

CHUYÊN ĐỀ 5_HÀM SỐ BẬC HAI VÀ CÁC CÂU TOÁN TƯƠNG GIAO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

DẠNG 1: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC PARABOL, TÌM TỌA ĐỘ TIẾP ĐIỂM

Giả sử đường thẳng là $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Bước 2 Lập luận: d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì tìm được tham số.

Bước 3 Thay giá trị tham số tìm được vào phương trình $(*)$ ta tìm được x , thay x vừa tìm vào $y = ax^2$ hoặc $y = mx + n$ thì tìm được y và kết luận.

DẠNG 2: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Giả sử đường thẳng $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Bước 2 Tìm điều kiện để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

Bước 3 Biến đổi biểu thức đối xứng với x_A, x_B về $x_A + x_B; x_A \cdot x_B$ rồi sử dụng định lý Viét với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Một số điều kiện và phép biến đổi cần nhớ

- ☐ Hai điểm A và B nằm bên phải trục Oy khi x_A, x_B cùng dương.
- ☐ Hai điểm A và B nằm bên trái trục Oy khi x_A, x_B cùng âm.
- ☐ Hai điểm A và B nằm cùng một phía trục Oy khi x_A, x_B cùng dấu.
- ☐ Hai điểm A và B nằm về hai phía trục Oy khi x_A, x_B trái dấu.
- ☐ Công thức tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B

Cách 1 Tính theo (P) : vì $A, B \in (P): y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2; y_B = ax_B^2$.

Cách 2 Tính theo d : vì $A, B \in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n; y_B = mx_B + n$

Giả sử $x_A = x_1; x_B = x_2$

- ☐ Gặp $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- ☐ Gặp $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- ☐ Gặp $|x_1| + |x_2|$ thì xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2| = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 + 2|x_1x_2| - 2x_1x_2$
- ☐ Gặp $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ thì cần thêm điều kiện phụ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} \geq 0 \\ \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$

- Gặp x_1, x_2 là độ dài hai cạnh tam giác ta cần thêm điều kiện phụ $x_1, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$
- Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

DẠNG 3: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Cách 1 Kết hợp điều kiện của bài toán với $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ để giải x_1, x_2 theo tham số rồi thay x_1, x_2 vừa giải được vào $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Cách 2 Nếu tính Δ hoặc Δ' mà ra một biểu thức bình phương thì ta tìm hai nghiệm đó và phải xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

DẠNG 4: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B LIÊN QUAN ĐẾN TUNG ĐỘ A, B.

Dạng này ta cần tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B theo một trong hai cách:

Cách 1: Tính theo (P): Vì $A, B \in (P): y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2, y_B = ax_B^2$

Cách 2: Tính theo d: Vì $A, B \in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n, y_B = mx_B + n$

DẠNG 5: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH

Ghi nhớ một số công thức về khoảng cách

- Khoảng cách từ gốc tọa độ đến một điểm

+) Nếu $A(a; 0) \in Ox$ thì $OA = |x_A| = |a|$.

+) Nếu $B(0; b) \in Oy$ thì $OB = |y_B| = |b|$.

+) Nếu $M(a; b)$ bất kì thì $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

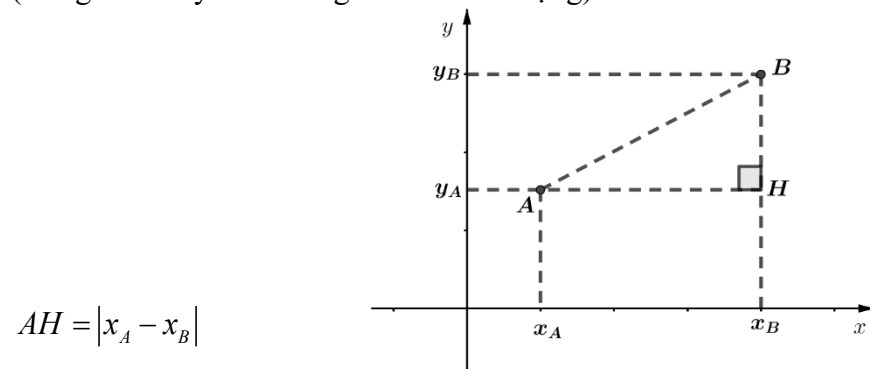
- Khoảng cách giữa hai điểm trên cùng một trục Ox hoặc Oy

+) Nếu $A, B \in Ox$ (hoặc $AB \parallel Ox$) thì $AB = |x_A - x_B|$.

+) Nếu $M, N \in Oy$ (hoặc $MN \parallel Oy$) thì $MN = |y_M - y_N|$.

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ bất kỳ

(Công thức này cần chứng minh khi sử dụng)

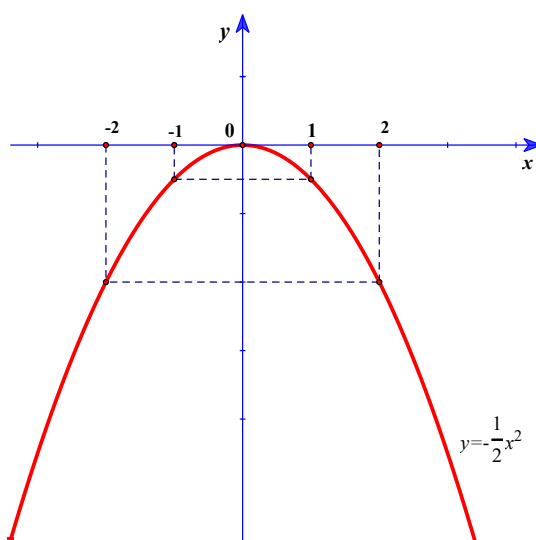


$$BH = |y_A - y_B|$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

- Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = 2x^2$. Vẽ đồ thị parabol (P) .
- Câu 2:** Tìm tọa độ điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$, biết hoành độ của điểm A bằng 2.
- Câu 3:** Biết đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}ax^2$, ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(3; -6)$. Hãy xác định giá trị của a .
- Câu 4:** Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) . Tìm trên (P) các điểm có tung độ bằng 4, vẽ đồ thị (P) .
- Câu 5:** Xác định tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $P(1; -2)$.
- Câu 6:** Tìm hàm số $y = ax^2$, biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(-1; 2)$. Với hàm số tìm được hãy tìm các điểm trên đồ thị có tung độ là 8.
- Câu 7:** Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$
- Câu 8:** Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng $y = 2$.
- Câu 9:** Biết đường cong trong *Hình 1* là một parabol $y = ax^2$. Tính hệ số a và tìm tọa độ các điểm thuộc parabol có tung độ $y = -9$.



Hình 1

- Câu 10:** Cho parabol $(P): y = ax^2$. Tìm a biết rằng parabol (P) đi qua điểm $A(3; -3)$. Vẽ (P) với a vừa tìm được.
- Câu 11:** Xác định hàm số $y = (a+1)x^2$, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -2)$.

Câu 12: Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = 2x^2$ trên hệ trục tọa độ. Tìm giao điểm của $(P): y = 2x^2$ với $(d): y = -x + 3$ bằng phép tính.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = -\frac{1}{4}x^2$

a) Vẽ đồ thị của (P)

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường thẳng $d: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Câu 14:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng $(D): y = \frac{x}{2} - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

Câu 15:

a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = 3x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Xác định tọa độ các giao điểm của hai đồ thị trên.

Câu 16: Cho hai hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$ có đồ thị lần lượt là (d) và (P)

j) Vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

k) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) bằng phép toán.

Câu 17: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m - 1)x - m + 2$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Câu 18: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 4x + 9$.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song với đường thẳng (d) và (d_1) tiếp xúc (P) .

Câu 19: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 1$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một trục tọa độ.

b) Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d và đi qua $A(-1; 2)$.

Câu 20: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng

$$(d): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

a) Vẽ đồ thị của (P) .

b) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ lần lượt là các giao điểm của (P) với (d) . Tính giá trị biểu thức $T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$.

Câu 21: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2ax - 4a$ (với a là tham số)

- Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $a = -\frac{1}{2}$.
- Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Câu 22: Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = mx + 4$, với m là tham số.

- Khi $m = 3$, tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số trên.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị m , đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1)$ và $A_2(x_2; y_2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $x_A = -1, x_B = 2$.

- Tìm tọa độ của hai điểm A, B .
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B .
- Tính khoảng cách từ điểm O (gốc tọa độ) tới đường thẳng (d) .

Câu 24: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = -x + 2$ có đồ thị là (d) .

- Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) ; (hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B). Gọi C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành, tính diện tích của tứ giác $ABDC$.

Câu 25: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Cho đường thẳng $y = mx + n$ (Δ). Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y = -2x + 5$ (d) và có duy nhất một điểm chung với đồ thị (P) .

Câu 26: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 1$.

- Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Bằng phép tính, xác định tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số: $y = \frac{1}{4}x^2$

b) Cho đường thẳng $(D): y = \frac{3}{2}x + m$ đi qua điểm $C(6;7)$. Tìm tọa độ giao điểm của (D) và (P) .

Câu 28: Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x^2$.

- Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .
- Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm A và B (với A có hoành độ âm, B có hoành độ dương). Bằng tính toán hãy tìm tọa độ các điểm A và B .

Câu 29: Cho hai hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và đồ thị hàm số (P) và $y = x + 4$ có đồ thị (d)

- Vẽ đồ thị (P) .
- Gọi A, B là các giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) . Biết rằng đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét, tìm tất cả các điểm M trên tia Ox sao cho diện tích tam giác MAB bằng 30 cm^2 .

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = 3x + m - 1$ và parabol $(P): y = x^2$

- Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .
- Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để a) $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - 3$

- Vẽ đồ thị Parabol (P) .
- Bằng phương pháp đại số, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
- Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có điểm chung với parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 .

Câu 32:

- Vẽ đồ thị (P) hàm số $y = \frac{x^2}{4}$
- Xác định a, b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua gốc tọa độ và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng -3 .

Câu 33:

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.
- Chứng minh rằng đường thẳng $(d) y = kx + 1$ luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Câu 34: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P)

- Vẽ đồ thị (P) .
- Cho các hàm số $y = x + 2$ và $y = -x + m$ (với m là tham số) lần lượt có đồ thị là (d) và (d_m) .
Tìm tất cả các giá trị của m để trên một mặt phẳng tọa độ các đồ thị của $(P), (d)$ và (d_m) cùng đi qua một điểm.

Câu 35: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = -x^2$

a) Vẽ parabol (P) .

b) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y = -x - 2$ và (P) . Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M .

Câu 36: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(a): y = -2x + 1$

c) Vẽ (P) và a trên cùng một hệ trục tọa độ.

d) Xác định đường thẳng (d) biết đường thẳng (d) song song với đường thẳng (a) và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

Câu 37: Cho các hàm số $(P): y = -x^2$ và $(d): y = 2x - 3$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng phép tính.

c) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$, biết rằng (d_1) song song với (d) và (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 .

Câu 38: Cho parabol $(P): y = x^2$ và điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $-1; 2$. Đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + n$.

e) Tìm tọa độ điểm A, B . Tìm m, n biết (d) đi qua điểm A và B .

f) Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB (điểm O là gốc tọa độ).

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = x + m - 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0; 1)$

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1,$

$$x_2 \text{ thỏa mãn: } 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0.$$

Câu 40: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$

g) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.

h) Bằng phép tính, xác định tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) .

i) Tìm tọa độ điểm M trên cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất.

Câu 41: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx - 3$ (với m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 3)$.

b) Xác định các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho tổng 2 tung độ của hai giao điểm đó bằng -10 .

Câu 42: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x + 5 - 2m$ (m là tham số)

l) Vẽ đồ thị parabol (P) .

m) Biết đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là x_1, x_2 . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Câu 43: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = 2(m+1)x - 3m + 2$

- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với $m = 3$.
- Chứng minh (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B với mọi m .
- Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ giao điểm của A và B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Câu 44: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P)

- Vẽ đồ thị hàm số đã cho trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm nằm trên Parabol (P) có hoành độ $x = 2$ và có hệ số góc k . Với giá trị k nào thì (d) tiếp xúc (P) ?

Câu 45: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$.

- Vẽ đồ thị của (P) .
- Gọi $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ là hoành độ giao điểm của (P) và $(d): y = x - 4$. Chứng minh:
$$y_1 + y_2 - 5(x_1 + x_2) = 0$$

Câu 46: Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = 3x + 2$.

- Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Viết phương trình đường thẳng d' vuông góc với đường thẳng d và tiếp xúc với (P) .

Câu 47: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = 4x + m$ có đồ thị (d_m)

- Vẽ đồ thị (P) .
- Tìm tất cả các giá trị của m sao cho (d_m) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt, trong đó tung độ của một trong hai giao điểm đó bằng 1.

Câu 48: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = -2x + m$ (với m là tham số).

- Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ là 2.
- Tìm giá trị của m để (d) cắt tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức
$$x_1^2 + x_2^2 = 6x_1^2 x_2^2$$
.

Câu 49: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

- Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .
- Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB .

Câu 50:

- Vẽ đồ thị hai hàm số: $y = x^2$ và $y = x + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .
- Xác định đường thẳng $y = ax + b$ biết rằng đường thẳng này song song với đường thẳng $y = -3x + 5$ và cắt Parabol $y = 2x^2$ tại điểm A có hoành độ bằng -1 .

Câu 51: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

- Hãy vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
- Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$. Biết rằng (d_1) song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ là 2.

Câu 52: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m+3)x - 2m + 2$ (m là tham số).

- Với $m = -5$, tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) .
- Chứng minh rằng: với mọi m parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
Tìm m sao cho hai giao điểm đó có hoành độ dương.
- Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m .

Câu 53: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = mx - 3$ tham số m và Parabol $(P): y = x^2$.

- Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$.
- Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 54: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y = mx + m - 3$

- Tìm a để đồ thị (P) đi qua điểm $B(2;-2)$.
- Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt C và D với mọi giá trị của m .
- Gọi x_C và x_D lần lượt là hoành độ của hai điểm C và D . Tìm các giá trị của m sao cho $x_C^2 + x_D^2 - 2x_Cx_D - 20 = 0$

Câu 55: Trong mặt phẳng tọa độ cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$

- Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) bằng phép tính.
- Tính độ dài đoạn AB .

Câu 56: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - m + 1$ (với m là tham số)

- Vẽ Parabol (P) .
- Tìm tất cả các giá trị của m để (P) cắt (d) có đúng một điểm chung.
- Tìm tọa độ các điểm thuộc (P) có hoành độ bằng hai lần tung độ.

Câu 57: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+3)x - m^2 - 3$. Tìm m để d tiếp xúc với (P) . Khi đó hãy tìm tọa độ tiếp điểm.

Câu 58: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + 3$.

- a) Tìm tọa độ các giao điểm A và B của d và (P) , trong đó A là điểm có hoành độ âm. Vẽ d và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB để $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất.

Câu 59: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x - 2m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 60: Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng d đi qua $I(0; -1)$ hệ số góc k .

- a) Viết phương trình d theo k
- b) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt thuộc hai phía Oy .
- c) Gọi hoành độ A và B lần lượt là x_1 và x_2 . Chứng minh: $|x_1 - x_2| \geq 2$

Giả sử $x_1 < x_2$. Tìm m để $|x_1| > |x_2|$.

