

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

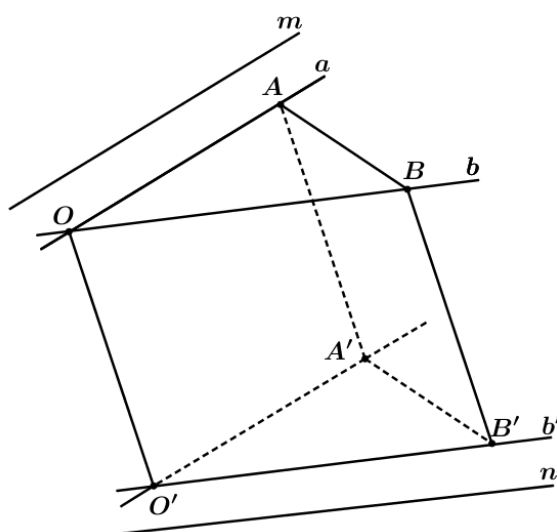
22

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Góc giữa hai đường thẳng



Góc giữa hai đường thẳng m, n trong không gian, kí hiệu (m, n) , là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n .

Chú ý:

Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b . Khi đó $(a, b) = (a, b')$.

Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.

2 Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90° .

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

📌 Dạng 1: Xác định góc giữa hai đường thẳng

Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

Bước 1: Sử dụng tính chất sau: $\begin{cases} (d_1, d_2) = \alpha \\ d_2 \mid d_3 \end{cases} \Rightarrow (d_1, d_2) = (d_1, d_3) = \alpha$

Bước 2: Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

Để tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian ta cần nhớ các công thức sau:

- Định lý hàm số cosin trong tam giác ABC : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$
- Tương tự ta có: $\cos \widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2.BA.BC}$ và $\cos \widehat{ACB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2.CA.CB}$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm AB và SC . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AN và CM .

Lời giải

[illegible]



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm AB và N là trung điểm BC . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM và DN .

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a; AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

- a) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng BC và SD .
- b) Gọi I là trung điểm của CD . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI .

Lời giải

[illegible]



Lời giải

[illegible]



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc giữa:

a) BC và SD .

b) AI và SD với I là trung điểm CD .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của điểm A' xuống mặt đáy (ABC) trùng với trung điểm của BC . Biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60° .

a) Tính tan góc tạo bởi $B'C'$ và $A'C$.

b) Cosin góc tạo bởi CC' và AB .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

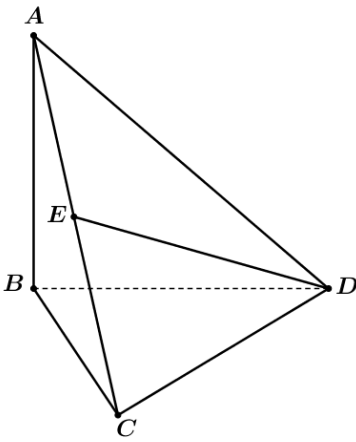
.....

.....





Ví dụ 8: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DE .



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

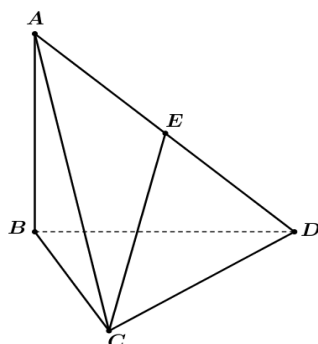
.....

.....

.....



Ví dụ 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CE .



✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Ví dụ 10: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt AC, AD, BD lần lượt tại N, P, Q . Diện tích $MNPQ$ bằng

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD . Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

Lời giải

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It consists of multiple rows of horizontal dashed lines spaced evenly across the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.



Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Mối quan hệ giữa quan hệ song song và vuông góc: $\begin{cases} a // b \\ c \perp a \end{cases} \longrightarrow c \perp b$

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Chứng minh SA vuông góc với BC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 14: Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ có sáu mặt đều là các hình vuông. Gọi E , F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

a) Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

b) Tính góc giữa EF và AQ .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

Lời giải

[illegible]

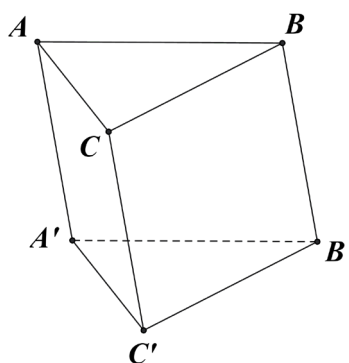
C

- Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD .



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng
 A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .
- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:
 A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Góc giữa hai đường thẳng IJ và SC bằng
 A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .
- Câu 4:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng
 A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .
- Câu 5:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và CD bằng
 A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .
- Câu 6:** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA_1 bằng
 A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 120° .
- Câu 7:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'C'$ bằng
 A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .
- Câu 8:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng
 A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .
- Câu 9:** Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình vẽ)

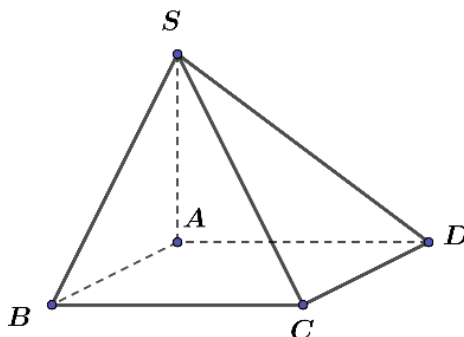


Góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .
- Câu 10:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' .
 A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .
- Câu 11:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng a . Góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng
 A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .



- Câu 12:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng
 A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .
- Câu 13:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và đường thẳng $B'C$.
 A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .
- Câu 14:** Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC . Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và CD .
 A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .
- Câu 15:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng
 A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .
- Câu 16:** Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C . Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD . Góc giữa MN và PQ bằng
 A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 0° .
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng
 A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .
- Câu 18:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a , $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, góc giữa hai đường thẳng AB và SD là
 A. 120° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .
- Câu 19:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa $A'C$ và DD' .
 A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .
- Câu 20:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $AC = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ bên).

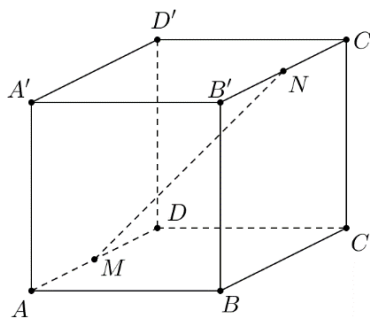


Góc giữa hai đường thẳng BC và SD

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .
- Câu 21:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng
 A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .



Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và $B'C'$ (tham khảo hình bên dưới).



Góc giữa hai đường thẳng MN và AA' bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi F là trung điểm cạnh AB và G là trung điểm của SF . Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng CG và BD . Tính $\cos \alpha$?

- A. $\frac{\sqrt{82}}{41}$. B. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. C. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. D. $\frac{\sqrt{82}}{82}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và $\widehat{SBA} = 30^\circ$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của AB . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, BD) .

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

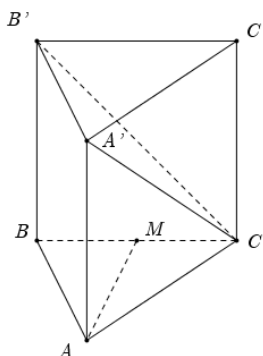
Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết SA vuông góc với đáy và $AB = SA = a, AC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC .

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .

- A. $MN = \frac{a}{4}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $MN = \frac{a}{2}$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $BA = 2AC = 2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, M là trung điểm BC (minh họa như hình dưới). Cosin góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng





A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Tam giác SAB vuông cân tại S và $\widehat{BSC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh SB , φ là góc giữa đường thẳng AB và CM . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .

A. $MN = \frac{a}{2}$.

B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $MN = \frac{a}{4}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = a$. Gọi M là trung điểm của SB . Góc giữa AM và BD bằng

A. 45° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SD và BC biết

$$AD = DC = a, AB = 2a, SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

A. $\frac{1}{\sqrt{42}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{42}}$.

C. $\frac{3}{\sqrt{42}}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{42}}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

-----HẾT-----

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

22

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A

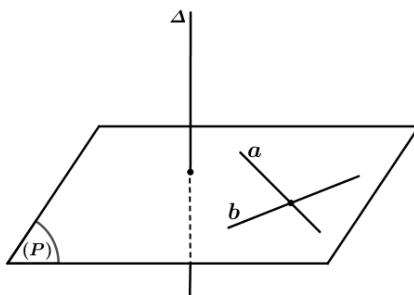
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) .

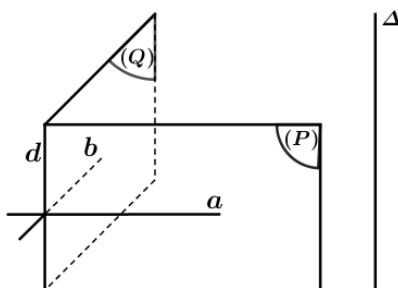
Chú ý: Khi Δ vuông góc với (P) , ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

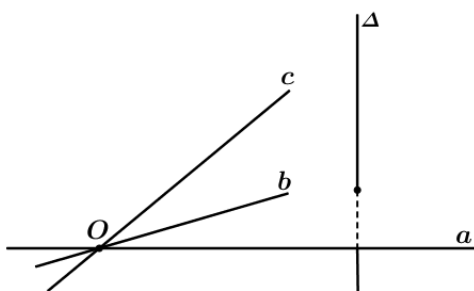


2 Tính chất

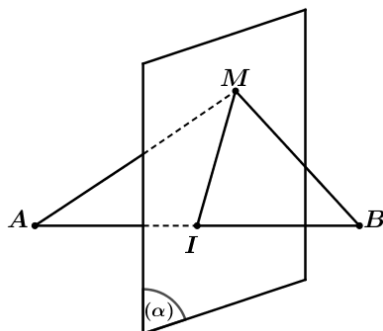
Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



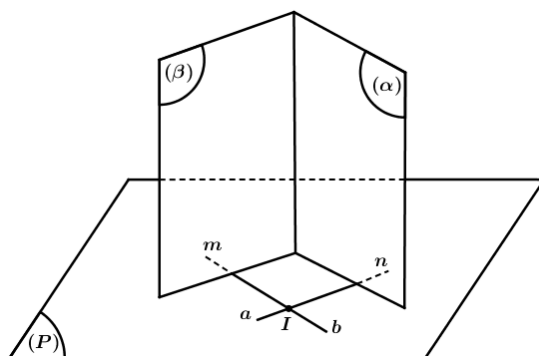
Nhận xét: Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ mô tả như hình vẽ dưới đây:



Chú ý: Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B .



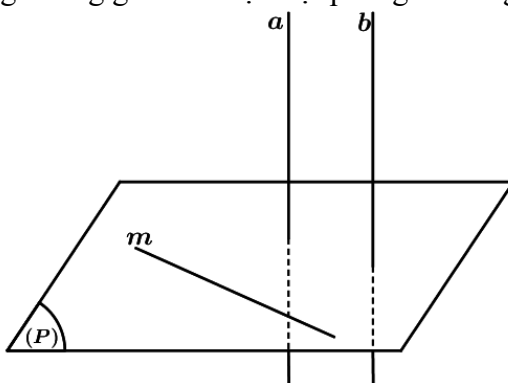
Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



3 Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

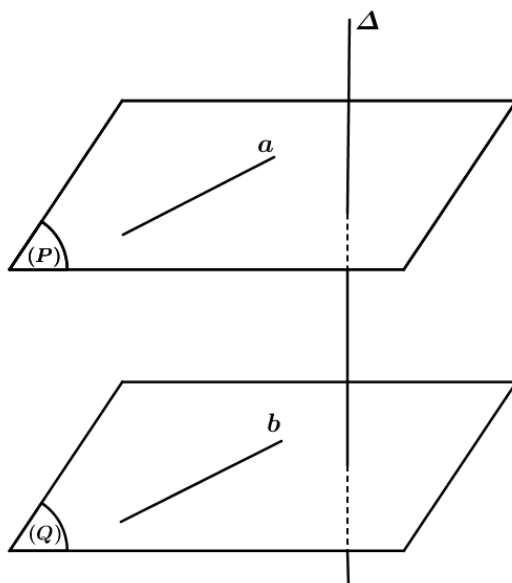
Chú ý 1:

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P) .
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

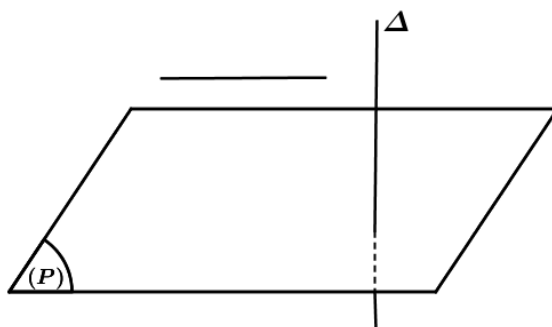


**Chú ý 2:**

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P) .
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

**Chú ý 3:**

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P) .
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P) .







d) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

- a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD .
- b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$.
- c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải

[illegible]



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

- a) AH, SK, BC đồng quy.
- b) $SC \perp (BHK)$.
- c) $HK \perp (SBC)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

- a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
- b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



- Ví dụ 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .
- a) Tính các cạnh của tam giác SIJ , suy ra tam giác SIJ vuông.
 - b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$; $SJ \perp (SAB)$.
 - c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ . Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Ví dụ 7:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$. Chứng minh $MN \perp (ABC)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





9



Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple rows of horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no margins or additional markings.



Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, leaving ample room for writing practice. There is no text or other markings on the page.



Ví dụ 12: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , $SO \perp (ABCD), SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC . Xác định và tính diện tích thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của BC , (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SI . Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, leaving ample room for writing practice. There is no text or other markings on the page.



Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D . Cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

- a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAC)$.
- b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) . Tính diện tích thiết diện ấy.
- c) Mặt phẳng (β) đi qua trung điểm M của SA và $N \in AD$, $AN = x (0 < x < a)$, vuông góc với (SAD) . Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (β) theo a và x .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

[illegible]

Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$ và $AB = BC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Điểm $M \in AB$, $AM = x (0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M vuông góc với AB .

- a) Dụng thiết diện được tạo bởi hình chóp với mặt phẳng (α) .
- b) Tính thiết diện của thiết diện theo a và x . Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải

[illegible]



C **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB và cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q . Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Chứng minh rằng $AK \perp (SCD)$?

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Chứng minh rằng $BD \perp SC$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BC = BD = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, CD . Chứng minh rằng $MN \perp AD$

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AB và H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SM, SC, SD . Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple rows of horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết $AB = a, BC = 2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}, \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (α)

Lời giải

[illegible]



Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, leaving ample room for writing practice. There is no text or other markings on the page.

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

- Câu 1:** Cho điểm M và mặt phẳng (α) có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) ?
- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.
- Câu 2:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi O là trọng tâm của ΔABC . Đường thẳng $d \perp SO$ ($d \not\subset (ABC)$). Khi đó
- A. $d \parallel (ABC)$. B. $d \perp (SBC)$. C. $SO \parallel AC$. D. $SA \parallel OC$.
- Câu 3:** Cho điểm M và đường thẳng a có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a ?
- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC) . Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. $SA \perp SB$. B. $SA \perp SC$. C. $SA \perp AB$. D. $SB \perp SC$.
- Câu 5:** Cho tam giác ABC có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng AB ?
- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.
- Câu 6:** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?
- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SB \perp BC$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SB \perp (ABCD)$. C. $BC \perp (SAC)$. D. $BC \perp (SAB)$.
- Câu 8:** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?
- A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$. B. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. D. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. $SA \perp (ABCD)$ B. $SO \perp (ABCD)$ C. $AB \perp (SBC)$ D. $AC \perp (SBC)$
- Câu 10:** Cho hình chóp tam giác $SABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây ĐÚNG?
- A. $BC \perp (SBC)$. B. $SB \perp AB$. C. $SA \perp (ABC)$. D. $AB \perp SC$.
- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $AC \perp (SCD)$. B. $BD \perp (SAD)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $BD \perp (SAC)$.
- Câu 12:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Khi đó đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?
- A. (SAB) . B. (SAD) . C. (SCD) . D. (SBD) .



- Câu 13:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $BC \perp (SAB)$ B. $CD \perp (SAD)$ C. $BD \perp (SAC)$. D. $AC \perp (SBD)$
- Câu 14:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:
- A. $SA \perp SB$. B. $SA \perp CD$. C. $AB \perp AC$. D. $AC \perp BD$.
- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $BA \perp (SAC)$. B. $BA \perp (SBC)$. C. $BA \perp (SAD)$. D. $BA \perp (SCD)$.
- Câu 16:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $AB \perp (SAD)$. B. $AB \perp (SAC)$. C. $AB \perp (SBC)$. D. $AB \perp (SCD)$.
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $BD \perp SC$. B. $SC \perp SB$. C. $SD \perp SB$. D. $CD \perp SD$.
- Câu 18:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định đúng?
- A. $BC \perp SC$. B. $BC \perp AC$. C. $BC \perp AB$. D. $BC \perp AH$.
- Câu 19:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Từ A kẻ $AM \perp SB$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $AM \perp (SBD)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $BC \perp (SAD)$. D. $AM \perp (SAD)$.
- Câu 20:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. M là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $AM \perp (SBD)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $BC \perp (SAD)$. D. $AM \perp (SAD)$.
- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B . Gọi $I; J$ lần lượt là trung điểm của SC ; SB . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $AB \perp (SBC)$. B. $IJ \perp (SAC)$.
C. $IJ \perp (SAB)$. D. Tam giác SCB vuông ở C .
- Câu 22:** Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Khẳng định nào sau đây là sai?
- A. $BC \perp (AHO)$. B. $OA \perp (OBC)$. C. $AH \perp BC$. D. $AH \perp (OBC)$.
- Câu 23:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE , AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?
- A. $SC \perp (AFB)$. B. $SC \perp (AEF)$. C. $SC \perp (AEC)$. D. $SC \perp (AED)$.
- Câu 24:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $SA \perp SB$. B. $SA \perp SC$. C. $SA \perp AC$. D. $SB \perp SD$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $SB \perp (ABCD)$. B. $SC \perp (ABCD)$. C. $BC \perp (SAC)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Câu 26: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
C. Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) . Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng Δ thì cũng vuông góc với mặt phẳng (α) .
D. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AH \perp (SCD)$. B. $AK \perp (SBD)$. C. $SC \perp (AHK)$. D. $SD \perp (AHK)$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $BC \perp (SAB)$. B. $SH \perp (ABCD)$. C. $AB \perp (SAD)$. D. $CD \perp (SHK)$.

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $AC' \perp (BB'D'D)$. B. $AC' \perp (ABCD)$. C. $AC' \perp (AA'D'D)$. D. $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 30: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $AM \perp SC$. B. $AM \perp MN$. C. $SA \perp BC$. D. $AN \perp SB$.

Câu 31: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp OA$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , SA vuông góc với đáy, M là trung điểm của BC , J là trung điểm của BM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAM)$. B. $BC \perp (SAC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. $BC \perp (SAJ)$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Hỏi đường thẳng SC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- A. (AHD) B. (SBD) . C. (AKB) D. (AHK)

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Hình chóp có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.



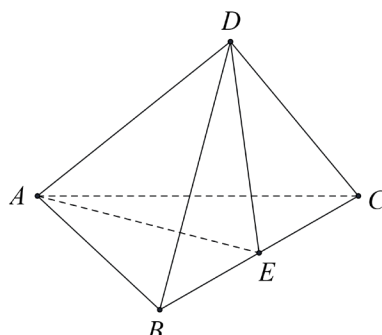
Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy là tam giác đều ABC . Gọi H là trung điểm của AC , K là điểm nằm giữa S và C . Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. $BH \perp AK$. **B.** $SA \perp BH$. **C.** $BC \perp AK$. **D.** $SC \perp BH$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $SB \perp (ABCD)$. **D.** $SC \perp (ABCD)$.

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?
A. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

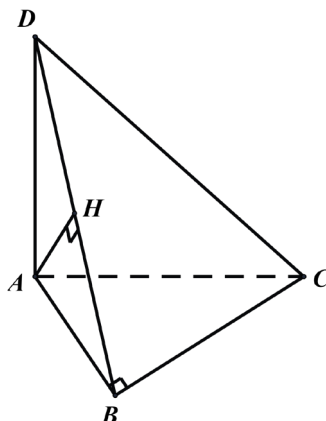
Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ có đáy ABC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. $(SAB) \perp (ABC)$.
B. Gọi H là trung điểm của BC . Khi đó $\widehat{AHS}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .
C. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là $\widehat{ACB}$.
D. $(SAC) \perp (ABC)$.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Gọi E là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $BC \perp AD$. **B.** $BC \perp AE$. **C.** $AB \perp DE$. **D.** $BC \perp (ADE)$.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông tại B , AH là đường cao của tam giác DAB . Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $BD \perp AC$. **B.** $AB \perp DC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp DC$.



- Câu 41:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC , J là trung điểm BM . Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $BC \perp (SAC)$. B. $BC \perp (SAM)$. C. $BC \perp (SAJ)$. D. $BC \perp (SAB)$.
- Câu 42:** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**.
- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp AO$.
- Câu 43:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm I , $SA = SB = SC = SD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $SI \perp (ABCD)$. B. $AD \perp CD$. C. $BC \perp AC$. D. $SB \perp (ABCD)$.
- Câu 44:** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $BC \perp (SAC)$. B. $SB \perp AB$. C. $SA \perp (ABC)$. D. $AB \perp SC$.
- Câu 45:** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $DC \perp (ABC)$. B. $AC \perp BD$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $BC \perp AD$.
- Câu 46:** Cho tứ diện $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SD . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại K .
- Khẳng định 1 : $AK \perp SC$
- Khẳng định 2 : $AM \perp SC$
- Khẳng định 3 : $BD \perp SC$
- Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định trên ?
- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.
- Câu 47:** Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . Mệnh đề nào sau đây **sai**?
- A. $CM \perp SB$. B. $NC \perp AB$. C. $AN \perp BC$. D. $MN \perp MC$.
- Câu 48:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD . Khẳng định nào sau đây **Sai**?
- A. $CK \perp (SHD)$. B. $CK \perp SD$. C. $AC \perp SK$. D. $CK \perp (SBC)$.
- Câu 49:** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp OA$.
- Câu 50:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên SB và (P) là mặt phẳng chứa AI và song song với BC . Diện tích thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp $S.ABCD$.
- A. $\frac{9\sqrt{15}a^2}{25}$. B. $\frac{9\sqrt{15}a^2}{5}$. C. $\frac{9\sqrt{5}a^2}{25}$. D. $\frac{9\sqrt{3}a^2}{25}$.



Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC tại H , cắt SB, SD lần lượt tại I và K . Mặt phẳng qua I, K song song với SC cắt các cạnh BC, CD lần lượt tại E và F . Biết SC hợp với đáy một góc 60° . Tính diện tích tứ giác $AECF$, biết diện tích tứ giác $AIHK$ bằng 10.

- A. $12\sqrt{3}$. B. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ ($x > 0$), các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 4. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và vuông góc với cạnh CD tại I . Diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng:

- A. 12 B. 6 C. $8\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC , (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α) .

- A. $12\sqrt{3}a^2$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$ C. $8\sqrt{3}a^2$ D. $4\sqrt{3}a^2$

-----HẾT-----

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

24

PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phép chiếu vuông góc

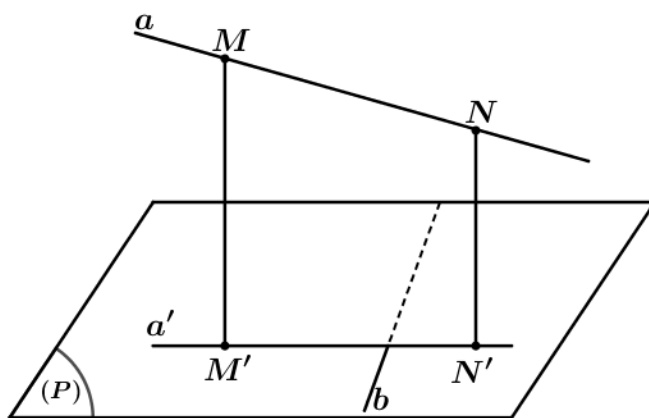
- Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) .

Chú ý:

- Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc H' của hình H trên mặt phẳng (P) còn được gọi là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) .

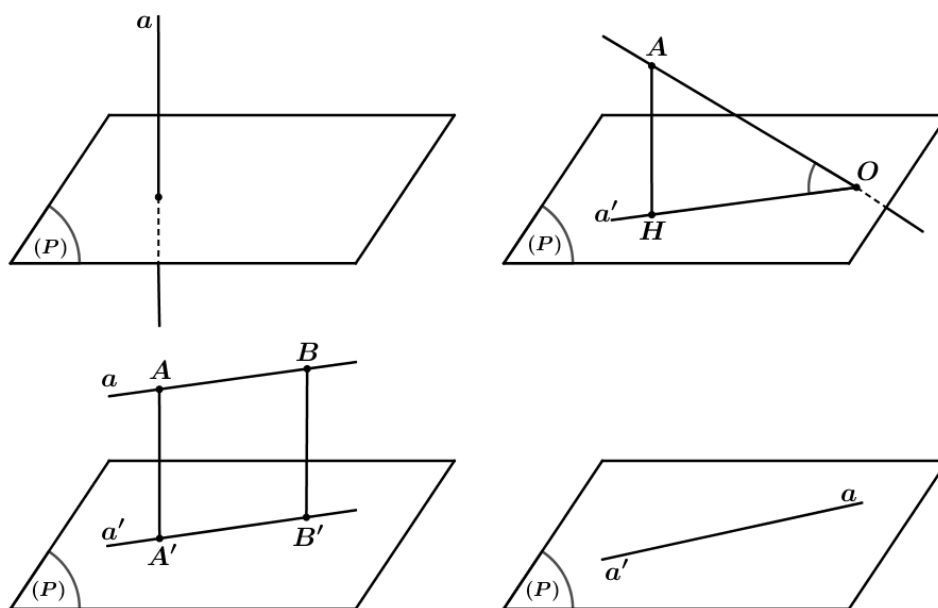
Định lý ba đường vuông góc:

- Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) không vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) .





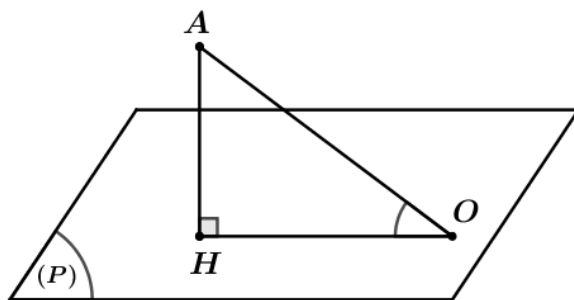
2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

Chú ý: Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Nhận xét:



- Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P) . Lấy điểm O thuộc mặt phẳng (P) , O không trùng H . Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc $\widehat{AOH}$.

📌 Dạng 1: Xác định góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy



- Ví dụ 1:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc 60° và M là trung điểm của BC .

- a) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .
b) Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a$; $AD = a$. Tam giác SAB đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

- a) Tính góc giữa SB, SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
- b) Gọi I là trung điểm của BC . Tính tan góc giữa SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, leaving ample room for writing practice. There is no text or other markings on the page.



b) Gọi I là trung điểm của CD , tính tan góc tạo bởi SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

[illegible]

- Dụng $BK \perp AH$, có $BK \perp SH \Rightarrow BK \perp (SHA)$.
- Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH) .
- Vậy $\widehat{(SB; (SAH))} = \widehat{(SB; SK)} = \widehat{BSK}$.

b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải



Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật $ABCD$, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng $(A'BD)$

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ biết $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



- Dụng $HE \perp AB, HF \perp SE$.
- Ta có: $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HF$.
- Mặt khác $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAB) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB) .
- Vậy $\widehat{(SH; (SAB))} = \widehat{(HF; SF)} = \widehat{HSF}$.

Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, leaving ample room for practicing various letters and words. There is no text or other markings on the page.



Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SBD)$ và (SCD) .

Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, which is otherwise blank white space.



Lời giải

[illegible]



b) Tính góc tạo bởi SA và (SCD) .

 **GV. Phan Nhật Linh -  SĐT: 0817 098 716**





Lời giải

[illegible]



C **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a, CD = a$ và tam giác ACD vuông tại C , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , gọi M là trung điểm AB . Biết $SM \perp (ABC)$ và tam giác SAB đều. Tính góc giữa SC và (ABC)

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $AB = AC = a$, mặt bên (SAC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính tang của góc giữa SB và mặt phẳng đáy

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC)

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a}{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Xác định góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $AA' = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'B'C')$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M , N là hai điểm thay đổi lần lượt trên các cạnh AB , $A'D'$ sao cho $MN = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , $\triangle ABD$ đều cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$

Giải Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

Giải Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 11: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) .

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = \frac{\sqrt{6}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

Giải Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

Giải Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Tính giá trị tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN)

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple rows of horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.



Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng a , O là tâm của đáy và $SO = a$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SDC) . Tính $\sin \alpha$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Tính $\tan \varphi$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = 2a$, $BC = 2a\sqrt{3}$, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) . Tính $\tan \alpha$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$. Gọi α là góc hợp giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = SB = SC = SD$ cùng hợp với đáy một góc 30° . Tính góc hợp bởi đường thẳng SC với mặt phẳng (SBD)

Lời giải

[illegible]



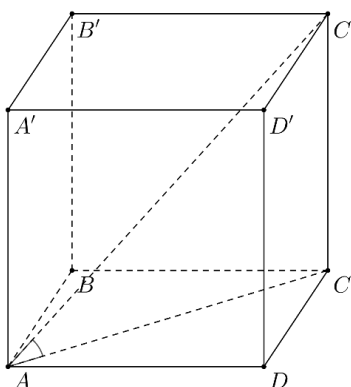
Lời giải

[illegible]



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



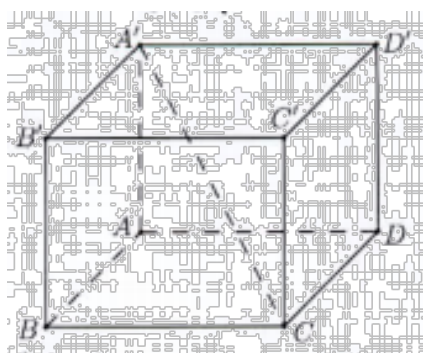
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



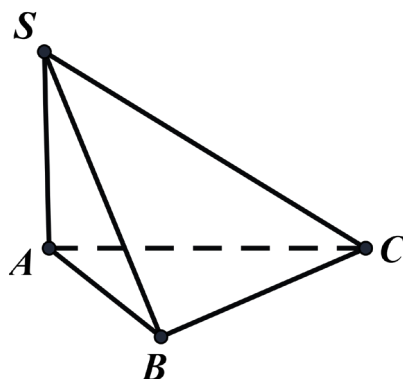
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$. (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

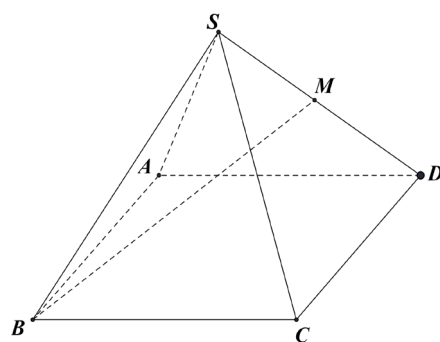
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .



Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD . Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

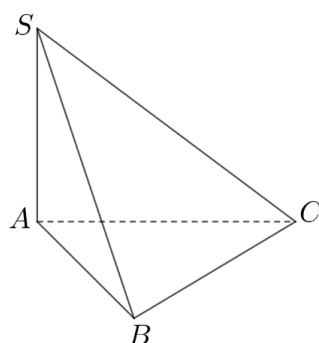


- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

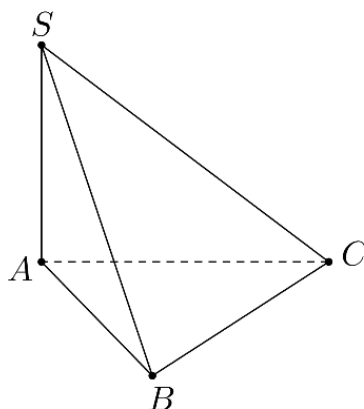
- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

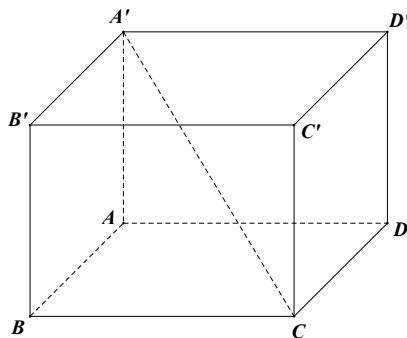
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{30}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .



Câu 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2\sqrt{2}a$, $AA' = \sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$, gọi M là trung điểm của SC . Tính cosin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và (ABC) .

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}$. B. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O ; tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính tan của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

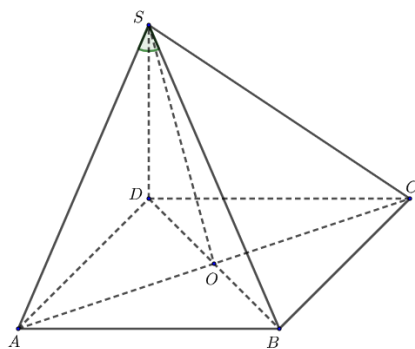
- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{7}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .



Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .



- A. 60° . B. $\arcsin \frac{1}{4}$. C. 45° . D. 30° .

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a ; $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $SB = a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) . Tính $\sin \varphi$.

- A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin \varphi = \frac{1}{4}$. C. $\sin \varphi = \frac{1}{2}$. D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là trung điểm M của cạnh AD , $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tính $\sin$ của góc giữa SN và mặt phẳng (SBM) .

- A. $\frac{2}{\sqrt{35}}$. B. $\frac{3}{\sqrt{35}}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

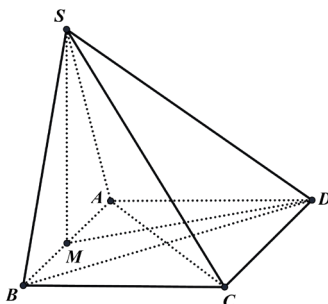
Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 75° .

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ gọi M là trung điểm cạnh AB . Biết đáy là hình vuông cạnh bằng a , $SM \perp (ABCD)$, tam giác SAB đều (minh họa như hình vẽ).





Kí hiệu φ góc giữa SD và $(ABCD)$, khi đó $\tan \varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi α là góc giữa $A'C$ và $(ADD'A')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'B = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{3}$. Góc giữa $C'A$ và mp (ABC) bằng

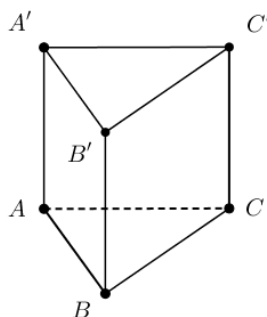
A. 60° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 30° .

Câu 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có cạnh $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$ và cạnh $AA' = \sqrt{15}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng



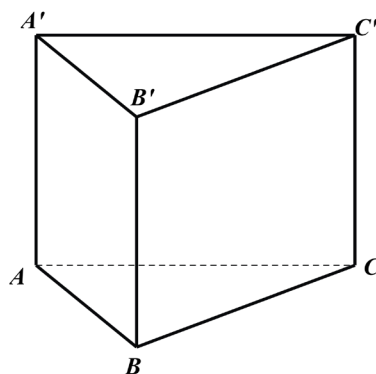
A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của $A'B'$. Tính góc giữa đường thẳng CI và mặt phẳng (ABC) .



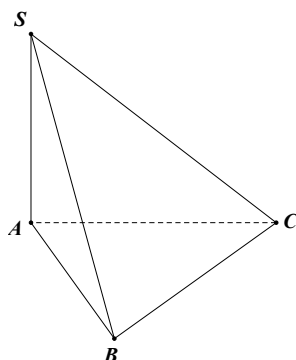
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{15}a$ (tham khảo hình bên dưới)



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

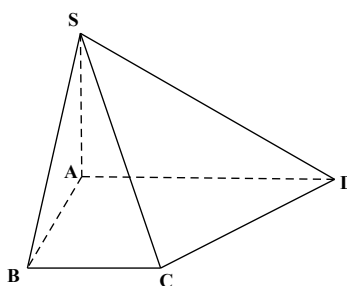
Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S , $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S , $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) bằng



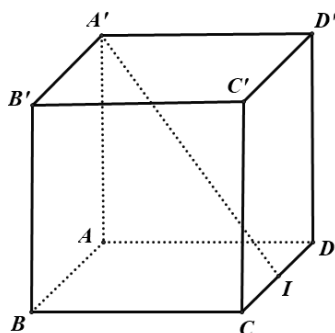
- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 30: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và tam giác ACD vuông cân tại A , $AC = 2a$. Biết $A'C$ tạo với đáy một góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Gọi I là trung điểm CD . Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'CD)$ bằng



- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AC' và $(A'BCD')$. Khi đó giá trị của $\tan \alpha$ bằng

- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD với (SBC) . Tính giá trị $\sin \alpha$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a$, và $SA \perp (ABC)$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 30° . B. 75° . C. 60° . D. 45° .

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a\sqrt{3}$. Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng ABC ?

- A. 60° B. 30° C. 45° D. 90°

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Khi đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) bằng

- A. 45° B. 60° C. 30° D. 90°



Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{5}$, đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) . Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. 2.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, SC . Góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng.

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

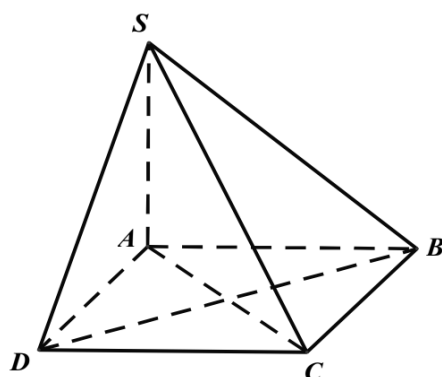
Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB = a, SD = a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SCD) thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(0^\circ; 20^\circ)$. B. $(20^\circ; 40^\circ)$. C. $(40^\circ; 60^\circ)$. D. $(60^\circ; 80^\circ)$.

Câu 41: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

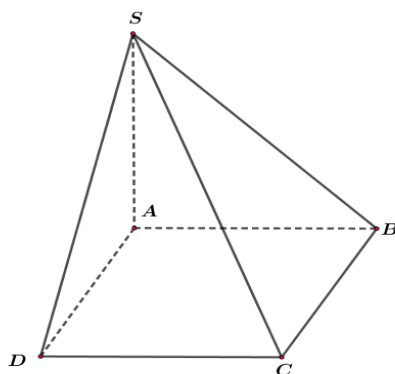
- A. 45° . B. 75° . C. 30° . D. 60° .

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$ (như hình vẽ minh họa). Số đo góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng:



- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông với $AC = 5\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 5$. Góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng



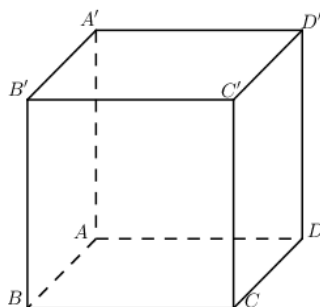
- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .



Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = CB = CA$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm I của cạnh AB . Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 45: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{2}, BC = a, AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Hãy tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cạnh SC tạo với mặt phẳng (ABC) một góc là φ . Tính $\tan \varphi$.

- A. $\tan \varphi = \sqrt{2}$. B. $\tan \varphi = \sqrt{3}$. C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = a$ và $SC = a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$ và $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tìm góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 51: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính $\sin$ của góc giữa đường thẳng CD' và mặt phẳng $(A'AD)$:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Câu 52: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , AC cắt BD tại O . Khoảng cách giữa SA và CD bằng độ dài đoạn SO . Tính sin của góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Câu 53: Cho tam giác ABC vuông tại A . Mặt phẳng (P) chứa BC và hợp với mặt phẳng (ABC) góc α , $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Gọi β , γ lần lượt là góc hợp bởi hai đường thẳng AB , AC và (P) . Tính giá trị biểu thức $P = \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$.

- A. $P = 0$. B. $P = -1$. C. $P = 2$. D. $P = 1$.

-----HẾT-----

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

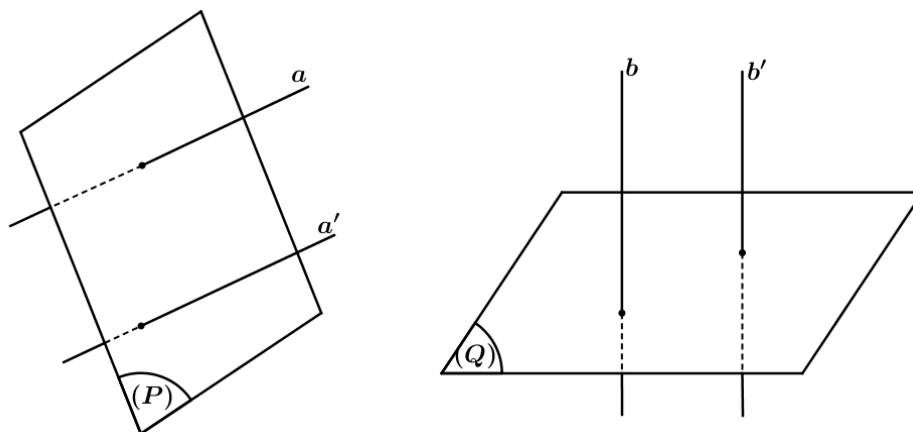
25

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

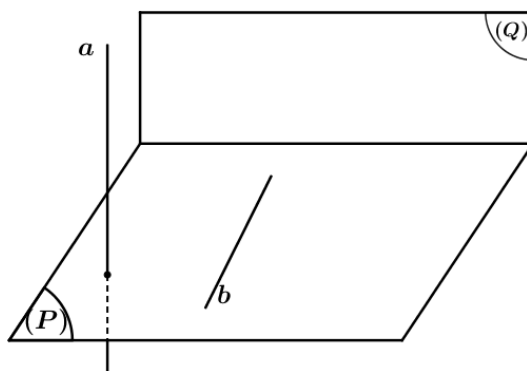


Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với $(P), (Q)$. Khi đó góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

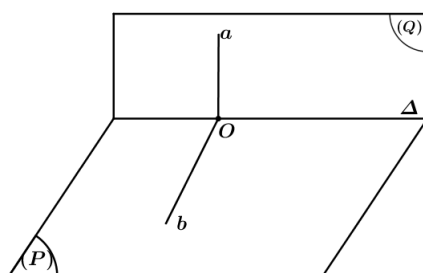
Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Chú ý: Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$.

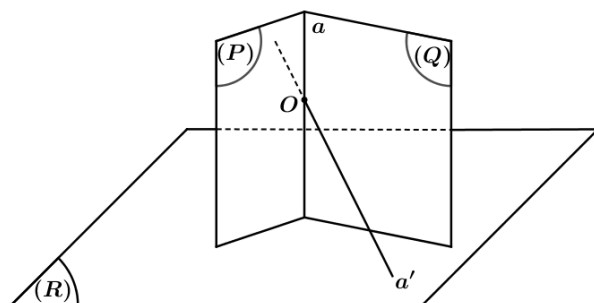
2 Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc



Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

**3 Tính chất hai mặt phẳng vuông góc**

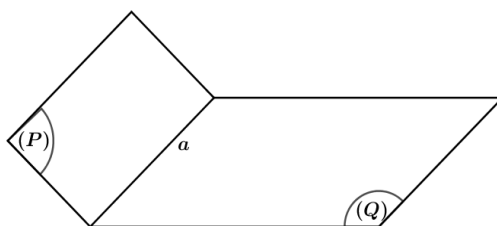
Tính chất 1: Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



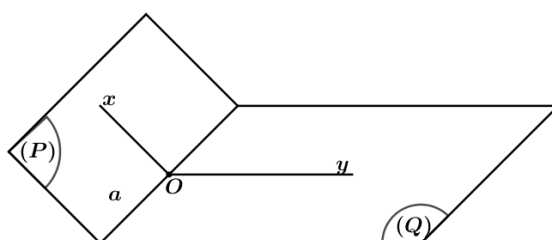
Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

4 Góc nhị diện

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P) , (Q) có chung bờ a được gọi là góc nhị diện., kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P) , (Q) tương ứng được gọi là các cạnh và các mặt của góc nhị diện đó.



Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$ vẽ các tia Ox , Oy tương ứng thuộc (P) , (Q) và vuông góc với a . Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a , được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.



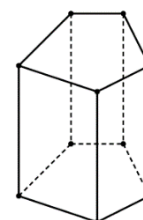
Mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện xOy của $[P, a, Q]$ vuông góc với cạnh a .

**Chú ý:**

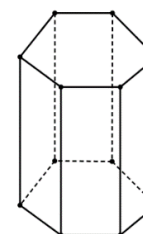
- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0^0 đến 180^0 . Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90^0 .
- Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a , ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N .
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

5 Một số hình lăng trụ đặc biệt**a) Hình lăng trụ đứng**

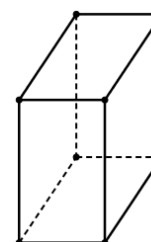
- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

**b) Hình lăng trụ đều**

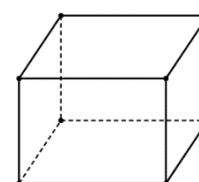
- Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ có đáy là đa giác đều.
- Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.

**c) Hình hộp đứng**

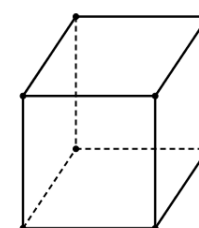
- Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng, có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.

**d) Hình hộp chữ nhật**

- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là các hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại chung điểm của mỗi đường.

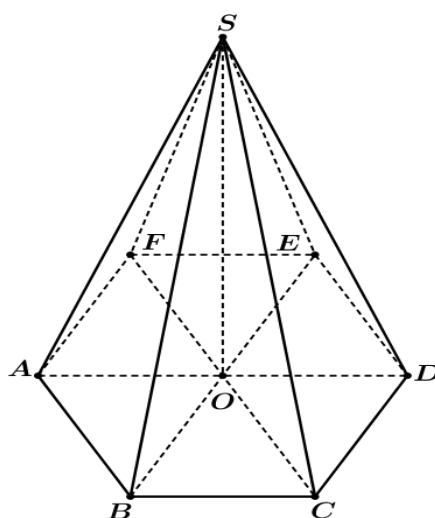
**d) Hình lập phương**

- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.
- Hình lập phương có tất cả các mặt là hình vuông.

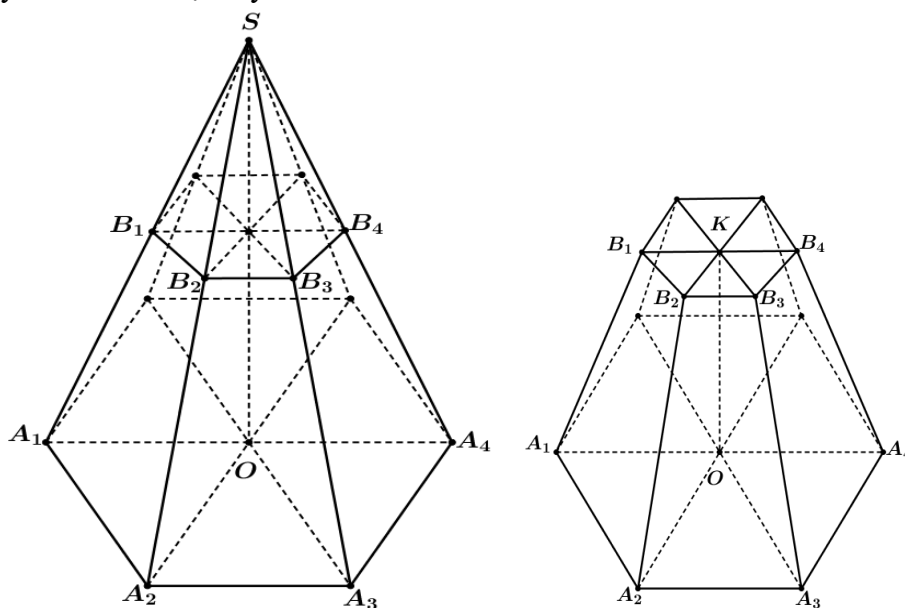




6 Hình chóp đều và hình chóp cắt đều



- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh lên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.



- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_2B_3$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ là một hình chóp cắt đều (nói đơn giản là hình chóp cắt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2...B_n$), kí hiệu là $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$ được gọi là hai mặt đáy, các hình thang $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_2B_3$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các mặt bên của hình chóp cắt. Các đoạn thẳng A_1B_1 , A_2B_2 , ..., A_nB_n được gọi là các cạnh bên; các cạnh của mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cắt.
- Đoạn thẳng KO nối hai tâm của đáy được gọi là đường cao của hình chóp cắt đều. Độ dài của đường cao được gọi là chiều cao của hình chóp cắt.



Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K . Gọi H là trực tâm của tam giác ACD .

- a) Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK) .
- b) Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt phẳng (ACD) .

Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a và $BD = a$. Biết cạnh

$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$.

b) $(SCD) \perp (SBC)$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB . Biết $SA = SB = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh tam giác SBC vuông.

c) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB); (SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC và CD .

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$.

b) Chứng minh $AM \perp BP$ và $(SBP) \perp (AMN)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Lời giải

[illegible]



Lời giải

[illegible]

- Dụng đường cao $SH \perp (ABC)$, dựng $HE \perp AB$.
- Khi đó $AB \perp (SEH) \Rightarrow \widehat{((SAB); (ABC))} = \widehat{SEH}$.

- Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy ($ABCD$).
- Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng ($ABCD$).

[illegible]



Ví dụ 10: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}$; $BC = a$, tam giác SAC là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° . Tính góc $\widehat{((SBC);(ABC))}$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \frac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$ và $AB = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và (SBD) với mặt phẳng $(ABCD)$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính cosin góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt đáy (ABC) .

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

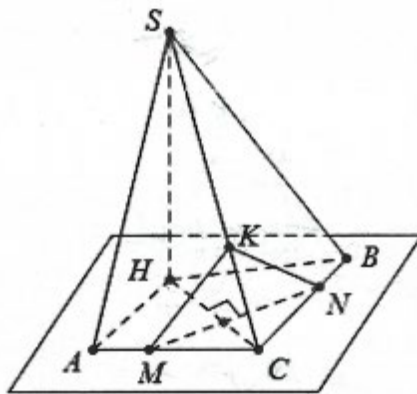
.....

.....

.....



Dạng 3: Xác định góc giữa hai mặt bên



Tính góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC) .

- **Cách 1:** Tính góc giữa 2 đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với mặt phẳng (SAC) và (SBC) .
- **Cách 2:** Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc AC , dựng $MN \perp HC$.

Lại có: $MN \perp SH \Rightarrow MN \perp (SHC) \Rightarrow MN \perp SC$.

Dựng $MK \perp SC \Rightarrow SC \perp (MKN) \Rightarrow \widehat{((SAC); (SBC))} = \widehat{(MK, KN)}$.

Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC tam giác vuông tại

B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



b) (SAD) và (SCD).

15



Lời giải

[illegible]



Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$, tính độ dài đoạn thẳng SA để góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60° .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và $A'B'$. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (BCM) .

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

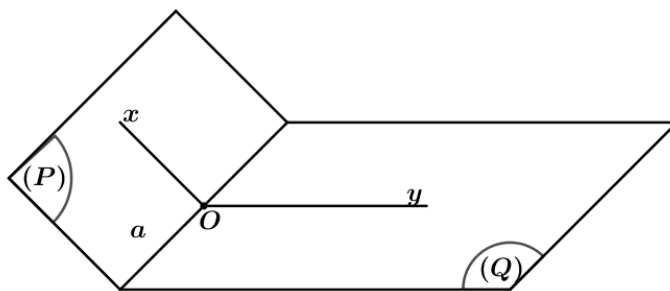
.....

Ví dụ 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác SAC là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng $(SAB); (ABC)$ góc bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{MS}{MC}$.

Lời giải

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It features 20 evenly spaced, horizontal dashed lines across the entire width of the page. The background is plain white, and there are no margins, text, or other markings present.

📌 Dạng 4: Xác định và tính số đo góc nhị diện



Ta xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) theo 3 bước:

Bước 1: Tìm giao tuyến $a = (P) \cap (Q)$.

Bước 2: Tìm $x \in (P): x \perp a$ và $y \in (Q): y \perp a$.

Bước 3: Kết luận $[P, a, Q]$

Ví dụ 22: Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Tính $\cos \alpha$?

Lời giải

[illegible]



Ví dụ 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BE, A]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính φ ?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[C, SB, A]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$ và cạnh bên $2a$. Tính số đo nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



b) Tính số đo nhị diện $[M, BC, A]$.

Lời giải

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It features 20 evenly spaced, horizontal dashed lines across the entire width of the page. The background is plain white, providing a clear guide for letter height and placement. There are no margins, text, or other markings present.





Lời giải

[illegible]

Ví dụ 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Đặt $x = AM$ ($0 < x < a$).

- a) Tìm thiết diện của hình chóp với (α) . Thiết diện là hình gì?
b) Tính diện tích thiết diện theo a và x .

Lời giải

[illegible]



b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x . Tìm x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

Lời giải

[illegible]



b) Biết $SA = a$. Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu a.

Lời giải

[illegible]



d) Biết rằng $AB = a$; $SA = a\sqrt{2}$ Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu c.

[illegible]



Lời giải

[illegible]

C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC .

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải

[illegible]



Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C'], [A, BD, C']$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC' .

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





b) Tính tan của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

33

-

-

[illegible]



Câu 6: Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tan của góc tạo bởi mái nhà mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SB = 2a, AB = 3a, BC = 4a$ và góc α là góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng đáy. Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 8: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$.

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Tính $\tan \varphi$.

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A , cạnh $BC = 3a, AC = a\sqrt{6}$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) .

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB)

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 14: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') .

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15: Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết $SA = SB = SC = a$, $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) . Tính $\cos \varphi$

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

GV. Phan Nhật Linh - ☎️ SĐT: 0817 098 716



Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, which is otherwise blank.



Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABC$. Mặt phẳng (α) qua A , song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19: Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = 2a$; $AD = DC = a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a$; $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD) . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

- Câu 1:** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. Vô số.
- Câu 2:** Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Một đường thẳng và một mặt phẳng không chứa đường thẳng đó cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- Câu 3:** Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) . Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây.
- A. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .
B. Không tồn tại mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .
C. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) vuông góc với (P) .
D. Tồn tại duy nhất một đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) và Δ vuông góc với d .
- Câu 4:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với hình vuông đáy $ABCD$. Nhận xét sai là:
- A. Tam giác SBC vuông tại B .
B. Tam giác SDC vuông tại C .
C. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (SAB) .
D. Mặt phẳng (SCD) vuông góc với mặt phẳng (SAD) .
- Câu 5:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- Câu 6:** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. vô số
- Câu 7:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.
C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường



thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $(SBC) \perp (SAB)$. B. $(SAB) \perp (ABCD)$. C. $(SAC) \perp (ABCD)$. D. $(SAC) \perp (SAD)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BM \perp AC$. B. $(SBM) \perp (SAC)$. C. $(SAB) \perp (SBC)$. D. $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây

- A. $(ABCD) \perp (SBD)$. B. $(SAB) \perp (ABCD)$.
C. $(SAC) \perp (SBD)$. D. $(SAC) \perp (ABCD)$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại B , cạnh bên vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(BIH) \perp (SBC)$. B. $(SAC) \perp (SAB)$.
C. $(SBC) \perp (ABC)$. D. $(SAC) \perp (SBC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD) ?

- A. (SBC) . B. (SAD) . C. (SCD) . D. (SAC) .

Câu 13: Cho mặt phẳng (P) và một điểm M không thuộc (P) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) ?

- A. 1. B. 2. C. Vô số. D. 3.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC , N là hình chiếu của B lên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(BMN) \perp (SBC)$. B. $(SAC) \perp (SAB)$. C. $(BMN) \perp (ABC)$. D. $(SAC) \perp (SBC)$.

Câu 15: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC ; kẻ IH vuông góc SA ($H \in SA$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $SA \perp BH$. B. $(SDB) \perp (SDC)$. C. $(SAB) \perp (SAC)$. D. $BH \perp HC$.

Câu 16: Cho tam giác ACD và tam giác BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau và $AC = AD = BC = BD = a$; $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$.

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B ; $SA \perp (ABC)$. Góc giữa (SBC) và



(ABC) là góc nào?

A. $\widehat{SBC}$.

B. $\widehat{SBA}$.

C. $\widehat{SCB}$.

D. $\widehat{SCA}$.

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha = \sqrt{6}$.

B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SC = a$, $SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có $\tan$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = a$, $AC = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$, $BC = a$, tam giác ABC vuông tại B . Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , (α) là mặt phẳng chứa CG và song song với AB . Giá trị của cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (SAB) là

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}$, $SO = a$. Tính $\tan$ của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Tìm tỉ số độ dài $\frac{SA}{AB}$ để hai mặt phẳng $(ABPQ), (CDMN)$ vuông góc với nhau.

A. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

B. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

C. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{23}}{4}$.

D. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{4}$.



- Câu 26:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đáy ABC có $BC = a$ và $\widehat{BAC} = 150^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là
- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .
- Câu 27:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng
- A. 30° . B. 150° . C. 90° . D. 60° .
- Câu 28:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi α là góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$ và β là góc giữa mặt phẳng $(A'BC')$ với mặt phẳng $(ACC'A')$. Biết $\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{m}{n}$ (với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{m}{n}$). Khi đó giá trị của biểu thức $T = m + 2n$ bằng
- A. $T = 3$. B. $T = 5$. C. $T = 7$. D. $T = 9$.
- Câu 29:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$. Giá trị của $\sin \alpha$ bằng:
- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\sqrt{2}$
- Câu 30:** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, tam giác SAD cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và có đường cao $SH = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC . Giá trị tang của góc giữa hai mặt phẳng (SDM) và (SAM) bằng
- A. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{4\sqrt{21}}{5}$. C. $\frac{4\sqrt{21}}{42}$. D. $\frac{7\sqrt{21}}{21}$.
- Câu 31:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . O là giao điểm của AC và BD , I là điểm đối xứng với O qua $(A'B'C'D')$. Mặt phẳng (IAD) cắt $A'B'$ tại M . Cosin góc giữa (MAD) và (MBC) bằng bao nhiêu?
- A. $\frac{13\sqrt{17}}{85}$. B. $\frac{13\sqrt{5}}{85}$. C. $\frac{15\sqrt{15}}{85}$. D. $\frac{17\sqrt{17}}{85}$.
- Câu 32:** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Giá trị góc α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 33:** Cho hình lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng ABC là trọng tâm G , hình lăng trụ có cạnh bằng $6a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{21}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng
- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .



- Câu 34:** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $AB = 3a$, $AD = a$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = \frac{1}{10}SB$, N là trung điểm của SD . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$
- A. $\frac{\sqrt{165}}{55}$. B. $\frac{2\sqrt{715}}{55}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$.
- Câu 35:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) cắt tất cả các cạnh bên của hình lập phương. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) biết (α) tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 60° .
- A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 6. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 36:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = AB\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC , $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD . Tính tan của góc hợp bởi mặt phẳng (AHK) và mặt phẳng $(ABCD)$.
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 37:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng
- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .
- Câu 38:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC . Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tính diện tích tam giác AMN theo a .
- A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{24}$. B. $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$. C. $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. D. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.
- Câu 39:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$, $AD = 2AB = 2BC = 2a$. Cosin của góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng
- A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 40:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A , cạnh $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{6}$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC)
- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .



Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) bằng α với $\cos \alpha = \sqrt{\frac{6}{19}}$. Tính độ dài SC theo a

- A. $SC = \sqrt{6}a$. B. $SC = 2\sqrt{6}a$. C. $SC = \sqrt{7}a$. D. $SC = 6a$.

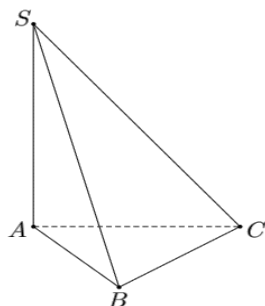
Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD . Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$ và $BB' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC . Tang góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. C. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác cân tại A , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

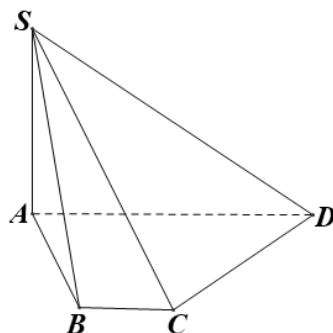


- A. 30° B. 120° C. 60° D. 90°

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên).

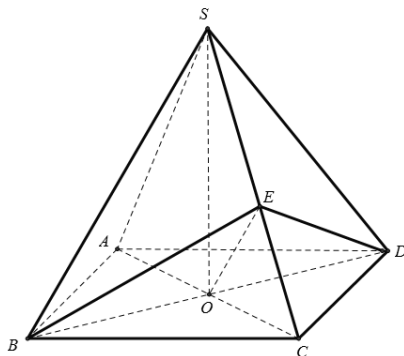




Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

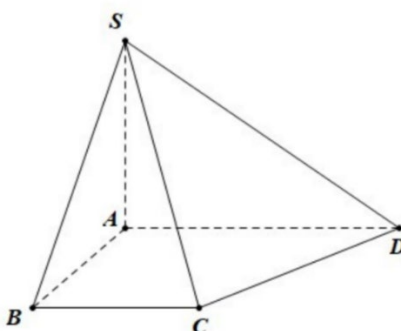
- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 47: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên $SA = 2a$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SAC) bằng



- A. $\frac{\sqrt{21}}{14}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng



- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAB} = \widehat{SBC} = 90^\circ$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SBC) biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}$, $SO = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.

-----HẾT-----

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

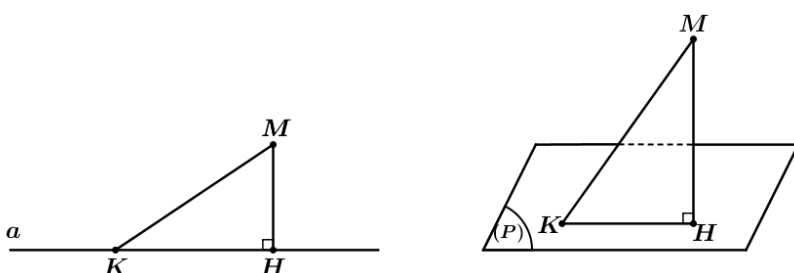
26

KHOẢNG CÁCH

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng



Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a .

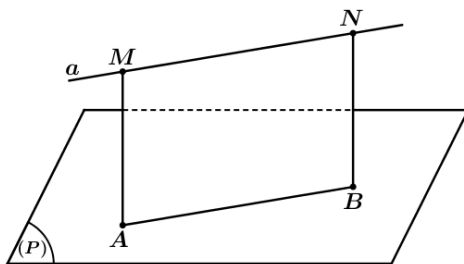
Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(M, (P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P) .

Chú ý:

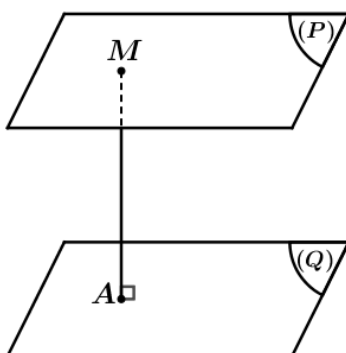
- $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.
- Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

Nhận xét: Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

2 Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song



Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a , kí hiệu $d(a, (P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) .

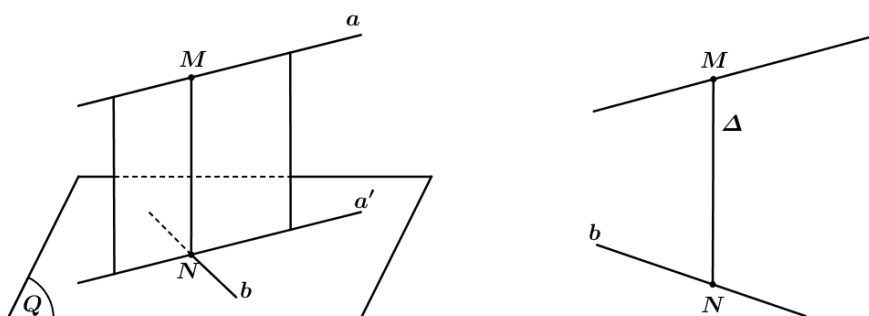


Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n , kí hiệu $d(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó.

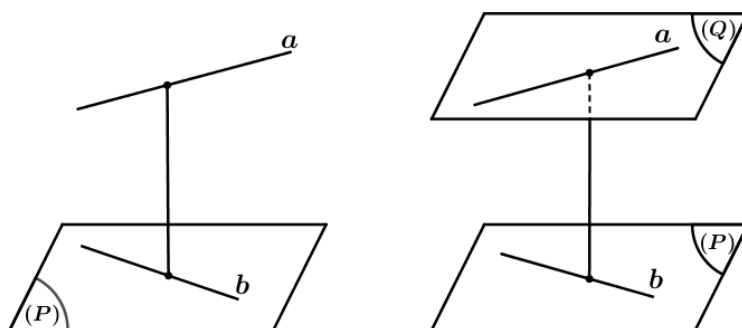
3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b .

Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b .

Nhận xét:



Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó.





Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD' .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC , đồng thời đường cao $AB = BC = 2a$. Biết $SA = 2a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D , $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Biết điểm M di động trên đường thẳng CD . Tìm giá trị nhỏ nhất khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng SA .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$; $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O , $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của đoạn AB . Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE :

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





7



- Ví dụ 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB .
- a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SHD) .
 - b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Ví dụ 10:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 3a, AB = BC = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$.
- a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) .
 - b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm H của tam giác ABD .

- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng 2, $AB = \sqrt{2}, BC = 2$. Gọi M là trung điểm của CD , hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

- a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .
- b) Gọi M là trung điểm của AC . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = a, OB = b, OC = c$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (ABC)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của cạnh AC . Biết $SH = a$, tính khoảng cách từ H đến các mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB . Biết $SD = 3a$.

- a) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .
- b) Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}, AD = a, AA' = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 18: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 6. Tính khoảng cách từ trung điểm M của cạnh $B'C'$ đến mặt phẳng $(A'BC)$?

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2024, $SA \perp (ABCD)$ và mặt bên (SCD) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) ?

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, which is otherwise blank.

**Dạng 3: Khoảng cách giữa các đối tượng song song**

Bài toán xác định khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (P) .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ từ đường thẳng này đến đường thẳng kia

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên đường thẳng này (*điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng*)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng kia

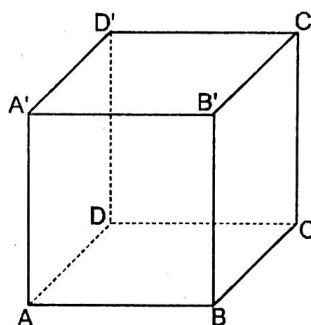
Khoảng cách giữa đường thẳng d song song mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc đường thẳng d đến mặt phẳng (P)

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên đường thẳng d (*điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng*)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (P) .

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ từ mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên mặt phẳng này (*điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng*)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng kia

Ví dụ 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .



- a) Tính khoảng cách giữa cạnh $A'D'$ với cạnh BC
- b) Tính khoảng cách giữa cạnh AA' với mặt phẳng $(BDD'B')$
- c) Tính khoảng cách giữa mặt phẳng $(ADD'A')$ với $(BCC'B')$

Lời giải

.....

.....

.....

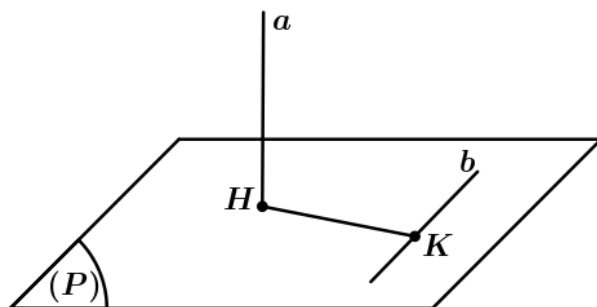
.....

.....

.....



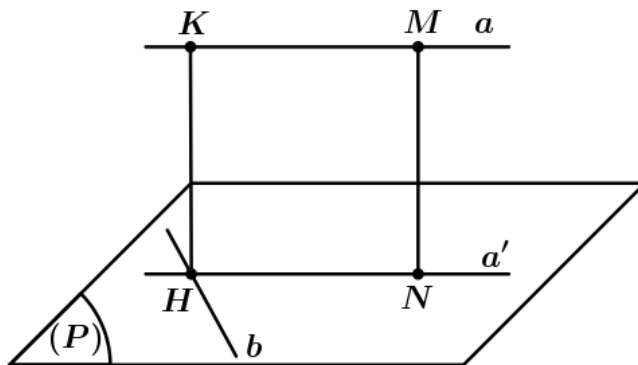
Dạng 4: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



Cách 1: Khi đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b

- **Bước 1:** Dựng một mặt phẳng $(P) \supset b, (P) \perp a$ tại H .
- **Bước 2:** Trong mặt phẳng (P) dựng $HK \perp b$ tại K .
- **Bước 3:** Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b .

Cách 2:



- **Bước 1:** Dựng $(P) \supset b, (P) // a$.
- **Bước 2:** Dựng a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (P) bằng cách lấy $M \in a$. Sau đó dựng đoạn $MN \perp (P)$. Khi đó a' là đường thẳng đi qua N và song song a .
- **Bước 3:** Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK // MN \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung cần tìm.

Ví dụ 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định đoạn vuông góc chung của AA' và CD .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

[illegible]

[illegible]



C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

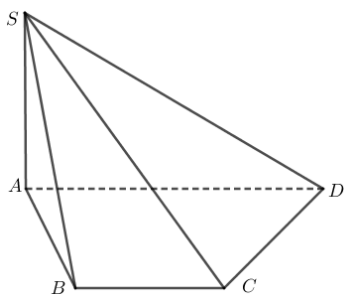
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{3a}{4}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SAC) .

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. D. $2a$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB = AA' = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 1$; $SA \perp (ABC)$, $SA = 1$. Khoảng cách từ điểm A đến mp (SBC) bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. 1 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. a . C. $2a$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.



Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $d = a$. C. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

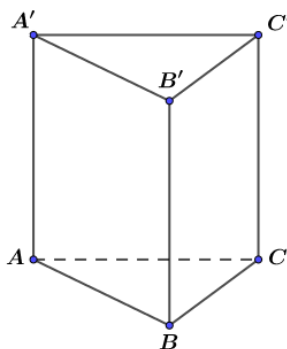
Câu 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

- A. $2a$. B. $a\sqrt{3}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = AC = AD = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

- A. $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $a\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và diện tích của hình vuông $ABB'A'$ bằng $12(\text{cm}^2)$



Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

- A. 6. B. $2\sqrt{3}(\text{cm})$. C. 2. D. $3\sqrt{2}(\text{cm})$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.DEF$ có đáy là tam giác vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $(BCFE)$ bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $2a$. C. a . D. $2\sqrt{2}a$.



- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.
- Câu 16:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD = \sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng
- A. $\sqrt{3}a$. B. $\sqrt{2}a$. C. $2a$. D. a .
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là
- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $a\sqrt{3}$.
- Câu 18:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CB và SA .
- A. $\frac{a}{2}$. B. $2a$. C. $a\sqrt{2}$. D. a .
- Câu 19:** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD .
- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 20:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O . M là trung điểm SA . Biết rằng $(MCD) \perp (SAB)$, khoảng cách giữa hai đường thẳng OM , SB bằng
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. C. $3a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.
- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO .
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.
- Câu 22:** Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng
- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. D. $a\sqrt{3}$.
- Câu 23:** Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D , $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Biết điểm M di động trên đường thẳng CD , tìm giá trị nhỏ nhất khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng SA
- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$; $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC là

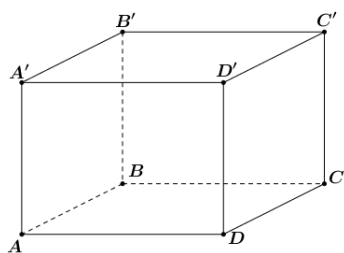
- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE :

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông cạnh a .



- Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a .
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B)$ bằng a .
- Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng độ dài đoạn thẳng BD .
- Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BDC') bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB' và AC' . Các khẳng định sau **ĐÚNG** hay **SAI**?

- Khoảng cách giữa $(A'B'C')$ và (ABC) bằng $2a$.
- Khoảng cách giữa BC và $(A'B'C')$ bằng a .
- Khoảng cách giữa BC và $(AB'C')$ bằng khoảng cách giữa A' và $(AB'C')$.
- Khoảng cách MN và $(A'B'C')$ bằng a .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SD và O lên cạnh SC .

- OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .
- Đoạn vuông góc chung của SD và AB là AD .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, A'A = 5$.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng 5.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng 4.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'A$ và DC là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'BB')$ và mặt phẳng $(CDC'D')$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng CB và $B'D'$ là 3.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh a .

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



b) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD .

a) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB) là độ dài đoạn DA .

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là độ dài đoạn DA .

c) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{a}{3}$

d) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{a}{3}$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$, $SO = a$.

a) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBD) bằng a .

b) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a .

c) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi O, O' là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$, I là giao điểm của BO' và DB' .

a) Khoảng cách giữa hai mặt $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng 2.

b) Khoảng cách từ C đến $(BB'D'D)$ bằng đoạn CO .

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và DC' lớn hơn 2.

d) Khoảng cách từ B đến (CDI) bằng đoạn $2\sqrt{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

a) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng CB

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

c) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.



d) Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách d giữa SM và BC là $\frac{\sqrt{17}a}{17}$.

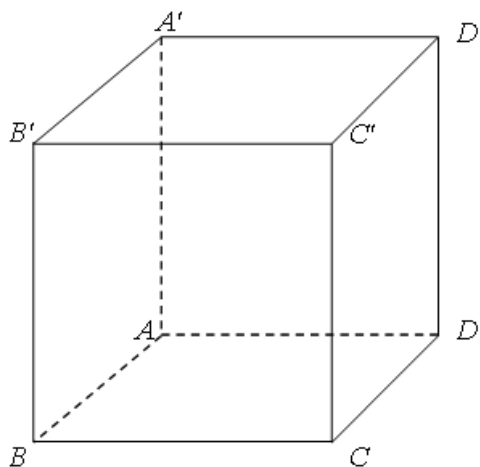
Câu 10: Cho hình chóp $SA = a, SA \perp (ABCD)$, đáy là hình vuông. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, DC , góc giữa (SBM) với $(ABCD)$ là 30° .

- Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a
- Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SMD) là BM
- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng nửa độ dài cạnh BD
- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $SA \perp (ABCD); SA = a; AB = BC = a; AD = 2a$

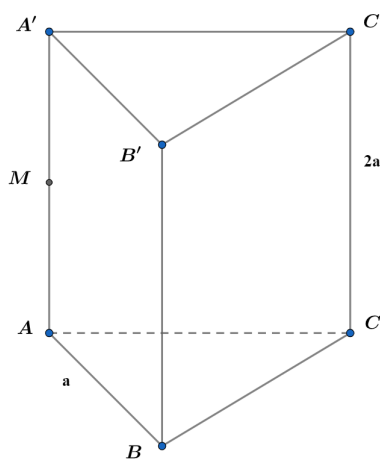
- Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.
- Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .
- Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a .



- Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $A'B$ bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng $\frac{a}{2}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$ bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = 2a$. Gọi M là trung điểm của AA' .



- Khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AB là $3a$.
- Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AC'B)$ bằng $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

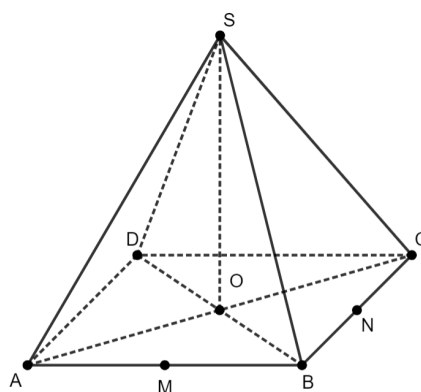
Câu 14: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 2a$.

- Độ dài $A'C$ bằng $a\sqrt{3}$.
- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .
- Khoảng cách giữa $B'D'$ và AC bằng $2a$.
- Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\frac{a}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân và $(SAB) \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi I , H lần lượt là trung điểm của CD và AB .

- Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $\frac{a\sqrt{15}}{2}$.
- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{15}}{8}$.
- Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SHC) là $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.
- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) là $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 16: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC .



- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $a\sqrt{2}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng $\frac{a}{2}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng ON và SB bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA bằng $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AD = 2a$, $AB = a$. Kẻ AM vuông góc với SB tại M .

- Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $2a$.
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$.
- Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAD) bằng nửa khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) .
- Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) lớn hơn $\frac{a}{2}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

- Khoảng cách từ S đến đường thẳng AC bằng $2\sqrt{2}a$.
- Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAD) bằng a .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng a .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi H là trung điểm của AB .

- $SH \perp (ABCD)$.
- $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$.
- Gọi E là trung điểm của CD , khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) là độ dài đoạn thẳng AK (Với K là hình chiếu của H lên SE , K thuộc SE).



d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AA' .

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$ là a .

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ là $a\sqrt{2}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là a .

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng MB' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

a) Khoảng cách giữa AB và $C'D'$ bằng $2a$.

b) Khoảng cách giữa $B'D'$ và AB bằng $a\sqrt{2}$.

c) Khoảng cách giữa AD' và CC' bằng a .

d) Khoảng cách giữa BC' và CD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, H là tâm của đáy, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° , I là trung điểm BC .

a) Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng SH .

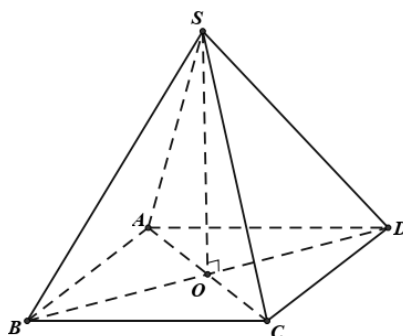
b) Khoảng cách giữa SH và BC là $\frac{a}{2}$.

c) Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{3a}{4}$.

d) Khoảng cách giữa SI và AD là $\frac{3a}{2}$.

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN**

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa cạnh SB và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)
- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC . Biết $SB = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAB) bằng
- Câu 3:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A trên mp $(A'B'C')$ trùng với trung điểm I của $B'C'$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt bên $(BCC'B')$
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $6\sqrt{6}$, $SA = SB = SD = 12$ và tam giác ABD đều. Khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?
- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa SB và CD .
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm O đến SC .
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a
- Câu 8:** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) bằng
- Câu 10:** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh BC . Biết cạnh $AA' = a\sqrt{3}$ và tạo với mặt đáy của hình lăng trụ một góc 60° . Khoảng cách từ đỉnh C' đến mặt $(A'BC)$ bằng
- Câu 11:** Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a



- Câu 12:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \sqrt{6}a$, G là trọng tâm tam giác SAC . Khoảng cách từ G đến (SCD) là
- Câu 13:** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° . $AB = 2CD = 2a$, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc 45° . Hình chiếu vuông góc của S lên đáy trùng với giao điểm của AC và BD . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .
- Câu 14:** Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 45° , M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng
- Câu 15:** Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D = 3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng
- Câu 16:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABD$ có đáy là tam giác vuông tại A , cạnh $AB = 2AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABD) . Gọi H, N lần lượt là trung điểm của AB , AD . Khoảng cách giữa HN và SD bằng
- Câu 18:** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC và diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và AB' .
- Câu 19:** Một quạt trần có bề dày thân quạt là 30 cm, người thợ muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ đỉnh quạt đến sàn là 3 m. Cho biết trần nhà cao 4 m, khi đó chiều dài cán quạt là:



- Câu 20:** Một cây cầu dành cho người đi bộ có mặt sàn cầu cách mặt đường 4 m (giả sử mặt sàn cầu vượt song song với mặt đường), khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 1m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b là:





Câu 21: Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung không chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,2 m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 18° so với phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa hai thanh ngang của khung và mặt đường dốc (theo đơn vị mét và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Câu 22: Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình bên dưới) có mặt sàn cầu cách mặt đường 3,5 m, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 0,8 m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .



