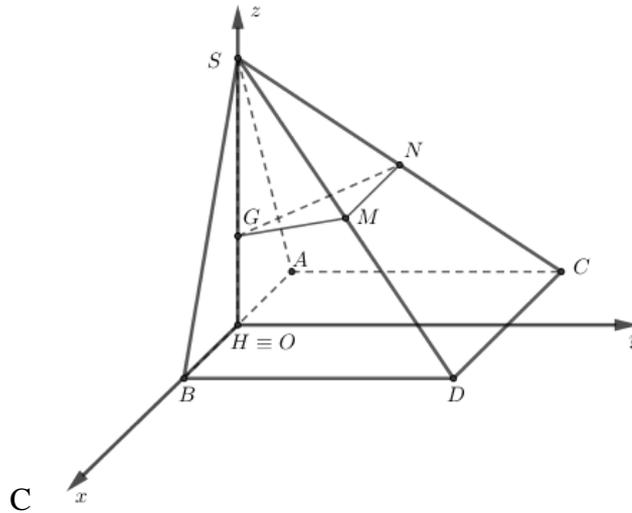
Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 64,3

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng H và các tia Ox, Oz lần lượt trùng với các tia HB, HS và tia Oy đi qua H đồng thời song song BD như hình vẽ.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right); A\left(\frac{-a}{2};0;0\right); B\left(\frac{a}{2};0;0\right); C\left(\frac{a}{2};a;0\right); D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$$

$$\text{suy ra } G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Khi đó ta có:

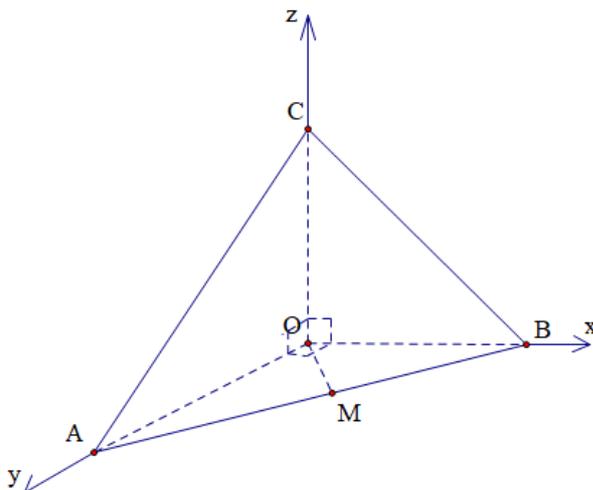
$$\overline{MN} = \left(-\frac{a}{2};0;0\right) \Rightarrow |\overline{MN}| = \frac{a}{2}$$

$$\overline{MG} = \left(-\frac{a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow |\overline{MG}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

góc NMG của tam giác NMG là góc giữa hai vectơ $\overline{MN}, \overline{MG}$. Do đó, ta có:

$$\cos(\overline{MN}, \overline{MG}) = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{MG}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{MG}|} = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow (\overline{MN}, \overline{MG}) \approx 64,3^\circ \Rightarrow \widehat{NMG} \approx 64,3^\circ$$

Câu 50. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia OB, OA, OC như hình vẽ. Góc tạo bởi hai vector \overrightarrow{BC} và \overrightarrow{OM} bằng bao nhiêu độ?



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 120

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $O(0;0;0), A(0;a;0), B(a;0;0), C(0;0;a), M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{BC} = (-a;0;a), \overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

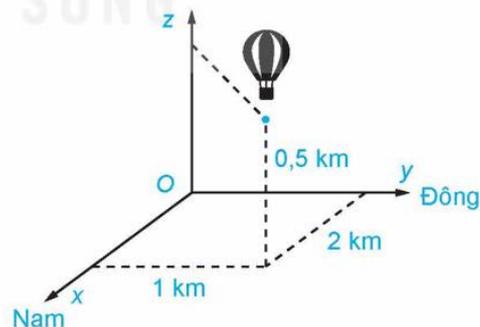
$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM}}{BC \cdot OM} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OM}) = 120^\circ$$

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 51. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{ km}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5\text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{ km}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.

- Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có tọa độ lần lượt là $(2; 1; 0,5)$ và $(-1; -1,5; 0,8)$.

b) Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (-1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92(\text{km}).$$

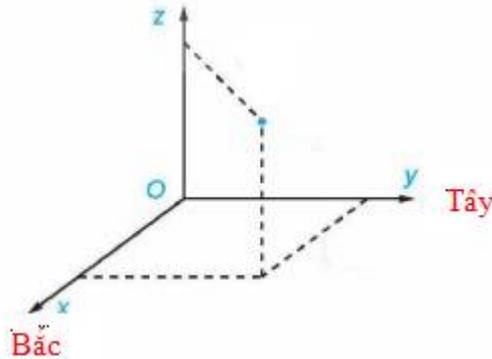
Câu 52. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(\text{km})$ và về phía Nam $40(\text{km})$, đồng thời cách mặt đất $2(\text{km})$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(\text{km})$ và về phía Tây $50(\text{km})$, đồng thời cách mặt đất $4(\text{km})$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



- Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.
- Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(-60; -40; 2)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(80; 50; 4)$.

Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên ở vị trí trung điểm, suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ

$$\left(\frac{-60+80}{2}; \frac{-40+50}{2}; \frac{2+4}{2} \right) = (10; 5; 3).$$

a) khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai:

$$\sqrt{(-60-80)^2 + (-40-50)^2 + (2-4)^2} \approx 166,4(km)$$

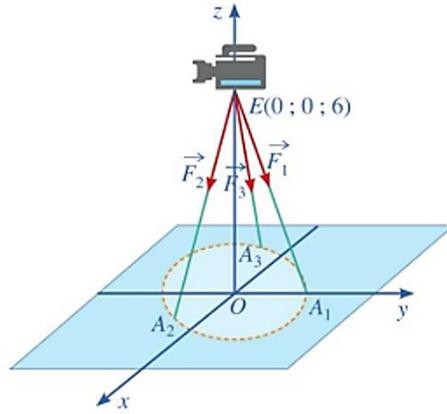
b) khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{10^2 + 5^2 + 3^2} \approx 11,6(km)$$

Câu 53. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc

với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0), A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$. Biết rằng trọng lượng

của chiếc máy là $300N$. Tìm được tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ khi đó tích vô hướng của \vec{F}_1, \vec{F}_2 bằng?



Lời giải

Ta có:

$$\overrightarrow{EA_1} = (0; 1; -6) \Rightarrow EA_1 = \sqrt{37}$$

$$\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -6 \right) \Rightarrow EA_2 = \sqrt{37}$$

$$\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -6 \right) \Rightarrow EA_3 = \sqrt{37}$$

$\Rightarrow EA_1 = EA_2 = EA_3 = \sqrt{37} \Rightarrow |\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}|$ vì đèn cân bằng và trọng lực của đèn tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ

Do đó:

$$\overrightarrow{F_1} = k \overrightarrow{EA_1} = (0; k; -6k)$$

$$\overrightarrow{F_2} = k \overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k; -\frac{1}{2}k; -6k \right)$$

$$\overrightarrow{F_3} = k \overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k; -\frac{1}{2}k; -6k \right)$$

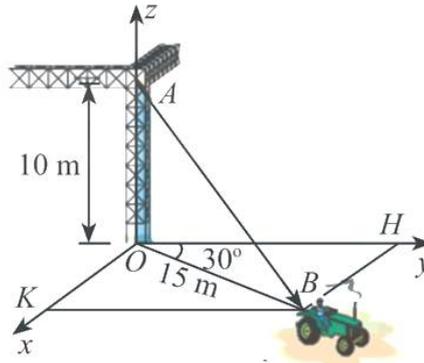
$$\Rightarrow \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = (0; 0; -18k)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P} = (0; 0; -300) \Rightarrow -18k = 300 \Leftrightarrow k = \frac{50}{3}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{F_1} = \left(0; \frac{50}{3}; -100 \right); \overrightarrow{F_2} = \left(\frac{25\sqrt{3}}{3}; -\frac{50}{6}; -100 \right); \overrightarrow{F_3} = \left(-\frac{25\sqrt{3}}{3}; -\frac{50}{6}; -100 \right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} = \frac{88750}{9}$$