Câu 61: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và $d: y = mx - m + 1$. Tìm m để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$

Câu 62: Cho $(P): y = x^2$ và $d: y = 2(m-1)x + 3 - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$.

Câu 63: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - 3x_2 = 5$

Câu 64: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn $d: y = 2(m+1) + 3$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1| + |x_2| = 5$.

Câu 65: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -4x + m^2 - 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$.

Câu 66: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m-1)x - m^2 + m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2}$.

Câu 67: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-3)x - m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Câu 68: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2 + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$

Câu 69: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m+1)x - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 70: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2 + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 > 4$

Câu 71: Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + m - 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ mà $x_1y_1 - x_2y_2 - x_1x_2 = -4$

Câu 72: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$.

- a) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai phía Oy .

- b) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài MN theo m và tìm m để $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN}$.
- c) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung. Tính độ dài đoạn HK theo m .
- d) Tính độ dài đoạn AB theo m và chứng minh $AB \geq \sqrt{m^2 + 8} \quad \forall m$.
- e) Tính diện tích ΔOAB theo m và tìm m để $S_{\Delta OAB} = 2m + 1$ (đvdt).
- f) Chứng minh với mọi m , ΔOAB không thể vuông tại O.

Câu 73: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x + 3$.

- a) Tìm tọa độ giao điểm A, B của d và (P) với $x_A > 0$ và vẽ $d, (P)$.
- b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.
- c) Tìm tọa độ điểm $M \in Oy$ để $S_{MAB} = 4$ (đvdt).
- d) Cho điểm $E(3;0)$. Tìm tọa độ điểm $F \in (P)$ sao cho độ dài EF ngắn nhất.

CHUYÊN ĐỀ 5_HÀM SỐ BẬC HAI VÀ CÁC CÂU TOÁN TƯƠNG GIAO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

DẠNG 1: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC PARABOL, TÌM TỌA ĐỘ TIẾP ĐIỂM

Giả sử đường thẳng là $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Bước 2 Lập luận: d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì tìm được tham số.

Bước 3 Thay giá trị tham số tìm được vào phương trình $(*)$ ta tìm được x , thay x vừa tìm vào $y = ax^2$ hoặc $y = mx + n$ thì tìm được y và kết luận.

DẠNG 2: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Giả sử đường thẳng $d: y = mx + n$ và parabol là $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$.

Bước 1 Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0 (*)$$

Bước 2 Tìm điều kiện để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

Bước 3 Biến đổi biểu thức đối xứng với x_A, x_B về $x_A + x_B; x_A \cdot x_B$ rồi sử dụng định lý Viét với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Một số điều kiện và phép biến đổi cần nhớ

- Hai điểm A và B nằm bên phải trục Oy khi x_A, x_B cùng dương.
- Hai điểm A và B nằm bên trái trục Oy khi x_A, x_B cùng âm.
- Hai điểm A và B nằm cùng một phía trục Oy khi x_A, x_B cùng dấu.
- Hai điểm A và B nằm về hai phía trục Oy khi x_A, x_B trái dấu.
- Công thức tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B

Cách 1 Tính theo (P) : vì $A, B \in (P): y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2; y_B = ax_B^2$.

Cách 2 Tính theo d : vì $A, B \in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n; y_B = mx_B + n$

Giả sử $x_A = x_1; x_B = x_2$

- Gặp $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- Gặp $|x_1 - x_2|$ thì xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- Gặp $|x_1| + |x_2|$ thì xét $(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2| = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 + 2|x_1x_2| - 2x_1x_2$
- Gặp $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$ thì cần thêm điều kiện phụ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} \geq 0 \\ \frac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$

- Gặp x_1, x_2 là độ dài hai cạnh tam giác ta cần thêm điều kiện phụ $x_1, x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$
- Nếu bình phương hai vế ta cần thêm điều kiện phụ là hai vế lớn hơn hoặc bằng 0.

DẠNG 3: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARABOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B THỎA MÃN MỘT BIỂU THỨC KHÔNG ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI x_A VÀ x_B

Cách 1 Kết hợp điều kiện của bài toán với $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ để giải x_1, x_2 theo tham số rồi thay x_1, x_2 vừa giải được vào $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Cách 2 Nếu tính Δ hoặc Δ' mà ra một biểu thức bình phương thì ta tìm hai nghiệm đó và phải xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

DẠNG 4: TÌM THAM SỐ ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG CẮT PARAPOL TẠI HAI ĐIỂM PHÂN BIỆT A, B LIÊN QUAN ĐẾN TUNG ĐỘ A, B.

Dạng này ta cần tính y_A theo x_A và tính y_B theo x_B theo một trong hai cách:

Cách 1: Tính theo (P): Vì $A, B \in (P): y = ax^2$ nên $y_A = ax_A^2, y_B = ax_B^2$

Cách 2: Tính theo d: Vì $A, B \in d: y = mx + n$ nên $y_A = mx_A + n, y_B = mx_B + n$

DẠNG 5: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI, DIỆN TÍCH

Ghi nhớ một số công thức về khoảng cách

- Khoảng cách từ gốc tọa độ đến một điểm

+) Nếu $A(a; 0) \in Ox$ thì $OA = |x_A| = |a|$.

+) Nếu $B(0; b) \in Oy$ thì $OB = |y_B| = |b|$.

+) Nếu $M(a; b)$ bất kì thì $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

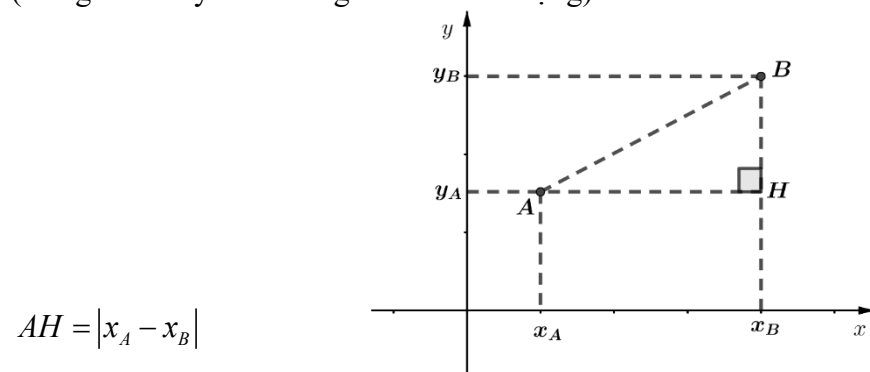
- Khoảng cách giữa hai điểm trên cùng một trục Ox hoặc Oy

+) Nếu $A, B \in Ox$ (hoặc $AB \parallel Ox$) thì $AB = |x_A - x_B|$.

+) Nếu $M, N \in Oy$ (hoặc $MN \parallel Oy$) thì $MN = |y_M - y_N|$.

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ bất kì

(Công thức này cần chứng minh khi sử dụng)



$$BH = |y_A - y_B|$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = 2x^2$. Vẽ đồ thị parabol (P) .

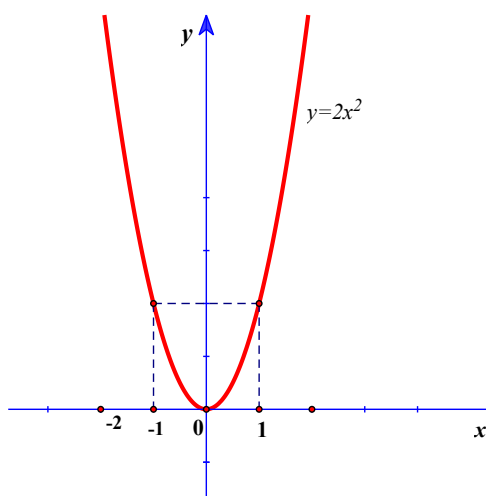
Lời giải

Vẽ Parabol $(P): y = 2x^2$

Bảng giá trị giữa x và y :

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Vẽ đúng đồ thị



Câu 2: Tìm tọa độ điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$, biết hoành độ của điểm A bằng 2.

Lời giải

Vì A có hoành độ bằng 2 và thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$ nên $y = 2.2^2 = 8$.

Vậy $A(2;8)$.

Câu 3: Biết đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}ax^2$, ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(3;-6)$. Hãy xác định giá trị của a .

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}ax^2$, ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(3;-6)$ khi $-6 = \frac{1}{3}a.3^2 \Leftrightarrow -6 = 3a \Leftrightarrow a = -2$

Vậy $a = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) . Tìm trên (P) các điểm có tung độ bằng 4, vẽ đồ thị (P) .

Lời giải

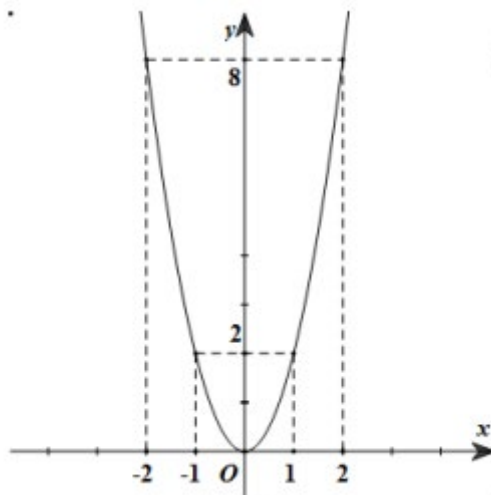
Thay $y = 4$ ta có $4 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Vậy các điểm cần tìm là $(\sqrt{2};4)$ và $(-\sqrt{2};4)$.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị



Câu 5: Xác định tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $P(1; -2)$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $P(1; -2)$ suy ra $-2 = m \cdot 1^2 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy $m = -2$.

Câu 6: Tìm hàm số $y = ax^2$, biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(-1; 2)$. Với hàm số tìm được hãy tìm các điểm trên đồ thị có tung độ là 8.

Lời giải

+ Ta có đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(-1; 2)$ nên ta có: $2 = a \cdot (-1)^2 \Leftrightarrow a = 2$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x^2$.

+ Các điểm trên đồ thị có tung độ là 8.

Gọi điểm cần tìm là $M(x_0; y_0)$

Ta có: $y_0 = 8 \Rightarrow 8 = 2 \cdot x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

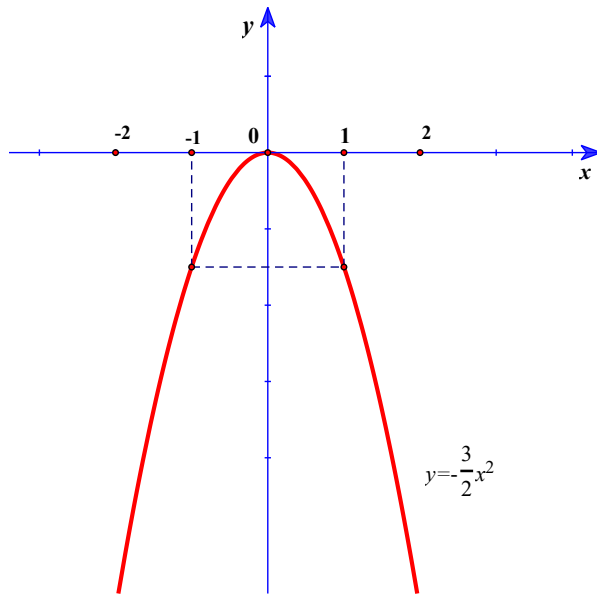
Vậy các điểm cần tìm trên đồ thị có tung độ là 8 là: $M(-2; 8); M(2; 8)$.

Câu 7: Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$

Lời giải

Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-1,5	0	-1,5	-6

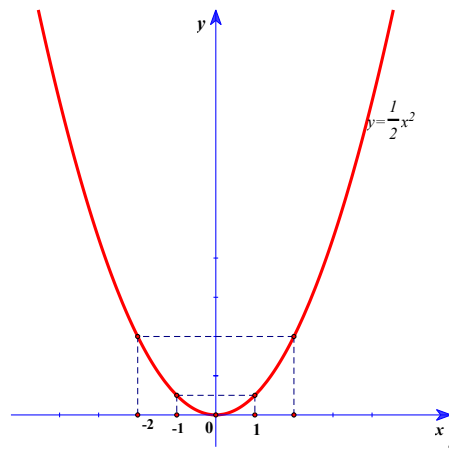


Câu 8: Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng $y = 2$.

Lời giải

Bảng giá trị:

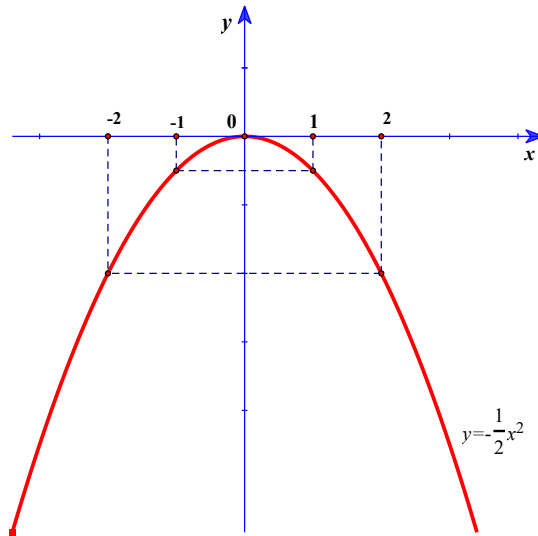
x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{x^2}{2}$	2	1/2	0	1/2	2



$$(P) \text{ cắt } (d) \text{ nên } \Rightarrow 2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

hay tọa độ giao điểm là $(-2; 2)$ và $(2; 2)$

Câu 9: Biết đường cong trong *Hình 1* là một parabol $y = ax^2$. Tính hệ số a và tìm tọa độ các điểm thuộc parabol có tung độ $y = -9$.



Hình 1

Lời giải

Từ *Hình 1*, ta có parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $(2; -2)$

$$\text{nên } -2 = a.2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Gọi điểm trên parabol có tung độ $y = -9$ là $(x; -9)$,

$$\text{ta có: } -9 = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}.$$

Vậy có 2 điểm trên parabol có tung độ bằng -9

$$\text{là } (3\sqrt{2}; -9)$$

Câu 10: Cho parabol $(P): y = ax^2$. Tìm a biết rằng parabol (P) đi qua điểm $A(3; -3)$. Vẽ (P) với a vừa tìm được.

Lời giải

$$(P) \text{ đi qua điểm } A(3; -3) \text{ nên ta có } -3 = 3^2.a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } P = -\frac{1}{3}x^2.$$

Câu 11: Xác định hàm số $y = (a+1)x^2$, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -2)$.

Lời giải

$$y = (a+1)x^2 \text{ đi qua điểm } A(1; -2) \text{ nên } -2 = (a+1)1^2 \Leftrightarrow a+1 = -2 \Leftrightarrow a = -3.$$

Câu 12: Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = 2x^2$ trên hệ trục tọa độ. Tìm giao điểm của $(P): y = 2x^2$ với $(d): y = -x + 3$ bằng phép tính.