Câu 23: Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

Câu 24: Giá đỡ ba chân được mở sao cho ba góc chân cách đều nhau một khoảng bằng 110 cm. Biết các chân của giá đỡ dài 129 cm. Hỏi chiều cao của giá đỡ bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2)?

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

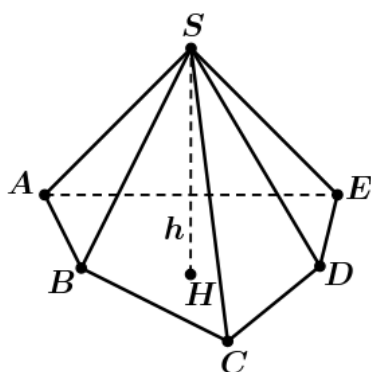
27

THỂ TÍCH

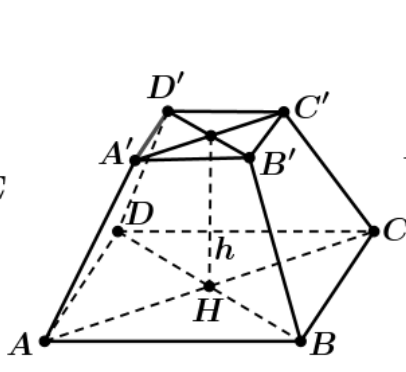
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Lý thuyết chung về thể tích

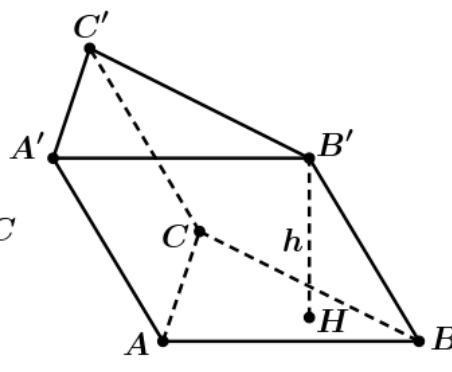
- Thể tích là một trong những khái niệm toán học xuất hiện thường xuyên trong cuộc sống, đo sự chiếm chỗ của vật thể trong không gian. Bài học này đưa ra công thức thể tích của các hình khối ứng với các hình mà ta đã học.
- Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cắt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.



$$V = \frac{1}{3}hS$$



$$V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$$



$$V = hS$$

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là: $V = \frac{1}{3}hS$.
- Thể tích của khối chóp cắt đều có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là: $V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = hS$.

Nhận xét:

- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao.
- Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Biết $SA = a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp bằng

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB // CD$, $SA = AD = DC = a, BC = a\sqrt{7}$. Tam giác SBC vuông tại C , tam giác SCD vuông tại D . Thể tích khối chóp đã cho bằng

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.


$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha) \\ a \perp d \end{array} \right. \Rightarrow a \perp (\beta)$$

Lời giải

Lời giải



Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $\triangle SAB$ đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết SC tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SBC đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ biết góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $AB = a$, $SA = 2SD$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 2a$ nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Biết $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Dạng 3: Thể tích khối chóp đều**

Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Trong hình chóp đều:

- Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

Chú ý:

- Đề bài cho hình chóp tam giác đều (tứ giác đều) ta hiểu là hình chóp đều.
- Hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều vì hình chóp tam giác đều thì bản thân nó có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nói một cách khác, hình chóp tam giác đều thì suy ra hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại là không đúng.
- Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

Công thức tính thể tích khối chóp đều và một số công thức giải nhanh:

- Chiều cao h khối chóp xác định bởi $h = \sqrt{b^2 - R_d^2}$, trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và b là độ dài cạnh bên.
- Khối tứ diện đều cạnh a có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ và $V = \frac{\sqrt{3}h^3}{8}$, trong đó $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ là chiều cao khối tứ diện đều.
- Khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$
- Khối chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2 \sqrt{2(2b^2 - a^2)}}{6}$
- Khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a , có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$
- Khối bát diện đều cạnh a là hợp của hai khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$
- Khối chóp lục giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2 \sqrt{3(b^2 - a^2)}}{2}$

Ví dụ 12: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích của khối chóp tương ứng tính theo a sẽ bằng

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 13: Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp đó bằng

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{5}a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 15: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCD) và (SDA) . Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 16: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích xung quanh gấp 2 lần diện tích đáy, diện tích đáy bằng $4a^2$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ tương ứng bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 18: Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và diện tích xung quanh bằng $8a^2$. Thể tích của khối chóp đó bằng

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 4: Thể tích khối lăng trụ đứng

Ví dụ 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C} = 45^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 20: Cho khối lăng trụ tam giác đều, cạnh bên có độ dài gấp hai lần cạnh đáy. Biết tổng diện tích các mặt của khối lăng trụ là $(12 + \sqrt{3})a^2$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 21: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $A'BCD'$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a .

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 22: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 23: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AC' = \sqrt{6}a$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

Giải Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 24: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $AC = 2\sqrt{2}a$, góc giữa hai mặt phẳng $(C'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng:

Giải Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





D. $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$.

15



Dạng 5: Thể tích khối lăng trụ đều

Ví dụ 26: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 27: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 29: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$. Đáy ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R = a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

✍ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

[illegible]



Dạng 6: Thể tích khối lăng trụ xiên

Ví dụ 31: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác $A'BC$ bằng 4, khoảng cách từ A đến BC bằng 3, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 32: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 33: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ bằng

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 34: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $A'A = A'B = A'C$. Biết rằng $AB = a$ và $BC = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

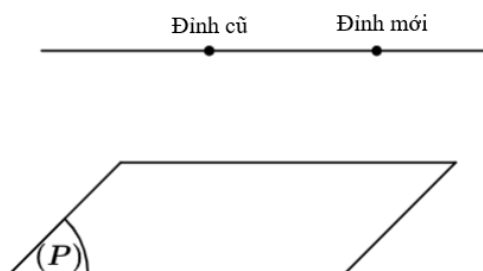
[illegible]

**Dạng 7: Tỷ số thể tích khối đa diện**

Chú thích: V_1 = Thể tích cũ; V_2 = Thể tích mới (Dùng cho kỹ thuật chuyển đỉnh và đáy)

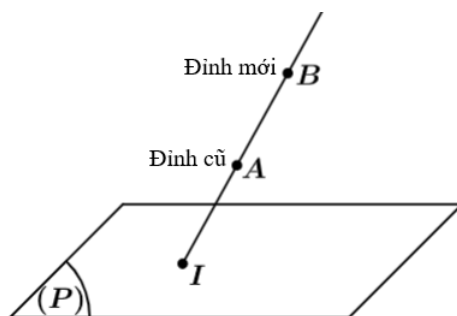
1. Kỹ thuật đổi đỉnh (Đáy không đổi)

a) Song song với đáy:



Khi đó: $V_1 = V_2 = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$

b) Cắt đáy:



Khi đó: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(A; (P)) \cdot S_d}{\frac{1}{3} \cdot d(B; (P)) \cdot S_d} = \frac{IB}{IA}$

2. Kỹ thuật chuyển đáy (Đường cao không đổi)

Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$ với S_1 là diện tích đáy cũ; S_2 là diện tích đáy mới.

Chú ý:

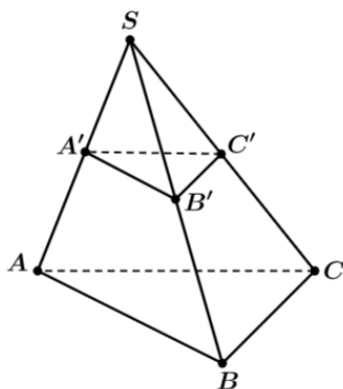
- Đưa hai khối đa diện về cùng một đỉnh; hai đáy mới và cũ nằm trong cùng một mặt phẳng (thường thì đáy cũ chứa đáy mới). Áp dụng công thức tính diện tích của đa giác để so sánh tỉ số giữa đáy cũ và đáy mới.
- Nếu tăng (hoặc giảm) mỗi cạnh của đa giác (tam giác, tứ giác) k lần thì diện tích đa giác sẽ tăng (hoặc giảm) k^2 lần.

3. Một số kết quả quan trọng

Kết quả 1: Cho tam giác OAB . Gọi A' , B' lần lượt nằm trên các cạnh OA và OB . Khi đó:

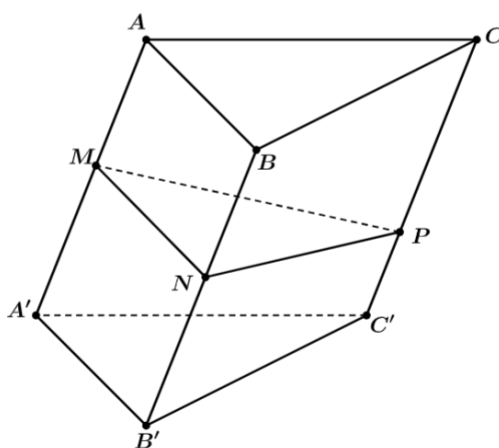
$$\frac{S_{\triangle OA'B'}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB}$$

Kết quả 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A' , B' , C' lần lượt nằm trên các cạnh SA , SB và SC .



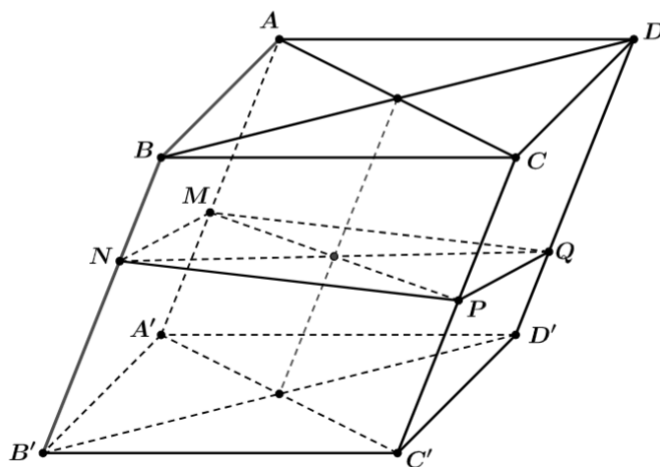
Khi đó: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$

Kết quả 3: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh bên AA' , BB' và CC' lần lượt lấy các điểm M, N, P



Giả sử: $\frac{A'M}{A'A} = x; \frac{B'N}{B'B} = y; \frac{C'P}{C'C} = z$ thì khi đó $\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}} = \frac{x+y+z}{3}$

Kết quả 4: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh bên AA' , BB' , CC' và DD' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho M, N, P, Q đồng phẳng.



Giả sử: $\frac{A'M}{A'A} = x; \frac{B'N}{B'B} = y; \frac{C'P}{C'C} = z; \frac{D'Q}{D'D} = t$ thì khi đó $x+z = y+t$ và $\frac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}} = \frac{x+y+z+t}{4}$



Ví dụ 36: Cho khối chóp $S.ABC$. Trên ba cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA = 2SA', SB = 3SB', SC = 4SC'$. Mặt phẳng $(A'B'C')$ chia khối chóp thành hai khối. Gọi V và V' lần lượt là thể tích các khối đa diện $S.A'B'C'$ và $ABC.A'B'C'$. Khi đó tỉ số $\frac{V}{V'}$ là:

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 37: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Ví dụ 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC . Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . $AB = BC = 2a, AD = 4a$. Mặt phẳng (α) đi qua A và trung điểm các cạnh SB, SC chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S , V' là thể tích khối đa diện không chứa đỉnh S . Tỉ số $\frac{V}{V'}$ bằng

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Lời giải

[illegible]



Ví dụ 43: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Thể tích của khối tứ diện $ABC'C$ bằng

☞ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 44: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{BN}{BB'} = x, \frac{CP}{CC'} = y$. Biết thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{2V}{3}$. Giá trị lớn nhất của xy bằng:

☞ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





Lời giải

[illegible]



C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

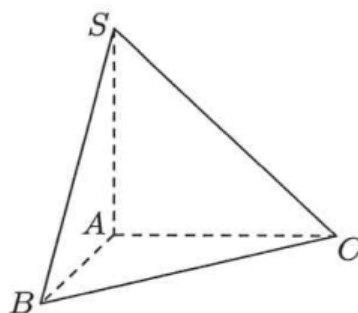
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{3}{4}a^3$. B. $V = a^3$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{1}{2}a^3$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. B. $4\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2$; SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (tham khảo hình vẽ).



Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. 12. B. 2. C. 6. D. 4.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Biết SA vuông góc với đáy, $AB = BC = 2a; AD = 4a$; góc giữa (SCD) và đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. B. $\frac{4\sqrt{6}a^3}{3}$. C. $\frac{8\sqrt{6}a^3}{15}$. D. $4\sqrt{6}a^3$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC , biết $AB = a, AC = 2a, SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.AMB$ theo a .

- A. $\frac{1}{2}a^3$. B. $\frac{1}{4}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}; AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là

- A. $4\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. C. $4a^3$. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 7: Cho hình chóp $SABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$. Tam giác SAC cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy, $mp(SBC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $SABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $2a^3$.



Câu 8: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$?

- A. $\frac{9}{2}a^3$. B. $3\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{27}{2}a^3$. D. $\frac{3}{2}a^3$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $4a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $2a^3\sqrt{3}$. B. $3a^3\sqrt{3}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $2a^3$.

Câu 11: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ biết $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a\sqrt{33}}{9}$. B. $V = \frac{a\sqrt{33}}{3}$. C. $V = \frac{a\sqrt{141}}{6}$. D. $V = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 12: Tính thể tích của khối tứ diện đều biết chiều cao tứ diện bằng a .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$.

Câu 13: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = 2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

- A. $\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Câu 14: Cho khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{42}}{6}$ và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{42}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 60° và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng a . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

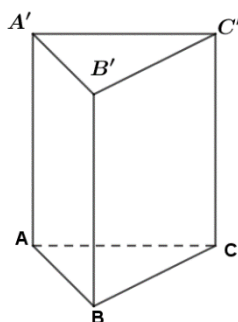
- A. $V = \frac{2a^3}{9}$. B. $V = \frac{4a^3}{9}$. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có AB , AC , AA' đôi một vuông góc với nhau. Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 3a$, tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = a^3$. B. $V = 3a^3$. C. $V = 6a^3$. D. $V = 2a^3$.



Câu 17: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho



- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

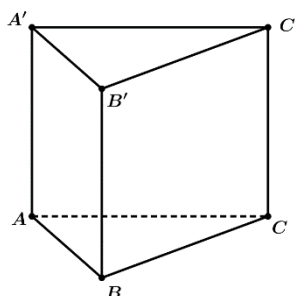
Câu 18: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

- A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a; AD = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $(A'BD)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho là:

- A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AC = AA' = 2$ (tham khảo hình vẽ)



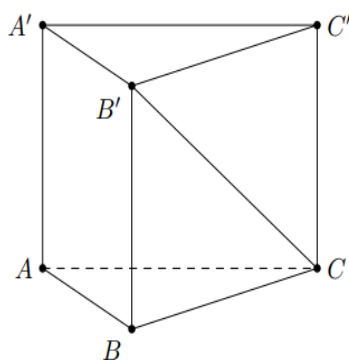
Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 2. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 4.

Câu 21: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích tam giác ACD' bằng $a^2\sqrt{3}$. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

- A. $8a^3$. B. a^3 . C. $2\sqrt{2}a^3$. D. $4\sqrt{2}a^3$.

Câu 22: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và góc giữa đường thẳng CB' và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



- A. $2a^3\sqrt{3}$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC = 2a$. Tính thể tích V của hình lập phương.

- A. $V = 8a^3$. B. $V = a^3$. C. $4\sqrt{2}a^3$. D. $2\sqrt{2}a^3$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Câu 25: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{27}{4}$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Mặt phẳng $(BB'C'C)$ tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3}{8}$. B. $V = \frac{27a^3}{32}$. C. $V = \frac{3a^3}{32}$. D. $V = \frac{9a^3}{32}$.

Câu 27: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 2a$, $BD = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với trung điểm H của OB . Đường thẳng $B'C$ tạo với mặt đáy một góc 45° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

- A. $2a^3\sqrt{7}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $3a^3\sqrt{21}$. D. $a^3\sqrt{21}$.

Câu 28: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Tam giác $A'AB$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{3a^3}{32}$. B. $V = \frac{3a^3}{16}$. C. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

Câu 29: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

- A. 2. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.



Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SC, SB . Biết góc giữa $(AHK), (ABC)$ bằng 45° . Tính thể tích khối tứ diện $ABHK$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Câu 31: Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC , mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện. Đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ là

- A. $\frac{V_2}{V_1} = 3$. B. $\frac{V_2}{V_1} = 2$. C. $\frac{V_2}{V_1} = 1$. D. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SA . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng (SBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số của thể tích phần chứa đỉnh S và thể tích phần còn lại.

- A. $\frac{5}{16}$. B. $\frac{5}{11}$. C. $\frac{16}{5}$. D. $\frac{11}{5}$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$ và diện tích tam giác SAB bằng a^2 . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SB, SD . Thể tích khối đa diện $ABCKH$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{15}}{36}a^3$. B. $\frac{\sqrt{15}}{4}a^3$. C. $\frac{\sqrt{15}}{24}a^3$. D. $\frac{\sqrt{15}}{12}a^3$.

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $36a^3$. Gọi I, J là hai điểm lần lượt thuộc BB', CC' thỏa mãn $\frac{B'I}{B'B} = \frac{C'J}{C'C} = \frac{2}{3}$ và M, N lần lượt là giao điểm của $A'I, A'J$ với mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích khối đa diện $IJCMBN$.

- A. $7a^3$. B. $12a^3$. C. $9a^3$. D. $6a^3$.

Câu 35: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A thỏa mãn $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, đồng thời $A'A, A'B, A'C$ cùng tạo với đáy một góc 60° . Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C', BC$. Tính thể tích khối tứ diện $MNAH$.

- A. $\frac{3a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

Câu 1: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- a) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
- b) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
- c) Số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .
- d) Cosin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của BC , biết $\widehat{AMS} = 60^\circ$.

- a) $SA \perp (ABCD)$.
- b) $SA = 3a$.
- c) $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
- d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{4}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$.

- a) Công thức tính thể tích hình lăng trụ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.
- b) Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.
- c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .
- d) Thể tích của khối lăng trụ bằng $2a^3\sqrt{2}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng 30° .

- a) Góc nhị diện bằng góc $\widehat{A'MA}$, với M là trung điểm của BC .
- b) Diện tích đáy của hình lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .
- d) Thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 5: Cho khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a và khoảng cách giữa hai đáy bằng $3a$.

- a) Tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.
- b) Đáy lớn của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích bằng $S_1 = a^2\sqrt{3}$.



c) Đáy nhỏ của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích bằng $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

d) Chiều cao của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ bằng $h = 3a$.

Câu 6: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và thể tích bằng $\frac{a^3}{4\sqrt{3}}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

a) H là trọng tâm của tam giác ABC .

b) $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) $SH = 2a$.

d) Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2, AD = CD = 1$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB .

a) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCD}$.

b) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{6}$.

c) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Thể tích của khối chóp $M.BCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

a) Chiều cao của khối chóp đã cho là cạnh bên SB .

b) Diện tích mặt đáy của hình chóp đã cho là $S_{ABCD} = 2a^2$

c) Thể tích của khối chóp $V_{D.SAC} = V_{B.SAD}$

d) Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{15}$

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

a) Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{CA'A}$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(B'CO)$.

c) Thể tích của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{9a^3}{4}$.

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng $A'C$. Biết (P) chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A bằng $\frac{15a^3}{8}$.



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

- Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
- Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC)
- Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$
- Cosin góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{33}$

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB = AC = a$.

Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

- Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = a^2$.
- Độ dài đường cao của lăng trụ bằng $\frac{a}{2}$.
- Thể tích khối lăng trụ là $V = \frac{a^3}{2}$.
- Thể tích khối chóp $A.A'B'C'$ là $V' = \frac{a^3}{6}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD .

- Thể tích khối chóp được xác định bởi công thức $V = Bh$
- Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng a^3 .
- Thể tích khối chóp $S.BCD$ bằng $\frac{a^3}{6}$.
- Thể tích khối chóp $G.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{9}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° .

- Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .
- Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.
- Tang của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.



d) Thể tích khối chóp $A'.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A ; $BC = 2a$; $\widehat{ABC} = 30^\circ$.
Cạnh bên của lăng trụ bằng $2a\sqrt{3}$.

a) Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$, $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC}$.

b) Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được tính theo a bằng a^3 .

c) Thể tích của khối chóp $A.BCC'B'$ bằng $2a^3$.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ACA' , M là trung điểm của BB' , N trên cạnh CC' sao cho $CN = 2NC'$. Thể tích của khối chóp $G.BCNM$ bằng $\frac{7}{9}a^3$.

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

a) Nếu $SA = a\sqrt{3}$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

b) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng a^3 thì chiều cao khối chóp đã cho bằng $2a\sqrt{3}$.

c) Nếu $SC = a\sqrt{3}$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

d) Nếu góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 30° thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$, có $AB = 193\text{ cm}$, $BC = 194\text{ cm}$, $CA = 195\text{ cm}$, hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° .

a) Gọi H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Trong tam giác ABC , kẻ HD vuông góc với AB tại D . Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBH} = 45^\circ$.

b) Diện tích đáy của hình chóp là $S_{ABC} = 16296\text{ cm}^2$.

c) Chiều cao của hình chóp là 56 cm .

d) Thể tích khối chóp đã cho là 912576 cm^3 .

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy, với $SA = \frac{a}{2}$.

a) Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.



c) Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm SB, SC . Thể tích khối chóp $A.BCQP$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 18: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° .

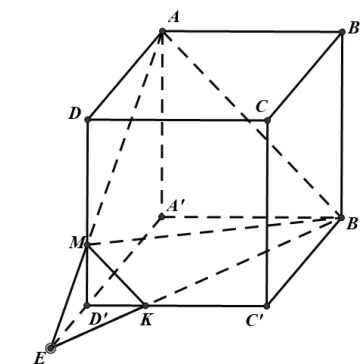
a) Diện tích đáy của hình lăng trụ đã cho là $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$.

b) Hình lăng trụ đã cho có chiều cao $h = 3\sqrt{3}$.

c) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = 27\sqrt{3}$.

d) Thể tích của tứ diện $A'AMN$ bằng $3\sqrt{3}$ với M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB', CC' .

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi M là điểm thuộc cạnh DD' sao cho $MD' = \frac{1}{3}DD'$. Mặt phẳng (AMB') cắt cạnh $C'D'$ tại K , $K = B'E \cap C'D'$ như hình vẽ sau:



a) Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$

b) Thể tích khối đa diện $D'KM.AA'B'$ là $V_{D'KM.AA'B'} = \frac{1}{27}a^3$

c) Tỉ số thể tích khối đa diện $D'KM.AA'B'$ và $ABCD.A'B'C'D'$ là $\frac{V_{AA'B'KMD'}}{V} = \frac{13}{54}$

d) Thể tích khối đa diện lồi $ABCDMKC'B'$ bằng $\frac{26}{27}a^3$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 2. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng đáy trùng trung điểm H của cạnh AB , biết góc giữa $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$.

b) Khoảng cách từ điểm H đến cạnh BC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Chiều cao hạ từ đỉnh B' xuống mặt đáy (ABC) bằng $\frac{3}{4}$.



d) Thể tích của khối lăng trụ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

a) Nếu $AB = 3a, AD = 4a, AA' = a$ thì $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 12a^3$.

b) Giả sử $AB = 3a, AD = 4a$, đường chéo BD' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° . Khi đó thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là $60\sqrt{3}a^3$.

c) Giả sử $AB = 3a, AD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích khối hộp

chữ nhật đã cho bằng $48\sqrt{3}a^3$

d) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Biết rằng đáy là hình vuông, $AA' = 2a$, khoảng cách từ G đến mặt

phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{4a}{9}$. Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng $\frac{64\sqrt{5}a^3}{5}$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng 60° .

a) Chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là SA .

b) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCA}$.

c) Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Mặt bên $(A'B'BA)$ vuông góc với mặt đáy, biết $A'AB$ là tam giác cân, góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(ABCD)$ bằng 60° .

a) Gọi $A'H$ là đường cao của tam giác cân $A'AB$. Khi đó, H là trung điểm AB .

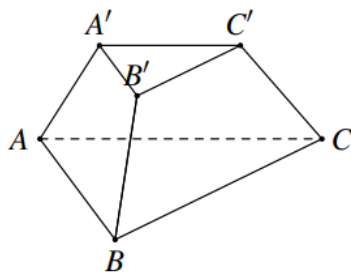
b) Chiều cao của lăng trụ là AA' .

c) Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.

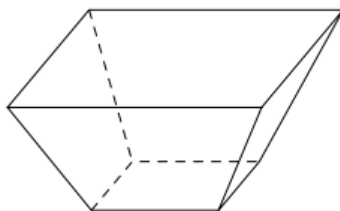
d) Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a^3\sqrt{3}$.

**E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN**

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân với $AB = 2a, AD = BC = CD = a$ mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.
- Câu 2:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{m\sqrt{3}a^3}{n\sqrt{5}}$; $m, n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.
- Câu 3:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Biết đỉnh S cách đều ba điểm A, B, D . Đường thẳng SA hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích V . Gọi P là trung điểm SC . Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại M, N . Gọi V' là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ bằng
- Câu 5:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a .
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và có thể tích bằng V . Gọi M, N, I lần lượt là các điểm nằm trên cạnh SB, SD sao cho $SM = \frac{1}{4}SB, SN = \frac{1}{2}SD$ và I là trung điểm AO . Xác định thể tích tứ diện $IMNC$ theo V .
- Câu 7:** Tính thể tích của khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a, A'B' = a$.



- Câu 8:** Tính thể tích của một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cắt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm , đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm .



- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1. Để thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất thì x bằng

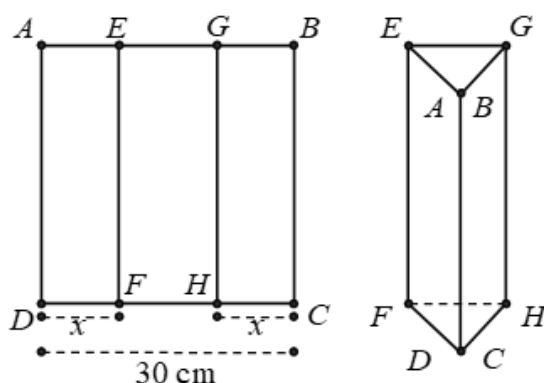


Câu 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A với đáy lớn $AD = 2a$, $BC = a$ và $AB = \frac{3a}{2}$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$.

Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Câu 11: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$ và số đo góc $\widehat{ACB}$ bằng 45° . Biết rằng ba cạnh AD, BC, AC thỏa mãn điều kiện $AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3$. Độ dài cạnh CD bằng bao nhiêu?

Câu 12: Một tấm kẽm chữ nhật $ABCD$ có $AB = 30\text{cm}$, $AD = 40\text{cm}$. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:

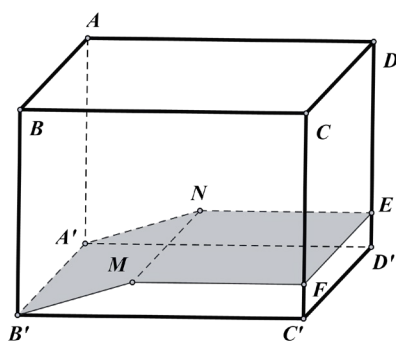
Câu 13: Một phòng học có dạng là một hình hộp chữ nhật có chiều dài là 8m , chiều rộng là 6m , thể tích là 192m^3 . Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường phía trong phòng. Biết diện tích các cửa bằng 10m^2 . Tính diện tích cần quét vôi.

Câu 14: Một ống khói có cấu trúc gồm một khối chóp cụt tứ giác đều có thể tích V_1 và một khối hộp chữ nhật có thể tích V_2 ghép lại với nhau như hình bên dưới. Cho biết bản vẽ hình chiếu của ống khói với phương chiếu trùng với phương của một cạnh đáy khối chóp cụt, hãy tính tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.





Câu 15: Một bể bơi ban đầu có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ sau đó người ta làm lại mặt đáy như hình vẽ.



Biết rằng $A'B'MN$ và $MNEF$ là các hình chữ nhật, $(MNEF) \parallel (A'B'C'D')$, $AB = 10$ m, $AD = 30$ m, $A'A = 20$ m, $MF = DE = 17$ m. Tỉ số thể tích của bể sau khi làm lại mặt đáy với thể tích của bể lúc ban đầu gần nhất với số nào dưới đây?

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ là



QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

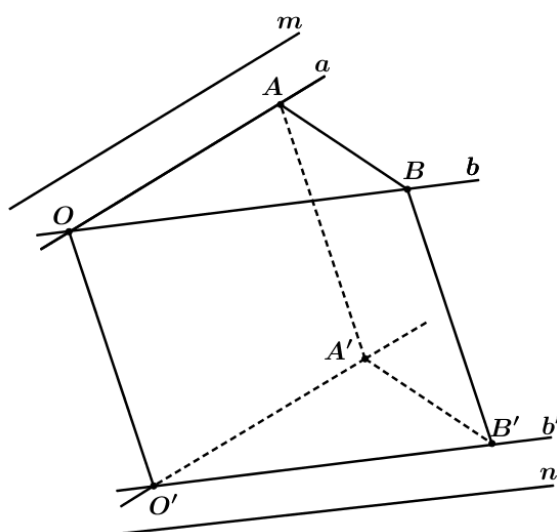
22

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Góc giữa hai đường thẳng



Góc giữa hai đường thẳng m, n trong không gian, kí hiệu (m, n) , là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n .

Chú ý:

Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b . Khi đó $(a, b) = (a, b')$.

Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.

2 Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90° .

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Xác định góc giữa hai đường thẳng**

Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

Bước 1: Sử dụng tính chất sau: $\begin{cases} (d_1, d_2) = \alpha \\ d_2 // d_3 \end{cases} \Rightarrow (d_1, d_2) = (d_1, d_3) = \alpha$

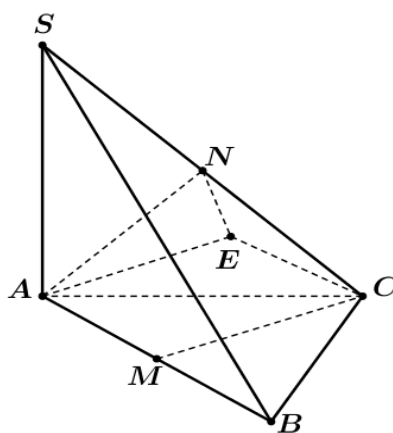
Bước 2: Áp dụng định lý cosin trong tam giác để xác định góc.

Để tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian ta cần nhớ các công thức sau:

- Định lý hàm số cosin trong tam giác ABC : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$
- Tương tự ta có: $\cos \widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC}$ và $\cos \widehat{ACB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot CB}$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm AB và SC . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AN và CM .

Lời giải



Dựng hình bình hành $AMCE$ suy ra $AM = CE = \frac{a}{2}$.

Khi đó $AE // CM \Rightarrow (\widehat{AN; CM}) = (\widehat{AN; AE}) = \varphi$.

Mặt khác $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AN = \frac{SC}{2} = a \Leftarrow AE = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $\triangle ABC$ đều nên $CM \perp AM \Rightarrow AMCE$ là hình chữ nhật.

Khi đó $CE \perp AE$ mà $CE \perp SA \Rightarrow CE \perp (SAE) \Rightarrow CE \perp SE$.

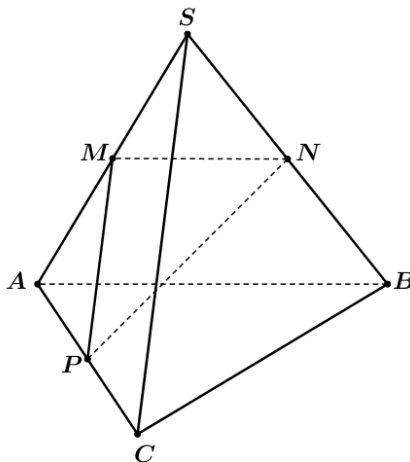
Tam giác $\triangle SEC$ vuông tại E có đường trung tuyến $EN = \frac{1}{2}SC = a$.

Ta có: $\cos \widehat{NAE} = \frac{AN^2 + AE^2 - NE^2}{2 \cdot AN \cdot AE} = \frac{\sqrt{3}}{4} > 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB và AC .

Khi đó $\begin{cases} MP \parallel SC \\ MN \parallel AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SC; AB)} = \widehat{(MP; MN)}$. Khi đó ta có: $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; $MP = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}$.

Mặt khác ΔSAC vuông tại $S \Rightarrow SP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

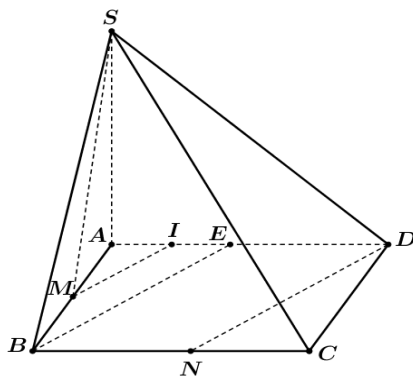
$$BP^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } PN^2 = \frac{PS^2 + PB^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow NP = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \widehat{NMP} = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2 \cdot MN \cdot MP} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120^\circ \Rightarrow \varphi = \widehat{(SC; AB)} = 60^\circ.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm AB và N là trung điểm BC . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM và DN .

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$. Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Gọi E là trung điểm của AD và I là trung điểm AE .

Dễ thấy $BNDE$ là hình bình hành và MI là đường trung bình trong tam giác ABE .



Khi đó: $DN \parallel BE \parallel MI$ nên ta có: $AM = a$; $AI = \frac{AE}{2} = \frac{a}{2}$.

Mặt khác: $SM^2 = SA^2 + AM^2 = 2a^2$; $SI^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow MI^2 = AI^2 + AM^2 = \frac{5a^2}{4}$.

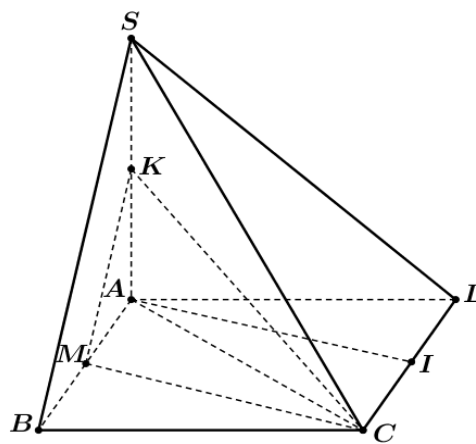
Do vậy $\cos \widehat{SMI} = \frac{SM^2 + MI^2 - SI^2}{2 \cdot SM \cdot MI} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \cos(\widehat{SM}; \widehat{DN})$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$; $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

a) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng BC và SD .

b) Gọi I là trung điểm của CD . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI .

Lời giải



a) Do $BC \parallel AD \Rightarrow (\widehat{SD}; \widehat{BC}) = (\widehat{SD}; \widehat{AD}) = \widehat{SDA}$

ΔSAD vuông tại $A \Rightarrow \cos \widehat{SDA} = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + SA^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AB và SA thì MK là đường trung bình của tam giác SAB . Khi đó $MK \parallel SB$, mặt khác $MC \parallel AI$.

Suy ra $(\widehat{SB}; \widehat{AI}) = (\widehat{MK}; \widehat{CM})$.

Ta có: $MK = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{3a}{2}$; $KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = 2a$.

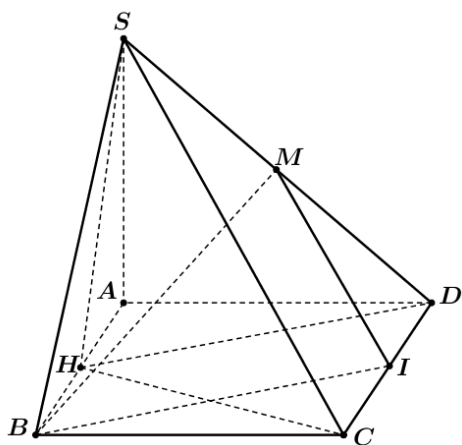
Khi đó $\cos \widehat{KMC} = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2 \cdot KM \cdot MC} = -\frac{1}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos(\widehat{SB}; \widehat{AI}) = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính cosin của góc giữa

a) SD và BC .

b) DH và SC với H là chân đường cao hạ từ S xuống mặt đáy $(ABCD)$.

Lời giải



a) Do $AB = BC = a, \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh a .

Gọi H là trung điểm của AB , do tam giác SAB tại S nên $SH \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$

ΔABC đều nên $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, (\widehat{SC; (ABC)}) = \widehat{SCH} = 30^\circ$

Ta có: $SH = HC \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Do $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow HD = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH \cdot AD \cos 120^\circ} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $AD \parallel BC \Rightarrow (\widehat{BC; SD}) = (\widehat{AD; SD}), \cos \widehat{SDA} = \frac{DS^2 + DA^2 - SA^2}{2 \cdot DS \cdot DA} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$.

Do vậy $\cos(\widehat{BC; SD}) = \frac{5\sqrt{2}}{8}$.

b) Gọi I là trung điểm $CD \Rightarrow \begin{cases} DH \parallel BI \\ DH = BI = \frac{a\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

Gọi M là trung điểm $SD \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SC \\ MI = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}$. Lại có $BD = a\sqrt{3}; SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $BM^2 = \frac{BD^2 + BS^2}{2} - \frac{SD^2}{4} = \frac{5}{4}a^2 \Rightarrow \cos \widehat{MIB} = \frac{MI^2 + IB^2 - MB^2}{2 \cdot IM \cdot IB} = \frac{3\sqrt{17}}{14}$.

Suy ra $\cos(\widehat{DH; SC}) = \frac{3\sqrt{17}}{14}$.

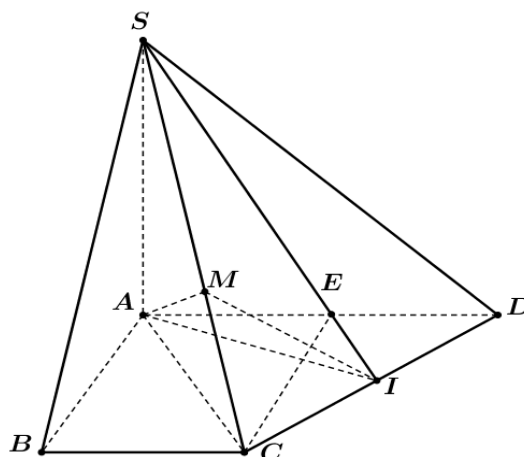
Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc giữa:

a) BC và SD .



b) AI và SD với I là trung điểm CD

Lời giải



a) Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$. Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC; (ABC)}) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Khi đó $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$. Do $AD \parallel BC \Rightarrow (\widehat{BC; SD}) = (\widehat{AD; SD})$.

Mặt khác $\cos \widehat{ADS} = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{6a^2 + 4a^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \cos(\widehat{BC; SD})$.

b) Gọi M là trung điểm $SC \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SD \\ MI = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}, AI = \frac{a\sqrt{10}}{2}, AM = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}. \end{cases}$

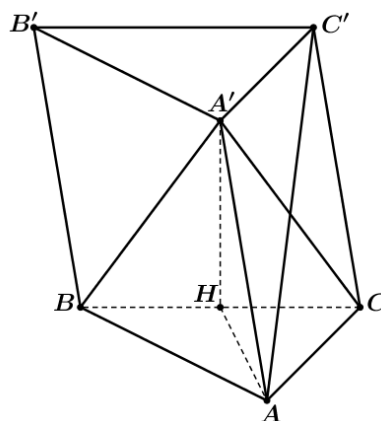
Khi đó $\cos \widehat{MIA} = \frac{IA^2 + IM^2 - AM^2}{2 \cdot IA \cdot IM} = \frac{3}{5}$.

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của điểm A' xuống mặt đáy (ABC) trùng với trung điểm của BC . Biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60° .

a) Tính tan góc tạo bởi $B'C'$ và $A'C$.

b) Cosin góc tạo bởi CC' và AB .

Lời giải



a) Gọi H là trung điểm BC . Ta có: $BC \parallel B'C' \Rightarrow (\widehat{B'C'; A'C}) = (\widehat{BC; A'C}) = \widehat{A'CH}$.

Mặt khác $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{AA'; (ABC)}) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$.



Khi đó: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = AH \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

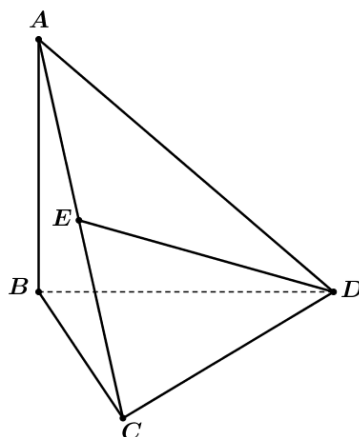
Xét tam giác vuông $A'HC$ ta có $\tan \widehat{A'CH} = \frac{A'H}{HC} = 3$. Vậy $\tan(\widehat{B'C'}; A'C) = 3$.

b) Do $CC' \parallel AA' \Rightarrow (\widehat{CC'}; AB) = (\widehat{AA'}; AB)$. Ta có: $A'A = \sqrt{A'H^2 + HA^2} = a\sqrt{3}$

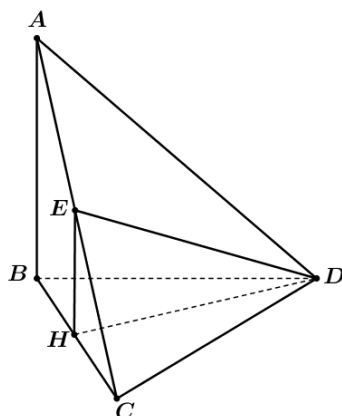
$A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{A'AB} = \frac{AA'^2 + AB^2 - A'B^2}{2 \cdot AA' \cdot AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\cos(\widehat{CC'}; AB) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 8: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DE .



Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC khi đó: $EH \parallel AB \Rightarrow EH \perp (BCD) \Rightarrow EH \perp HD$.

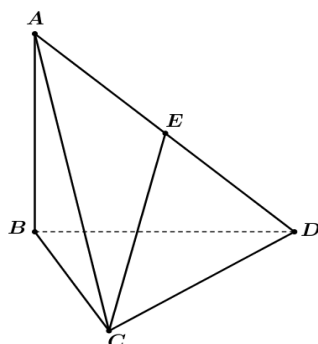
Suy ra $(\widehat{AB; DE}) = (\widehat{EH; DE})$. Ta có: $HE = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow DH = \sqrt{DC^2 + CH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ nên $\tan \widehat{DEH} = \frac{DH}{EH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{DEH} = 60^\circ$.

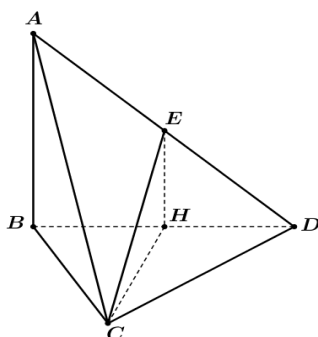
Vậy $(\widehat{AB; DE}) = (\widehat{EH; DE}) = \widehat{DEH} = 60^\circ$.



Ví dụ 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CE .



Lời giải



Gọi H là trung điểm $BD \Rightarrow EH \parallel AB \Rightarrow EH \perp (BCD)$

Vậy $EH \perp CH$, ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

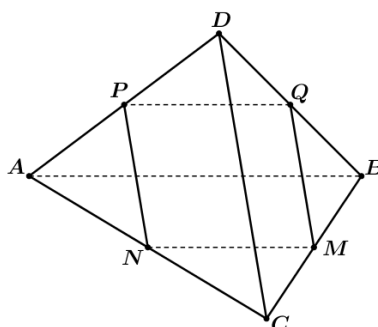
Suy ra $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow CH = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Lại có $EH = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = CH \Rightarrow \triangle EHC$ vuông cân tại H

Do đó $\widehat{(AB; CE)} = \widehat{(EH; CE)} = \widehat{CEH} = 45^\circ$.

Ví dụ 10: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt AC, AD, BD lần lượt tại N, P, Q . Diện tích $MNPQ$ bằng

Lời giải





Do $MN // AB$, theo định lý Talet ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{AB}{3} = 2$

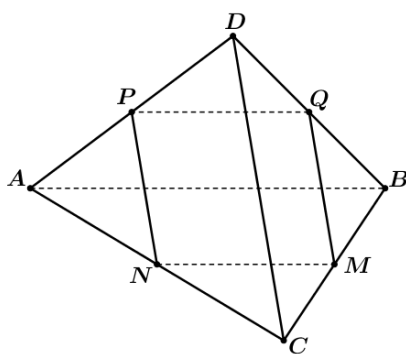
Tương tự $MQ // CD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MQ = \frac{2}{3}CD = 2$

Lại có $MN // AB$, $MQ // CD \Rightarrow \widehat{(MN;MQ)} = \widehat{(AB;CD)} = 60^\circ$

Khi đó $S_{MNPQ} = 2S_{MNQ} = MN.MQ \sin \widehat{(MN;MQ)} = 2.2.\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 11: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD . Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là

Lời giải



Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt AC, AD, BD lần lượt tại N, P, Q .

Do $MN // AB$, theo định lý Talet ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2AB}{3} = \frac{8}{3}$

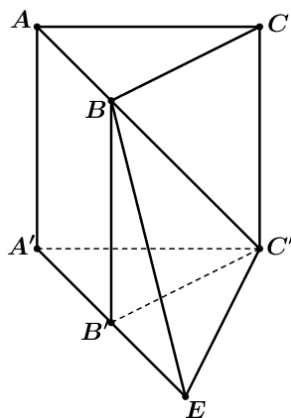
Tương tự $MQ // CD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MQ = \frac{1}{3}CD = 2$

Lại có $MN // AB$, $MQ // CD \Rightarrow \widehat{(MN;MQ)} = \widehat{(AB;CD)} = 90^\circ$

Khi đó $S_{MNPQ} = 2S_{MNQ} = MN.MQ \sin \widehat{(MN;MQ)} = \frac{8}{3}.2.\sin 90^\circ = \frac{16}{3}$.

Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

Lời giải





Gọi E là điểm thuộc $A'B'$ sao cho $B'A' = B'E$

Ta có $ABEB'$ là hình bình hành nên $AB' // BE$

Lại có $A'E = 2a$, $B'C' = \frac{1}{2}A'E \Rightarrow \triangle EA'C'$ vuông tại C'

Khi đó $C'E = \sqrt{A'E^2 - A'C'^2} = a\sqrt{3}$, $BE = AB' = a\sqrt{3}$ $BC' = \sqrt{BB'^2 + C'B'^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \triangle BEC'$ là tam giác đều.

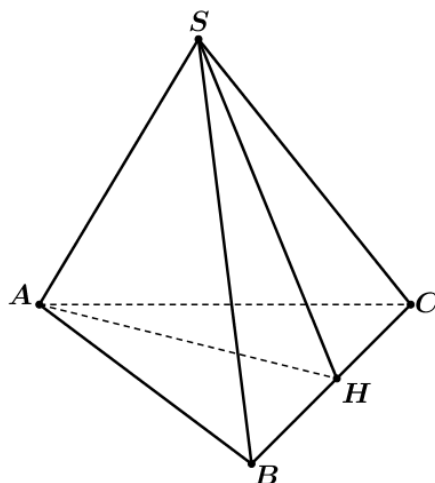
Do đó $(\widehat{AB'; BC'}) = (\widehat{BE; BC'}) = \widehat{EBC'} = 60^\circ$.

**Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

Mối quan hệ giữa quan hệ song song và vuông góc: $\begin{cases} a // b \\ c \perp a \end{cases} \longrightarrow c \perp b$

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Chứng minh SA vuông góc với BC .

Lời giải



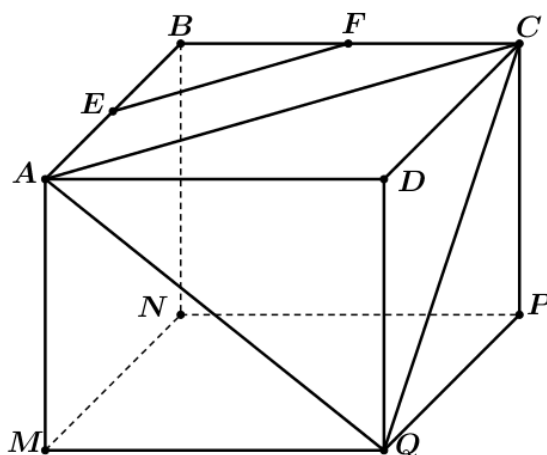
Vì $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ nên $\triangle SAC = \triangle SAB$, suy ra $SB = SC$, nên hai tam giác ABC và SBC là tam giác cân. Gọi H là trung điểm BC , ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAH) \perp BC$ nên $SA \perp BC \Rightarrow (SA, BC) = 90^\circ$. Vậy $SA \perp BC$

Ví dụ 14: Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ có sáu mặt đều là các hình vuông. Gọi E , F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

a) Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

b) Tính góc giữa EF và AQ .

Lời giải



a) Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

Ta thấy: EF là đường trung bình của $\triangle ABC$

$\Rightarrow EF // AC$ mà: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp AA' \end{cases}$ nên $EF \perp BD, EF \perp AM$



b) Tính góc giữa EF và AQ .

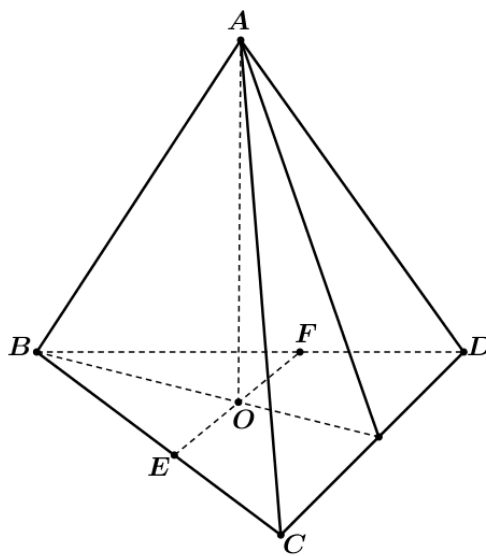
Ta có: $EF \parallel AC \Rightarrow (EF, AQ) = (AC, AQ) = \widehat{CAQ}$.

Nhận thấy: $AC = AQ = CQ = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \Delta ACQ$ đều nên $\widehat{CAQ} = 60^\circ \Rightarrow (EF, AQ) = \widehat{CAQ} = 60^\circ$.

Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

Lời giải



Qua O vẽ đường thẳng song song với CD cắt BC tại E và cắt BD tại F .

Ta cần chứng minh $AO \perp EF$. Ta có $\widehat{AOE} = (\widehat{AO, CD})$.

Vì $EF \parallel CD$ nên BEF là tam giác đều nên $BE = BF$ và $OE = OF$. (1) Xét hai tam giác ABE và ABF , ta có

$$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ BE = BF \\ \widehat{ABE} = \widehat{ABF} \end{cases} \text{ nên } \Delta ABE = \Delta ABF \text{ (c - g - c)}. \text{ Suy ra } AE = AF. \quad (2)$$

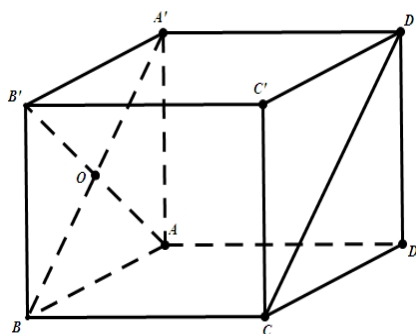
Từ (1) và (2), suy ra tam giác AEF cân tại A có AO là trung tuyến nên cũng là đường cao.

Do đó $\widehat{AOE} = 90^\circ$. Vậy $AO \perp CD$.

**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = \sqrt{2}$, $AA' = 2$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB' và CD' .

Lời giải



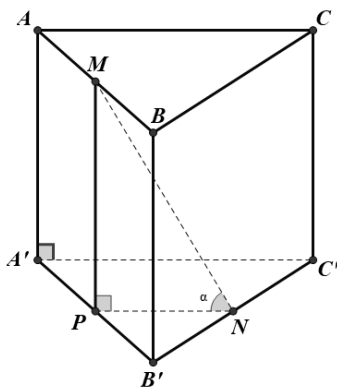
Ta có: $CD' \parallel A'B$ nên $(AB', CD') = (AB', A'B)$ và gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$.

$$\text{Ta có: } OA = OB = \frac{1}{2}AB' = \frac{1}{2}\sqrt{2+4} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{\frac{6}{4} + \frac{6}{4} - 2}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } \cos(AB', CD') = \frac{1}{3}.$$

Câu 2: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, B'C'$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AC, MN . Tính $\tan \alpha$.

Lời giải



Gọi P là trung điểm $A'B'$ khi đó ta có $AC \parallel PN$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng AC, MN chính là góc giữa đường thẳng MN, PN .

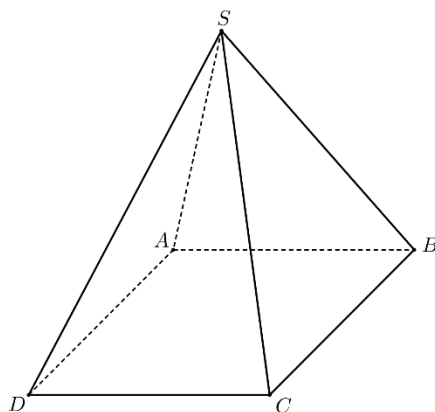
$$\text{Tức là } (\widehat{AC, MN}) = (\widehat{MN, PN}) = \alpha.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } MPN \text{ có: } MP = AA' = a, PN = \frac{a}{2} \text{ suy ra } MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan \widehat{MNP} = \frac{MP}{PN} = 2.$$

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CD

Lời giải



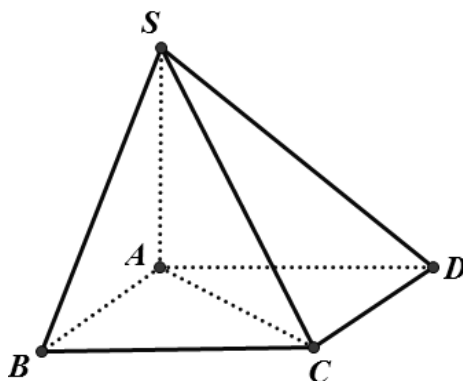
Ta có $CD \parallel AB$ do đó góc giữa SA và CD bằng góc giữa SA và AB bằng góc $\widehat{SAB}$

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $SA = AB$ nên $\triangle SAB$ là tam giác đều, do đó $\widehat{SAB} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SA và CD bằng 60° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng

Lời giải



Góc giữa đường thẳng SC và AB bằng góc giữa hai đường thẳng SC và CD .

Mặt khác: $CD \perp SA, CD \perp AD$ nên $CD \perp SD$ hay tam giác SCD vuông tại D .

$$\cos \widehat{SCD} = \frac{CD}{SC} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 2a^2 + 4a^2}} = \frac{1}{2}.$$

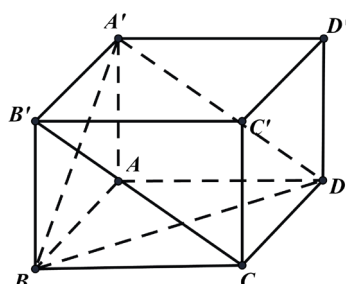
Suy ra góc $SCD = 60^\circ$ nên góc giữa đường thẳng SC và AB bằng 60° .

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng

a) $A'B$ và $B'C$

b) AC và $A'D$.

Lời giải



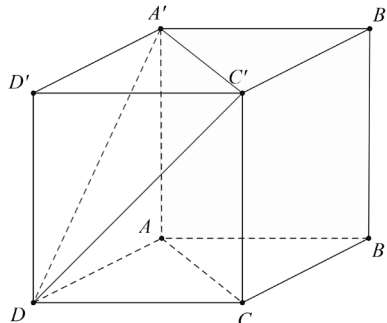


Theo tính chất hình lập phương ta có: $B'C // A'D$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là: góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $A'D$.

Mà tam giác $A'BD$ là tam giác đều nên: $(A'B, B'C) = (A'B, A'D) = 60^\circ$.

b) AC và $A'D$.



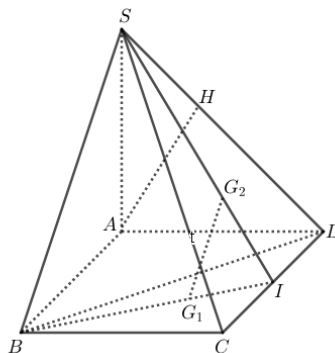
Do $AC // A'C'$ nên góc giữa AC và $A'D$ bằng góc giữa $A'C'$ và $A'D$.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên tam giác $A'C'D$ là tam giác đều.

Suy ra $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'} = 60^\circ$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD . Cho $SA = a\sqrt{3}$; $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm $\triangle BCD$ và $\triangle SCD$. Tính góc giữa hai đường thẳng CD và G_1G_2 .

Lời giải



Gọi I là trung điểm của CD .

$$\text{Trong } \triangle SBI \text{ ta có: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{IG_1}{IB} = \frac{1}{3} \\ \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{IG_1}{IB} = \frac{IG_2}{IS} \Rightarrow G_1G_2 // SB.$$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $CD // AB$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng CD và G_1G_2 là góc giữa hai đường thẳng AB và SB .

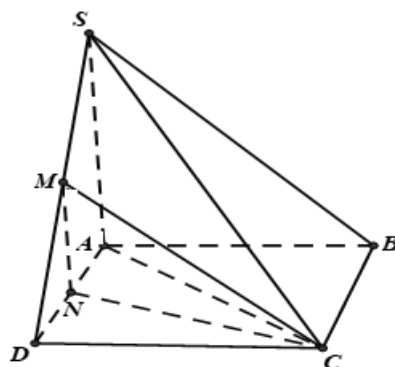
Vì $\triangle SAB$ vuông tại A nên góc giữa hai đường thẳng AB và SB là $\widehat{SBA}$.



$$\text{Suy ra } \tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB=2a$, $BC=a\sqrt{2}$, $SA=a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm SD . Tính $\tan \alpha$ với α góc giữa hai đường thẳng SA và CM .

Lời giải



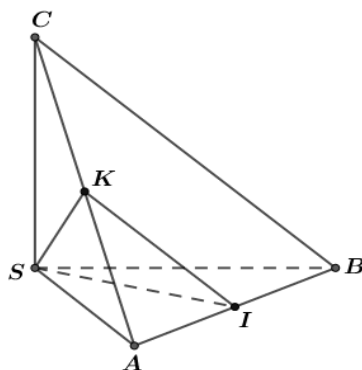
Gọi N là trung điểm của AD , khi đó $MN \parallel SA$ nên $(SA, CM) = (MN, CM) = \widehat{CMN} = \alpha$.

$$\text{Ta có } MN = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}, \quad CN = \sqrt{DN^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (2a)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } MNC \text{ vuông tại } N \text{ nên ta có } \tan \alpha = \frac{NC}{MN} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Câu 8: Hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC$. Gọi I là trung điểm của AB . Tính góc giữa SI và BC .

Lời giải



Gọi K là trung điểm của AC . Khi đó $(SI, BC) = (SI, KI) = \widehat{SIK}$.

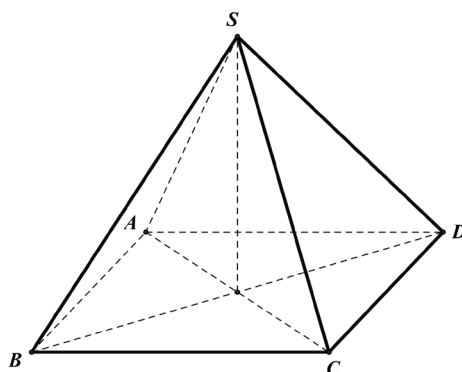
$$\text{Ta có } AB = BC = CA \Rightarrow SI = IK = SK$$

Tam giác SIK là tam giác đều nên $\widehat{SIK} = 60^\circ$.



Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

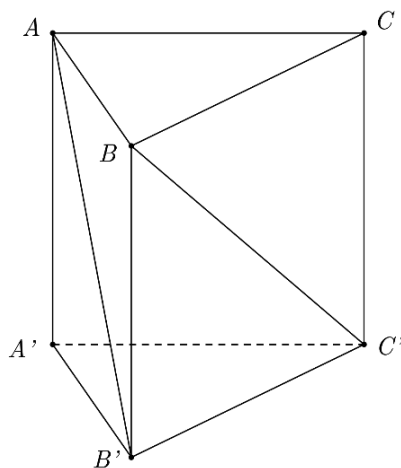
Lời giải



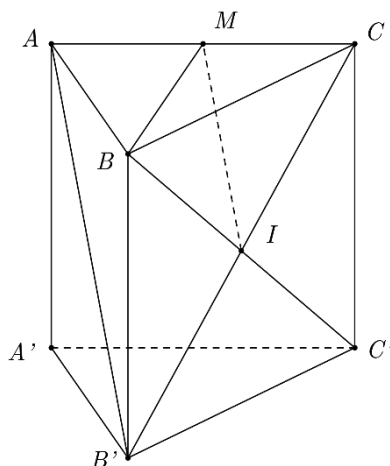
Do $AB \parallel CD$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng góc giữa hai đường thẳng CD và SC .

Xét tam giác SCD ta có $CD = 2a$, $SC = a\sqrt{2}$, $SD = a\sqrt{2}$ thỏa mãn $SC^2 + SD^2 = CD^2$ nên tam giác SCD vuông tại S . Vậy góc $\widehat{SCD} = 45^\circ$ hay góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng 45° .

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên có độ dài $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' .



Lời giải





Gọi I là giao điểm của BC' và $B'C$ khi đó I là trung điểm của hai đường trên, gọi M là trung điểm của AC .

Ta có $IM \parallel AB'$ nên $(AB'; BC') = (IM; BC')$.

$$\text{Ta có } BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; IM = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; BI = \frac{BC'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

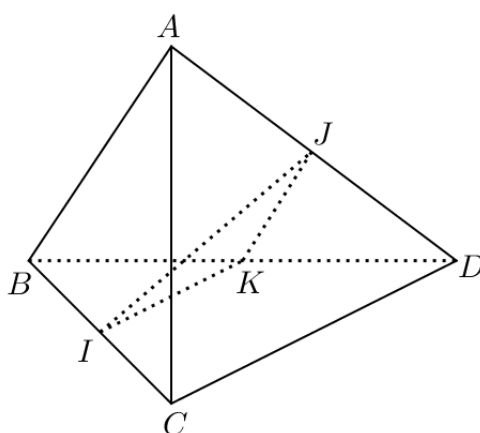
Do đó $BM = IM = BI$ nên tam giác BIM đều, suy ra $\widehat{BIM} = 60^\circ$.

Vậy $(AB'; BC') = (IM; BC') = 60^\circ$.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD).

Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

Lời giải



Gọi K là trung điểm của BD . Khi đó IK song song với CD và JK song song với AB .

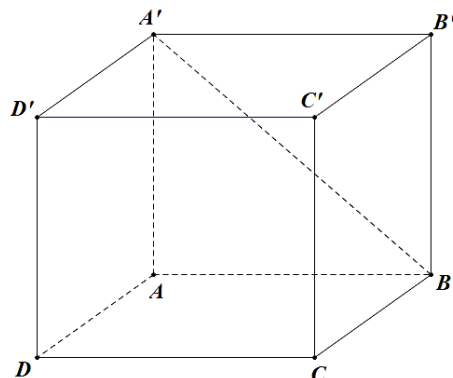
$$\text{Khi đó } (\widehat{AB, CD}) = (\widehat{KI, KJ}) = \begin{cases} \widehat{IKJ} \\ 180^\circ - \widehat{IKJ} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } KI = KJ = \frac{a}{2} \Rightarrow \cos \widehat{IKJ} = \frac{KI^2 + KJ^2 - IJ^2}{2KI \cdot KJ} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{IKJ} = 120^\circ \Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = 60^\circ.$$

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

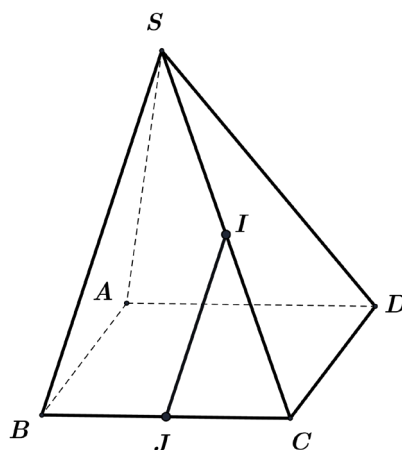
- Câu 1:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng
- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải**Chọn C**

Ta có $AB \parallel CD$ nên $(\widehat{BA', CD}) = (\widehat{BA', AB})$.

Vì $ABB'A'$ là hình vuông nên $(\widehat{BA', AB}) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$.

- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:
- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

Lời giải**Chọn C**

Theo giả thiết ta có IJ là đường trung bình của $\triangle SBC$ nên $IJ \parallel SB$.

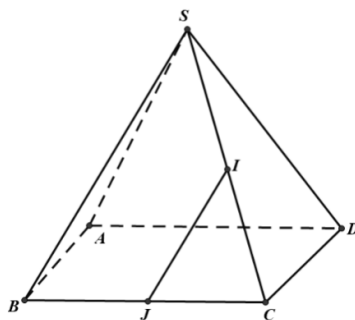
Vì $IJ \parallel SB$ và $CD \parallel AB$ nên $(IJ, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$ (Do $\triangle SAB$ đều).

- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Góc giữa hai đường thẳng IJ và SC bằng
- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Lời giải



Chọn A



Dễ thấy $\triangle SBC$ là tam giác đều. Do $IJ \parallel SB$ nên $(IJ, SC) = (SB, SC) = \widehat{BSC} = 60^\circ$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng

A. 30° .

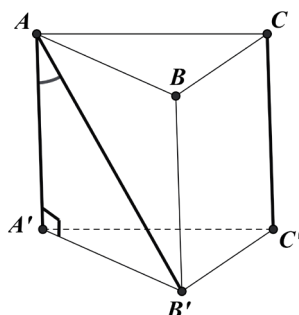
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Vì $AA' \parallel CC'$ nên góc giữa CC' và AB' bằng góc giữa AA' và AB' và bằng góc $\widehat{A'AB'}$

Với $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$ thì $\tan \widehat{A'AB'} = \frac{A'B'}{AA'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'AB'} = 30^\circ$

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và CD bằng

A. 30° .

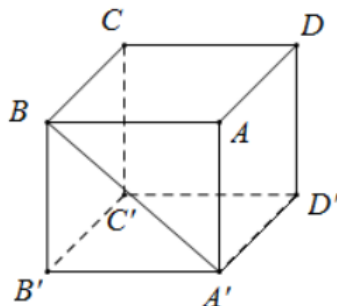
B. 90° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



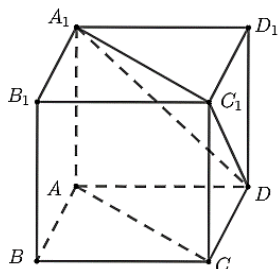
Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow (A'B; CD) = (A'B; AB) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$.



- Câu 6:** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA_1 bằng
- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 120° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC \parallel A_1C_1$, do đó góc giữa $(AC, DA_1) = (A_1C_1, DA_1)$, bằng góc DA_1C_1 .

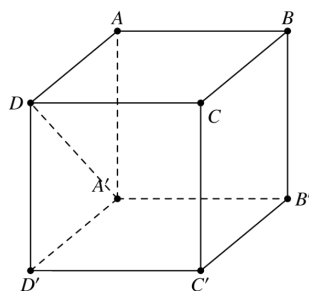
Do DA_1, A_1C_1, DC_1 là các đường chéo hình vuông nên bằng nhau. Vậy $\triangle DA_1C_1$ đều,

Vậy góc DA_1C_1 bằng 60° .

- Câu 7:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'C'$ bằng
- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Lời giải

Chọn D

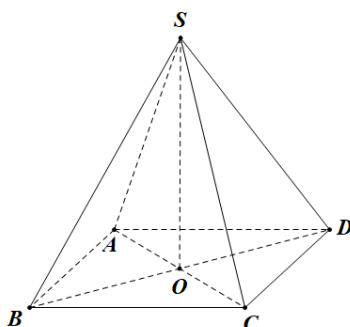


Vì $B'C' \parallel A'D'$ nên $(A'D, B'C') = (A'D, A'D') = \widehat{DA'D'} = 45^\circ$.

- Câu 8:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng
- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn C

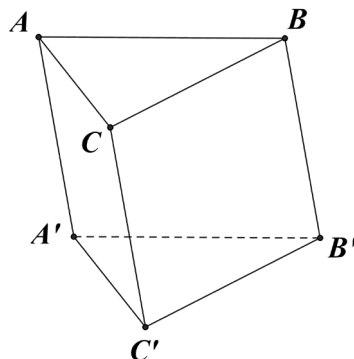




Vì $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{(SA, CD)} = \widehat{(SA, AB)}$.

Tam giác SAB đều cạnh $a \Rightarrow \widehat{SAB} = 60^\circ$. Vậy $\widehat{(SA, CD)} = 60^\circ$.

Câu 9: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình vẽ)



Góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B

Ta có tam giác ABC là tam giác đều suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Lại có $CA \parallel C'A' \Rightarrow \widehat{(AB, C'A')} = \widehat{(AB, CA)} = \widehat{BAC} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng 60° .

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' .

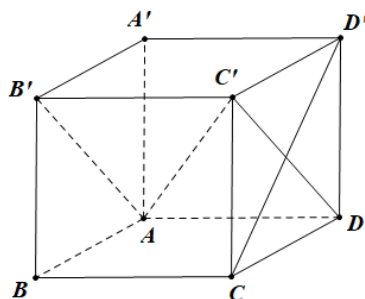
A. 45° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Chọn C



Ta có $CD' \perp C'D$ (tính chất đường chéo hình vuông), $CD' \perp C'B'$ (tính chất hình lập phương).

Suy ra $CD' \perp (AB'C'D) \Rightarrow CD' \perp AC'$. Vậy góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' bằng 90° .

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng a . Góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng

A. 90° .

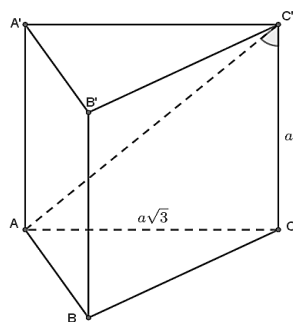
B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $BB' \parallel CC' \Rightarrow \widehat{(BB', AC')} = \widehat{(CC', AC')} = \widehat{AC'C}$.

Khi đó $\triangle ACC'$ vuông tại C nên $\tan \widehat{AC'C} = \frac{AC}{CC'} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AC'C} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng 60° .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc $\widehat{(IJ, CD)}$ bằng

A. 90° .

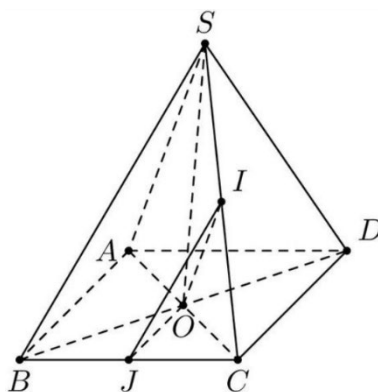
B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Suy ra OJ là đường trung bình trong tam giác $BCD \Rightarrow \begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Vì $CD \parallel OJ \Rightarrow \widehat{(IJ, CD)} = \widehat{(IJ, OJ)}$.

Xét tam giác IOJ có $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle IOJ \text{ đều.}$

Vậy $\widehat{(IJ, CD)} = \widehat{(IJ, OJ)} = \widehat{IJO} = 60^\circ$.



Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và đường thẳng $B'C$.

A. 60° .

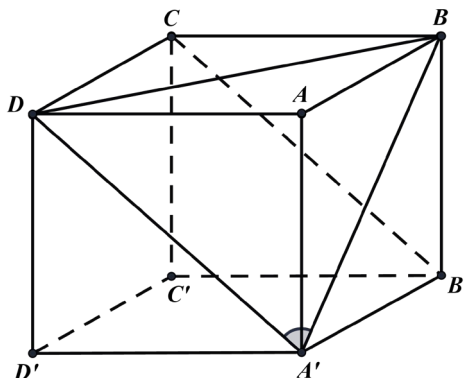
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Xét $\triangle DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\triangle DA'B$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{DA'B} = 60^\circ$.

Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow (\widehat{A'B; B'C}) = (\widehat{A'B; A'D}) = \widehat{DA'B} = 60^\circ$.

Câu 14: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC . Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và CD .

A. 30° .

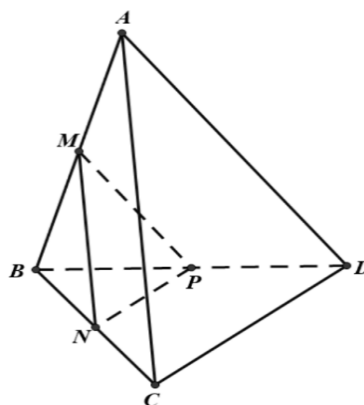
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của BD .

Ta có MN, NP, MP lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC, BCD, ABD .

Do đó: $MN \parallel AC, MN = \frac{1}{2}AC$

$NP \parallel CD, NP = \frac{1}{2}CD$.

$MP \parallel AD, MP = \frac{1}{2}AD$.

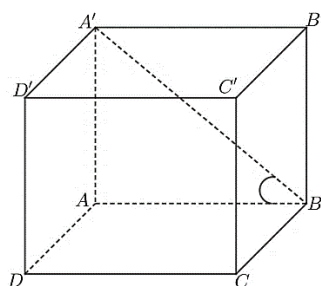
Suy ra $ABCD$ là tứ diện đều $\Rightarrow AC = CD = AD \Rightarrow MN = NP = MP$ nên tam giác MNP là tam giác đều nên $(\widehat{MN, CD}) = (\widehat{MN, NP}) = \widehat{MNP} = 60^\circ$.



- Câu 15:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng
- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải

Chọn B

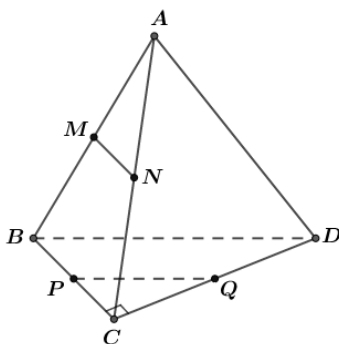


Ta có: $AB \parallel CD$ (do $ABCD$ là hình vuông) $\Rightarrow (\widehat{BA', CD}) = (\widehat{BA', AB}) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$.

- Câu 16:** Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C . Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD . Góc giữa MN và PQ bằng
- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 0° .

Lời giải

Chọn A

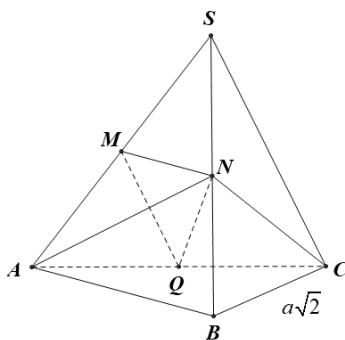


Do MN song song BC và PQ song song BD nên góc giữa MN và PQ bằng góc giữa BC và BD và bằng góc $\widehat{CBD} = 45^\circ$ (do tam giác BCD vuông cân tại C).

- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng
- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A





Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC .

Mặt khác, ta có $\begin{cases} MN // AB \\ MQ // SC \end{cases} \Rightarrow (\widehat{AB, SC}) = (\widehat{MN, MQ})$.

$$\text{Ta có } AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}; NC = \sqrt{\frac{SC^2 + BC^2}{2} - \frac{SB^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } NAC \text{ có } NQ = \sqrt{\frac{NA^2 + NC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } MNQ \text{ có } \cos \widehat{NMQ} = \frac{MN^2 + MQ^2 - NQ^2}{2MN \cdot MQ} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{NMQ} = 120^\circ \Rightarrow (\widehat{MN, MQ}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a , $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

góc giữa hai đường thẳng AB và SD là

A. 120° .

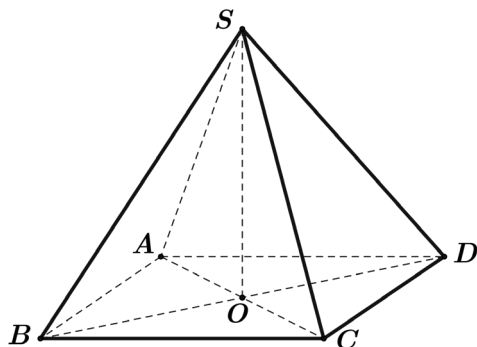
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B

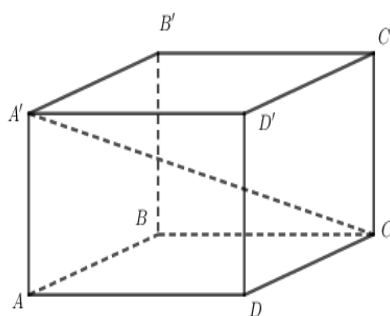


$$\text{Ta có: } AB // CD \Rightarrow (\widehat{AB, SD}) = (\widehat{CD, SD}); OD = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = a \Rightarrow SD = SC = CD = a \Rightarrow \Delta SCD \text{ đều} \Rightarrow \widehat{SDC} = 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } (\widehat{AB, SD}) = (\widehat{CD, SD}) = \widehat{SDC} = 60^\circ.$$

Câu 19: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa $A'C$ và DD' .



A. 90° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

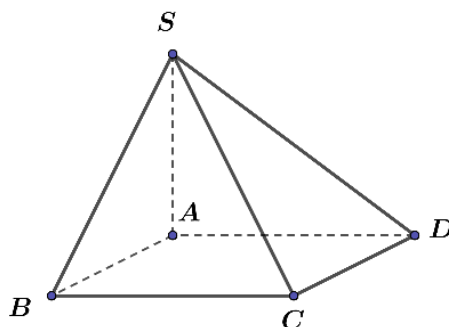
Chọn C

Vì $AA'D'D$ là chữ nhật nên $DD' \parallel AA' \Rightarrow (A'C, DD') = (A'C, AA') = \widehat{AA'C}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó: $\tan(\widehat{AA'C}) = \frac{AC}{AA'} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AA'C} = 60^\circ$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $AC = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ bên).



Góc giữa hai đường thẳng BC và SD

A. 90° .

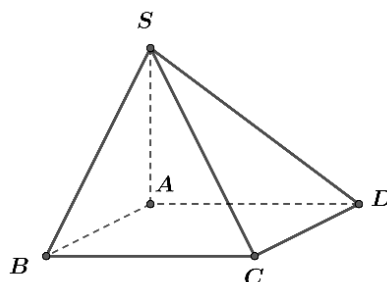
B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



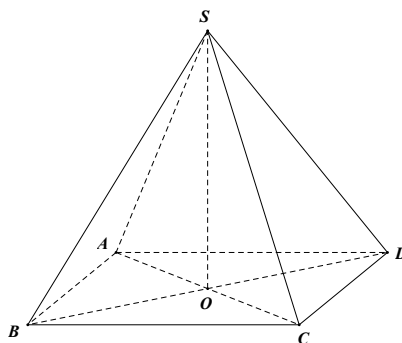
Vì $AD \parallel BC$ nên $(\widehat{BC; SD}) = (\widehat{AD; SD}) = \widehat{SDA}$ ($\widehat{SDA}$ nhọn vì $\triangle SDA$ vuông tại A).

$ABCD$ là hình vuông có đường chéo $AC = 2a \Rightarrow AD = a\sqrt{2}$



Tam giác vuông SDA có $SA = AD = a\sqrt{2}$, nên tam giác này vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{SDA} = 45^\circ$.
 Vậy $(\widehat{BC;SD}) = 45^\circ$.

