

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Không dùng máy tính, chứng minh rằng biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ có giá trị là một số nguyên.

2. Tính giá trị của biểu thức $(x^3 + 4x^2 - 23x + 2)^{2026}$ khi $x = 3\sqrt{3} - 2$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ y^2 + yz + z^2 = 19 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

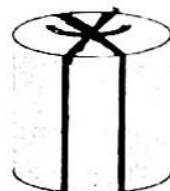
1. Cho tam giác nhọn MAB nội tiếp đường tròn (O) , đường cao MH . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA , MB . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF và cắt AB tại D .

a) Chứng minh rằng $\widehat{EMD} = \widehat{BHF}$ và ba điểm M , O , D thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{AH}{BH} \cdot \frac{AD}{BD}}$.

2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có các đường cao AD , BE , CF . Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\frac{AB+BC+CA}{AD+BE+CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Bạn Nga dùng một dây vải màu để buộc một gói quà có dạng hình trụ (như hình vẽ). Hình trụ có bán kính đáy 5 cm và diện tích xung quanh $376,8 \text{ cm}^2$. Biết rằng cần 10 cm dây vải dùng để thắt nơ, giao điểm của hai vòng dây vải là tâm các đường tròn đáy của gói quà. Hỏi bạn Nga cần phải chọn dây vải có chiều dài ít nhất là bao nhiêu (lấy $\pi \approx 3,14$)?



Câu 4. (1,5 điểm)

1. Cho p là số nguyên tố khác 2, hai số tự nhiên a , b thoả mãn $a+b$ chia hết cho p , và $a-b$ chia hết cho $p-1$. Chứng minh rằng $a^b + b^a$ chia hết cho $2p$.

2. Cho các số thực a , b lớn hơn $\frac{1}{3}$ và thoả mãn $\frac{1}{a^2(3b-1)} + \frac{1}{b^2(3a-1)} \geq \sqrt[3]{ab}$. Chứng minh rằng

$$1 + a + b \geq 3ab.$$

Câu 5. (1,5 điểm)

1. Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{7; 8; 9; 10; 12\}$; Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{5; 6; 8; 9; 13; 14\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn thì sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hoà. Tính xác suất để bạn Minh không thua cuộc.

2. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$ và $AC = 6 \text{ cm}$. Chứng minh rằng, với 25 điểm bất kì trong hình thoi này thì luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá 1 cm.