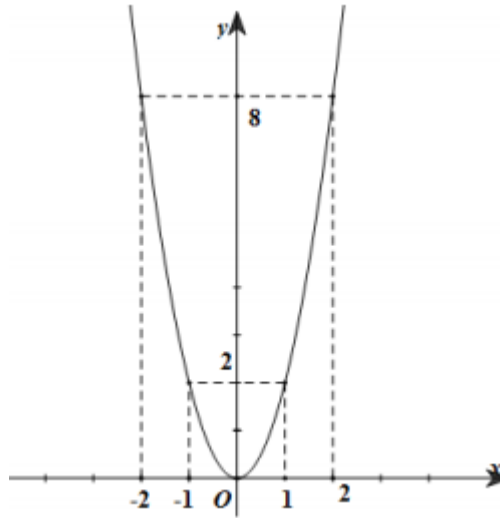
Lời giải

$$\text{Vẽ đồ thị } (P): y = 2x^2$$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Vẽ đồ thị:



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4.2.(-3) = 25 > 0$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-3}{2}; x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$

Hoặc học sinh có thể làm theo cách: ta có $a + b + c = 2 + 1 + (-3) = 0$

Với $x = 1$ ta có: $y = 2$

Với $x = \frac{-3}{2}$ ta có: $y = \frac{9}{2}$

Vậy tọa độ giao điểm là $(1; 2)$ và $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol (P) : $y = -\frac{1}{4}x^2$

a) Vẽ đồ thị của (P)

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường thẳng d : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

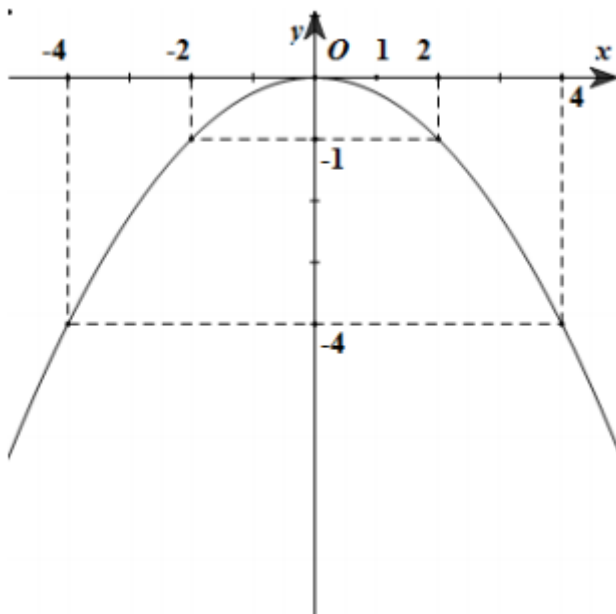
Lời giải

$$(P): y = -\frac{1}{4}x^2$$

Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-1	0	-1	-4

Vẽ



Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng d là

$$-\frac{1}{4}x^2 = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Delta' = (-4)^2 - 3.4 = 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3} \\ x = \frac{4+2}{3} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{2}{3} \text{ ta có } y = \frac{-1}{9} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{9}\right)$$

$$\text{Với } x = 2 \text{ ta có } y = -1 \Rightarrow B(2; -1)$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và là $A\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{9}\right)$ và $B(2; -1)$.

Câu 14:

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng $(D): y = \frac{x}{2} - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

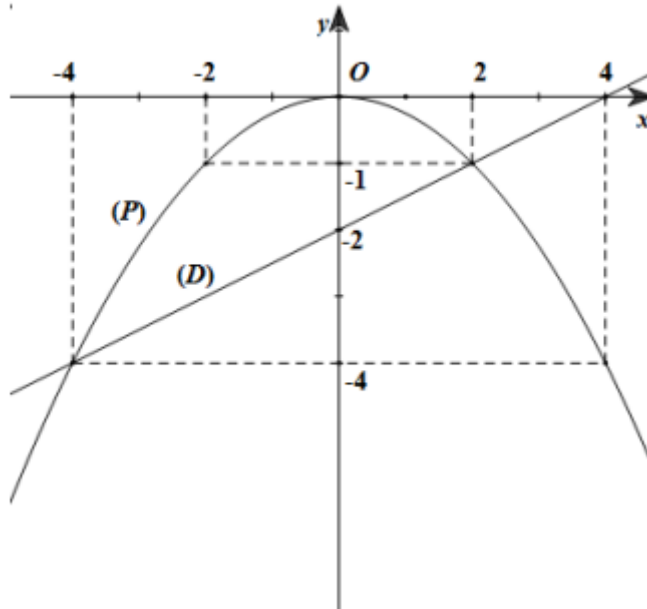
Lời giải

- a) Vẽ đồ thị hai hàm số.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4
$y = \frac{x}{2} - 2$			-2		0

Đồ thị



b) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) bằng phép tính

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$\frac{-x^2}{4} = \frac{x}{2} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta' = 9$$

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2; x_2 = -4$

Với $x_1 = 2$ ta có $y_1 = -1, A(2; -1)$

Với $x_2 = -4$ ta có $y_2 = -4, A(-4; -4)$

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(2; -1); B(-4; -4)$.

Câu 15:

a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = 3x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Xác định tọa độ các giao điểm của hai đồ thị trên.

Lời giải

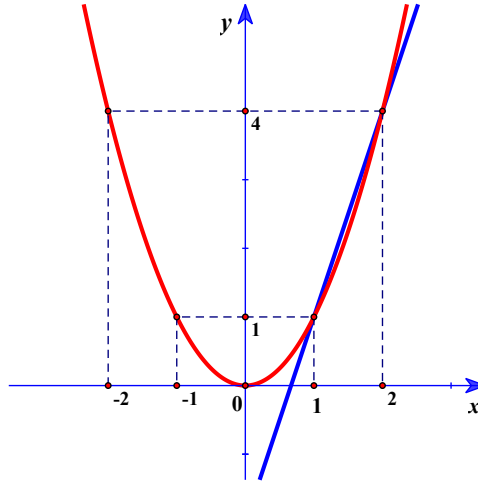
a) Vẽ đồ thị trên cùng một hệ trục

Vẽ $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vẽ $y = 3x - 2$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -2$; cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$



b) *Tính tọa độ giao điểm*

Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
có $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2$

Tại $x = 1$ ta có $y = 1$, tọa độ thứ nhất là $(1; 1)$

Tại $x = 2$ ta có $y = 4$, tọa độ thứ 2 là $(2; 4)$

Câu 16: Cho hai hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$ có đồ thị lần lượt là (d) và (P)

j) Vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

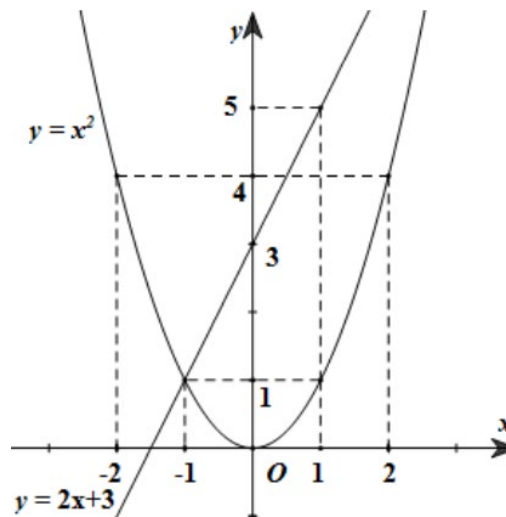
k) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) bằng phép toán.

Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 3$			3	5	
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$2x + 3 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 = 1$; với $x = 3 \Rightarrow y = 3^2 = 9$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $(-1;1)$ và $(3;9)$.

Câu 17: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m-1)x - m + 2$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = (2m-1)x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (2m-1)x + m - 2 = 0(*)$

Ta có $\Delta = (2m-1)^2 - 4.1.(m-2) = 4m^2 - 8m + 9 = 4(m-1)^2 + 5 \geq 5 > 0$

Vậy Parabol luôn cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt.

b) Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}$. Mặt khác $\begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$.

Ta có $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 = 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ 4m^2 - 7m + 7 = 0 (vn) \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 4x + 9$.

a) Vẽ đồ thị (P) .

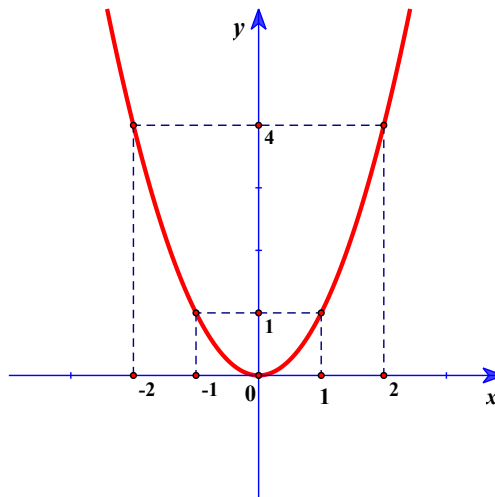
b) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song với đường thẳng (d) và (d_1) tiếp xúc (P) .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị $(P): y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Ta có đồ thị hàm số



b) Gọi phương trình đường thẳng (d_1) có dạng: $y = ax + b$

Vì (d_1) song song với (d) nên ta có: $\begin{cases} a = 4 \\ b \neq 9 \end{cases} \Rightarrow (d_1): y = 4x + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1) là:

$$x^2 = 4x + b \Leftrightarrow x^2 - 4x - b = 0 (*)$$

Vì (d_1) tiếp xúc với (P) nên $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + b = 0 \Leftrightarrow b = -4 \text{ (tmđk)}$$

Vậy phương trình đường thẳng (d_1) là: $y = 4x - 4$.

Câu 19: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 1$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một trục tọa độ.

b) Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d và đi qua $A(-1; 2)$.

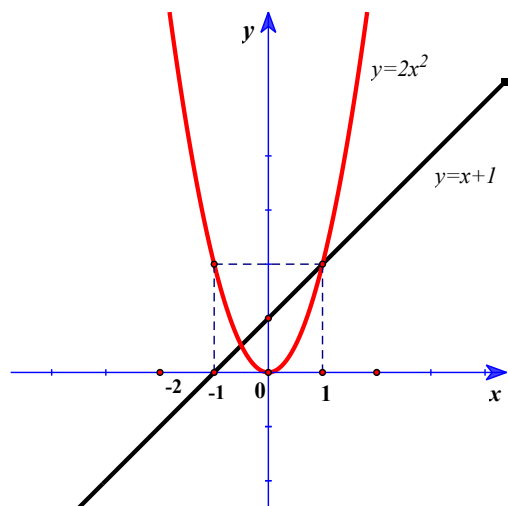
Lời giải

a) Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 1$.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

x	0	-1
$y = x + 1$	1	0



b) Phương trình đường thẳng d_1 song song với đường

thẳng d có dạng $y = x + b$.

d_1 đi qua điểm $A(-1; 2)$ nên ta có $-1 + b = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow d_1: y = x + 3$.

Câu 20: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng

$$(d): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

a) Vẽ đồ thị của (P) .

b) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ lần lượt là các giao điểm của (P) với (d) . Tính giá trị biểu

$$\text{thức } T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$

Lời giải

a) HS tự vẽ.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(2;2) \\ x=-\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{9}{8} \Rightarrow B\left(\frac{-3}{2}; \frac{9}{8}\right) \end{cases} \cdot \text{Vậy } T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{2 + \left(-\frac{3}{2}\right)}{2 + \frac{9}{8}} = \frac{4}{25}.$$

Câu 21: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2ax - 4a$ (với a là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $a = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ (d) và (P) là $x^2 + 2ax + 4a = 0$

Khi $a = -\frac{1}{2}$ thì phương trình trở thành $x^2 - x - 2 = 0$

Có $a - b + c = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm là $x = -1; x = 2$.

b) Phương trình hoành độ (d) và (P) là $x^2 + 2ax + 4a = 0$ (*)

để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \Delta' = a(a - 4) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a < 0 \\ a > 4 \end{cases} \text{ theo Viét}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1 x_2 = 4a \end{cases}$$

$$|x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 9$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 8a + |8a| = 9$$

$$\text{Với } a < 0: 4a^2 - 8a + |8a| = 9 \Leftrightarrow 4a^2 - 16a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Với } a > 4: 4a^2 - 8a + |8a| = 9 \Leftrightarrow 4a^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \notin dk \\ a = \frac{-3}{2} \notin dk \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{1}{2}.$$

Câu 22: Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = mx + 4$, với m là tham số.

a) Khi $m = 3$, tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số trên.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị m , đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1)$ và $A_2(x_2; y_2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2$ và $y = mx + 4$ là $x^2 - mx - 4 = 0$ (1)

Thay $m = 3$ vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 3x - 4 = 0$

Ta có: $a - b + c = 1 - (-3) + (-4) = 0$

Vậy phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$ có hai nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$

Với $x = 4 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow B(4; 16)$

Vậy với $m = 3$ thì hai đồ thị hàm số giao nhau tại 2 điểm $A(-1; 1)$ và $B(4; 16)$.

b) Ta có số giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là số nghiệm của phương trình (1)

Phương trình (1) có: $\Delta = m^2 - 4 \cdot (-4) = m^2 + 16 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$

Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Vậy đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1)$ và $A_2(x_2; y_2)$ với mọi m .

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$

Ta lại có: $\begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$

Theo đề, ta có:

$$(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 + (x_2^2)^2 - 2(x_1^2 x_2^2) = 49$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2(x_1 x_2)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow [m^2 - 2 \cdot (-4)]^2 - 2(-4)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 8)^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 = 9 \\ m^2 + 8 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 8 = 9 \text{ (do } m^2 + 8 > 0 \forall m)$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy với $m = 1; m = -1$ thì $(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $x_A = -1, x_B = 2$.

- Tìm tọa độ của hai điểm A, B .
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B .
- Tính khoảng cách từ điểm O (gốc tọa độ) tới đường thẳng (d) .

Lời giải

a) Vì A, B thuộc (P) nên:

$$x_A = -1 \Rightarrow y_A = \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_B = 2 \Rightarrow y_B = \frac{1}{2}2^2 = 2$$

$$\text{Vậy } A\left(-1; \frac{1}{2}\right), B(2; 2).$$

b) Gọi phương trình của đường thẳng d là $y = ax + b$.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -a + b = \frac{1}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } d: y = \frac{1}{2}x + 1.$$

c) d cắt trục Oy tại điểm $C(0; 1)$ và cắt trục Ox tại điểm $D(-2; 0) \Rightarrow OC = 1$ và $OD = 2$.

Gọi h là khoảng cách từ O tới d

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông OCD , ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 24: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = -x + 2$ có đồ thị là (d) .

- Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) ; (hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B). Gọi C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành, tính diện tích của tứ giác $ABDC$.

Lời giải

Phương trình hđgđ của (P) và (d) : $x^2 = -x + 2$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

$$\square x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

$$\square x = -2 \Rightarrow y = 4$$

$$\text{Vậy } A(-2; 4), B(1; 1).$$

$ABDC$ là hình thang vuông có 2 đáy $BD = |y_B| = 1; AC = |y_A| = 4$. Đường cao $CD = |x_B - x_A| = 3$.

$$\text{Vậy } S_{ABDC} = \frac{1}{2}(1 + 4) \cdot 3 = 7,5 \text{ (đvdt)}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .

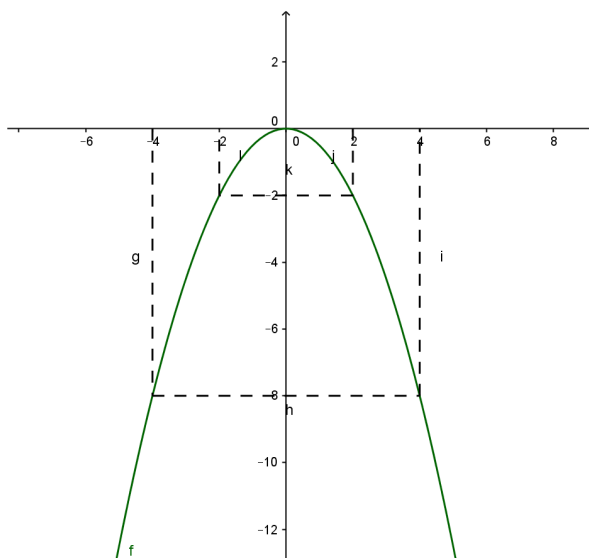
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Cho đường thẳng $y = mx + n$ (Δ). Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y = -2x + 5$ (d) và có duy nhất một điểm chung với đồ thị (P) .

Lời giải

a) Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, bề lõm hướng xuống và đi qua các điểm $(0;0); (2;-2); (-2;-2); (4;-8); (-4;-8)$.

Đồ thị $y = -\frac{1}{2}x^2$:



b) Δ song song với $y = -2x + 5$ suy ra $\begin{cases} m = -2 \\ n \neq 5 \end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (P) : $-\frac{1}{2}x^2 = -2x + n$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2n = 0 \quad (*)$$

Để Δ và (P) có một điểm chung duy nhất thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất thì

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 - 2n = 0 \Leftrightarrow n = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = -2; n = 2$.

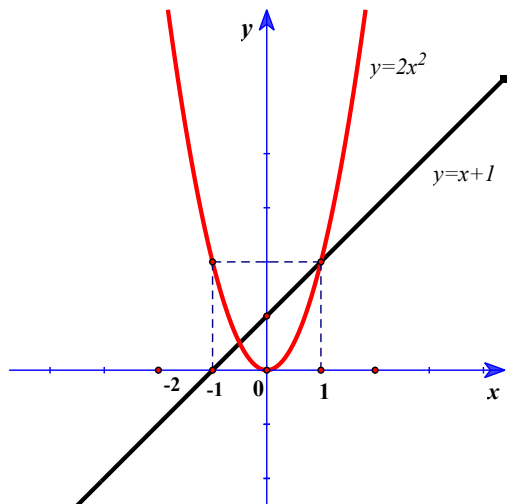
Câu 26: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 1$.

a) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

b) Bằng phép tính, xác định tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị: (như hình vẽ bên)



Tọa độ giao điểm của (P) và (d)

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - x - 1 = 0$

Ta có $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm

$-\frac{1}{2}; 1$ suy ra tọa độ hai giao điểm là: $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $B(1; 2)$

b) Tính độ dài AB :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số: $y = \frac{1}{4}x^2$

b) Cho đường thẳng (D) : $y = \frac{3}{2}x + m$ đi qua điểm $C(6; 7)$. Tìm tọa độ giao điểm của (D) và (P) .

Lời giải

a) Vẽ (P) học sinh tự vẽ.

b) (D) : $y = \frac{3}{2}x + m$ đi qua điểm $C(6; 7)$ nên $\frac{3}{2} \cdot 6 + m = 7 \Leftrightarrow m = -2$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (D) và (P) : $\frac{x^2}{4} = \frac{3}{2}x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm là $(2; 1), (4; 4)$.

Câu 28: Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x^2$.

a) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

b) Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm A và B (với A có hoành độ âm, B có hoành độ dương). Bằng tính toán hãy tìm tọa độ các điểm A và B .

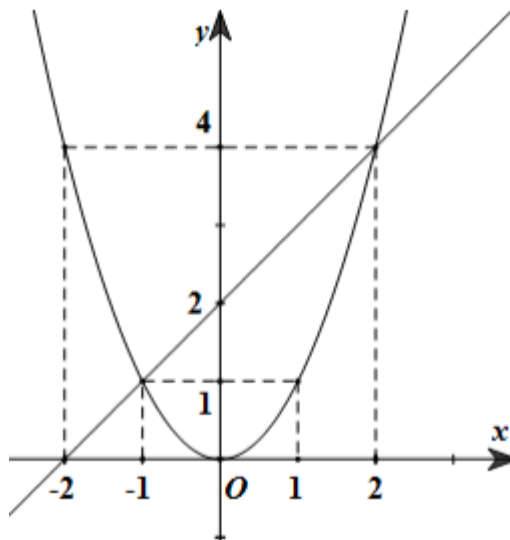
Lời giải

a) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x + 2$	0		2		
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(2; 4)$ (vì B có hoành độ dương)

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$ (vì A có hoành độ âm)

Vậy $A(-1; 1), B(2; 4)$.

Câu 29: Cho hai hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và đồ thị hàm số (P) và $y = x + 4$ có đồ thị (d)

a) Vẽ đồ thị (P) .

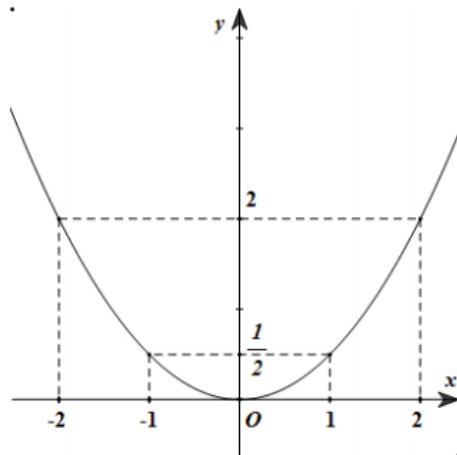
b) Gọi A, B là các giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) . Biết rằng đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét, tìm tất cả các điểm M trên tia Ox sao cho diện tích tam giác MAB bằng 30 cm^2 .

Lời giải

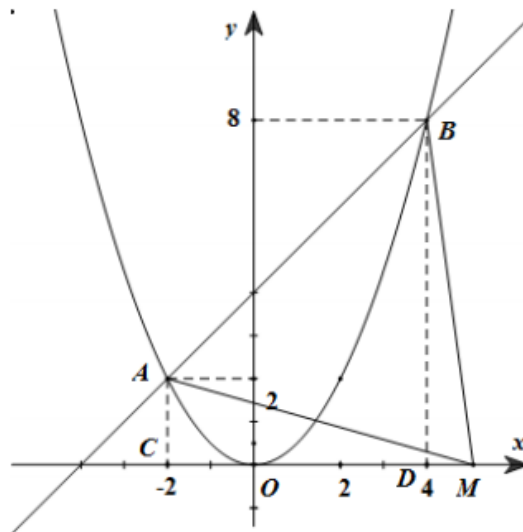
a) Vẽ đồ thị (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:



$$\frac{1}{2}x^2 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - (-8) = 9 > 0$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x = 4; x = -2$

Với $x = -2$ ta có $y = 2 \Rightarrow A(-2; 2)$

Với $x = 4$ ta có $y = 8 \Rightarrow B(4; 8)$

Gọi $M(m; 0)$ thuộc tia $Ox (m > 0)$. Gọi $C(-2; 0), D(4; 0)$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: M thuộc đoạn OD : Ta có $S_{AMB} = S_{ABDC} - S_{ACM} - S_{BDM}$

Có $ABDC$ là hình thang, $AC = 2cm, BD = 8cm, CD = 6cm$

$$\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{(2+8) \cdot 6}{2} = 30(cm^2)$$

Suy ra $S_{AMB} < 30cm^2$ (loại)

Trường hợp 2: M thuộc tia $Dx (M \neq D) \Rightarrow m > 4$

Ta có: $S_{AMB} = S_{ABDC} - S_{ACM} + S_{BDM}$

Có $S_{ABDC} = 30cm^2, MC = m + 2(cm), MD = m - 4(cm)$

Suy ra

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} AC.CM = \frac{1}{2}.2.(m+2) = m+2(cm^2)$$

$$S_{BDM} = \frac{1}{2} BD.DM = \frac{1}{2}.8.(m-4) = 4(m-4)(cm^2)$$

$$\Rightarrow S_{AMB} = 30cm^2 \Leftrightarrow S_{ACM} = S_{BDM} \Leftrightarrow m+2 = 4(m-4) \Leftrightarrow m = 6$$

(thỏa mãn)

Vậy $M(6;0)$ là điểm cần tìm.

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = 3x + m - 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để a) $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = 3x + m^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0(*)$$

$$\Delta = 9 + m^2 - 1 = 8 + m^2 > 0 \forall m$$

Suy ra phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Ta có: $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + x_2) = 0$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et cho } (*): \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -m^2 + 1 \end{cases}$$

$$(**) \Leftrightarrow -m^2 + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$.

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - 3$

a) Vẽ đồ thị Parabol (P) .

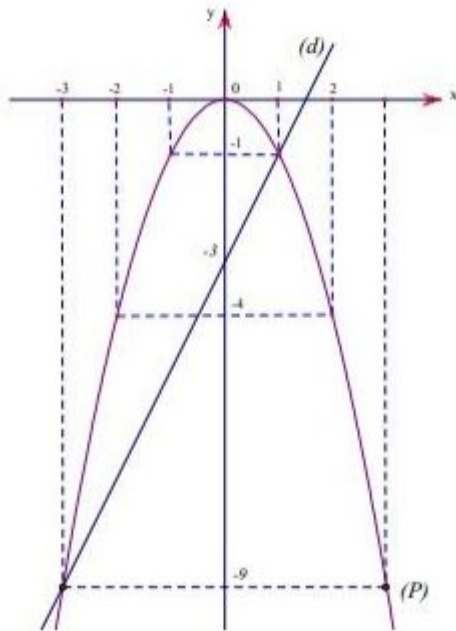
b) Bằng phương pháp đại số, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

c) Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có điểm chung với parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 .

Lời giải

a) Bảng một số giá trị của (P) :

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ y = -3 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$$

Vậy giao điểm của (P) và (d) : $(1; -1)$ và $(-3; -9)$

c) Phương trình đường thẳng (d_1) có dạng: $y = ax + b$

$$(d_1) \parallel (d) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x + b \quad (b \neq -3)$$

Gọi A là điểm thuộc (P) có $x_A = -1 \Rightarrow y_A = -1 \Rightarrow A(-1; -1)$

(d_1) có chung với (P) điểm $A(-1; -1)$ nên: $-1 = 2 \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = 1$

Vậy (d_1) có phương trình: $y = 2x + 1$

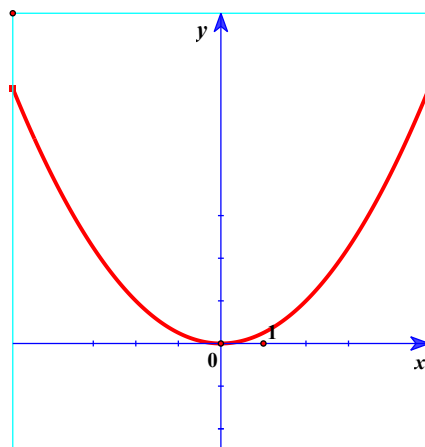
Câu 32:

a) Vẽ đồ thị (P) hàm số $y = \frac{x^2}{4}$

b) Xác định a, b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua gốc tọa độ và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng -3 .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) hàm số $y = \frac{x^2}{4}$



b) Gọi (d) là đường thẳng có phương trình $y = ax + b$.

Vì (d) đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên $b = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $\frac{x^2}{4} = ax$

Vì (d) cắt (P) tại điểm A có hoành độ là -3 nên: $\frac{9}{4} = a(-3) \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$

Vậy: $a = -\frac{3}{4}; b = 0$

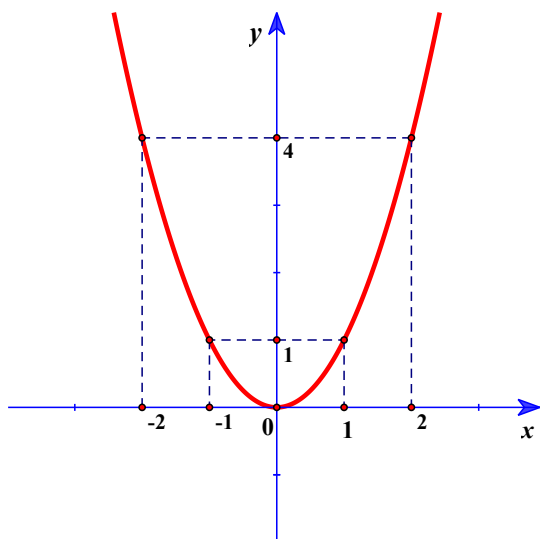
Câu 33:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng $(d) y = kx + 1$ luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$.



b) PT hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0$$

$$\Delta = k^2 + 4$$

Vì $k^2 \geq 0$ với mọi giá trị k

Nên $k^2 + 4 > 0$ với mọi giá trị k

$\Rightarrow \Delta > 0$ với mọi giá trị k

Vậy đường thẳng $(d) y = kx + 1$ luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Câu 34: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P) .

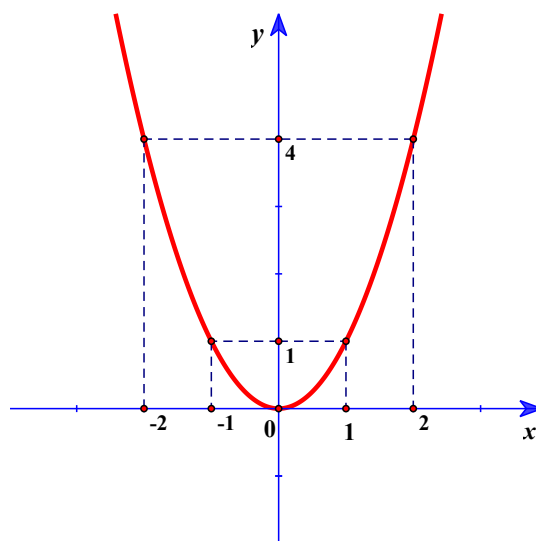
b) Cho các hàm số $y = x + 2$ và $y = -x + m$ (với m là tham số) lần lượt có đồ thị là (d) và (d_m) .

Tìm tất cả các giá trị của m để trên một mặt phẳng tọa độ các đồ thị của (P) , (d) và (d_m) cùng đi qua một điểm.

Lời giải:

a) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị: $y = x^2$

x	0	1	2
y	0	1	4



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 (*)$$

Phương trình $(*)$ có dạng: $a - b + c = 0$ nên có 2 nghiệm:
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-c}{a} = 2 \end{cases}$$

Ta có (d) cắt (P) tại hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;4)$.