Câu 21: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a



Góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

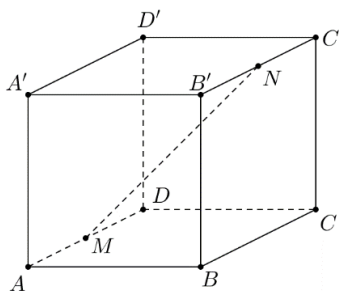
Chọn D

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $S.ABCD$ là chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$. Mà $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$
 $\Rightarrow BD \perp SC$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng 90° .

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và $B'C'$ (tham khảo hình bên dưới).



Góc giữa hai đường thẳng MN và AA' bằng

A. 90° .

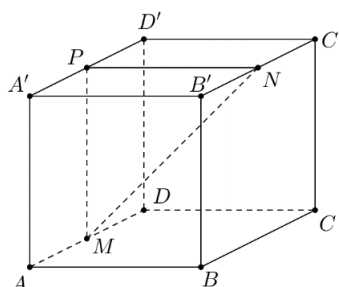
B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

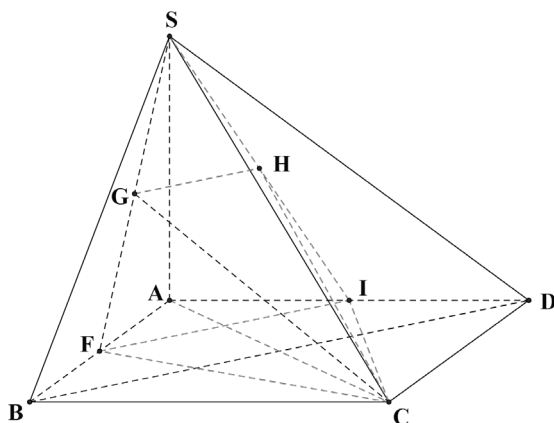
Chọn C



Ta có $\triangle MNP$ vuông cân tại P . Suy ra $(MN, AA') = (MN, MP) = \widehat{NMP} = 45^\circ$

A. $\frac{\sqrt{82}}{41}$. B. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. C. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. D. $\frac{\sqrt{82}}{82}$.

Chọn D



Nên $GH \parallel BD$ suy ra $(CG; BD) = (CG; GH)$.

$$\text{Ta có } CI = \sqrt{CD^2 + DI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow CF = CI = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$SF = SI = \sqrt{SA^2 + AF^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2};$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Khi đó } CG^2 = \frac{CF^2 + CS^2}{2} - \frac{SF^2}{4} = \frac{\frac{5a^2}{4} + 6a^2}{2} - \frac{\frac{9a^2}{4}}{4} = \frac{41a^2}{16} \Rightarrow CH = CG = \frac{a\sqrt{41}}{4}$$

Mặt khác: $GH = \frac{1}{2}FI = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.



$$\text{Ta có: } \cos \widehat{CGH} = \frac{GC^2 + GH^2 - HC^2}{2 \cdot GC \cdot GH} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{41}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{41}}{4}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{41}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{82}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{\sqrt{82}}{82}.$$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và $\widehat{SBA} = 30^\circ$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của AB . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, BD) .

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

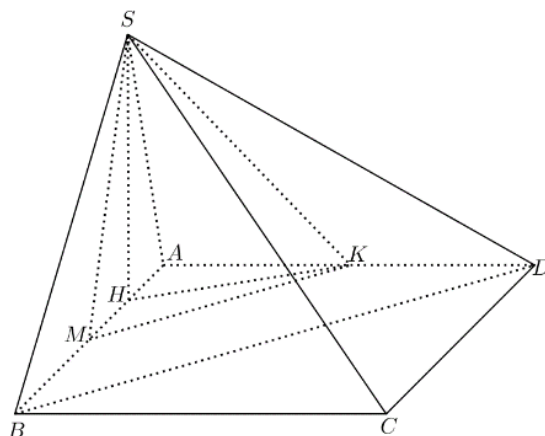
B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $AB = a$ ($a > 0$).

Ta có $SM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $SA = SB$. Vì $\widehat{SBA} = 30^\circ$ nên tam giác SAB cân tại S .

Gọi H là hình chiếu của S lên AB , do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ nên $SH \perp (ABCD)$ hay H là trung điểm của AB .

Gọi K là trung điểm của AD , khi đó $(\widehat{SM, BD}) = (\widehat{SM, MK})$ và $MK = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Khi đó } SH = HB \cdot \tan 30^\circ = \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$SK^2 = SH^2 + HK^2 = SH^2 + AH^2 + AK^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \cos \widehat{SMK} = \frac{SM^2 + MK^2 - SK^2}{2 \cdot SM \cdot MK} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết SA vuông góc với đáy và $AB = SA = a$, $AC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC .



A. 30° .

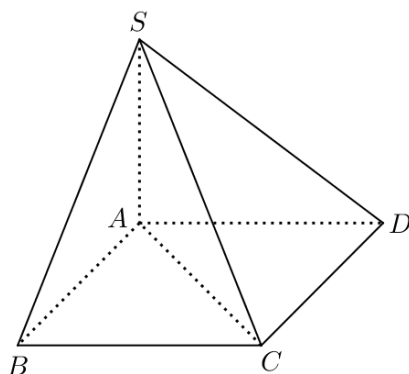
B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Do $BC \parallel AD \Rightarrow (\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA}$

Ta có $AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$, suy ra $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SDA} = 30^\circ$.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .

A. $MN = \frac{a}{4}$.

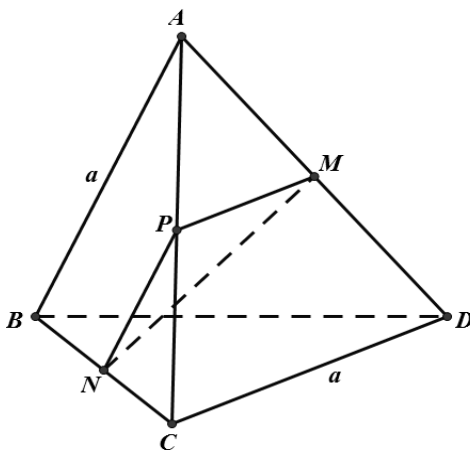
B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $MN = \frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn C

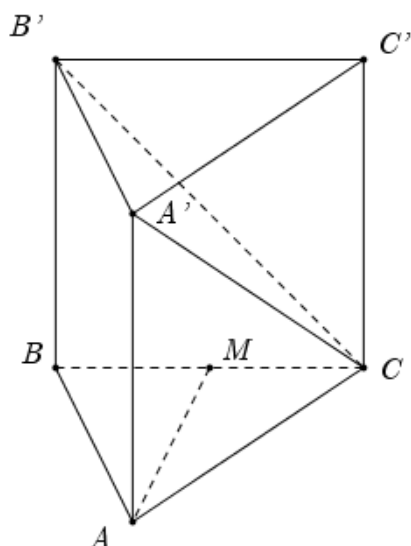


Gọi P là trung điểm của cạnh AC thì ta có $PN \parallel AB$ và $PM \parallel CD$, $PN = PM = \frac{a}{2}$. Do đó tam

giác MNP cân tại P . Khi đó $(\widehat{AB, MN}) = (\widehat{NP, MN}) = \widehat{PNM} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{MPN} = 120^\circ$

Xét tam giác PMN có $MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cdot \cos \widehat{MPN} = \frac{3a^2}{4}$, do đó $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $BA = 2AC = 2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, M là trung điểm BC (minh họa như hình dưới). Cosin góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng



A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

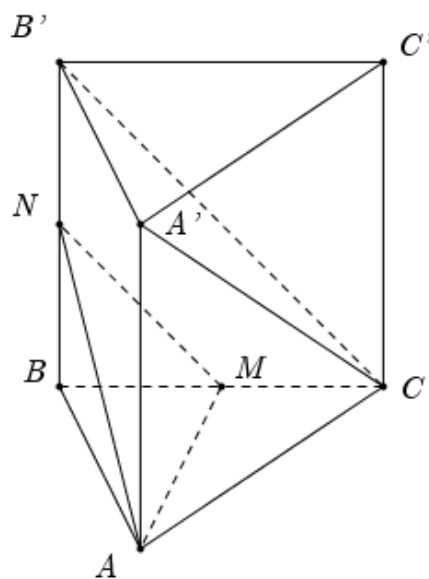
B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm BB' , ta có $MN \parallel B'C$ nên $(AM, B'C) = (AM, MN)$.

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a$ và $AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a; \quad MN = \frac{B'C}{2} = \frac{\sqrt{BC^2 + BB'^2}}{2} = \frac{\sqrt{5a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{3}{2}a.$$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác MNA ta có:

$$\cos \widehat{NMA} = \frac{MN^2 + MA^2 - AN^2}{2 \cdot MN \cdot MA} = \frac{\frac{9}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - 5a^2}{2 \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \quad \text{Vậy } \cos(AM, B'C) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

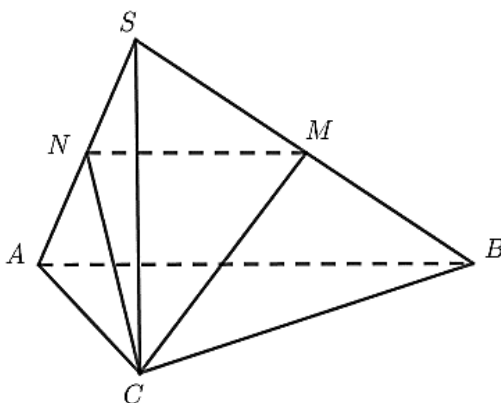


Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Tam giác SAB vuông cân tại S và $\widehat{BSC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh SB , φ là góc giữa đường thẳng AB và CM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $SA = a$. Suy ra $SB = CA = CB = a$ và $AB = a\sqrt{2}$.

Lại có $\widehat{BSC} = 60^\circ$. Suy ra tam giác SBC đều nên $SC = a$.

Suy ra $CM = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (Với N là trung điểm của SA) hay MN song song với AB .

Khi đó $(\widehat{AB, CM}) = (\widehat{MN, CM})$. Áp dụng định lí cosin vào tam giác CMN ta có:

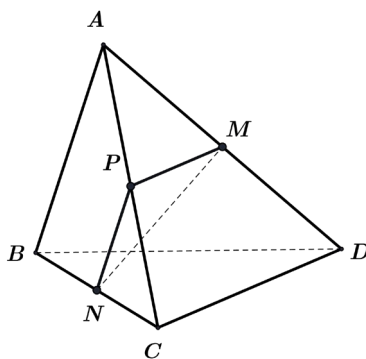
$$\cos \widehat{CMN} = \frac{MC^2 + MN^2 - CN^2}{2MC \cdot MN} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \cos(\widehat{AB, CM}) = \cos(\widehat{MN, CM}) = |\cos \widehat{CMN}| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .

- A. $MN = \frac{a}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn B





Gọi P là trung điểm của AC . Khi đó PM, PN lần lượt là đường trung bình của

$$\triangle ACD, \triangle ACB \text{ nên } PM = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \text{ và } PN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$$

Vì $AB \parallel PN$ nên $(AB, MN) = (PN, MN) = \widehat{PNM} = 30^\circ$

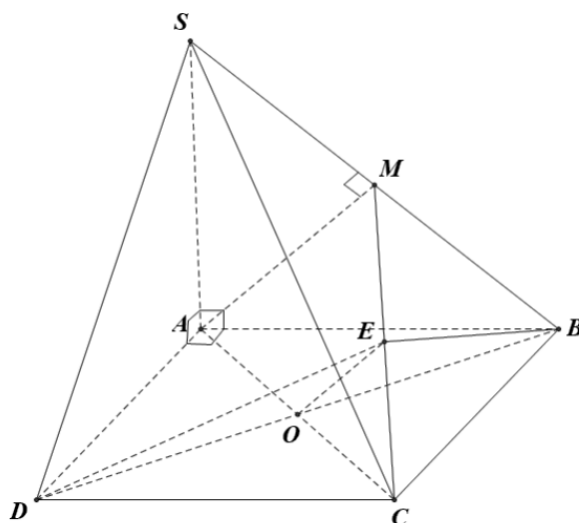
Mặt khác: $\triangle PMN$ cân tại P và có góc ở đáy $\widehat{PNM} = 30^\circ$ nên góc ở đỉnh bằng $\widehat{NPM} = 120^\circ$.

$$\text{Áp dụng định lý Cosin cho } \triangle PMN, \text{ ta có: } MN = \sqrt{PM^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cdot \cos 120^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- Câu 30:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = a$. Gọi M là trung điểm của SB . Góc giữa AM và BD bằng
- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi E là trung điểm của MC , ta có: $OE \parallel AM \Rightarrow (\widehat{AM, BD}) = (\widehat{OE, BD})$

$$\text{Khi đó: } OE = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}SB = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Ta có: $CB \perp AB, SA \perp CB \Rightarrow CB \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B .

$$\text{Xét tam giác } MBC \text{ vuông tại } B \text{ có: } MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{1}{4}.2a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Khi đó: } BE = \frac{1}{2}MC = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Xét tam giác } BCD \text{ vuông tại } C \text{ có: } BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



$$\text{Xét tam giác } EBO \text{ có: } \cos \widehat{EOB} = \frac{EO^2 + OB^2 - EB^2}{2 \cdot EO \cdot OE} = \frac{\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{8}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{EOB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow (\widehat{AM, BD}) = (\widehat{OE, BD}) = \widehat{EOB} = 60^\circ.$$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 30° .

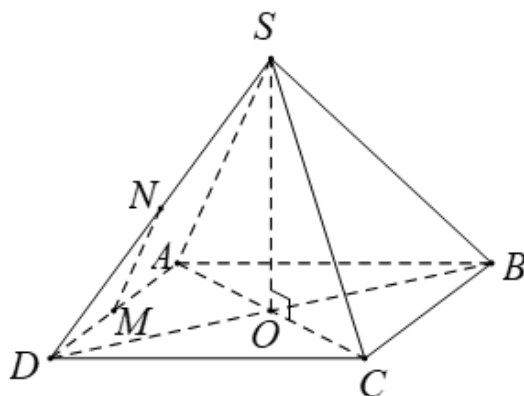
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).

Ta có: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Từ giả thiết ta có: $MN \parallel SA$ (do MN là đường trung bình của $\triangle SAD$). $\Rightarrow (MN, SC) = (SA, SC)$

$$\text{Xét } \triangle SAC, \text{ ta có: } \begin{cases} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = 2AD = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \triangle SAC \text{ vuông tại } S \Rightarrow SA \perp SC.$$

$$\Rightarrow (SA, SC) = (MN, SC) = 90^\circ.$$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SD và BC biết

$$AD = DC = a, AB = 2a, SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

A. $\frac{1}{\sqrt{42}}$.

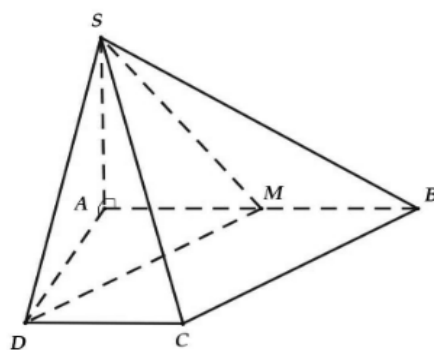
B. $\frac{2}{\sqrt{42}}$.

C. $\frac{3}{\sqrt{42}}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{42}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm AB . Ta có $MB = DC = a$.

Mà $MB \parallel CD$ nên $MBCD$ là hình bình hành. Do đó $DM \parallel BC$.

Suy ra $(\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, DM})$.

Lại có $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$ và $DM = \sqrt{AM^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

Áp dụng định lí cosin trong $\triangle SDM$ ta được:

$$\cos \widehat{SDM} = \frac{SD^2 + DM^2 - SM^2}{2SD \cdot DM} = \frac{3}{\sqrt{42}}. \text{ Suy ra } \cos(\widehat{SD, BC}) = \frac{3}{\sqrt{42}}.$$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

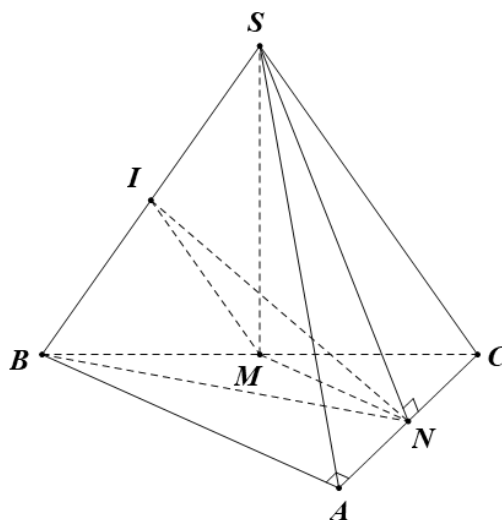
D. 45° .

Lời giải

Chọn A

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow$ trung điểm M của cạnh huyền BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Vì $SA = SB = SC$ nên SM là đường cao của hình chóp $S.ABC$.



Gọi N, I lần lượt là trung điểm của AC, SB .



Ta có $MN \parallel AB$ và $IM \parallel SC$ nên $(\widehat{SC, AB}) = (\widehat{IM, MN})$.

$$\text{Mặt khác: } BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; \quad SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } NI = \frac{\sqrt{2(BN^2 + SN^2) - SB^2}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right) - a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } MN = \frac{a}{2}, \quad MI = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } IMN, \text{ ta có } \cos \widehat{NMI} = \frac{MN^2 + IM^2 - IN^2}{2 \cdot MN \cdot IM} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMI} = 120^\circ.$$

Suy ra $(\widehat{IM, MN}) = 60^\circ$.

-----HẾT-----

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

22

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A

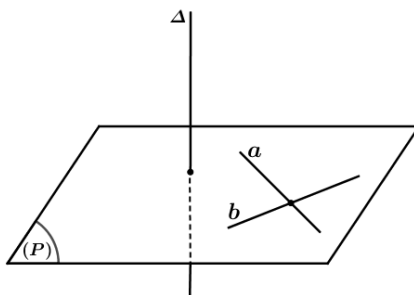
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) .

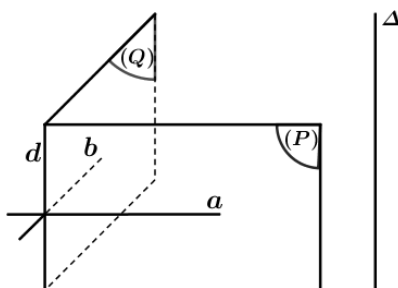
Chú ý: Khi Δ vuông góc với (P) , ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

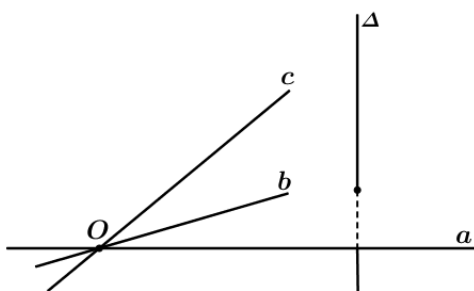


2 Tính chất

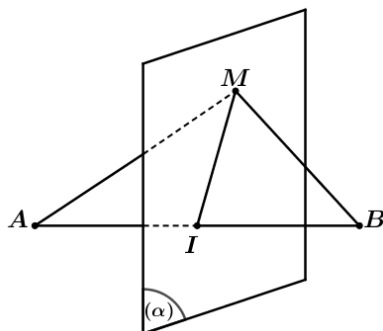
Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



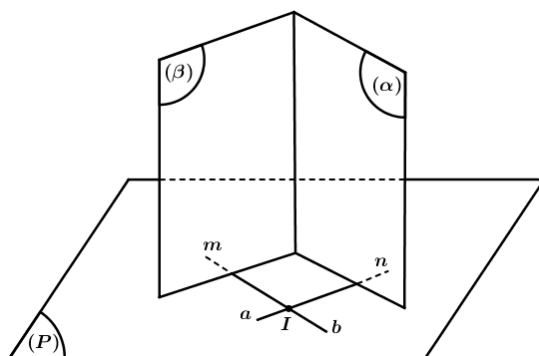
Nhận xét: Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ mô tả như hình vẽ dưới đây:



Chú ý: Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B .



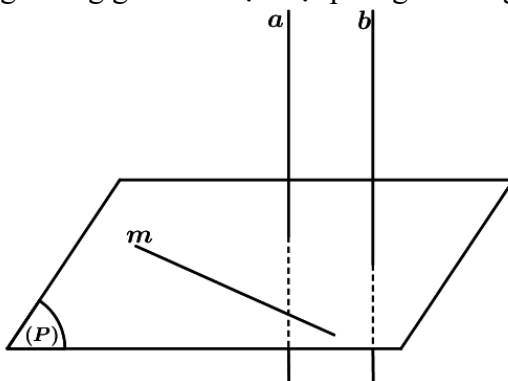
Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



3 Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

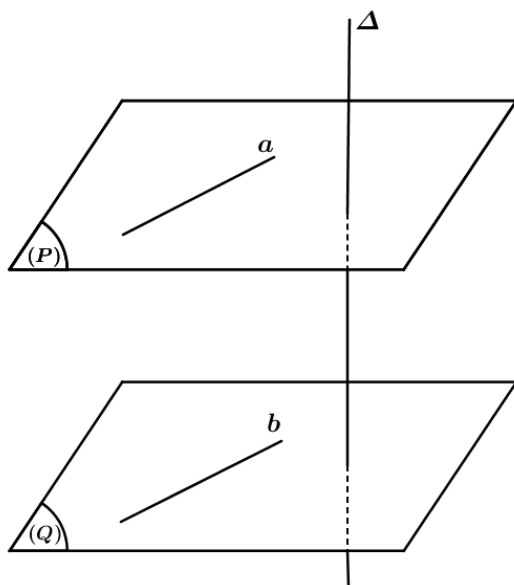
Chú ý 1:

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P) .
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

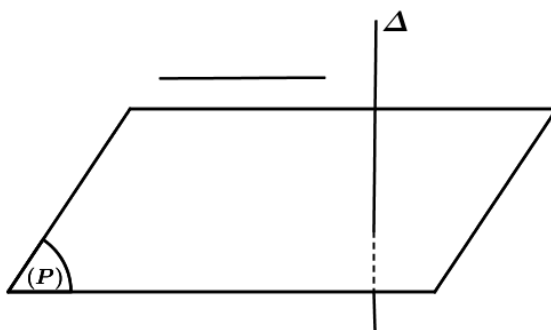


**Chú ý 2:**

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P) .
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

**Chú ý 3:**

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P) .
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P) .



**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng**

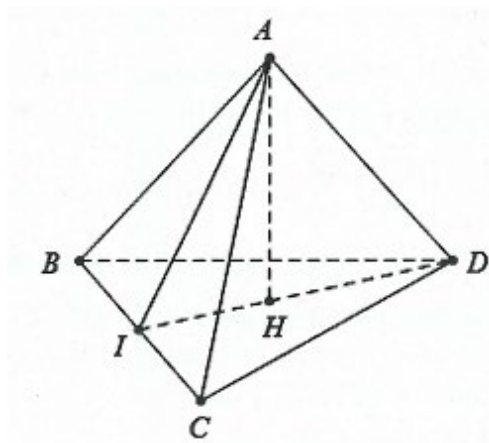
Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) ta chứng minh:

- Đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .
- Đường thẳng d song song với đường thẳng a mà a vuông góc với (P) .

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC . Điểm I là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải

a) Do các tam giác ABC và BCD là hai tam giác cân nên tại A và D ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao). Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do AH là đường cao trong tam giác ADI nên $AH \perp DI$.

Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.

Do đó $AH \perp (BCD)$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD .

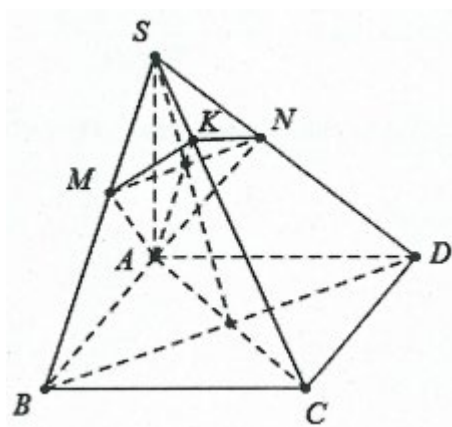
a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC)$, $AN \perp (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \parallel BD$.

d) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$. Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $CM = DN$. Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN \parallel BD$.

d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do $MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

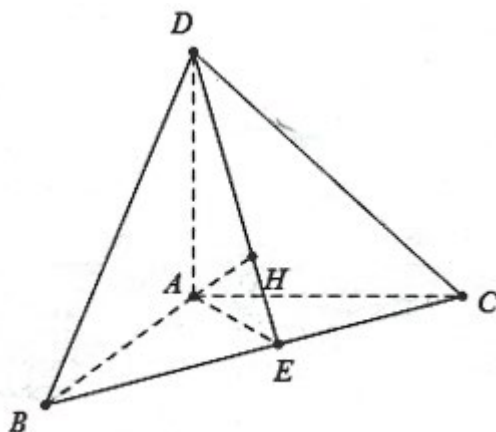
Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD .

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$.

c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải





a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH \perp (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$.

Mặt khác $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH \perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD .

b) Gọi $E = DH \cap BC$, do $BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AE$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AE ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Lại có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB = x$; $AC = y$ và $AD = z$. Ta có: $\begin{cases} BC = \sqrt{x^2 + y^2} \\ BD = \sqrt{x^2 + z^2} \\ CD = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$

Khi đó $\cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BD} = \frac{x^2}{BC \cdot BD} > 0 \Rightarrow \widehat{CBD} < 90^\circ$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases} \widehat{BDC} < 90^\circ \\ \widehat{BCD} < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow$ tam giác BCD có 3 góc nhọn.

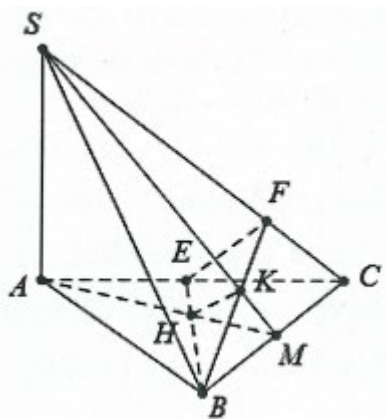
Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $SC \perp (BHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Giả sử $AH \perp BC$ tại M . Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Mặt khác $SK \perp BC \Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng do đó AH, SK, BC đồng quy tại điểm M .



b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$

Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

c) Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$. Mặt khác $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$.

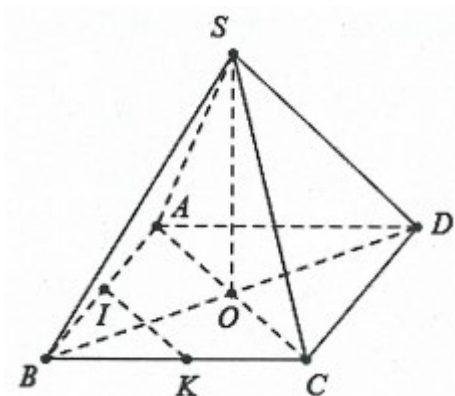
Do đó $HK \perp (SBC)$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$

Lời giải



a) Do $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S có trung tuyến SO đồng thời là đường cao

Suy ra $SO \perp AC$. Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

Do vậy $AC \perp (SBD)$.

Suy ra IK là đường trung bình trong tam giác BAC nên $IK \parallel AC$

Mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$.

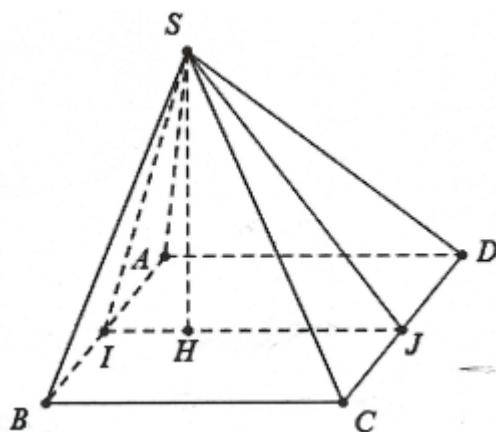
Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ , suy ra tam giác SIJ vuông.

b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$; $SJ \perp (SAB)$.

c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ . Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle SAB$ đều cạnh a nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tứ giác $IBCI$ là hình chữ nhật

Suy ra $IJ = BC = a$.

$\triangle SCD$ là tam giác vuông cân đỉnh $S \Rightarrow SJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \triangle SIJ$ vuông tại S .

b) Do $\triangle SCD$ cân tại S nên $SJ \perp CD$ và do $AB \parallel CD \Rightarrow SJ \perp AB$.

Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.

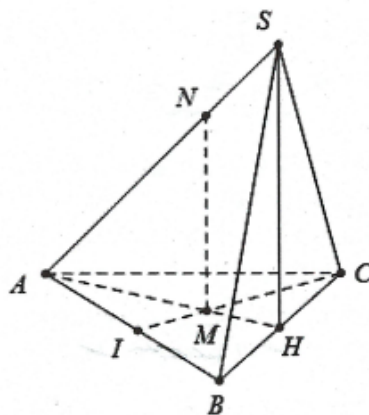
c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$

Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$.

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$. Chứng minh $MN \perp (ABC)$.

Lời giải



Do điểm M thuộc đường trung tuyến CI và $MC = 2MI \Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow M = AH \cap CI$. Ta có: $\frac{NA}{NS} = \frac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN \parallel SH$.

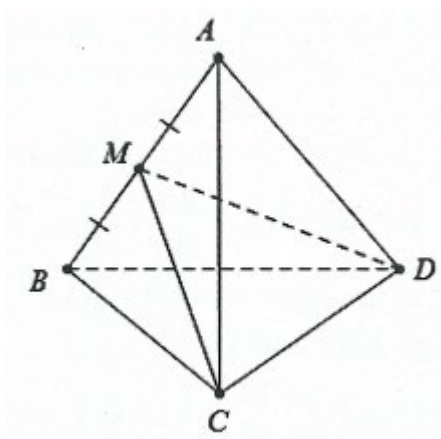
Mặt khác: $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$.

**Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b , ta đi tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.

Ví dụ 8: Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB .

Tứ diện $ABCD$ đều nên $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$ là các tam giác đều $\Rightarrow \begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$

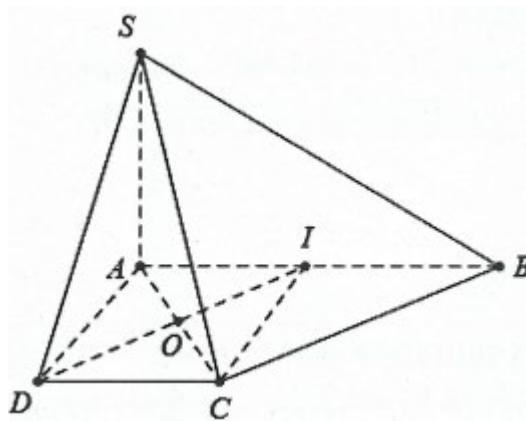
Do đó $AB \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $BC \perp AD, AC \perp BD$.

Ví dụ 9: Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD = CD = \frac{AB}{2}$.

- Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh $CI \perp AB$ và $DI \perp SC$.
- Chứng minh các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải



a) Đặt $AB = 2a \Rightarrow AD = CD = a$.

Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$.

Khi đó $AICD$ là hình vuông cạnh a .



Do $CI \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$.

b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAD, \Delta SAB$ vuông tại S .

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên ΔSCD vuông tại D .

Xét ΔACD có trung tuyến $CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AC$.

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \Delta SCB$ vuông tại C .

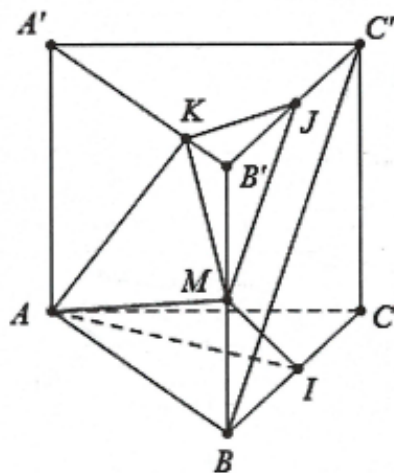
Ví dụ 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.

b) Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng: $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

Lời giải



a) Do ΔABC là tam giác đều và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.

b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$.

Mặt khác MI là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI \parallel B'C$ suy ra $MI \perp BC'$.

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$.

c) Ta có: $\tan \widehat{KMB'} = \frac{KB'}{MB'} = \frac{1}{2}$; $\tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{BM} = 2$

Suy ra $\tan \widehat{KMB'} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{KMB'} + \widehat{AMB} = 90^\circ$.

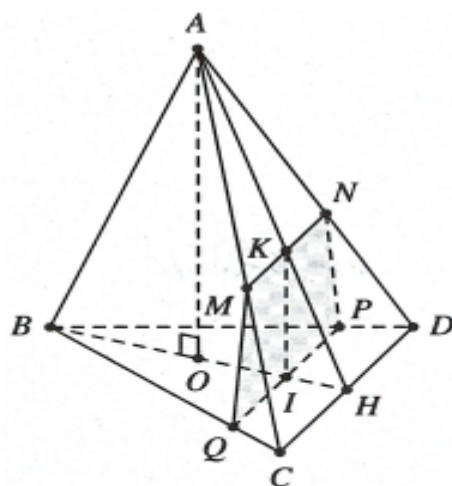
Do đó $\widehat{AMK} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp MK$.

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \parallel BC' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ$. Suy ra $AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ$.

**Dạng 3: Thiết diện**

Giả sử thiết diện là một phần của mặt phẳng (P) và $(P) \perp d$. Khi đó ta tìm mặt trung gian (α) dễ thấy và $(\alpha) \perp d \rightarrow (\alpha) \parallel (P)$ và quy về thiết diện có yếu tố song song đã biết.

Ví dụ 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $\triangle BCD$ đều, gọi BH là đường cao của $\triangle BCD$, O là trung điểm của BH và $AO \perp (BCD)$, $AO = BH = 2a$, trên OH lấy điểm I sao cho $BI = x$ ($a < x < 2a$), mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc OH . Dựng và tính diện tích thiết diện của tứ diện tạo bởi (α) .

Lời giải

Vì $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp OH$

Qua I kẻ $IK \parallel AH$ ($K \in AH$).

Tam giác BCD đều $\Rightarrow BH \perp CD$, qua K kẻ đường thẳng d song song với đường thẳng CD cắt SC, SD lần lượt tại M, N .

Qua I kẻ đường thẳng Δ song song với đường thẳng CD cắt BC, BD lần lượt tại Q, P .

Suy ra mặt phẳng (α) cắt khối chóp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} IK \cdot (MN + PQ)$.

Tam giác BCD có: $\frac{PQ}{CD} = \frac{BI}{BH} \Rightarrow PQ = \frac{x}{2a} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ACD có: $\frac{MN}{CD} = \frac{AK}{AH} = \frac{OI}{OH} \Rightarrow MN = \frac{OI \cdot CD}{OH} = \frac{4\sqrt{3}}{3}(x - a)$.

Tam giác AHO có: $\frac{IK}{AO} = \frac{IH}{OH} \Rightarrow IK = \frac{IH \cdot AO}{OH} = 2(2a - x)$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là:

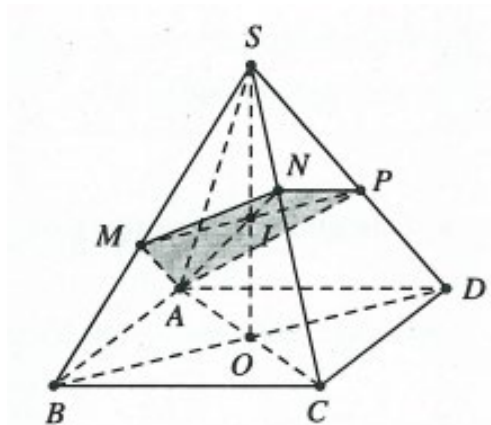
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2(2a - x) \left(\frac{2x\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}(x - a) \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} (2a - x)(3x - 2a).$$



Ví dụ 12: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , $SO \perp (ABCD)$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC . Xác định và tính diện tích thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải



Kẻ $AN \perp SC (N \in SC)$ và $AN \cap SO = I$

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$, qua I kẻ đường thẳng d song song với BD cắt SB, SC lần lượt tại $M, P \Rightarrow mp(P) \equiv (AMNP)$.

Suy ra mp (P) cắt khối chóp theo thiết diện là tứ giác $AMNP$.

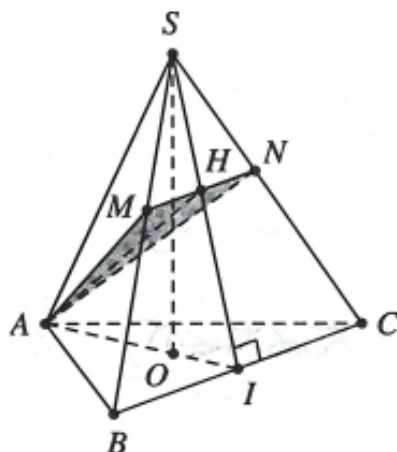
Tam giác SAO có $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = a\sqrt{2} = AC \Rightarrow$ Tam giác SAC đều $\Rightarrow N$ là trung điểm của $SC \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow \frac{MP}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow MP = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy diện tích tứ giác $AMNP$ là $S_{AMNP} = \frac{1}{2} MP \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi

I là trung điểm của BC , (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SI . Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

Lời giải





Gọi O là tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với SI tại H .

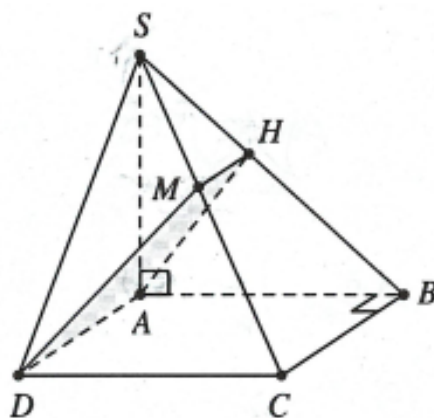
Ta có $SI \perp BC \Rightarrow BC // mp(\alpha)$, qua H kẻ đường thẳng d song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại $M, N \Rightarrow mp(\alpha)$ cắt khối chóp theo thiết diện là tam giác cân AMN .

Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Kẻ AH vuông góc với SB .

a) Chứng minh $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.

b) Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SB cắt SC tại M . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) và tính thiết diện đó.

Lời giải



a) Tam giác SAB vuông tại A , có $AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác SAH vuông tại H có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SH}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.

b) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$

Suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow BC // mp(P)$.

Kẻ HK song song với BC ($M \in SC$) $\Rightarrow mp(P)$ cắt khối chóp đã cho theo thiết diện là tứ giác $AHMD$.

Dễ thấy $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp MH$ và $MH // AD \Rightarrow AHMD$ là hình thang vuông.

Lại có $\triangle SHM \sim \triangle SBC \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{MH}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MH = \frac{2}{3} BC = \frac{2a}{3}$.

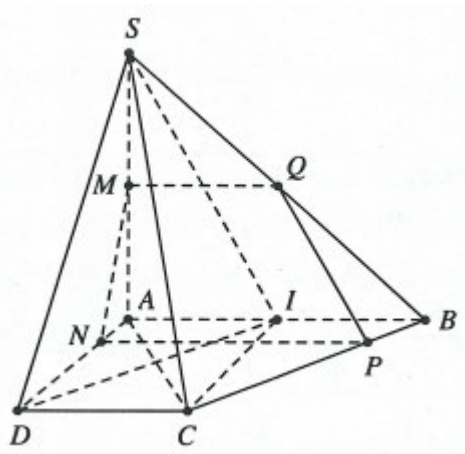
Diện tích hình thang vuông $AHMD$ là $S = \frac{1}{2} AH (HM + AD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \left(\frac{2a}{3} + a \right) = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18}$.



Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D . Cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

- Chứng minh $(SBC) \perp (SAC)$.
- Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) . Tính diện tích thiết diện ấy.
- Mặt phẳng (β) đi qua trung điểm M của SA và $N \in AD$, $AN = x$ ($0 < x < a$), vuông góc với (SAD) . Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (β) theo a và x .

Lời giải



- Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow IC = \frac{1}{2} AB$

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp BC$ mà $SA \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBC) \Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

- Vì $ADCI$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp DI$ nên thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác SDI .

Tam giác SDI có $SD = SI = DI = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle SDI} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

- Dễ thấy $AB \parallel CD$ và $AB \perp mp(SAD)$.

Qua M, N lần lượt kẻ đường thẳng d_1, d_2 song song với AB và cắt SB, BC tại P, Q suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.

Do đó, $MNPQ$ là thiết diện cắt bởi mặt phẳng (β) và hình chóp $S.ABCD$.

Tam giác AMN vuông tại A có: $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Vì $MQ \parallel AB \Rightarrow \frac{MQ}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MQ = \frac{AB}{2} = a$;

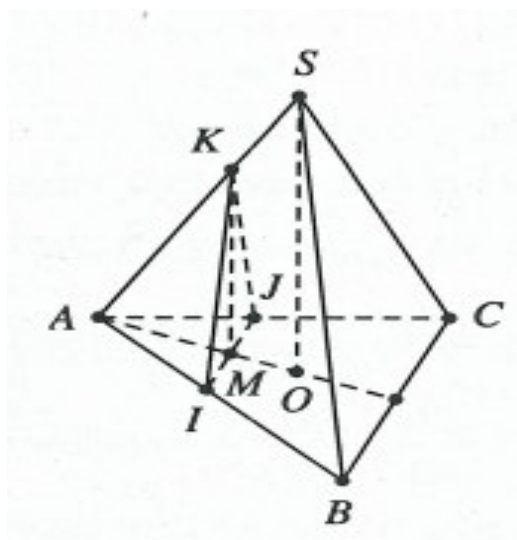
$NP \parallel AB \Rightarrow \frac{NP}{AB} = \frac{DN}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow NP = 2(a-x)$.



Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot (MQ + NP) = \frac{3a-2x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Ví dụ 16: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a tâm O và $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO ($M \neq A; M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO . Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

Lời giải



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$;

Kẻ $MK \parallel SO$ với $K \in SA$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác KIJ .

Diện tích tam giác IJK là $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK$.

Trong tam giác ABC ta có: $\frac{IJ}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO ta có: $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO}$

Suy ra $MK = \frac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$. Vậy $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2$.

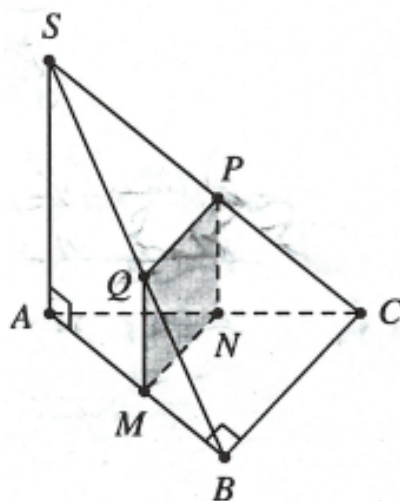
Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$ và $AB = BC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Điểm $M \in AB, AM = x$ ($0 < x < a$), mặt phẳng (α) đi qua M vuông góc với AB .

a) Dựng thiết diện được tạo bởi hình chóp với mặt phẳng (α) .

b) Tính thiết diện của thiết diện theo a và x . Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại Q .

Vì $AB \perp BC \Rightarrow BC \parallel mp(\alpha)$ kẻ MN song song với BC ($N \in BC$).

Vì $SA \perp AB \Rightarrow SA \parallel mp(\alpha)$ kẻ NP song song với SA ($P \in SC$).

Suy ra mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Để thấy $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow S_{MNPQ} = MN \cdot MQ$

$$\triangle BMQ \sim \triangle BAS \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{AB} = 1 - \frac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x).$$

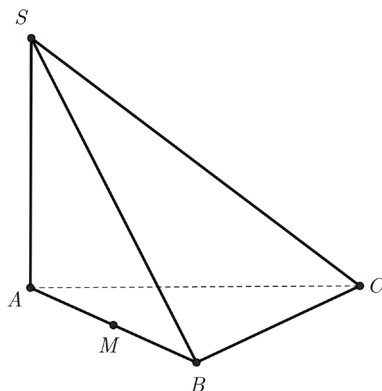
$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = x \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-x^2).$$

$$\text{Mà } x-x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \text{ Vậy } S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

**C** BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB và cắt AC , SC , SB lần lượt tại N , P , Q . Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

Lời giải

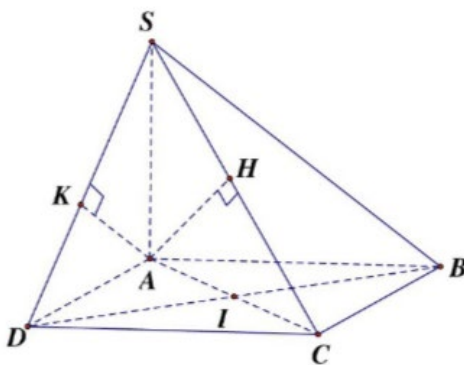


Vì $SA \perp (ABC)$ và $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ \text{Ta có } BC \perp SA \\ SA, AB \subset (SAB); SA \cap AB = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC , SD . Chứng minh rằng $AK \perp (SCD)$?

Lời giải

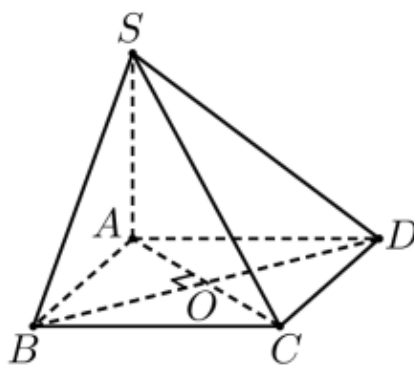


$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{array} \right. \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK.$$

Lại có $SD \perp AK$ suy ra $AK \perp (SCD)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Chứng minh rằng $BD \perp SC$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow BD \perp SA \quad (1)$

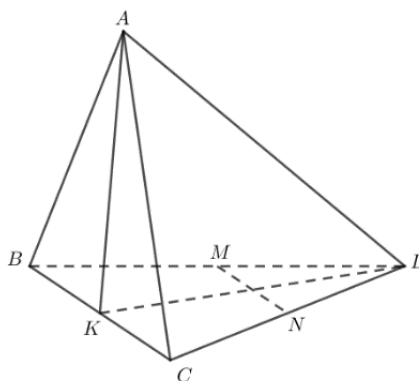
Ta lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC \quad (2)$

Từ (1), (2) và $SA \cap AC = \{A\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BC = BD = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, CD . Chứng minh rằng $MN \perp AD$

Lời giải



Gọi K là trung điểm của BC

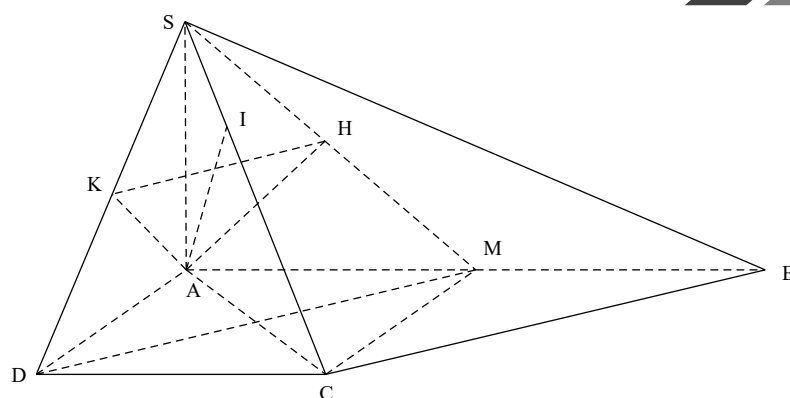
Vì $\triangle ABC$ và $\triangle BCD$ là tam giác đều nên $\begin{cases} AK \perp BC \\ DK \perp BC \\ DK, AK \subset (AKD) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AKD)$

Ta có M, N lần lượt là trung điểm của BD, CD nên $MN \parallel BC$

Mặt khác $\begin{cases} MN \parallel BC \\ BC \perp (AKD) \end{cases} \Rightarrow (AKD) \perp MN \Rightarrow MN \perp AD$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AB và H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SM, SC, SD . Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Lời giải



Ta có hình chóp $S.AMCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (AMCD)$ nên $\Delta SAM = \Delta SAD$.

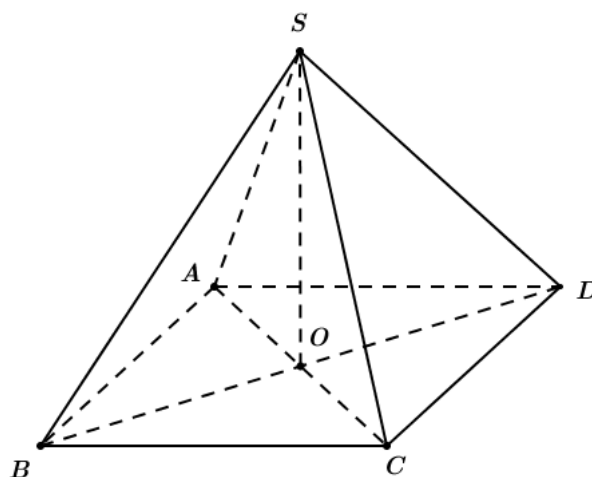
Do AH và AK lần lượt là hai đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh huyền của hai tam giác vuông nói trên nên $AH = AK$, từ đó suy ra $SH = SK \Rightarrow HK \parallel MD$ (1).

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} MD \perp AC \\ MD \perp SA \\ SA \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SAC) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} HK \perp (SAC) \\ AI \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp AI.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$?

Lời giải



Theo giả thiết ta có: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau do đó: $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại A

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow O$ là trung điểm của AC

$$\Rightarrow SO \text{ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của } \Delta SAC \Rightarrow SO \perp AC \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } SO \text{ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của } \Delta SBD \Rightarrow SO \perp BD \quad (2)$$



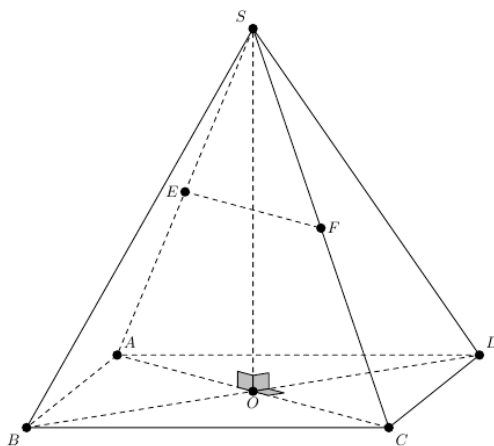
Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} SO \perp AC \subset (ABCD) \\ SO \perp BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi E , F lần lượt là trung điểm của SA , SC . Chứng minh rằng $EF \perp SD$.

Lời giải



a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

Từ giả thiết $SA = SC$, $SB = SD$ suy ra $\triangle SAC, \triangle SBD$ là các tam giác cân tại đỉnh S .

Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC \cap BD = \{O\} \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi E , F lần lượt là trung điểm của SA , SC . Chứng minh rằng $EF \perp SD$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp SO \\ AC \perp BD \\ SO \cap BD = \{O\} \\ SO, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

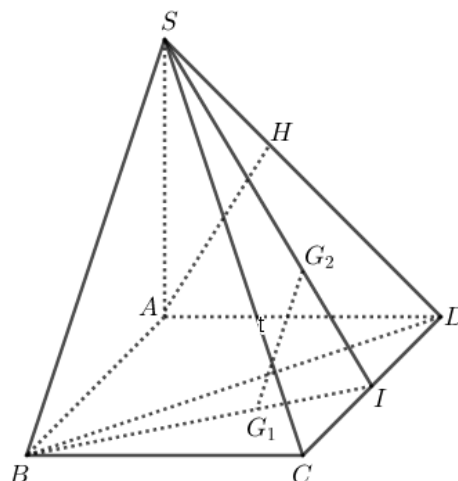
Mà $SD \subset (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$ (1).

Mặt khác $EF \parallel AC$ (2) do EF là đường trung bình của $\triangle SAC$.

Từ và suy ra $EF \perp SD$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD . Chứng minh: $AH \perp SC$.

Lời giải



Trước hết ta chứng minh $CD \perp (SAD)$. Do $ABCD$ là hình vuông nên $CD \perp AD$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp CD \quad (2)$$

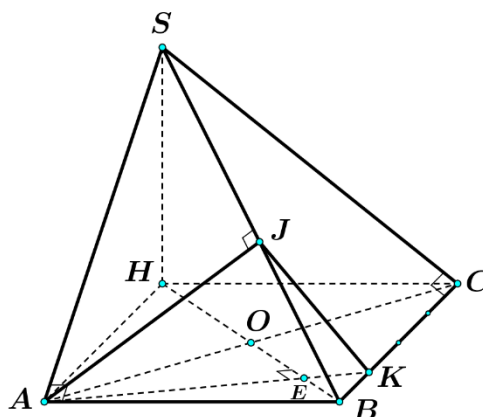
Từ (1) và (2) ta suy ra: $CD \perp (SAD)$, mà $AH \subset (SAD)$ nên $CD \perp AH$ (3)

Mặt khác theo giả thiết ta có: $SD \perp AH$ (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra: $AH \perp (SCD)$, mà $SC \subset (SCD)$ nên $AH \perp SC$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết $AB = a, BC = 2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}, \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (α)

Lời giải



Dựng hình chữ nhật $ABCH$ thì $SH \perp (ABCH)$, do $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$

Kẻ AK vuông góc với HB tại E và $K \in BC$ thì $AK \perp (SHB) \Rightarrow AK \perp SB$

Trong mp (SAB) , kẻ $AJ \perp SB$ thì $SB \perp (JAK)$.

Suy ra ΔJAK chính là thiết diện cần tìm

$$\Delta SAB \text{ vuông tại } A \text{ có } \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow AJ = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \text{ và } JB = \frac{AB^2}{SB} = \frac{AB^2}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Tam giác } ABH \text{ vuông tại } A \text{ có } BE.BH = AB^2 \Rightarrow \frac{BE}{BH} = \frac{AB^2}{BH^2} = \frac{a^2}{5a^2} = \frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{EH} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BK}{AH} = \frac{1}{4} \Rightarrow BK = \frac{1}{4}AH = \frac{a}{2}$$

$$\text{Tam giác } ABK \text{ vuông tại } B \text{ có } AK^2 = AB^2 + BK^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

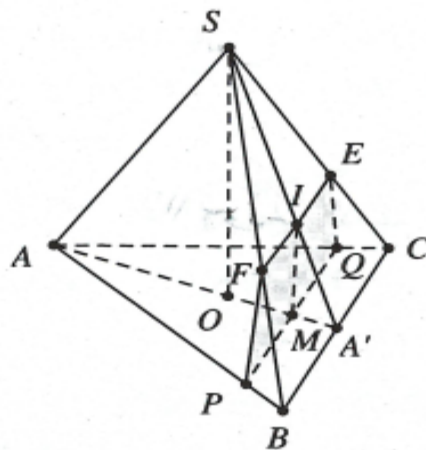
$$\text{Tam giác } SBC \text{ vuông tại } C \text{ có } \cos \widehat{JBK} = \frac{BC}{SB} = \frac{BC}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow JK = \sqrt{BJ^2 + BK^2 - 2BJ.BK.\cos \widehat{JBK}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Khi đó thiết diện } AKJ \text{ có } AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AJ = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, JK = \frac{a}{2\sqrt{3}} \text{ nên có } S_{AKJ} = \frac{a^2\sqrt{6}}{24}.$$

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tâm O , đường cao AA' ; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' ($M \neq A'$; $M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA' . Đặt $AM = x$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

Lời giải



Dựng $MI \parallel SO$ ($I \in SA'$), qua M dựng đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P và Q .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MI \perp AA' \\ PQ \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (PQI)$$

Qua I dựng đường thẳng song song với BC cắt các cạnh SB, SC tại F, E .

Thiết diện là hình thang $PQEF$.



$$\text{Lại có: } \frac{PQ}{BC} = \frac{AM}{AA'} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow PQ = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$\frac{IM}{SO} = \frac{A'M}{A'O} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow IM = \sqrt{3}(a\sqrt{3} - 2x), \frac{EF}{BC} = \frac{SI}{SA'} = \frac{OM}{OA'} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

Do đó $EF = \frac{1}{\sqrt{3}}(6x - 2a\sqrt{3})$, diện tích thiết diện là:

$$S = \frac{PQ + EF}{2} MI = (a\sqrt{3} - 2x)(8x - 2a\sqrt{3}) = -2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2).$$



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho điểm M và mặt phẳng (α) có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) ?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

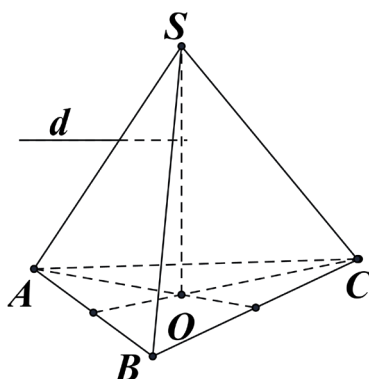
Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 2: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi O là trọng tâm của ΔABC . Đường thẳng $d \perp SO$ ($d \not\subset (ABC)$). Khi đó

- A. $d \parallel (ABC)$. B. $d \perp (SBC)$. C. $SO \parallel AC$. D. $SA \parallel OC$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } \begin{cases} SO \perp (ABC) \\ d \perp SO \end{cases} \Rightarrow d \parallel (ABC).$$

Câu 3: Cho điểm M và đường thẳng a có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a ?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

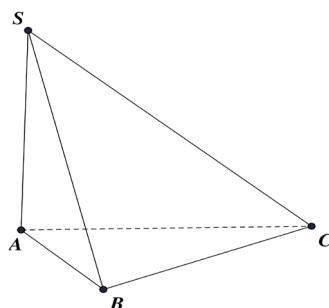
Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng cho trước.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC) . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $SA \perp SB$. B. $SA \perp SC$. C. $SA \perp AB$. D. $SB \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp AB.$$

Câu 5: Cho tam giác ABC có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng AB ?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng cho trước.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

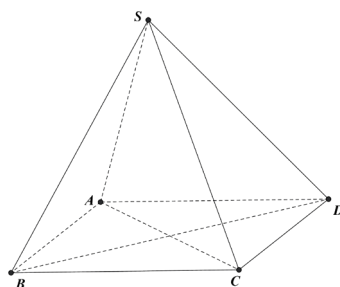
Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SB \perp BC$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SB \perp (ABCD)$. C. $BC \perp (SAC)$. D. $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



$$\left. \begin{array}{l} BC \perp SB, BC \perp AB \\ \text{Ta có: } SB \cap AB = \{B\} \\ SB, AB \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$



Câu 8: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D

Theo định lý ta có: **D** sai vì đường thẳng b có thể nằm trong mặt phẳng (P) .

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$

B. $SO \perp (ABCD)$

C. $AB \perp (SBC)$

D. $AC \perp (SBC)$

Lời giải

Chọn B

Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau suy ra $SO \perp (ABCD)$

Câu 10: Cho hình chóp tam giác $SABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây **ĐÚNG**?

A. $BC \perp (SBC)$.

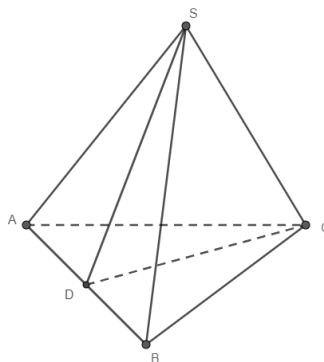
B. $SB \perp AB$.

C. $SA \perp (ABC)$.

D. $AB \perp SC$.

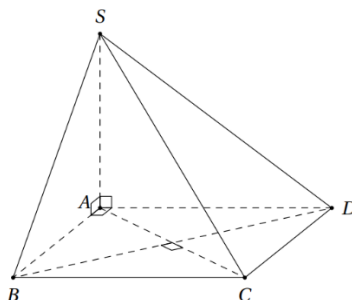
Lời giải

Chọn D



Gọi D là trung điểm của AB , vì tam giác SAB cân tại S và tam giác ABC cân tại C nên suy ra $\begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp SC$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

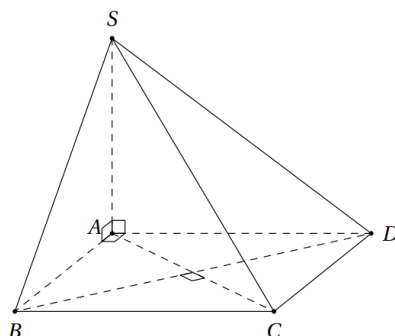




- A. $AC \perp (SCD)$. B. $BD \perp (SAD)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$ và $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$.

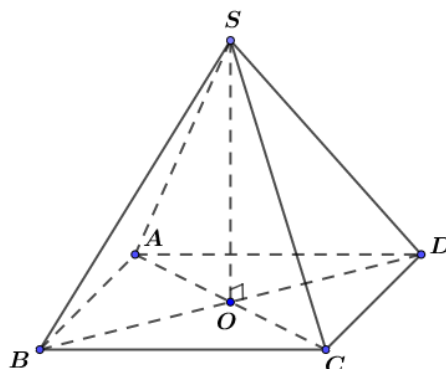
Vậy $BD \perp (SAC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Khi đó đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAB) . B. (SAD) . C. (SCD) . D. (SBD) .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO, SO \subset (SBD)$.

Mặt khác: $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD, BD \subset (SBD)$.

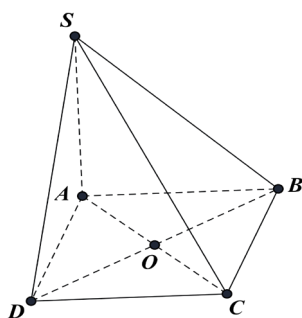
Suy ra: $SO \cap BD = O \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $BC \perp (SAB)$ B. $CD \perp (SAD)$ C. $BD \perp (SAC)$. D. $AC \perp (SBD)$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Mặt khác: $CD \perp DA, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Từ đó suy ra $BD \perp SO, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $SA \perp SB$.

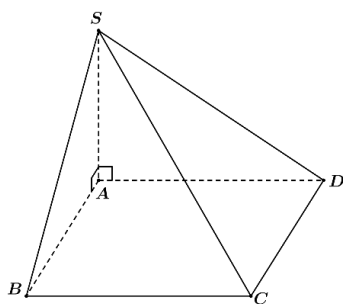
B. $SA \perp CD$.

C. $AB \perp AC$.

D. $AC \perp BD$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp CD$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $BA \perp (SAC)$.

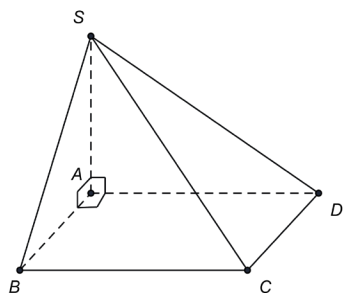
B. $BA \perp (SBC)$.

C. $BA \perp (SAD)$.

D. $BA \perp (SCD)$.

Lời giải

Chọn C





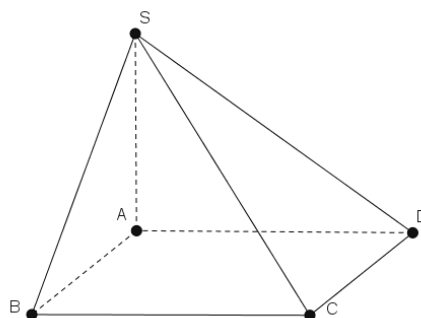
Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ DA \perp AB \end{cases} \rightarrow BA \perp (SAD).$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AB \perp (SAD).$ B. $AB \perp (SAC).$ C. $AB \perp (SBC).$ D. $AB \perp (SCD).$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AB \perp AD$ và $AB \perp SA$ ($SA \perp (ABCD)$).

Vậy $AB \perp (SAD).$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BD \perp SC.$ B. $SC \perp SB.$ C. $SD \perp SB.$ D. $CD \perp SD.$

Lời giải

Chọn D

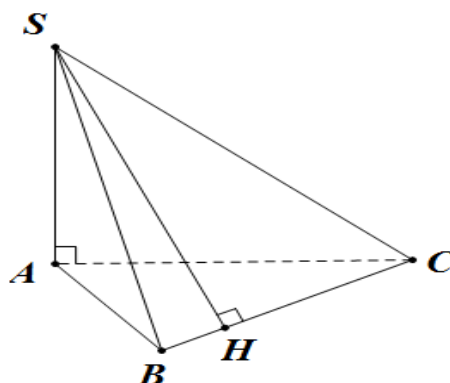
Ta có: $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định đúng?

- A. $BC \perp SC.$ B. $BC \perp AC.$ C. $BC \perp AB.$ D. $BC \perp AH.$

Lời giải

Chọn D





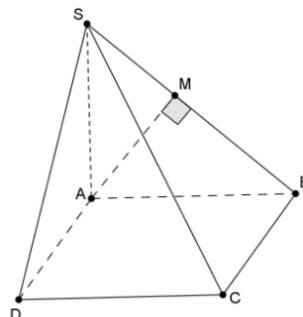
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH.$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Từ A kẻ $AM \perp SB$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $AM \perp (SBD)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $BC \perp (SAD)$. D. $AM \perp (SAD)$.

Lời giải

Chọn B



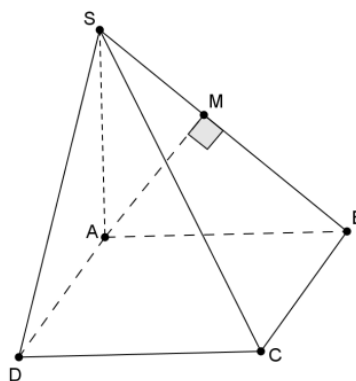
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. M là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $AM \perp (SBD)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $BC \perp (SAD)$. D. $AM \perp (SAD)$.

Lời giải

Chọn B



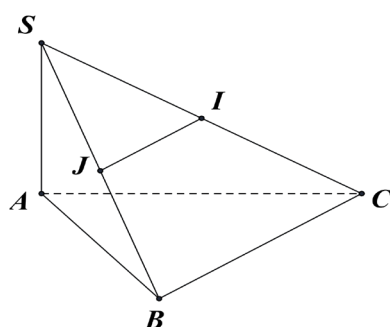
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B . Gọi $I; J$ lần lượt là trung điểm của SC ; SB . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $AB \perp (SBC)$. B. $IJ \perp (SAC)$.
C. $IJ \perp (SAB)$. D. Tam giác SCB vuông ở C .

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (Do } \triangle ABC \text{ vuông)} \\ SA \perp BC \text{ (Do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Mà $IJ \parallel BC$ (Vì IJ là đường trung bình của $\triangle SBC$).

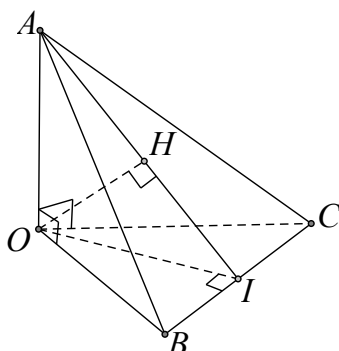
Suy ra: $IJ \perp (SAB).$

Câu 22: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $BC \perp (AHO).$ B. $OA \perp (OBC).$ C. $AH \perp BC.$ D. $AH \perp (OBC).$

Lời giải

Chọn D



Theo đề bài ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \text{ (1).}$ Vậy B đúng.

Ta lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC \text{ (2).}$ Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AHO) \Rightarrow AH \perp BC.$

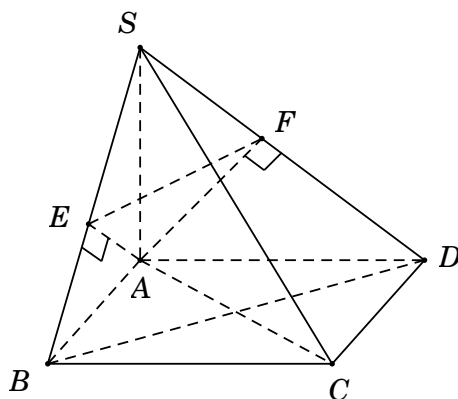
Giả sử $AH \perp (OBC)$ mà $OA \perp (OBC)$ suy ra $A; H; O$ thẳng hàng (vô lý)

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $SC \perp (AFB).$ B. $SC \perp (AEF).$ C. $SC \perp (AEC).$ D. $SC \perp (AED).$

Lời giải

Chọn B



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $SA \perp SB$.

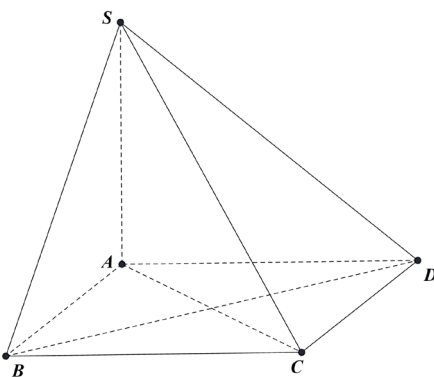
B. $SA \perp SC$.

C. $SA \perp AC$.

D. $SB \perp SD$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp AC$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $SB \perp (ABCD)$.

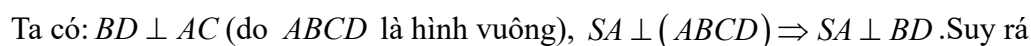
B. $SC \perp (ABCD)$.

C. $BC \perp (SAC)$.

D. $BD \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Câu 26: Mệnh đề nào sau đây sai?

- ### Lời giải

Chọn C

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $AH \perp (SCD)$. **B.** $AK \perp (SBD)$. **C.** $SC \perp (AHK)$. **D.** $SD \perp (AHK)$.

Lời giải

Chọn C





Ta có $\left. \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Ta lại có $AK \perp SD$

Suy ra $AK \perp (SCD) (*) \Rightarrow AK \perp SC$ mà $AH \perp SC$ nên $SC \perp (AHK) (**)$ nên C đúng.

Ta có (SBD) và (SCD) phân biệt; cắt nhau và từ $(*)$ suy ra B sai.

Ta có AH và AH phân biệt; cắt nhau và từ $(*)$ suy ra A sai.

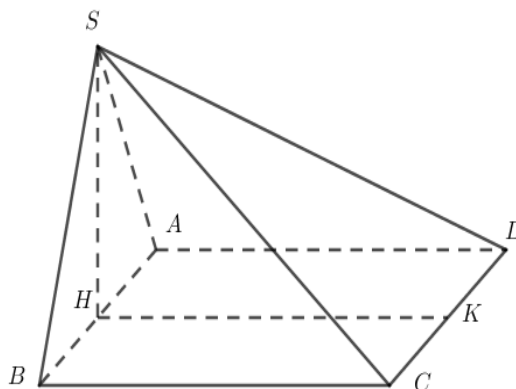
Ta có SC và SD phân biệt; cắt nhau và từ $(**)$ suy ra D sai.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $BC \perp (SAB)$. B. $SH \perp (ABCD)$. C. $AB \perp (SAD)$. D. $CD \perp (SHK)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có tam giác SAB đều cạnh a nên $SB = AB = a$.

Mặt khác tam giác SBC có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2$.

Suy ra tam giác SBC vuông cân tại B . Hay $BC \perp SB$

Mà $BC \perp AB$. Suy ra $BC \perp (SAB)$. Do đó A đúng.

Từ $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$.

Tam giác SAB đều mà H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

Từ và suy ra $SH \perp (ABCD)$. Do đó B đúng.

Tam giác SAB đều nên AB không vuông góc với mặt phẳng (SAD) . Do đó C sai.

Ta có $\left\{ \begin{array}{l} AB \perp HK \\ AB \perp SH \end{array} \right. \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp (SHK)$. Do đó D đúng

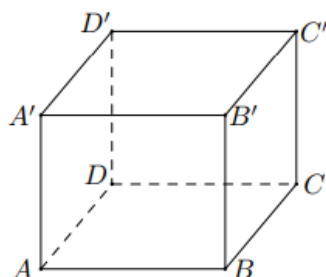
Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?



A. $AC' \perp (BB'D'D)$. B. $AC' \perp (ABCD)$. C. $AC' \perp (AA'D'D)$. D. $AC' \perp (A'BD)$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC' (1)$$

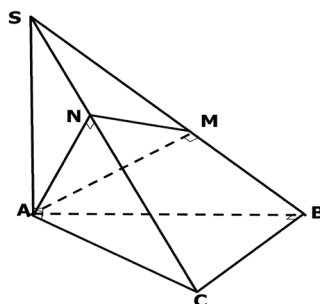
$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD' \perp A'D \text{ (do } ADD'A' \text{ là hv)} \\ D'C' \perp (ADD'A') \Rightarrow D'C' \perp A'D \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (AD'C') \Rightarrow A'D \perp AC' (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow AC' \perp (A'BD).$$

Câu 30: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM \perp SC$. B. $AM \perp MN$. C. $SA \perp BC$. D. $AN \perp SB$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \text{ mà } BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB), AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$$

$$\text{Vì } \begin{cases} AM \perp (SBC) \\ MN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AM \perp MN$$

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\text{Giả sử } AN \perp SB \Rightarrow AN \perp (SBC) \Rightarrow AN \perp BC.$$

$$\text{Mà } BC \perp SA \text{ nên } BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AC$$



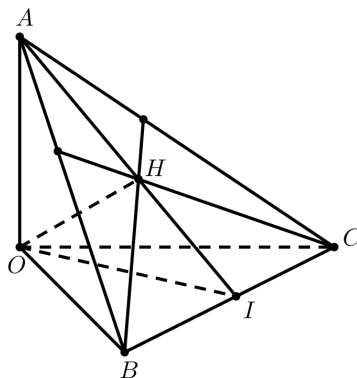
Vậy $AN \perp SB$ là sai.

Câu 31: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp OA$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB$. Vậy phương án A đúng.

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

Gọi I là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $AI \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AIO)$, mà $OH \subset (AIO)$ nên $OH \perp BC$ (3)

Tương tự như trên, ta cũng có $OH \perp AC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $OH \perp (ABC)$.

Vậy các phương án B, C đúng.

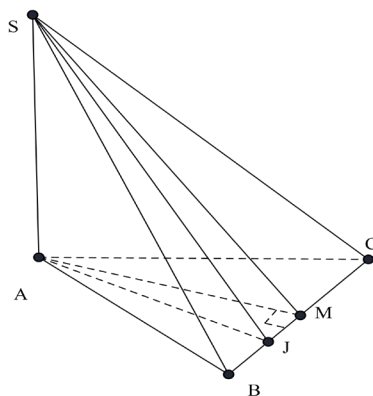
Tam giác AIO vuông tại O , $H \in AI$ và $H \neq I$ nên phương án D sai.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , SA vuông góc với đáy, M là trung điểm của BC , J là trung điểm của BM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAM)$. B. $BC \perp (SAC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. $BC \perp (SAJ)$.

Lời giải

Chọn A





Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (1).

ΔABC cân tại $A \Rightarrow AM \perp BC$ (2).

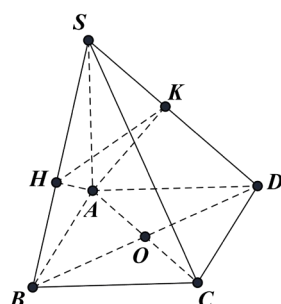
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAM)$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Hỏi đường thẳng SC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- A. (AHD) B. (SBD) . C. (AKB) D. (AHK)

Lời giải

Chọn D



$$CD \perp SA, CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$$

$$AK \perp CD, AK \perp SD \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$$

Chứng minh tương tự $AH \perp SC$

$$AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$$

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$$

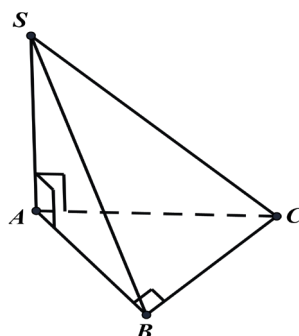
Từ đó suy ra $SC \perp (AHK)$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Hình chóp có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn A





Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \\ SA \perp BC \end{cases}$ nên các tam giác SAB và tam giác SAC vuông tại A .

Ta cũng có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$ nên tam giác SBC và tam giác ABC vuông tại B .

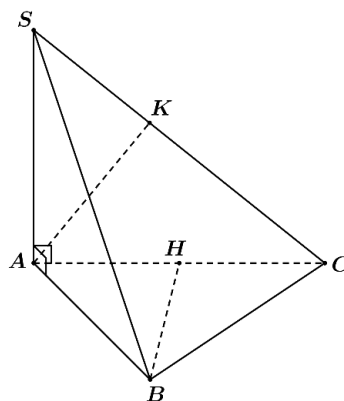
Vậy hình chóp $S.ABC$ có bốn mặt là các tam giác vuông.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy là tam giác đều ABC . Gọi H là trung điểm của AC , K là điểm nằm giữa S và C . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BH \perp AK$. B. $SA \perp BH$. C. $BC \perp AK$. D. $SC \perp BH$.

Lời giải

Chọn C



Vì $\triangle ABC$ đều nên BC không vuông góc với AC

Suy ra BC không vuông góc với (SAC)

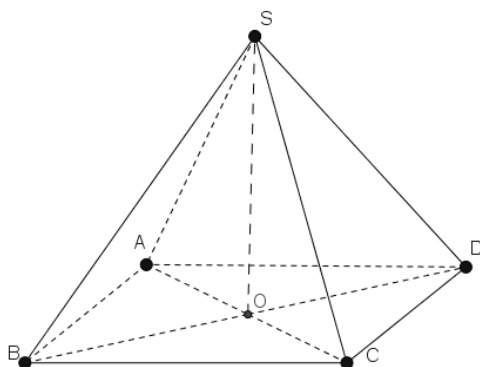
Vậy BC không vuông góc với AK

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SO \perp (ABCD)$. C. $SB \perp (ABCD)$. D. $SC \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn B





Ta có ΔSAC cân tại S ($SA = SC$).

Lại có SO là trung tuyến của ΔSAC nên $SO \perp AC$.

Tương tự $SO \perp BD$.

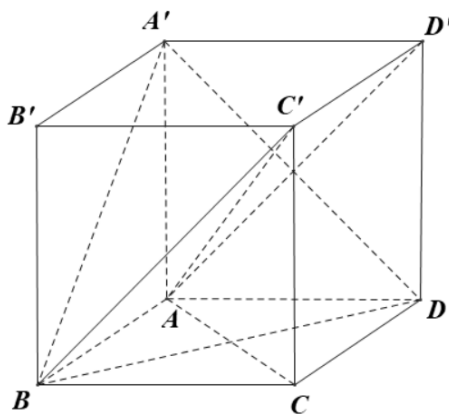
$$\text{Ta có: } \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC \cap BD = O \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(A'BD)$. B. $(A'DC')$. C. $(A'CD')$. D. $(A'B'CD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có

$$\begin{cases} AB \perp AD \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \\ AB \perp AA' \text{ (} AA' \perp (ABCD), AB \subset (ABCD) \text{)} \Rightarrow AB \perp (ADD'A') \\ AA' \cap AD = A \text{ trong } (ADD'A') \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'D \perp AD' \text{ (} ADD'A' \text{ là hình vuông)} \\ A'D \perp AB \text{ (} AB \perp (ADD'A'), A'D \subset (ADD'A') \text{)} \Rightarrow A'D \perp (ABC'D') \\ AB \cap AD' = A \text{ trong } (ADD'A') \end{cases}$$

Mà $AC' \subset (ABC'D')$ nên $AD' \perp AC'$ (1)

$$\begin{cases} BD \perp AC \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \\ BD \perp AA' \text{ (} AA' \perp (ABCD), AC \subset (ABCD) \text{)} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \\ AC \cap AA' = A \text{ trong } (ACC'A') \end{cases}$$

Mà $AC' \subset (ACC'A')$ nên $BD \perp AC'$ (2)

Từ (1), (2) và $BD \cap A'D = D$ trong $(A'BD)$ nên $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ có đáy ABC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây sai?

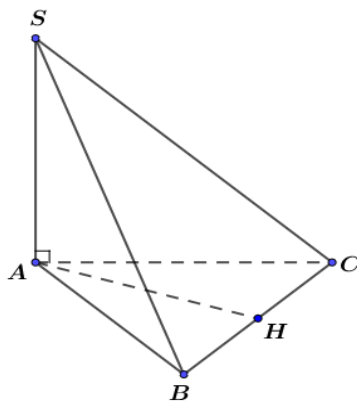
- A. $(SAB) \perp (ABC)$.



