

**Câu 1** (4,5 điểm).

1. Thực hiện các phép tính sau:

$$A = 1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24} \quad B = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2025^2} - 1\right)$$

2. Cho  $\frac{x+2024}{x-2024} = \frac{y+2025}{y-2025}$  ( $x \neq 2024; y \neq 2025$ ). Chứng minh rằng:  $\frac{x}{y} = \frac{2024}{2025}$ .

**Câu 2** (3,5 điểm).

1. Tìm  $x, y, z$  biết:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$  và  $x - 2y + 3z = 14$ .

2. Để hoàn thành chỉ tiêu cuối năm, theo kế hoạch ban đầu ba đội xe được giao vận chuyển 3030 tấn hàng. Thực tế khi thực hiện, đội I vượt mức 26%, đội II vượt mức 5% và đội III vượt mức 8% so với kế hoạch ban đầu được giao của mỗi đội nên khối lượng hàng mà ba đội đã vận chuyển được là bằng nhau. Hỏi theo kế hoạch ban đầu mỗi đội xe được giao vận chuyển bao nhiêu tấn hàng.

**Câu 3** (4,0 điểm).

1. Cho phân số  $A = \frac{x+1}{x-3}$  (với  $x \neq 3; x \in \mathbb{Z}$ ). Tìm giá trị của  $x$  để  $A$  có giá trị lớn nhất.

2. Tìm các số nguyên  $x; y$  thỏa mãn:  $3xy - 5x - 6y + 7 = 0$ .

**Câu 4** (6,0 điểm).

Cho tam giác  $ABC$  nhọn, biết  $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ . Từ  $A$  kẻ  $AH$  vuông góc với  $BC$  ( $H \in BC$ ). Trên tia đối của tia  $BA$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = BH$ , tia  $MH$  cắt cạnh  $AC$  tại  $D$ . Chứng minh rằng :

a) Tam giác  $BHM$  là tam giác cân và  $\widehat{AMH} = \widehat{ACB}$ .

b)  $D$  là trung điểm của  $AC$ .

c)  $AM = HC$ .

d)  $BD < \frac{AB+BC}{2}$ .

**Câu 5** (2,0 điểm).

Tìm các số nguyên tố  $x; y$  biết:  $x^2 - 6y^2 = 1$

---Hết---

## HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
<b>1</b> <b>(4,5 đ)</b>	1 <b>(3,0)</b>	$A = 1 \frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left( \frac{8}{15} - 1 \frac{19}{60} \right) : 1 \frac{23}{24}$	
		$= \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \left( \frac{8}{15} - \frac{79}{60} \right) : \frac{47}{24}$	0,5
		$= \frac{7}{5} + \left( -\frac{47}{60} \right) : \frac{47}{24}$	0,5
		$= \frac{7}{5} + \left( -\frac{2}{5} \right)$	0,25
		$= 1$	
		Vậy $A = 1$	0,25
		$B = \left( \frac{1}{2^2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{3^2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2025^2} - 1 \right)$	
		$= \frac{1-2^2}{2^2} \cdot \frac{1-3^2}{3^2} \cdot \frac{1-4^2}{4^2} \dots \frac{1-2025^2}{2025^2} = \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \frac{-4100624}{2025^2}$	0,5
		$= \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{4100624}{2025^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{2024 \cdot 2026}{2025^2}$	0,25
		$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2024 \cdot 2026}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots 2025^2}$	0,25
$= \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2024)(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots 2026)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2025)(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2025)} = \frac{2026}{2 \cdot 2025} = \frac{1013}{2025}$	0,25		
Vậy $B = \frac{1013}{2025}$	0,25		
<b>2</b> <b>(1,5)</b>	2 <b>(1,5)</b>	Cho $\frac{x+2024}{x-2024} = \frac{y+2025}{y-2025}$ ( $x \neq 2024; y \neq 2025$ ).	
		Chứng minh rằng: $\frac{x}{y} = \frac{2024}{2025}$ .	
		Ta có: $\frac{x+2024}{x-2024} = \frac{y+2025}{y-2025}$	0,5
		$\Rightarrow (x+2024)(y-2025) = (x-2024)(y+2025)$ $xy - 2025x + 2024y - 2024 \cdot 2025 = xy + 2025x - 2024y - 2024 \cdot 2025$	
		$4048y = 4050x$ $2024y = 2025x$	0,5
$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2024}{2025}$ .	0,25		
Vậy $\frac{x}{y} = \frac{2024}{2025}$ .	0,25		
<b>2</b> <b>(3,5 đ)</b>	1 <b>(1,5)</b>	Tìm $x, y, z$ biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $x - 2y + 3z = 14$ .	
		Đặt $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = k$ $\Rightarrow x = 2k + 1; y = 3k + 2; z = 4k + 3$	0,75
		Thay $x = 2k + 1; y = 3k + 2; z = 4k + 3$ vào $x - 2y + 3z = 14$ . ta được	0,5