Đề $(P), (d)$ và (d_m) cùng đi qua một điểm thì hoặc $A \in (d_m)$ hoặc $B \in (d_m)$

+ Với $A(-1;1) \in (d_m)$, ta có: $1 = -(-1) + m \Leftrightarrow m = 0$

+ Với $B(2;4) \in (d_m)$, ta có: $4 = -2 + m \Leftrightarrow m = 6$

Vậy khi $m = 0$ hoặc $m = 6$ thì $(P), (d)$ và (d_m) cùng đi qua một điểm.

Câu 35: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = -x^2$

a) Vẽ parabol (P) .

b) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y = -x - 2$ và (P) . Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M .

Lời giải:

a) Vẽ đồ thị $(P): y = -x^2$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Tọa độ đỉnh: $I(0;0)$

Trục đối xứng: $x = 0$

Tính biến thiên:

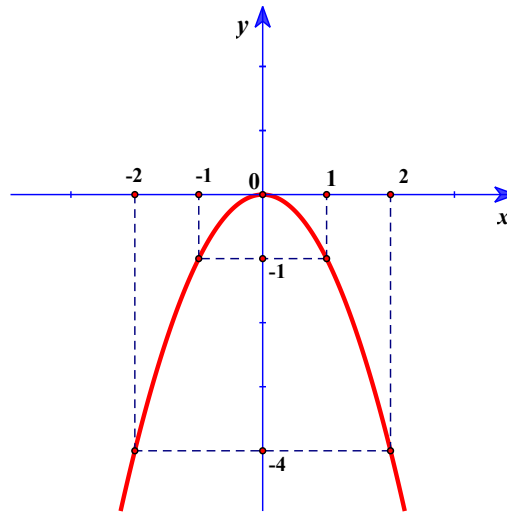
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y		0	

Bảng giá trị

x	-1	0	1
y	-1	0	-1



- b) Viết phương trình đường trung trực (d') của AB , tìm giao điểm của (d') và (P) , ta tìm được hai điểm M .

Hoành độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y = -x - 2$ và (P) là nghiệm của phương trình: $-x^2 = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$

+ Với $x = -1$, thay vào (P) , ta có: $y = -(-1)^2 = -1$, ta có: $A(-1; -1)$

+ Với $x = 2$, thay vào (P) , ta có: $y = -(2)^2 = -4$, ta có: $B(2; -4)$

Suy ra trung điểm của AB là: $I\left(\frac{1}{2}; \frac{-5}{2}\right)$

Đường thẳng (d') vuông góc với (d) có dạng: $y = x + b$;

Vì (d') đi qua I nên: $\frac{-5}{2} = \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = -3$

Vậy $(d'): y = x - 3$.

Phương trình hoành độ của (d') và (P) là: $x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

+ Với $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{-7 - \sqrt{13}}{2}$

+ Với $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}$

Vậy có hai điểm M cần tìm là: $\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 - \sqrt{13}}{2}\right)$ và $\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}\right)$.

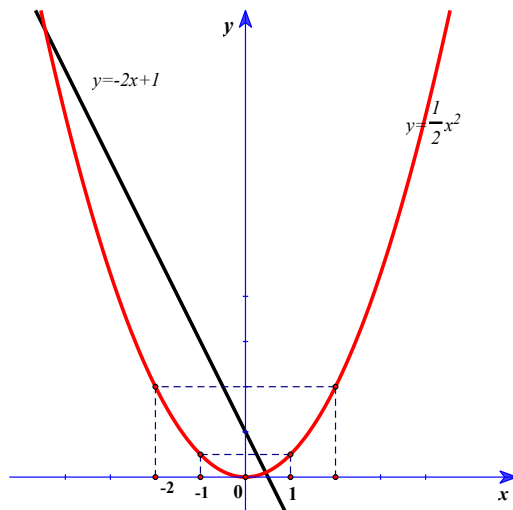
Câu 36: Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(a): y = -2x + 1$

- c) Vẽ (P) và a trên cùng một hệ trục tọa độ.

- d) Xác định đường thẳng (d) biết đường thẳng (d) song song với đường thẳng (a) và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

Lời giải

- a) Parabol có đỉnh gốc O đi qua hai điểm $A(-2;2), B(2;2)$, đường thẳng đi qua hai điểm $C(1;-1), D(0;1)$



- b) Vì $(d) \parallel (a) \Rightarrow (d): y = -2x + b$ (b khác 1)

Gọi $N(x_0; y_0)$ là giao điểm của (d) và (P) ta có $x_0 = -2$

$$N \in (P) \Rightarrow y_0 = 2$$

$$N \in (d) \Rightarrow 2 = -2(-2) + b \Rightarrow b = -2 \text{ (TM) } 0,25$$

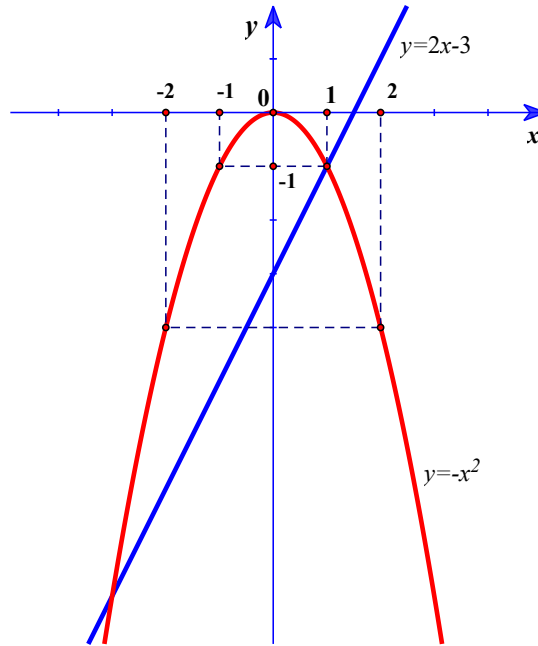
$$\text{Vậy } (d): y = -2x - 2.$$

Câu 37: Cho các hàm số $(P): y = -x^2$ và $(d): y = 2x - 3$.

- Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng phép tính.
- Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$, biết rằng (d_1) song song với (d) và (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 .

Lời giải

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .



b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị bằng phép tính.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -3$$

* Với $x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ giao điểm thứ nhất là $(1; -1)$

* Với $x = -3 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow$ giao điểm thứ hai là $(-3; -9)$

c) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$, biết rằng (d_1) song song với (d) và (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 .

Đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ song song đường thẳng $(d): y = 2x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $(d_1): y = 2x + b$

Vì đường thẳng $(d_1): y = 2x + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4

$$\Rightarrow b = -4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Suy ra phương trình đường thẳng (d_1) là $y = 2x - 4$.

Câu 38: Cho parabol $(P): y = x^2$ và điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là $-1; 2$. Đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + n$.

e) Tìm tọa độ điểm A, B . Tìm m, n biết (d) đi qua điểm A và B .

f) Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB (điểm O là gốc tọa độ).

Lời giải

a) Ta có: $A(x_A; y_A) \in (P)$ có hoành độ $x_A = -1 \Rightarrow y_A = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

$$B(x_B; y_B) \in (P) \text{ có hoành độ } x_B = 2 \Rightarrow y_B = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2 \Rightarrow B(2; 2)$$

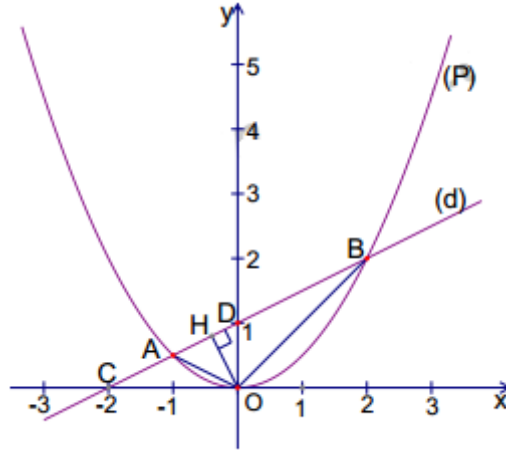
Vì đường thẳng $y = mx + n$ đi qua 2 điểm A và B nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -m+n=\frac{1}{2} \\ 2m+n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m=\frac{3}{2} \\ 2m+n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ 2\cdot\frac{1}{2}+n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=1 \end{cases}$$

Vậy với $m=\frac{1}{2}, n=1$ thì (d) đi qua 2 điểm $A\left(-1;\frac{1}{2}\right); B(2;2)$

b) Vẽ (P) và (d) trên cùng 1 hệ trục tọa độ như hình vẽ

Để thấy (d) cắt Ox tại $C(-2;0)$ và cắt Oy tại $D(0;1) \Rightarrow OC=2; OD=1$



Độ dài đường cao OH của tam giác OAB chính là độ dài đường cao OH của tam giác OCD

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OCD ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow OH = \frac{2\sqrt{5}}{5} (dvdv)$$

$$\text{Vậy } OH = \frac{2\sqrt{5}}{5} (dvdv)$$

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = x + m - 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0;1)$

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1,$

$$x_2 \text{ thỏa mãn: } 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0.$$

Lời giải

a) Thay $x=0; y=1$ vào phương trình đường thẳng (d) ta được: $m=2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 - x - (m-1) = 0(*)$

Để (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$$

$$\text{Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -(m-1) \end{cases}$$

Theo đề Câu:

$$4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}\right) - x_1x_2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{-m+1} + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \text{ (DK : } m \neq 1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3(L) \\ m = 2(TM) \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 40: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$

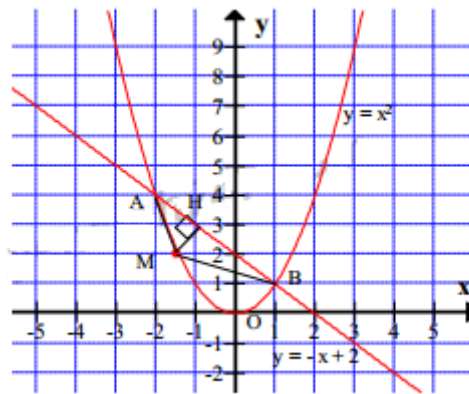
g) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.

h) Bằng phép tính, xác định tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) .

i) Tìm tọa độ điểm M trên cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) và (d) như hình vẽ



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2.$$

$$\text{Nếu } x = -2 \text{ thì } y = 4 \Rightarrow A(-2; 4)$$

$$\text{Nếu } x = 1 \text{ thì } y = 1 \Rightarrow B(1; 1)$$

c) Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm thuộc parabol (P) , cung AB sao cho diện tích tam giác AMB lớn nhất.

$$\text{Điều kiện: } -2 < x_M < 1 \text{ và } 0 \leq y_M < 4$$

Từ M , kẻ $MH \perp AB$ tại H , ta có:

+ Phương trình đường thẳng $AB: y = -x + 2$.

+ Phương trình đường thẳng MH có dạng: $y = ax + b$. Đường thẳng này vuông góc với AB

Suy ra $a \cdot (-1) = -1$. Suy ra: $a = 1$, đường thẳng MH có phương trình $y = x + b$

+ Phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và $MH: x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 - x - b = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b) = 1 + 4b$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Do đó: MH có phương trình: $y = x - \frac{1}{4}$

+ phương trình hoành độ giao điểm giữa AB và MH : $x - \frac{1}{4} = -x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$

Khi đó: $y = \frac{9}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ và $H\left(\frac{9}{8}; \frac{7}{8}\right)$

+ Phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và MH : $x^2 = x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

phương trình có nghiệm kép: $x = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện)

Khi đó: $y = x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (thỏa điều kiện)

Vậy: $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Khi đó:

$$MH = \sqrt{(x_M - x_H)^2 + (y_M - y_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{32}} = \frac{5}{8}\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Diện tích tam giác } AMB \text{ là } S_{AMB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{5}{8}\sqrt{2} = \frac{15}{8} \text{ (đvdt)}$$

Câu 41: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx - 3$ (với m là tham số).

- Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;3)$.
- Xác định các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho tổng 2 tung độ của hai giao điểm đó bằng -10 .

Lời giải

- Đường thẳng (d) đi qua $A(1;3)$ nên $3 = 3m \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow m = 2$.
- Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là:

$$-x^2 = 3mx - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3mx - 3 = 0(*)$$

Ta có $\Delta = 9m^2 + 12 > 0$, với mọi m nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

Do đó, đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -3m; x_1 \cdot x_2 = -3$.

Theo Câu ra ta có:

$$y_1 + y_2 = -10 \Leftrightarrow -x_1^2 - x_2^2 = -10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 6 = 10$$

$$\Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}$$

Câu 42: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x + 5 - 2m$ (m là tham số)

- Vẽ đồ thị parabol (P) .

m) Biết đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là x_1, x_2 . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

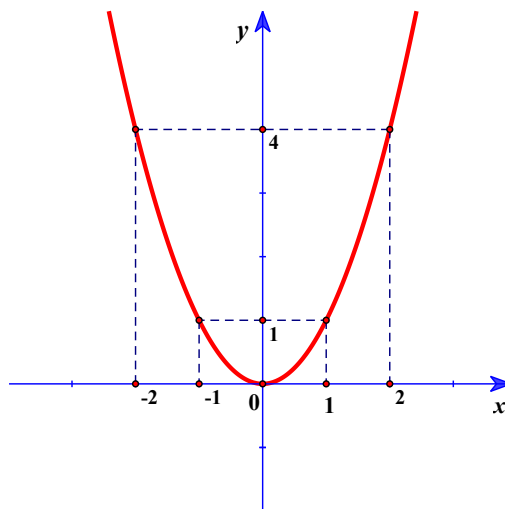
Lời giải

a) Vẽ đồ thị

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị:



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = 2(m-1)x + 5 - 2m \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$$

Theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 5 \end{cases}$$

Theo đề Câu, ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6 \Leftrightarrow (2m - 2)^2 - 2(2m - 5) = 6 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy: $m = 1$ hoặc $m = 2$.

Câu 43: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = 2(m+1)x - 3m + 2$

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với $m = 3$.

b) Chứng minh (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B với mọi m .

c) Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ giao điểm của A và B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Lời giải

Thay $m = 3$ ta được $(d): y = 8x - 7$

Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) khi $m = 3$ là

$$x^2 = 8x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 1; x_2 = 7$

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;1); (7;49)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 - 2(m+1)x + 3m - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = m^2 + 2m + 1 - 3m + 2 = m^2 - m + 3 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \quad \forall m$$

Nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ suy ra (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B với mọi m .

Ta có: $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình (1) vì $\Delta' > 0 \quad \forall m$. Theo Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = 3m - 2 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 20 \Leftrightarrow (2m + 2)^2 - 2(3m - 2) = 20$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(2m + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 44: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P)

a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm nằm trên Parabol (P) có hoành độ $x = 2$ và có hệ số góc k . Với giá trị k nào thì (d) tiếp xúc (P) ?