- B. Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó $\widehat{AHS}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .
- C. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là $\widehat{ACB}$.
- D. $(SAC) \perp (ABC)$.

Lời giải

Chọn C



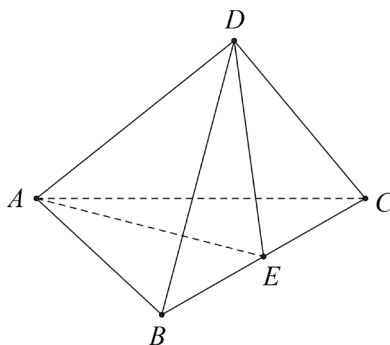
Khẳng định A đúng vì $SA \perp (ABC)$.

Khẳng định B đúng do $BC \perp (SAH)$.

Khẳng định D đúng do $SA \perp (ABC)$.

Khẳng định C sai.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Gọi E là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $BC \perp AD$.

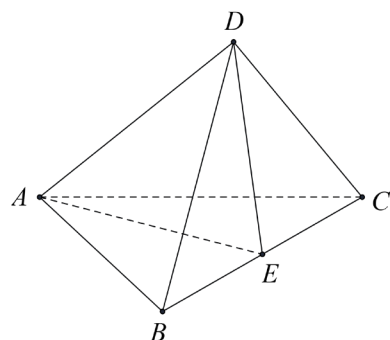
B. $BC \perp AE$.

C. $AB \perp DE$.

D. $BC \perp (ADE)$.

Lời giải

Chọn C





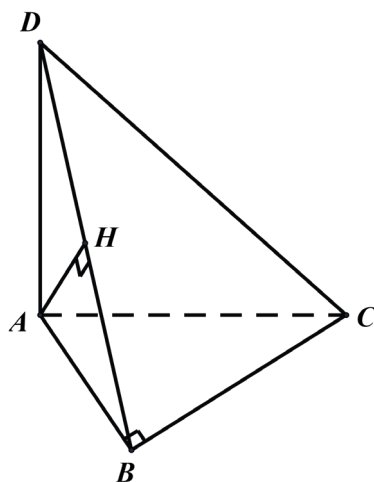
Ta có: $BC \perp AE$ (AE là đường trung tuyến của tam giác ABC cân tại A). (Câu B đúng)

Mặt khác: $BC \perp DE$ (DE là đường trung tuyến của tam giác DBC cân tại D).

Do đó $BC \perp (ADE)$. (Câu D đúng) $\Rightarrow BC \perp AD$. (Câu A đúng)

Vậy câu C là khẳng định sai.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông tại B , AH là đường cao của tam giác DAB . Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $BD \perp AC$.

B. $AB \perp DC$.

C. $AH \perp AC$.

D. $AH \perp DC$.

Lời giải

Chọn D

$DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$, mà $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AH$

Từ $\left. \begin{array}{l} AH \perp BD \\ AH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp DC$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC , J là trung điểm BM . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $BC \perp (SAC)$.

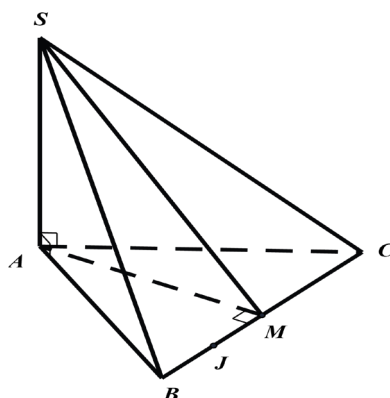
B. $BC \perp (SAM)$.

C. $BC \perp (SAJ)$.

D. $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Chọn B





Do tam giác ABC cân tại A , M là trung điểm của BC nên $BC \perp AM$

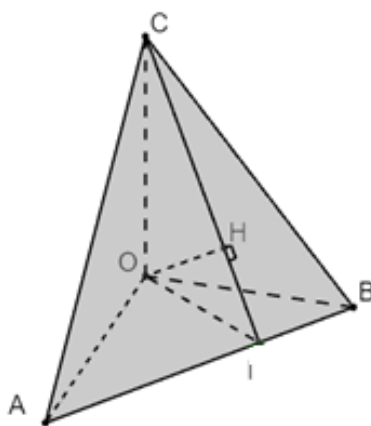
Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAM).$

Câu 42: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**.

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp AO$.

Lời giải

Chọn D



Xét phương án A: Do $\left\{ \begin{array}{l} OC \perp OB(gt) \\ OC \perp OA(gt) \end{array} \right.$ mà $OB \cap OA = O \in (OAB)$.

Nên $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$. Vậy A đúng. Vì thế, loại A.

Xét phương án B và C: Do $\left\{ \begin{array}{l} AB \perp CH \\ AB \perp OC(cmt) \\ CH \cap OC = C \in (COH) \end{array} \right. \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OH$.

Lại vì: $\left\{ \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp OA(OA \perp (COB)) \\ OA \cap AH = A \in (AOH) \end{array} \right. \Rightarrow BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp OH$

Ngoài ra $\left\{ \begin{array}{l} OH \perp CB \\ OH \perp AB \\ CB \cap AB = B \in (ABC) \end{array} \right. \Rightarrow OH \perp (ABC).$

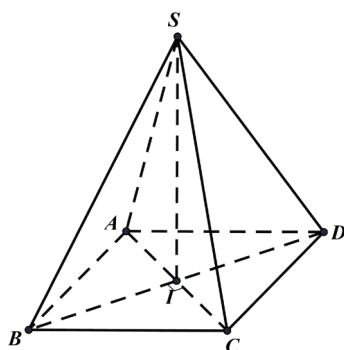
Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm I , $SA = SB = SC = SD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $SI \perp (ABCD)$. B. $AD \perp CD$. C. $BC \perp AC$. D. $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải



Chọn A



Tam giác SAD cân tại S , có I là trung điểm AD nên $SI \perp AD$

Tương tự với tam giác SBC , ta có $SI \perp BC$

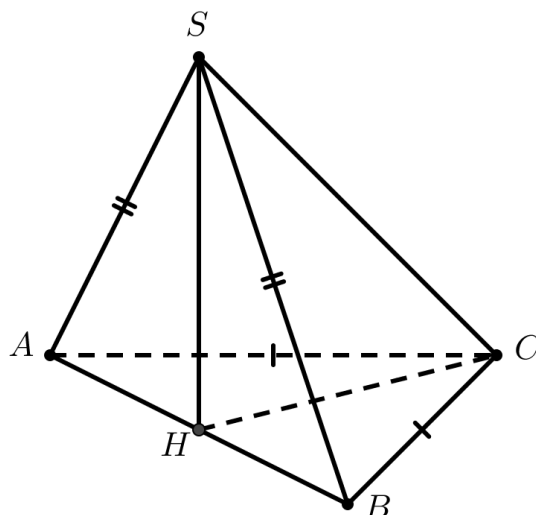
Từ và suy ra $SI \perp (ABCD)$.

Câu 44: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAC)$. B. $SB \perp AB$. C. $SA \perp (ABC)$. D. $AB \perp SC$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Gọi H là trung điểm của AB . Vì $SA = SB$ và $AC = CB$ nên $SH \perp AB$ và $CH \perp AB$. Suy ra $AB \perp (SHC)$. Do đó $AB \perp SC$.

Cách 2: Vì $SA = SB$ và $AC = CB$ nên S và C cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của AB . Do đó $AB \perp SC$.

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $DC \perp (ABC)$. B. $AC \perp BD$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $BC \perp AD$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ DH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD \subset (ADH) \\ BC \perp (ADH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD.$



Câu 46: Cho tứ diện $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SD . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại K .

Khẳng định 1 : $AK \perp SC$

Khẳng định 2 : $AM \perp SC$

Khẳng định 3 : $BD \perp SC$

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định trên ?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $SC \perp BD \Rightarrow AC \perp BD$. Vậy khẳng định 3 sai.

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

$$\begin{cases} AN \perp SD \\ AN \perp CD \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$$

Tương tự $AM \perp SC$.

$$\text{Khi đó : } SC \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AM \end{cases} \text{ . Khẳng định 1 và 2 đúng.}$$

Vậy có 2 khẳng định đúng.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $CM \perp SB$.

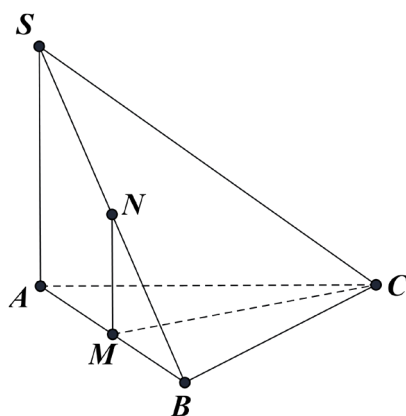
B. $NC \perp AB$.

C. $AN \perp BC$.

D. $MN \perp MC$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có: } SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM \quad (1)$$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AB \perp CM \quad (2)$$



Từ (1) và (2) ta có $CM \perp (SAB)$. Tức $CM \perp SB$, $CM \perp MN$.

Lại có: $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp AB$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $AB \perp (CMN)$. Tức $AB \perp NC$.

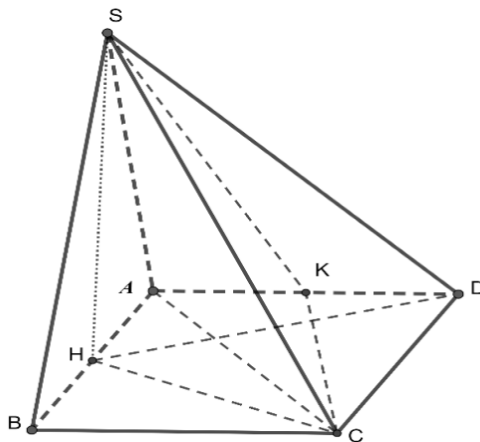
Giả sử $AN \perp BC$. Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow AS \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$, dẫn đến $BC \perp AB$, vô lý. Do đó điều giả sử là sai.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD . Khẳng định nào sau đây **Sai**?

- A. $CK \perp (SHD)$. B. $CK \perp SD$. C. $AC \perp SK$. D. $CK \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn C



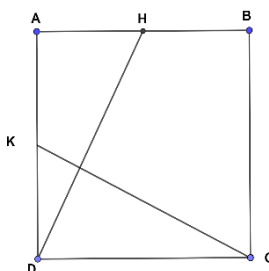
Ta có H là trung điểm AB và tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$ (1)

Mặt khác: $SH = a\sqrt{3}; SC = 2a\sqrt{2}, HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$

Dễ thấy: $SH^2 + HC^2 = 3a^2 + 5a^2 = 8a^2 = (2a\sqrt{2})^2 = SC^2 \Rightarrow \triangle SHC$ vuông tại $H \Rightarrow SH \perp HC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Khi đó: $AC \perp SH, AC \perp HK \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$ (Phương án C đúng)



Mà $\widehat{AHD} + \widehat{ADH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DKC} + \widehat{ADH} = 90^\circ \Rightarrow CK \perp HD$



Lại có: $SH \perp CK \Rightarrow CK \perp (SHD)$

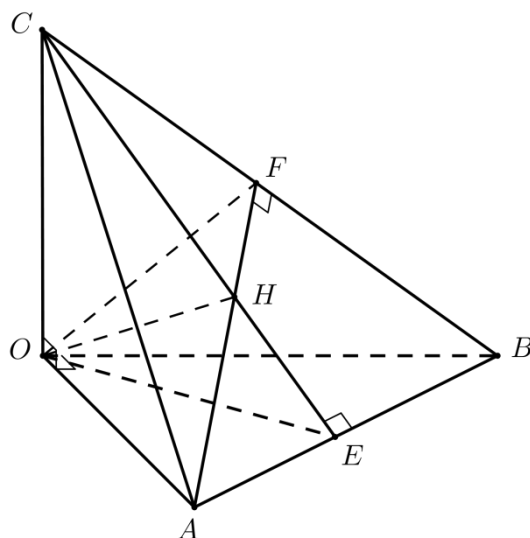
Suy ra phương án A, B đúng.

Câu 49: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp OA$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $CE \perp AB$ ($E \in AB$), $AF \perp AC$ ($F \in AC$), $CE \cap AF = H$.

Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau do đó

$$OA \perp (OBC), OB \perp (OAC), OC \perp (OAB).$$

Ta có $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$. Do đó đáp án A đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AF \\ BC \perp OA \text{ (vì } OA \perp (OBC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAF) \Rightarrow BC \perp OH$. Do đó đáp án C đúng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CE \\ AB \perp OC \text{ (vì } OC \perp (OAB)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (COE) \Rightarrow AB \perp OH$.

Do đó $\begin{cases} OH \perp BC \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$. Do đó đáp án B đúng.

Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OF \Rightarrow \triangle AOF$ vuông tại O .

Suy ra OH không vuông góc với OA . Do đó đáp án D sai.

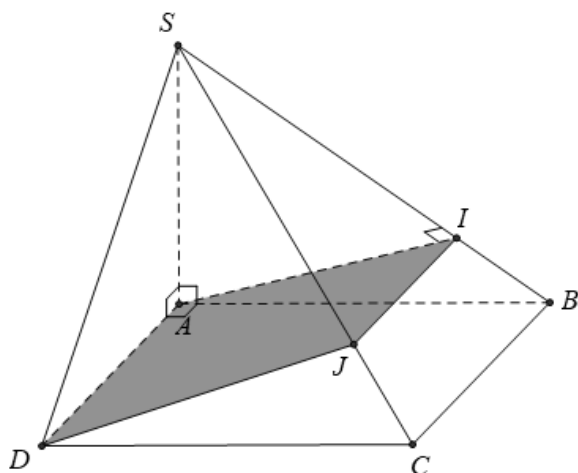
Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên SB và (P) là mặt phẳng chứa AI và song song với BC . Diện tích thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{9\sqrt{15}a^2}{25}$. B. $\frac{9\sqrt{15}a^2}{5}$. C. $\frac{9\sqrt{5}a^2}{25}$. D. $\frac{9\sqrt{3}a^2}{25}$.



Lời giải

Chọn A



Xét $\triangle SAB$ là tam giác vuông tại A và $SA = 2a$, $AB = a$. Vì I là hình chiếu vuông góc của A lên SB nên ta có: $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

+ Lại có: $\triangle AIB$ đồng dạng với $\triangle SAB \Rightarrow \frac{IB}{AB} = \frac{AB}{SB}$ hay $IB = \frac{AB^2}{SB} = \frac{a^2}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

$$\Rightarrow SI = SB - IB = a\sqrt{5} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$

Vì (P) là mặt phẳng chứa AI và song song với $BC \Rightarrow AD \subset (P)$ và cắt SC tại điểm J thỏa mãn: $IJ \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{IJ}{BC} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow IJ = \frac{SI \cdot BC}{SB} = \frac{\frac{4a\sqrt{5}}{5} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{4a\sqrt{3}}{5}.$$

Khi đó (P) giao với hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $ADJI$ với 2 đáy là

$$AD = a\sqrt{3} \text{ và } IJ = \frac{4a\sqrt{3}}{5}.$$

Lại có $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AI$ hay AI là chiều cao của hình thang $ADJI$ và $AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

$$S = \frac{1}{2}(AD + IJ) \cdot AI = \frac{1}{2} \left(a\sqrt{3} + \frac{4a\sqrt{3}}{5} \right) \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{15}a^2}{25}.$$

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC tại H , cắt SB , SD lần lượt tại I và K . Mặt phẳng qua I, K song song với SC cắt các cạnh

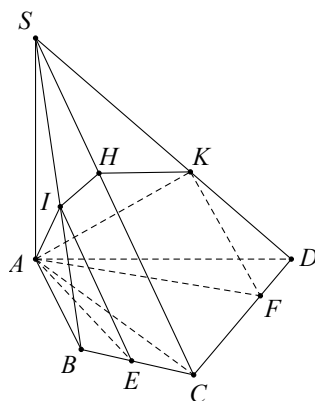


BC, CD lần lượt tại E và F . Biết SC hợp với đáy một góc 60° . Tính diện tích tứ giác $AECF$, biết diện tích tứ giác $AIHK$ bằng 10.

- A. $12\sqrt{3}$. B. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



$$\left(\widehat{SC, (ABCD)} \right) = \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SC \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha), (ABCD)} \right) = (SA, SC) = \widehat{ASC} = 30^\circ$$

IE, KF cùng song song với $SC \Rightarrow IE \perp (AIHK), KF \perp (AIHK)$.

Tứ giác $AIHK$ chính là hình chiếu của $AECF$ lên (α) .

Áp dụng công thức diện tích hình chiếu:

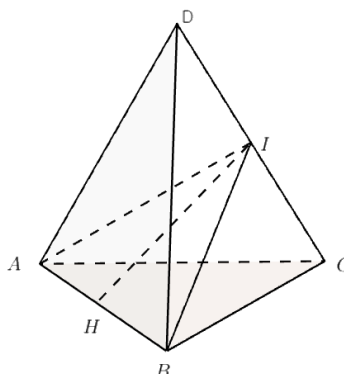
$$S_{AIHK} = S_{AECF} \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow S_{AECF} = \frac{S_{AIHK}}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ ($x > 0$), các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 4. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và vuông góc với cạnh CD tại I . Diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng:

- A. 12 B. 6 C. $8\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của CD thì $AI \perp CD$, $BI \perp CD \Rightarrow (ABI) \perp CD$. Mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (ABI) .

Gọi H là trung điểm của AB thì IH là đường cao trong tam giác cân $ABI \Rightarrow IH = \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}}$.

$$\Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $S_{IAB} \leq \frac{\frac{x^2}{4} + \left(12 - \frac{x^2}{4}\right)}{2} = 6$.

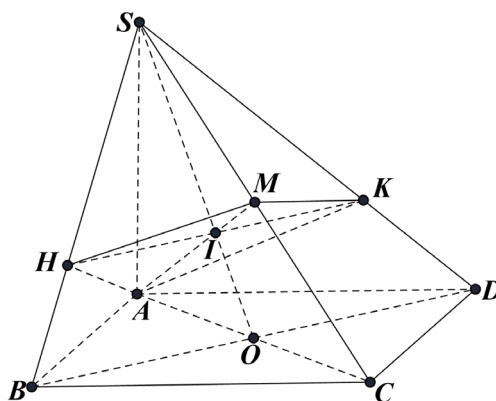
Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x}{2} = \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{6}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC , (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α) .

- A.** $12\sqrt{3}a^2$ **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$ **C.** $8\sqrt{3}a^2$ **D.** $4\sqrt{3}a^2$

Lời giải

Chọn B



Trong (SAC) , gọi $I = SO \cap AM$.

Trong (SBD) kẻ đường thẳng qua I và song song với BD lần lượt cắt SB, SD tại H, K .



Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AMKH$.

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} AC \perp BD \\ SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM \Rightarrow HK \perp AM.$$

$$\text{Ta có } AM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2}.2\sqrt{2}a = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Và } I \text{ là trọng tâm tam giác } SAC \text{ nên } \frac{HK}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}BD = \frac{4}{3}a.$$

$$\text{Vậy diện tích tứ giác } AHMK \text{ là } S_{AHMK} = \frac{1}{2}AM.HK = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2.$$

-----HẾT-----

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

24

PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phép chiếu vuông góc

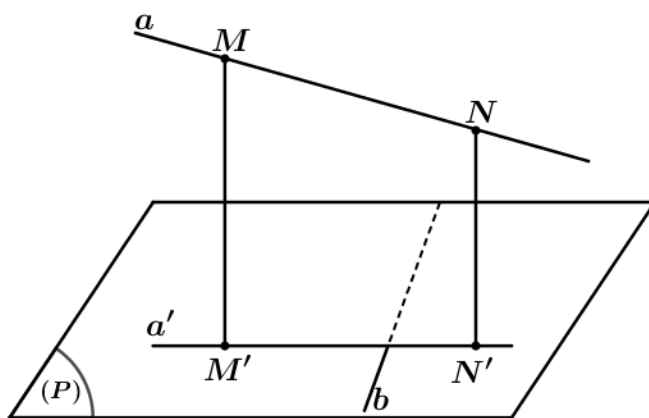
- Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) .

Chú ý:

- Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc H' của hình H trên mặt phẳng (P) còn được gọi là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) .

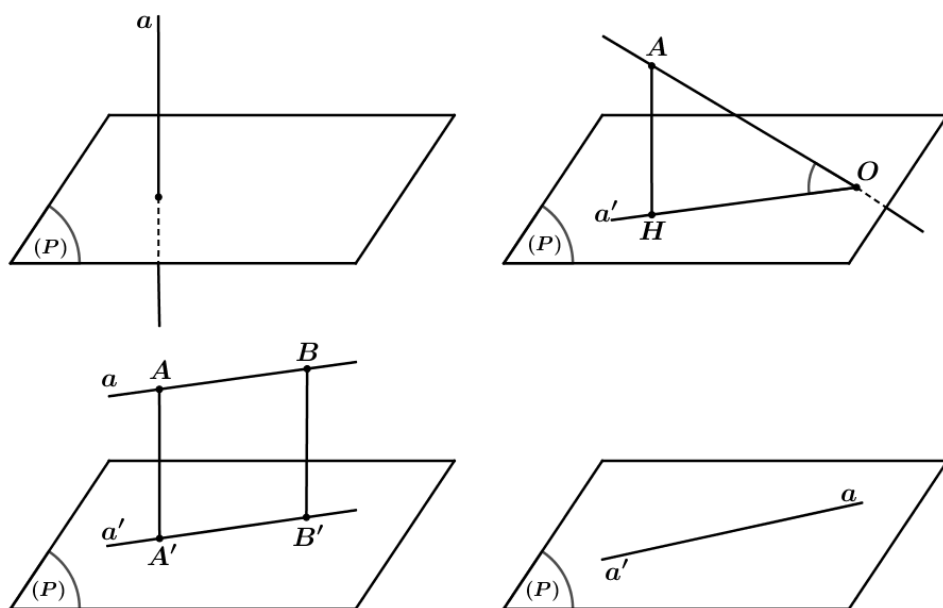
Định lý ba đường vuông góc:

- Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) không vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) .





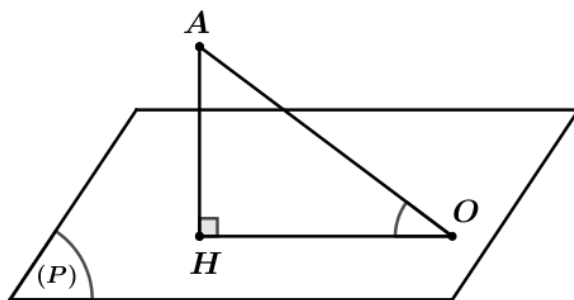
2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



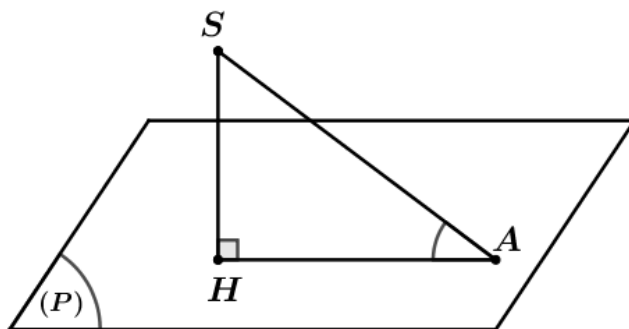
- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

Chú ý: Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Nhận xét:



- Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P) . Lấy điểm O thuộc mặt phẳng (P) , O không trùng H . Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc $\widehat{AOH}$.

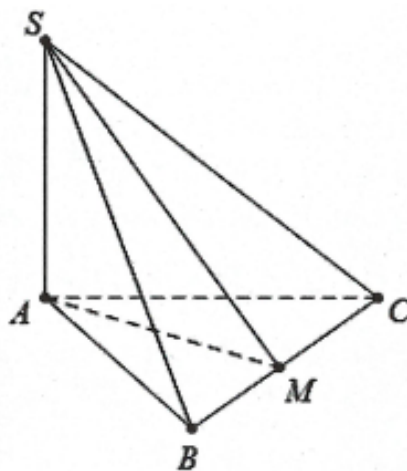
**B** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1: Xác định góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy**

Tìm góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC)

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC) .
- Như vậy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC) .
- Vậy $\widehat{(SA; (ABC))} = \widehat{(SA; HA)} = \widehat{SAH}$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc 60° và M là trung điểm của BC .

- Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .
- Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SB; (ABC))} = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Do đó $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a; \widehat{(SC; (ABC))} = \widehat{SCA}$.

Khi đó: $\cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

b) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SM; (ABC))} = \widehat{SMA} = \varphi$.



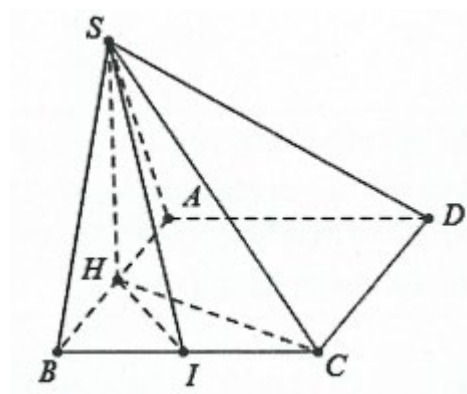
$$\text{Ta có: } AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \varphi = \frac{AM}{SM} = \frac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\sqrt{133}}{19}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a$; $AD = a$. Tam giác SAB đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

- Tính góc giữa SB, SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Gọi I là trung điểm của BC . Tính tan góc giữa SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



- Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH \perp AB$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Tam giác SAB đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Do } SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB; (ABCD))} = \widehat{SBH} = 60^\circ$$

$$\widehat{(SC; (ABCD))} = \widehat{SCH} \text{ và } \tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

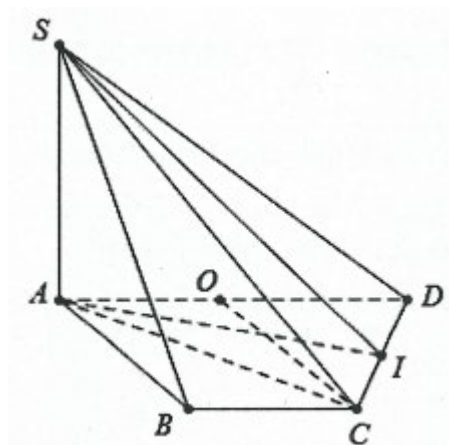
$$\text{b) Ta có: } HI = \sqrt{HB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{(SI; (ABCD))} = \widehat{SIH} \text{ và } \tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{SI} = a\sqrt{3} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a , $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 45° .

- Tính cosin góc tạo bởi các cạnh SC, SD và mặt đáy $(ABCD)$.
- Gọi I là trung điểm của CD , tính tan góc tạo bởi SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của $AD \Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh $a \Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C .

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SB; (ABCD)}) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Do đó $SA = AB \tan 45^\circ = a$

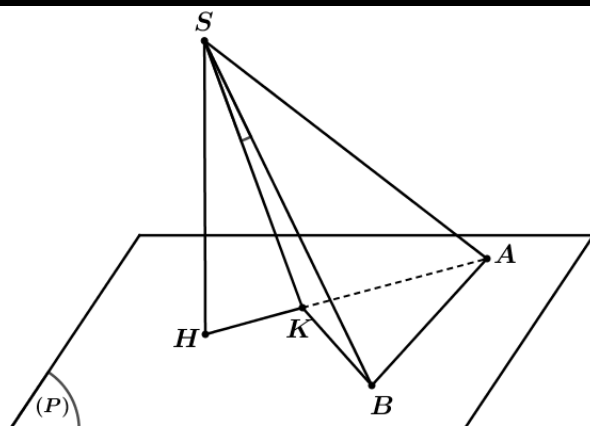
$$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos(\widehat{SC; (ABC)}) = \cos \widehat{SCA}$$

$$= \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos(\widehat{SD; (ABCD)}) = \cos \widehat{SDA} = \frac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{b) Ta có: } AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Do đó } \tan(\widehat{SI; (ABCD)}) = \tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

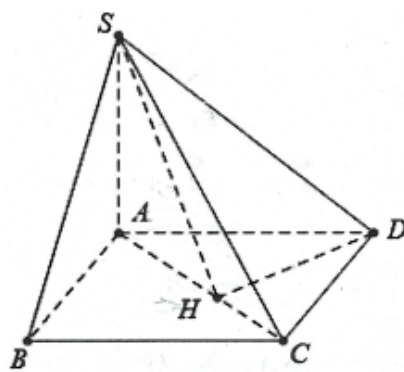
**Dạng 2: Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng chứa đường cao**

Tìm góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (SHA) với $(SHA) \perp (ABH)$.

- Dụng $BK \perp AH$, có $BK \perp SH \Rightarrow BK \perp (SHA)$.
- Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH) .
- Vậy $\widehat{(SB; (SAH))} = \widehat{(SB; SK)} = \widehat{BSK}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo bởi:

- SC và mặt phẳng (SAB) ; SC và mặt phẳng (SAD) .
- SD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC; (ABCD))} = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Lại có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{13} \\ SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{15} \\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a \end{cases}$$

Do $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC; (SAB))} = \widehat{CSB}$. Mặt khác $\cos \widehat{CSB} = \frac{SB}{SC} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Tương tự $CD \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{(SC; (SAD))} = \widehat{CSD}$ và $\cos \widehat{CSD} = \frac{SD}{SC} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

a) SC và mặt phẳng (SAB).

b) SD và mặt phẳng (SAC).

[illegible]

Xét tam giác vuông OAB ta có: $\sin \widehat{OAB} = \frac{OB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{OAB} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều cạnh } a.$$

Suy ra $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Do $\triangle ABC$ đều cạnh a nên H là trung điểm của AB .

Ta có: $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{CSH} = \frac{CH}{SH}$ trong đó $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

$$\text{Do đó } \tan \widehat{CSH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{13}.$$

b) Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SD; (SAC))} = \widehat{DSO}$ và $\tan \widehat{DSO} = \frac{OD}{SO}$.

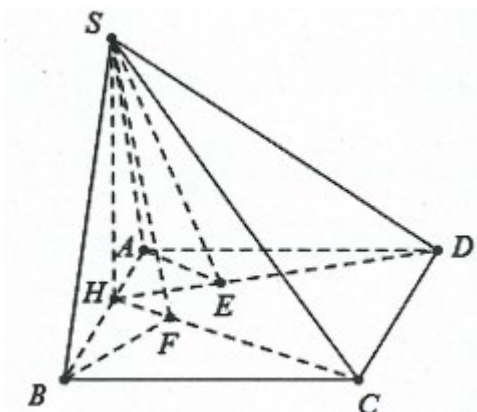
Trong đó $OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{DSO} = \frac{\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HA}$. Biết $AB = 3, AD = 6$ và $SH = 2$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SHD).

b) SB và mặt phẳng (SHC).

Lời giải



$$\text{a) Ta có: } AH = 1, HB = 2 \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{5} \\ SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Dựng } AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow (\widehat{SA; (SHD)}) = \widehat{ASE}$$

$$\text{Mặt khác } AE = \frac{AH \cdot AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{6}{\sqrt{37}}$$

$$\text{Suy ra } \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{6}{\sqrt{185}}.$$

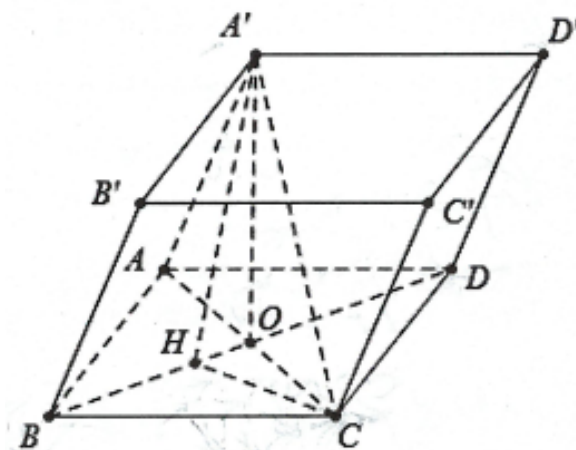
$$\text{b) Dựng } BF \perp HC \Rightarrow BF \perp (SHC).$$

$$\text{Khi đó } (\widehat{SB; (SHC)}) = \widehat{BSF}, BF = \frac{BH \cdot BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Ta có: } \tan(\widehat{SB; (SHC)}) = \tan \widehat{BSF} = \frac{BF}{SB} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật $ABCD$, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng $(A'BD)$

Lời giải



$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4a \Rightarrow OA = 2a = OC.$$

$$\text{Do } A'O \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{A'O; (ABCD)}) = \widehat{A'AO} = 60^\circ \Rightarrow A'O = OA \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$$



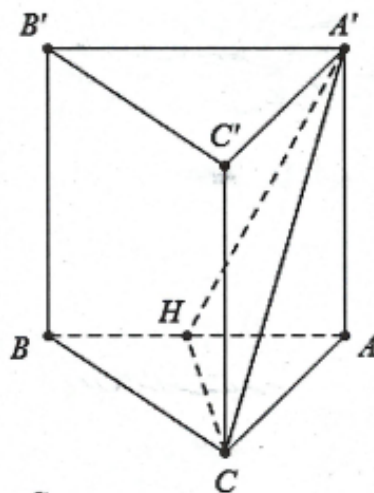
Dựng $CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (A'BD) \Rightarrow (\widehat{A'C; (A'BD)}) = \widehat{CA'H}$.

Ta có: $CH = \frac{BC \cdot CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = a\sqrt{3}$, $A'C = \sqrt{OA'^2 + OC^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.

Suy ra $\cos \widehat{CA'H} = \frac{A'H}{A'C} = \frac{\sqrt{A'C^2 - HC^2}}{A'C} = \frac{\sqrt{16a^2 - 3a^2}}{4a} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ biết $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABB'A') \Rightarrow (\widehat{A'C; (ABB'A')}) = \widehat{CA'H}$.

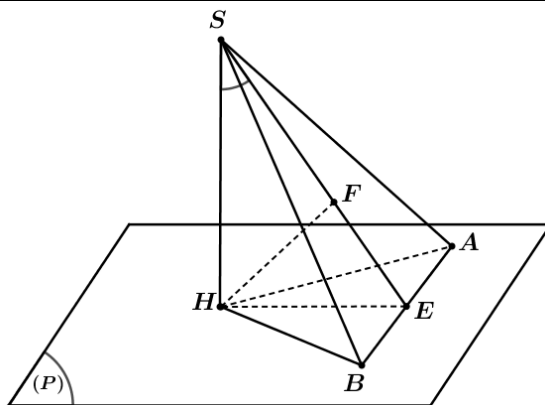
Lại có: $A'H = \sqrt{AA'^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\tan \widehat{CA'H} = \frac{CH}{A'H} = 1 \Rightarrow \widehat{CA'H} = 45^\circ$.

Vậy $(\widehat{A'C; (ABB'A')}) = \widehat{CA'H} = 45^\circ$.



Dạng 3: Góc giữa đường cao và mặt bên

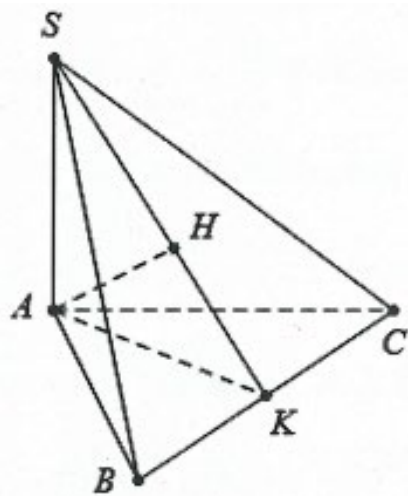


Tìm góc giữa đường cao SH và mặt phẳng (SAB) .

- Dựng $HE \perp AB, HF \perp SE$.
- Ta có: $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HF$.
- Mặt khác $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAB) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB)
- Vậy $\widehat{(SH; (SAB))} = \widehat{(HF; SF)} = \widehat{HSF}$.

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K . Ta có: $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

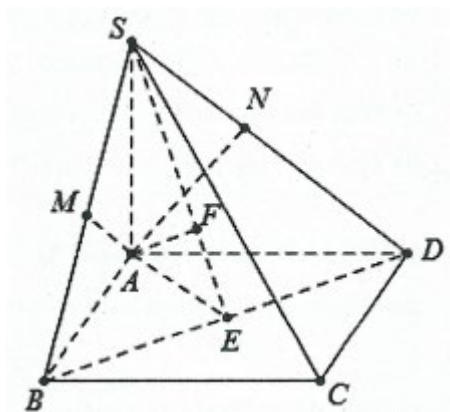
Kẻ $AH \perp SK, H \in SK$. Mà $BC \perp AH$ suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{(SA; (SBC))} = \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$.

Tam giác SAK vuông tại A , có $SA = AK = a\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A nên $\widehat{ASK} = 45^\circ$.

Vậy $\widehat{(SA; (SBC))} = 45^\circ$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SBD)$ và (SCD) .

Lời giải



$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Dựng $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC) .

$$\text{Khi đó: } (\widehat{SA; (SBC)}) = \widehat{ASM} = \widehat{ASB} = \alpha.$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{AB}{SA} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } (\widehat{SA; (SCD)}) = \widehat{ASD} = \beta \text{ và } \tan \beta = \frac{AD}{SA} = 1.$$

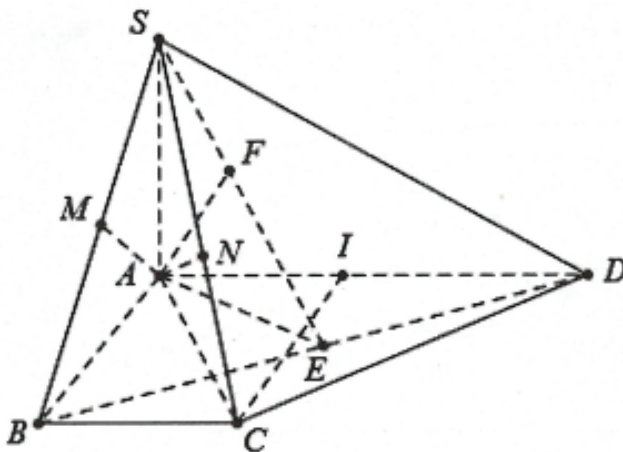
$$\text{Dựng } AE \perp BD, AF \perp SE \text{ ta có: } \begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AF.$$

$$\text{Mặt khác } AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SBD) \Rightarrow (\widehat{SA; (SBD)}) = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}.$$

$$\text{Khi đó } \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA}, \text{ trong đó } AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 60° . Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng (SBC) , (SCD) và (SBD) .

Lời giải



$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}. \text{ Do } SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA} = 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}.$$



Dựng $AM \perp SB$, có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC) .

Suy ra: $(\widehat{SA; (SBC)}) = \widehat{ASM} = \widehat{ASB}$.

Ta có: $\tan \widehat{ASB} = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = \frac{AD}{2} = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông

tại C . Khi đó $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

Dựng $AN \perp SC \Rightarrow (\widehat{SA; (SCD)}) = \widehat{ASN} = \widehat{ASC}$. Ta có: $\tan \widehat{ASC} = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dựng $\begin{cases} AE \perp BD \\ AF \perp SE \end{cases} \Rightarrow (\widehat{SA; (SBD)}) = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

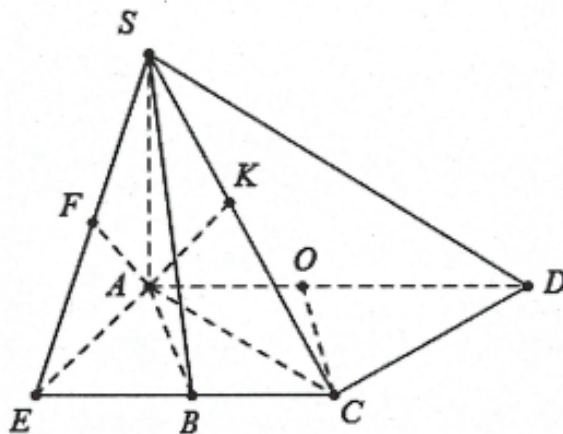
Mặt khác $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{\sqrt{30}}{15}$.

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a , $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° .

a) Tính tan góc tạo bởi SA và (SBC) .

b) Tính góc tạo bởi SA và (SCD) .

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của $AD \Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh $a \Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C .

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SB; (ABCD)}) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

$\Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}, AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

Dựng $AE \perp BC, AF \perp SE \Rightarrow (\widehat{SA; (SBC)}) = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Do $\widehat{ABE} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = 60^\circ$.



Mặt khác $AE = AB \sin \widehat{ABE} = AB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan(\widehat{SA; (SBC)}) = \tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{2}$.

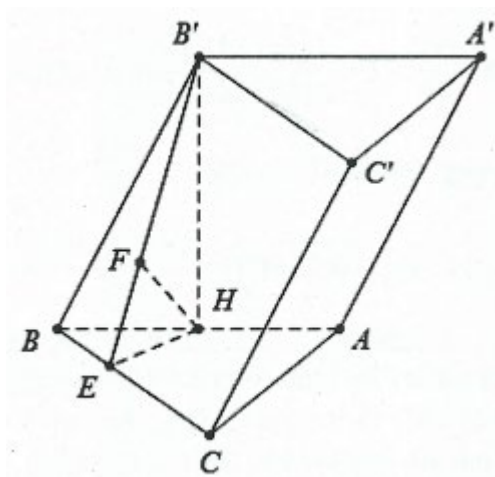
b) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Khi đó $(\widehat{SA; (SCD)}) = \widehat{ASK} = \widehat{ASC} = \varphi$.

Ta có: $\tan \varphi = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$. Vậy $(\widehat{SA; (SCD)}) = 45^\circ$.

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB , đường cao $B'H = \frac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa đường thẳng $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

Lời giải



Dựng $HE \perp BC, HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$

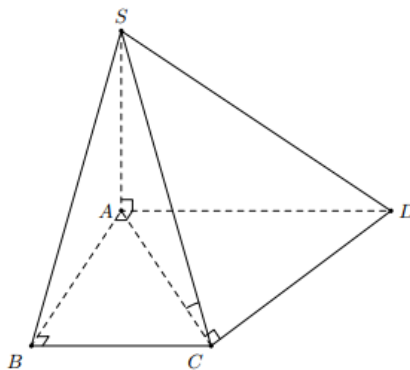
Suy ra: $BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC') \Rightarrow (\widehat{B'H; (BCC'B')}) = \widehat{HB'F} = \widehat{HB'E}$.

Ta có: $HE = HB \sin \widehat{HBE} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos \widehat{HB'E} = \frac{B'H}{B'E} = \frac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a, CD = a$ và tam giác ACD vuông tại C , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

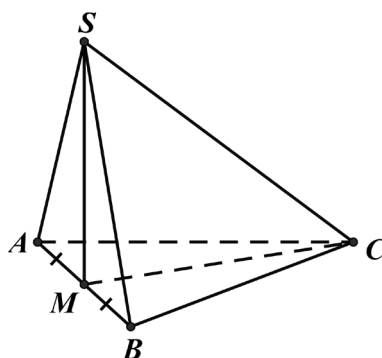
Do đó góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

Tam giác ACD vuông tại C nên ta có $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , gọi M là trung điểm AB . Biết $SM \perp (ABC)$ và tam giác SAB đều. Tính góc giữa SC và (ABC)

Lời giải

Vì $SM \perp (ABC)$ nên $(SC; (ABC)) = (SC; MC) = \widehat{SCM}$.

Đáy là tam giác vuông tại C nên $CM = \frac{1}{2}AB$.

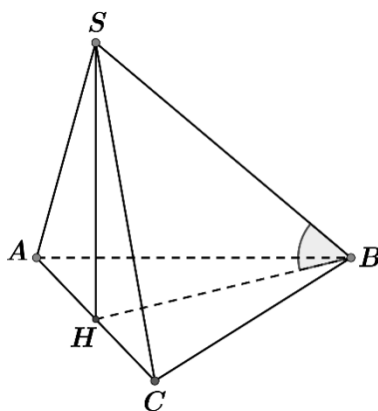
Tam giác SAB đều nên $SM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SMC$ vuông tại M : $\tan \widehat{SCM} = \frac{SM}{MC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCM} = 60^\circ$. Vậy $(SC; (ABC)) = 60^\circ$.



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $AB = AC = a$, mặt bên (SAC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính tang của góc giữa SB và mặt phẳng đáy

Lời giải



Gọi H là trung điểm AC . Ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (ABC) \\ (SAC) \cap (ABC) = AC \Rightarrow SH \perp (ABC) \text{ tại } H, \text{ mà} \\ SH \perp AC \end{cases}$

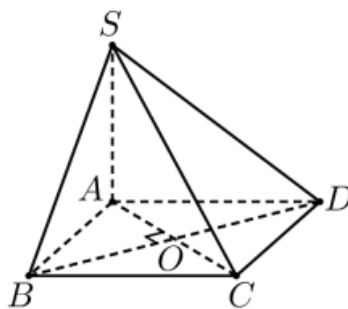
$SB \cap (ABC) = B$ nên suy ra HB là hình chiếu của SB trên (ABC) .

Suy ra $\widehat{[SB, (ABC)]} = (SB, HB) = \widehat{SBH}$.

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \tan \widehat{SBH} = \tan \widehat{[SB, (ABC)]} = \frac{SH}{HB} = 1.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC)

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC).$

Do đó: SO là hình chiếu vuông góc của SD trên (SAC) .

Khi đó: Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng góc $\widehat{DSO}$.

Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $BD = 2\sqrt{2}a \Rightarrow DO = \frac{1}{2}DB = \sqrt{2}a$.

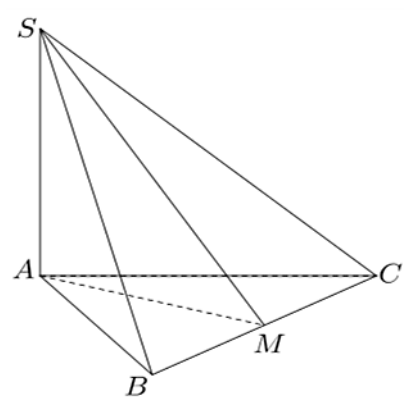


Tam giác SAD vuông cân tại A nên $SD = 2a\sqrt{2}$.

Tam giác SOD vuông tại O nên $\sin \widehat{DSO} = \frac{DO}{SD} = \frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DSO} = 30^\circ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a}{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Xác định góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC)

Lời giải

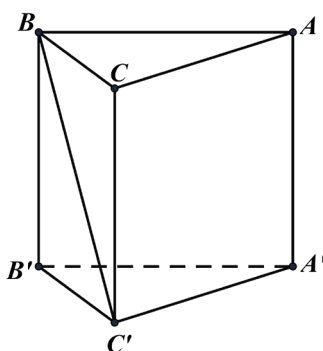


Ta có $AM \perp BC$ mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SM \Rightarrow$ góc giữa SM và (ABC) bằng $\widehat{SMA}$

ΔSMA vuông tại A có $\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $AA' = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'B'C')$

Lời giải



Ta có: $(BC'; (A'B'C')) = (BC'; B'C') = \widehat{BC'B}$.

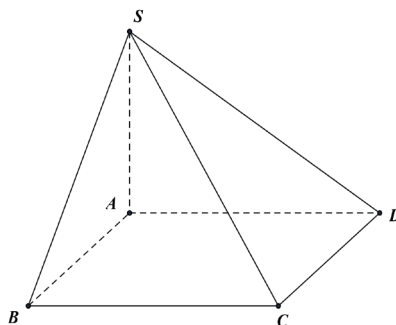
$B'C' = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \Rightarrow B'C' = BB' = 2a$. Suy ra $\Delta BB'C'$ vuông cân tại B' .

Do đó $\widehat{BC'B} = 45^\circ$. Vậy $(BC'; (A'B'C')) = 45^\circ$



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



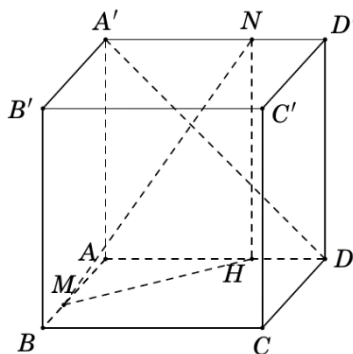
Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a.$$

Tam giác SAD vuông cân tại A nên $\widehat{SDA} = 45^\circ$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M , N là hai điểm thay đổi lần lượt trên các cạnh AB , $A'D'$ sao cho $MN = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên cạnh AD .

Khi đó ta có $NH \perp (ABCD) \Rightarrow (MN, (ABCD)) = \widehat{NMH}$.

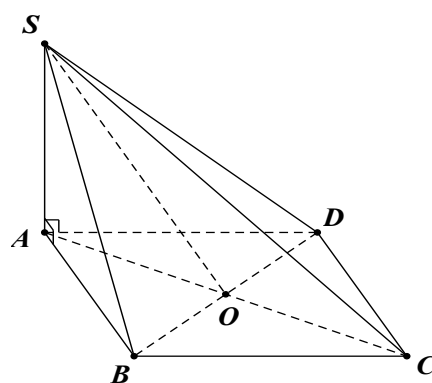
$$NH = DD' = a.$$

$$\Delta NMH \text{ vuông tại } H : \sin \widehat{NMH} = \frac{NH}{NM} = \frac{a}{\frac{2\sqrt{3}a}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } (MN, (ABCD)) = \widehat{NMH} = 60^\circ.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , ΔABD đều cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Ta có: $ABCD$ là hình thoi có tâm là $O \Rightarrow O$ là trung điểm của BD .

Mà $\triangle ABD$ đều nên $AO \perp BD$

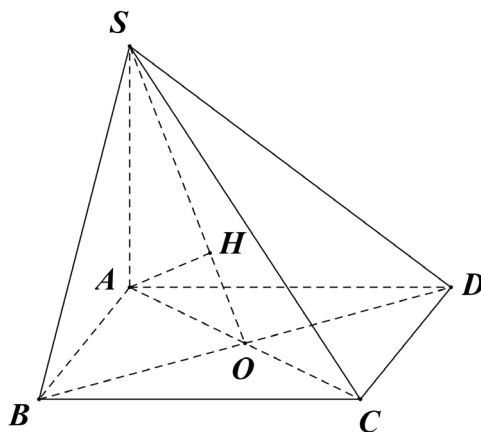
Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SO, (ABCD))} = \widehat{SOA}$

$$\text{Xét } \triangle ABO \text{ có: } AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{SAO} = \frac{SA}{AO} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Do $SA \perp BD, AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên SO . Khi đó $AH \perp SO, AH \perp BD \Rightarrow AH \perp (SBD)$.

Do đó hình chiếu của SA xuống (SBD) là SH .

Vậy góc giữa SA và (SBD) là $\widehat{ASH} = \widehat{ASO}$.

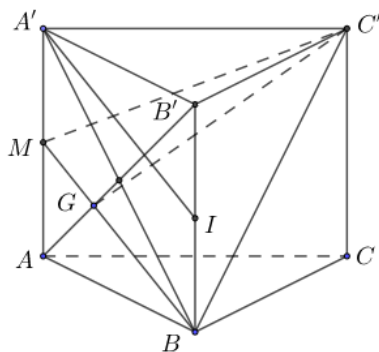
Ta có $\triangle ABC$ đều cạnh $2a \Rightarrow AO = a$

$$\text{Xét } \triangle SAO \text{ có } \tan \widehat{ASO} = \frac{OA}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ.$$



Câu 11: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) .

Ta có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow BB' \perp (ABC)$, $AB' \cap (ABC) = A$

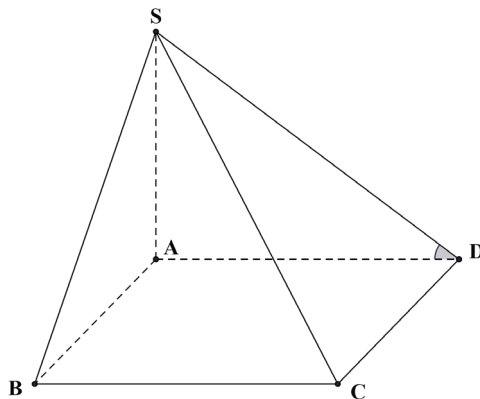
$\Rightarrow (AB', (ABC)) = \widehat{B'AB}$.

Tam giác $B'AB$ vuông cân tại B nên $\widehat{B'AB} = 45^\circ$.

Vậy $(AB', (ABC)) = 45^\circ$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là A

Suy ra hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AD .

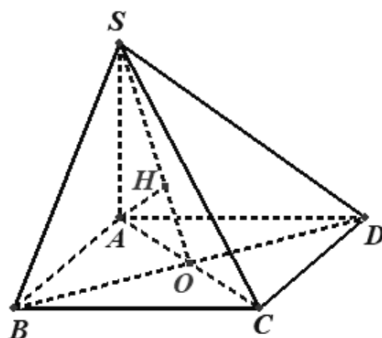
Do vậy $\widehat{[SD; (ABCD)]} = \widehat{(SD; AD)} = \widehat{SDA}$.

Ta có $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$ hay $\widehat{[SD; (ABCD)]} = 60^\circ$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .



Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, H là hình chiếu của A trên SO .

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = a.$$

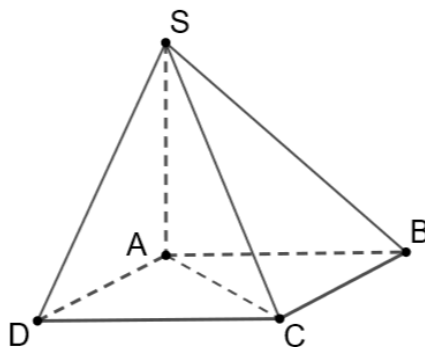
Ta có $BD \perp AO, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH$. Mà $SO \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBD)$

$$\Rightarrow (SA, (SBD)) = (SA, SH) = \widehat{ASH} = \widehat{ASO}.$$

$$\text{Khi đó: } \tan \widehat{ASO} = \frac{SA}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ASO} = 60^\circ.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = \frac{\sqrt{6}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Ta có: AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên

$$(\widehat{SC; (ABCD)}) = (\widehat{SC; AC}) = \widehat{SCA}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAC \text{ vuông tại } A \text{ có } AC = a\sqrt{2}; SA = \frac{\sqrt{6}a}{3} \text{ nên } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

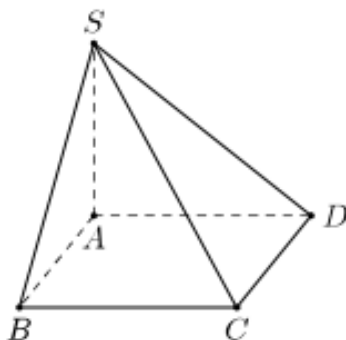
$$\text{Suy ra } \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

$$\text{Vậy } (\widehat{SC; (ABCD)}) = 30^\circ.$$



Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Ta có $\widehat{(SD; (ABCD))} = \widehat{(SD; AD)} = \widehat{SDA}$.

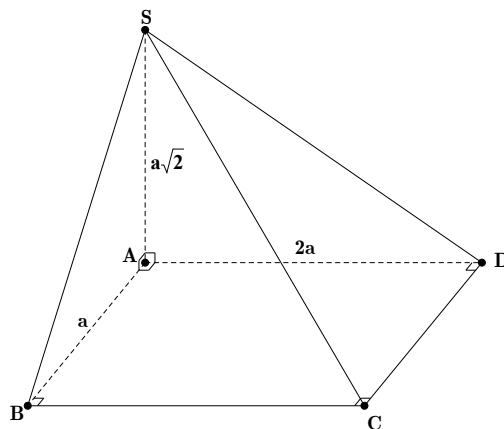
Xét $\triangle SAB$ vuông tại $A \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.

Xét $\triangle SAD$ vuông cân tại A (vì $SA = AD = 2a$).

Vậy $\widehat{SDA} = 45^\circ$.

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp BC$.

Mà $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$.

Do đó $BC \perp (SAB)$ nên $\widehat{(SC, (SAB))} = \widehat{CSB}$.

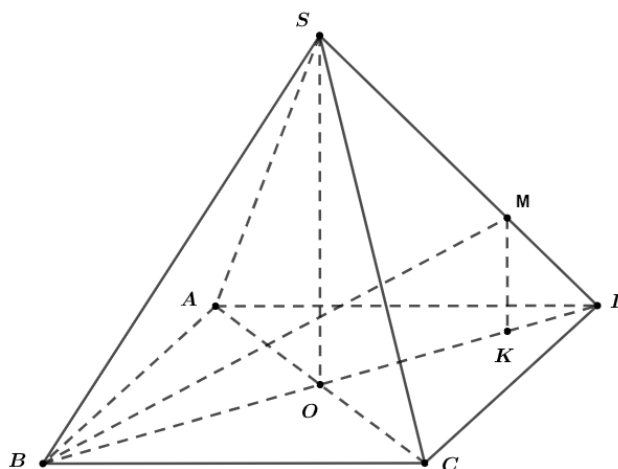
Tam giác SAB vuông tại A nên $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{CSB} = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Tính giá trị tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Có $ABCD$ là hình vuông; $BD = a\sqrt{2}$; $OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Trong ΔSOD dựng $MK \parallel SO$ suy ra $MK \perp (ABCD)$; $\frac{MK}{SO} = \frac{MD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MK = \frac{SO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

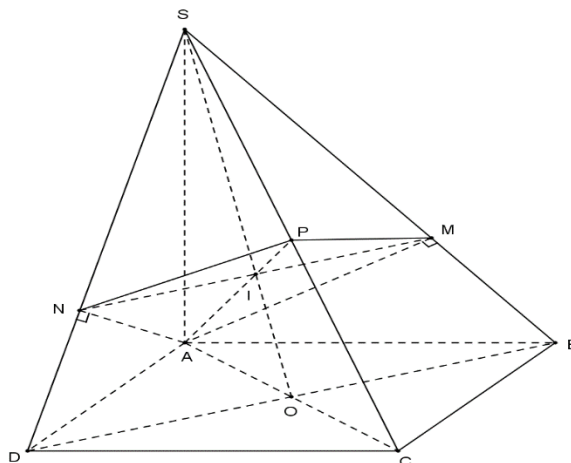
Ta có góc giữa BM và $(ABCD)$ bằng $\widehat{MBK}$; $\tan \widehat{MBK} = \frac{MK}{BK}$

$$BK = BO + OK = OD + \frac{2OD}{3} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Suy ra: } \tan \widehat{MBK} = \frac{MK}{BK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{6}}{\frac{5a\sqrt{2}}{6}} = \frac{1}{5}$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN)

Lời giải



Gọi $P = SC \cap (AMN)$; $O = AC \cap BD \Rightarrow MN$; AP ; SO đồng quy tại I



$$\text{Ta có: } \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$$

$$\text{Mà } AM \perp SB \text{ nên } AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$$

$$\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

$$\text{Mà } AN \perp SD \text{ nên } AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$$

Do đó $SC \perp (AMN) \Rightarrow AP \perp SC$ và PM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (AMN) hay PM là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (AMN)

$$\Rightarrow \widehat{(SB; (AMN))} = \widehat{(SB; PM)} = \widehat{SMP} \text{ (do tam giác } SMP \text{ vuông tại } P)$$

Từ gt $\Rightarrow$ Tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow P$ là trung điểm SC

$\Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác SAC

$$\text{Lại có: } \triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow SA = SB \text{ và } AM = AN \Rightarrow \triangle SAM = \triangle SAN$$

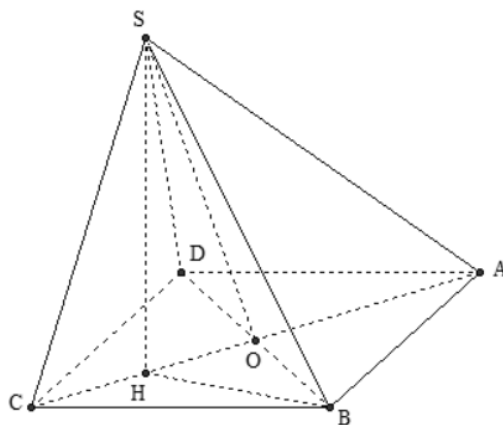
$$\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SM = \frac{2}{3}SB = \frac{2}{3}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Mặt khác } SP = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = a$$

$$\text{Do đó } \sin \widehat{SMP} = \frac{SP}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{(SB; (AMN))} = \widehat{SMP} = 60^\circ.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, tam giác SBD là tam giác đều, $SA = 2SC$. Tính cosin của góc hợp bởi đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



$$\text{Đặt } AB = a. \text{ Suy ra } BD = a, AC = a\sqrt{3}, SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ mà } BD \subset (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$$

Suy ra hình chiếu H của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ thuộc giao tuyến AC .

$$\text{Mặt khác: } SO^2 = \frac{SA^2 + SC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{5SC^2}{2} - \frac{3a^2}{4}$$



$$\Leftrightarrow SC^2 = \frac{3a^2}{5} \Leftrightarrow SC = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow SA = \frac{2a\sqrt{15}}{5}.$$

Ta có: $SC^2 + SA^2 = \frac{15a^2}{25} + \frac{60a^2}{25} = \frac{75a^2}{25} = 3a^2 = AC^2$, suy ra: ΔSAC vuông tại S .

$$SH.AC = SA.SC \Leftrightarrow SH = \frac{SA.SC}{AC} = \frac{a\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{2a\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{1}{a\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

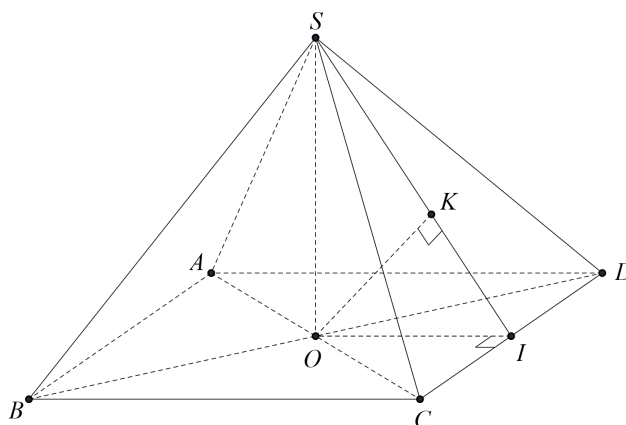
Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên

$$(SB; (ABCD)) = \widehat{SBH}.$$

$$\sin \widehat{SBH} = \frac{SH}{SB} = \frac{2a\sqrt{3}}{5a} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \cos \widehat{SBH} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{12}{25}} = \frac{\sqrt{13}}{5}.$$

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng a , O là tâm của đáy và $SO = a$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SDC) . Tính $\sin \alpha$

Lời giải



$$\text{Ta có: } \sin \alpha = \frac{d(A; (SDC))}{SA} = \frac{2d(O; (SDC))}{SA}$$

$$\text{Dựng } OI \perp BC \text{ tại } I, OK \perp SI \text{ tại } K \Rightarrow OK = d(O; (SDC)).$$

$$\text{Do } ABCD \text{ là hình vuông nên } I \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow OI = \frac{a}{2}.$$

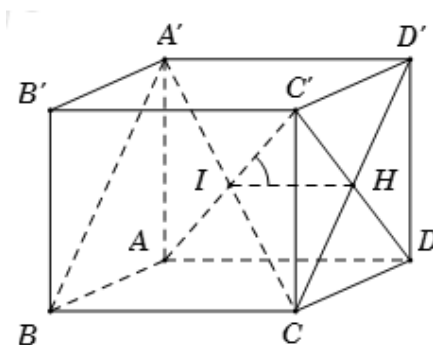
$$\text{Ta có: } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{30}}.$$

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Tính $\tan \varphi$

Lời giải

Ta có hình vẽ



Gọi $I = A'C \cap AC'$, $H = C'D \cap CD'$.

Ta có $C'D \perp CD'$, $C'D \perp A'D'$ suy ra $C'D \perp (A'BCD')$

Từ đó suy ra $C'H \perp (A'BCD')$

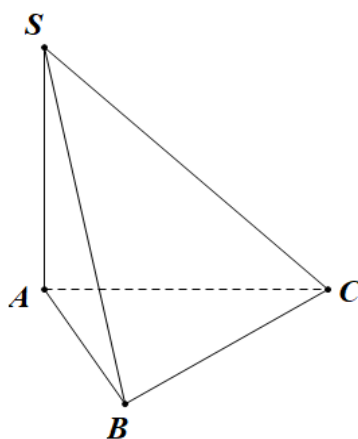
$\Rightarrow HI$ là hình chiếu vuông góc của $C'I$ lên $(A'BCD')$.

Do đó $(\widehat{AC';(A'BCD')}) = (\widehat{C'I;(A'BCD')}) = (\widehat{C'I;HI}) = \widehat{C'IH} = \varphi$.

Trong $\triangle C'HI$ vuông tại H ta có $\tan \varphi = \tan \widehat{C'IH} = \frac{C'H}{IH} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = 2a$, $BC = 2a\sqrt{3}$, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) . Tính $\tan \alpha$

Lời giải



Ta có: $(\widehat{(SBC);(ABC)}) = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a$.

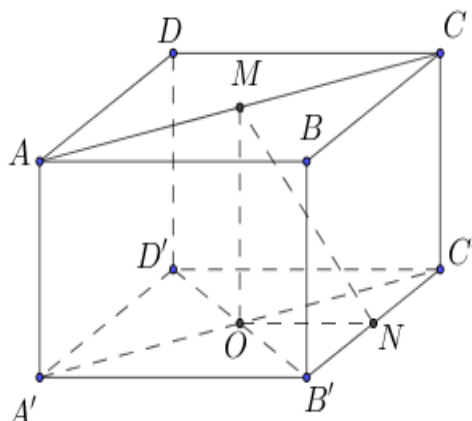
Xét tam giác vuông ABC có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + 12a^2} = 4a$.

Góc $(\widehat{SC;(ABC)}) = \widehat{SCA} = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{2\sqrt{3}a}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$. Gọi α là góc hợp giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

Lời giải



Ta có M là trung điểm của $AC \Rightarrow M$ là tâm của hình vuông $ABCD$.

Gọi $O = A'C' \cap B'D' \Rightarrow MO \perp (A'B'C'D')$.

Ta có $MN \cap (A'B'C'D') = N \Rightarrow (MN, (A'B'C'D')) = \widehat{MNO} = \alpha$.

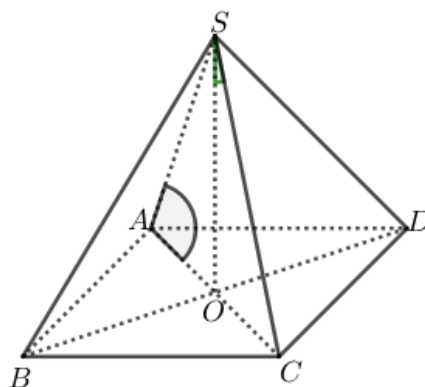
Gọi cạnh của hình lập phương bằng $a \Rightarrow ON = \frac{a}{2}$ và $OM = \frac{a}{2}$.

Tam giác MON vuông tại $O \Rightarrow MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \widehat{MNO} = \frac{OM}{MN} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Vậy $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = SB = SC = SD$ cùng hợp với đáy một góc 30° . Tính góc hợp bởi đường thẳng SC với mặt phẳng (SBD)

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng $(ABCD)$.



Khi đó: $(\widehat{SA, (ABCD)}) = (\widehat{SA, OA}) = \widehat{SAO} = 30^\circ$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $CO \perp BD$ (1).

Ta có: $\left. \begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \\ CO \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp CO$ (2).

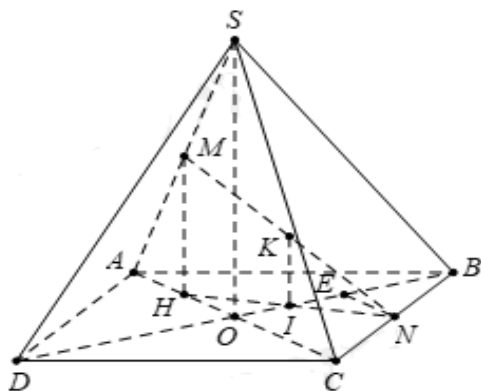
Từ (1) và (2) suy ra: $CO \perp (SBD) \Rightarrow SO$ là hình chiếu của SC lên (SBD) .

Do đó $(\widehat{SC, (SBD)}) = (\widehat{SC, SO}) = \widehat{CSO}$. Vì $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại $S \Rightarrow \widehat{SCO} = \widehat{SAO} = 30^\circ$.

Vậy góc hợp bởi đường thẳng SC với mặt phẳng (SBD) bằng 60° .

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính tan góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) ?

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

Suy ra $(\widehat{MN, (ABCD)}) = (\widehat{MN; HN}) = \widehat{MNH} = 60^\circ \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Gọi $I = HN \cap BD$, qua I kẻ đường thẳng $\parallel MH$ cắt MN tại K

Khi đó $K = MN \cap (SBD)$ và E là hình chiếu của N trên BD

Suy ra $NE \perp (SBD) \Rightarrow (\widehat{MN; (SBD)}) = (\widehat{NK; EK}) = \widehat{NKE}$

Tam giác NEK vuông tại E có $NE = \frac{OC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $NK = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

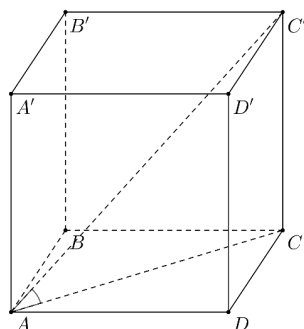
Ta có $\sin \widehat{NKE} = \frac{EN}{NK} = \frac{a\sqrt{2}}{4} : \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \cos(\widehat{MN; (SBD)}) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

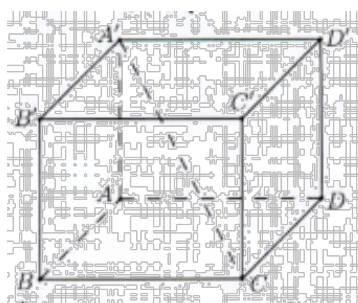
Chọn A

$$\text{Ta có } (\widehat{AC', (ABCD)}) = (\widehat{AC', AC}) = \widehat{C'AC} = \alpha.$$

Giả sử hình lập phương có cạnh là a

$$\text{Trong tam giác } A'AC \text{ ta có } \sin \alpha = \frac{CC'}{AC'} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

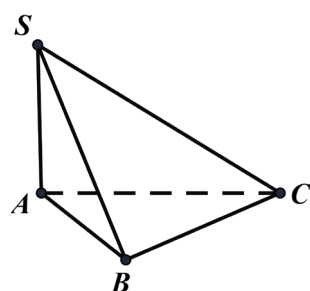
D. 90° .

Lời giải

Góc cần tìm là $A'CA = \alpha$. Vì đây là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ và

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{AC} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$. (minh họa như hình vẽ bên).

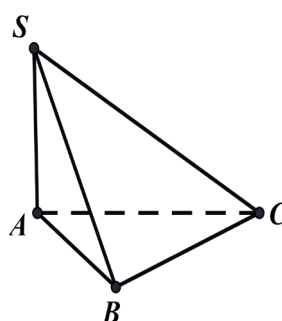


Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn B

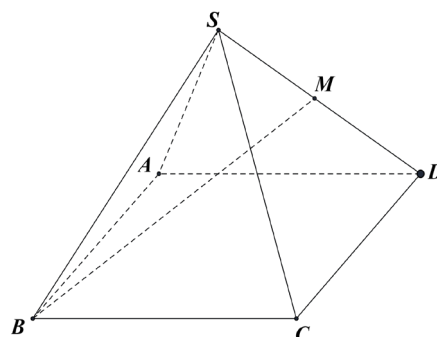


$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \cap (ABC) = \{C\} \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}.$$

$$\text{Mà: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a = SA.$$

Vì ΔSAC vuông cân tại A nên ta có $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

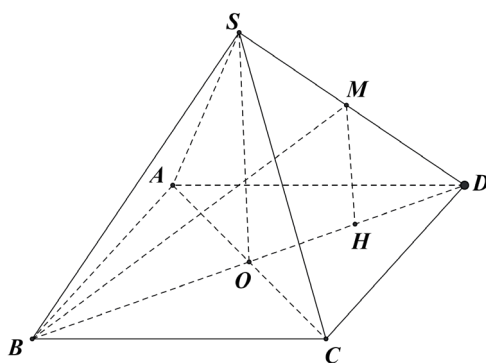
Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD . Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH \parallel SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$ và $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

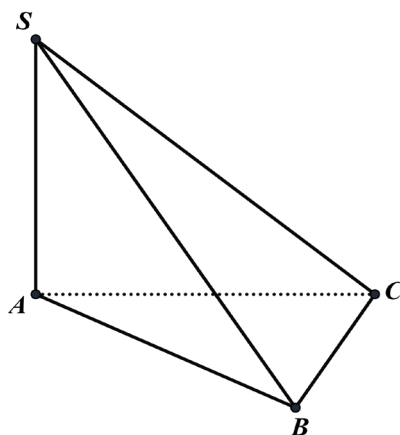
$$\text{Khi đó ta có } \tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{3}$

- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng
- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: SA vuông góc với mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow A$ là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC)



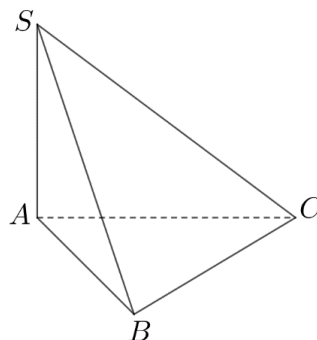
$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow \widehat{[SC, (ABC)]} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$$

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{[SC, (ABC)]} = 45^\circ.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30° .

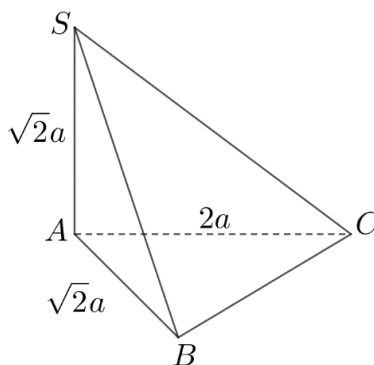
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SB \cap (ABC) = B$; $SA \perp (ABC)$ tại A .

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (ABC) là AB .

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $\alpha = \widehat{SBA}$.

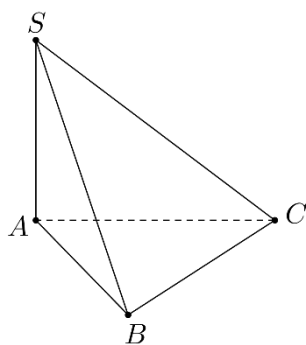
Do tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ nên $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a = SA$.

Suy ra tam giác SAB vuông cân tại A .

Do đó: $\alpha = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = 3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{30}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

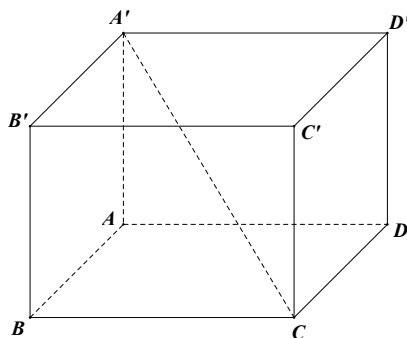
Chọn C

Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên $\widehat{(SC, (ABC))} = \widehat{SCA}$

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{10}$

Khi đó $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{30}}{a\sqrt{10}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Câu 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2\sqrt{2}a$, $AA' = \sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45° .

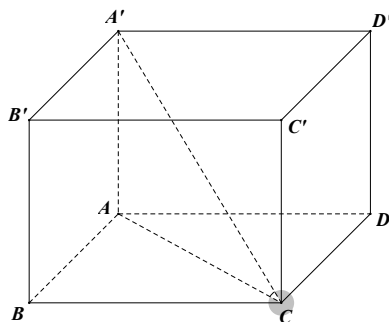
B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\widehat{(A'C, (ABCD))} = \widehat{(A'C, AC)} = \widehat{ACA'}$.



Trong tam giác ABC vuông tại A , có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 8a^2} = 3a$.

Trong tam giác ACA' vuông tại A , có: $\tan \widehat{ACA'} = \frac{AA'}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ACA'} = 30^\circ$.

Vậy $\left(\widehat{A'C, (ABCD)} \right) = 30^\circ$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$, gọi M là trung điểm của SC . Tính cosin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và (ABC) .

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}$.

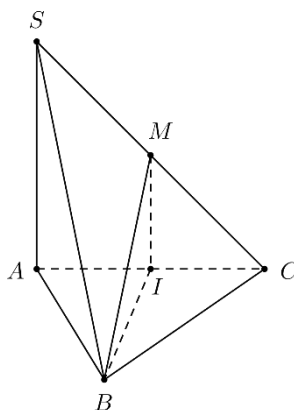
B. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \perp (ABC)$

Ta có: $MI \perp (ABC)$ nên BI là hình chiếu vuông góc của BM lên (ABC)

$\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng BM và (ABC) là góc $\widehat{MBI} = \alpha$.

Xét tam giác SAC , $MI = \frac{1}{2} \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$

Xét tam giác đều ABC cạnh a , có BI là đường cao nên $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác BIM vuông tại I , nên $BM = \sqrt{MI^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{BI}{BM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng



A. 45° .

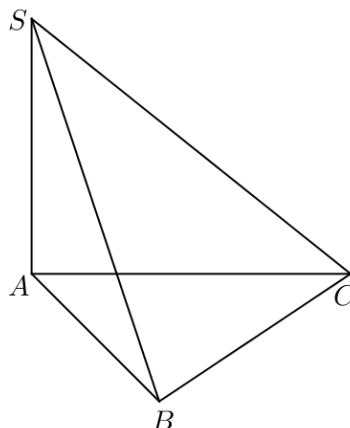
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SB, (ABC))} = \widehat{SBA}$.

Trong tam giác vuông SAB ta có $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = 1 \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ$. Vậy $\widehat{(SB, (ABC))} = 45^\circ$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng

A. 60° .

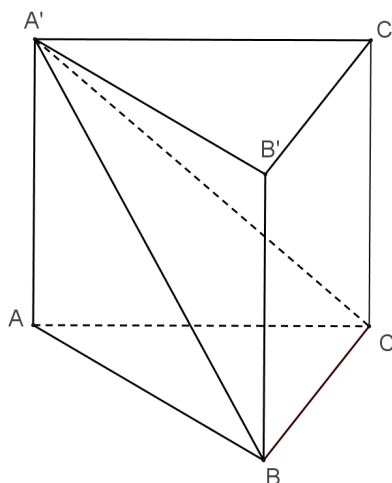
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(AA'B'B)$ là $\widehat{CA'B}$.

Ta có: $A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$, $BC = AB = a$

$\Rightarrow \tan \widehat{CA'B} = \frac{BC}{A'B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CA'B} = 30^\circ$

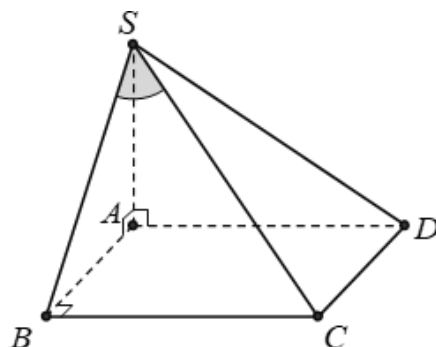


Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Có $CB \perp (SAB)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa đường thẳng SC và SB .

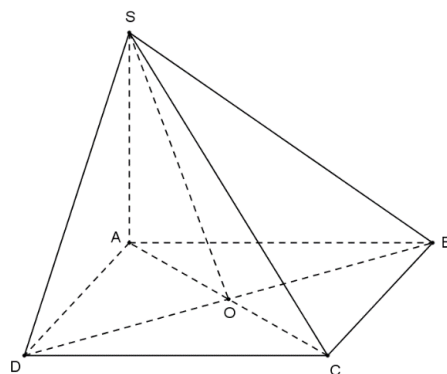
$$\text{Có } SB = a\sqrt{3}; \tan \widehat{CSB} = \frac{CB}{SB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O ; tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn A



$$\text{Do tam giác } ABD \text{ đều cạnh } a\sqrt{2} \text{ nên } AO = a\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Do $SA \perp (ABCD)$ nên AO là hình chiếu của SO lên mặt phẳng $(ABCD)$

$$\Rightarrow (\widehat{SO; (ABCD)}) = (\widehat{SO; AO}) = \widehat{SOA} \text{ (do tam giác } SAO \text{ vuông tại } A)$$

$$\text{Mà } \tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \sqrt{3} \Rightarrow (\widehat{SO; (ABCD)}) = \widehat{SOA} = 60^\circ.$$



Câu 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính $\tan$ của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\sqrt{3}$.