		$k = 1$	
		Vậy: $x = 3; y = 5; z = 7$ $x=3$	0,25
		Để hoàn thành chỉ tiêu cuối năm, theo kế hoạch ban đầu ba đội xe được giao vận chuyên 3030 tấn hàng. Thực tế, đội I vượt mức 26%, đội II vượt mức 5% và đội III vượt mức 8% so với kế hoạch ban đầu của mỗi đội nên khối lượng hàng mà ba đội đã vận chuyển được là bằng nhau. Hỏi theo kế hoạch mỗi đội xe phải vận chuyển bao nhiêu tấn hàng.	
		Gọi số tấn hàng đội I, đội II, đội III phải vận chuyển theo kế hoạch lần lượt là $a, b, c$ (tấn) ( $0 < a, b, c < 3030$ )	0,25
		Theo đề bài ta có: $a + b + c = 3030$	0,25
	2 (2,0)	Mặt khác: cuối đợt, đội I chở được là: $a + 26\%.a = 126\%.a$ (tấn) Cuối đợt, đội II chở được là: $105\%.b$ (tấn) Cuối đợt, đội III chở được là: $108\%.c$ (tấn)	0,5
		Mà ba đội chở được bằng nhau nên: $126\%.a = 105\%.b = 108\%.c$ $126a = 105b = 108c$ $\frac{a}{30} = \frac{b}{36} = \frac{c}{35}$	0,25
		Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{30} = \frac{b}{36} = \frac{c}{35} = \frac{a+b+c}{30+36+35} = \frac{3030}{101} = 30$	0,25
		Do đó: $a = 30.30 = 900, b = 30.36 = 1080, c = 30.35 = 1050$	0,25
		Vậy theo kế hoạch đội I, đội II, đội III chở được số tấn hàng lần lượt là 900, 1080, 1050 (tấn)	0,25
		Cho phân số $A = \frac{x+1}{x-3}$ với $x \in \mathbb{Z}$ . Tìm giá trị của $x$ để $A$ có giá trị lớn nhất.	
	1 (2,0)	Ta có: $A = \frac{x+1}{x-3} = 1 + \frac{4}{x-3}$	0,5
		Với $x > 3 \Rightarrow \frac{4}{x-3} > 0$ Với $x < 3 \Rightarrow \frac{4}{x-3} < 0$	0,5
	3 (4,0 đ)	Để $A$ có giá trị lớn nhất khi $x-3$ là số nguyên dương nhỏ nhất Khi đó $x-3=1 \Rightarrow x=4$	0,5
		Vậy $x=4$ thì Giá trị lớn nhất của $A$ bằng 5	0,5
	2 (2,0)	$3xy - 5x - 6y + 7 = 0.$ $3y(x-2) - 5(x-2) = 3$ $(x-2)(3y-5) = 3$	0,5
		Do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in \mathbb{Z}; 3y-5 \in \mathbb{Z}$ $(x-2)(3y-5) = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$	1,0
		Từ đó tìm được $(x; y) = (5; 2)$	0,5
		Cho tam giác $ABC$ nhọn, biết $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ . Từ $A$ kẻ $AH$ vuông góc với $BC$ ( $H \in BC$ ). Trên tia đối của tia $BA$ lấy điểm $M$ sao cho $BM = BH$ , tia $MH$ cắt cạnh $AC$ tại $D$ . Chứng minh rằng :	