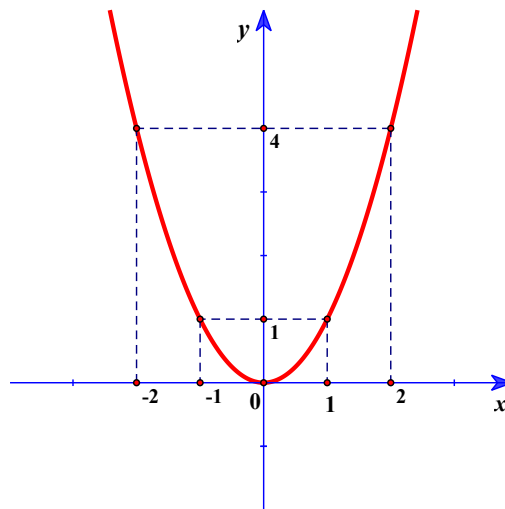
Lời giải

a)

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số là hình vẽ



b) Đường thẳng (d) có hệ số góc k nên có dạng $y = kx + b$

Điểm thuộc (P) có hoành độ $x = 2 \Rightarrow y = 4$

(d) qua $(2; 4) \Rightarrow 4 = k \cdot 2 + b \Rightarrow b = -2k + 4$

Suy ra $(d): y = kx - 2k + 4$

Đường thẳng (d) tiếp xúc (P) khi đó phương trình sau có nghiệm kép

$$x^2 = kx - 2k + 4 \Leftrightarrow x^2 - kx + 2k - 4 = 0$$

$$\Delta = k^2 - 8k + 16$$

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 8k + 16 = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy $k = 4$.

Câu 45: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$.

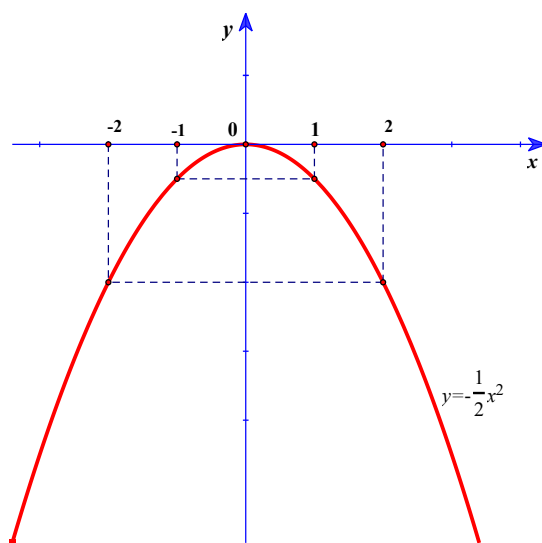
a) Vẽ đồ thị của (P) .

b) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hoành độ giao điểm của (P) và $(d): y = x - 4$. Chứng minh:

$$y_1 + y_2 - 5(x_1 + x_2) = 0$$

Lời giải

a) $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$\frac{-1}{2}x^2 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x = 2; x = -4$

Tọa độ giao điểm là: $(2; -2)$ và $(-4; -8)$

Khi đó: $y_1 + y_2 - 5(x_1 + x_2) = -2 + (-8) - 5(2 - 4) = 0$.

Câu 46: Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = 3x + 2$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Viết phương trình đường thẳng d' vuông góc với đường thẳng d và tiếp xúc với (P) .

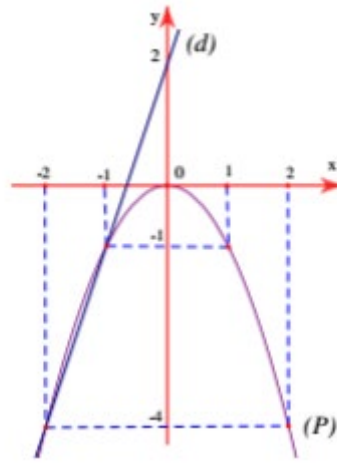
Lời giải

a) + Bảng một số giá trị của (P) :

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	-4	-1	0	-1	-4

+ (d) đi qua 2 điểm $(0; 2)$ và $(-1; -1)$.

+ Đồ thị:



b) d' có dạng: $y = a'x + b'$; $d' \perp d \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$

với $a = 3 \Rightarrow a' = \frac{-1}{3} \Rightarrow d': y = \frac{-1}{3}x + b'$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d' : $-x^2 = \frac{-1}{3}x + b' \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{3}x + b' = 0(*)$

PT $(*)$ có $\Delta = \frac{1}{9} - 4b'$

d tiếp xúc với (P) khi $\Delta = \frac{1}{9} - 4b' = 0 \Leftrightarrow b' = \frac{1}{36}$

Vậy d' có phương trình: $y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{36}$

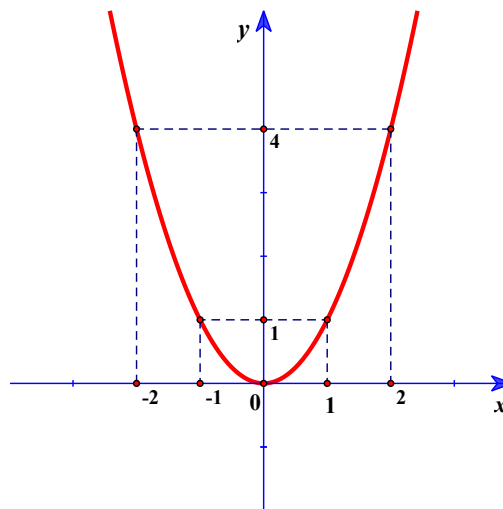
Câu 47: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = 4x + m$ có đồ thị (d_m)

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho (d_m) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt, trong đó tung độ của một trong hai giao điểm đó bằng 1.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) .



b) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4x + m$ là:

$$x^2 = 4x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x - m = 0(1)$$

(1) có $\Delta = 4 + m$

Đề (d_m) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4$

$$y = 4x + m = 1 \Rightarrow x = \frac{1-m}{4}$$

Yêu cầu của Câu toán tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m > -4 \\ 2 \pm \sqrt{4+m} = \frac{1-m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ \sqrt{4+m} = \frac{-7-m}{4} \text{ hay } -\sqrt{4+m} = \frac{-7-m}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m < -7 \\ \sqrt{4+m} = \frac{-7-m}{4} \end{cases} (L) \text{ hay } \begin{cases} m > -4 \\ m > -7 \\ 4\sqrt{4+m} = 7+m \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m^2 - 2m - 15 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m = -3 \Leftrightarrow m = -3 \text{ hay } m = 5 \\ m = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 48: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình: $y = -2x + m$ (với m là tham số).

- Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ là 2.
- Tìm giá trị của m để (d) cắt tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 6x_1^2 x_2^2$.

Lời giải

- Điểm thuộc Parabol $(P): y = x^2$ có hoành độ $x = 2$ nên tung độ $y = 2^2 = 4$

(d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 2 $\Leftrightarrow 4 = -2 \cdot 2 + m \Leftrightarrow m = 8$

Vậy $m = 8$ là giá trị cần tìm

- Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = -2x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x - m = 0 (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Với $m > -1$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$.

$$\text{Nên theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

$$\text{mà } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6x_1^2 x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - 2(-m) = 6(-m)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1; m_2 = \frac{-2}{3}$$

Vậy $m_1 = 1; m_2 = \frac{-2}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 49: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

- Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 25 > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 2; x = -3$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(2; 4)$

Với $x = -3 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow B(-3; 9)$

Vậy d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $(2; 4)$ và $(-3; 9)$.

b) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A và B xuống trục hoành.

Ta có $S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'}$

Ta có: $A'B' = |x_{B'} - x_{A'}| = x_{B'} - x_{A'} = 5, AA' = y_A = 9; BB' = y_B = 4$

Diện tích hình thang:

$$S_{AA'B'B} = \frac{AA' + BB'}{2} \cdot A'B' = \frac{9 + 4}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2} (dvdv)$$

$$S_{\Delta OAA'} = \frac{1}{2} A'A \cdot A'O = \frac{27}{2} (dvdv)$$

$$S_{\Delta OBB'} = \frac{1}{2} B'B \cdot B'O = 4 (dvdv)$$

$$S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'} = \frac{65}{2} - \frac{27}{2} - 4 = 15 (dvdv)$$

Câu 50:

a) Vẽ đồ thị hai hàm số: $y = x^2$ và $y = x + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

b) Xác định đường thẳng $y = ax + b$ biết rằng đường thẳng này song song với đường thẳng

$y = -3x + 5$ và cắt Parabol $y = 2x^2$ tại điểm A có hoành độ bằng -1 .

Lời giải

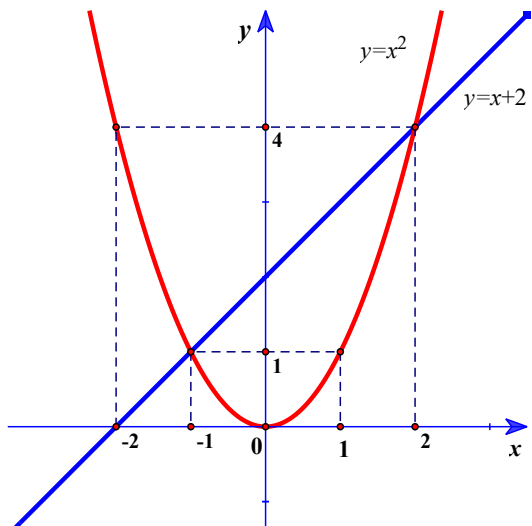
a) Gọi (P) và (d) là đồ thị của 2 hàm số: $y = x^2$ và $y = x + 2$

$$y = x^2$$

x	-1	0	1
y	1	0	1

$$y = x + 2$$

x	0	-2
y	2	0



b) Phương trình đường thẳng (d') có dạng $y = ax + b$

Vì (d') song song với đường thẳng $y = -3x + 5 \Rightarrow a = -3$ và $b \neq 5 \Rightarrow (d'): y = -3x + b$

A thuộc Parabol: $y = 2x^2 \Rightarrow y_A = 2(-1)^2 = 2$

Suy ra tọa độ $A(-1; 2) \in (d')$

$\Rightarrow 2 = (-3) \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = -1 \Leftrightarrow (d'): y = -3x - 1$

Câu 51: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

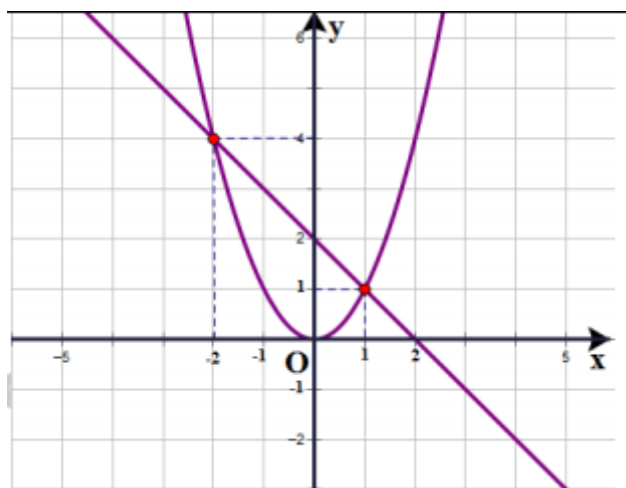
a) Hãy vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

c) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$. Biết rằng (d_1) song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ là 2.

Lời giải

a) Hãy vẽ (P) và (d)



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: hai giao điểm $(1; 1)$ và $(2; 4)$.

c) (d_1) song song với $(d) \Rightarrow a = -1$

Ta có $A(2; 4)$ thuộc $(P) \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow b = 6$

Vậy $(d_1): y = -x + 6$.

Câu 52: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m+3)x - 2m + 2$ (m là tham số).

- a) Với $m = -5$, tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) .
- b) Chứng minh rằng: với mọi m parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
Tìm m sao cho hai giao điểm đó có hoành độ dương.
- c) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m .

Lời giải

- a) Với $m = -5$, (d) có phương trình $y = -4x + 12$

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình:

$$x^2 = -4x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$+ x = -6 \Rightarrow y = 36$$

$$+ x = 2 \Rightarrow y = 4$$

Vậy với $m = -5$, thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm $(-6; 36), (2; 4)$.

- b) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình:

$$x^2 = 2(m+3)x - 2m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + 2m - 2 = 0(1)$$

$$\Delta' = (m+3)^2 - (2m-2) = m^2 + 4m + 11 = (m+2)^2 + 6 > 0 \forall m$$

Do đó (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m suy ra (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt m .

$x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1), áp dụng định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+3) \\ x_1 x_2 = 2m - 2 \end{cases}$$

Hai giao điểm đó có hoành độ dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+3) > 0 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy với $m > 1$ thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt với hoành độ dương.

- c) Gọi điểm cố định mà đường thẳng (d) đi qua với mọi m là $(x_0; y_0)$ ta có:

$$y_0 = 2(m+3)x_0 - 2m + 2 \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(2x_0 - 2) + 6x_0 - y_0 + 2 = 0 \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2 = 0 \\ 6x_0 - y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 8 \end{cases}$$

Vậy với mọi m thì đường thẳng (d) luôn đi qua $(1; 8)$.

Câu 53: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = mx - 3$ tham số m và Parabol $(P): y = x^2$.

- a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 0)$.

- b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải

- a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$ nên có $0 = m \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow m = 3$.
 b) Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) : $x^2 - mx + 3 = 0$

Có $\Delta = m^2 - 12$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 khi

$$\Delta = m^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 12 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{3} \\ m < -2\sqrt{3} \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi – Ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$

Theo Câu ra ta có

$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 \cdot 3 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$$

Vậy $m = \pm 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 54: Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) : $y = mx + m - 3$

- a) Tìm a để đồ thị (P) đi qua điểm $B(2; -2)$.
 b) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt C và D với mọi giá trị của m .
 c) Gọi x_C và x_D lần lượt là hoành độ của hai điểm C và D . Tìm các giá trị của m sao cho $x_C^2 + x_D^2 - 2x_C x_D - 20 = 0$

Lời giải

- a) (P) đi qua điểm $B(2; -2)$ nên ta có: $-2 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Vậy (P) : $y = -\frac{1}{2}x^2$

- b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$-\frac{1}{2}x^2 = mx + m - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m - 6 = 0(*)$$

$$\Delta' = m^2 - (2m - 6) = m^2 - 2m + 6 = (m - 1)^2 + 5 > 0 \forall m$$

Do đó, đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt C và D với mọi giá trị của m .

- c) Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_C + x_D = -2m \\ x_C x_D = 2m - 6 \end{cases}$

Theo giả thiết

$$x_C^2 + x_D^2 - 2x_C x_D - 20 = 0 \Leftrightarrow (x_C + x_D)^2 - 4x_C x_D - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(2m - 6) - 20 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy với $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 55: Trong mặt phẳng tọa độ cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$

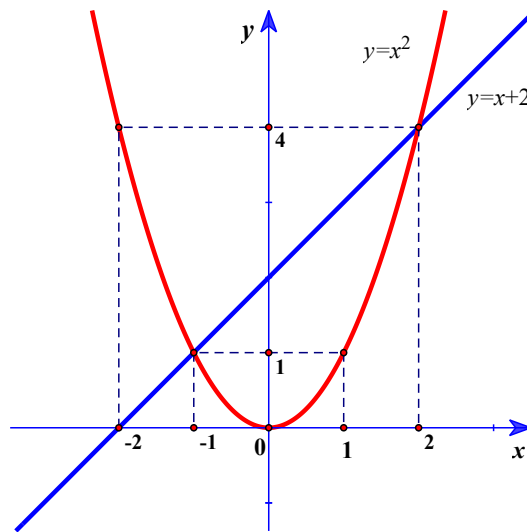
- Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) bằng phép tính.
- Tính độ dài đoạn AB .