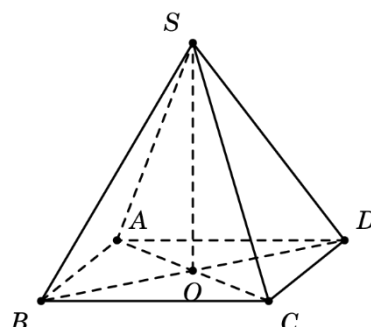
B. $\sqrt{7}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SAO .

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AO = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại O nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Từ đó suy ra $\tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \sqrt{7}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45° .

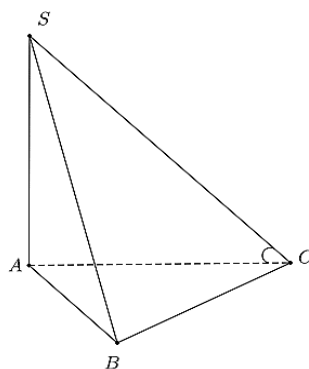
B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA \perp (ABC)$ suy ra AC là hình chiếu của SC trên (ABC) .

Suy ra góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa SC và AC bằng góc $\widehat{SCA}$.

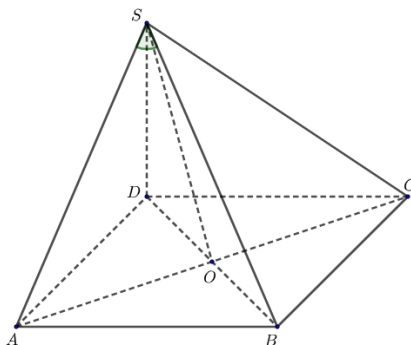


Trong tam giác ABC vuông tại B ta có $AC = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác SAC vuông A ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{SCA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .



A. 60° .

B. $\arcsin \frac{1}{4}$.

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

Ta có: $SA \cap (SBD) = \{S\}$

Lại có $AO \perp BD$; $AO \perp SD \Rightarrow AO \perp (SBD)$ nên $(\widehat{SA, (SBD)}) = \widehat{OSA}$.

$\triangle SDA$ có: $SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Hình vuông $ABCD$ có: $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\triangle SAO$ có: $\sin \widehat{OSA} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OSA} = 30^\circ$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a ; $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $SB = a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) . Tính $\sin \varphi$.

A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

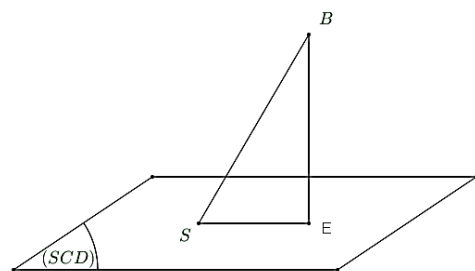
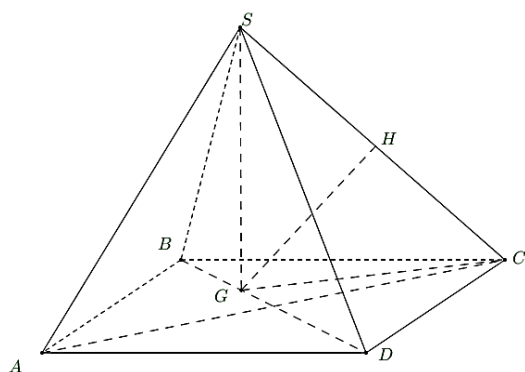
B. $\sin \varphi = \frac{1}{4}$.

C. $\sin \varphi = \frac{1}{2}$.

D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $\begin{cases} AB = AC = a \\ \widehat{ABC} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều cạnh } a.$

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp (ABCD).$

Gọi E là hình chiếu của B trên (SCD) nên SE là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SCD)

$\Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt phẳng (SCD) là góc giữa hai đường thẳng SB, SE và bằng $\widehat{BSE}$

$\Rightarrow \widehat{BSE} = \varphi.$

Ta có $BE = d(B, (SCD)).$

$$BG \cap (SCD) = D \Rightarrow \frac{d(B, (SCD))}{d(G, (SCD))} = \frac{BG}{GC} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, CD) = \frac{3}{2} d(G, (SCD))$$

Kẻ $GH \perp SC$ tại H (1).

Ta có: $\begin{cases} CD \perp CG \\ CD \perp SG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCG) \Rightarrow CD \perp HG$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $GH \perp (SCD) \Rightarrow d(G, (SCD)) = GH.$

$$CG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét tam giác } SBG \text{ vuông tại } G \text{ có } SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } SCG \text{ vuông tại } G \text{ ta có } \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GC^2} = \frac{9}{6a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow HG = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow BE = \frac{3}{2}HG = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Xét tam giác } SEB \text{ vuông tại } E \text{ ta có } \sin \varphi = \frac{BE}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là trung điểm M của cạnh AD , $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tính $\sin$ của góc giữa SN và mặt phẳng (SBM) .

A. $\frac{2}{\sqrt{35}}$.

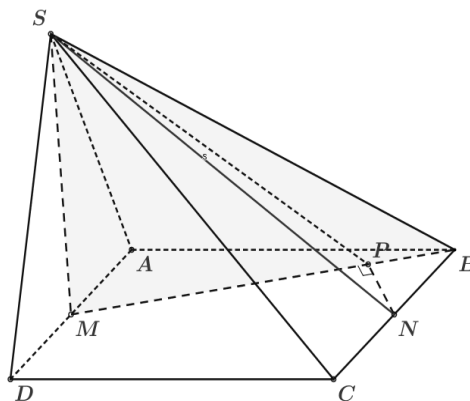
B. $\frac{3}{\sqrt{35}}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $NP \perp MB$. Ta có: $\begin{cases} NP \perp MB \\ NP \perp SM \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SBM) \Rightarrow (\widehat{SN, (SBM)}) = \widehat{NSP}$

Xét tam giác vuông SNM , ta có: $SN^2 = SM^2 + MN^2 \Rightarrow SN = \frac{\sqrt{7}}{2}a$

Xét tam giác vuông NBM , ta có: $\frac{1}{NP^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{NB^2} \Rightarrow NP = \frac{1}{\sqrt{5}}a$

Xét tam giác vuông SNP , ta có: $\sin \widehat{NSP} = \frac{NP}{NS} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{35}}$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. 45° .

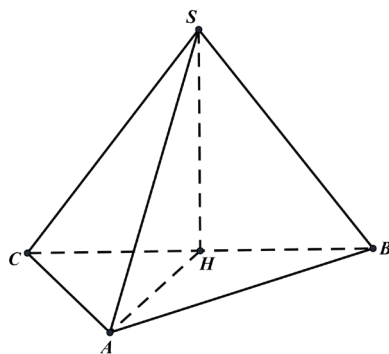
B. 60° .

C. 30° .

D. 75° .

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC , (SBC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên ta có $SH \perp (ABC)$.

Khi đó ta có hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC) là AH . Suy ra góc giữa SA và (ABC) bằng góc giữa SA và AH bằng góc $\widehat{SAH}$.

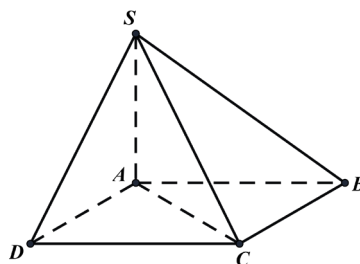
Ta có: $AH = \frac{1}{2}BC$, $SH = BC \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó trong tam giác SAH ta có $\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3}$.

Vậy góc $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

- Câu 20:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn B



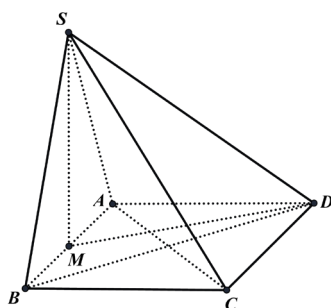
$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$$

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{AS}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABCD$ gọi M là trung điểm cạnh AB . Biết đáy là hình vuông cạnh bằng a , $SM \perp (ABCD)$, tam giác SAB đều (minh họa như hình vẽ).



Kí hiệu φ góc giữa SD và $(ABCD)$, khi đó $\tan \varphi$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì tam giác SAB đều nên M là trung điểm của AB và $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\varphi = (\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, DM}) = \widehat{SDM}$, $MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$

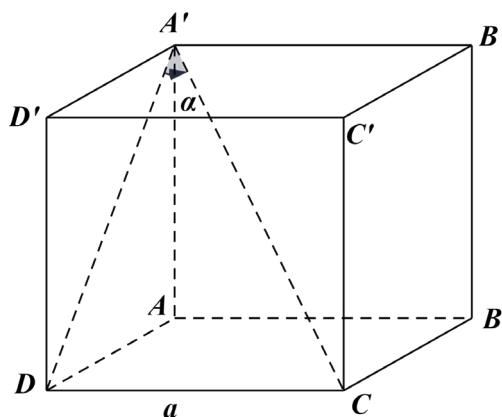
Mặt khác, $\tan \widehat{SDM} = \frac{SM}{MD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi α là góc giữa $A'C$ và $(ADD'A')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ADD'A')$.



Suy ra $A'D$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(A'D'DA) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{CD}{A'D} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'B = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{3}$. Góc giữa $C'A$ và mp (ABC) bằng

A. 60° .

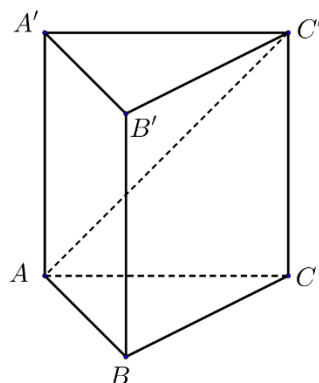
B. 90° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn D

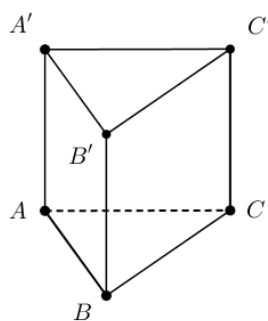


Ta có $B'B = a \Rightarrow CC' = a$ và $AC = a\sqrt{3}$

Góc giữa $C'A$ và mp (ABC) bằng góc đường thẳng $C'A$ và CA bằng góc $C'AC$

$$\tan \widehat{C'AC} = \frac{C'C}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{C'AC} = 30^\circ.$$

Câu 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có cạnh $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$ và cạnh $AA' = \sqrt{15}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30° .

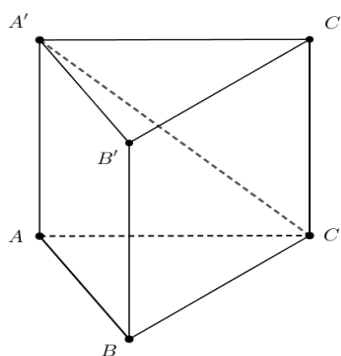
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: AC là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC) .

Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'CA}$.

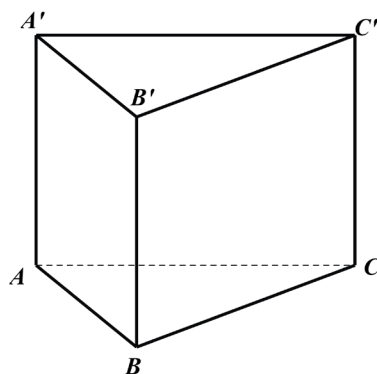
$$\text{Lại có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } A'AC \text{ có } \tan \widehat{A'CA} = \frac{AA'}{AC} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{A'CA} = 60^\circ$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết tam giác ABC vuông tại B ,

$AB = a, BC = a\sqrt{2}, AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của $A'B'$. Tính góc giữa đường thẳng CI và mặt phẳng (ABC) .



A. 30° .

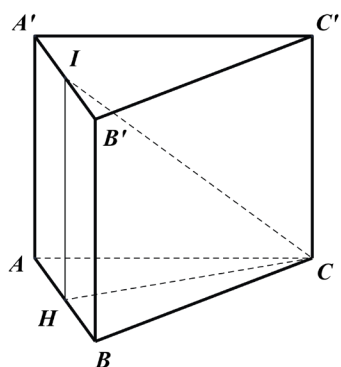
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A





Gọi α là góc giữa đường thẳng CI và mặt phẳng (ABC) .

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC) , suy ra H là trung điểm của AB .

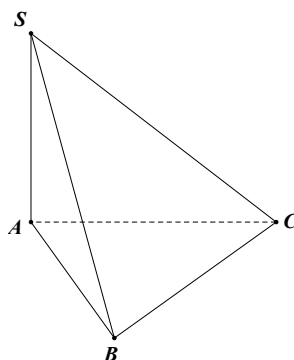
Khi đó $\alpha = (CH, CI) = \widehat{ICH}$.

Xét tam giác IHC vuông tại H , có:

$$IH = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{3a}{2}$$

$$\tan ICH = \frac{IH}{CH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } \alpha = (CH, CI) = \widehat{ICH} = 30^\circ.$$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{15}a$ (tham khảo hình bên dưới)



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Do SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng đáy. Từ đó suy ra: $(\widehat{SC; (ABC)}) = (\widehat{SC; AC}) = \widehat{SCA}$ do tam giác SAC vuông tại A nên góc $0 < \widehat{SCA} < 90^\circ$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$.

Trong tam giác SAC vuông tại A có: $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{15}a}{\sqrt{5}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Vậy $(\widehat{SC; (ABC)}) = 60^\circ$.



Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S , $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là

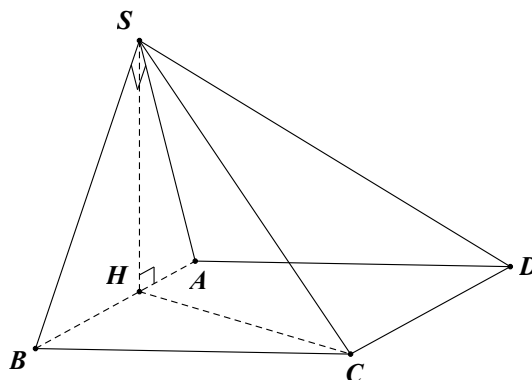
A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn B

Kẻ $SH \perp AB$ tại H , suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(SC, (ABCD)) = (\widehat{SC, HC}) = \widehat{SCH}$.

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = 2a; HB = \frac{SB^2}{BA} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a;$$

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{5}{2}a; SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{5a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S , $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

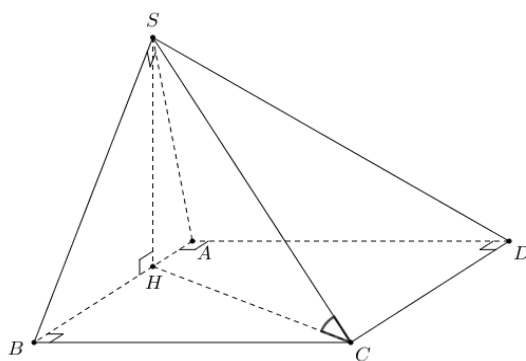
B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $SH \perp AB$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Do đó góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCH}$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại S ta có: $AB^2 = SA^2 + SB^2 \Leftrightarrow AB^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại S và có $SH \perp AB$ nên $SH \cdot AB = SA \cdot SB \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{a \cdot \sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Xét $\triangle SHB$ vuông tại H ta có: $SB^2 = SH^2 + BH^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3}a)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + BH^2$

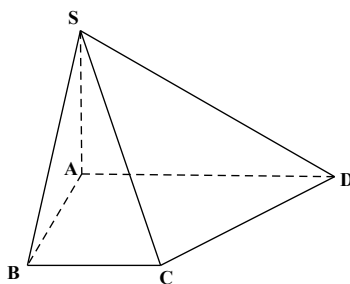
$$\Leftrightarrow BH^2 = \frac{9}{4}a^2 \Rightarrow BH = \frac{3}{2}a.$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại B ta có: $CH^2 = BH^2 + BC^2 \Leftrightarrow CH^2 = \frac{9}{4}a^2 + (2a)^2$

$$\Leftrightarrow CH^2 = \frac{25}{4}a^2 \Rightarrow CH = \frac{5}{2}a.$$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{5}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) bằng



A. 30° .

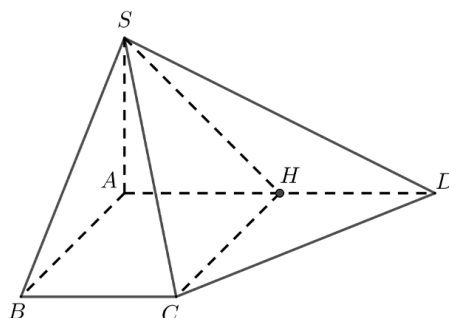
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AD , khi đó SH là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAD)

Suy ra góc giữa SC và (SAD) là góc $\widehat{CSH}$.

Tam giác SHC vuông tại H và có $CH = a$, $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có: $\tan \widehat{CSH} = \frac{CH}{SH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSH} = 30^\circ$.

Câu 30: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Giá trị $\tan$ của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

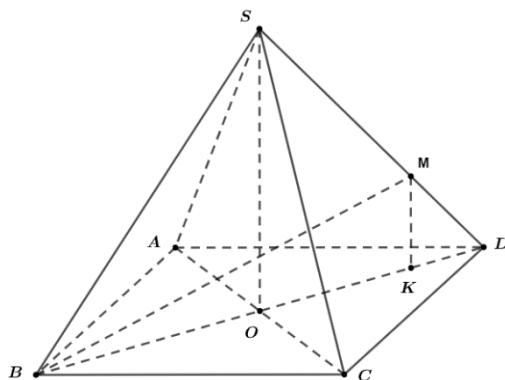
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



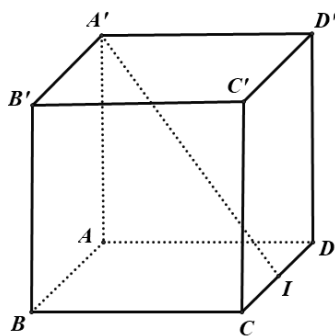
Có $ABCD$ là hình vuông; $BD = a\sqrt{2}$; $OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Trong $\triangle SOD$ dựng $MK \parallel SO$ suy ra $MK \perp (ABCD)$; $\frac{MK}{SO} = \frac{MD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MK = \frac{SO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

Ta có góc giữa BM và $(ABCD)$ bằng $\widehat{MBK}$; $\tan \widehat{MBK} = \frac{MK}{BK}$

$BK = BO + OK = OD + \frac{2OD}{3} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$ suy ra $\tan \widehat{MBK} = \frac{MK}{BK} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{6}{5a\sqrt{2}} = \frac{1}{5}$

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và tam giác ACD vuông cân tại A , $AC = 2a$. Biết $A'C$ tạo với đáy một góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Gọi I là trung điểm CD . Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'CD)$ bằng



A. 45° .

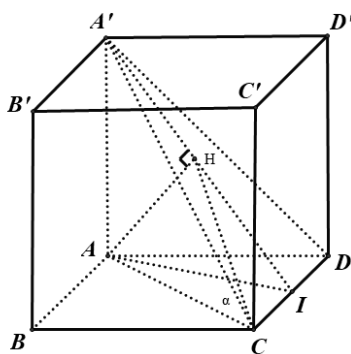
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(A'AI)$, kẻ $AH \perp A'I$ ($H \in A'I$).

Ta có A là hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABCD)$.

Do đó AC là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(ABCD)$.

Suy ra $(A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA} = \alpha$ (vì $\triangle A'AC$ vuông tại A).

Xét $\triangle A'AC$ vuông tại A , ta có: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \tan \alpha = \frac{A'A}{AC} = \frac{A'A}{2a} \Leftrightarrow A'A = a\sqrt{2}$.

Vì tam giác ACD vuông cân tại A nên AI vừa là đường trung tuyến, đồng thời là đường cao ứng với cạnh CD . Do đó $AI \perp CD$.

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} AI \perp CD \\ A'A \perp CD \\ A'A, AI \subset (AA'I) \\ A'A \cap AI = A \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (A'AI). \text{ Mà } AH \subset (A'AI) \text{ nên } CD \perp AH.$$

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} AH \perp A'I \\ AH \perp CD \\ A'I, CD \subset (A'CD) \\ A'I \cap CD = I \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (A'CD).$$

Ta có H là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'CD)$.

Do đó HC là hình chiếu vuông góc của AC lên $(A'CD)$.

Suy ra $(AC, (A'CD)) = (AC, HC) = \widehat{HCA}$ (vì $\triangle AHC$ vuông tại H).

Xét $\triangle ADC$ vuông cân tại A , ta có: $AI = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $A'AI$ vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow AH = a.$$



Xét $\triangle HAC$ vuông tại H , ta có : $\sin \widehat{HCA} = \frac{AH}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{HCA} = 30^\circ$.

Vậy $(AC, (A'CD)) = 30^\circ$.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AC' và $(A'BCD')$. Khi đó giá trị của $\tan \alpha$ bằng

A. 1.

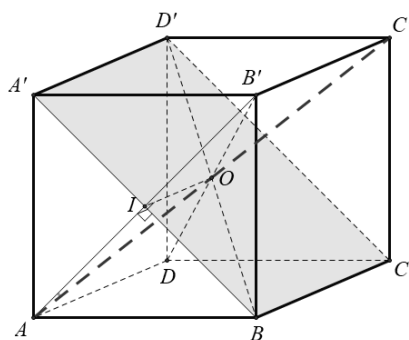
B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $A'BCD'$, thì O cũng là tâm của hình chữ nhật $AB'C'D$.

Gọi I là tâm hình vuông $ABB'A'$, tức $AI \perp A'B$. Mà $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AI$.

Do đó $AI \perp (A'BCD')$, suy ra góc giữa AC' và $(A'BCD')$ bằng góc giữa AO và OI , tức là $\alpha = \widehat{AOI}$.

Trong tam giác AOI vuông tại I : $\tan \alpha = \tan \widehat{AOI} = \frac{AI}{IO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD với (SBC) . Tính giá trị $\sin \alpha$.

A. $\frac{1}{3}$.

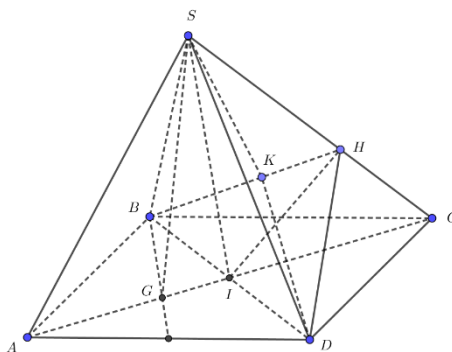
B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B.





Xét tam giác ABD ta có : $AB = AD = a$; $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Suy ra tam giác ABD đều cạnh a .

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

Vì $SA = SB = SD$ nên SG là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Suy ra

$SG \perp (ABCD)$. Suy ra $SG \perp DI$ mà $AC \perp DI$. Suy ra $DI \perp (SAC) \Rightarrow SC$. Suy ra $DI \perp SC$.

Dựng $IH \perp SC (H \in SC)$. Suy ra $SC \perp (DIH)$ mà $SC \subset (SBC)$. Suy ra $(DIH) \perp (SBC)$ mà $(SBC) \cap (DIH) = BH$. Dựng $DK \perp BH (K \in BH)$. Suy ra $DK \perp (SBC)$ tại K . Suy ra hình chiếu vuông góc của SD lên (SBC) là SK .

Suy ra $(\widehat{SD; (SBC)}) = (\widehat{SD; SK}) = \widehat{DSK} = \alpha$.

Xét tam giác SKD ta có $\sin \alpha = \frac{DK}{SD}$.

$$\text{Ta có } CG = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 2AI = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3};$$

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}; SC = \sqrt{SG^2 + GC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \Delta HIC \sim \Delta GSC (g - g) \Rightarrow \frac{HI}{GS} = \frac{IC}{SC} \Rightarrow HI = \frac{IC \cdot GS}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{35}}{14}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } BIH \text{ ta có } BH = \sqrt{BI^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta BHD} = \frac{1}{2}DK \cdot BH = \frac{1}{2}IH \cdot BD \Rightarrow DK = \frac{IH \cdot BD}{BH} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{Suy ra } \sin \alpha = \frac{DK}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a$, và $SA \perp (ABC)$,

$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 30° .

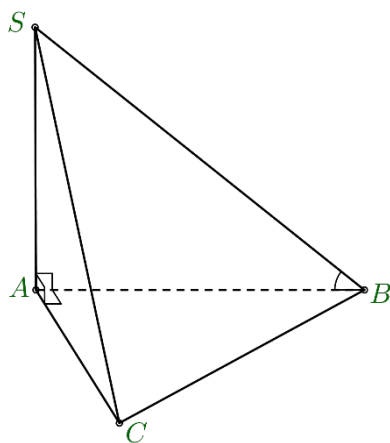
B. 75° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC , ta có: $2AB^2 = BC^2 = a^2 \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có: AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC) nên $(\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$

Xét tam giác vuông SAB , ta có: $\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a\sqrt{3}$. Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 30° .

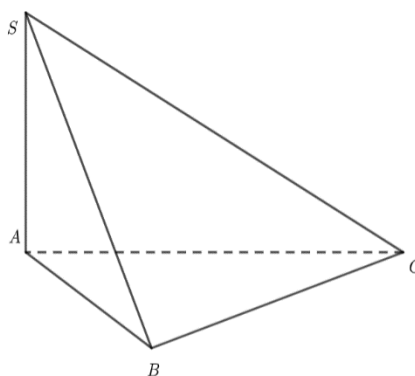
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Ta có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $(\widehat{SC, (ABC)}) = \widehat{SCA}$.

$BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC = a \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng ABC ?



A. 60°

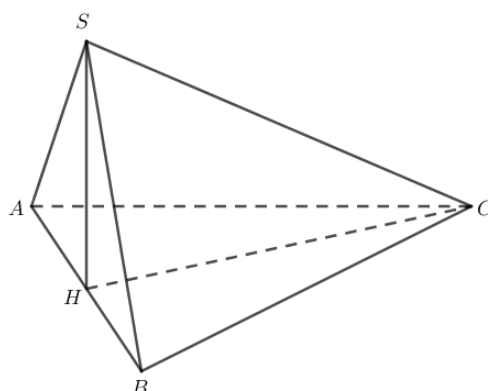
B. 30°

C. 45°

D. 90°

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB . Do tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên ta có: $SH = \frac{1}{2}AB = a$ và $SH \perp (ABC)$.

Suy ra: $\widehat{SC, (ABC)} = \widehat{SCH}$.

ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$ nên $CH = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SCH vuông tại H có: $\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\widehat{SC, (ABC)} = 30^\circ$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Khi đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) bằng

A. 45°

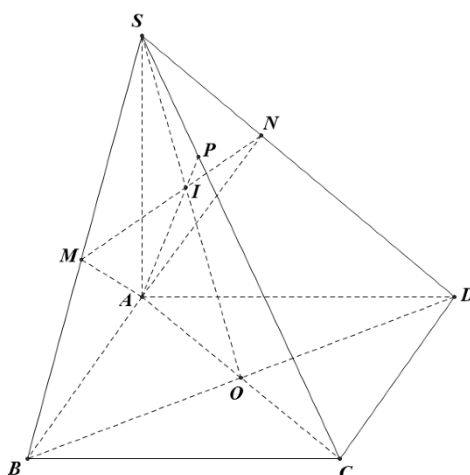
B. 60°

C. 30°

D. 90°

Lời giải

Chọn B



Gọi $AC \cap BD = O$, $SO \cap MN = I$, $AI \cap SC = P$.



$AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$ và $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$, do đó: $SC \perp (AMN)$ hay $SC \perp (AMPN)$.

Suy ra: $(SB, (AMN)) = (SM, (AMPN)) = \widehat{SMP}$.

$$\text{Ta có: } SM = \frac{SA^2}{SB} = \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; \quad SP = \frac{SA^2}{SC} = \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 + 2a^2}} = a.$$

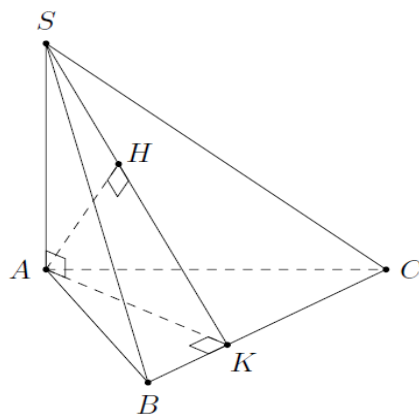
$$\text{Nên } \sin \widehat{SMP} = \frac{SP}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SMP} = 60^\circ.$$

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{5}$, đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) . Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. 2.

Lời giải

Chọn B



Dựng AK vuông góc BC , AH vuông góc SK .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH \text{ mà } AH \perp SK \text{ nên } AH \perp (SBC).$$

Do đó SK là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SBC) nên

$$\alpha = (SA, (SBC)) = (SA, SK) = \widehat{ASK}.$$

$$\text{Ta có } AK = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Khi đó, } \tan \alpha = \frac{AK}{AS} = \frac{\frac{2a\sqrt{5}}{5}}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, SC . Góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng.



A. 45^0 .

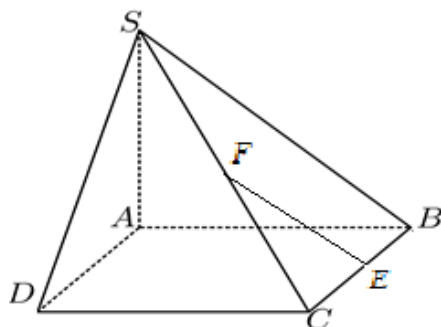
B. 30^0 .

C. 60^0 .

D. 90^0 .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (\widehat{EF, (SAD)}) = (\widehat{BS, (SAD)}) = (\widehat{BS, AS}) = \widehat{BSA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A và có $SA = AB$ suy ra $\widehat{BSA} = 45^0$.

Vậy góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng 45^0 .

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB = a, SD = a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SCD) thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0^0; 20^0)$.

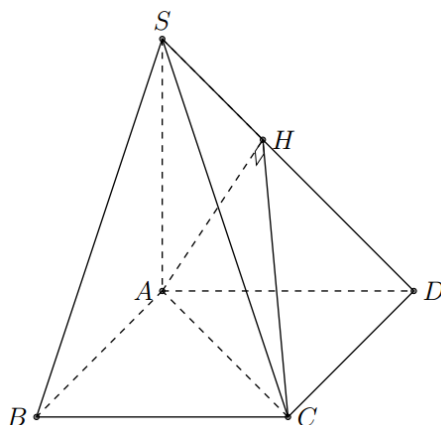
B. $(20^0; 40^0)$.

C. $(40^0; 60^0)$.

D. $(60^0; 80^0)$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH \perp SD$ tại H .

Ta có $AH \perp CD$ (vì $CD \perp (SAD)$ và $AH \subset (SAD)$).

Suy ra $AH \perp (SCD)$.

Khi đó HC là hình chiếu vuông góc của AC lên mặt phẳng (SCD) .



Suy ra $\widehat{(AC, (SCD))} = \widehat{(AC, HC)} = \widehat{ACH}$.

Tam giác SAD vuông tại A và AH là đường cao nên

$$SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = 2a.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$$

Tam giác AHC vuông tại H nên $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \hat{C} = 39,23^\circ$.

Câu 41: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

A. 45° .

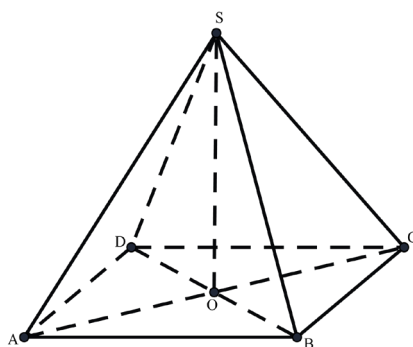
B. 75° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

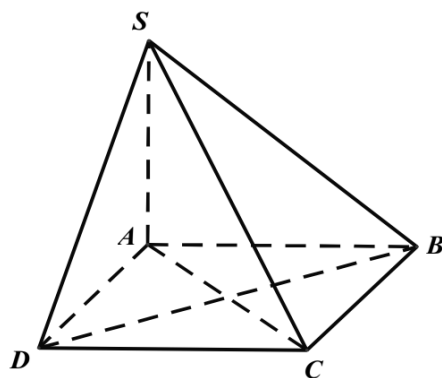
Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra AO là hình chiếu của AS trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SA, (ABCD))} = \widehat{(SA; AO)} = \widehat{SAO}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a suy ra $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA : $\cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 60° .

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$ (như hình vẽ minh họa). Số đo góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng:



A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

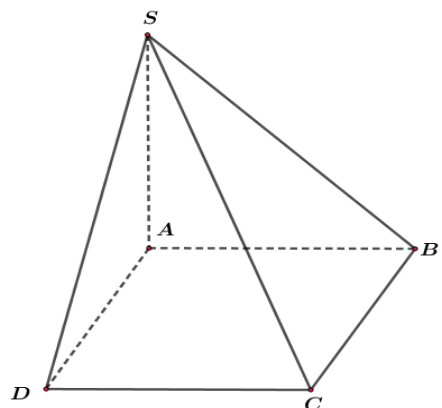
Ta có $DA \perp (SAB)$ suy ra SA là hình chiếu của SD lên mặt phẳng (SAB) .

Ta có $(\widehat{SD, (SAB)}) = (\widehat{SD, SA}) = \widehat{ASD}$.

Tam giác SAD vuông tại A có $\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{SA} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{ASD} = 45^\circ$

Vậy $(\widehat{SD, (SAB)}) = 45^\circ$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông với $AC = 5\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 5$. Góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng



A. 45° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (\widehat{SD, (SAB)}) = (\widehat{SD, SA}) = \widehat{DSA}$

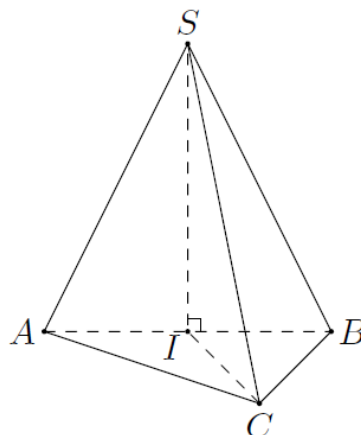
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 5 \Rightarrow \tan \widehat{DSA} = \frac{AD}{SA} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \widehat{DSA} = 45^\circ$.



- Câu 44:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = CB = CA$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm I của cạnh AB . Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng
- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải

Chọn A

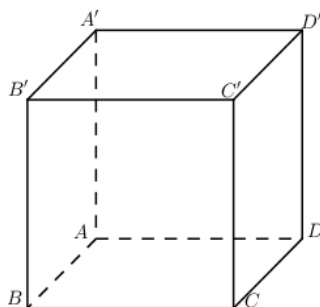


Nhận thấy rằng, $\triangle SAB = \triangle CAB$ do đó hai đường trung tuyến tương ứng bằng nhau tức $CI = SI$.

Vậy tam giác SIC vuông tại I và có $CI = SI$ nên đây là tam giác vuông cân.

Do đó $\widehat{SCI} = 45^\circ$ đây cũng chính là góc giữa SC và (ABC) .

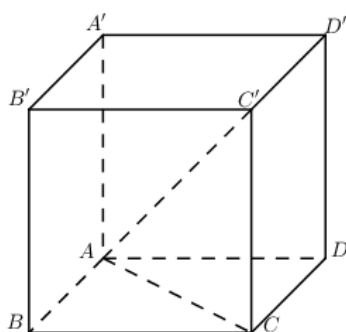
- Câu 45:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{2}, BC = a, AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn A





Ta có $AC' \cap (ABCD) = A$.

Mặt khác, $C'C \perp (ABCD)$ tại $C \Rightarrow AC$ là hình chiếu của AC' lên $(ABCD)$

Vậy góc giữa AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa AC' và AC bằng $\widehat{C'AC}$.

Xét tam giác $C'AC$ vuông tại C , có $CC' = a\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \Delta C'AC$ vuông cân tại C . Vậy $\widehat{C'AC} = 45^\circ$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Hãy tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 45° .

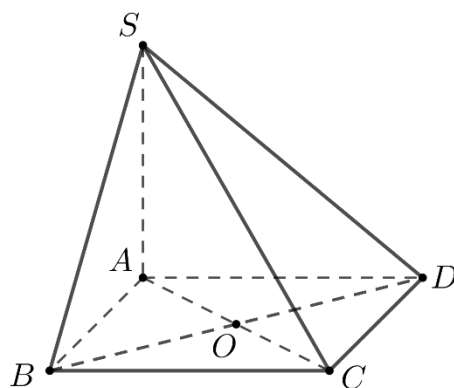
B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SO, (ABCD)}) = (\widehat{SO, AO}) = \widehat{SOA}$.

Tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow AO = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại A có $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ$.

Vậy $(\widehat{SO, (ABCD)}) = 60^\circ$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cạnh SC tạo với mặt phẳng (ABC) một góc là φ . Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

B. $\tan \varphi = \sqrt{3}$.

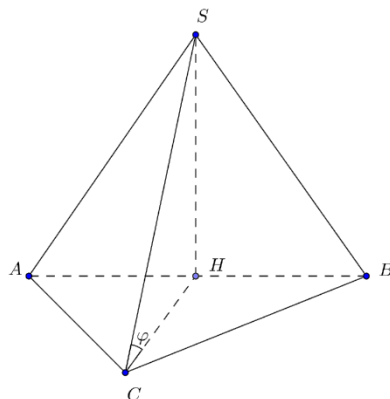
C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Chọn B



Kẻ $SH \perp AB$

Vì ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $\Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$\Rightarrow CH$ là hình chiếu của SC lên $(ABC) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, CH}) = \widehat{SCH} = \varphi$

ΔABC là tam giác vuông cân tại $C \Rightarrow CH = \frac{AB}{2}$

ΔSAB đều $\Rightarrow SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$ suy ra $\tan \varphi = \frac{SH}{CH} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{AB} = \sqrt{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = a$ và $SC = a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

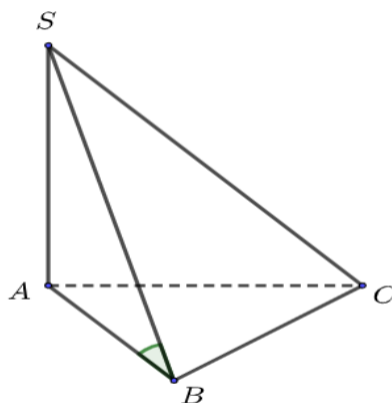
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) .

Khi đó, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là góc giữa SB và AB hay góc $\widehat{SBA}$.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.



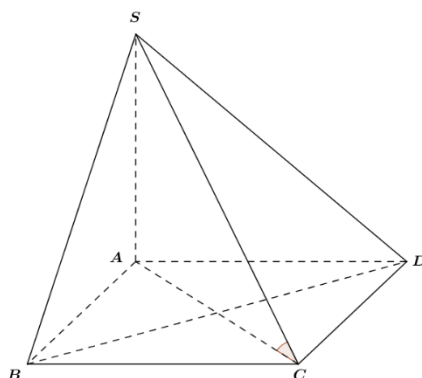
Tam giác SAC vuông tại A nên $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

- Câu 49:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$ và $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SA \perp (ABCD)$ suy ra hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AC

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$

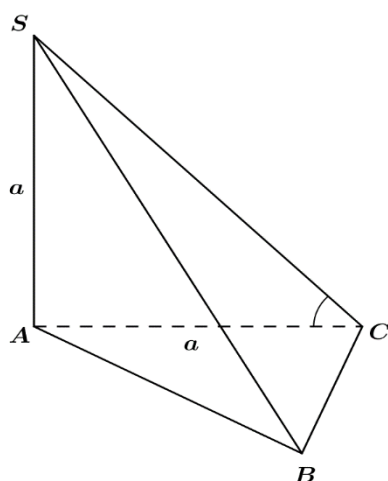
Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại A

$$\Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

- Câu 50:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tìm góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .
- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ SC \cap (ABC) = C \end{array} \right\} \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (ABC) là $AC \Rightarrow$ góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.

Trong tam giác SAC vuông tại A có: $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Câu 51: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính $\sin$ của góc giữa đường thẳng CD' và mặt phẳng $(A'AD)$:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

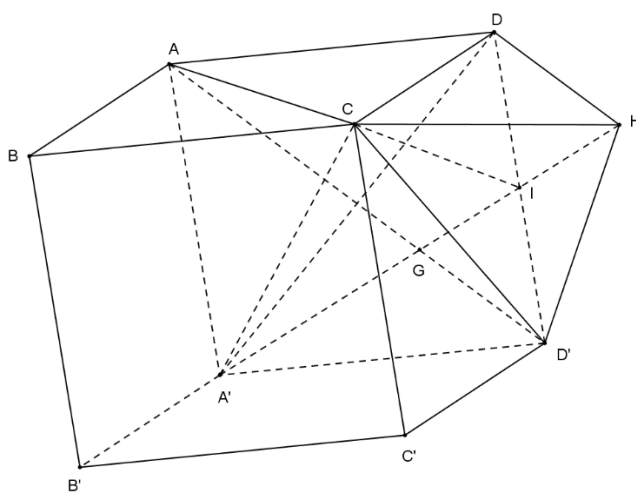
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm DD' ; G là trọng tâm tam giác $A'D'D$; H đối xứng với G qua I
 Từ gt $\Rightarrow$ Các tam giác $A'D'D$ và $CD'D$ là các tam giác đều $\Rightarrow A'I \perp DD'$; $CI \perp DD'$
 $\Rightarrow DD' \perp (CIA') \Rightarrow DD' \perp CH$



$$\begin{aligned}
\text{Mà } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'H}) \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{CA'} + \frac{4}{3} \overrightarrow{A'I} \right) \cdot \overrightarrow{AD} = \left[\overrightarrow{CA'} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{A'D'}) \right] \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'} \right) \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= -a^2 \cos 60^\circ + \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} a^2 \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow AD \perp CH
\end{aligned}$$

Do đó $CH \perp (A'AD) \Rightarrow D'H$ là hình chiếu của CD' trên $(A'AD)$

$$\Rightarrow (\widehat{CD'; (A'AD)}) = (\widehat{CD'; HD'})$$

Lại có: $CD' = a$; $D'H = D'G = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; tam giác $CD'H$ vuông tại H

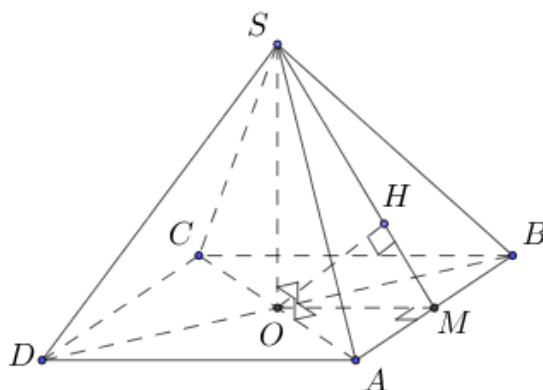
$$\Rightarrow \cos(\widehat{CD'; (A'AD)}) = \cos \widehat{CD'H} = \frac{HD'}{CD'} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 52: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , AC cắt BD tại O . Khoảng cách giữa SA và CD bằng độ dài đoạn SO . Tính sin của góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S.ABCD$ là chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow OM \perp AB$, $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOM)$

Mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow (SOM) \perp (SAB)$

$$\text{Kẻ } OH \perp SM, \text{ ta có } \begin{cases} (SOM) \perp (SAB) \\ (SOM) \cap (SAB) = SM \\ OH \subset (SOM), OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$$

Ta lại có $CD \parallel AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow CD \parallel (SAB)$

$$\Rightarrow d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = 2d(O, (SAB)) = 2OH \Rightarrow SO = 2OH$$

Vì $\triangle OHS$ vuông tại H , có $SO = 2OH \Rightarrow \widehat{OSH} = 30^\circ$

$$\text{Tam giác } SOM \text{ vuông tại } O, \text{ có } OM = \frac{a}{2} \Rightarrow SO = OM \cdot \cot \widehat{OSM} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Ta có $SO \perp (ABCD), SA \cap (ABCD) = A \Rightarrow (SA, (ABCD)) = \widehat{SAO}$

Tam giác SOA vuông tại O , có $OA = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ và $SO = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$$\Rightarrow \sin \widehat{SAO} = \frac{SO}{SA} = \frac{SO}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy } \sin(SA, (ABCD)) = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Lưu ý: Các cạnh bên của hình chóp đều hợp với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

Câu 53: Cho tam giác ABC vuông tại A . Mặt phẳng (P) chứa BC và hợp với mặt phẳng (ABC) góc α , ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Gọi β , γ lần lượt là góc hợp bởi hai đường thẳng AB , AC và (P) . Tính giá trị biểu thức $P = \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$.

A. $P = 0$.

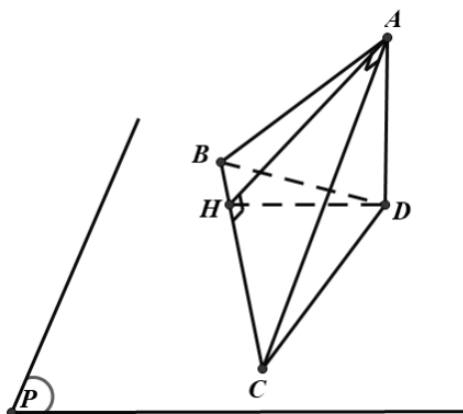
B. $P = -1$.

C. $P = 2$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .

Trong tam giác ABC kẻ đường cao AH .

$$\text{Khi đó: } \alpha = (\widehat{(ABC), (P)}) = (\widehat{AH, HD}) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AD}{AH} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{AD^2}{AH^2}.$$

$$\beta = (\widehat{AB, (P)}) = \widehat{ABD} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{AD^2}{AB^2}.$$

$$\gamma = (\widehat{AC, (P)}) = \widehat{ACD} \Rightarrow \sin^2 \gamma = \frac{AD^2}{AC^2}.$$

$$P = \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 - \frac{AD^2}{AH^2} + \frac{AD^2}{AB^2} + \frac{AD^2}{AC^2} = 1 - AD^2 \cdot \left(\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} - \frac{1}{AH^2} \right) = 1.$$

Do tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}$.

-----HẾT-----

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

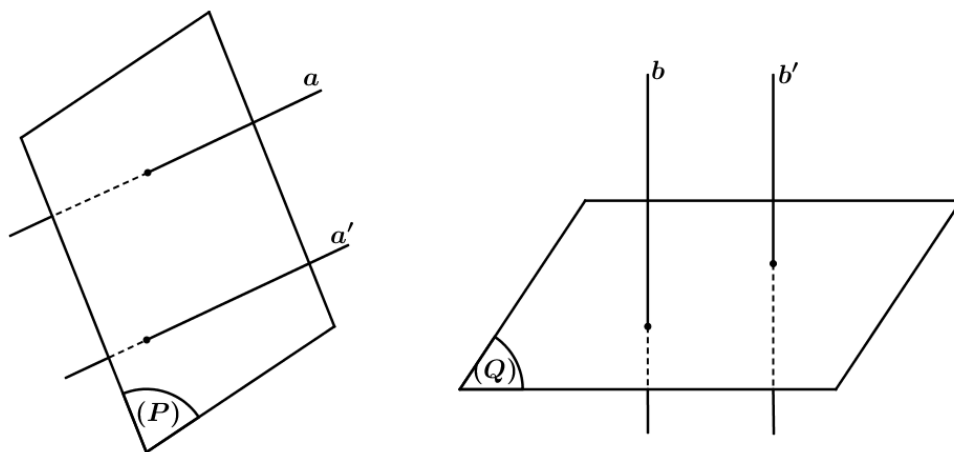
25

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

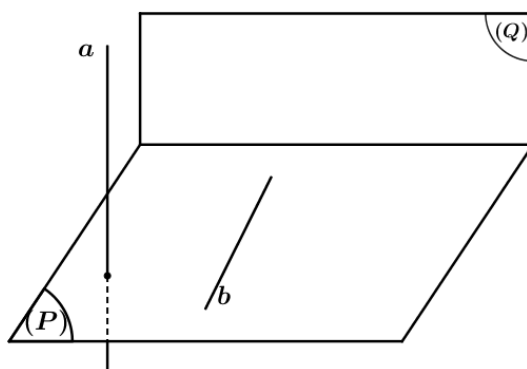


Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với $(P), (Q)$. Khi đó góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

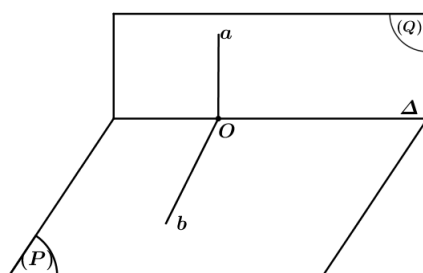
Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Chú ý: Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$.

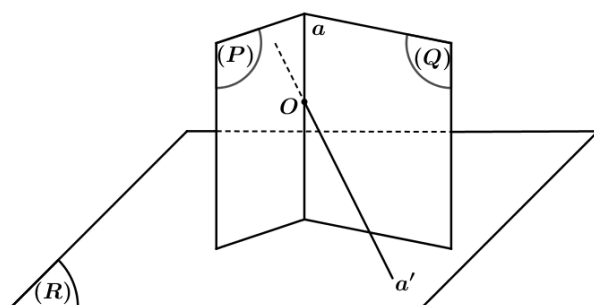
2 Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc



Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

**3 Tính chất hai mặt phẳng vuông góc**

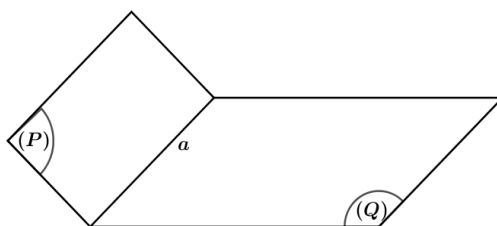
Tính chất 1: Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



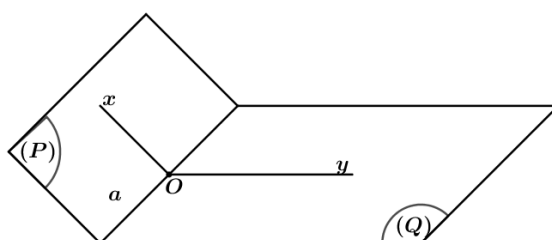
Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

4 Góc nhị diện

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P) , (Q) có chung bờ a được gọi là góc nhị diện., kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P) , (Q) tương ứng được gọi là các cạnh và các mặt của góc nhị diện đó.



Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$ vẽ các tia Ox , Oy tương ứng thuộc (P) , (Q) và vuông góc với a . Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a , được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.



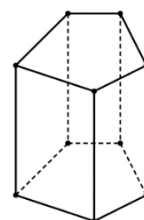
Mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện xOy của $[P, a, Q]$ vuông góc với cạnh a .

**Chú ý:**

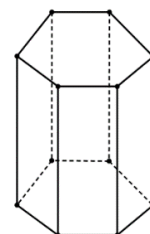
- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180° . Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90° .
- Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a , ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N .
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

5 Một số hình lăng trụ đặc biệt**a) Hình lăng trụ đứng**

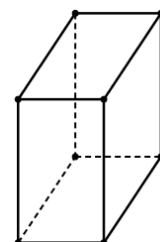
- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

**b) Hình lăng trụ đều**

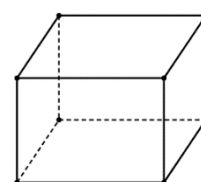
- Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ có đáy là đa giác đều.
- Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.

**c) Hình hộp đứng**

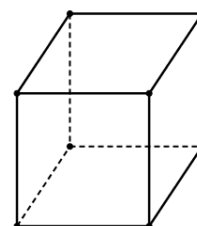
- Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng, có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.

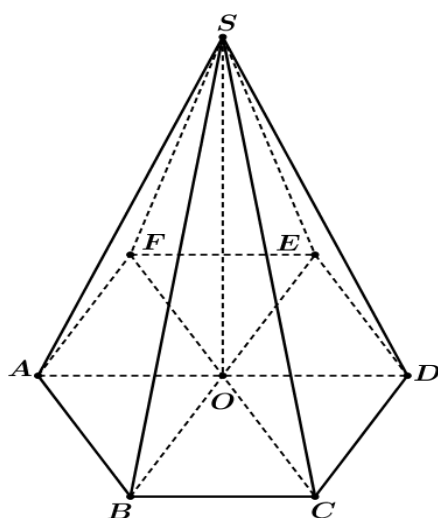
**d) Hình hộp chữ nhật**

- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là các hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại chung điểm của mỗi đường.

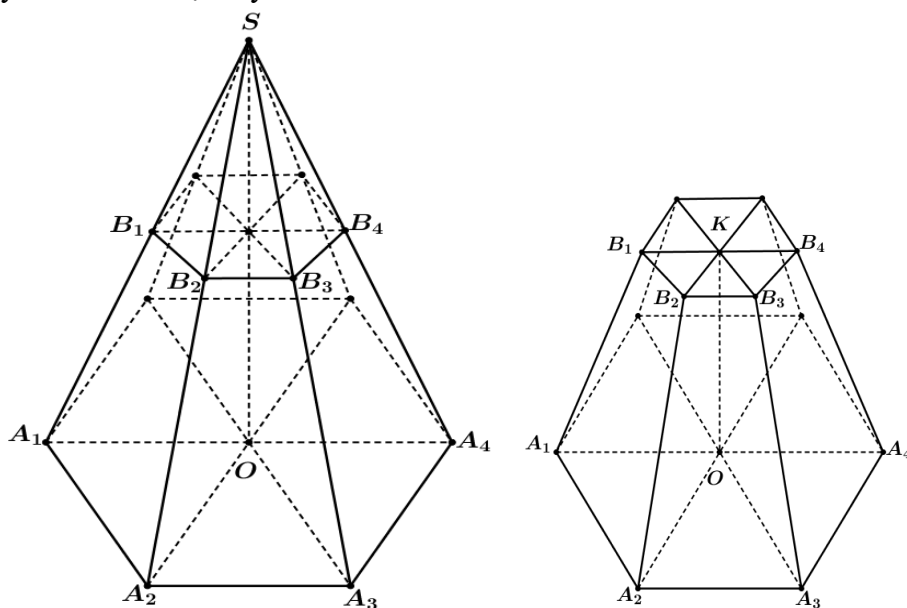
**d) Hình lập phương**

- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.
- Hình lập phương có tất cả các mặt là hình vuông.



**6 Hình chóp đều và hình chóp cắt đều**

- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh lên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.



- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_2B_3$, ..., $A_nA_1B_nB_1$ là một hình chóp cắt đều (nói đơn giản là hình chóp cắt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2...B_n$), kí hiệu là $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$ được gọi là hai mặt đáy, các hình thang $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_2B_3$, ..., $A_nA_1B_nB_1$ được gọi là các mặt bên của hình chóp cắt. Các đoạn thẳng A_1B_1 , A_2B_2 , ..., A_nB_n được gọi là các cạnh bên; các cạnh của mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cắt.
- Đoạn thẳng KO nối hai tâm của đáy được gọi là đường cao của hình chóp cắt đều. Độ dài của đường cao được gọi là chiều cao của hình chóp cắt.

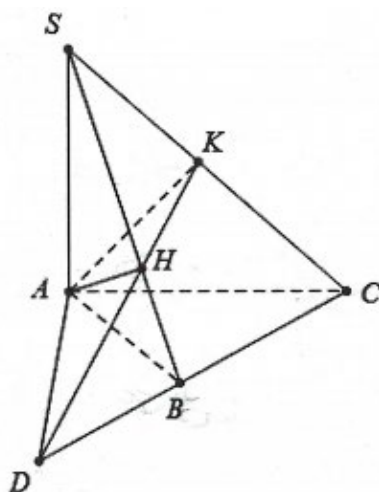
**B** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc**

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh

- Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P) .
- Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° .

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

- Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.
- Gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC . Chứng minh $(SBC) \perp (AKH)$.
- Gọi D là giao điểm của HK và BC . Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAC)$.

Lời giải

- Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$. Tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$.
Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.
- Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHK) \perp (SBC)$.
- Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$
Mặt khác $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AKD)$.
Suy ra $AD \perp SC$ mà $SA \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAC)$. Do vậy $(SAD) \perp (SAC)$.

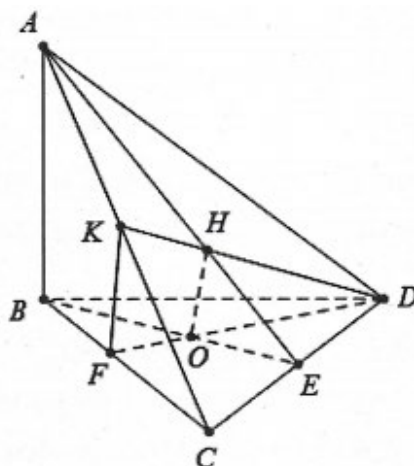
Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K . Gọi H là trực tâm của tam giác ACD .

- Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK) .



b) Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt phẳng (ACD) .

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \text{ mà } CD \subset (ACD) \Rightarrow (ADC) \perp (ABE).$

Lại có: $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC.$

Mặt khác: $DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DKF) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK).$

b) Do $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AE.$

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \perp (ABE) \\ (ACD) \perp (DFK) \\ OH = (ABE) \cap (DFK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD).$

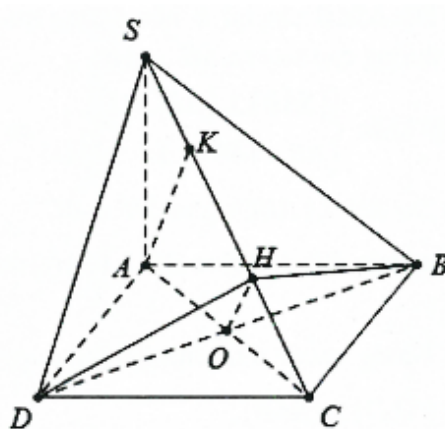
Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a và $BD = a$. Biết cạnh

$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD).$

b) $(SCD) \perp (SBC).$

Lời giải



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD.$

Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$



b) Dựng $OH \perp SC$. Do $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ suy ra $SC \perp (DHB)$.

Như vậy $\widehat{DHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

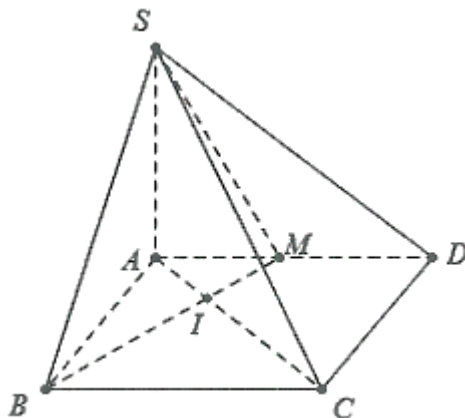
Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot OC}{\sqrt{SA^2 + OC^2}} = a \Rightarrow OH = \frac{AK}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác DHB có đường trung tuyến $HO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2} \Rightarrow \triangle DHB$ vuông tại H hay $\widehat{DHB} = 90^\circ$.

Do đó $(SCD) \perp (SBC)$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

Lời giải



Ta có: $\tan \widehat{CAD} = \frac{CD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mặt khác $\tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{AM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

Do $\tan \widehat{CAD} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{AMB} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{AIM} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BM$ tại I .

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$. Do đó $BM \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$.

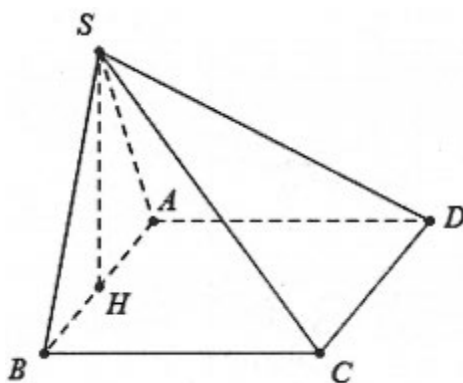
Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB . Biết $SA = SB = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh tam giác SBC vuông.

c) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$; $(SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Do $\triangle SAB$ cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$

b) Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$.

Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B .

c) Tương tự câu b ta chứng minh được $AD \perp (SAB)$ suy ra $(SAD) \perp (SAB)$.

Mặt khác: $SA^2 + SB^2 = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SA \perp SB$.

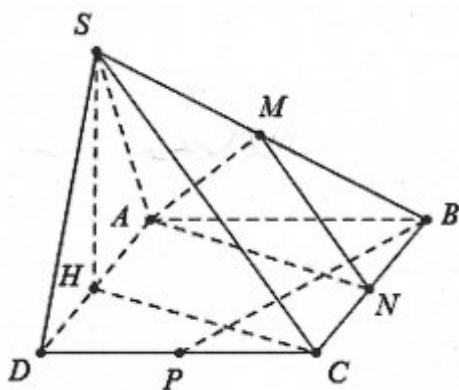
Lại có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB \Rightarrow SB \perp (SAD) \Rightarrow (SBC) \perp (SAD).$

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC và CD .

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$.

b) Chứng minh $AM \perp BP$ và $(SBP) \perp (AMN)$.

Lời giải



a) Gọi H là trung điểm của AD .

Do $\triangle SAD$ cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AD$.

Mặt khác $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ AD = (SAD) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$

Khi đó $\begin{cases} SH \perp AB \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD).$



b) Ta có: $\begin{cases} MN // SC \\ AN // HC \end{cases} \Rightarrow (AMN) // (SHC).$

Để thấy $\tan \widehat{BPC} = 2$; $\tan \widehat{HCD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BPC} + \widehat{HCD} = 90^\circ \Rightarrow HC \perp BP.$

Mặt khác $SH \perp BP \Rightarrow BP \perp (SHC)$

Mà $(AMN) // (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} (SBP) \perp (AMN) \\ BP \perp AM \end{cases}.$

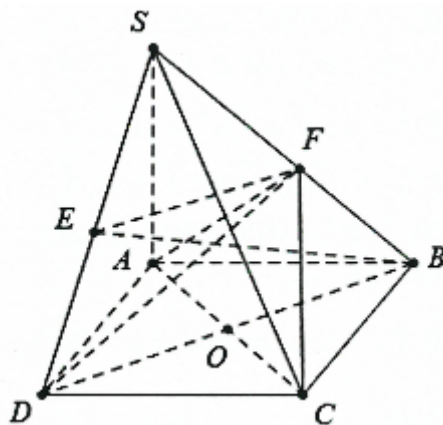
Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD).$

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD).$

b) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD).$

c) Gọi BE và DF là đường cao trong tam giác SBD . Chứng minh rằng $(ACF) \perp (SBC);$
 $(AEF) \perp (SAC).$

Lời giải



a) Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$. Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$

b) Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Do đó $(SAD) \perp (SAB).$

c) Ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB.$

Mặt khác: $DF \perp SB \Rightarrow (ADF) \perp SB \Rightarrow AF \perp SB$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AF.$

Do đó $AF \perp (SBC) \Rightarrow (ACF) \perp (SBC).$

Để thấy tam giác SBD cân tại S có 2 đường cao BE và DF nên $EF // BD$

Mặt khác $BD \perp (SAC)$ (Chứng minh ở câu a) suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (AEF) \perp (SAC).$



Cách khác: Ta có $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp SC$

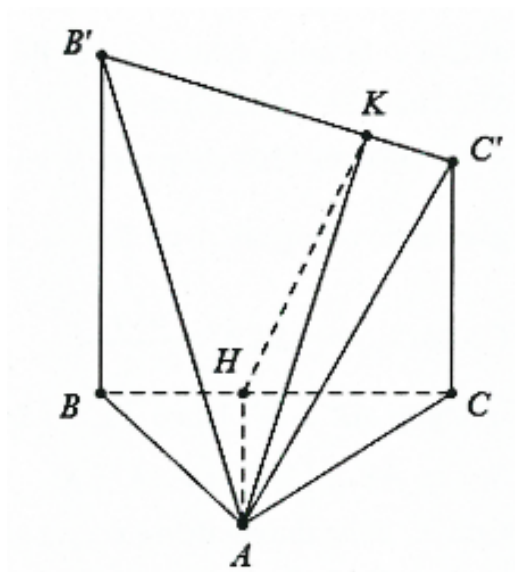
Chứng minh tương tự ta cũng có: $AE \perp SC$ suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow (SAC) \perp (AEF)$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC) .

a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.

b) Gọi AH , AK là các đường cao của $\triangle ABC$ và $\triangle AB'C'$. Chứng minh $(BCC'B') \perp (AHK)$ và $(AB'C') \perp (AHK)$.

Lời giải



a) Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AB$

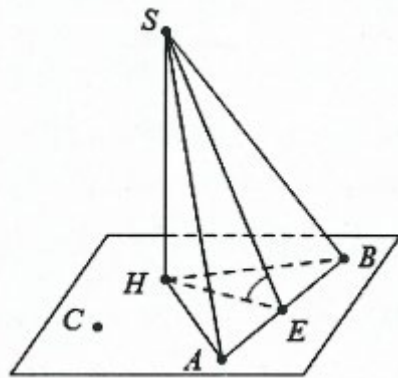
Mặt khác $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ACC') \Rightarrow (ABB') \perp (ACC')$.

b) Do $AH \perp BC$, $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AH$

Suy ra $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow (AHK) \perp (BCC'B')$.

Mặt khác $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH \perp B'C'$

Lại có: $AK \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (AHK) \Rightarrow (AHK) \perp (AB'C')$.

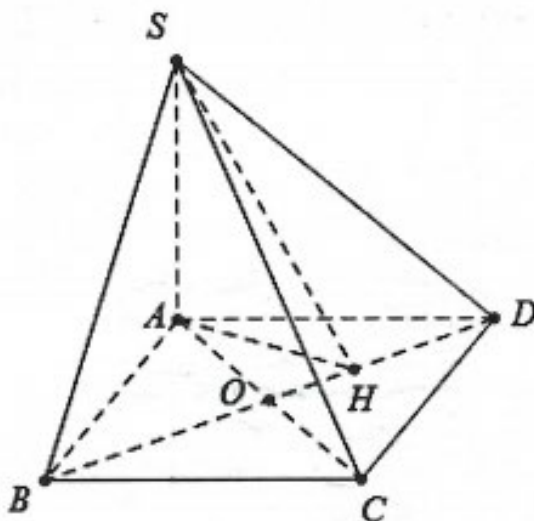
**Dạng 2: Xác định góc giữa mặt bên và mặt đáy.**

Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) .

- Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$, dựng $HE \perp AB$.
- Khi đó $AB \perp (SEH) \Rightarrow \widehat{((SAB); (ABC))} = \widehat{SEH}$.

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60° .

- Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 60^\circ$

Suy ra $SA = AD \tan 60^\circ = 3a$.

Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow \widehat{((SBC); (ABC))} = \widehat{SBA}$

Mặt khác $\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{\sqrt{9a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{(SBC);(ABC)}) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

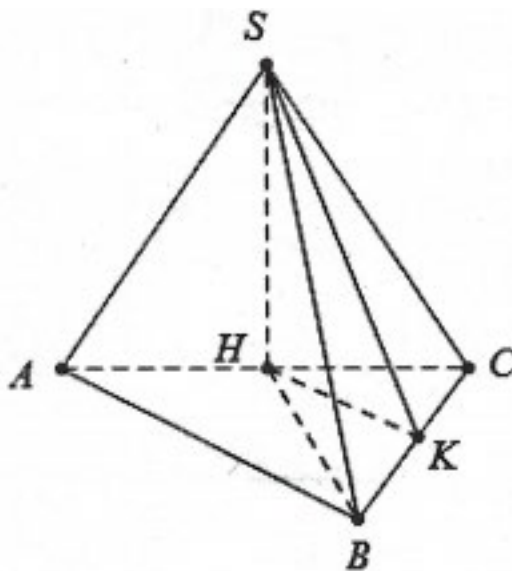
$$\text{b) Dựng } AH \perp BD \Rightarrow BD \perp (SHA) \Rightarrow \widehat{(SBD);(ABC)} = \widehat{SHA}.$$

$$\text{Lại có: } AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \tan(\widehat{(SBD);(ABCD)}) = \tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}.$$

Ví dụ 10: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}$; $BC = a$, tam giác SAC là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° . Tính góc $\widehat{(SBC);(ABC)}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AC , do tam giác SAC cân nên ta có: $SH \perp AC$. Mặt khác $(SAC) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABC)$. Khi đó: $\widehat{(SB);(ABC)} = \widehat{SBH} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC = a.$$

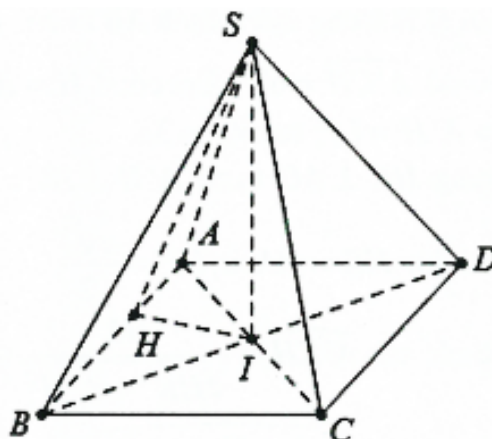
$$\text{Khi đó: } SH = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Dựng } HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{SKH} = \widehat{(SBC);(ABC)}$$

$$\text{Ta có: } HK = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SH = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos \widehat{SKH} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{(SBC);(ABC)} = \varphi \text{ với } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \frac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

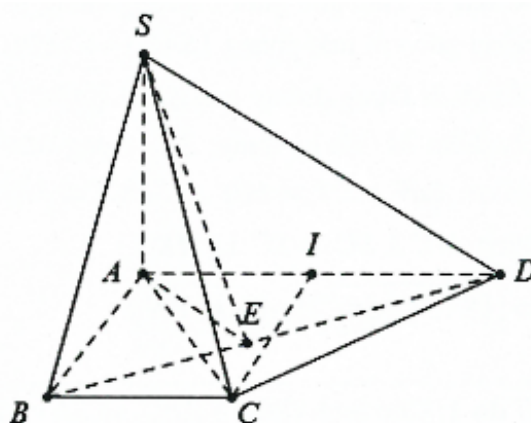
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB . Ta có: $\begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI)$.

Do đó $\varphi = (\widehat{SH; IH}) = \widehat{SHI}$.

Do $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAI} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $2a$

Suy ra: $IA = a \Rightarrow IH = IA \sin \widehat{IAB} = IA \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\tan \varphi = \frac{SI}{IH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$ và $AB = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và (SBD) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA)$.

Khi đó: $((SBC); (ABCD)) = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C .

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCA).$

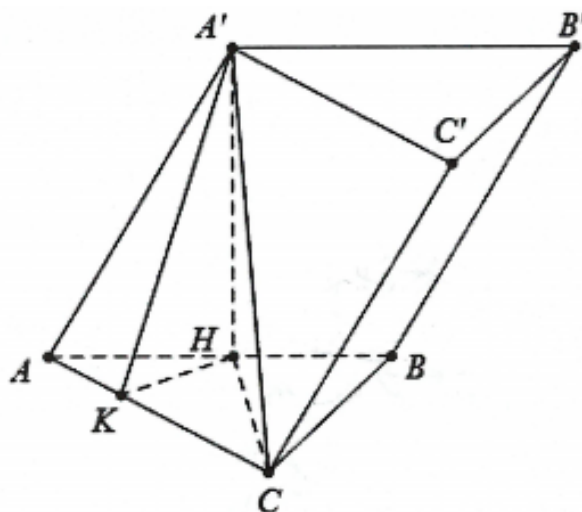
Do đó $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$ và $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Dựng $AE \perp BD$, lại có $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SEA) \Rightarrow \widehat{((SBD);(ABCD))} = \widehat{SEA}.$

Ta có: $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \widehat{SEA} = \frac{SA}{AE} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính cosin góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt đáy (ABC) .

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có: $A'H \perp (ABC)$

Do đó $\widehat{A'CH} = 60^\circ$. Lại có: $CH = AC \sin 60^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow A'H = CH \tan 60^\circ = 3a.$

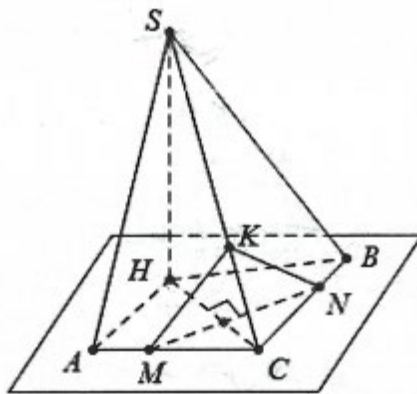
Dựng $HK \perp AC$ ta có $A'H \perp AC \Rightarrow (A'HK) \perp AC$

Khi đó $HK = HA \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Ta có: $\cos \widehat{A'KH} = \frac{HK}{\sqrt{HK^2 + A'H^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} > 0.$ Do vậy $\cos \widehat{((A'AC);(ABC))} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$



Dạng 3: Xác định góc giữa hai mặt bên



Tính góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC) .

- **Cách 1:** Tính góc giữa 2 đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với mặt phẳng (SAC) và (SBC) .
- **Cách 2:** Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc AC , dựng $MN \perp HC$.

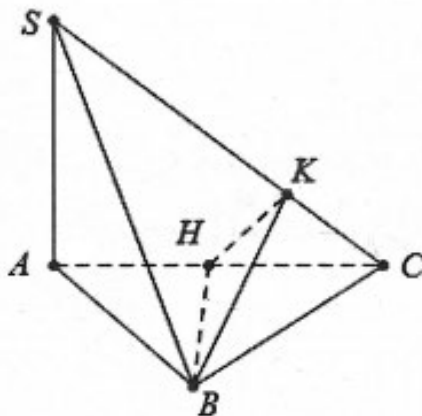
Lại có: $MN \perp SH \Rightarrow MN \perp (SHC) \Rightarrow MN \perp SC$.

Dựng $MK \perp SC \Rightarrow SC \perp (MKN) \Rightarrow \widehat{((SAC); (SBC))} = \widehat{(MK, KN)}$.

Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC tam giác vuông tại

B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

Lời giải



Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Dựng $HK \perp SC \Rightarrow (HKB) \perp SC \Rightarrow \widehat{((SBC); (SAC))} = \widehat{HKB}$.

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.

Khi đó $\sin \widehat{KCH} = \frac{HK}{HC} = \frac{SA}{SC} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.



$$\text{Mặt khác: } BH = \frac{BA \cdot BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{HKB} = \frac{BH}{HK} = \sqrt{3}$$

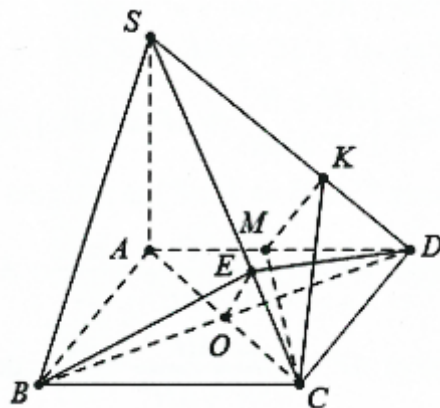
$\Rightarrow \widehat{HKB} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° .

Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính cosin góc giữa:

a) (SBC) và (SCD) .

b) (SAD) và (SCD) .

Lời giải



a) Nhận xét $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a vì $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Dựng $BE \perp SC \Rightarrow SC \perp (BED)$.

Mặt khác: $SA = AC = a \Rightarrow \triangle SAC$ vuông cân tại A suy ra

$$\widehat{ECO} = 45^\circ. \text{ Khi đó } OE = OC \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Lại có: } OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{BEO} = \frac{OB}{OE} = \sqrt{6}.$$

Do $\widehat{BED} = 2\widehat{BEO}$ sử dụng công thức lượng giác hoặc máy tính **CASIO** ta tính được

$$\cos \widehat{BED} = \frac{-5}{7}$$

$$\text{Cách khác: Ta có: } BE = DE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{BED} = \frac{EB^2 + ED^2 - BD^2}{2 \cdot EB \cdot ED} = \frac{-5}{7}.$$

$$\text{Suy ra } \cos((SBC); (SCD)) = \frac{5}{7}.$$

$$\text{b) Dựng } CM \perp AD \text{ ta có: } \begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD) \Rightarrow CM \perp SD.$$

Dựng $CK \perp SD \Rightarrow SD \perp (MKC)$.



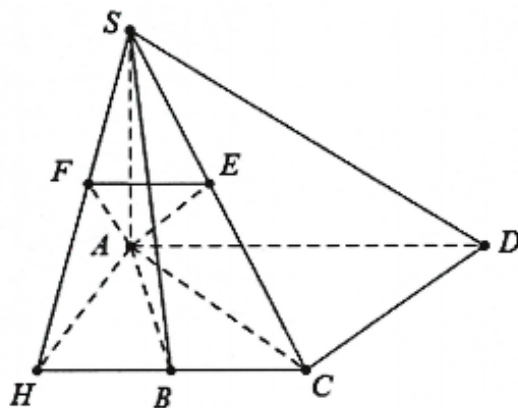
Tam giác ACD đều cạnh a nên $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $SA = AD = a \Rightarrow \triangle SAD$ vuông cân tại A suy

ra $\widehat{SDM} = 45^\circ$. Do đó $MK = MD \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra $\tan \widehat{MKC} = \frac{CM}{MK} = \sqrt{6} \Rightarrow \cos \widehat{MKC} = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Vậy $\cos((SCD);(SAD)) = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AD = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 45° . Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

Lời giải



Do $AD = 2a$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Suy ra $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^\circ$

$$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

Dựng $AE \perp SC \Rightarrow AE \perp (SCD)$

Dựng $\begin{cases} AH \perp BC \\ AF \perp SH \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBC)$, góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) là góc giữa AE và AF .

$$\text{Ta có: } AE = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}; \quad AH = AC \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

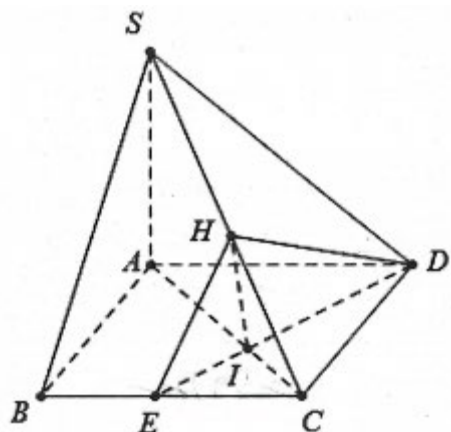
Suy ra $AF = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, do $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp FE$. Do đó

$$\cos \widehat{FAE} = \frac{AF}{AE} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .



Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SBA)$

Do đó $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SBA} = 60^\circ$; $AC = 2a \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dựng $DE \perp AC (E \in BC)$ tại I , mặt khác $DE \perp SA \Rightarrow DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp SC$.

Dựng $IH \perp SC \Rightarrow SC \perp (EHD)$. Ta có: $DI = DC \sin \widehat{ICD}$ trong đó

$$\tan \widehat{ICD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ICD} = 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } DI = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; DE = \frac{DC^2}{DI} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

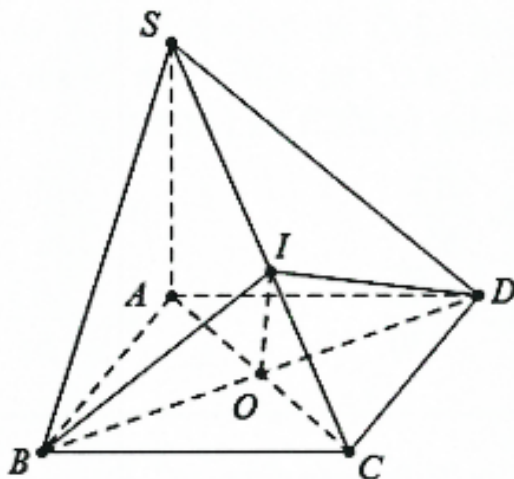
$$\Rightarrow IE = DE - DI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow CI = \sqrt{EI \cdot DI} = \frac{a}{2}; \sin \widehat{ICH} = \frac{SA}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow IH = IC \sin \widehat{IHC} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{Suy ra } EH = \sqrt{EI^2 + IH^2} = \frac{2a}{\sqrt{21}}; ED = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

$$\text{Do đó } \cos \widehat{EHD} = \frac{EH^2 + HD^2 - ED^2}{2 \cdot EH \cdot HD} = \frac{-\sqrt{2}}{4} < 0 \Rightarrow \cos(\widehat{(SBC);(SCD)}) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$, tính độ dài đoạn thẳng SA để góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60° .