Câu 54. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình vẽ với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ \overrightarrow{AB}



Lời giải

$$OA = 10m \Rightarrow A(0;0;10)$$

$$\text{Ta có: } OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

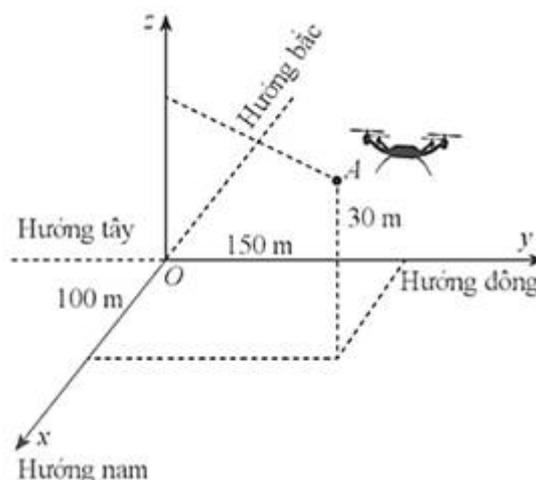
$$OK = OB \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$$

Câu 55. Một người điều khiển một flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Đầu tiên flycam ở vị trí A cách vị trí điều khiển 100 m về phía nam và 150 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 30 m (hình vẽ). Để thực hiện nhiệm vụ tiếp theo, người điều khiển flycam đến vị trí B cách vị trí điều khiển 80 m về phía bắc và 120 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 50 m.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 m.



a) Xác định tọa độ của flycam tại mỗi vị trí A, B đối với hệ tọa độ đã chọn.

b) Tính quãng đường flycam bay từ vị trí A đến vị trí B , biết flycam bay từ vị trí A đến vị trí B theo một đường thẳng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a) Theo giả thiết đề cho, ta có:

Tọa độ của flycam tại vị trí điểm A là $(100; 150; 30)$.

Tọa độ của flycam tại vị trí điểm B là $(-80; -120; 50)$.

b) Quãng đường flycam bay từ vị trí A đến vị trí B bằng khoảng cách giữa hai điểm A và B , ta có:

$$AB = \sqrt{(-80-100)^2 + (-120-150)^2 + (50-30)^2} \approx 325(m)$$

Câu 56. Radar của một trung tâm kiểm soát không lưu sân bay có phạm vi theo dõi 500 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời như hình vẽ bên dưới, trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét.



Hỏi radar trung tâm kiểm soát không lưu có thể phát hiện được máy bay tại vị trí A có tọa độ $(-200; 400; 200)$ đối với hệ trục tọa độ không?

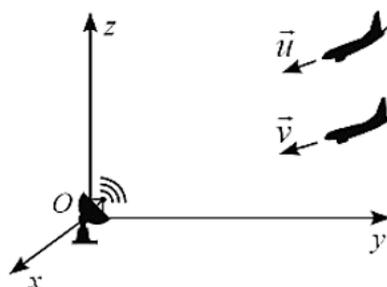
Lời giải

Khoảng cách từ trung tâm kiểm soát không lưu tới máy bay tại vị trí A bằng độ dài OA :

$$OA = \sqrt{(-200)^2 + 400^2 + 200^2} = 200\sqrt{6} < 500$$

Vì vậy radar trung tâm kiểm soát không lưu có thể phát hiện được máy bay tại vị trí A có tọa độ $(-200; 400; 200)$.