		<p>a) Tam giác BHM là tam giác cân và <math>\widehat{AMH} = \widehat{ACB}</math>.</p> <p>b) D là trung điểm của AC.</p> <p>c) AM = HC.</p> <p>d) <math>BD &lt; \frac{AB + BC}{2}</math>.</p>	
<b>4</b> <b>(6,0 đ)</b>	<b>a</b> <b>(2,0)</b>	<p>Vì <math>BM = BH(gt) \Rightarrow \Delta BMH</math> cân tại B.</p> <p><math>\Rightarrow \widehat{BMH} = \widehat{BHM}</math></p>	0,5
		<p>Vì <math>\widehat{BMH} + \widehat{BHM} + \widehat{MBH} = 180^\circ</math> (định lí tổng ba góc)</p> <p><math>\Rightarrow 2\widehat{BMH} + \widehat{MBH} = 180^\circ</math></p>	0,5
		<p>Mà <math>\widehat{ABC} + \widehat{MBH} = 180^\circ</math> (hai góc kề bù)</p> <p><math>\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{MBH} = \widehat{MBH} + 2\widehat{BMH}</math></p>	0,5
		<p><math>\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{BMH}</math> hay <math>\widehat{ABC} = 2\widehat{AMH}</math></p> <p>Mà <math>\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}</math></p>	0,25
		<p>Vậy <math>\widehat{AMH} = \widehat{ACB}</math>.</p>	0,25
	<b>b</b> <b>(1,5)</b>	<p>Có <math>\widehat{BHM} = \widehat{DHC}</math> (hai góc đối đỉnh)</p> <p>Mà <math>\widehat{BHM} = \widehat{BMH} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{DCH}</math></p> <p><math>\Rightarrow \Delta DHC</math> cân</p> <p><math>\Rightarrow HD = DC</math> (1)</p>	0,5
		<p>Vì <math>\Delta AHC</math> vuông tại H</p> <p><math>\Rightarrow \widehat{HAC} + \widehat{ACH} = \widehat{AHD} + \widehat{DHC} = 90^\circ</math></p>	0,25
		<p>Mà <math>\widehat{ACH} = \widehat{DHC} \Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{AHD}</math></p> <p><math>\Rightarrow \Delta ADH</math> cân tại D <math>\Rightarrow HD = AD</math> (2)</p>	0,25
		<p>Từ (1) ; (2) ta có <math>DC = DA</math>. Mà <math>D \in AC</math> Nên D là trung điểm của AC.</p>	0,25
	<b>c</b> <b>(1,5)</b>	<p>Trên đoạn HC lấy điểm E sao cho <math>BH = HE</math></p> <p>Chứng minh được <math>\Delta ABH = \Delta AEH</math> (c.g.c)</p> <p><math>\Rightarrow AB = AE, \widehat{ABE} = \widehat{AEB}</math></p>	0,5
		<p>Mà <math>\widehat{AEB} = 180^\circ - \widehat{AEC}</math></p> <p>Có <math>\widehat{EAC} + \widehat{ACE} = 180^\circ - \widehat{AEC} \Rightarrow \widehat{EAC} + \widehat{ACE} = \widehat{AEB}</math></p>	0,25
		<p><math>\widehat{AEB} = \widehat{AEB} = 2\widehat{ACE} \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{EAC} \Rightarrow \Delta AEC</math> cân tại E</p> <p><math>\Rightarrow AE = EC</math></p>	0,5
		<p>Mà <math>BM = HE (= BH) \Rightarrow AM = HC</math></p>	0,25

d (1,0)	Trên tia đối của tia $DB$ lấy điểm $K$ sao cho $DB = DK$ Chứng minh được $\triangle ADB = \triangle CDK (c.g.c) \Rightarrow AB = CK$	0,5
	Xét $\triangle BCK$ có $BC + CK > BK \Rightarrow BC + AB > 2BD$	0,25
	Vậy $BD < \frac{AB + BC}{2}$ .	0,25
5 (2,0 đ)	Tìm các số nguyên tố $x; y$ biết: $x^2 - 6y^2 = 1$	
	Ta có: $x^2 - 6y^2 = 1$ $\Rightarrow x^2 - 1 = 6y^2$ <i>hay</i> $(x-1)(x+1) = 6y^2$	0,5
	Do $6y^2$ chia hết cho 2. Nên $(x-1)(x+1)$ chia hết cho 2. Mà $x-1+x+1=2x$ chia hết cho 2 Nên $x-1; x+1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (x-1)(x+1)$ chia hết cho 8	0,5
	$\Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 4$ Mà $y$ là số nguyên tố nên $y = 2$	0,5
	Thay $y = 2$ vào $x^2 - 6y^2 = 1$ tìm được $x = 5$	0,25
	Vậy $(x; y) = (2; 5)$	0,25

**Lưu ý:** Trên đây chỉ là một cách làm, học sinh làm cách khác đúng, lập luận chặt chẽ vẫn cho điểm tối đa!