Lời giải





Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC. \text{ Kẻ } BI \perp SC \Rightarrow SC \perp (BID).$

Vậy $\widehat{(SBC);(SCD)} = \widehat{(BI;ID)} = 60^\circ$ Dễ thấy $\begin{cases} OI \perp SC \\ \widehat{BIO} = \frac{1}{2} \widehat{BID} \end{cases}$

Trường hợp 1: $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BIO} = 30^\circ$.

Ta có: $\tan \widehat{BIO} = \frac{BO}{IO} = \tan 30^\circ \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{2} > OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý).

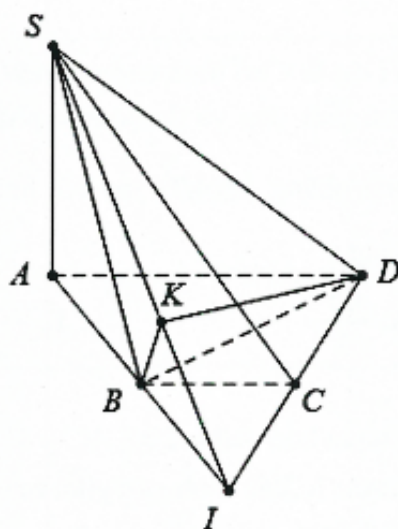
Trường hợp 2: $\widehat{BID} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ$.

Ta có: $\tan \widehat{BIO} = \frac{BO}{IO} = \tan 60^\circ \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Mặt khác: $\sin \widehat{ICO} = \frac{OI}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan \widehat{ICO} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC \tan \widehat{ICO} = a$.

Ví dụ 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải



Do $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB . Do đó $\widehat{ABD} = 90^\circ$.

Gọi $I = AB \cap CD \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Do $\begin{cases} AI \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp SI$.

Dựng $BK \perp SI \Rightarrow SI \perp (BKD)$.

Khi đó $\widehat{(SAB);(SCD)} = \widehat{(BK,KD)} = \widehat{BKD}$.

Do $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp BK \Rightarrow \Delta KBD$ vuông tại B có

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}.$$

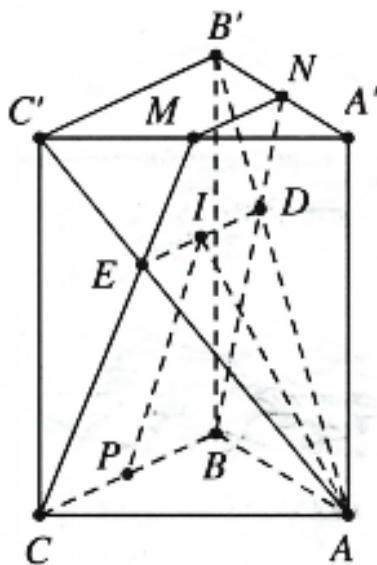


$$\text{Do } \begin{cases} BC // AD \\ BC = \frac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow BC \text{ là đường trung bình trong tam giác } AID \Rightarrow AB = BI \text{ và } AI = 2a$$

$$\Rightarrow BK = \frac{1}{2}d(A; SI) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan \widehat{BKD} = \frac{BD}{BK} = \sqrt{7}.$$

Ví dụ 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và $A'B'$. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$.

Lời giải



Gọi P là trung điểm BC . Đặt $AB' \cap BN = D$, $AC' \cap CM = E$

Suy ra DE là giao tuyến của $(AB'C')$ và $(BCMN)$

Gọi I là trung điểm DE , do tính đối xứng $\Rightarrow IA \perp DE$, $IP \perp DE$

Do đó $DE \perp (AIP) \Rightarrow \widehat{(AB'C'); (BCMN)} = \widehat{(IA; IP)} = \widehat{AIP}$

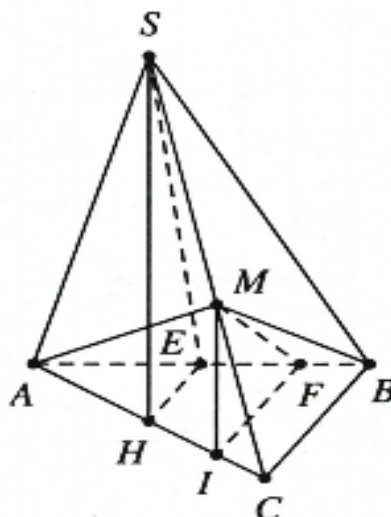
Ta có $AP = 3$ và $\frac{DE}{B'C'} = \frac{AD}{AB'} = \frac{AB}{AB + B'N} = \frac{2}{3}$ nên I là trọng tâm tam giác

$$AB'C' \Rightarrow AI = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2(AB'^2 + AC'^2) - B'C'^2}{4}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

Tương tự thì I là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow PI = \frac{5}{3}$

$$\text{Xét tam giác } IAP \text{ có } \cos \widehat{AIP} = \frac{IP^2 + IA^2 - AP^2}{2IP \cdot IA} = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Ví dụ 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác SAC là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng $(SAB); (ABC)$ góc bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{MS}{MC}$.

Lời giải

Chuẩn hoá $AB = 2 \Rightarrow AC = 4; BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$

Bước 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (ABC)$

Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Gọi E là trung điểm $AB \Rightarrow HE \parallel BC \Rightarrow HE \perp AB$

Mà $SH \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow \widehat{(SAB); (ABC)} = \widehat{SEH}$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{SEH} = \frac{SH}{HE} = \frac{2SH}{BC} = \frac{8\sqrt{3}}{2} : 2\sqrt{3} = 2$$

Bước 2. Ta có $\widehat{(MAB); (SAB)} = \widehat{(MAB); (ABC)}$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \widehat{(MAB); (ABC)} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{(SAB); (ABC)} = \frac{\widehat{SEH}}{2}$$

Gọi I là hình chiếu của M trên $AC \Rightarrow MI \perp (ABC)$

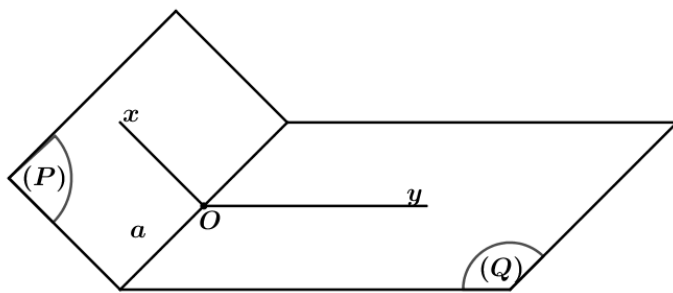
Kẻ $IF \perp AB (F \in AB)$ nên $AB \perp (MIF) \Rightarrow \widehat{(MAB); (ABC)} = \widehat{MFI}$

$$\text{Đặt } MC = x \Rightarrow \frac{MC}{SC} = \frac{MI}{SH} = \frac{IC}{HC} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{MI}{2\sqrt{3}} = \frac{IC}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{3}x}{2}; IC = \frac{x}{2}$$

$$\text{Lại có } \frac{HE}{IF} = \frac{AH}{AI} \Leftrightarrow IF = \frac{HE \cdot AI}{AH} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(4 - \frac{x}{2}\right)}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}x}{4}$$

$$\text{Tam giác } MIF \text{ vuông tại } I \longrightarrow \tan \widehat{MFI} = \frac{MI}{IF} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Do đó } 2IF = 3MI \Leftrightarrow 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \longrightarrow \frac{MC}{MS} = 1.$$

**Dạng 4: Xác định và tính số đo góc phẳng nhị diện**

Ta xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) theo 3 bước:

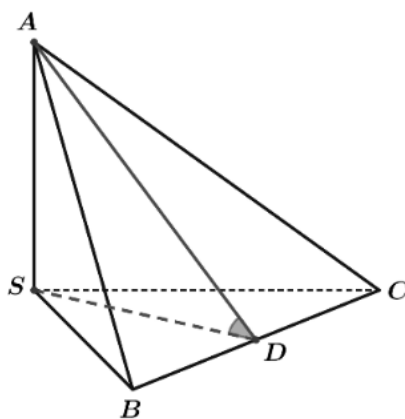
Bước 1: Tìm giao tuyến $a = (P) \cap (Q)$.

Bước 2: Tìm $x \subset (P): x \perp a$ và $y \subset (Q): y \perp a$.

Bước 3: Kết luận $[P, a, Q]$

Ví dụ 22: Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Tính $\cos \alpha$?

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC suy ra $SD \perp BC$ (vì tam giác SBC cân tại S).

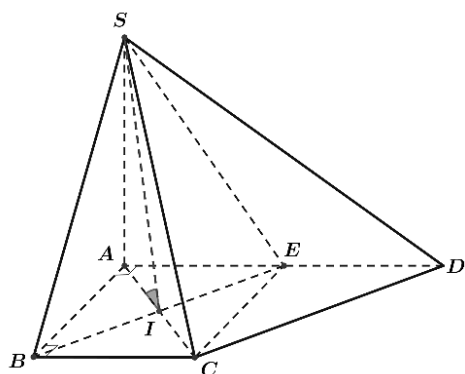
Suy ra $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$ và $SD \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SD$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SD \perp BC \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SDA} = \alpha$.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại S ta có: $\cos \alpha = \cos \widehat{SDA} = \frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BE, A]$.

Lời giải



Nhận xét: $ABCE$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi $I = AC \cap BE$.

Ta có: $\begin{cases} BE \perp AI \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAI) \Rightarrow BE \perp SI$.

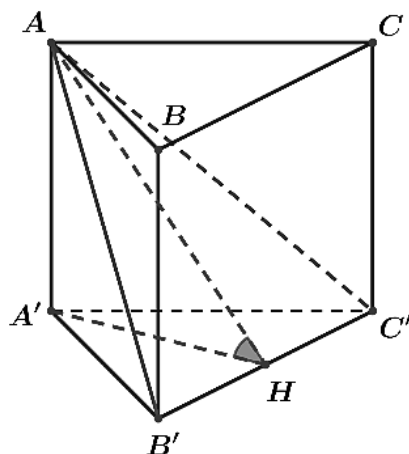
Khi đó $\begin{cases} (SBE) \cap (ABE) = BE \\ AI \perp BE \\ SI \perp BE \end{cases} \Rightarrow [S, BE, A] = \widehat{SIA}$

Xét $\triangle SIA$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{IA} = \frac{a\sqrt{6}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ$.

Ví dụ 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính φ ?

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh $B'C'$. Suy ra $A'H \perp B'C'$.



Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'AH) \Rightarrow B'C' \perp AH$.

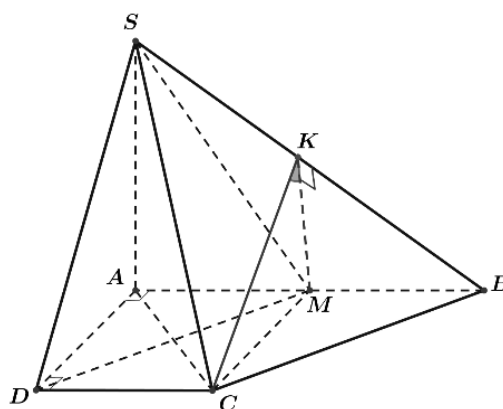
$\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ A'H \perp B'C' \\ AH \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA}$.

Xét $\triangle A'AH$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{A'HA} = \frac{AA'}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'HA} = \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}$.



Ví dụ 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[C, SB, A]$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB khi đó $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB)$.

Trong mặt phẳng (SAB) , từ M kẻ $MK \perp SB$ tại K .

Khi đó: $\begin{cases} SB \perp MK \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CMK) \Rightarrow SB \perp CK$.

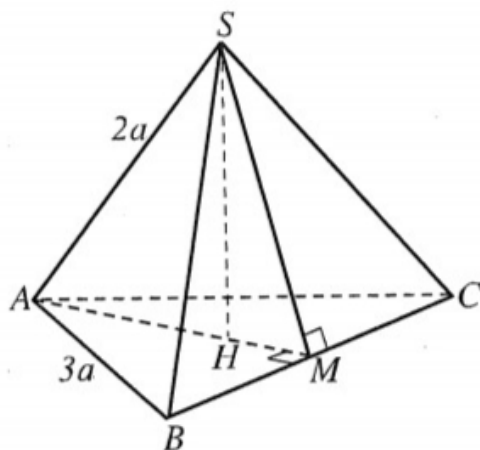
Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ MK \perp SB \\ CK \perp SB \end{cases} \Rightarrow [C, SB, A] = \widehat{CKM}$.

$\triangle BKM \sim \triangle BAS$ nên $\frac{KM}{SA} = \frac{BM}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow KM = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle CKM$ vuông tại M ta có: $\tan \widehat{CKM} = \frac{CM}{MK} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CKM} = 60^\circ$.

Ví dụ 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$ và cạnh bên $2a$. Tính số đo nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC thì $(SAM) \perp BC$ nên $\widehat{SMA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.



$$\text{Ta có: } AM = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SMB \text{ có: } SM^2 = SB^2 - BM^2 = 4a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}, \text{ từ đó } SM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{SMH} = \frac{HM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

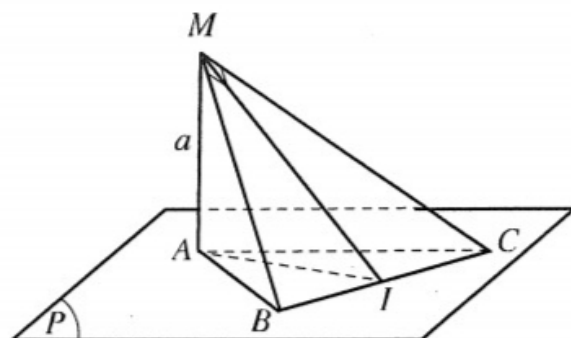
$$\text{Số đo nhị diện } [S, BC, A] \text{ là } \varphi \text{ được xác định bởi } \cos \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}, 0^\circ < \varphi < 180^\circ$$

Ví dụ 27: Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P) . Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P) . Cho biết $MA = a$; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.

a) Tính độ dài BC

b) Tính số đo nhị diện $[M, BC, A]$.

Lời giải



a) Vì $MA \perp (P)$ nên $\widehat{MBA}$ và $\widehat{MCA}$ là góc giữa MB và MC với (P) .

Theo giả thiết. $\widehat{MBA} = \widehat{MCA} = 30^\circ$.

Từ đó: $MB = MC = 2a$ và $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Do $MB \perp MC$ nên $BC = MB\sqrt{2}$ tức là $BC = 2a\sqrt{2}$.

b. Gọi I là trung điểm của BC thì $BC \perp (MIA)$

Từ đó $\widehat{MIA}$ là góc phẳng nhị diện $[M, BC, A]$.

Đặt $\widehat{MIA} = \varphi$. Ta có $MI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$; $\sin \varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

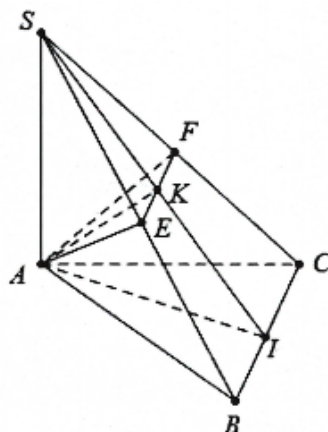
Vậy góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng 45°

**Dạng 5: Bài toán dựng thiết diện có yếu tố vuông góc.**

Ví dụ 28: Cho tứ diện $SABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:

- (α) qua S và vuông góc với BC .
- (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của $\triangle SBC$.

Lời giải



- a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$

Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAI)$

Thiết diện của khối chóp qua S và vuông góc với BC là tam giác SAI vuông tại A có $SA = a$; $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $S_{SAI} = \frac{1}{2} SA \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

- b) Dựng $AK \perp SI$, lại có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK$

Suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SI$.

Qua K dựng đường thẳng vuông góc với SI cắt SB , SC lần lượt tại E và $F \Rightarrow$ thiết diện là tam giác AEF .

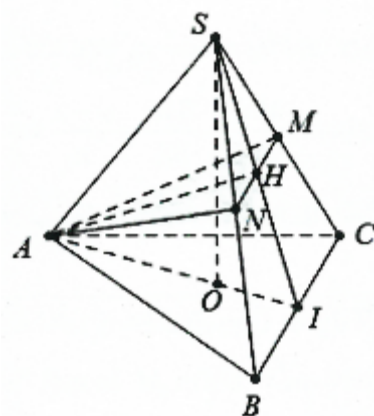
Ta có: $AK = \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH nên:

$$SA^2 = SK \cdot SI \Rightarrow \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SK}{SI} = \frac{EF}{BC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Do đó } EF = \frac{4}{7}a \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2} AK \cdot EF = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}.$$

Ví dụ 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua A , song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC) , xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp và tính diện tích thiết diện.

Lời giải



Gọi O là trọng tâm tam giác ABC thì $SO \perp (ABC)$ (Do $S.ABC$ là khối chóp đều).

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ mà $BC \perp SO$ suy ra $BC \perp (SAI)$.

Dựng $AH \perp SI$, lại có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Suy ra $AH \perp (SBC)$. Qua K dựng đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại N và $M \Rightarrow$ thiết diện là tam giác AMN .

Ta có: $SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H$ là trung điểm của SI .

Suy ra $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$. Lại có: $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

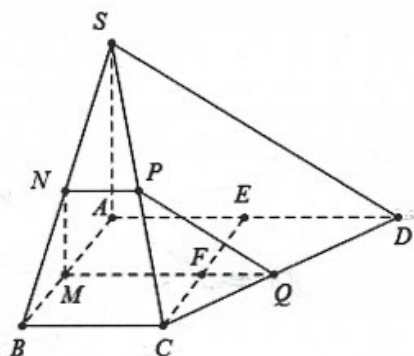
Khi đó $AH = \sqrt{AI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Ví dụ 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Đặt $x = AM$ ($0 < x < a$).

a) Tìm thiết diện của hình chóp với (α) . Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x .

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại Q .

Trong mặt phẳng (SAB) , qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại N .

Do $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \parallel BC$



Do đó (α) cắt (SBC) theo giao tuyến là $NP (P \in SC)$ thì $NP \parallel BC$.

Do $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại M và N .

Trong mp $(ABCD)$, dựng $CE \perp AD$ và cắt MQ tại F

$$\text{b) Ta có: } MF = AE = BC = a \Rightarrow DE = a; \frac{FQ}{ED} = \frac{CF}{CE} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow FQ = a-x.$$

$$\text{Suy ra } MQ = 2a-x, \text{ mặt khác } \frac{AM}{AB} = \frac{SN}{SB} = \frac{NP}{BC} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{NP}{a} \Rightarrow NP = x$$

$$\text{Lại có: } \frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow MN = 2a-2x$$

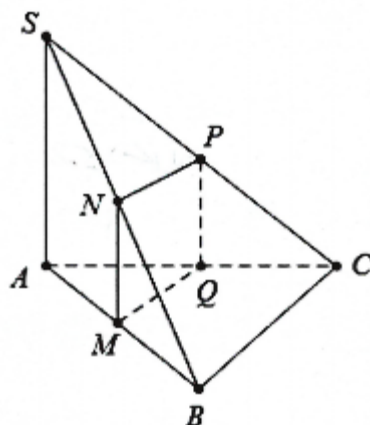
$$\text{Diện tích thiết diện là: } S_{MNPQ} = \frac{MQ+NP}{2} \cdot MN = 2a(a-x).$$

Ví dụ 31: Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Điểm M là một điểm tùy ý trên cạnh AB , đặt $AM = x, (0 < x < a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB .

a) Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) .

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x . Tìm x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt AC tại Q .

Trong mặt phẳng (SAB) , qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại N .

Do $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \parallel BC$

Do đó (α) cắt (SBC) theo giao tuyến là $NP (P \in SC)$ thì $NP \parallel BC$. Lại có: $MN \parallel SA \Rightarrow (\alpha)$ cắt (SAC) theo giao tuyến là $PQ \Rightarrow PQ \parallel SA \parallel MN \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Do $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp AB$

Vậy thiết diện của chóp với (α) là hình chữ nhật $MNPQ$.

Ta có: $AB = BC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.



$$\text{Mặt khác } \frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BC} = \frac{x}{a} \Rightarrow MQ = x, \frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \sqrt{3}(a-x).$$

$$\text{Diện tích thiết diện là } S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \sqrt{3} \cdot x(a-x).$$

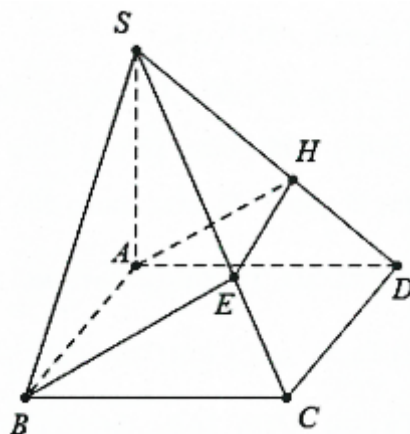
$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ ta có: } S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \sqrt{3} \cdot x(a-x) \leq \sqrt{3} \cdot \left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2$$

$$\text{Suy ra: } S_{MNPQ} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ đạt được khi } x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Ví dụ 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

- (α) cắt khối chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?
- Biết $SA = a$. Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu a.

Lời giải



- Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AH \perp SD$ tại H .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp AD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD).$$

(α) là mặt phẳng chứa AB đồng thời chứa AH vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

Vậy $(\alpha) \perp (SCD)$ và $(\alpha) \equiv (AB, AH)$.

Ta có: $AB \parallel CD$ nên $CD \parallel (\alpha)$ và H là điểm chung của (α) và (SCD) nên giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua H và song song với CD cắt SC tại E . Ta có thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang vuông $AHEB$ vuông tại A và H vì $AB \perp (SAD)$.

$$\text{b) Do } SA = AD = a \Rightarrow H \text{ là trung điểm của } AD \Rightarrow AH = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; EH = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$$

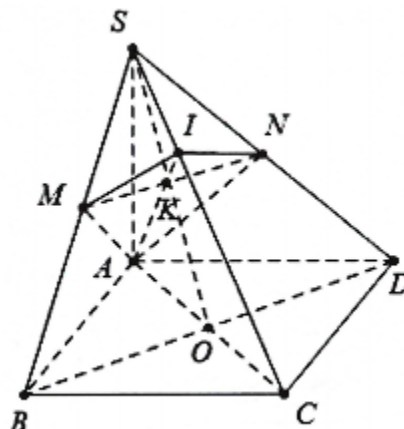
$$\text{Diện tích hình thang vuông } AHEB \text{ là: } S_{AHEB} = \frac{AB + EH}{2} \cdot AH = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{8}.$$



Ví dụ 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có $SA \perp (ABCD)$. Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC , (α) cắt SC tại I .

- Xác định giao điểm K của SO với mặt phẳng (α) .
- Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và $BD // (\alpha)$.
- Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (α) . Tìm thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (α) .
- Biết rằng $AB = a$; $SA = a\sqrt{2}$ Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu c.

Lời giải



a) Gọi $I = (\alpha) \cap SC$.

Ta có: $(\alpha) \perp SC$, $AI \subset (\alpha) \Rightarrow SC \perp AI$.

Vậy AI là đường cao của tam giác vuông SAC . Trong mặt phẳng (SAC) , đường cao AI cắt SO tại K và $AI \subset (\alpha)$ nên K là giao điểm của SO với (α) .

b) Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Mặt khác $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

Do $BD \perp SC$ và $(\alpha) \perp SC$ nhưng BD không chứa trong (α) nên $BD // (\alpha)$.

c) Ta có: $K = SO \cap (\alpha)$ và SO thuộc mặt phẳng (SBD) nên K là một điểm chung của (α) và (SBD) . Mặt phẳng (SBD) chứa $BD // (\alpha)$ nên cắt (α) theo giao tuyến $d // BD$. Giao tuyến này đi qua K là điểm chung của (α) và (SBD) . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của d với SB và SD . Thiết diện là tứ giác $AMIN$ có

$$\begin{cases} AI \perp SC \\ MN // BD \end{cases}$$

d) Ta có: $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AI$ mà $BD // MN \Rightarrow AI \perp MN$.

Tứ giác $AMIN$ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên $S_{AMIN} = \frac{1}{2} AI \cdot MN$



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC cân tại A suy ra AI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến. Khi đó $K = AI \cap SO$ là trọng tâm tam giác SAC .

Lại có: $\frac{SK}{SO} = \frac{MN}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Mặt khác $AI = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

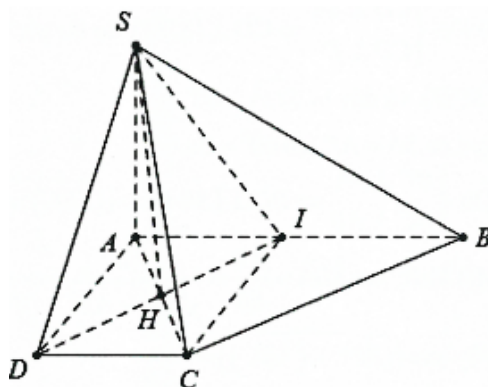
Do đó $S_{AMN} = \frac{1}{2}AI.MN = \frac{a^2}{3}$.

Ví dụ 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, và có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$, $(SAC) \perp (SBC)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện.

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$ suy ra $(SCD) \perp (SAD)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Ta có: $AICD$ là hình vuông và $IBCD$ là hình bình hành. Do $DI \parallel BC$ và $DI \perp AC \Rightarrow AC \perp CB$.

Do đó $CB \perp (SAC)$. Vậy $(SBC) \perp (SAC)$.

c) Ta có: $\begin{cases} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC)$.

Vậy mặt phẳng (α) chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) chính là mặt phẳng (SDI) .

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) là tam giác đều SDI có

$$SD = DI = AI = a\sqrt{2}.$$

Diện tích tam giác SDI là: $S_{SDI} = \frac{SD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

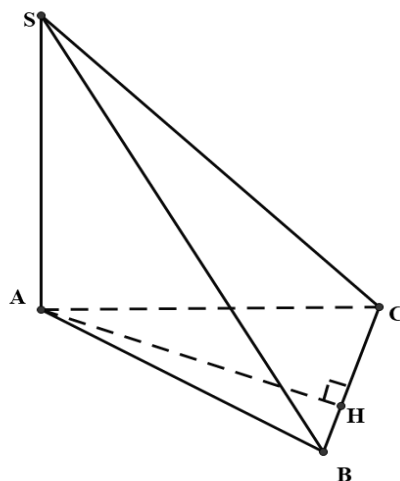


Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC .

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



a) $SA \perp (ABC)$; $SA \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \\ SA \perp BC \quad (SA \perp (ABC)) \\ AH \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAH); BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAH) \perp (SBC)$$

b) Ta có $AH \perp BC$, $BC \perp SH$ ($BC \perp (SAH)$) $\Rightarrow [S, BC, A] = (SH, AH) = \widehat{SHA}$

Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ACH} = 60^\circ$

Xét tam giác ACH vuông tại H có $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SHA vuông tại A có $\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow \widehat{SHA} = 45^\circ$

Vậy $[S, BC, A] = 45^\circ$

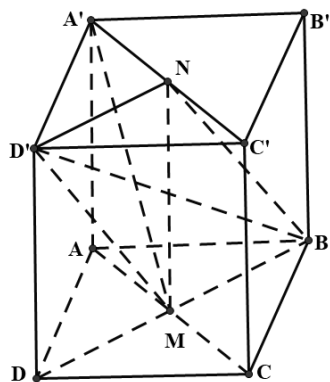
Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C]$, $[A, BD, C']$

Lời giải



a) Độ dài đường chéo của hình lập phương có thể tính từ công thức cạnh đường chéo của hình lập phương như sau: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$

b) Ta có $AC^2 + CA'^2 = AA'^2$ do tam giác vuông ACA' nên ta có $AC = CA' = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Tương tự $BD^2 = DB'^2 = BC^2 = CB'^2 = AD^2 = DA'^2 = a^2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $BD, A'C'$ thì $MN \parallel AC \parallel A'C'$ và $MN = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2a^2$

Do AMD' và $D'BN$ là hai tam giác vuông cân tại M, N . Suy ra $(ACC'A') \perp (BDD'B')$

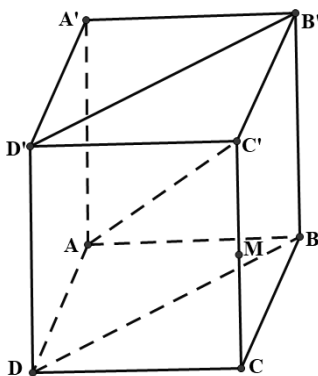
Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC' .

Lời giải



a) Ta có $BB' \perp (ABCD); BB' \subset (BDD'B') \Rightarrow (BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) A là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$

C là hình chiếu của C' trên $(ABCD)$ do $CC' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$

c) Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

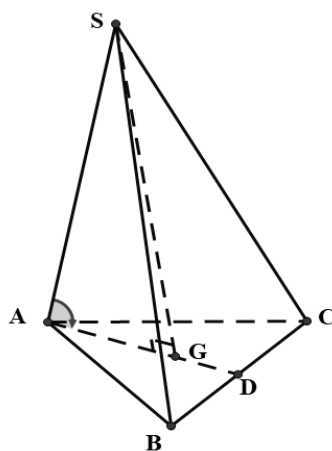
Xét tam giác $AC'C$ vuông tại C có $AC'^2 = CC'^2 + AC^2 = c^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b .

- Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.
- Tính tan của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

Lời giải



Vì hình chóp $S.ABC$ đều Gọi G là hình chiếu của S trên (ABC) nên G là tâm của đáy ABC là tam giác đều do đó G cũng là trọng tâm hay trực tâm của tam giác ABC .

Gọi AG cắt BC tại D

a) Ta có A là hình chiếu của A trên (ABC) ; G là hình chiếu của S trên (ABC)

$\Rightarrow AG$ là hình chiếu của SA trên $(ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, AG) = \widehat{SAG}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà G là trọng tâm nên $AG = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G có: $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$

$$\text{Khi đó: } \sin \widehat{SAG} = \frac{SG}{SA} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3b^2}}$$

b) Ta có $AG \perp BC, SG \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD); SD \subset (SAD) \Rightarrow BC \perp SD$

Suy ra: $BC \perp AD$ (G là trọng tâm)

Mặt khác: $(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (AD, SD) = \widehat{SDA}$

Mà G là trọng tâm nên $GD = \frac{1}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Xét tam giác SGD vuông tại G có: $\tan \widehat{SGD} = \frac{SG}{GD} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{6}{a\sqrt{3}} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$

Câu 5: Hai mái nhà trong hình là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8$ m; $OA = 2,8$ m; $OB = 4$ m.

- Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng.



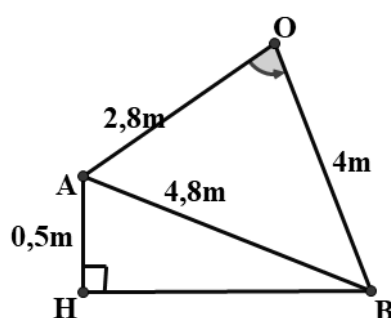
Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.

c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5\text{ m}$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.



Hình 7.72

Lời giải



a) Vì hai mái nhà trong hình là hai hình chữ nhật nên góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà là góc giữa hai đường thẳng OA và OB .

$$\text{Xét tam giác } OAB \text{ có: } \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{2,8^2 + 4^2 - 4,8^2}{2 \cdot 2,8 \cdot 4} = \frac{1}{28} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 88^\circ$$

b) Mặt phẳng (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng đất.

c) Đường thẳng qua B song song với mặt đất cắt đường thẳng qua A vuông góc với mặt đất tại H

$$\text{Ta có: } \sin \widehat{ABH} = \frac{0,5}{4,8} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 6^\circ; \cos \widehat{OBA} = \frac{13}{16} \Rightarrow \widehat{OBA} \approx 36^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{OBH} = \widehat{ABH} + \widehat{OBA} \approx 42^\circ.$$

Vậy góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất khoảng 42°

Câu 6: Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tan của góc tạo bởi mái nhà mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Giả sử góc tạo bởi đường thẳng dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang là a



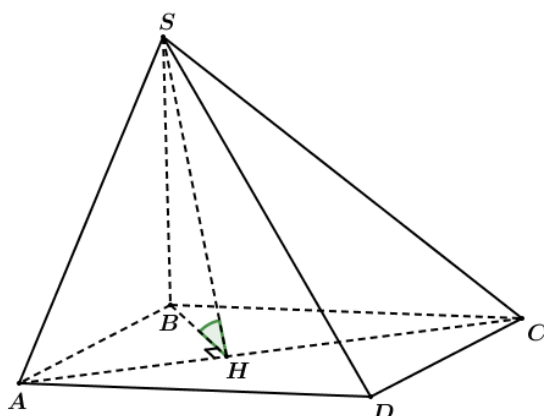
Vì độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$ nên ta có

$$\tan \alpha \leq \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \leq 4,76^\circ.$$

Vậy góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá $4,76^\circ$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SB = 2a, AB = 3a, BC = 4a$ và góc α là góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng đáy. Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

Lời giải

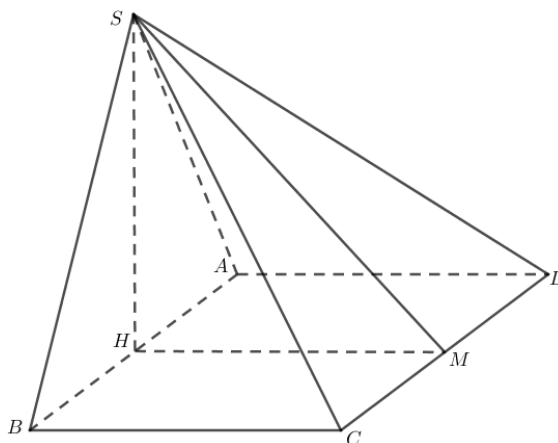


Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow \alpha = \widehat{SHB}$.

$$\text{Ta có } HB = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{3a \cdot 4a}{5a} = \frac{12a}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SB}{BH} = \frac{2a}{\frac{12a}{5}} = \frac{5}{6}.$$

Câu 8: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Ta có: $SH \perp AB$, $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.



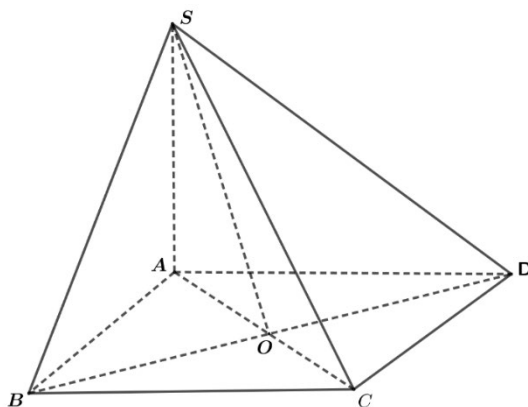
Do đó: $AB \perp SH, MN$. Suy ra $AB \perp (SHM)$, mà $AB \parallel CD$ nên $(SHM) \perp (SAB), (SCD)$.

Vậy $\alpha = \widehat{MSH}$.

Xét tam giác SMH vuông tại H có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = a$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{HM}{HS} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$

Lời giải



Gọi O là tâm của $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \end{cases}$

Suy ra $(\widehat{(SBD), (ABCD)}) = (\widehat{SO, AC}) = \widehat{SOA}$

Tam giác SAO vuông tại A : $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

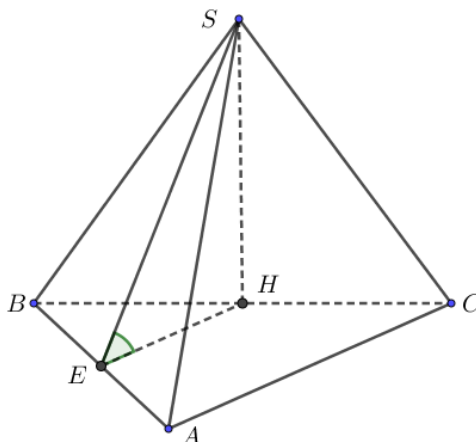
Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$.

Lời giải



Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A , cạnh $BC = 3a, AC = a\sqrt{6}$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) .

Lời giải



Gọi H, E lần lượt là trung điểm $BC, AC \Rightarrow HE = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

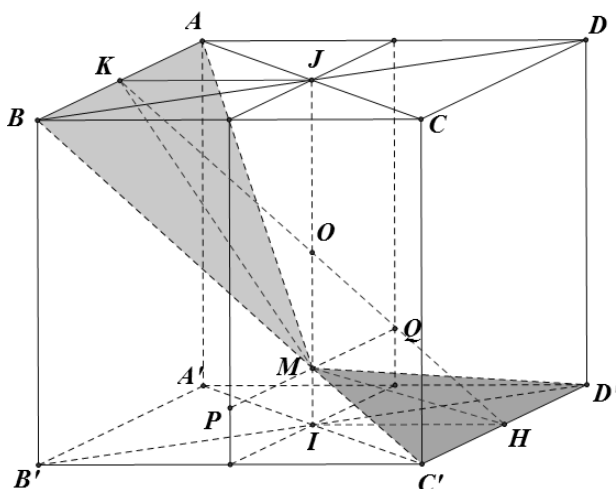
Do $SA = SB = SC$ và đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh $A \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SH^2 - BH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ SE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SAB), (ABC)} = \widehat{SEH} = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SH}{EH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{(SAB), (ABC)} = 60^\circ$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB)

Lời giải



Giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng $PQ // AB // C'D'$ như hình vẽ.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB . Ta có: $MH \perp PQ; MK \perp PQ$.

Suy ra $\widehat{((MC'D'), (MAB))} = \widehat{(MH; MK)}$.

Chuẩn hóa cạnh hình lập phương bằng 1 ta tính được: $MH = \frac{\sqrt{10}}{6}$, $MK = \frac{\sqrt{34}}{6}$, $HK = \sqrt{2}$.

Xét tam giác HMK ta có: $\cos \widehat{HMK} = \frac{MH^2 + MK^2 - HK^2}{2MH \cdot MK} = \frac{-7\sqrt{85}}{85}$.

Suy ra cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ bằng $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') .

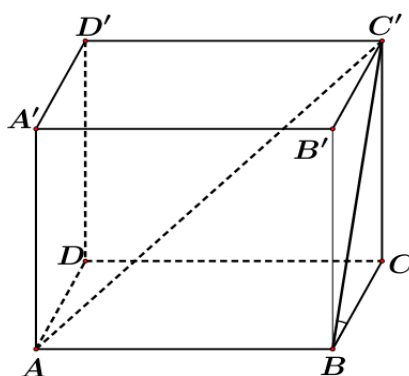
A. 30° .

B. $\frac{1}{2}$.

C. 60° .

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên nó là hình hộp chữ nhật có hai đáy là hình vuông $\Rightarrow AB \perp (BCC'B') \Rightarrow AB \perp BC'$.

Ta có $\begin{cases} BC' \perp AB \\ CB \perp AB \\ C'C \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((ABCD); (ABC')) = (\widehat{BC'; BC}) = \widehat{C'BC}$.

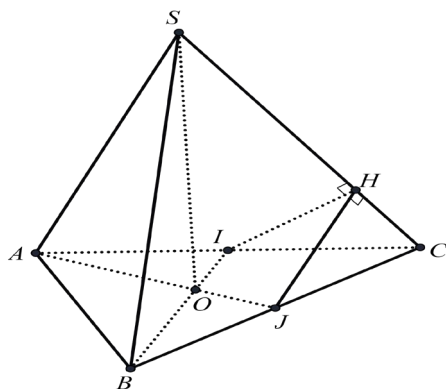
Xét tam giác $C'BC$ vuông tại C có $BC' = \sqrt{CC'^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

$\Rightarrow \cos \widehat{C'BC} = \frac{BC}{BC'} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

Vậy cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 15: Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết $SA = SB = SC = a$, $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) . Tính $\cos \varphi$

Lời giải



Gọi O là tâm của $\triangle ABC$. Vì $SA = SB = SC$ nên $SO \perp (ABC)$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $AC, BC \Rightarrow IJ$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow IJ \parallel AB$

Mà $CO \perp AB$ nên $IJ \perp CO$

Ta lại có : $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp IJ$.

Như vậy : $\begin{cases} IJ \perp CO \\ IJ \perp SO \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (SOC) \Rightarrow IJ \perp SC$ (1).

Trong $\triangle SAC$ kẻ $IH \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có : $(IJH) \perp SC \Rightarrow JH \perp SC$.

Suy ra $\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = BC \\ SC \perp IH \subset (SAC) \\ SC \perp JH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow ((SAC), (SBC)) = (IH, JH)$.

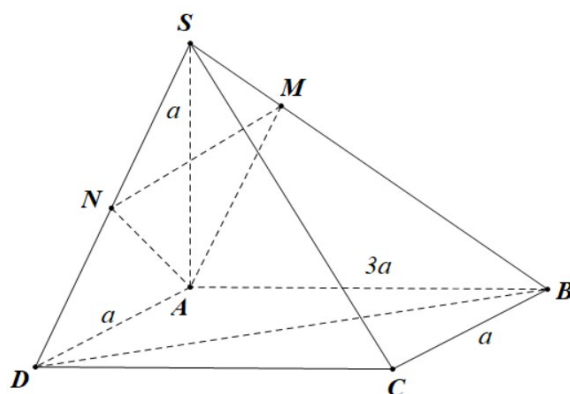
Khi đó: $\frac{SI}{SC} = \frac{IH}{IC} \Rightarrow IH = \frac{SI \cdot IC}{SC} = \frac{\sqrt{SC^2 - IC^2} \cdot IC}{SC} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{39}}{16} = HJ$.

Vậy $\cos \varphi = \frac{IH^2 + HJ^2 - IJ^2}{2IH \cdot HJ} = \frac{\frac{39a^2}{256} + \frac{39a^2}{256} - \frac{3a^2}{16}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{39}}{16} \cdot \frac{a\sqrt{39}}{16}} = \frac{5}{13}$.

Câu 16: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $AB = 3a; AD = a; \widehat{BAD} = 120^\circ$.

$SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = \frac{1}{10}SB$, N là trung điểm của SD . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{10} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lại có: $SB \cdot SM = a^2 = SA^2 \Rightarrow AM \perp SB$. Do $SA = AD = a \Rightarrow AN \perp SD$.

Mặt khác: Xét $\triangle ABD$ có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 120^\circ = 9a^2 + a^2 + 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 13a^2$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{13}$.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD có đường kính AK

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BK \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAB) \Rightarrow BK \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBK) \Rightarrow AM \perp SK$.

Lý luận tương tự: $AN \perp SK$. Suy ra $SK \perp (AMN)$.

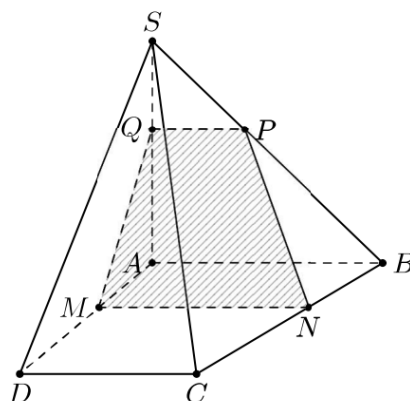
Theo giả thiết: $SA \perp (ABCD)$, suy ra $((AMN)(ABCD)) = (\widehat{SA; SK}) = \widehat{ASK}$.

Áp dụng định lý sin vào $\triangle ABD \Rightarrow AK = 2R = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{a\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Xét $\triangle SAK$ có: $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{55}}{\sqrt{3}}$ và $\cos \widehat{ASK} = \frac{SA}{SK} = \frac{\sqrt{165}}{55}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D , đáy lớn AB , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi Q là điểm trên cạnh SA và $Q \neq A, Q \neq S$, M là một điểm trên đoạn AD và $M \neq A$. Mặt phẳng (α) qua QM và vuông góc với mặt phẳng (SAD) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

Lời giải



Ta có $\left. \begin{array}{l} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (SAD) \text{ mà } (\alpha) \perp (SAD) \text{ nên } AB \parallel (\alpha).$

Qua M dựng đường thẳng song song với AB cắt BC tại N .

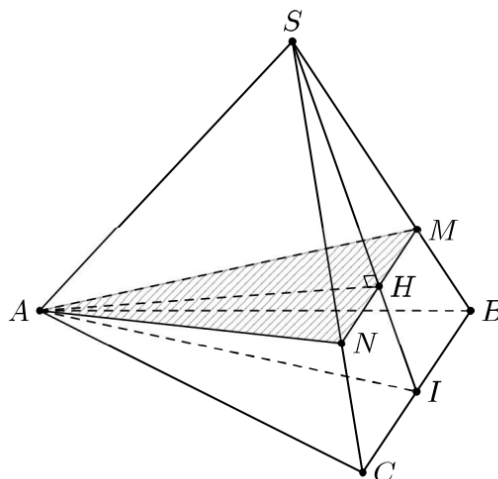
Qua Q dựng đường thẳng song song với AB cắt SB tại P .

Thiết diện là hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel AB \parallel QP$).

Do $AB \perp (SAD)$ suy ra $MN \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông tại Q, M

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABC$. Mặt phẳng (α) qua A , song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC . Trong tam giác SAI kẻ $AH \perp SI$ ($H \in SI$).

Trong tam giác SBC , qua H kẻ đường song song với BC cắt SB tại N , cắt SC tại M .

Qua cách dựng có $BC \parallel (AMN)$ (1).

Mà $\left. \begin{array}{l} SI \perp AH \\ SI \perp MN \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp (AMN) \Rightarrow (SBC) \perp (AMN)$ (2)

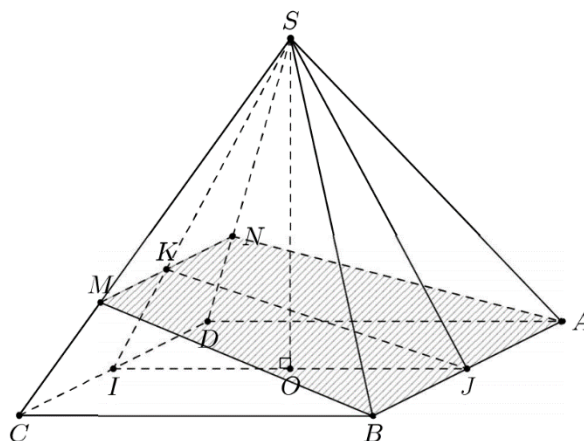


Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là tam giác AMN .

Dễ thấy H là trung điểm của MN mà $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp MN$. Tam giác AMN có đường cao AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên nó là tam giác cân đỉnh A .

Câu 19: Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .
Tìm thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

Lời giải



Gọi $I; J$ lần lượt là trung điểm của $CD; AB$.

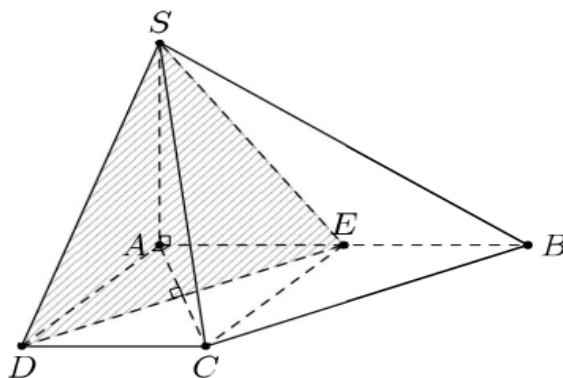
Trong tam giác SIJ kẻ $JK \perp SI$, qua K kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại M cắt SD tại N .

Ta dễ dàng chứng minh được $(ABMN) \perp (SCD)$.

Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang $ABMN$. Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên suy ra $AN = BM$. Vậy thiết diện là hình thang cân.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = 2a$; $AD = DC = a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua vuông góc với mặt phẳng (SAC) .
Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow AECD$ là hình vuông nên $DE \perp AC$ (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DE$ (2)



Từ (1); (2) suy ra $DE \perp (SAC) \Rightarrow (SAD) \perp (SAC)$.

$$\text{Từ đó } \begin{cases} (SDE) \supset SD \\ (SDE) \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \equiv (SDE)$$

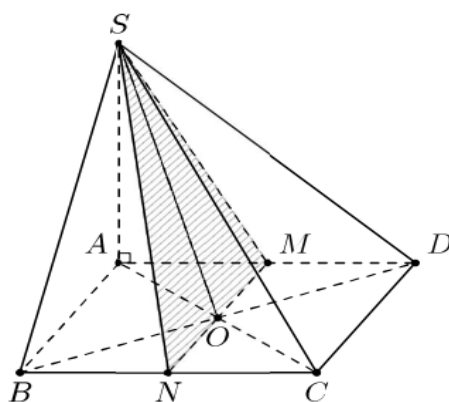
Vậy thiết diện là tam giác SDE .

$$\text{Ta có } SD = \sqrt{SA^2 + DA^2} = a\sqrt{2}; SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}; DE = AC = DC\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó tam giác } SDE \text{ đều có cạnh } a\sqrt{2} \text{ nên } S_{\Delta SDE} = \frac{SD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a$; $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD) . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho

Lời giải



Gọi $M; N$ lần lượt là trung điểm $AD; BC$. Khi đó MN đi qua O và

$$\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$$

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN .

$$\text{Tam giác } SMN \text{ vuông tại } M \text{ nên } S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} SM \cdot MN = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}.$$

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Qua M có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) mà (P) và (Q) song song với nhau nên cũng sẽ có vô số mặt phẳng vuông góc với cả (P) và (Q) .

Câu 2: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Một đường thẳng và một mặt phẳng không chứa đường thẳng đó cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề ở đáp án A chỉ đúng trong hình học phẳng, không đúng trong không gian.

Câu 3: Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) . Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây.

- A. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .
B. Không tồn tại mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .
C. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) vuông góc với (P) .
D. Tồn tại duy nhất một đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) và Δ vuông góc với d .

Lời giải

Chọn C

A sai. Vì trong trường hợp d cắt mặt phẳng (P) nhưng không vuông góc (P) hoặc d nằm trên (P) thì không tồn tại mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .

B sai. Vì trong trường hợp d song song (P) tồn tại một mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .

D sai. Vì tồn tại vô số đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) và Δ vuông góc với d trong các trường hợp: d cắt (P) nhưng không vuông góc (P) hoặc d nằm trên (P) hoặc d song song (P) .

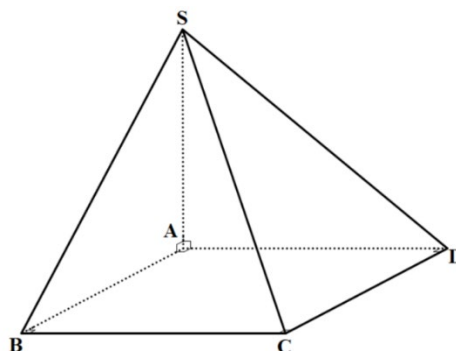


Câu 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với hình vuông đáy $ABCD$. Nhận xét sai là:

- A. Tam giác SBC vuông tại B .
- B. Tam giác SDC vuông tại C .
- C. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (SAB) .
- D. Mặt phẳng (SCD) vuông góc với mặt phẳng (SAD) .

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại B .

Vậy nhận xét **A** đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Vậy nhận xét **C** đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow$ tam giác SCD vuông tại D .

Vậy nhận xét **B** sai.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$. Vậy nhận xét **D** đúng.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn D

Theo nội dung định lý về hai mặt phẳng vuông góc.



Câu 6: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. vô số

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng qua M và Δ vuông góc với (P) . Suy ra Δ vuông góc với (Q) . Khi đó mọi mặt phẳng chứa Δ đều vuông góc với (P) và (Q) . Vậy có vô số mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
 B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.
 C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
 D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

Lời giải

Chọn A

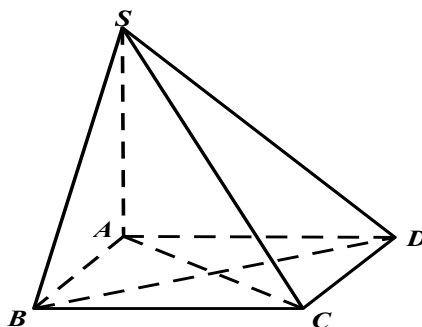
Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $(SBC) \perp (SAB)$. B. $(SAB) \perp (ABCD)$. C. $(SAC) \perp (ABCD)$. D. $(SAC) \perp (SAD)$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB).$$

$$\text{Ta có } SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD) \text{ và } (SAC) \perp (ABCD).$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi

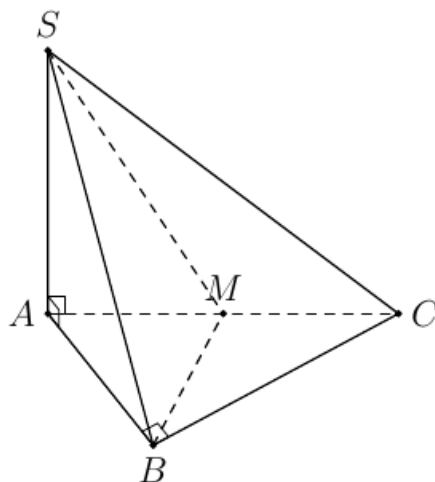


M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BM \perp AC$. B. $(SBM) \perp (SAC)$. C. $(SAB) \perp (SBC)$. D. $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Xét phương án A: $\triangle ABC$ cân tại B , M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$ nên phương án A đúng.

Xét phương án B: $\begin{cases} BM \perp SA \\ BM \perp AC \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$ nên phương án B đúng.

Xét phương án C: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ nên phương án C đúng.

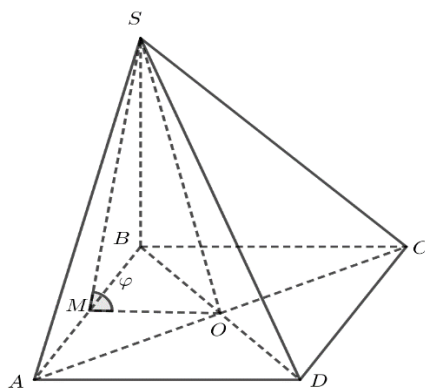
Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ AC \perp SA (SA \perp (ABC)) \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = \widehat{BAC} = 45^\circ \text{ nên phương án D sai.} \\ AB \perp SA (SA \perp (ABC)) \end{cases}$

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây

- A. $(ABCD) \perp (SBD)$. B. $(SAB) \perp (ABCD)$.
C. $(SAC) \perp (SBD)$. D. $(SAC) \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn B





Gọi M là trung điểm của AB . Suy ra $\begin{cases} MO \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB), (ABCD)} \right) = \widehat{SMO} = \varphi.$

Tam giác SMO vuông tại O nên $\varphi \neq 90^\circ$.

Do đó $(ABCD)$ không vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH) \perp (SBC)$.

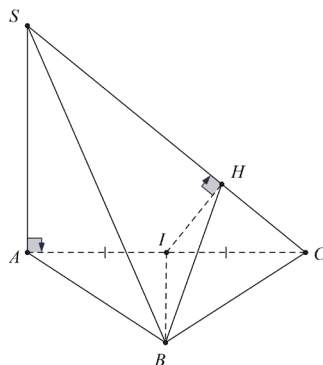
B. $(SAC) \perp (SAB)$.

C. $(SBC) \perp (ABC)$.

D. $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC \text{ (gt)} \\ BI \perp SA \text{ (} SA \perp (ABC) \text{)} \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \supset SC \Rightarrow SC \perp BI \text{ (1)}.$

Theo giả thiết: $SC \perp IH \text{ (2)}.$

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BIH)$. Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BIH) \perp (SBC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD) ?

A. (SBC) .

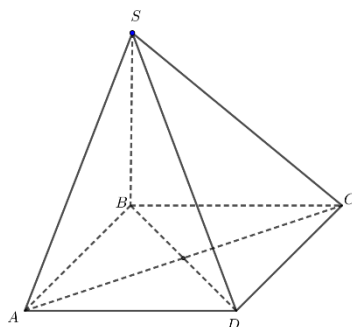
B. (SAD) .

C. (SCD) .

D. (SAC) .

Lời giải

Chọn D





$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD).$$

Câu 13: Cho mặt phẳng (P) và một điểm M không thuộc (P) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) ?

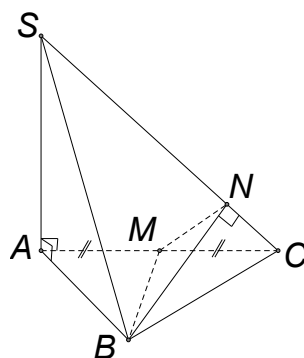
- A. 1. B. 2. C. Vô số. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Theo lý thuyết có vô số mặt phẳng qua M và vuông góc với (P) .

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC , N là hình chiếu của B lên SC (như hình minh họa bên dưới). Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $(BMN) \perp (SBC)$. B. $(SAC) \perp (SAB)$. C. $(BMN) \perp (ABC)$. D. $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow BM \perp SA$

Mà $BM \perp AC$ (Tính chất đường trung tuyến trong tam giác đều)

$$\Rightarrow BM \perp (SAC) \supset SC \Rightarrow SC \perp BM \quad (1).$$

Theo giả thiết: $SC \perp BN \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BMN)$.

Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BMN) \perp (SBC)$.

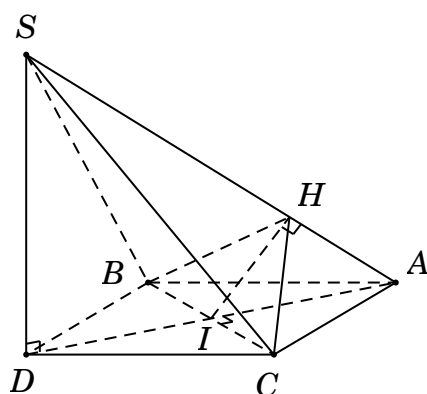
Câu 15: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC ; kẻ IH vuông góc SA ($H \in SA$). Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $SA \perp BH$. B. $(SDB) \perp (SDC)$. C. $(SAB) \perp (SAC)$. D. $BH \perp HC$.

Lời giải



Chọn B



Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA.$$

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$ (1).

$$\text{Tính được } AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}, SA^2 = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $\triangle AHI \sim \triangle ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI \cdot SD}{AS} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^\circ$ hay $BH \perp HC$ (2)

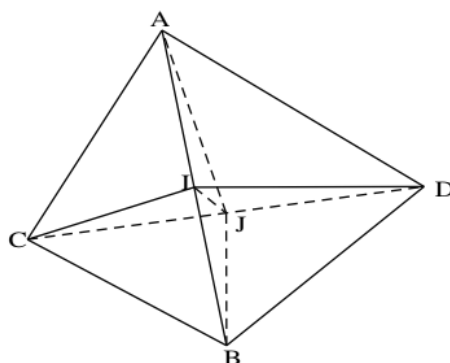
Từ (1), (2) suy ra $BH \perp (SAC) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$.

Câu 16: Cho tam giác ACD và tam giác BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau và $AC = AD = BC = BD = a; CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$.

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD .



Suy ra $CI \perp AB; DI \perp AB$ mà $(ABC) \cap (ABD) = AB$.

Do đó $(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow \widehat{CID} = 90^\circ \Leftrightarrow IJ = \frac{1}{2}CD$.

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ AJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp JB$.

Mặt khác $JA = JB$ ($\triangle ACD = \triangle BCD$) nên tam giác JAB vuông cân tại J .

Do đó $IJ = \frac{\sqrt{2}}{2}JA = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{AC^2 - JC^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Vậy $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 - x^2} = x \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B ; $SA \perp (ABC)$. Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc nào?

A. $\widehat{SBC}$.

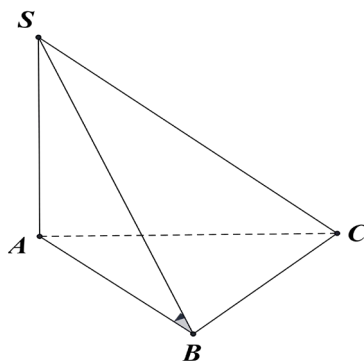
B. $\widehat{SBA}$.

C. $\widehat{SCB}$.

D. $\widehat{SCA}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $((SBC); (ABC)) = \widehat{SBA}$

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha = \sqrt{6}$.

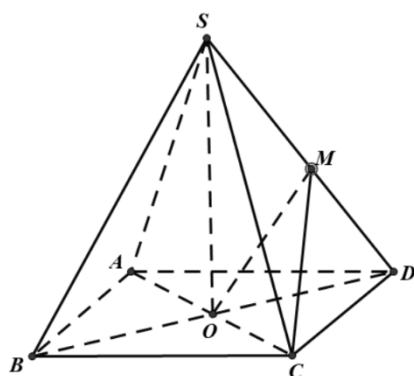
B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm của SD . Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a, BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD vuông tại S (định lý Pytago đảo)

Suy ra $SB \perp SD$ mà $OM \parallel SB$ nên $OM \perp SD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBD) \cap (SCD) = SD \\ (SBD) \supset OM \perp SD \\ (SCD) \supset CM \perp SD \end{cases} \Rightarrow ((SBD)(SCD)) = \widehat{OMC}.$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } MOC, \text{ có } \tan \widehat{CMO} = \frac{OC}{OM} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{2}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SC = a, SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

A. 30° .

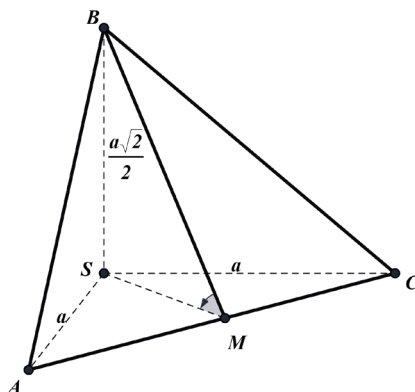
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm AC nên $SM \perp AC; BM \perp AC$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và



(ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng $(\widehat{SM}; \widehat{BM})$ bằng $\widehat{SMB}$

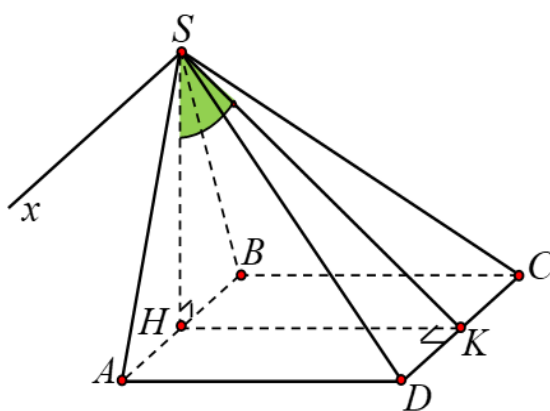
Tính được $AC = a\sqrt{2}; SM = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra tam giác SBM vuông cân tại S nên góc $\widehat{SMB} = 45^\circ$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB

Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ (vì tam giác SAB đều)

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AB \parallel CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$$

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = Sx \\ (SAB) \supset SH \perp Sx \\ (SCD) \supset SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB), (SCD)} \right) = \widehat{HSK}, \text{ với } K \text{ là trung điểm } CD.$$

$$\text{Xét tam giác } HSK \text{ vuông tại } H \text{ có: } \tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan \left(\widehat{(SAB), (SCD)} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

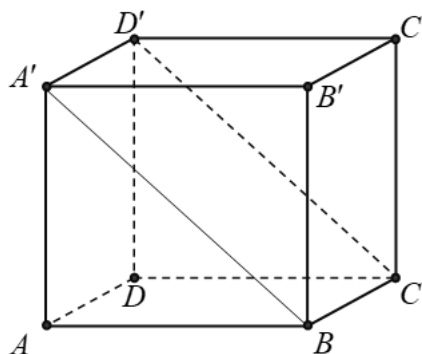
Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = a$, $AC = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải



Chọn B



Ta có: $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ BA' \perp BC \\ (ABCD) \cap (A'D'CB) = BC \end{cases}$

Góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABA'}$.

$$\tan \widehat{A'BA} = \frac{A'A}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AC^2 - BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{A'BA} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 45° .

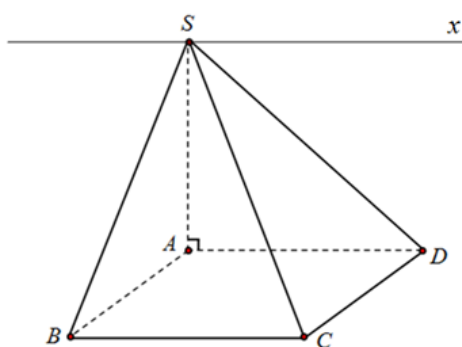
B. 30° .

C. 60° .

D. 90°

Lời giải

Chọn A



Ta có: $(SBC) \cap (SAD) = Sx \parallel BC \parallel AD$

Ta dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow Sx \perp SB$

Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow SA \perp Sx$

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc $\widehat{BSA} = 45^\circ$.

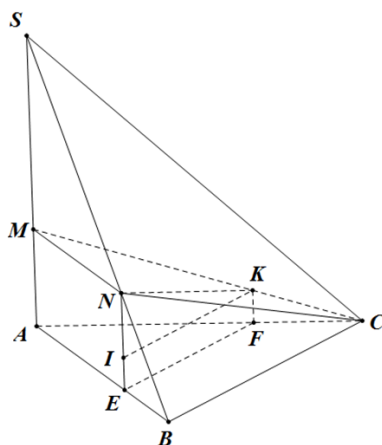


Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$, $BC = a$, tam giác ABC vuông tại B . Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , (α) là mặt phẳng chứa CG và song song với AB . Giá trị của cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (SAB) là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (α) với SA, SB ta có giao tuyến của (α) và (SAB) là MN

Ta có MN đi qua G và song song với AB

Kẻ NE song song với SA , $E \in AB \Rightarrow NE \perp (ABC)$, $NE = a$

Kẻ EF song song với BC , $F \in AC \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}$

Kẻ FK song song với SA , $K \in CM \Rightarrow FK = \frac{a}{3}$

Dễ thấy $AB \perp (NEFK) \Rightarrow MN \perp (NEFK) \Rightarrow EN \perp MN, NK \perp MN$

Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (SAB) là $(\widehat{NE, NK})$

Kẻ KI song song với EF , $I \in NE \Rightarrow IN = \frac{2a}{3}$

Khi đó tam giác NIK vuông cân tại $I \Rightarrow \cos(\widehat{NE, NK}) = |\cos \widehat{INK}| = |\cos 45^\circ| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

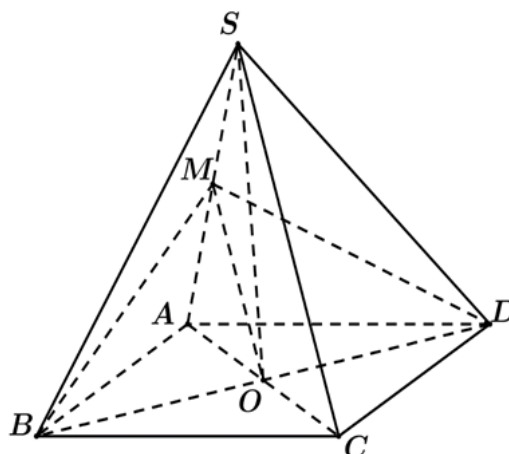
Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}$, $SO = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.



Lời giải

Chọn D



Gọi M trung điểm SA . Ta có $\triangle SAB$ cân tại $B \Rightarrow BM \perp SA$ (1)

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$, lại có O trung điểm $BD \Rightarrow \triangle SBD$ cân tại S

nên $SD = SB = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle SAD$ cân tại D nên $DM \perp SA$ (2)

Lại có $(SAB) \cap (SAD) = SA$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow ((SAB), (SAD)) = \widehat{BMD}$ hoặc $((SAB), (SAD)) = 180^\circ - \widehat{BMD}$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại $O \Rightarrow OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a \Rightarrow BD = 2a$.

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O có $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = a \Rightarrow OA = OC = a$.

Xét $\triangle SOC \Rightarrow SC = a\sqrt{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MO$. Mặt khác $OD = OB$ nên $\triangle BDM$ cân tại M .

Xét $\triangle BOM$ vuông tại $O \Rightarrow BM = \sqrt{OM^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow DM = BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét $\triangle BDM \Rightarrow \cos(\widehat{BMD}) = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2BM \cdot DM} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \cos((SAB); (SAD)) = \frac{1}{3}$.

Vậy $\tan((SAB); (SAD)) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Tìm



tỉ số độ dài $\frac{SA}{AB}$ để hai mặt phẳng $(ABPQ), (CDMN)$ vuông góc với nhau.

A. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

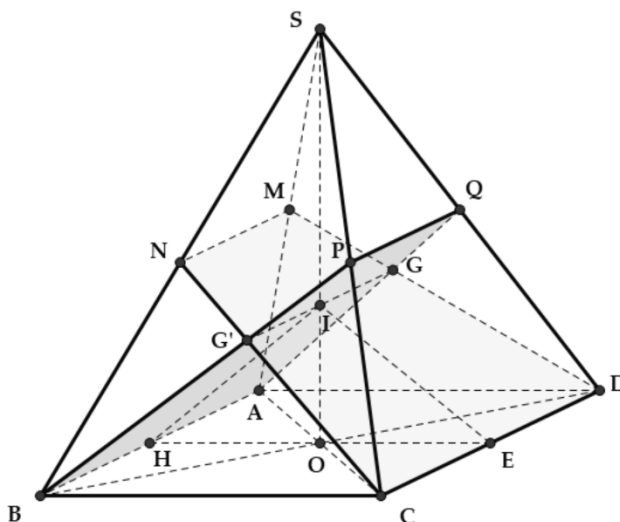
B. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

C. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{23}}{4}$.

D. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $BC = a$. Gọi G', G lần lượt là trọng tâm của $(SBC), (SAD)$.

Đồng thời $I = GG' \cap SO$, H, E là trung điểm AB, CD

Khi đó $\widehat{((ABPQ), (CDMN))} = \widehat{(HI; IE)}$

Theo giả thiết ta có: $IO = OE = \frac{a}{2}$

Và $SO = 3IO = \frac{3a}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

Do đó: $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đáy ABC có

$BC = a$ và $\widehat{BAC} = 150^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là

A. 60° .

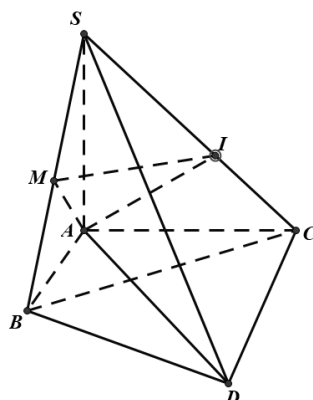
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi điểm $D \in (ABC)$ sao cho $DB \perp AB; DC \perp AC$

Ta chứng minh được $BD \perp (SAB) \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow SD \perp AM$

Tương tự: $SD \perp AN$

Vậy $SD \perp (AMN)$; mà $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là góc giữa SA và SD .

Xét tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp và có $AD = 2R = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2a$.

Xét tam giác vuông SAD , có $\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{SA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 60^\circ$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. 30° .

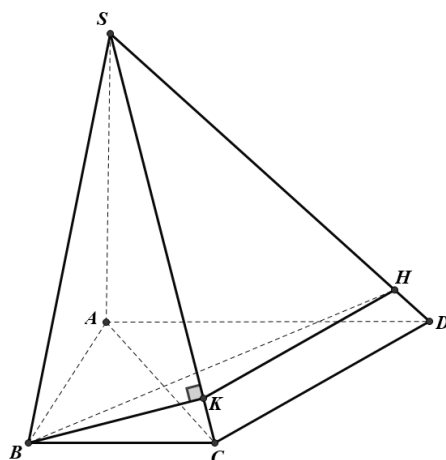
B. 150° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}; CD = \sqrt{CM^2 + MD^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C do



$$SC^2 + CD^2 = SD^2 \Rightarrow SC \perp CD$$

$$\Delta SAB \text{ có } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có } \Delta SBC : SC^2 = SB^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta SBC \text{ vuông}$$

$$\text{Trong } \Delta SBC \text{ kẻ } BK \perp SC = K$$

$$\text{Ta có } CD \perp (SAC) \text{ suy ra } CD \perp SC$$

$$\text{Trong } \Delta SCD \text{ có } CD \perp SC, \text{ từ } K \text{ kẻ } KH // CD$$

$$\text{Góc giữa } (SBC) \text{ và } (SCD) \text{ là góc giữa } BK \text{ và } KH$$

$$\text{Xét } \Delta SBC \text{ có } BK \cdot SC = SB \cdot BC \Rightarrow BK = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Xét } \Delta SBK \text{ có } SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Trong } \Delta SCD \text{ có } KH \text{ song song với } CD \text{ nên theo định lý Talet}$$

$$\frac{SH}{SD} = \frac{SK}{SC} = \frac{KH}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow KH = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; SH = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Xét } \Delta SBD \text{ theo định lý cosin trong tam giác: } (\Delta SBD \text{ có } SB = a\sqrt{2}; SD = BD = a\sqrt{5})$$

$$\cos BSD = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2 \cdot SB \cdot SD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \text{ mà}$$

$$\cos BSH = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{SB^2 + SH^2 - BH^2}{2 \cdot SB \cdot SH} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{26}}{3}$$

$$\cos BKH = \frac{KB^2 + KH^2 - BH^2}{2 \cdot KB \cdot KH} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra góc } \widehat{BKH} \text{ bằng } 150^\circ \text{ do đó góc giữa hai mặt phẳng } (SBC) \text{ và } (SCD) \text{ bằng } 30^\circ.$$

Câu 28: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi α là góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$ và β là góc giữa mặt phẳng $(A'BC')$ với mặt phẳng $(ACC'A')$. Biết

$$\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{m}{n} \text{ (với } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ và phân số } \frac{m}{n} \text{)}. \text{ Khi đó giá trị của biểu thức } T = m + 2n \text{ bằng}$$

A. $T = 3$.

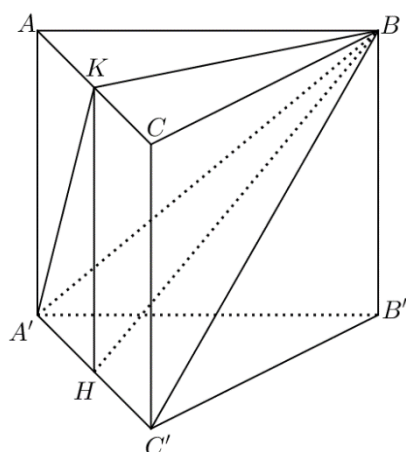
B. $T = 5$.

C. $T = 7$.

D. $T = 9$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $A'C', AC$.

$$\text{Khi đó } BK \perp (ACC'A') \Rightarrow \alpha = (\widehat{A'B, (ACC'A')}) = \widehat{BA'K} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{A'K^2}{BK^2}.$$

$$\text{Do } HK \perp A'C', BH \perp A'C' \Rightarrow \beta = (\widehat{A'BC', (ACC'A')}) = \widehat{BHK} \Rightarrow \cot^2 \beta = \frac{HK^2}{BK^2}.$$

$$\text{Khi đó } \cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{A'K^2 - HK^2}{BK^2} = \frac{A'H'^2}{BK^2} = \frac{AK^2}{BK^2} = \frac{AK^2}{AB^2 - AK^2} = \frac{AK^2}{4AK^2 - AK^2} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $m = 1; n = 3 \Rightarrow m + 2n = 7$.

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$. Giá trị của $\sin \alpha$ bằng:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

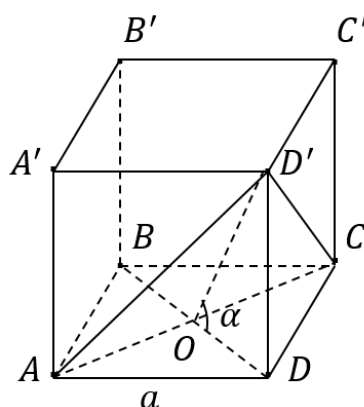
B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (ACD') \cap (ABCD) = AC \\ OD' \subset (ACD') \\ OD \subset (ABCD) \\ OD' \perp AC, OD \perp AC \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(ACD'), (ABCD)}) = (\widehat{OD', OD}) = \alpha.$$



Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ bằng $(\widehat{OD', OD})$.

$$\text{Xét tam giác } ODD' \text{ vuông tại } D, \sin \alpha = \frac{DD'}{OD'} = \frac{DD'}{\sqrt{DD'^2 + OD^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 30: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, tam giác SAD cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và có đường cao $SH = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC . Giá trị tang của góc giữa hai mặt phẳng (SDM) và (SAM) bằng

A. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

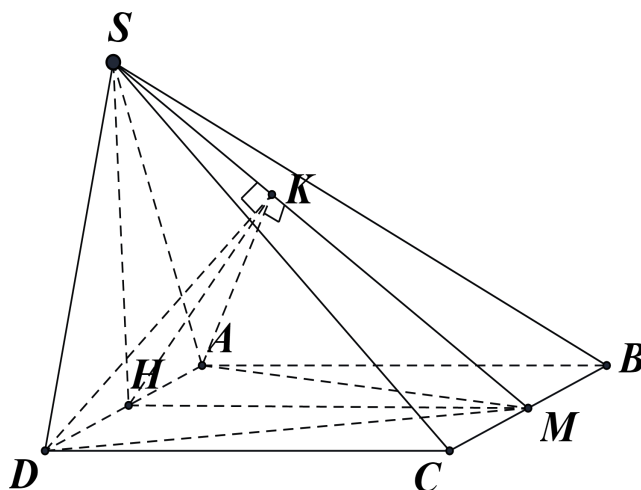
B. $\frac{4\sqrt{21}}{5}$.

C. $\frac{4\sqrt{21}}{42}$.

D. $\frac{7\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: Kẻ $DK \perp SM \Rightarrow AK \perp SM$ (vì $\triangle SDM = \triangle SAM$).

Suy ra: $(\widehat{(SDM); (SAM)}) = (\widehat{DK; AK}) = \widehat{DKA}$

Trong $\triangle SHM$ vuông tại H có $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{3a^2 + 4a^2} = a\sqrt{7}$.

Suy ra: $HK \cdot SM = SH \cdot HM \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HM}{SM} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2a}{a\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Trong $\triangle DAK$ cân tại K (vì $DK = AK$) ta có $\tan \widehat{DKH} = \frac{DK}{HK} = a \frac{7}{2a\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{42}$.

$$\text{Vậy } \tan \widehat{DKA} = \frac{2 \tan \widehat{DKH}}{1 - (\tan \widehat{DKH})^2} = \frac{2 \cdot \frac{7\sqrt{21}}{42}}{1 - \left(\frac{7\sqrt{21}}{42}\right)^2} = \frac{4\sqrt{21}}{5}.$$

Câu 31: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . O là giao điểm của AC và BD , I là điểm đối



xứng với O qua $(A'B'C'D')$. Mặt phẳng (IAD) cắt $A'B'$ tại M . Cosin góc giữa (MAD) và (MBC) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13\sqrt{17}}{85}$.

B. $\frac{13\sqrt{5}}{85}$.

C. $\frac{15\sqrt{15}}{85}$.

D. $\frac{17\sqrt{17}}{85}$.

Lời giải

Chọn A

Trong $(A'C'AC)$, gọi $E = IA \cap A'C'$. Trong $(B'D'BD)$, gọi $F = ID \cap B'D'$.

Suy ra $(IAD) \cap (A'B'C'D') = EF$.