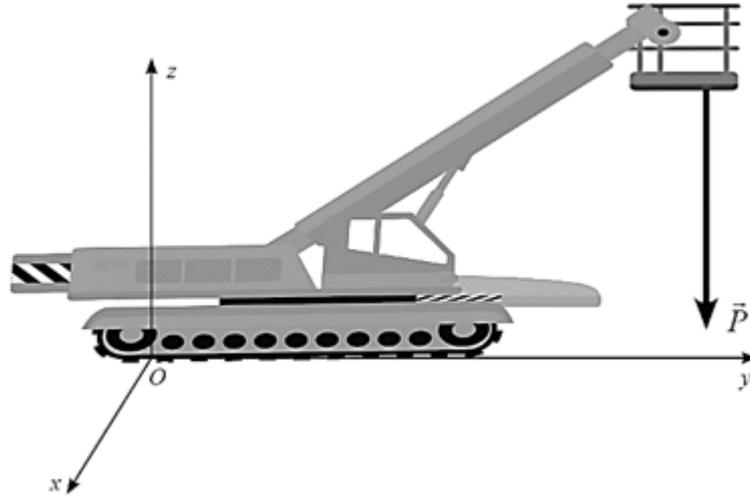
Câu 57. Trong không gian $Oxyz$ được thiết lập tại một sân bay, người ta ghi nhận hai máy bay đang bay đến với các vectơ vận tốc $\vec{u} = (100; -90; -140)$, $\vec{v} = (90; -70; -80)$.



Lời giải

Góc hai vector: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{100 \cdot 90 + (-90) \cdot (-70) + (-140) \cdot (-80)}{\sqrt{100^2 + (-90)^2 + (-140)^2} \cdot \sqrt{90^2 + (-70)^2 + (-80)^2}} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \approx 11,5^\circ$

Câu 58. Một robot cắt dây đã di chuyển một lực $\vec{P} = (0; 0; -150)$ (đơn vị: N) theo độ dời $\vec{d} = (0; -8; -10)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực \vec{P} khi thực hiện độ dời nói trên.

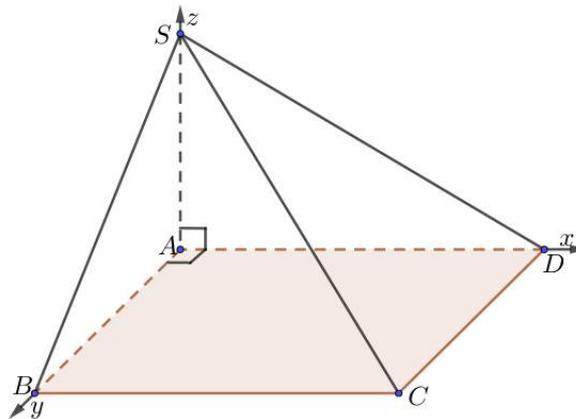


Lời giải

Công sinh bởi lực \vec{P} khi thực hiện độ dời \vec{d} là:

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-8) + (-150) \cdot (-10) = 1500(J)$$

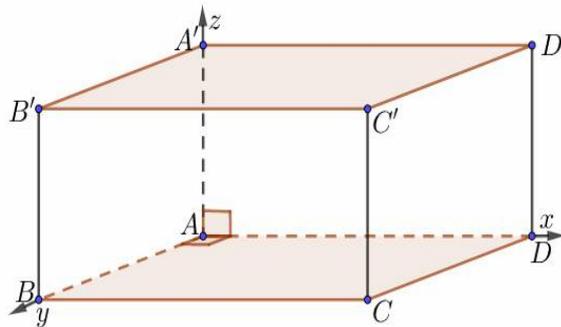
Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3, AD = 4$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết mặt bên (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AS như hình vẽ.



- Tìm tọa độ các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác BCD .
- Tính (\vec{SD}, \vec{AC}) .

d) Tìm tọa độ điểm M trên đoạn BD sao cho $BM = \frac{2}{3}MD$.

Câu 60. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AD, AB, AA' như hình vẽ.



a) Tìm tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Tính $(\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{D'C})$.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{B'M} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$.