Lời giải

- Vẽ (P) và (d)

Lập bảng giá trị (có ít nhất 5 giá trị)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Ta có: $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0$ nên phương trình có nghiệm 2 nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 2$

Từ đó tính được: $y_1 = 1; y_2 = 4$

Vậy tọa độ giao điểm giữa (P) và (d) là: $A(-1; 1); B(2; 4)$

Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ (đvdt)}$$

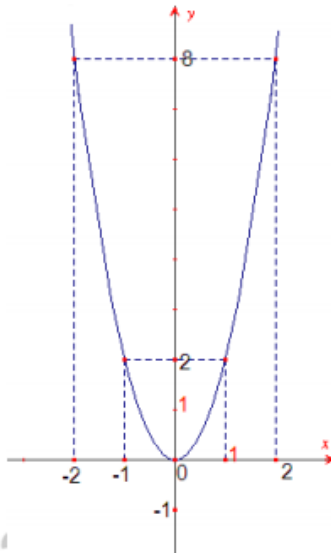
Câu 56: Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - m + 1$ (với m là tham số)

- Vẽ Parabol (P) .
- Tìm tất cả các giá trị của m để (P) cắt (d) có đúng một điểm chung.
- Tìm tọa độ các điểm thuộc (P) có hoành độ bằng hai lần tung độ.

Lời giải

- Vẽ đồ thị hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm cả (P) và (d) :

$$2x^2 = x - m + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + m - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m - 1) = 9 - 8m$$

Để (P) và (d) có một điểm chung thì: $\Delta = 0 \Leftrightarrow 9 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{8}$

Vậy với $m = \frac{9}{8}$ thì (P) và (d) có một điểm chung.

c) Điểm thuộc (P) mà hoành độ bằng hai lần tung độ nghĩa là $x = 2y$ nên ta có:

$$y = 2(2y)^2 \Leftrightarrow y = 8y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy điểm thuộc (P) mà hoành độ bằng hai lần tung độ là $(0;0); \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right)$.

Câu 57: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+3)x - m^2 - 3$. Tìm m để d tiếp xúc với (P) . Khi đó hãy tìm tọa độ tiếp điểm.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = 2(m+3)x - m^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0 (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = [-(m+3)]^2 - 1 \cdot (m^2 + 3) = 6m + 6.$$

Để d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 6m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Thay $m = -1$ vào $(*)$ ta được

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4$$

Vậy $m = -1$ thì d tiếp xúc với (P) và tọa độ tiếp điểm là $M(2;4)$.

Câu 58: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + 3$.

- a) Tìm tọa độ các giao điểm A và B của d và (P) , trong đó A là điểm có hoành độ âm. Vẽ d và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB để $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow y=3^2=9 \\ x=-1 \Rightarrow y=(-1)^2=1 \end{cases}$$

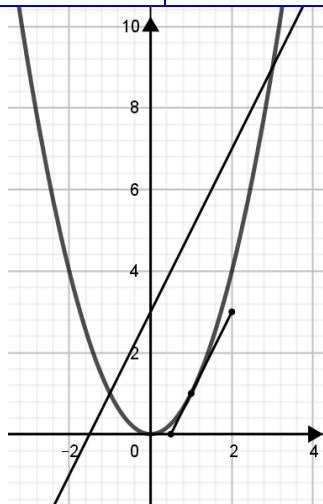
Vậy tọa độ các giao điểm của d và (P) là $A(-1;1), B(3;9)$.

* $d: y = 2x + 3$

x	0	$-\frac{3}{2}$
y	3	0

* $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



- b) Có $A(-1;1), B(3;9)$ cố định nên độ dài đoạn thẳng AB không đổi, do đó $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất khi khoảng cách từ C đến đường thẳng d lớn nhất, khi đó C là tiếp điểm của đường thẳng $d_1 \parallel d$ và d_1 tiếp xúc (P) .

Gọi phương trình đường thẳng $d_1: y = ax + b$.

$$\text{Do } d_1 \parallel d \text{ nên } \begin{cases} a_{d_1} = a_d \\ b_{d_1} \neq b_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq 3 \end{cases}$$

Suy ra $d_1: y = 2x + b, b \neq 3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (P) :

$$x^2 = 2x + b \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0$$

$$(*) \text{ có } \Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-b) = b + 1$$

d_1 tiếp xúc với (P) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn).

Thay $b = -1$ vào (*) ta được

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1$$

Vậy $C(1;1)$ là điểm cần tìm.

Câu 59: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x - 2m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 = 2(m-1)x - 2m + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 2m - 4 = 0.$$

$$\text{Có } \Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (2m-4) = (m-1)^2 - 2m + 4$$

$$= m^2 - 4m + 5 = (m-2)^2 + 1 > 0 \forall m$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m .

$$\text{Theo định lý Viét, ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m - 2; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 4$$

$$\text{Có } A = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m - 2$; $x_1 x_2 = 2m - 4$ vào A ta được:

$$A = (2m-2)^2 - 2(2m-4) = 4m^2 - 12m + 12 = (2m-3)^2 + 3 \geq 3 \quad \forall m$$

$$\text{Vậy } \min A = 3 \text{ khi } 2m-3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Câu 60: Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng d đi qua $I(0; -1)$ hệ số góc k .

a) Viết phương trình d theo k

b) Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt thuộc hai phía Oy .

c) Gọi hoành độ A và B lần lượt là x_1 và x_2 . Chứng minh: $|x_1 - x_2| \geq 2$

Giả sử $x_1 < x_2$. Tìm m để $|x_1| > |x_2|$.

Lời giải

a) Gọi phương trình d là: $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

$$\text{Do } d \text{ đi qua } I(0; -1) \text{ nên } -1 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Vì d có hệ số góc k nên $a = k$

Vậy phương trình d là: $y = kx - 1$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$-x^2 = kx - 1 \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0 \quad (*)$$

Có $\Delta = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = k^2 + 4 > 0 \quad \forall k$ nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt

Do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt

Theo định lý Viét, ta có $x_A + x_B = -\frac{b}{a} = -k$; $x_A x_B = \frac{c}{a} = -1$

Vì $x_A x_B = -1 < 0 \Rightarrow x_A, x_B$ trái dấu

Vậy A, B thuộc hai phía Oy .

c) Xét $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$

Thay $x_1 + x_2 = -k$; $x_1 x_2 = -1$ vào $|x_1 - x_2|^2$ ta được

$$|x_1 - x_2|^2 = (-k)^2 - 4 \cdot (-1) = k^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

d) **Cách 1:** (Xét dấu của x_1, x_2)

Do $x_1 < x_2$ và x_1, x_2 trái dấu nên $x_1 < 0, x_2 > 0$

Suy ra $|x_1| = -x_1$; $|x_2| = x_2$ nên $|x_1| > |x_2| \Leftrightarrow -x_1 > x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 < 0$

Mà $x_1 + x_2 = -k$ nên ta được $-k < 0 \Leftrightarrow k > 0$

Cách 2: (bình phương):

$$\text{Có } |x_1| > |x_2| \Leftrightarrow |x_1|^2 > |x_2|^2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 \text{ và } x_1 + x_2 \text{ cùng dấu}$$

Mà $x_1 < x_2$ hay $x_1 - x_2 < 0$ nên $x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow -k < 0 \Leftrightarrow k > 0$

Vậy $k > 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 61: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và $d: y = mx - m + 1$. Tìm m để (P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 4$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$

$$\begin{aligned} \text{Xét } (|x_1| + |x_2|)^2 &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1| \cdot |x_2| = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| \\ &= m^2 - 2 \cdot (m - 1) + 2 \cdot |m - 1| = m^2 - 2m + 2 + 2 \cdot |m - 1| \\ &= (m - 1)^2 + 2 \cdot |m - 1| + 1 = (|m - 1| + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } |x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 16 \Leftrightarrow (|m - 1| + 1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow |m - 1| + 1 = 4 \Leftrightarrow |m - 1| = 3 \Leftrightarrow m = -1, m = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = -1, m = 5$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Ta có thể giải theo cách chỉ ra hai nghiệm của $(*)$ là $x = 1, x = m - 1$ dựa vào Δ là bình phương hoặc dựa vào nhận xét $a + b + c = 0$.

Câu 62: Cho $(P): y = x^2$ và $d: y = 2(m-1)x + 3 - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2 = 2(m-1)x + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (2m-3) = (m-1)^2 - 2m + 3 = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$$

$$\text{Theo định lý Viét, ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m - 2; x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 3$$

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Do $x_1 \neq x_2$ và hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$ nên theo định lý Pytago ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m - 2, x_1 x_2 = 2m - 3$ vào $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$ ta được

$$(2m-2)^2 - 2(2m-3) = 10 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 10 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4m(m-3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (loại), } m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Chú ý

- Bài này ta cần lưu ý điều kiện $m > \frac{3}{2}$ trong quá trình giải
- Ta có thể giải theo cách chỉ ra hai nghiệm của $(*)$ là $x = 1; x = 2m - 3$ dựa vào Δ' là bình phương hoặc dựa vào nhận xét $a + b + c = 0$.

Câu 63: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - 3x_2 = 5$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = mx + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m-1) = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2$$

D cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -2$$

Cách 1 (Giải x_1, x_2 dựa vào định lý Viét)

Theo định lý Viét ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m - 1$

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ 2x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 3m \\ 2x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3m+5}{5}, x_2 = \frac{2m-5}{5}$$

Thay $x_1 = \frac{3m+5}{5}, x_2 = \frac{2m-5}{5}$ vào $x_1 x_2 = -m - 1$ ta được

$$\frac{3m+5}{5} \cdot \frac{2m-5}{5} = -m - 1 \Leftrightarrow 6m^2 + 20m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m(3m+10) = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -\frac{10}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Cách 2: (Giải x_1, x_2 dựa vào Δ là bình phương)

Do $\Delta = (m+2)^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là

$$x = \frac{m \pm (m+2)}{2} \Leftrightarrow x = -1, x = m+1$$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = -1, x_2 = m+1$, thay vào $2x_1 - 3x_2 = 5$ ta

$$\text{được } -2 - 3(m+1) = 5 \Leftrightarrow m = -\frac{10}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m+1, x_2 = -1$, thay vào $2x_1 - 3x_2 = 5$ ta được

$$2(m+1) - 3(-1) = 5 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 0, m = -\frac{10}{3}$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Ta có thể nhận xét $a - b + c = 0$ để được hai nghiệm của phương trình (*) là $x = -1, x = m+1$.

Câu 64: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường tròn d: $y = 2(m+1) + 3$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1| + |x_2| = 5$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ của d và (P):

$$x^2 = 2(m+1)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 3 = 0 \text{ (*)}$$

Có $\Delta' = [-(m+1)]^2 - 1 \cdot (-3) = (m+1)^2 + 3 > 0 \forall m$ nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m+2, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -3$

Do $x_1 x_2 = -3 < 0$ nên x_1, x_2 trái dấu.

Cách 1 (Giải hệ $2|x_1| + |x_2| = 5$ và $x_1 + x_2 = 2m+2$)

Trường hợp 1: Xét $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$ nên $2|x_1| + |x_2| = 5 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 5$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2m+2 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = 2m-3 \Rightarrow x_1 = \frac{2m-3}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4m+9}{3}$$

Thay $x_1 = \frac{2m-3}{3}, x_2 = \frac{4m+9}{3}$ vào $x_1 x_2 = -3$ ta được

$$\frac{2m-3}{3} \cdot \frac{4m+9}{3} = -3 \Leftrightarrow 8m^2 + 6m = 0 \Rightarrow m = 0, m = -\frac{3}{4}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 > 0, x_2 < 0 \Rightarrow |x_1| = x_1; |x_2| = -x_2$ nên $2|x_1| + |x_2| = 5 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 5$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2m + 2 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 = 2m + 7 \Rightarrow x_1 = \frac{2m+7}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4m-1}{3}$$

Thay $x_1 = \frac{2m+7}{3}, x_2 = \frac{4m-1}{3}$ vào $x_1 x_2 = -3$ ta được

$$\frac{2m+7}{3} \cdot \frac{4m-1}{3} = -3 \Leftrightarrow 8m^2 + 26m + 20 = 0 \Rightarrow m = -2, m = -\frac{5}{4}$$

Cách 2: (Giải hệ $2|x_1| + |x_2| = 5$ và $x_1 x_2 = -3$):

Trường hợp 1: Xét $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$ nên $2|x_1| + |x_2| = 5 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 5$
 $\Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 + 5$, thay vào $x_1 x_2 = -3$ ta được

$$x_1(2x_1 + 5) = -3 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 5x_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 2x_1 + 3x_1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1(x_1 + 1) + 3(x_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(2x_1 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 3 \\ x_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay vào $x_1 + x_2 = 2m + 2$ được $m = 0, m = -\frac{3}{4}$

Trường hợp 2: Xét $x_1 > 0, x_2 < 0 \Rightarrow |x_1| = x_1; |x_2| = -x_2$ nên $2|x_1| + |x_2| = 5 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 5$
 $x_2 = 2x_1 - 5$, thay vào $x_1 x_2 = -3$ ta được

$$x_1(2x_1 - 5) = -3 \Leftrightarrow 2x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 - 2x_1 - 3x_1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1(x_1 - 1) - 3(x_1 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(2x_1 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -3 \\ x_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay vào $x_1 + x_2 = 2m + 2$ được $m = -2, m = -\frac{5}{4}$

Vậy $m \in \left\{ 0; 2; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{4} \right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 65: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = -4x + m^2 - 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = -4x + m^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - m^2 + 4 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = 2^2 - 1(-m^2 + 4) = m^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -4, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m^2 + 4$

Cách 1: (Giải dựa vào định lý Viét)

Thay $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$ vào $x_1 + x_2 = -4$ ta được

$$x_1 + (x_1^3 + 4x_1^2) = -4 \Leftrightarrow x_1^2(x_1 + 4) + x_1 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 4)(x_1^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4 \Rightarrow x_2 = 0$$

Thay $x_1 = -4, x_2 = 0$ vào $x_1 x_2 = -m^2 + 4 \Rightarrow -m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$ (thỏa mãn)

Cách 2 (Giải x_1, x_2 dựa vào Δ' là bình phương)

Do $\Delta' = m^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là $x = -2 \pm m$.