Trong $(A'B'C'D')$, kẻ EF cắt $A'B'$ tại M , gọi $O' = A'C' \cap B'D'$

$$E, F \text{ lần lượt là trung điểm của } IA, ID \Rightarrow \begin{cases} EF \parallel AD \\ EF = \frac{1}{2} AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EF \parallel A'D' \\ EF = \frac{1}{2} A'D' \end{cases}$$

Suy ra E, F lần lượt là trung điểm $O'A', O'D'$

Suy ra $EF \parallel A'D'$. Do đó MF là giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (MAD) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (MBC) \cap (MAD) = MF \\ BM \perp MF \text{ (do } MF \perp (A'B'BA)) \\ AM \perp MF \text{ (do } MF \perp (A'B'BA)) \end{cases}$$

Suy ra $((MAD), (MBC)) = \widehat{AMB}$.

$$\text{Xét } \triangle AMB \text{ có: } AB = a, AM = \frac{\sqrt{17}}{4}a, BM = \frac{5}{4}a.$$

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{AMB} = \frac{BM^2 + AM^2 - AB^2}{2 \cdot BM \cdot AM} = \frac{13\sqrt{17}}{85}.$$

Câu 32: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Giá trị góc α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Vì hình chóp $S.ABC$ đều nên $SG \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $AM \perp BC$.

Ta có: GM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) nên $SM \perp BC$.

Lại có:



$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SBC) \supset SM \perp BC \Rightarrow \widehat{((SBC)(ABC))} = \widehat{SMA} = \widehat{SMG}. \\ (ABC) \supset AM \perp BC \end{cases}$$

Xét $\triangle ABC$ đều có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm nên $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Tam giác SMB vuông tại M nên:

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow SM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác SGM vuông tại G nên:

$$\cos \widehat{SMG} = \frac{GM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SMG} = 60^\circ.$$

Câu 33: Cho hình lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng ABC là trọng tâm G , hình lăng trụ có cạnh bằng $6a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{21}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

A. 60° .

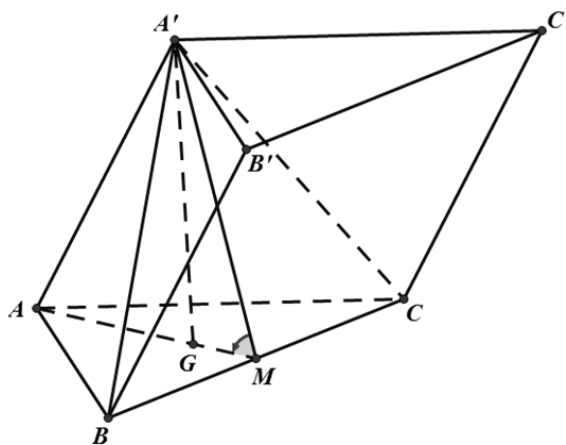
B. 30° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

Tam giác ABC đều nên ta có: $AM \perp BC$ (1).

Hình chiếu của A' là trọng tâm G nên $A'G \perp (ABC) \Rightarrow A'G \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BC \perp (A'GM) \Rightarrow BC \perp A'M$.

Ta lại có $(ABC) \cap (A'BC) = BC \Rightarrow \widehat{((A'BC)(ABC))} = \widehat{(GM; A'M)} = \widehat{A'MG} = \varphi$

Ta có: $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}6a \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$; $AG = \frac{2}{3}GM = 2a\sqrt{3}$

Tam giác $A'AG$ vuông tại G nên: $A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{(a\sqrt{21})^2 - (2a\sqrt{3})^2} = 3a$

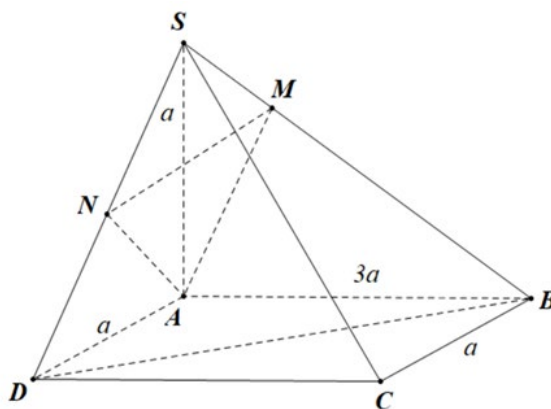
Ta có: $\tan \varphi = \frac{A'G}{GM} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Suy ra $\varphi = 60^\circ$.

Câu 34: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $AB = 3a$, $AD = a$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = \frac{1}{10}SB$, N là trung điểm của SD . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$

- A. $\frac{\sqrt{165}}{55}$. B. $\frac{2\sqrt{715}}{55}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{10} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lại có: $SB \cdot SM = a^2 = SA^2 \Rightarrow AM \perp SB$. Do $SA = AD = a \Rightarrow AN \perp SD$.

Mặt khác: Xét $\triangle ABD$ có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 120^\circ = 9a^2 + a^2 + 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 13a^2$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{13}$.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD có đường kính AK

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BK \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAB) \Rightarrow BK \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBK) \Rightarrow AM \perp SK$.

Lý luận tương tự: $AN \perp SK$. Suy ra $SK \perp (AMN)$.



Theo giả thiết: $SA \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{((AMN)(ABCD))} = \widehat{(SA;SK)} = \widehat{ASK}$.

$$\text{Áp dụng định lý sin vào } \triangle ABD \Rightarrow AK = 2R = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{a\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{3}.$$

$$\text{Xét } \triangle SAK \text{ có: } SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{55}}{\sqrt{3}} \text{ và } \cos \widehat{ASK} = \frac{SA}{SK} = \frac{\sqrt{165}}{55}.$$

Câu 35: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) cắt tất cả các cạnh bên của hình lập phương. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) biết (α) tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 60° .

A. $2\sqrt{3}$.

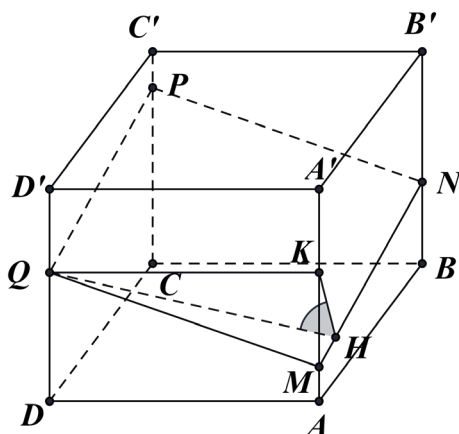
B. $\frac{3}{2}$.

C. 6.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh bên AA', BB', CC', DD' .

Thiết diện của (α) với hình lập phương là hình bình hành $MNPQ$. Kẻ QH vuông góc với MN , QK vuông góc với AA' . Suy ra $HK \perp MN$.

$$\text{Vì } \begin{cases} (MNPQ) \cap (ABB'A') = MN \\ QH \perp MN \\ HK \perp MN \end{cases} \Rightarrow \widehat{((MNPQ), (ABB'A'))} = \widehat{(QH, HK)} = \widehat{QHK} = 60^\circ.$$

$$\triangle QKH \text{ vuông tại } K \text{ nên } \sin 60^\circ = \frac{QK}{QH} \Rightarrow QH = \frac{QK}{\sin 60^\circ} = 2; KH = \frac{QK}{\tan 60^\circ} = 1.$$

Do đó ta tìm được $MN = \sqrt{3}$. Vậy diện tích của thiết diện $S_{MNPQ} = 2\sqrt{3}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = AB\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn



đường kính AC , $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD . Tính tan của góc hợp bởi mặt phẳng (AHK) và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

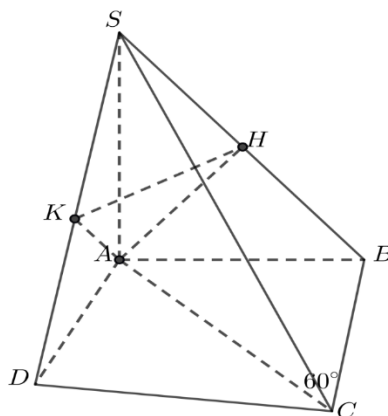
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết: $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC nên tam giác ABC vuông tại B và tam giác ADC vuông tại D , do đó $AB \perp BC, AD \perp DC$.

Nhận thấy: $AH \perp SB$, mà $AH \perp BC$ (do $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$)

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \quad (1)$$

Lại có: $AK \perp SD$, mà $AK \perp CD$ (do $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD)$)

$$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $SC \perp (AHK)$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD)$

Ta được góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SA, SC .

$$\Rightarrow ((AHK), (ABCD)) = \widehat{ASC}$$

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{ASC} = \frac{AC}{AS} = \frac{\frac{AB}{\sin 60^\circ}}{\frac{AB}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

A. 90° .

B. 45° .

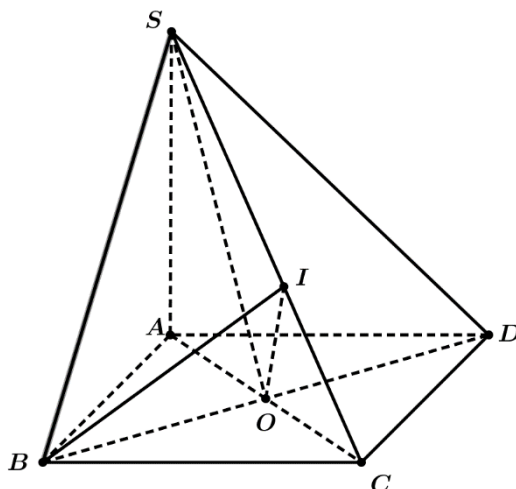
C. 60° .

D. 30° .



Lời giải

Chọn C

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ AC \perp BD, AC \subset (ABCD) \Rightarrow \widehat{((SBD), (ABCD))} = \widehat{(AO, SO)} = \widehat{SOA} = \alpha \\ SO \perp BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Delta SAO \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan \alpha = \frac{SA}{AO} \Rightarrow SA = AO \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = a$$

Trong ΔSOC kẻ đường cao $OI, (I \in SC)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp OI \\ SC \perp BD, (BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BIO) \Rightarrow SC \perp BI$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ OI \perp SC, OI \subset (SAC) \Rightarrow \widehat{((SBC), (SAC))} = \widehat{(OI, BI)} = \widehat{BIO} \\ BI \perp SC, BI \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Delta ICO \sim \Delta ACS (g - g) \Rightarrow \frac{IO}{AS} = \frac{CO}{CS} \Rightarrow IO = AS \cdot \frac{CO}{\sqrt{AC^2 + AS^2}} = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Delta BOI : \tan BIO = \frac{BO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{((SBC), (SAC))} = 60^\circ$$

Câu 38: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC . Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

Tính diện tích tam giác AMN theo a .

A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{24}$.

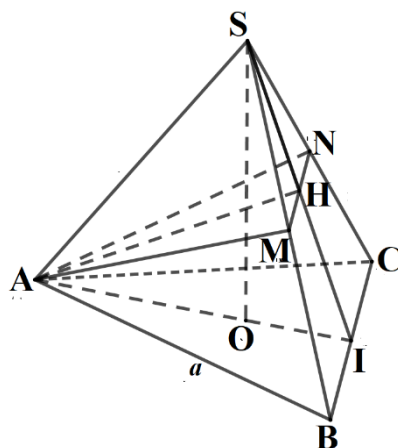
B. $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta thấy do hình chóp $S.ABC$ đỉnh S là chóp tam giác đều nên $AB = BC = AC = a$.

$$\triangle SAB = \triangle SAC (c.c.c) \Rightarrow AM = AN.$$

Do đó tam giác AMN cân tại A . Gọi H là trung điểm của MN thì $AH \perp MN$ và I là trung điểm của BC .

$$\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SH; AH \perp SI \text{ Xét tam giác } SAI \text{ có đường} \\ \text{Trong } (AMN): AH \perp MN$$

AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác SAI cân tại A .

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA = SB.$$

$$\text{Xét tam giác } SBI \text{ vuông tại } I \text{ nên } SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có: } SH = \frac{1}{2} SI = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Xét tam giác } ASH \text{ vuông tại } H \text{ nên } AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

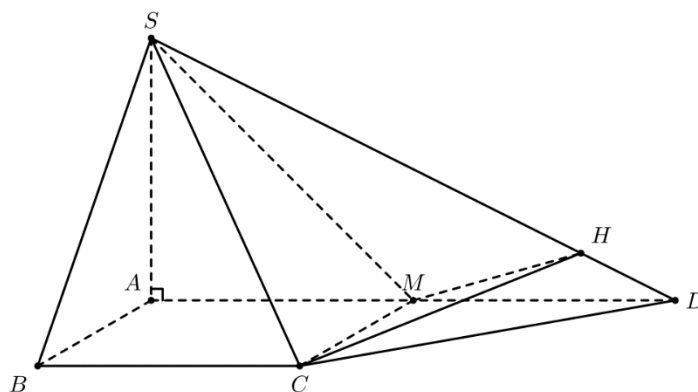


Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$, $AD = 2AB = 2BC = 2a$. Côsin của góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm AD thì $ABCM$ là hình vuông nên $CM \perp AD$ suy ra $CM \perp (SAD)$.

Kẻ $MH \perp SD$ ($H \in SD$) thì $SD \perp (CMH)$.

Ta có $\begin{cases} (SAD) \cap (SCD) = SD \\ SD \perp (CMH) \end{cases}$ nên góc giữa (SAD) và (SCD) là góc $\widehat{MHC}$.

Trong $\triangle SAD$ thì $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \widehat{SDA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Trong $\triangle MHD$ vuông tại H thì $\sin \widehat{SDA} = \frac{MH}{MD} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\triangle MHC$ vuông tại M thì $HC = \sqrt{MC^2 + MH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra: $\cos \widehat{MHC} = \frac{MH}{HC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}$.

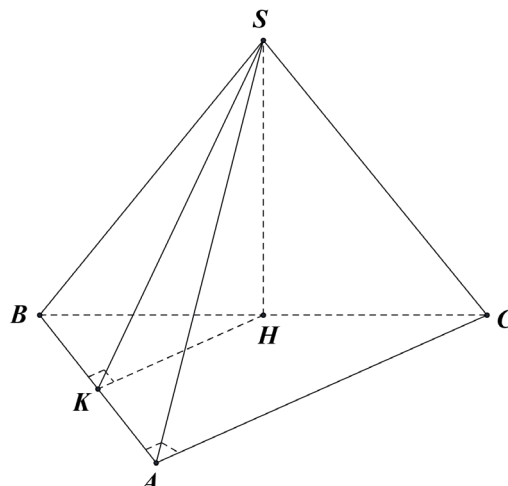
Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A , cạnh $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{6}$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC)

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Lời giải



Chọn B



Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A nên $SH \perp (ABC)$ với H là trung điểm của BC .

Dựng $HK \perp AB (K \in AB)$.

Mà $AB \perp SH (SH \perp (ABC))$ nên $AB \perp (SHK)$. Từ đó suy ra $AB \perp SK$.

Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ HK \subset (ABC), HK \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABC)) = (\widehat{HK, SK}) = \widehat{SKH} \\ SK \subset (SAB), SK \perp AB \end{cases}$$

$$HK = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ (vì } HK \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC \text{)}.$$

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ.$$

Vậy góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60° .

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết

$AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) bằng α với $\cos \alpha = \sqrt{\frac{6}{19}}$. Tính

độ dài SC theo a

A. $SC = \sqrt{6}a$.

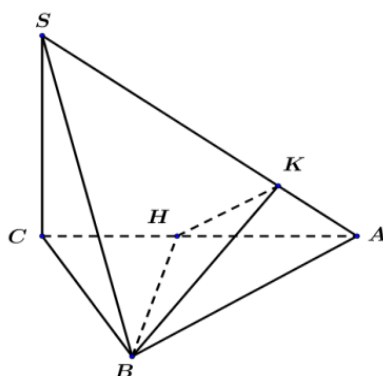
B. $SC = 2\sqrt{6}a$.

C. $SC = \sqrt{7}a$.

D. $SC = 6a$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Kẻ } \begin{cases} BH \perp AC \\ H \in AC \end{cases} \text{ và } \begin{cases} HK \perp SA \\ K \in SA \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} SA = (SAC) \cap (SAB) \\ HK \perp SA, HK \subset (SAC) \Rightarrow ((SAC), (SAB)) = (HK, BK) = \widehat{HKB} = \alpha. \\ BK \perp SA, BK \subset (SAB) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}.$$

$$BH = \frac{BA \cdot BC}{AC} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{\frac{6}{19}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{13}{19}}. \\ \alpha \in [0; 90^\circ] \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \sin \alpha = \frac{BH}{BK} \Rightarrow BK = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{13}{19}}} = \frac{a\sqrt{38}}{\sqrt{39}}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp SB.$$

Khi đó tam giác SAB vuông tại B .

$$\text{Do đó: } \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SB^2} \Rightarrow SB^2 = 38a^2 \Rightarrow SB = \sqrt{38}a.$$

$$\text{Tam giác } SBC \text{ vuông tại } A. \text{ Khi đó: } SC = \sqrt{SB^2 - BC^2} = 6a.$$

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD . Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng

A. 90° .

B. 30° .

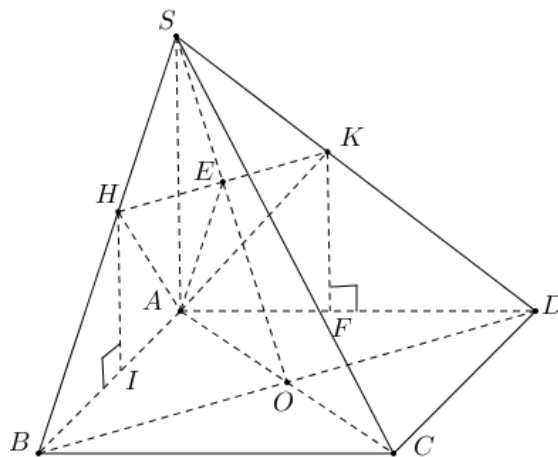
C. 60° .

D. 45° .

Lời giải



Chọn D



Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAD$ ($c - g - c$)

Từ đó suy ra: $AH = AK \Rightarrow$ Tam giác AHK cân tại A . (1)

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SC} \Rightarrow HK \parallel BD, \text{ mà } BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AE. (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE$ vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến.

Xét tam giác SAB vuông tại A có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}; AH \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}, \text{ mà } HK \parallel BD \text{ nên } \frac{SH}{SB} = \frac{HE}{BO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{AH^2 - HE^2} = \frac{2}{3}a \Rightarrow S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2}AE \cdot HK = \frac{1}{2}AE \cdot 2HE = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2.$$

Dựng $HI \parallel SA$ và $KF \parallel SA$, khi đó I, F lần lượt là hình chiếu của H, K trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow$ Tam giác AIF là hình chiếu vuông góc của tam giác AHK trên mặt phẳng đáy.

$$\text{Ta có: } AF = AI = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}a \Rightarrow S_{\Delta AIF} = \frac{1}{2}AI \cdot AF = \frac{2}{9}a^2.$$

$$\text{Khi đó: } \cos \alpha = \frac{S'}{S} = \frac{S_{\Delta AIF}}{S_{\Delta AHK}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$ và $BB' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC . Tang góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

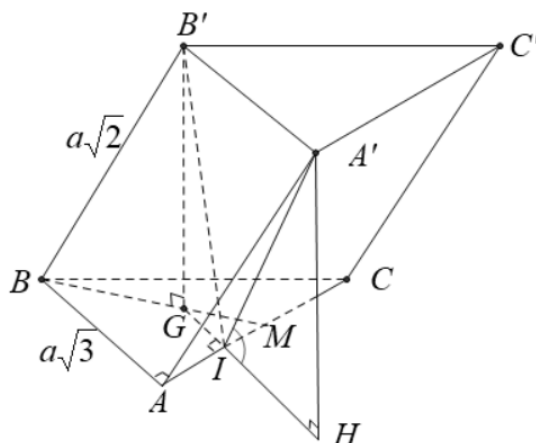
B. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

C. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

D. $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AC , ta có $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = 2a$, $BG = \frac{2}{3}BM = \frac{4a}{3}$ và

$$B'G = \sqrt{BB'^2 - BG^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Kẻ $GI \perp AC$ và $A'H \perp GI$ tại H thì tứ giác $A'B'GH$ là hình chữ nhật.

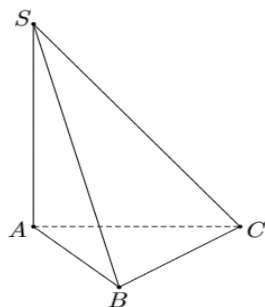
$$\text{Ta có } A'H = B'G = \frac{4a}{3}, GH = A'B' = a\sqrt{3} \text{ mà } GI = \frac{1}{3}AB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Mặt khác, ta có } \begin{cases} AC \perp IH \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'IH)$$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) là $\widehat{A'IH}$

$$\text{Xét tam giác } A'IH \text{ vuông tại } H \text{ có } \tan \widehat{A'IH} = \frac{A'H}{IH} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác cân tại A , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .



A. 30°

B. 120°

C. 60°

D. 90°

Lời giải



Chọn C

Ta có $(SAC) \cap (SAB) = SA$

$AB \subset (SAB), AB \perp SA$ do $SA \perp (ABCD)$.

$AC \subset (SAC), AC \perp SA$ do $SA \perp (ABCD)$.

Do đó $((SAC), (SAB)) = (\widehat{AB, AC})$.

$$\text{Khi đó: } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}$$

Do đó $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Do đó $((SAC), (SAB)) = (\widehat{AB, AC}) = 60^\circ$

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

A. 90° .

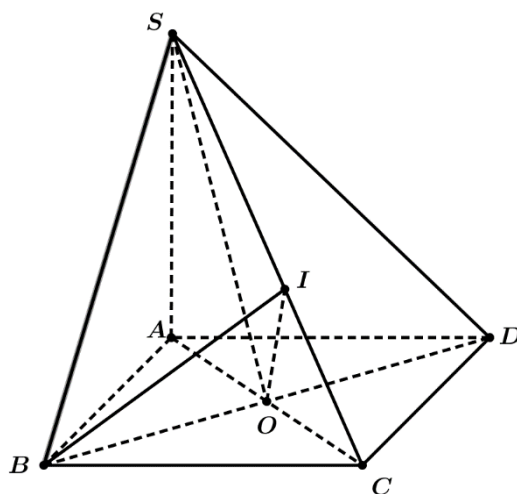
B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ AC \perp BD, AC \subset (ABCD) \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = (\widehat{AO, SO}) = \widehat{SOA} = \alpha \\ SO \perp BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Delta SAO \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan \alpha = \frac{SA}{AO} \Rightarrow SA = AO \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = a$$

Trong ΔSOC kẻ đường cao $OI, (I \in SC)$



$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp OI \\ SC \perp BD, (BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BIO) \Rightarrow SC \perp BI$$

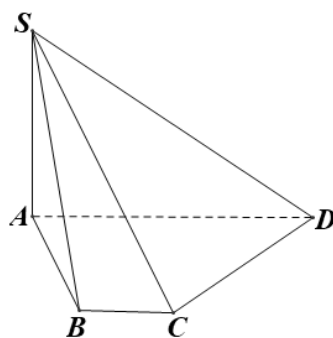
$$\text{Do đó: } \begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ OI \perp SC, OI \subset (SAC) \Rightarrow (\widehat{(SBC), (SAC)}) = (\widehat{OI, BI}) = \widehat{BIO} \\ BI \perp SC, BI \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Delta ICO \sim \Delta ACS (g - g) \Rightarrow \frac{IO}{AS} = \frac{CO}{CS} \Rightarrow IO = AS \cdot \frac{CO}{\sqrt{AC^2 + AS^2}} = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Delta BOI : \tan BIO = \frac{BO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } (\widehat{(SBC), (SAC)}) = 60^\circ$$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên).



Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30° .

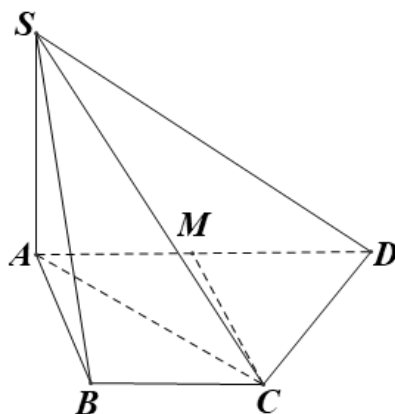
B. 90° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn A



Vì $\begin{cases} AM = BC = AB = a \\ AM \parallel BC \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a

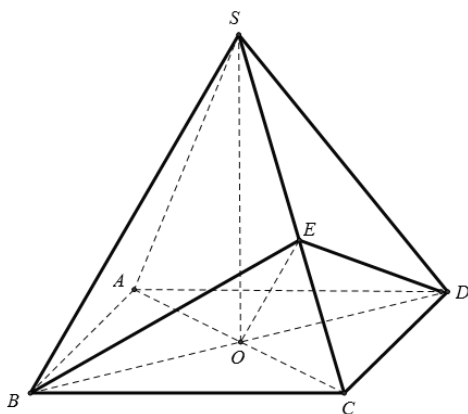
$\Rightarrow CM = AM = MD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp CD \Rightarrow SC \perp CD$.

Mà $(SCD) \cap (ABCD) = CD \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Ta có: $SA = a$

$$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

Câu 47: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên $SA = 2a$.
Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SAC) bằng



A. $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

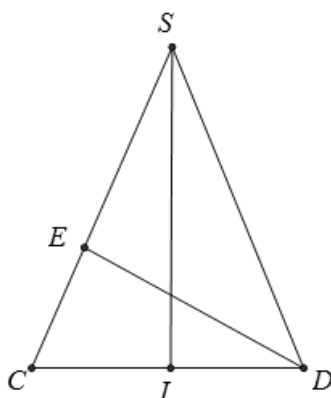
Ta có: $\left. \begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{matrix} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Kê $DE \perp SC$, khi đó: $SC \perp (BED)$

Lại có: $\left. \begin{matrix} (SAC) \cap (SDC) = SC \\ SC \perp (BDE) \\ (BDE) \cap (SAC) = OE \\ (BDE) \cap (SDC) = DE \end{matrix} \right\} \Rightarrow ((SAC), (SDC)) = (\widehat{OE, DE})$

$$BD = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a \Rightarrow OD = a.$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong } \triangle SOC: \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



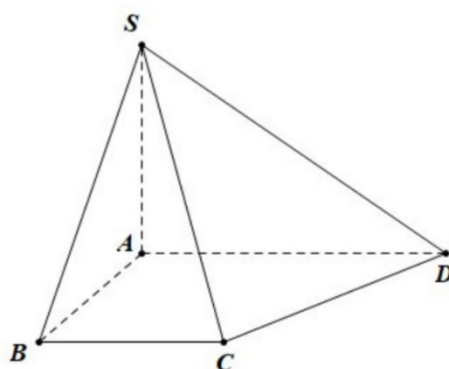
Gọi I là trung điểm CD nên $CI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SI = \sqrt{SD^2 - ID^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

$$S_{SCD} = \frac{1}{2} SI \cdot CD = \frac{1}{2} DE \cdot SC \Rightarrow \frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot a\sqrt{2} = DE \cdot 2a \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\cos OED = \frac{OE^2 + ED^2 - OD^2}{2OE \cdot ED} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó, cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SAC) bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng



A. 30° .

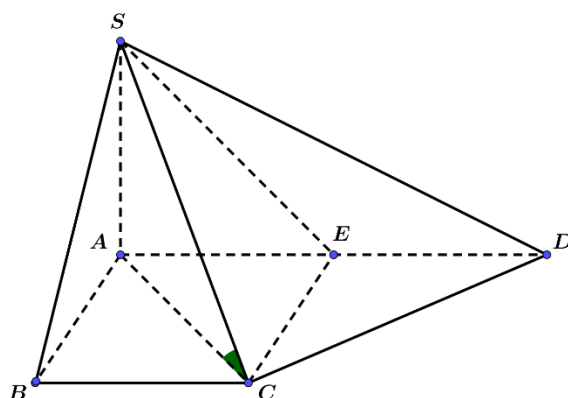
B. 45° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của AD suy ra $AECB$ là hình vuông $\Rightarrow CE = AE = \frac{AD}{2}$

Xét tam giác ACD có trung tuyến $CE = \frac{1}{2}AD$ nên $\triangle ACD$ vuông tại C

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA, (SA \perp (ABCD)) \\ AC \cap SA = \{A\} \\ AC, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD \perp (SAC) \\ SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SC$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AC \perp CD; AC \subset (ABCD) \\ SC \perp CD; SC \subset (SCD) \end{cases}$$

$$\widehat{((SCD); (ABCD))} = \widehat{(AC; SC)} = \widehat{SCA}$$

$$\triangle SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{((SCD); (ABCD))} = 45^\circ$$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAB} = \widehat{SBC} = 90^\circ$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SBC) biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

A. 30° .

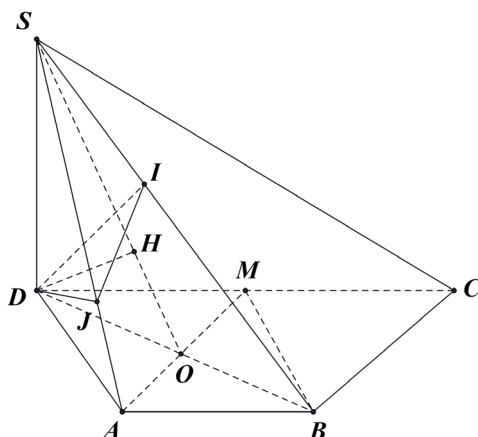
B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A





Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = DA = a$; $DC = 2a$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD$$

$$\begin{cases} BC \perp BD \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SD$$

Do đó $SD \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow ABMD$ là hình vuông; $ABCM$ là hình bình hành

Gọi $O = AM \cap BD$

$$BC \parallel AM \Rightarrow d(SA, BC) = d(BC, (SAM)) = d(B, (SAM)) = d(D, (SAM)) = DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Với H là hình chiếu vuông góc của D lên SO .

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên $SB, SA \Rightarrow DI \perp (SBC); DJ \perp (SAB)$

$$\Rightarrow ((SAB); (SBC)) = (\widehat{IDJ}).$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DO^2} + \frac{1}{SD^2} \Rightarrow \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{DH^2} - \frac{1}{DO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SD = a.$$

$$\text{Xét tam giác } SIJ \text{ vuông tại } J \text{ có } SI = \frac{a\sqrt{6}}{3}; SJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos \widehat{IDJ} = \frac{DJ}{DI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{IDJ} = 30^\circ.$$

$$\text{Vậy } ((SAB); (SBC)) = 30^\circ.$$

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}$, $SO = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

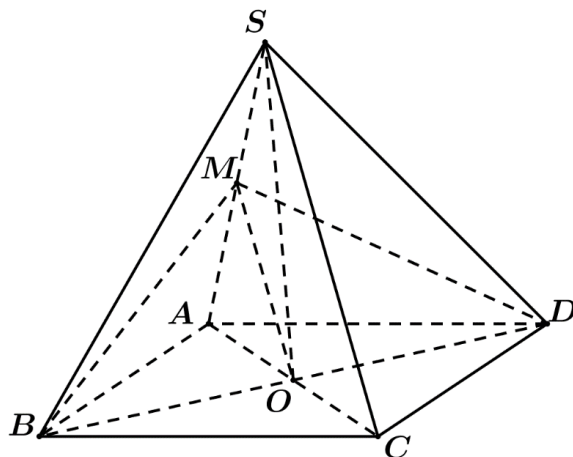
B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D





Gọi M trung điểm SA . Ta có $\triangle SAB$ cân tại $B \Rightarrow BM \perp SA$ (1)

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$, lại có O trung điểm $BD \Rightarrow \triangle SBD$ cân tại S nên $SD = SB = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle SAD$ cân tại D nên $DM \perp SA$ (2)

Lại có $(SAB) \cap (SAD) = SA$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \widehat{((SAB), (SAD))} = \widehat{BMD}$ hoặc $\widehat{((SAB), (SAD))} = 180^\circ - \widehat{BMD}$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại $O \Rightarrow OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a \Rightarrow BD = 2a$.

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O có $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = a \Rightarrow OA = OC = a$.

Xét $\triangle SOC \Rightarrow SC = a\sqrt{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MO$. Mặt khác $OD = OB$ nên $\triangle BDM$ cân tại M .

Xét $\triangle BOM$ vuông tại $O \Rightarrow BM = \sqrt{OM^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow DM = BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét $\triangle BDM \Rightarrow \cos(\widehat{BMD}) = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2BM \cdot DM} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \cos(\widehat{((SAB), (SAD))}) = \frac{1}{3}$.

Vậy $\tan(\widehat{((SAB), (SAD))}) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}$.

-----HẾT-----

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

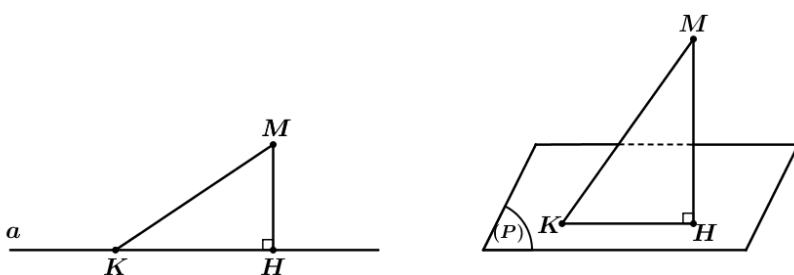
26

KHOẢNG CÁCH

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng



Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a .

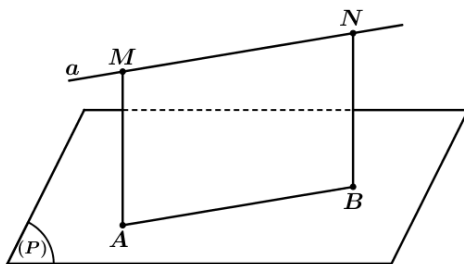
Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(M, (P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P) .

Chú ý:

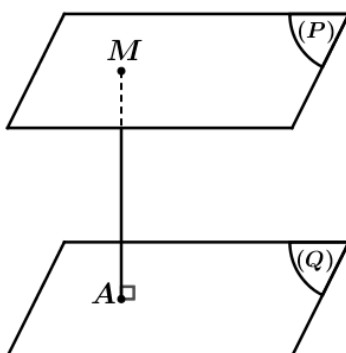
- $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.
- Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

Nhận xét: Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

2 Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song



Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a , kí hiệu $d(a, (P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) .

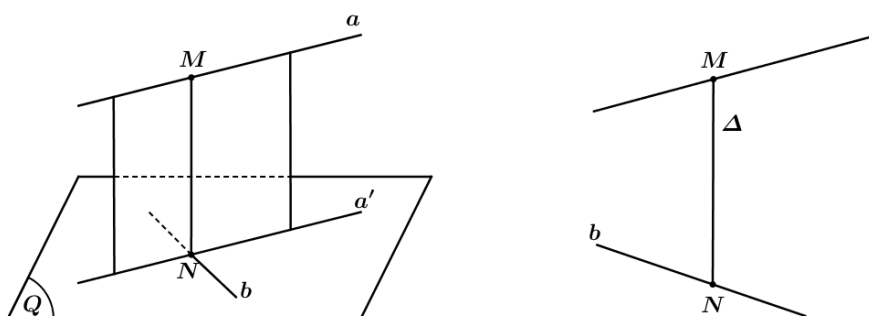


Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n , kí hiệu $d(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó.

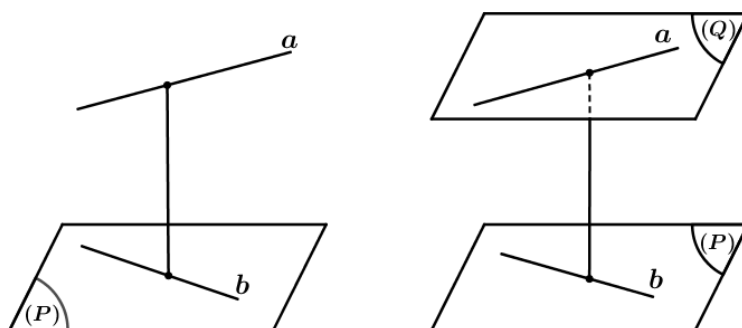
3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b .

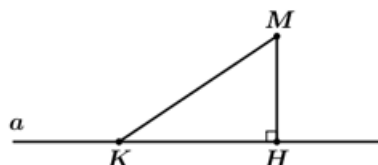
Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b .

Nhận xét:



Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó.

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

Cách tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

- Xác định hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng a
- Khi đó ta có: $d(M, a) = MH$
- Tính độ dài MH bằng kiến thức hình học phẳng cơ bản, các định lý và hệ thức lượng trong tam giác.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$. Tính khoảng cách từ B đến SC .

Lời giải

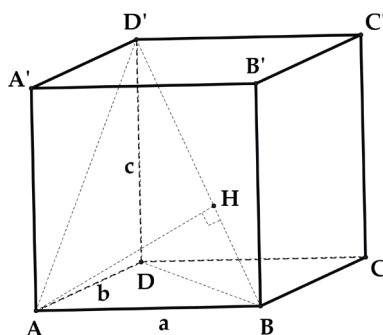
Vì SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một nên $CB \perp SB$.

Kẻ $BH \perp SC$. Khi đó $d(B; SC) = BH$.

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông SBC ta có: $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{SB \cdot BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = 2a\sqrt{\frac{3}{13}}$.

Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD' .

Lời giải



Do $AB \perp AD'$ nên tam giác ABD' vuông tại A . Trong tam giác ABD' kẻ đường cao AH thì $AH = d(A, BD')$

Trong tam giác ADD' ta có: $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

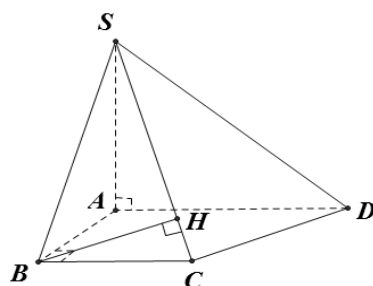
Mặt khác: $BD' = \sqrt{AB^2 + AD'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Xét tam giác ABD' : $AH \cdot BD' = AB \cdot AD' \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AD'}{BD'} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Vậy $d(A, BD') = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC , đồng thời đường cao $AB = BC = 2a$. Biết $SA = 2a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC .

Lời giải



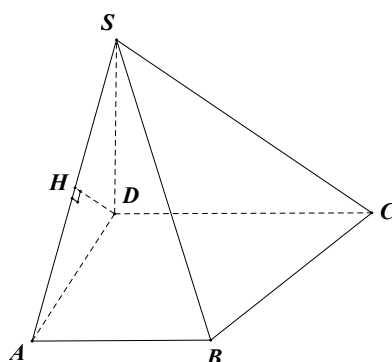
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B .

Trong $\triangle SBC$ dựng đường cao $BH \Rightarrow d(B; SC) = BH$.

$SB = 4a$; $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{BS \cdot BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 4: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D , $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Biết điểm M di động trên đường thẳng CD . Tìm giá trị nhỏ nhất khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng SA .

Lời giải



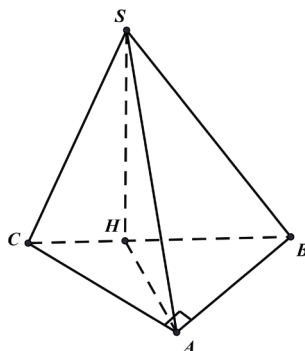


Để thấy khoảng cách này bằng khoảng cách từ điểm D đến đường thẳng SA

$$\text{Trong tam giác vuông } SAD \text{ ta có: } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow DH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$; $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC .

Lời giải



Ta có vì $SA = SB = SC$ nên $\Rightarrow S$ nằm trên đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với đáy. Mà $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là trung điểm H của BC . Vậy S nằm trên đường thẳng đi qua H vuông góc với (ABC) .

Mà góc giữa đường thẳng SA và (ABC) là $60^\circ \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^\circ$

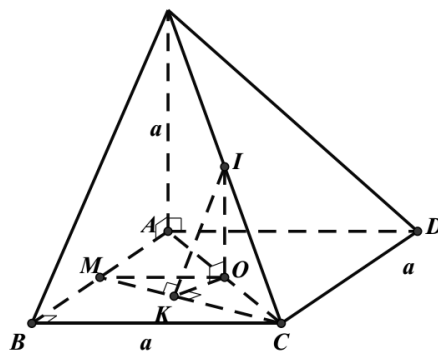
$\triangle ABC$ vuông cân tại A có $AB = 2a \Rightarrow BC = 2a\sqrt{2}$. Mà H là trung điểm của BC
 $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông SHA ta có: $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$

Vậy khoảng cách từ S đến đường thẳng BC là $a\sqrt{6}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O , $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của đoạn AB . Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM .

Lời giải



Do $IO \perp (ABCD)$ nên nếu dựng $OK \perp CM (K \in CM)$ thì $d(I, CM) = IK$

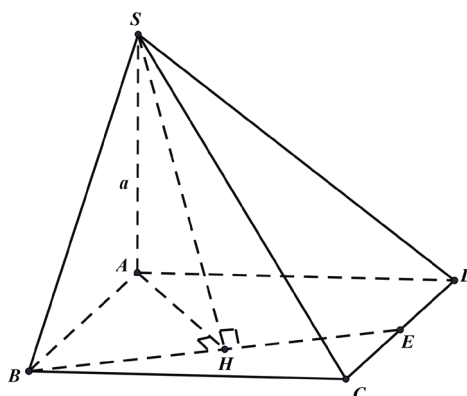


$$\text{Mà } IK = \sqrt{OI^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + OK^2} \text{ do } S_{\triangle OMC} = \frac{1}{2} OK \cdot MC \Rightarrow OK = \frac{2S_{\triangle OMC}}{MC} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Suy ra } IK = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE :

Lời giải



$SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng $(ABCD)$ nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lý 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot FE = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} AH \cdot BE \text{ mà } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a^2}{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \text{ mà } \triangle SAH \text{ vuông tại } A \text{ nên: } SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(S, BE) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

**Dạng 2: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng**

Bài toán xác định khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (P) .

Bước 1: Xác định điểm H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α)

Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α)

Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (α)

Kẻ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó $d(O;(\alpha)) = OH$

Bước 2: Tính OH bằng cách sử dụng tính chất của tứ diện vuông.

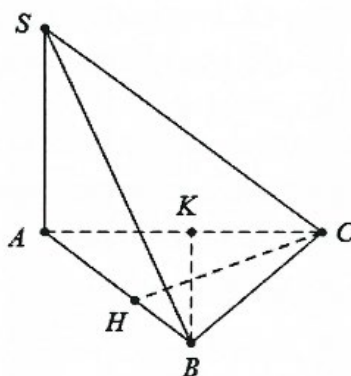
Giả sử $OABC$ là tứ diện vuông tại O ($OA \perp OB$; $OB \perp OC$; $OC \perp OA$) và H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC) . Khi đó ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC có $AB = 3a, BC = 2a, \widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải



a) Dựng $CH \perp AB$ ta có: $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$.

Do đó: $d(C; (SAB)) = CH = CB \sin \widehat{ABH} = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

b) Dựng $CK \perp AC \Rightarrow CK \perp (SAC)$.

Ta có: $d(B; (SAC)) = CH = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{AB \cdot BC \sin \widehat{ABC}}{AC}$

Trong đó $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cos \widehat{B}$

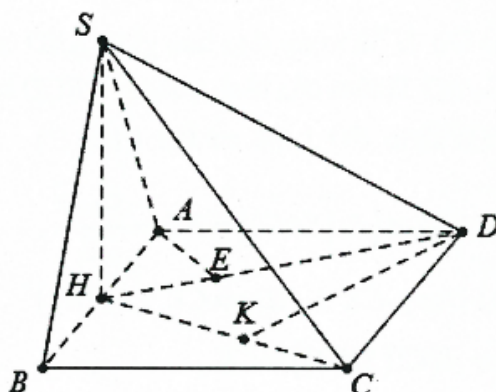
$\Rightarrow AC = a\sqrt{7} \Rightarrow d(B; (SAC)) = \frac{3a \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ}{a\sqrt{7}} = \frac{3a\sqrt{21}}{7}$

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB .



- a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SHD) .
b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) .

Lời giải



a) Do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$. Ta có: $HA = HD = \frac{a}{2}$.

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Dựng $AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow d(A; (SHD)) = AE$.

$$\text{Mặt khác } AE = \frac{AH \cdot AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

b) Dựng $DK \perp CH \Rightarrow d(D; (SHC)) = DK$.

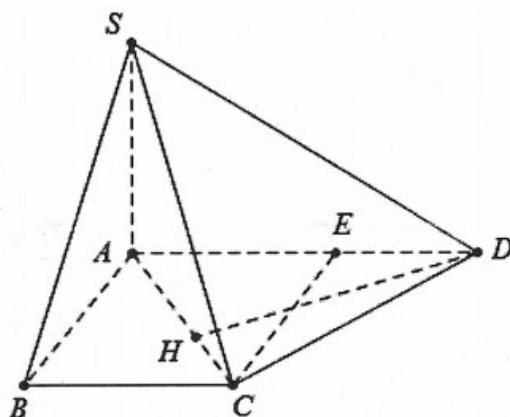
$$\text{Ta có: } CH = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}, S_{HCD} = \frac{1}{2} CD \cdot d(H; CD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó } d(D; (SHC)) = \frac{2S_{HCD}}{CH} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 3a, AB = BC = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$.

- a) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) .
b) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải





a) Dựng $CE \perp AD \Rightarrow CE \perp (SAD)$.

Khi đó $d(C; (SAD)) = CE$, do $ABCE$ là hình vuông cạnh $2a$ nên

$$CE = AE = 2a \Rightarrow d(C; (SAD)) = 2a.$$

b) Dựng $DH \perp AC \Rightarrow DH \perp (SAC)$. Khi đó $d(D; (SAC)) = DH$.

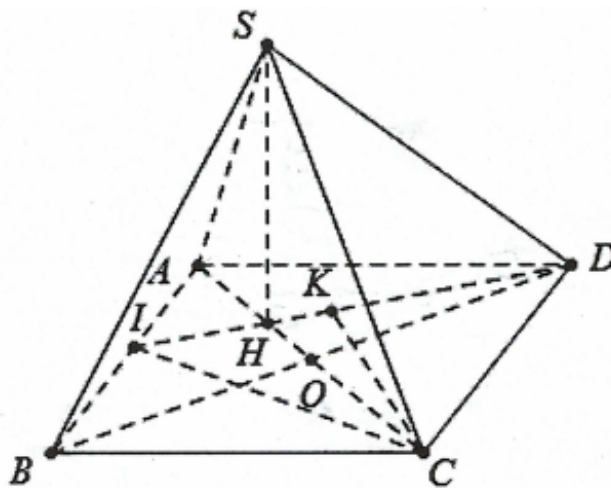
Ta có: $ABCE$ là hình vuông nên $\widehat{CAD} = 45^\circ$. Do đó $DH = AD \sin 45^\circ = 3a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm H của tam giác ABD .

a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

b) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHD) .

Lời giải



a) Do H là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow H \in AC$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow BO \perp AC$.

Mặt khác $BO \perp SH \Rightarrow BO \perp (SAC)$. Khi đó $d(B; (SAC)) = BO = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

b) Dựng $CK \perp DH \Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow d(C; (SHD)) = CK$.

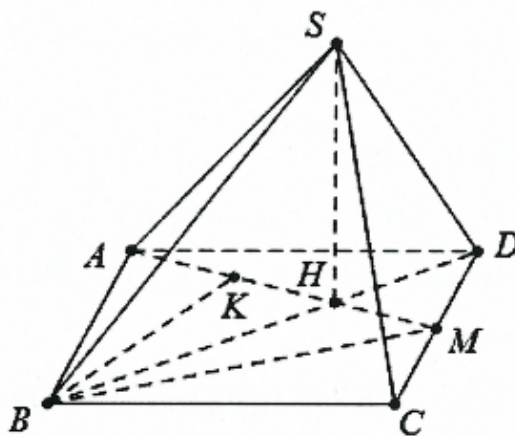
Gọi I là trung điểm của AB thì $H = DI \cap AO$.

$$\text{Khi đó: } CK = \frac{2S_{ICD}}{DI} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD}}{DI} = \frac{25a^2}{\sqrt{DA^2 + AI^2}} = \frac{25a^2}{\sqrt{25a^2 + \left(\frac{5a}{2}\right)^2}} = 2a\sqrt{5}$$

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng 2, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$.

Gọi M là trung điểm của CD , hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) .

Lời giải



Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle MAB} = 2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MAB} = 1$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = 1 \Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Do đó $\widehat{ABC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADM} = 45^\circ$

Áp dụng định lý Cosin trong tam giác ADM, ta có:

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2 - 2 \cdot AD \cdot DM \cdot \cos \widehat{ADM}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Gọi H là giao điểm của AM và BD $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Kẻ BK vuông góc với AM, $K \in AM \Rightarrow BK \perp AM$ (1).

Ta có $(SAM) \cap (SBD) = SH \Rightarrow SH \perp ABCD \Rightarrow SH \perp BK$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow BK \perp (SAM) \Rightarrow d(B; (SAM)) = BK$.

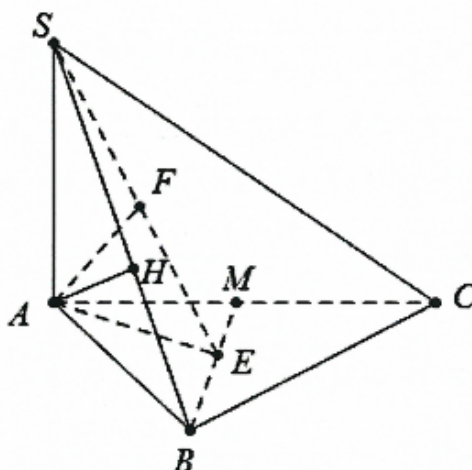
$$\text{Mặt khác } S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot AM \Rightarrow BK = \frac{2 \cdot S_{\triangle MAB}}{AM} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

b) Gọi M là trung điểm của AC. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM)

Lời giải





a) Ta có: $AB \perp BC$, mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Dựng $AH \perp SB \Rightarrow \begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Khi đó $d(A; (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

b) Dựng $AE \perp BM, AF \perp SE$ ta có: $\begin{cases} AE \perp BM \\ SA \perp BM \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAE) \Rightarrow BM \perp AF$

Khi đó: $\begin{cases} AF \perp SE \\ AF \perp BM \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBM)$

Ta có: $AB = a, AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$. Do BM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

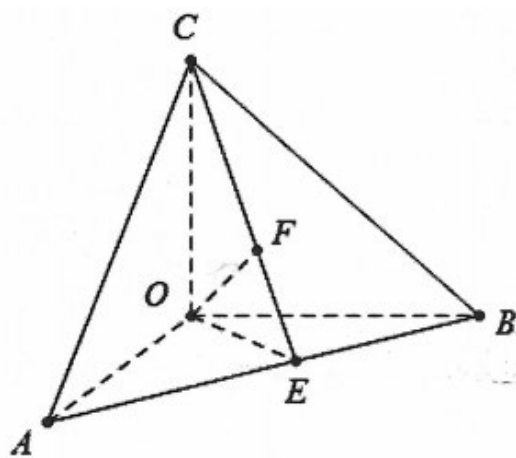
$BM = \frac{1}{2} AC = AM = AB = a \Rightarrow \triangle ABM$ đều cạnh $a \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $d(A; (SBM)) = \frac{AE \cdot SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Ví dụ 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = a, OB = b, OC = c$.

Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (ABC)

Lời giải



Do $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow AB \perp OC$.

Dựng $OE \perp AB, OF \perp CE$ suy ra $OF \perp BC$.

Khi đó $OF \perp (ABC) \Rightarrow d(O; (ABC)) = OF$.

Mặt khác: $\frac{1}{OF^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OE^2}$ và $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

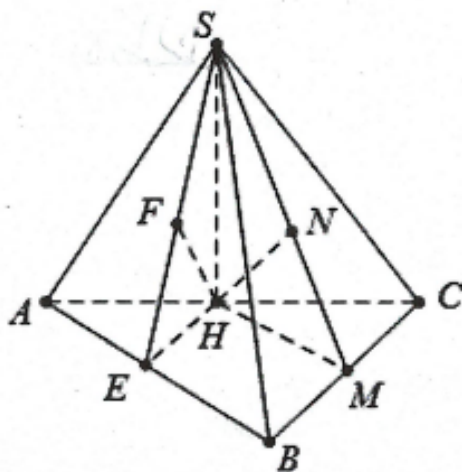
Do đó $\frac{1}{d^2(O; (ABC))} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Vậy $d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$



Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của cạnh AC . Biết $SH = a$, tính khoảng cách từ H đến các mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

Lời giải



Dựng $HE \perp AB$ và $HF \perp SE$ thì ta có $d(H; (SAB)) = HF$.

Mặt khác HF là đường trung bình trong tam giác ABC nên $HE = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $d(H; (SAB)) = HF = \frac{HE \cdot SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tương tự dựng $HM \perp BC, HN \perp SM \Rightarrow d(H; (SBC)) = HN$

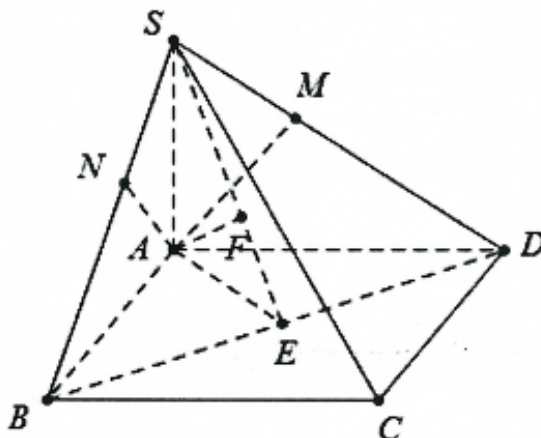
Mặt khác $HM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow HN = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



a) Dựng $AN \perp SB$. Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AN$.

$$\Rightarrow AN \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AN = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}. \text{ Vậy } d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tương tự } d(A; (SCD)) = AM = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

b) Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$.

Ta chứng minh được $d(A; (SBD)) = d = AF$

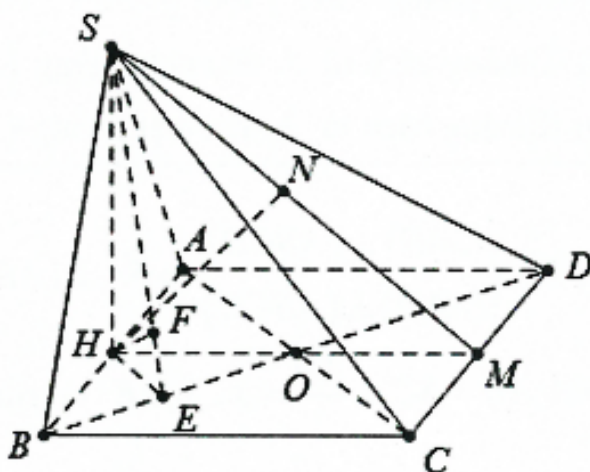
$$\text{Vì } AS \perp AB \perp AD \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow d = \frac{2a}{3}.$$

Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB . Biết $SD = 3a$.

a) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

b) Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



a) Ta có: $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$. Mặt khác $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = 2a$.

Dựng $HM \perp CD, HN \perp SM \Rightarrow d(H; (SCD)) = HN$

Do $AHMD$ là hình chữ nhật nên $AD = HM = 2a$

$$\text{Khi đó } d(H; (SCD)) = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = a\sqrt{2}$$

b) Dựng $HE \perp BD, HF \perp SE$ khi đó: $d(H; (SBD)) = HF$

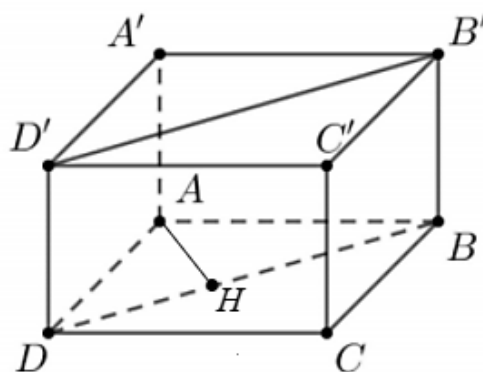
$$\text{Ta có: } AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = a\sqrt{2} \Rightarrow HE = \frac{OA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \frac{2a}{3} \Rightarrow d(H; (SBD)) = HF = \frac{2a}{3}.$$



Ví dụ 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$?

Lời giải



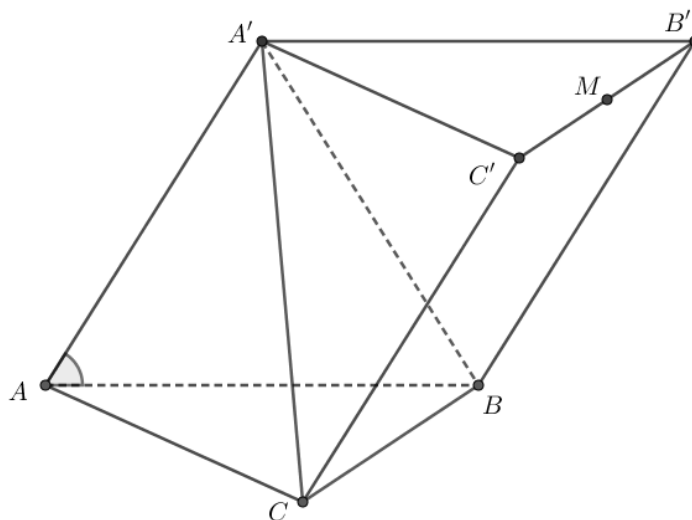
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BD . Khi đó $d(A; (BDD'B')) = AH$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 18: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 6. Tính khoảng cách từ trung điểm M của cạnh $B'C'$ đến mặt phẳng $(A'BC)$?

Lời giải

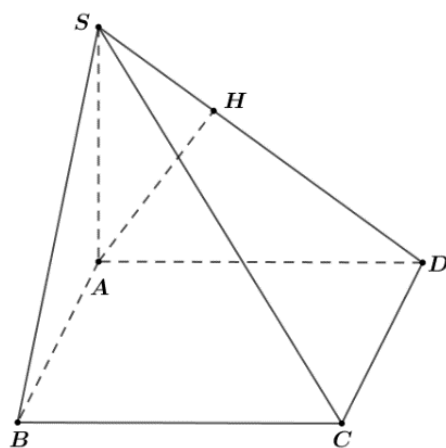


$$\text{Ta có: } d(M, (A'BC)) = d(B', (A'BC)) = d(A, (A'BC)) = 6.$$

$$\text{Vậy } d(M, (A'BC)) = 6..$$

Ví dụ 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2024, $SA \perp (ABCD)$ và mặt bên (SCD) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) ?

Lời giải



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD \\ SD \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (\widehat{AD, SD}) = \widehat{SDA} = 60^\circ$$

Vì $BA \parallel (SCD)$ nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Từ A kẻ $AH \perp SD$ thì $AH \perp CD$ (do $CD \perp SA, CD \perp AD$).

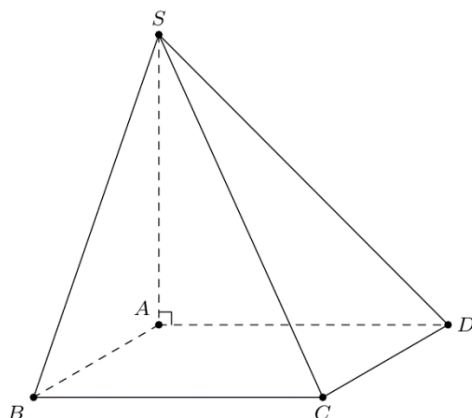
$$\text{Do đó } d(A, (SCD)) = AH = AD \cdot \sin \widehat{SDA} = 2024 \cdot \sin 60^\circ = \frac{2024\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 1012\sqrt{3}.$$

Ví dụ 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ là hình thoi cạnh a . Các mặt phẳng bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$?

Lời giải

Ta có hình vẽ



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \text{ suy ra } SA \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SA$$

$$\text{Xét } \triangle SAB \text{ vuông tại } A \text{ ta có } SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}.$$

**Dạng 3: Khoảng cách giữa các đối tượng song song**

Bài toán xác định khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (P) .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ từ đường thẳng này đến đường thẳng kia

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên đường thẳng này (*điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng*)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng kia

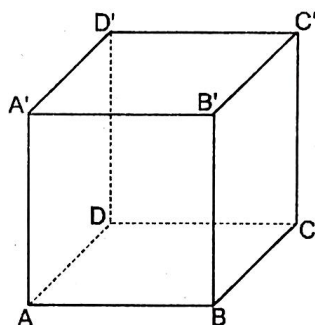
Khoảng cách giữa đường thẳng d song song mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc đường thẳng d đến mặt phẳng (P)

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên đường thẳng d (*điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng*)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (P) .

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ từ mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

- **Bước 1:** Chọn 1 điểm trên mặt phẳng này (*điểm này thông thường là trung điểm của đoạn thẳng hoặc hai đầu mút của đoạn thẳng*)
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng kia

Ví dụ 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .



- a) Tính khoảng cách giữa cạnh $A'D'$ với cạnh BC
- b) Tính khoảng cách giữa cạnh AA' với mặt phẳng $(BDD'B')$
- c) Tính khoảng cách giữa mặt phẳng $(ADD'A')$ với $(BCC'B')$

Lời giải

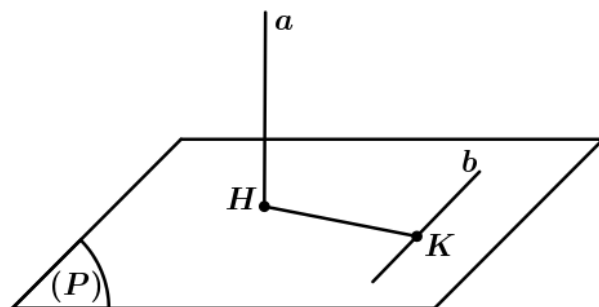
a) Ta có: $A'D' \parallel BC \Rightarrow d(A'D', BC) = d(A', BC) = A'B = a\sqrt{2}$

b) Ta có: $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BDD'B') \Rightarrow d(AA', (BDD'B')) = d(A, (BDD'B')) = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

c) Ta có: $(ADD'A') \parallel (BCC'B') \Rightarrow d((ADD'A'), (BCC'B')) = d(A, (BCC'B')) = AB = a$.



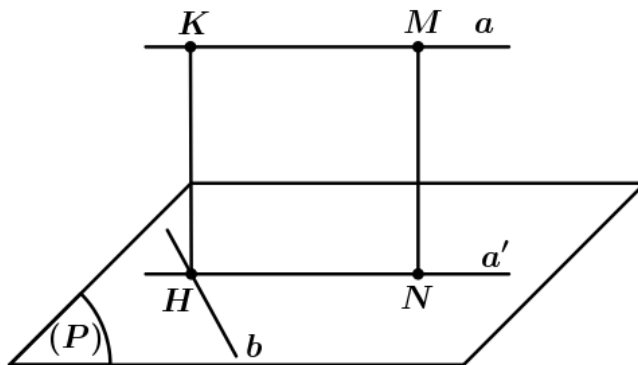
Dạng 4: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



Cách 1: Khi đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b

- **Bước 1:** Dựng một mặt phẳng $(P) \supset b, (P) \perp a$ tại H .
- **Bước 2:** Trong mặt phẳng (P) dựng $HK \perp b$ tại K .
- **Bước 3:** Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b .

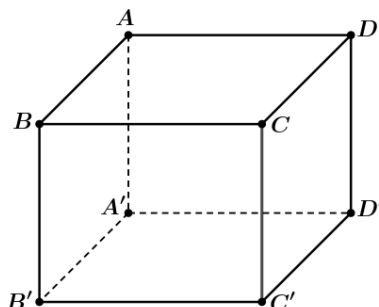
Cách 2:



- **Bước 1:** Dựng $(P) \supset b, (P) // a$.
- **Bước 2:** Dựng a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (P) bằng cách lấy $M \in a$. Sau đó dựng đoạn $MN \perp (P)$. Khi đó a' là đường thẳng đi qua N và song song a .
- **Bước 3:** Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK // MN \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung cần tìm.

Ví dụ 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định đoạn vuông góc chung của AA' và CD .

Lời giải

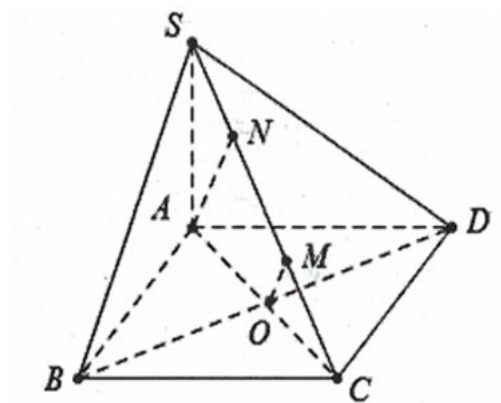


Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp lập phương nên $CD \perp AD, AA' \perp AD$.

Vậy định đoạn vuông góc chung của AA' và CD là AD .

Ví dụ 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

Lời giải



Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Do đó $\widehat{((SBC); (ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^\circ$

Suy ra $SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Dựng $OM \perp SC$ khi đó OM là đường vuông góc chung của BD và SC .

Ta có: $\triangle CAS \sim \triangle CMO (g - g) \Rightarrow \frac{SC}{CO} = \frac{SA}{MO} \Rightarrow OM = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.



Dạng 4: Toán thực tế vận dụng khoảng cách

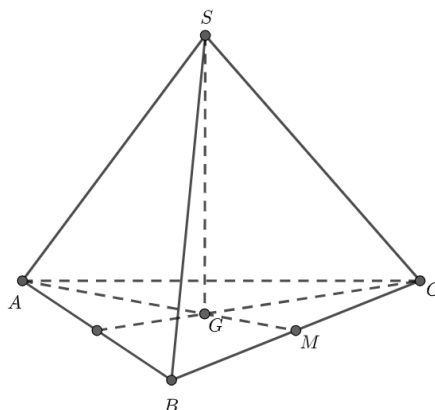
Ví dụ 24: Một giá đỡ Tripod ba chân (như hình) đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng 40 cm. Biết rằng chiều cao các chân giá đỡ là 1 m, tính chiều cao của giá đỡ so với mặt đất (theo đơn vị mét và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

**Lời giải**

Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = 0,4$ m và $SA = 1$ m. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có $SG \perp (ABC)$.

$$AM = \frac{0,4 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2\sqrt{3}}{15}$$

Khoảng cách từ giá đỡ so với mặt đất là: $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)^2} = \frac{\sqrt{213}}{15} \approx 0,97$ m.

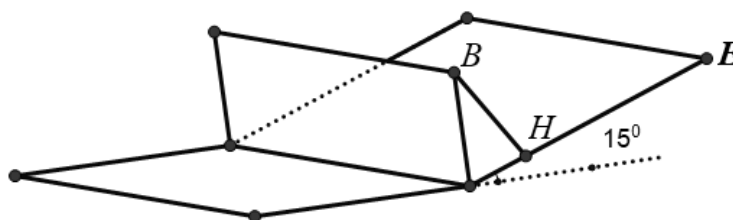


Ví dụ 25: Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung không chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,28 m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 15° so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21m đi qua hay không? (thường ta thấy ở một số cầu vượt có khung không chế chiều cao)



Lời giải

Gọi B là một điểm nằm trên thanh ngang và H là hình chiếu vuông góc xuống mặt dốc.



Khoảng cách từ B đến mặt phẳng dốc là $BH = 2,28 \cdot \sin 75^\circ \approx 2,2(\text{m})$.

Do đó, không cho phép xe cao 2,21m đi qua.

**C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là

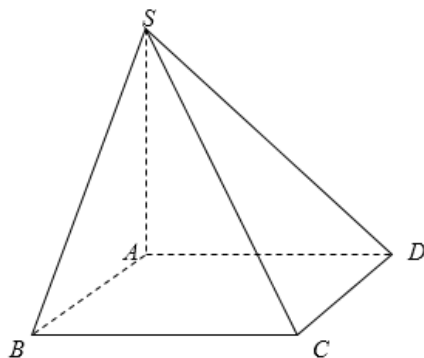
A. $a\sqrt{2}$.

B. a .

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $d(S, (ABCD)) = SA = a$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SAC) .

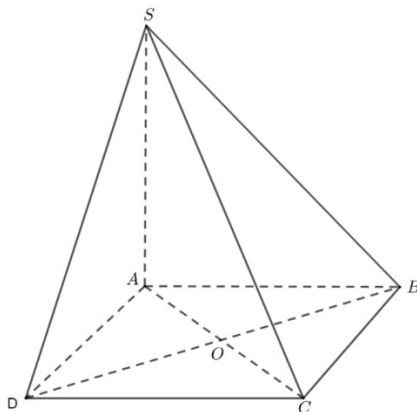
A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Gọi $AC \cap BD = \{O\}$

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$

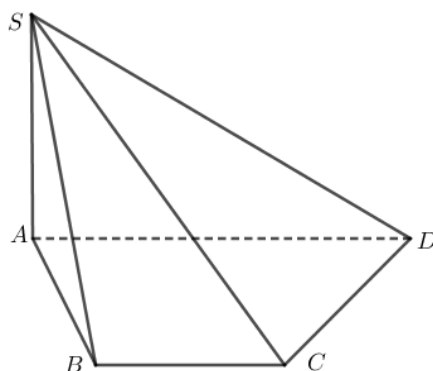
Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BO \perp SA, BO \perp AC \\ SA \subset (SAC), AC \subset (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BO \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

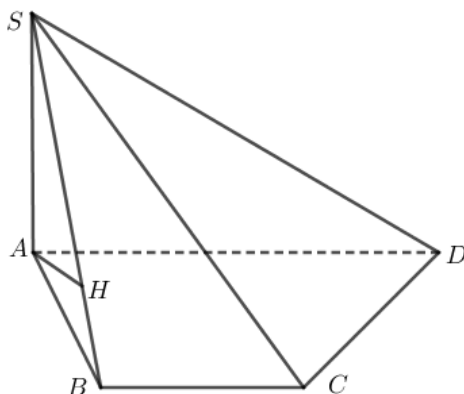
A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

D. $2a$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên SB (1).

Ta có: $BC \perp AB, SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAB , ta có: $AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

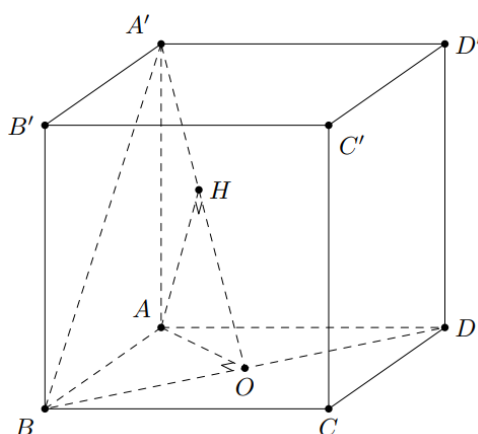
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Có $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{OA^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(A; (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB = AA' = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

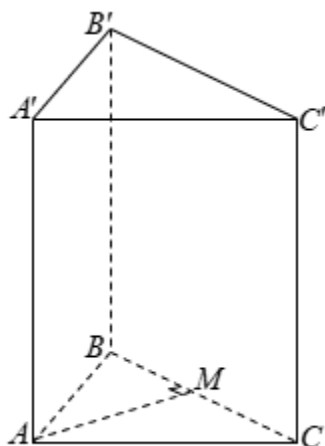
A. $a\sqrt{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. a .

Lời giải



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a)

Ta có: $AM \perp BC$ (do $\triangle ABC$ đều)

Mặt khác: $AM \perp BB'$ (do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều)

Suy ra $AM \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A, (BCC'B')) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 1$; $SA \perp (ABC)$, $SA = 1$. Khoảng cách từ điểm A đến mp (SBC) bằng



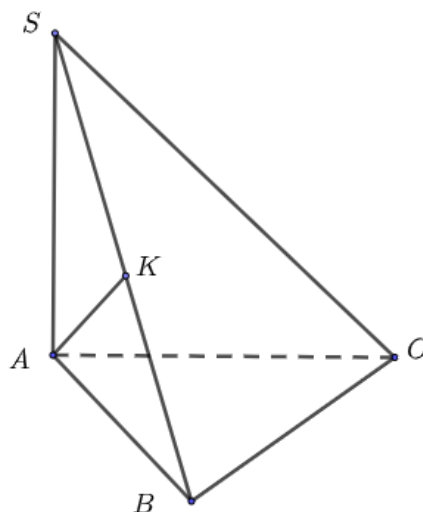
A. $\sqrt{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải



ΔSAB dựng $AK \perp SB$

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$

Vậy $AK \perp (SBC), d(A, (SBC)) = AK$.

$$\text{Có } SA \cdot AB = AK \cdot SB \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , ΔABC là tam giác đều cạnh bằng a . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

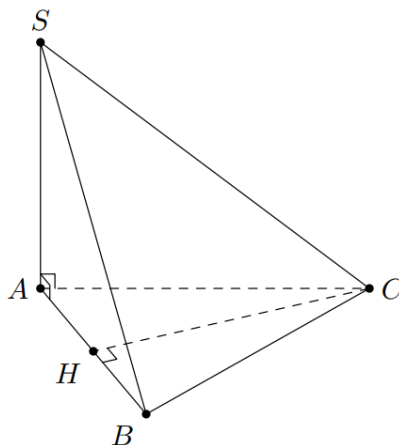
A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

B. a .

C. $2a$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB . Ta có $CH \perp (SAB)$ nên $d(C, (SAB)) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $AK = d(A, (SBC))$. Do H là trung điểm của BC nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } AK = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a . **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Kẻ $AI \perp BD$ tại I (1).

Do $BB' \perp (ABCD)$ nên $BB' \perp AI$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AI \perp (BDD'B')$ hay $d(A, (BDD'B')) = AI$.

Xét tam giác vuông ABD , ta có $AI = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A, (BDD'B')) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = AC = AD = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

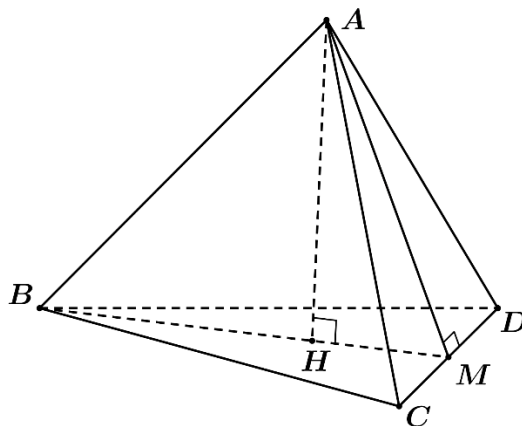
A. $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $a\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của DC

Ta có: $\begin{cases} AM \perp DC \\ AB \perp DC \end{cases} \Rightarrow (AMB) \perp DC \Rightarrow (AMB) \perp (BCD)$ mà $(AMB) \cap (BCD) = BM$

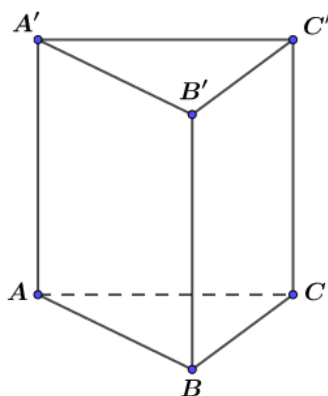
Từ A dựng $AH \perp BM \Rightarrow d(A, (BCD)) = AH$.

Trong $\triangle ADC$ có $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}$

Trong $\triangle ABM$ có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(A, (BCD)) = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và diện tích của hình vuông $ABB'A'$ bằng $12(\text{cm}^2)$



Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

- A. 6. B. $2\sqrt{3}(cm)$. C. 2. D. $3\sqrt{2}(cm)$.

Lời giải

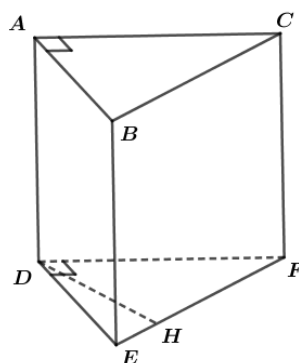
Do ABC là tam giác vuông cân tại B và diện tích của hình vuông $ABB'A'$ bằng $12(cm^2)$ nên $AB = BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Ta có $CB \perp (ABB'A')$ nên $d(C, (ABB'A')) = CB = 2\sqrt{3}(cm)$

Câu 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.DEF$ có đáy là tam giác vuông tại A , biết $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $(BCFE)$ bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải



Trong (DEF) , gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên EF .

$$\Rightarrow \begin{cases} DH \perp EF \\ DH \perp BE \\ EF \cap BE = E \\ EF, BE \subset (BCFE) \end{cases} \Rightarrow DH \perp (BCFE)$$

$$\text{Tam giác } DEF \text{ vuông tại } D, DH \text{ là đường cao} \Rightarrow DH = \frac{DE \cdot DF}{\sqrt{DE^2 + DF^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

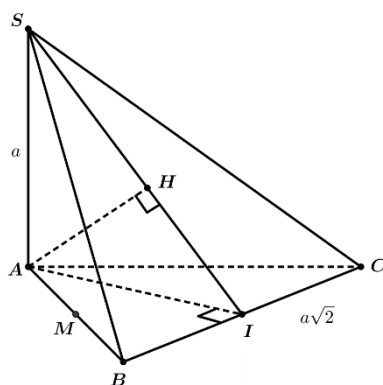


$$\text{Vậy } d(D, (BCFE)) = DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC . Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI \perp BC$.

Theo giả thiết $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$. Do đó $BC \perp (SAI)$.

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AH \perp SI$ (1). Mà $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

$$\text{Ta có } AI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad AH = \frac{AI \cdot AS}{\sqrt{AI^2 + AS^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $2a$. C. a . D. $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CB$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB).$$

$$\text{Do đó } d(C, (SAB)) = CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{2}a.$$



Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

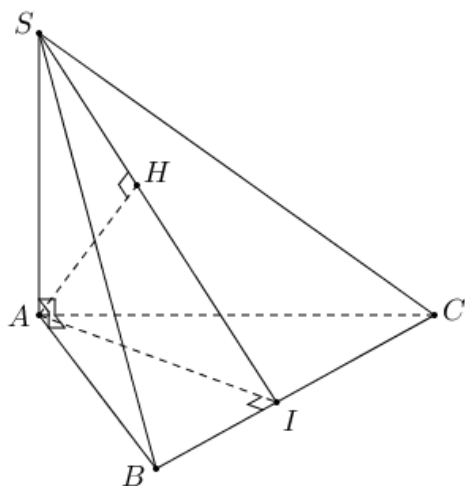
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải



Gọi I là hình chiếu của A trên BC , H là hình chiếu của A trên SI .

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ AI \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH \left. \begin{array}{l} SI \perp AH \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

Do đó: $d(A, (SBC)) = AH$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD = \sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

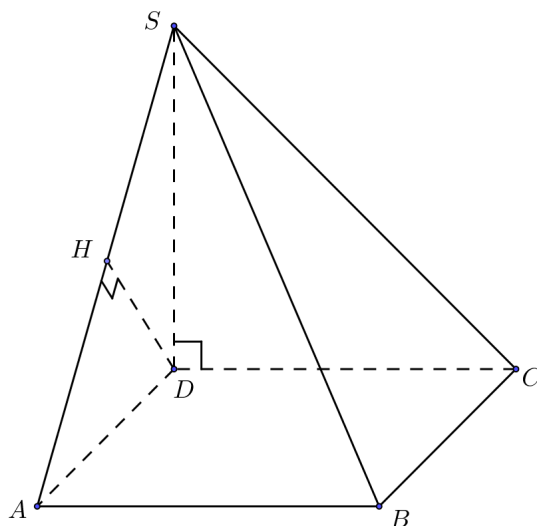
A. $\sqrt{3}a$.