Trường hợp 1: Xét $x_1 = -2 - m, x_2 = -2 + m$, thay vào $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$ ta được

$$-2 + m = (-2 - m)^3 + 4(-2 - m)^2 \Leftrightarrow (m + 2)^3 - 4(m + 2)^2 + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 2)^2(m + 2 - 4) + (m - 2) = 0 \Leftrightarrow (m - 2)[(m + 2)^2 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = -2 + m, x_2 = -2 - m$, thay vào $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$ ta được

$$-2 - m = (-2 + m)^3 + 4(-2 + m)^2 \Leftrightarrow (m - 2)^3 - 4(m - 2)^2 + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2(m - 2 + 4) + (m + 2) = 0 \Leftrightarrow (m + 2)[(m - 2)^2 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 66: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = (2m - 1)x - m^2 + m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = (2m - 1)x - m^2 + m \Leftrightarrow x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = [-(2m - 1)]^2 - 4.1(m^2 - m) = (2m - 1)^2 - 4m^2 + 4m = 1 > 0 \quad \forall m.$$

Do đó (*) luôn có hai nghiệm phân biệt nên d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Có } \Delta = 1 \text{ nên hai nghiệm của (*) là } x = \frac{2m - 1 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = m, x = m - 1$$

$$\text{Để tồn tại } \sqrt{x_1}, \sqrt{2x_2} \text{ ta cần có } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

$$\text{Khi đó } \sqrt{x_1} = \sqrt{2x_2} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = m, x_2 = m - 1$ thay vào $x_1 = 2x_2$ ta được

$$m = 2(m - 1) \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m - 1, x_2 = m$ thay vào $x_1 = 2x_2$ ta được

$$m - 1 = 2m \Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Bài này ta cần lưu ý điều kiện $m \geq 1$ trong quá trình giải.

Câu 67: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-3)x - m + 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = (m-3)x - m + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x + m - 4 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = [-(m-3)]^2 - 4.1.(m-4) = (m-3)^2 - 4m + 16 = (m-5)^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-5)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 5.$$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m-3$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m-4$

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác nên $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ m-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$$

Vì $\Delta = (m-5)^2$ nên hai nghiệm của phương trình (*) là

$$x = \frac{m-3 \pm (m-5)}{2} \Leftrightarrow x = 1, x = m-4. \text{ Do } x_1 \neq x_2 \text{ nên } x_1, x_2 \text{ không thể cùng là độ dài hai}$$

cạnh góc vuông của tam giác vuông cân. Giả sử x_1 là độ dài cạnh huyền, x_2 là độ dài cạnh góc

vuông thì theo định lý Pytago ta có $x_1^2 = x_2^2 + x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2} \cdot x_2$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = 1, x_2 = m-4$, Thay vào $x_1 = \sqrt{2} \cdot x_2$ ta được

$$1 = \sqrt{2}(m-4) \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m-4, x_2 = 1$, thay vào $x_1 = \sqrt{2}x_2$ ta được

$$m-4 = \sqrt{2}.1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}(m-4) \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = \frac{1}{\sqrt{2}} + 4, m = \sqrt{2}(m-4)$ là giá trị cần tìm

Chú ý: Ta có thể nhận xét $a + b + c = 0$ để được hai nghiệm của phương trình (*) là $x = 1, x = m-4$.

Câu 68: Cho paraboara (P) : $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2 + m + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = 2mx - m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta' = (-m)^2 - 1.(m^2 - m - 1) = m + 1$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

Theo định lý Viét, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - m - 1$

Vì $A, B \in (P): y = x^2$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

$$\text{Do đó } y_1 + y_2 + 2x_1 + 2x_2 = 22 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 = 22$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 22$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1x_2 = m^2 - m - 1$ Ta được

$$(2m)^2 - 2(m^2 - m - 1) + 2.2m = 22 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-5)(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -5 \text{ (loại)}, m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm

Câu 69: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = (2m+1)x - 2m$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ Sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = (2m+1)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có } \Delta = [-(2m+1)]^2 - 4.1.2m = (2m+1)^2 - 8m = (2m-1)^2$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

Theo định lí Vi-et ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m+1$, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = 2m$

Vì $A, B \in (P)$: $y = x^2$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

$$\text{Do đó } T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$$

Thay $x_1 + x_2 = 2m+1$, $x_1x_2 = 2m$ vào T ta được

$$T = (2m+1)^2 - 3.2m = 4m^2 - 2m + 1 = (2m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy Min} T = \frac{3}{4} \text{ khi } 2m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 70: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - m^2 + 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 > 4$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 = 2mx - m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

Có $\Delta' = (-m)^2 - 1.(m^2 - 1) = 1 > 0 \forall m$, do đó Phương trình (*) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt nên d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Do $\Delta' = 1$ nên hai nghiệm của (*) là $x = m \pm 1 \Leftrightarrow x = m - 1, x = m + 1$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = m - 1, x_2 = m + 1 \Rightarrow y_1 = (m - 1)^2, y_2 = (m + 1)^2$

$$\text{nên } y_1 - y_2 > 4 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m-1)^2 > 4 \Rightarrow m > 1$$

Vậy $m > 1$ hoặc $m < -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 71: Cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng d: $y = 2x + m - 1$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ mà $x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_1 x_2 = -4$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$-x^2 = 2x + m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 1 = 0 (*)$$

$$\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (m - 1) = 2 - m$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2, x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$

Vì $A, B \in (P)$: $y = -x^2$ nên $y_1 = -x_1^2, y_2 = -x_2^2$

Do đó:

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_1 x_2 = -4 \Leftrightarrow -x_1^3 + x_2^3 - x_1 x_2 = -4 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) + x_1 x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \right] + x_1 x_2 = 4$$

Thay $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = m - 1$, ta được :

$$(x_1 - x_2) \left[(-2)^2 - m + 1 \right] + m - 1 = 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(5 - m) + m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 - 1)(5 - m) = 0 \Leftrightarrow m = 5 \text{ (loại)}, x_1 - x_2 = 1$$

Giải hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$, thay vào $x_1 x_2 = m - 1$ ta được

$$\frac{3}{4} = m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = \frac{7}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 72: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$.

- Chứng minh d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai phía Oy .
- Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài MN theo m và tìm m để $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN}$.
- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung. Tính độ dài đoạn HK theo m .
- Tính độ dài đoạn AB theo m và chứng minh $AB \geq \sqrt{m^2 + 8} \forall m$.
- Tính diện tích ΔOAB theo m và tìm m để $S_{\Delta OAB} = 2m + 1$ (đvdt).
- Chứng minh với mọi m , ΔOAB không thể vuông tại O .

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 2 = 0 \quad (*)$$

Có $\Delta = (-m)^2 - 4.1.(-2) = m^2 + 8 > 0 \forall m$ nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

Theo định lý Viét, ta có $x_A + x_B = -\frac{b}{a} = m$, $x_A x_B = \frac{c}{a} = -2 < 0$.

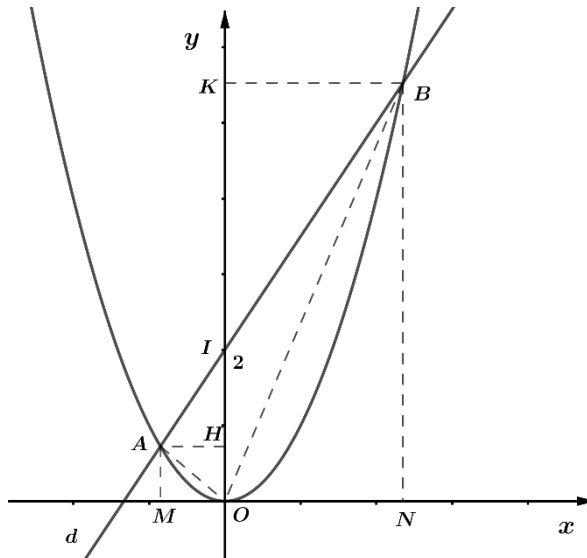
Vì $x_A x_B = -2 < 0 \Rightarrow x_A, x_B$ trái dấu nên A, B thuộc hai phía Oy .

Vậy d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B thuộc hai phía Oy .

b) Có

$$\begin{aligned} MN &= |x_A - x_B| \Rightarrow MN^2 = |x_A - x_B|^2 = (x_A - x_B)^2 - 4x_A x_B \\ &= m^2 + 8 \Rightarrow MN = \sqrt{m^2 + 8} \end{aligned}$$

Vậy $MN = \sqrt{m^2 + 8}$.



Do $\Delta OAM, \Delta OBN$ lần lượt vuông tại M, N nên

$$S_{\Delta OAM} = \frac{1}{2} AM \cdot OM = \frac{1}{2} |x_A^3|; S_{\Delta OBN} = \frac{1}{2} BN \cdot ON = \frac{1}{2} |x_B^3|.$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |x_A^3| = \frac{1}{2} |x_B^3| \Leftrightarrow |x_A^3| = |x_B^3| \Leftrightarrow |x_A| = |x_B|$$

$$\Leftrightarrow x_A = x_B \text{ (loại)}, x_A = -x_B \Leftrightarrow x_A + x_B = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $m = 0$ thì $S_{\Delta OAM} = S_{\Delta OBN}$.

$$\text{c) Có } HK = |y_A - y_B| = |x_A^2 - x_B^2| = |(x_A + x_B)(x_A - x_B)| = |m \cdot (x_A - x_B)|$$

$$HK^2 = m^2 \left[(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B \right] = m^2 (m^2 + 8).$$

$$\text{Vậy } HK = |m| \sqrt{m^2 + 8}.$$

d) Có

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (mx_A + 2 - mx_B - 2)^2} \\ &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 (m^2 + 1)} = \sqrt{(m^2 + 8)(m^2 + 1)} \geq \sqrt{(m^2 + 8)}. \end{aligned}$$

e) Gọi I là giao điểm của d và $Oy \Rightarrow I(0; 2) \Rightarrow OI = |y_I| = 2$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục tung nên

$$AH = |x_A|, BK = |x_B|.$$

$$S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OAI} + S_{\Delta OBI} = \frac{1}{2}(OI \cdot AH + OI \cdot BK) = |x_A| + |x_B|$$

$$= m^2 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot |2| = m^2 + 8 \Rightarrow |x_A| + |x_B| = \sqrt{m^2 + 8}$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta OAB} = \sqrt{m^2 + 8}.$$

$$\text{Có } S_{\Delta OAB} = 2m + 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 8} = 2m + 1 \text{ (điều kiện } 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8 = 4m^2 + 4m + 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 4m - 7 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 3m + 7m - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m(m - 1) + 7(m - 1) \Leftrightarrow (m - 1)(3m + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{7}{3} \text{ (loại)}, m = 1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $m = 1$ thì $S_{\Delta OAB} = 2m + 1$ (đvdt).

Chú ý Câu này ta cần lưu ý đến điều kiện $m > -\frac{1}{2}$ trong quá trình giải.

$$\text{f) Ta có } OA^2 = x_A^2 + y_A^2, OB^2 = x_B^2 + y_B^2.$$

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = x_A^2 + x_B^2 - 2x_A x_B + y_A^2 + y_B^2 - 2y_A y_B.$$

$$\text{Xét } OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2x_A x_B + 2y_A y_B = 2(x_A x_B + x_A^2 x_B^2)$$

$$= 2x_A x_B (x_A x_B + 1) = 2 \cdot (-2) \cdot (-2 + 1) = 4 \neq 0$$

Do đó $OA^2 + OB^2 \neq AB^2$ nên ΔOAB không thể vuông tại O (đpcm).

Câu 73: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x + 3$.

a) Tìm tọa độ giao điểm A, B của d và (P) với $x_A > 0$ và vẽ $d, (P)$.

b) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.

c) Tìm tọa độ điểm $M \in Oy$ để $S_{MAB} = 4$ (đvdt).

d) Cho điểm $E(3; 0)$. Tìm tọa độ điểm $F \in (P)$ sao cho độ dài EF ngắn nhất.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

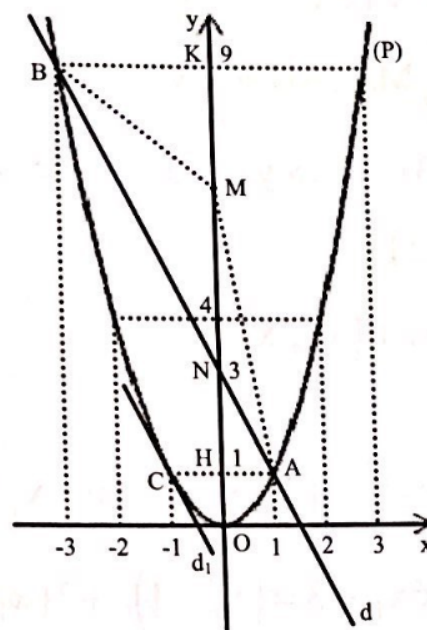
$$x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1^2 \\ x=-3 \Rightarrow y=(-3)^2=9 \end{cases}$$

Vậy $A(1;1)$, $B(-3;9)$.

* $d: y = -2x + 3$

x	0		$\frac{3}{2}$		
y	3		0		$(P): y = x^2$
x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



b) Có $A(1;1)$, $B(-3;9)$ cố định nên độ dài đoạn AB không đổi, do đó S_{ABC} lớn nhất khi khoảng cách từ C đến đường thẳng d lớn nhất, khi đó C là tiếp điểm của đường thẳng $d_1 \parallel d$ và d_1 tiếp xúc với (P).

Gọi phương trình của d_1 : $y = ax + b$

Do $d_1 \parallel d$ nên ta có: $\begin{cases} a_{d_1} = a_d \\ b_{d_1} = b_d \end{cases} \Rightarrow d_1: y = -2x + b \quad (b \neq 3)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và (P): $x^2 = -2x + b \Leftrightarrow x^2 + 2x - b = 0$ (*)

d_1 tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn)

Khi đó x_c là nghiệm kép của (*): $x_c = -1 \Rightarrow y_c = (-1)^2 = 1$

Vậy $C(-1;1)$ là điểm cần tìm

c) Gọi N là giao điểm của d và Oy $\Rightarrow N(0;3)$

Do $M \in Oy \Rightarrow x_M = 0 \Rightarrow M(0; y_M)$, $y_M \neq 3$ (do $M \neq N$) $\Rightarrow MN = |y_M - y_N| = |y_M - 3|$

Kẻ $AH \perp Oy$ tại H, $BK \perp Oy$ tại K thì: $AH = |x_A| = |1| = 1$, $BK = |x_B| = |-3| = 3$

Vì A và B thuộc hai phía của Oy nên:

$$S_{MAB} = S_{MAN} + S_{MBN} = \frac{1}{2} MN \cdot AH + \frac{1}{2} MN \cdot BK = 2|y_M - 3| \quad (\text{đvdt})$$

Do đó $S_{AMB} = 4 \Rightarrow |y_M - 3| = 2 \Rightarrow y_M - 3 = \pm 2 \Rightarrow y_M = 5, y_M = 1$ (thỏa mãn)

Vậy $M(0; 1)$ hoặc $M(0; 5)$

d) Do $F \in (P) \Rightarrow y_F = x_F^2 \Rightarrow F(x_F; x_F^2)$

$$\text{Có: } EF = (x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 = (3 - x_F)^2 + (0 - x_F^2)^2 = x_F^4 + x_F^2 - 6x_F + 9$$

$$= x_F^4 - 2x_F^2 + 1 + 3x_F^2 - 6x_F + 3 = (x_F^2 - 1)^2 + 3(x_F - 1)^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow EF \geq 5$$

Vậy $\text{Min}EF = \sqrt{5} \Leftrightarrow x_F = 1$ hay $F(1; 1)$