B. $\sqrt{2}a$.

C. $2a$.

D. a .

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp AD \\ SD \cap AD = D \text{ trong } (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$$

Vẽ $DH \perp SA$ tại H trong mặt phẳng (SAD)

$$\text{Ta có } \begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp SA \\ AB \cap SA = A \text{ trong } (SAB) \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB)$$

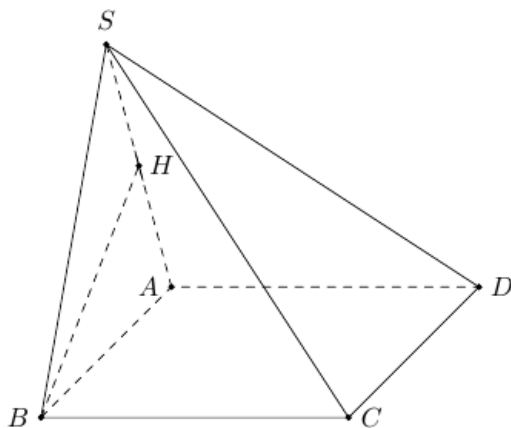
Vì $CD \parallel (SAB)$ nên $d(SB; CD) = d((SAB); CD) = d((SAB); D) = DH$.

$$\triangle SAD \text{ vuông tại } D \text{ với đường cao } DH \text{ có } DH = \frac{SD \cdot DA}{\sqrt{SD^2 + DA^2}} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{3a} = a\sqrt{2}$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải





$$\text{Ta có } \begin{cases} BC // AD \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow BC // (SAD), \text{ do đó } d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)). \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases}$$

Tam giác SAB đều, gọi H là trung điểm SA thì $BH \perp SA$ (1).

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD) \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAD)$, do đó $d(B, (SAD)) = BH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CB và SA .

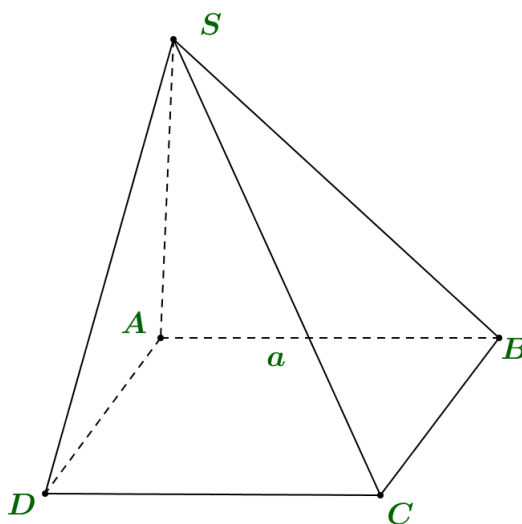
A. $\frac{a}{2}$.

B. $2a$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. a .

Lời giải



Ta có do $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp BC$. Mặt khác $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$.

Từ đó ta có AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng CB và SA .

Vậy $d(BC, SA) = a$.

Câu 19: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD .

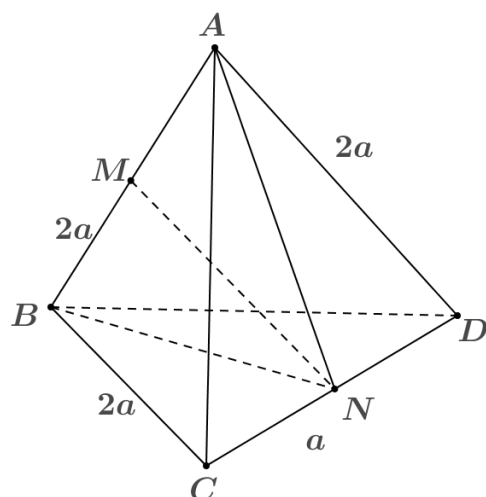
A. $a\sqrt{3}$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Khi đó $NA = NB = a\sqrt{3}$ nên tam giác ANB cân, suy ra $NM \perp AB$. Chứng minh tương tự ta có $NM \perp DC$, nên $d(AB; CD) = MN$.

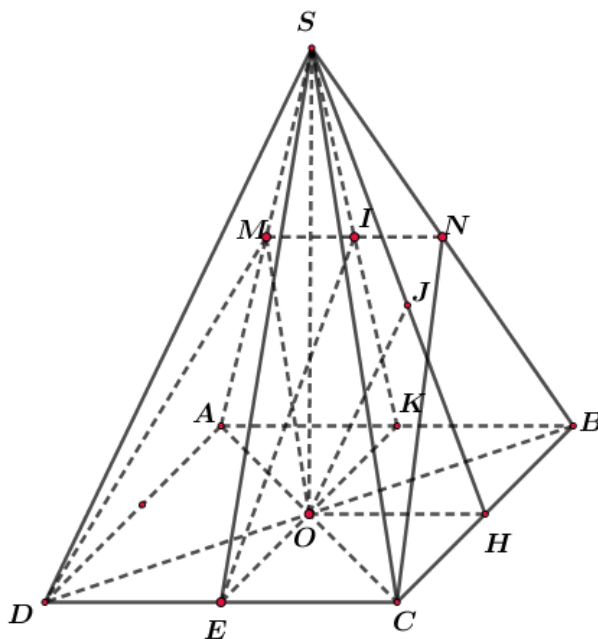
Xét tam giác vuông ANM ta có $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $d(AB, CD) = MN = a\sqrt{2}$.

Câu 20: Cho hình chóp đều $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O . M là trung điểm SA . Biết rằng $(MCD) \perp (SAB)$, khoảng cách giữa hai đường thẳng OM, SB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. C. $3a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của O lên BC và J là hình chiếu của O lên SH .

Gọi N, K, I, E lần lượt là trung điểm của SB, AB, MN và CD .



$$\text{Ta có } \begin{cases} (MCD) \cap (SAB) = MN \\ IE \perp MN \\ SK \perp MN \\ (MCD) \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow EI \perp SK \Rightarrow \Delta SEK \text{ đều} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có } OM \parallel SC \Rightarrow OM \parallel (SBC) \Rightarrow d(OM, SB) = d(O, (SBC)) = OJ$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SOH : OJ = \frac{SO \cdot OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(OM, SB) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO .

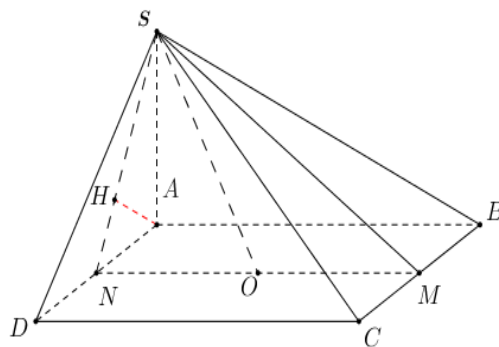
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Dựng $AH \perp SN$

$$\text{Khi đó } d(AB, SO) = d(AB, (SMN)) = d(A, (SMN)) = AH$$

Do tam giác SBD có $\widehat{SBD} = 60^\circ$ và $SB = SD$ nên SBD là tam giác đều

$$\text{Suy ra } SD = BD = a\sqrt{2}, \text{ do đó } SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{5} = d(AB, SO).$$

Câu 22: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

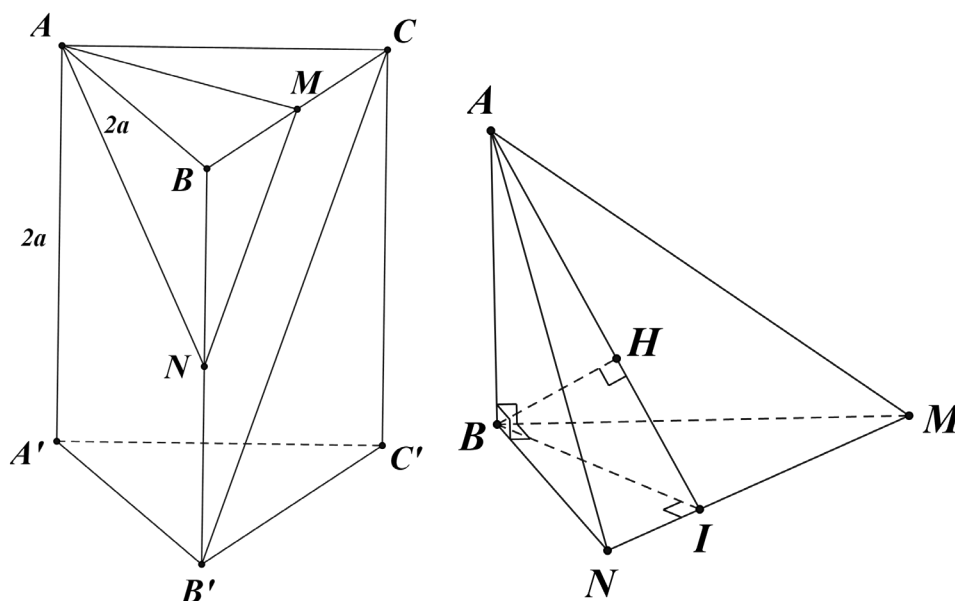
A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm $BB' \Rightarrow MN \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$.

Khi đó $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Ta có $BC \cap (AMN) = M$ và $MB = MC$ nên $d(C, (ABM)) = d(B, (ABM))$.

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ABM) . Tứ diện $BAMN$ có BA, BM, BN đôi một

vuông góc nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$

$$AB = 2a = BC.$$

$$BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}AA' = \frac{2a}{2} = a.$$

$$BM = \frac{1}{2}BC = a.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{2a}{3}.$$

Câu 23: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D , $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Biết điểm M di động trên đường thẳng CD , tìm giá trị nhỏ nhất khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng SA .

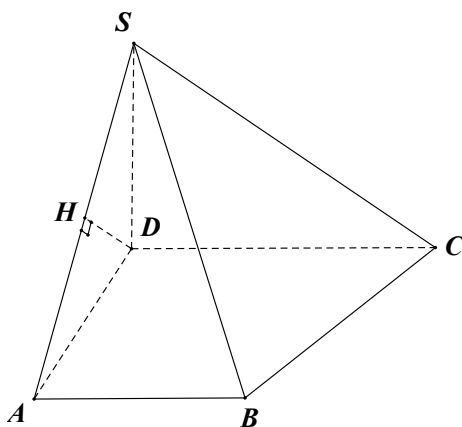
A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Để thấy khoảng cách này bằng khoảng cách từ điểm D đến đường thẳng SA .

Trong tam giác vuông SAD ta có:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow DH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$; $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC là

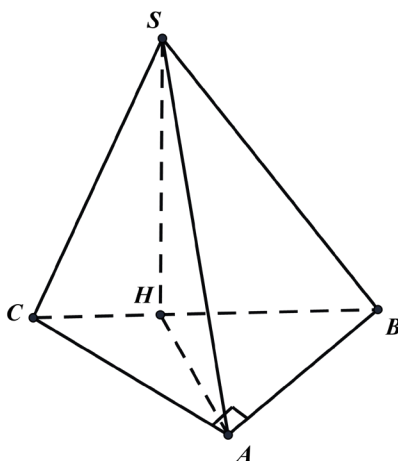
A. $a\sqrt{2}$.

B. $a\sqrt{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Ta có vì $SA = SB = SC$ nên $\Rightarrow S$ nằm trên đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với đáy. Mà $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là trung điểm H của BC . Vậy S nằm trên đường thẳng đi qua H vuông góc với (ABC) .

Mà góc giữa đường thẳng SA và (ABC) là $60^\circ \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^\circ$

$\triangle ABC$ vuông cân tại A có $AB = 2a \Rightarrow BC = 2a\sqrt{2}$. Mà H là trung điểm của BC
 $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông SHA ta có: $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$

Vậy khoảng cách từ S đến đường thẳng BC là $a\sqrt{6}$.



Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE :

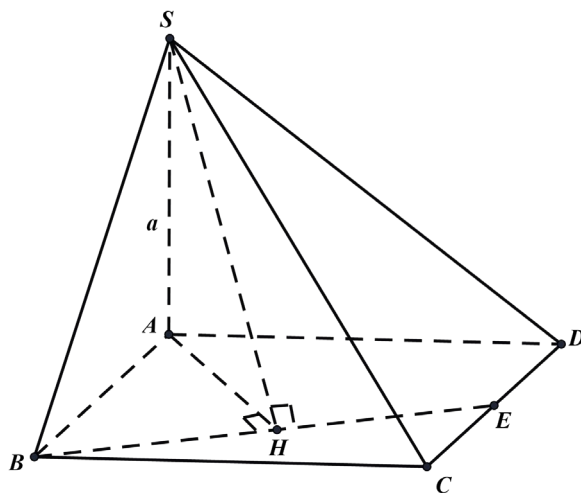
A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải



$SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng $(ABCD)$ nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lý 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH .

Ta có: $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot FE = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} AH \cdot BE$

Mà $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

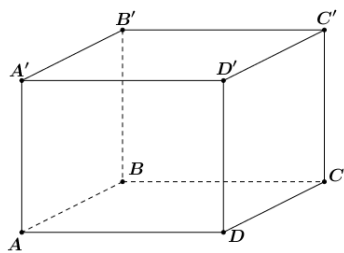
Nên $AH = \frac{a^2}{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, mà $\triangle SAH$ vuông tại A , nên:

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy $d(S, BE) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông cạnh a .



- Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a .
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng a .
- Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng độ dài đoạn thẳng BD .
- Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BDC') bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Do hình hộp có 6 mặt là hình vuông nên là hình lập phương.

Khi đó $A'A \perp (ABCD) \Rightarrow d(A, (ABCD)) = A'A = a$.

b) Sai: Ta có $AC \perp (BDD'B') \Rightarrow d(A, (BDD'B')) = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

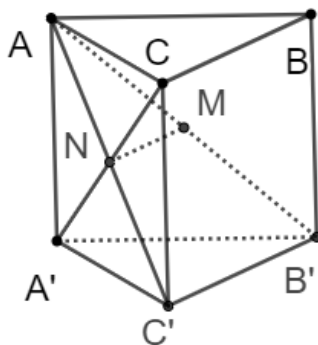
c) Sai: Ta có $DC \perp (BCC'B')$ nên $d(D, (BCC'B')) = DC$.

d) Đúng: Ta có $CA' \perp (BDC')$ và do $CC'; CB; CD$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(C; (BDC'))} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{3a^2} \Rightarrow d(C; (BDC')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 2: Cho lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB' và AC' . Các khẳng định sau **ĐÚNG** hay **SAI**?

- Khoảng cách giữa $(A'B'C')$ và (ABC) bằng $2a$.
- Khoảng cách giữa BC và $(A'B'C')$ bằng a .
- Khoảng cách giữa BC và $(AB'C')$ bằng khoảng cách giữa A' và $(AB'C')$.
- Khoảng cách MN và $(A'B'C')$ bằng a .

Lời giải

a) Đúng: Ta có $(A'B'C') \parallel (ABC)$ nên $d((A'B'C'), (ABC)) = AA' = 2a$.



b) Sai: Ta có $BC \parallel (A'B'C')$ nên $d(BC, (A'B'C')) = d(B, (A'B'C')) = B'B = 2a$.

c) Đúng: Ta có $BC \parallel (AB'C')$ nên $d(BC, (AB'C')) = d(C, (AB'C'))$.

$(AB'C')$ qua trung điểm của $A'C$ nên $d(C, (AB'C')) = d(A', (AB'C'))$.

d) Đúng: Ta có $A'C' \subset (A'B'C')$.

$MN \parallel (A'B'C')$ nên $d(MN, (A'B'C')) = d(M, (A'B'C')) = \frac{1}{2}d(A, (A'B'C')) = \frac{1}{2}AA' = a$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SD và O lên cạnh SC .

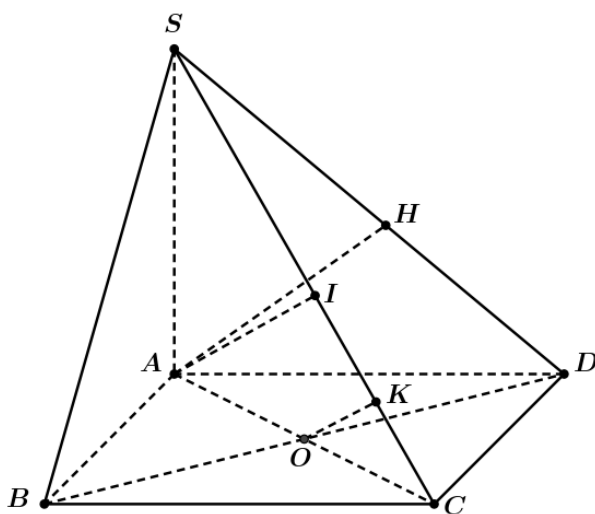
a) OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

b) Đoạn vuông góc chung của SD và AB là AD .

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OK$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và $OK \perp SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

b) Sai: Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$. Mặt khác, $AH \perp SD$. Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SD và AB .

c) Đúng: AH là đoạn vuông góc chung của SD và AB . Tam giác SAD vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AB, SD) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Sai: Ta có OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

Khi đó $d(BD, SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC).

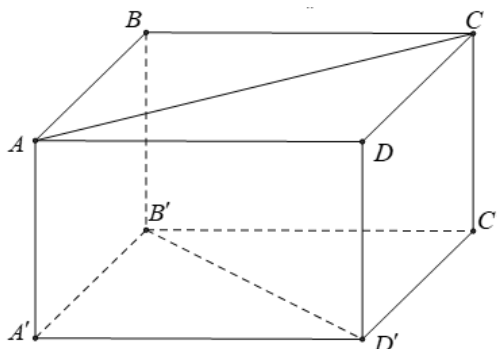


Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(BD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 4: Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, A'A = 5$.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng 5.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng 4.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'A$ và DC là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'BB')$ và mặt phẳng $(CDC'D')$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng CB và $B'D'$ là 3.

Lời giải

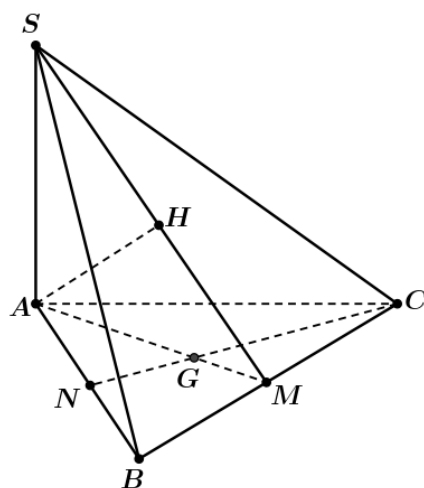


- Đúng: Ta có $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$, $AC \subset (ABCD)$; $B'D' \subset (A'B'C'D')$
 $\Rightarrow d(AC, B'D') = d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = 5$.
- Đúng: Ta có $(ABA'B') \parallel (CDC'D')$, $AB \subset (ABA'B')$; $DD' \subset (CDC'D')$.
 $\Rightarrow d(AC, B'D') = d(AB, (CDC'D')) = d(A, (CDC'D')) = AD = 4$.
- Đúng: Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'A$ và DC là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'BB')$ và mặt phẳng $(CDC'D')$.
- Sai: Ta có $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$, $BC \subset (ABCD)$; $B'D' \subset (A'B'C'D')$
 $\Rightarrow d(AC, B'D') = d(BC, (A'B'C'D')) = d(B, (A'B'C'D')) = BB' = 5$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh a .

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải



a) Sai: M là trung điểm BC .

Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AM$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Sai: N là trung điểm AB . Tam giác ABC đều nên $CN \perp AB$ và $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CN$. Vậy $CN \perp (SAB)$.

Suy ra $d(C, (SAB)) = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Sai: Kẻ $AH \perp AM$ tại H

Ta có $BC \perp AM$; $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Vậy $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp (SBC)$

Suy ra $d(A, (SAB)) = AH$

Tam giác SAM vuông tại A có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{7}{3a^2}$

Suy ra $AH^2 = \frac{3a^2}{7} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

d) Đúng: Ta có $\frac{GM}{AM} = \frac{d(G, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{1}{3}d(A, (SBC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7} = \frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD .

a) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB) là độ dài đoạn DA .

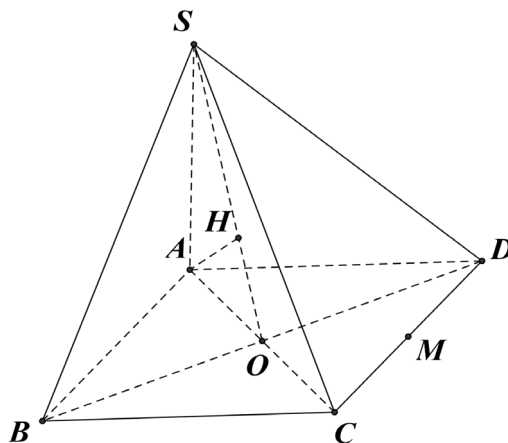
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là độ dài đoạn DA .



c) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{a}{3}$

d) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{a}{3}$

Lời giải



a) Đúng: $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow d(A, (SAB)) = DA.$

b) Đúng: $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA$

c) Sai: Gọi O là tâm đáy, $AC \cap (SBD) = O$, O là trung điểm AC

$$\Rightarrow d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SO . Khi đó $AH \perp SO$ (1)

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ mà } AH \subset (SAC).$

$$\Rightarrow AH \perp BD \text{ (2)}$$

Mà SO cắt BD trong mặt phẳng (SBD) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AH.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOA ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{9}{4a^2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{2a}{3}.$$

d) Đúng: Vì M là trung điểm của CD .

$$d(M, (SBD)) = \frac{1}{2} d(C, (SBD)) = \frac{1}{2} d(A, (SBD)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a}{3}$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$, $SO = a$.

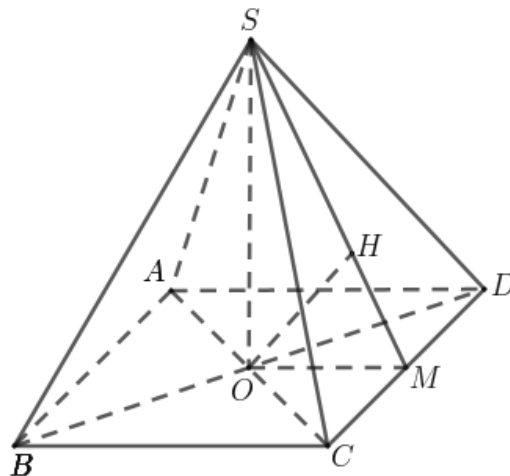
a) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBD) bằng a .

b) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a .



- c) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- d) Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



- a) Sai: Ta có: $D \in (SBD) \Rightarrow d(D, (SBD)) = 0$.
- b) Đúng: Ta có: $O \in (ABCD)$, $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SO = a$.
- c) Đúng: Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BO$ và $BO \perp AC \Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- d) Sai: Gọi M là trung điểm CD , H là hình chiếu của O trên SM .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH \quad (1).$$

Lại có $OH \perp SM \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SCD)$ nên $d(O, (SCD)) = OH$.

Xét tam giác SOM vuông tại O , đường cao OH , ta có

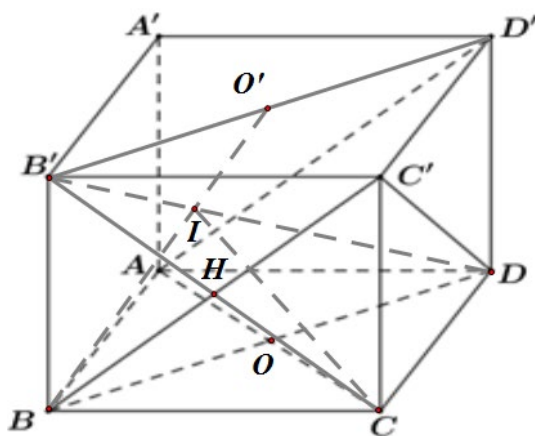
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Suy ra } d(O, (SCD)) = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi O, O' là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$, I là giao điểm của BO' và DB' .

- a) Khoảng cách giữa hai mặt $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng 2.
- b) Khoảng cách từ C đến $(BB'D'D)$ bằng đoạn CO .
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và DC' lớn hơn 2.
- d) Khoảng cách từ B đến (CDI) bằng đoạn $2\sqrt{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AA' \perp (A'B'C'D') \end{cases} \Rightarrow d((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = 2.$

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} CO \perp BD \\ CO \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CO \perp (BB'D'D) \Rightarrow d(C, (BB'D'D)) = CO.$

c) Sai: Ta có $AD' \parallel BC' \Rightarrow AD' \parallel (BDC') \Rightarrow d(AD', DC') = d(AD', (BDC')) = d(A, (BDC')) = d(C, (BDC')).$

$$\text{Mà } \frac{1}{d^2(C, (BDC'))} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow d(C, (BDC')) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(AD', DC') = \frac{2\sqrt{3}}{3} < 2.$$

d) Sai: Ta có $I \in DB' \Rightarrow (CDI) \equiv (CDB') \Rightarrow d(B, (CDI)) = d(B, (CDB')).$

$$\text{Gọi } BC' \cap CB' = H \Rightarrow \begin{cases} BH \perp CB' \\ BH \perp CD \end{cases} \Rightarrow BH \perp (CDB') \Rightarrow d(B, (CDB')) = BH.$$

$$\text{Vậy } d(B, (CDI)) = BH = \frac{BC'}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

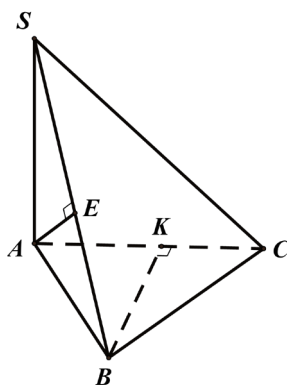
a) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng CB

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

c) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

d) Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách d giữa SM và BC là $\frac{\sqrt{17}a}{17}$.

Lời giải



a) Đúng : Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow d(C; (SAB)) = CB$. Vậy a) đúng.

b) Đúng : Kẻ $AE \perp SB$. Khi đó $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC)$

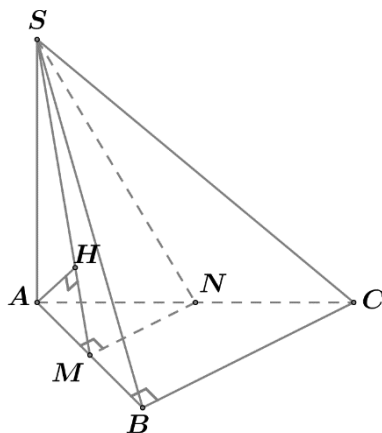
$\Rightarrow AE$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

$$\text{Ta có } \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AE^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow AE = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

c) Sai: Kẻ $BK \perp AC$. Khi đó $BK \perp SA \Rightarrow BK \perp (SAC)$, và K là trung điểm của AC

$\Rightarrow BK$ là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

$$\text{Ta có } BK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



d) Sai: Gọi N là trung điểm của AC .

$$\text{Ta có } BC \parallel (SMN) \Rightarrow d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN)) = d(A, (SMN)).$$

$$\text{Kẻ } AH \perp SM, H \in SM, \text{ ta có } AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A, (SMN)) = AH.$$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAM \text{ vuông tại } A \text{ có } AH \text{ là đường cao, suy ra } AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

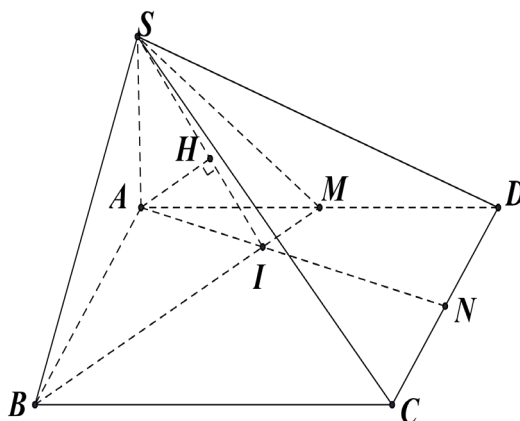


$$\text{Vậy } d(BC, SM) = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

Câu 10: Cho hình chóp $SA = a, SA \perp (ABCD)$, đáy là hình vuông. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, DC , góc giữa (SBM) với $(ABCD)$ là 30° .

- Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a
- Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SMD) là BM
- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng nửa độ dài cạnh BD
- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



- Đúng: Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng a là đúng vì $SA = a, SA \perp (ABCD)$
- Sai: $BA \perp (SAD)$ mà $(SMD) \subset (SAD)$ nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SMD) là BA
- Đúng: $DB \perp AC$ và $DB \perp SA$ nên $DB \perp (SAC)$ suy ra khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng nửa độ dài cạnh BD
- Đúng: Gọi I là giao điểm của AN và BM , vì $ABCD$ là hình vuông nên AN và BM vuông góc nhau tại I (ta có thể chứng minh bằng cách chứng minh $\triangle ADN = \triangle BAM$ ($c - g - c$) để suy ra $\widehat{AMI} + \widehat{MAI} = \widehat{AMI} + \widehat{ABM} = 90^\circ$).

Khi đó $BM \perp AN, BM \perp SA$ nên $BM \perp (SAI)$ hay $BM \perp SI$. Do đó góc giữa (SBM) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIA} = 30^\circ$ suy ra $\widehat{ASI} = 60^\circ$.

Về $AH \perp SI$ tại H khi đó ta có $AH \perp (SBM)$ (vì $AH \perp SI$ và $AH \perp BM$) và trong $\triangle SAH$ có

$$AH = SA \cdot \sin \widehat{ASI} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ hay } d(A, (SBM)) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác lại có $AD \cap (SBM) = M$ nên

$$d(D, (SBM)) = \frac{DM}{AM} \cdot d(A, (SBM)) = d(A, (SBM)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

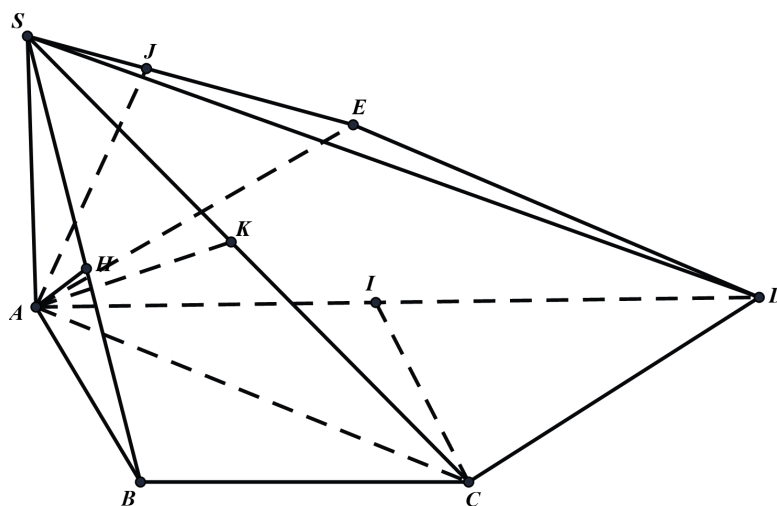
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $SA \perp (ABCD); SA = a; AB = BC = a; AD = 2a$

- Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.



- b) Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .
- c) Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



- a) Sai: Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.
 Dễ thấy $AD \parallel BC$ nên khoảng cách $d(D; BC) = d(A; BC) = AB = a$
- b) Sai: Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .
 dựng đường cao AH của tam giác SAB , suy ra được $AH \perp (SBC)$ nên

$$d(A, (SBC)) = AH = \sqrt{\frac{AS^2 \cdot AB^2}{AS^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

- c) Sai: Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Gọi I là trung điểm AD , nhận thấy tứ giác $ABCI$ là hình vuông cạnh a ,
 Xét trong tam giác ACD có CI là đường trung tuyến và $CI = a = IA = ID$, từ đó suy ra tam giác ACD vuông tại C .

Dựng đường cao AK của tam giác SAC , dễ dàng chứng minh được $AK \perp (SCD)$

$$\text{Suy ra } d(A, (SCD)) = AK = \sqrt{\frac{AC^2 \cdot AS^2}{AC^2 + AS^2}} = \sqrt{\frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot a^2}{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

- d) Đúng: Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Dựng hình chữ nhật $ACDE$, ta có $AC \parallel DE$ nên $AC \parallel (SDE)$.

$$AE = CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

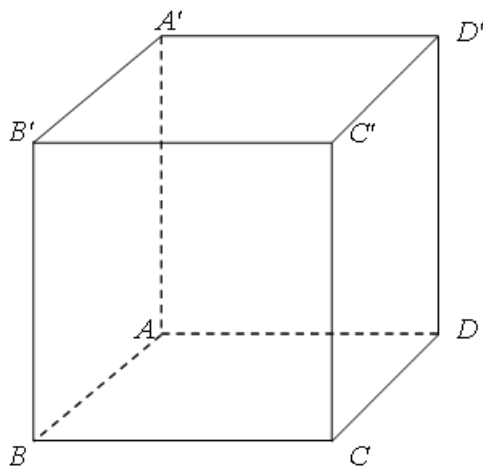
$$\text{Do đó } d(AC, DE) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)).$$

Dựng đường cao AJ trong tam giác SAE , ta chứng minh được $AJ \perp (SDE)$.



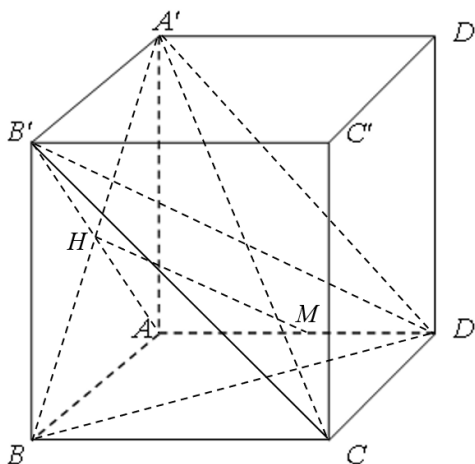
$$\text{Từ đó suy ra } d(A, (SDE)) = AJ = \sqrt{\frac{AE^2 \cdot AS^2}{AE^2 + AS^2}} = \sqrt{\frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot a^2}{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a .



- Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $A'B$ bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng $\frac{a}{2}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$ bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải



$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có các cạnh bằng a nên có tất cả các mặt là hình vuông cạnh a . Gọi H là tâm của hình vuông $ABB'A'$ và M là trung điểm của cạnh AD .

- Đúng: $d(A, A'B) = AH = \frac{1}{2} AB' = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.
- Đúng: $d(A, (A'BD)) = h$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{3}{a^2}$. Do đó $h = \frac{\sqrt{3}}{3} a$.



c) Sai: $A'B \subset (A'BD)$.

$B'C \parallel A'D$, $A'D \subset (A'BD)$ nên $B'C \parallel (A'BD)$.

Do đó $d(A'B, B'C) = d(B'C, (A'BD)) = d(C, (A'BD))$.

Mặt khác $AC \cap (A'BD) = N$ là trung điểm của AC nên $d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

Do đó $d(A'B, B'C) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

d) Sai: $A'B \subset (A'BM)$.

$B'D \parallel HM$, $HM \subset (A'BM)$ nên $B'D \parallel (A'BM)$.

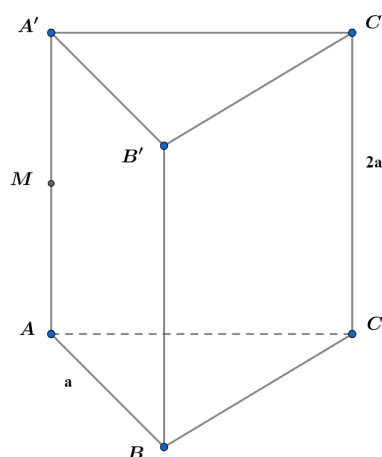
Do đó $d(A'B, B'D) = d(B'D, (A'BM)) = d(D, (A'BM))$.

Mặt khác $AD \cap (A'BM) = M$ là trung điểm của AD nên $d(D, (A'BM)) = d(A, (A'BM)) = k$

Khi đó $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{6}{a^2}$.

Do đó $d(A'B, B'C) = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = 2a$. Gọi M là trung điểm của AA' .



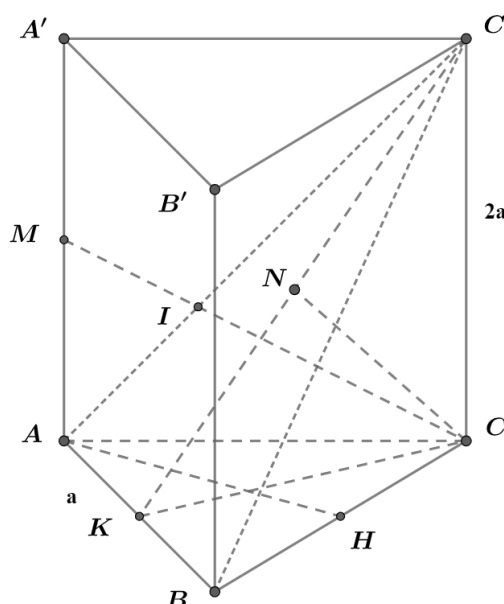
a) Khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AB là $3a$.

c) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AC'B)$ bằng $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải



a) Đúng: Vì $AA' \perp (ABC)$ nên $d(A', (ABC)) = AA' = 2a$.

b) Sai: Ta có: $B'C' \parallel (ABC)$ suy ra $d(B'C', AB) = d(B'C', (ABC)) = d(B', (ABC)) = BB' = 2a$

c) Đúng: Vì $M \in AA' \parallel (BCC'B')$ nên $d(M, (BCC'B')) = d(A, (BCC'B'))$.

Dựng $AH \perp BC$ trong (ABC) . Khi đó: $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$

$$\Rightarrow d(A, (BCC'B')) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (đường cao trong tam giác đều).}$$

d) Sai: Gọi $I = CM \cap AC'$ trong $(ACC'A')$ và K là trung điểm AB . Dựng $CN \perp C'K$ trong (CKC') .

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CK \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CKC') \Rightarrow AB \perp CN \subset (CKC') \text{ mà } CN \perp C'K \text{ (gt)}$

$$\Rightarrow CN \perp (AC'B) \Rightarrow d(C, (AC'B)) = CN.$$

$$\text{Ta có } \frac{d(M, (AC'B))}{d(C, (AC'B))} = \frac{MI}{CI} = \frac{MA}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M, (AC'B)) = \frac{1}{2} d(C, (AC'B)) = \frac{CN}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } CC'K \text{ có: } \frac{1}{CN^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{CK^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow CN = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(M, (AC'B)) = \frac{CN}{2} = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

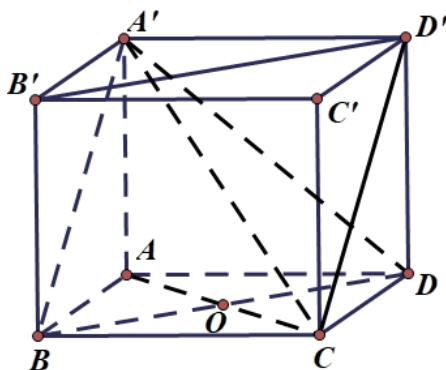
Câu 14: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 2a$.

a) Độ dài $A'C$ bằng $a\sqrt{3}$.



- b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .
 c) Khoảng cách giữa $B'D'$ và AC bằng $2a$.
 d) Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\frac{a}{3}$.

Lời giải



- a) Sai: Ta có: $A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$
 b) Đúng: Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A; (BCC'B')) = AB = a$
 c) Đúng: Có $B'D' \subset (A'B'C'D') \parallel (ABCD) \supset AC \Rightarrow d(B'D'; AC) = d((A'B'C'D'); (ABCD)) = 2a$.
 d) Sai: Ta có: $CD' \not\parallel A'B \Rightarrow CD' \not\parallel (A'BD) \supset BD$
 $\Rightarrow d(BD; CD') = d(CD'; (A'BD)) = d(C; (A'BD)) = d(A; (A'BD))$

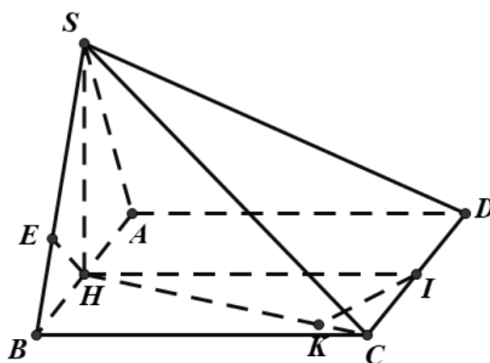
Ta thấy $AA'BD$ là tứ diện có AB, AD, AA' đôi một vuông góc

$$\Rightarrow \frac{1}{d^2[A; (A'BD)]} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow d(A; (A'BD)) = \frac{2a}{3}.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân và $(SAB) \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của CD và AB .

- a) Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $\frac{a\sqrt{15}}{2}$.
 b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{15}}{8}$.
 c) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SHC) là $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.
 d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) là $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có ΔSAB cân, H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ (ABCD) \perp (SAB) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow d(S, (ABCD)) = SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

b) Sai: Kẻ $HE \perp SB$, ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp HE$, mà $HE \perp SB$.

Do đó $HE \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HE$.

$$\text{Ta có } \frac{d(A, (SBC))}{d(H, (SBC))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC)) = 2HE$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{15a^2} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{15}}{8}.$$

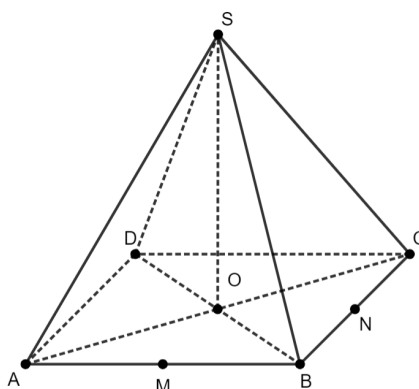
$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = 2HE = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

c) Đúng: Kẻ $IK \perp HC$, ta có $\begin{cases} IK \perp HC \\ IK \perp SH \end{cases} \Rightarrow IK \perp (SHC) \Rightarrow d(I, (SHC)) = IK$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IH^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy } d(I, (SHC)) = IK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{d) Sai: Ta có } \frac{d(D, (SHC))}{d(I, (SHC))} = \frac{DC}{IC} = 2 \Rightarrow d(D, (SHC)) = 2d(I, (SHC)) = 2IK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

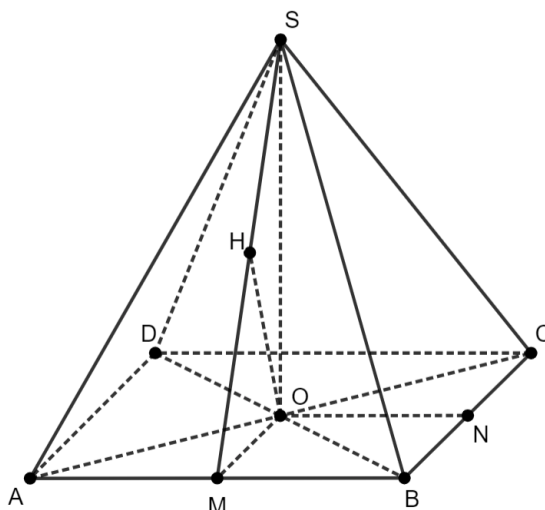
Câu 16: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC .





- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $a\sqrt{2}$.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng $\frac{a}{2}$.
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng ON và SB bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA bằng $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải



a) Sai: Vì $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp CD \end{cases}$ nên $d(AB; CD) = AD = a$.

b) Đúng: Vì $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp OM$.

Mặt khác $OM \perp AB$ nên ta có OM là đoạn vuông góc chung của AB và SO .

Do đó $d(SO; AB) = OM = \frac{a}{2}$.

c) Sai: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SM .

Khi đó vì $AB \perp (SMO)$ nên $AB \perp OH$, suy ra $OH \perp (SAB)$.

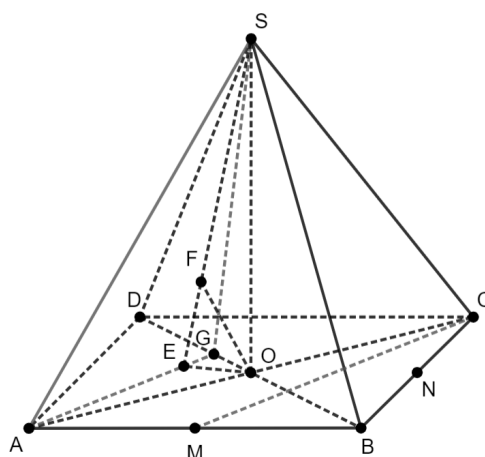
Vì thế ta có: $d(ON; SB) = d(ON; (SAB)) = d(O; (SAB)) = OH$.

Xét tam giác $\triangle OSA$ vuông tại O ta có $OS = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì M là trung điểm AB nên $OM = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông $\triangle SOM$ ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

d) Đúng: Trong tam giác $\triangle ADC$ gọi G là trọng tâm. Khi đó AG đi qua trung điểm của CD nên $AG \parallel CM$, suy ra $d(CM; SA) = d(CM; (SAG)) = d(C; (SAG)) = 2d(O; (SAG))$



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên AG, SE .

Theo định lí 3 đường vuông góc thì $AG \perp (SOE)$, suy ra $AG \perp OF$.

Do đó $OF \perp (SAG)$, lúc này ta có $d(CM; SA) = 2d(O; (SAG)) = 2OF$.

Vì G là trọng tâm tam giác $\triangle DAC$ nên $OG = \frac{1}{3}DO = \frac{1}{6}BD = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

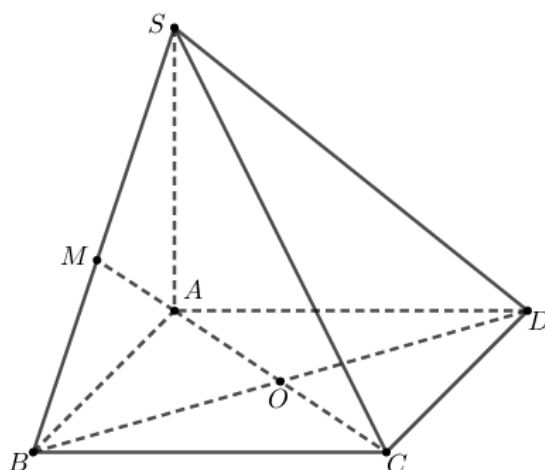
Xét tam giác $\triangle SOE$ vuông tại O ta có $\frac{1}{OF^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OG^2} + \frac{1}{OS^2}$

$\Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{22}}{22}$. Vậy $d(CM; SA) = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AD = 2a$, $AB = a$. Kẻ AM vuông góc với SB tại M .

- Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $2a$.
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$.
- Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAD) bằng nửa khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) .
- Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) lớn hơn $\frac{a}{2}$.

Lời giải



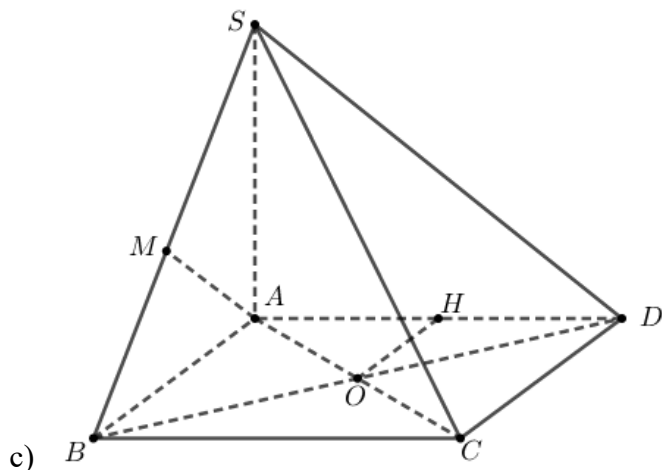


a) Đúng: Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $d(A, (ABCD)) = SA = 2a$.

b) Sai: Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

Mà $AM \perp SB$ nên $AM \perp (SBC)$

$$\text{Do đó } d(A, (SBC)) = AM = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

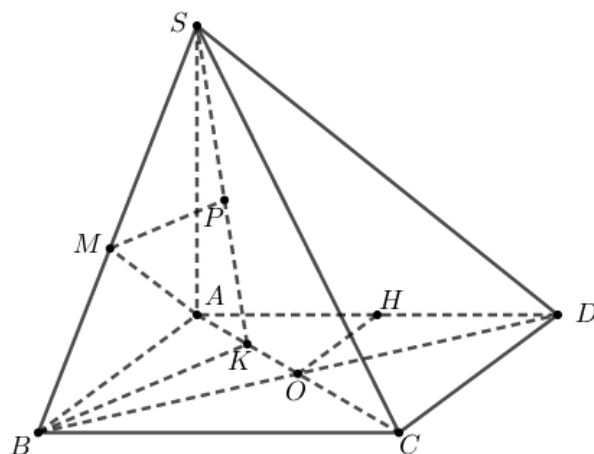


c) Đúng: Kẻ $OH \perp AD$ tại H , mà $OH \perp SA$ nên $OH \perp (SAD) \Rightarrow d(O, (SAD)) = OH$

Ta có $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow d(C, (SAD)) = CD$.

$$\text{Khi đó } \frac{d(O, (SAD))}{d(C, (SAD))} = \frac{OH}{CD} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2}$$

d) Đúng:



Kẻ $BK \perp AC$ tại K , mà $BK \perp SA$ nên $BK \perp (SAC)$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = BK = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Trong mặt phẳng (SBK) , kẻ $MP \parallel BK$ ($P \in SK$), mà $BK \perp (SAC)$ nên $MP \perp (SAC)$

$$\Rightarrow d(M, (SAC)) = MP$$



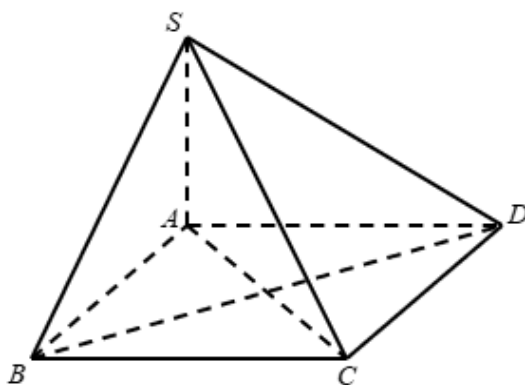
$$\text{Do đó } \frac{d(M, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{MP}{BK} = \frac{SM}{SB} = \frac{SM \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Hay } d(M, (SAC)) = \frac{4}{5} \cdot d(B, (SAC)) = \frac{4}{5} \cdot BK = \frac{4}{5} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5} = \frac{8a\sqrt{5}}{25} > \frac{a}{2}.$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

- Khoảng cách từ S đến đường thẳng AC bằng $2\sqrt{2}a$.
- Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAD) bằng a .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng a .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



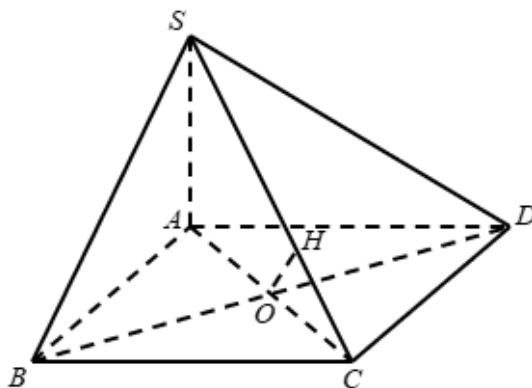
a) Sai: Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$. Vậy $d(S, AC) = SA = a\sqrt{6}$.

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$. Vậy $d(C, (SAD)) = CD = a$.

c) Đúng: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Mặt khác $BC \perp CD$.

$\Rightarrow BC$ là đoạn vuông góc chung của SB và CD . Vậy $d(SB, CD) = BC = a$.

d) Sai:





Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ tại } O.$$

Trong mặt phẳng (SAC) : từ O kẻ $OH \perp SC$ tại H .

Ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (do $BD \perp (SAC), OH \subset (SAC)$). Vậy OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD .

$$\text{Ta có } \sin \widehat{ACS} = \frac{SA}{SC} = \frac{OH}{OC} \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{6}}{2\sqrt{2}a} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, BD) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi H là trung điểm của AB .

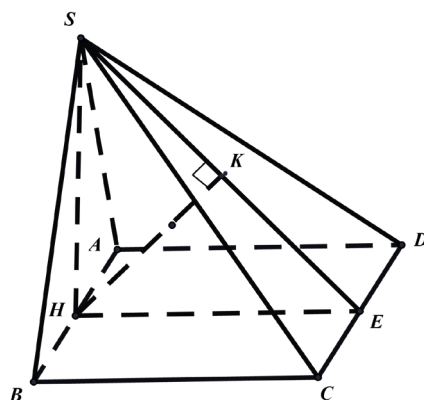
a) $SH \perp (ABCD)$.

b) $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$.

c) Gọi E là trung điểm của CD , khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) là độ dài đoạn thẳng AK (Với K là hình chiếu của H lên SE , K thuộc SE).

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



a) Đúng: Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

$$\begin{cases} SH \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

b) Đúng: Ta có: $AH \parallel CD \Rightarrow AH \parallel (SCD)$

$$\text{Vậy } d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$$

c) Sai: Ta có: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.



Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm CD thì $HE \perp CD$.

Vậy $CD \perp (SHE)$.

Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$.

Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$.

Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$.

Khi đó $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$.

d) Đúng: Vì $AB = a$ nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$. Vì $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HE$.

Khi đó $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{7}{3a^2}$, nên $HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AA' .

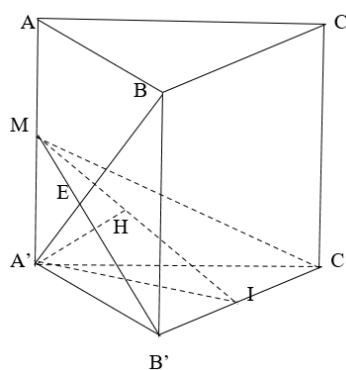
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$ là a .

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ là $a\sqrt{2}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là a .

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng MB' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$ bằng $AA' = a$ (do $AB \parallel A'B'$)

b) Sai: Ta có $AB \perp BB'$ và $B'C' \perp BB'$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng BB' ($BB' = a$)

c) Sai: Gọi I là trung điểm của $B'C'$

$AA' \perp A'I$, tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'I \perp B'C'$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $A'I$ (I là trung điểm của $B'C'$)



$$A'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

d) Đúng: Gọi H là hình chiếu của A' trên MI
 E là giao điểm của $A'B$ và MB'

Do $BC \parallel B'C'$ nên $d(B'M, BC) = d(BC, (MB'C')) = d(B, (MB'C'))$

$$= 2d(A', (MB'C')) \quad (\text{do } \frac{BE}{A'E} = \frac{BB'}{A'M} = 2)$$

$$d(A', (MB'C')) = A'H$$

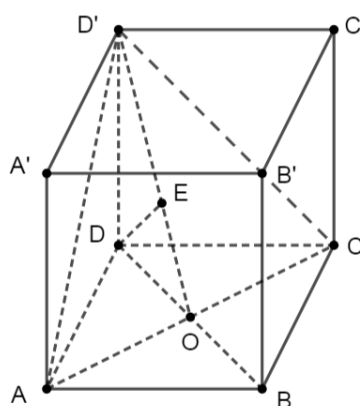
$$\text{Ta có } A'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad A'M = \frac{a}{2}$$

$$\text{Suy ra } A'H = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } d(B'M, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

- Khoảng cách giữa AB và $C'D'$ bằng $2a$.
- Khoảng cách giữa $B'D'$ và AB bằng $a\sqrt{2}$.
- Khoảng cách giữa AD' và CC' bằng a .
- Khoảng cách giữa BC' và CD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



$$\text{a) Sai: Ta có: } \begin{cases} AB \perp AD' \\ C'D' \perp AD' \end{cases} \Rightarrow d(AB, C'D') = AD' = a\sqrt{2}.$$

(Vì AD' là đường chéo trong hình vuông $AA'D'D$).

$$\begin{aligned} \text{b) Sai: Ta có: } AB \parallel (A'B'C'D') &\Rightarrow d(AB, B'D') = d(AB, (A'B'C'D')) \\ &= d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a \end{aligned}$$

$$\text{c) Đúng: Ta có: } CC' \parallel AA' \Rightarrow CC' \parallel (AA'D'D)$$



Nên $d(CC', AD') = d(CC', (AA'D'D)) = d(C, (AA'D'D)) = CD = a$.

d) Đúng: Ta có: $BC' \parallel AD \Rightarrow BC' \parallel (AD'C)$

Nên $d(BC', CD') = d(BC', (AD'C)) = d(B, (AD'C)) = d(D, (AD'C))$

Lấy $AC \cap BD = O$. Dựng $DE \perp D'O$ tại $E \Rightarrow DE \perp (AD'C) \Rightarrow d(D, (AD'C)) = DE$

Do đó, $d(BC', CD') = DE$

Mà $DA \perp DC \perp DD' \Rightarrow \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{D'D^2}$, Suy ra $d(BC', CD') = DE = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 22: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, H là tâm của đáy, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° , I là trung điểm BC .

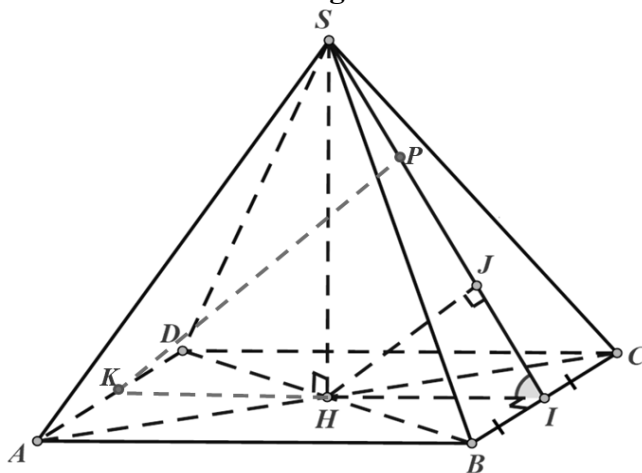
a) Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng SH .

b) Khoảng cách giữa SH và BC là $\frac{a}{2}$.

c) Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{3a}{4}$.

d) Khoảng cách giữa SI và AD là $\frac{3a}{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Theo tính chất hình chóp đều ta có $SH \perp (ABCD)$

Suy ra khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng SH .

b) Sai: $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $S.ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow HI \perp BC$
mà $SH \perp (ABCD)$, $HI \subset (ABCD) \Rightarrow HI \perp SH$

$\Rightarrow$ Khoảng cách giữa SH và BC bằng $HI = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Đúng: Dựng $HJ \perp SI \Rightarrow HJ \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HJ$

Theo giả thiết, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{SIH} = 60^\circ$



Tam giác HJI vuông tại J , nên $HJ = HI \cdot \sin \widehat{SIH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$.

d) Đúng: Ta có, $AD // (SBC)$, $SI \subset (SBC) \Rightarrow d(SI, AD) = d(AD, (SBC)) = d(K, (SBC))$

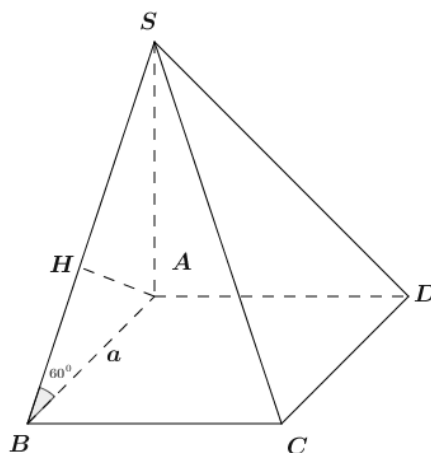
K là trung điểm, $K = IH \cap AD$; $KP \perp SI \Rightarrow KP \perp (SBC) \Rightarrow KP = d(K, (SBC))$

Có H là trung điểm IK nên $KP = 2HJ = 2 \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $d(SI, AD) = \frac{3a}{2}$.

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa cạnh SB và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

Lời giải

Trong mặt phẳng (SAB) dựng $AH \perp SB$. Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH$.

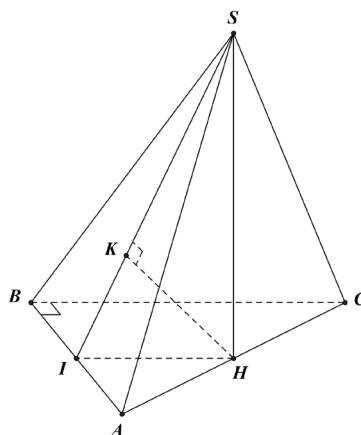
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow$ góc giữa SB và mặt đáy bằng góc giữa SB và $AB \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$

Trong tam giác SAB có $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; Vì $AH \perp SB$ nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC . Biết $SB = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải

Dựng $HI \perp AB$.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} AB \perp IH \\ AB \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (SIH) \text{ và } (SIH) \cap (SAB) = SI$.

Dựng $HK \perp SI$.



$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} HK \perp AB \\ HK \perp SI \end{array} \right\} \Rightarrow HK \perp (SAB).$$

$$\text{Vậy } d(H, (SAB)) = HK.$$

$$\text{Do } HI \parallel BC \text{ nên dễ dàng chỉ ra được } I \text{ là trung điểm của } AB \text{ và } IH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Ta có } AB \perp SI \text{ nên } SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Do $SH \perp IH$ nên xét tam giác vuông SIH có:

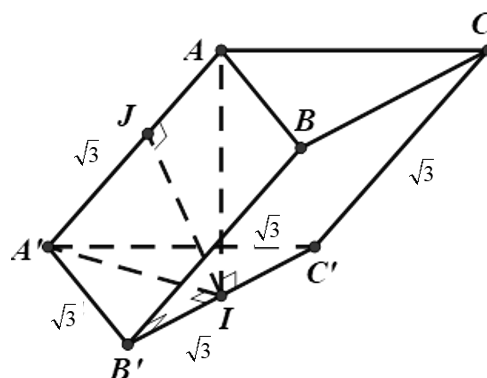
$$SH = \sqrt{SI^2 - IH^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = a.$$

$$HK = \frac{SH \cdot HI}{SI} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Do vậy, ta có } d(H, (SAB)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A trên mp $(A'B'C')$ trùng với trung điểm I của $B'C'$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt bên $(BCC'B')$

Lời giải



$$\text{Ta có: } AA' \parallel BB' \subset (BCC'B')$$

$$\Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$$

$$\text{Gọi } J \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } AA' \Rightarrow IJ \perp AA' \parallel BB' \Rightarrow IJ \perp BB'$$

Mặt khác, theo giả thiết suy ra:

$$\left\{ \begin{array}{l} B'C' \perp A'I \subset (AA'I) \\ B'C' \perp AI \subset (AA'I) \end{array} \right\} \Rightarrow B'C' \perp (AA'I)$$

$$\text{Suy ra: } IJ \perp B'C', \text{ tức là } IJ \perp (BCC'B'), \text{ mà } J \in AA' \text{ nên } d(AA', (BCC'B')) = IJ$$



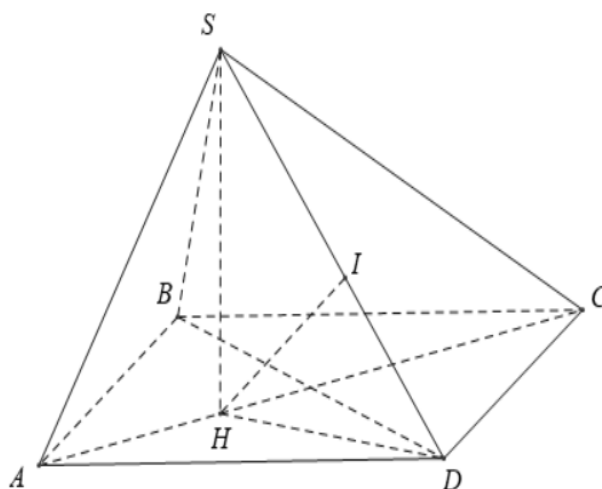
$$\text{Trong } \triangle AA'I \Rightarrow IJ \cdot AA' = AI \cdot A'I \Rightarrow IJ = \frac{AI \cdot A'I}{AA'}.$$

$$\text{Dễ thấy } A'I = \frac{3}{2}, AI = \sqrt{AA'^2 - A'I^2} = \sqrt{3 - \frac{3 \cdot 3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra: } IJ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(AA', (BCC'B')) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $6\sqrt{6}$, $SA = SB = SD = 12$ và tam giác ABD đều. Khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

$$\Rightarrow d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)).$$

Ta có: $SA = SB = SD$ suy ra hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABD .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo giả thiết tam giác ABD đều nên có H là trọng tâm của tam giác ABD .

Ta có $DH \perp AB \Rightarrow HD \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHD)$.

Kẻ $HI \perp SD, I \in SD$ suy ra $HI \perp (SCD)$. Khi đó, $d(H, (SCD)) = HI$.

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{2}; SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Tam giác } SHD \text{ có } \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{(6\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(6\sqrt{2})^2} = \frac{1}{36} \Rightarrow HI = 6 \text{ hay}$$

$$d(H, (SCD)) = 6.$$

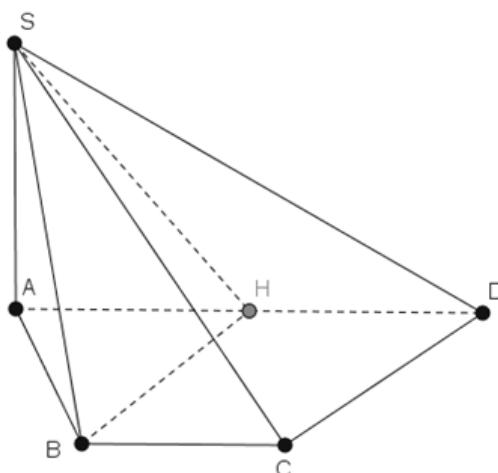
$$\text{Mà mặt khác ta thấy: } \frac{d(A, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{AC}{HC} = \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{3}{2} d(H, (SCD)) = \frac{3}{2} HI = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9.$$



Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa SB và CD .

Lời giải



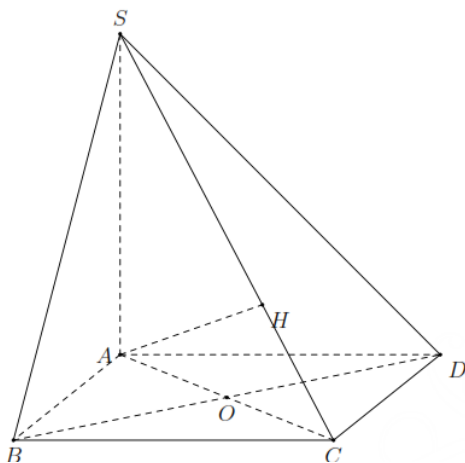
Gọi H là trung điểm của AD ta có $d(CD, SB) = d(CD, (SHB)) = d(D, (SHB)) = d(A, (SHB))$

$$\text{Ta có } \frac{1}{d^2(A, (SHB))} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{3}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Vậy khoảng cách giữa SB và CD là 1

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm O đến SC .

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do O là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $d(O, SC) = \frac{1}{2}d(A, SC)$.

Trong tam giác SAC vuông tại A hạ $AH \perp SC$.

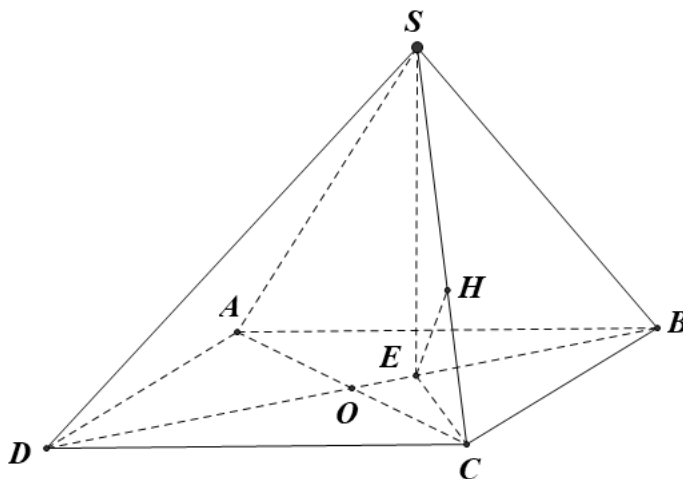
$$\text{Suy ra } d(A, SC) = AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$



$$\text{Vậy } d(O, SC) = \frac{1}{2}d(A, SC) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a

Lời giải



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và E là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\begin{cases} SD \cap (ABCD) = D \\ SE \perp (ABCD) \text{ tại } E \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SD, (ABCD))} = \widehat{(SD, ED)} = \widehat{SDE} = 30^\circ$$

$$\text{Do tam giác } ABC \text{ đều nên } \begin{cases} BD = 2BO = a\sqrt{3} \Rightarrow DE = \frac{2}{3}BD = a\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ CE = \frac{2}{3}BO = a\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \tan \widehat{SDO} = \frac{SE}{DE} \Rightarrow SE = \frac{2a}{3}$$

Vì tam giác ABC đều nên $CE \perp AB \Rightarrow CE \perp CD$ mà $CD \perp SE$ nên $CD \perp (SEC)$

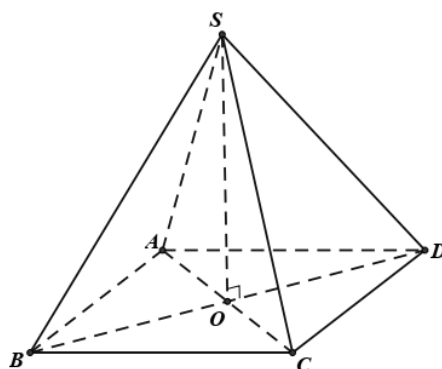
Kẻ $EH \perp SC$ ($H \in SC$) khi đó $EH \perp (SCD)$ tại H nên $d(E, (SCD)) = EH$

$$\frac{1}{EH^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{EC^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Rightarrow EH = a\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\text{Do } BE \cap (SCD) = D \text{ nên } \frac{d(B, (SCD))}{d(E, (SCD))} = \frac{BD}{ED} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2}d(E, (SCD)) = a\frac{\sqrt{21}}{7}.$$



Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



Lời giải

Gọi $O = AC \cap DB$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông.

$$\text{Ta có: } \frac{d(A, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)).$$

Tam giác $\triangle ACD$ vuông tại D có: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OD = OC = a\sqrt{2}$.

Tam giác $\triangle SCO$ vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = a\sqrt{7}$.

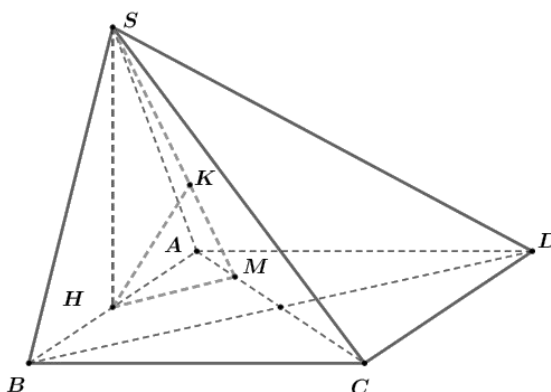
Do SO, OC, OD đôi một vuông góc nên gọi $h = d(O, (SCD))$ thì

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{8}{7a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) bằng

Lời giải



Tam giác SAB vuông cân tại S , H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Từ H dựng $HM \perp AC$ tại M , từ H dựng $HK \perp SM$ tại K . Ta có

$$\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp SH \text{ (} SH \perp (ABCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHM) \Rightarrow AC \perp HK.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC) \text{ tại } K \text{ nên } d(H, (SAC)) = HK.$$

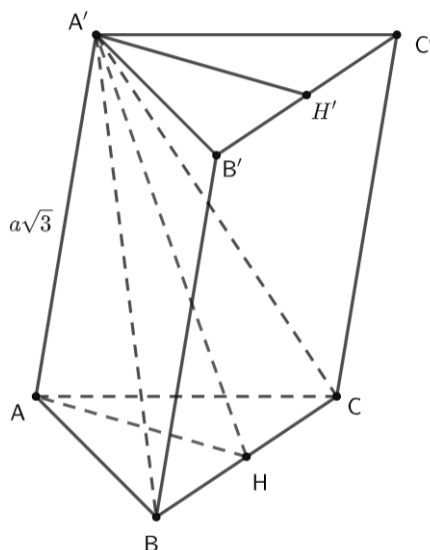
$$\text{Ta có } \begin{cases} SH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \\ HM = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \end{cases}. \text{ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông } SHM. \text{ Ta có}$$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(H, (SAC)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 10: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh BC . Biết cạnh $AA' = a\sqrt{3}$ và tạo với mặt đáy của hình lăng trụ một góc 60° . Khoảng cách từ đỉnh C' đến mặt $(A'BC)$ bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Vì $A'H \perp (ABC)$ nên $A'H$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC) . Khi đó góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) là góc giữa AA' và $A'H$, hay chính là góc $\widehat{A'AH}$.



Vì $A'H \perp (ABC)$ nên $A'H \perp AH$ hay tam giác $AA'H$ vuông tại H .

$$\text{Khi đó } \cos \widehat{A'AH} = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AH = AA' \cdot \cos \widehat{A'AH} = a\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi H' là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại A' nên $A'H' \perp B'C'$.

$$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow A'H \perp A'H'.$$

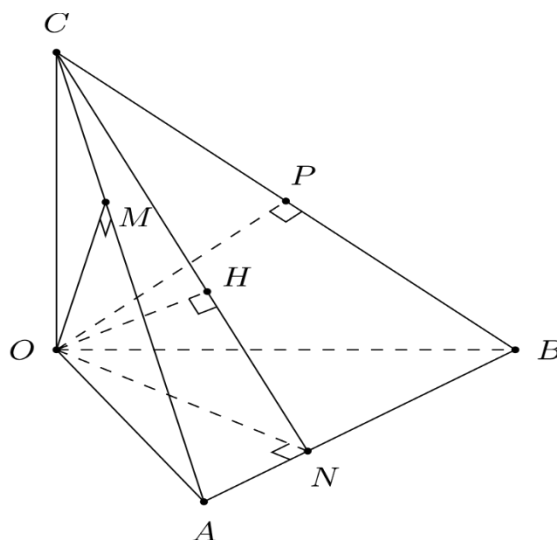
$$\text{Ta có } \begin{cases} A'H' \perp B'C' \\ A'H' \perp A'H \\ A'H \cap BC = \{H\} \\ A'H, BC \subset (A'BC) \end{cases} \Rightarrow A'H' \perp (A'BC).$$

Vì $BC \parallel B'C'$, $BC \subset (A'BC)$ nên $B'C' \parallel (A'BC)$.

$$\text{Suy ra } d(C'; (A'BC)) = d(B'C'; (A'BC)) = d(H'; (A'BC)) = A'H' = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 11: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a

Lời giải



Kẻ $OM \perp AC$ ($M \in AC$), $ON \perp AB$ ($N \in AB$), $OP \perp BC$ ($P \in BC$).

Khi đó ta có $OP = a$, $OM = a\sqrt{2}$, $ON = a\sqrt{3}$.

Trong (OCN) kẻ $OH \perp CN$ ($H \in CN$) ta có:

$$\begin{cases} AB \perp ON \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCN) \Rightarrow AB \perp OH$$



$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp CN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Lại có:

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2}; \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}; \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} = 2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right)$$

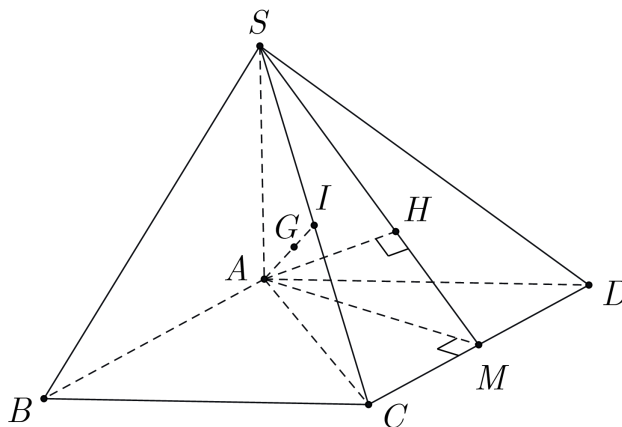
$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{11}{12a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{11}{12a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \sqrt{6}a$, G là trọng tâm tam giác SAC . Khoảng cách từ G đến (SCD) là

Lời giải



Gọi M, I lần lượt là trung điểm CD, SC .

Theo giả thiết ta có tam giác ACD đều. Suy ra $AM = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$.

Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) thì $AH \perp (SCD)$.

Ta có $GI = \frac{1}{3}AI$ nên $d(G, (SCD)) = \frac{1}{3}d(A, (SCD)) = \frac{1}{3}AH$

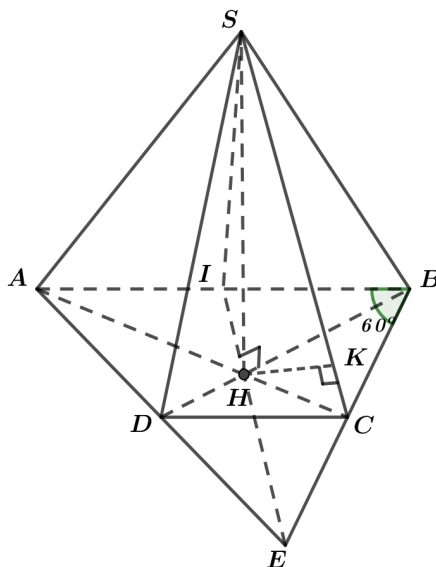
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{AM \cdot SA}{\sqrt{AM^2 + SA^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{6}a}{\sqrt{3a^2 + 6a^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{3}$$



$$\text{Vậy } d(G, (SCD)) = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° . $AB = 2CD = 2a$, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc 45° . Hình chiếu vuông góc của S lên đáy trùng với giao điểm của AC và BD . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



-Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E , lấy I là trung điểm AB . Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên đáy, kẻ HK vuông góc với SC tại K .

Xét tam giác ABE có $\widehat{ABE} = \widehat{BAE} = 60^\circ$ nên ABE là tam giác đều và H là trực tâm

$$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BC \\ HI \perp AB \\ HI = HC = \frac{1}{3}EI = \frac{1}{3}2a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$-\Delta SHA = \Delta SHB \Rightarrow SA = SB \Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow \left((SAB), (ABCD) \right) = \widehat{SIH} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow SH = IH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$-\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK, \text{ ta lại có } \begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$$

$$\text{Suy ra khoảng cách từ } H \text{ đến } (SBC) \text{ là } HK = \frac{HS \cdot HC}{\sqrt{HS^2 + HC^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

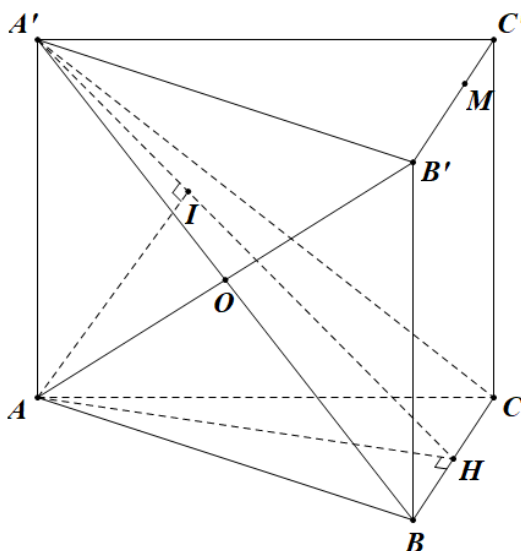


-Tam giác HAB đồng dạng với tam giác HCD và $AB = 2CD$ nên $\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{CD} = 2$

Vậy khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 3 lần khoảng cách từ H đến $(SBC) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 14: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 45° , M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác đều.

Ta có $B'C' \parallel (A'BC)$ nên $d(M, (A'BC)) = d(B', (A'BC))$.

Mà $AB' \cap (A'BC) = O$ với O là trung điểm AB' nên $d(B', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC , I là hình chiếu của A lên $A'H$, ta chứng minh được $AI \perp (A'BC)$, suy ra $d(A, (A'BC)) = AI$.

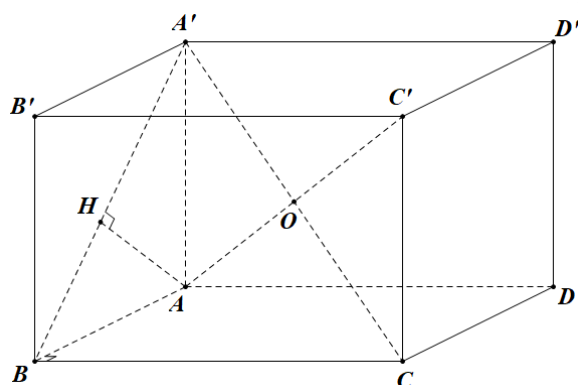
Mà $\widehat{(A'BC), (ABC)} = \widehat{A'HA} = 45^\circ$ nên tam giác $A'AH$ vuông cân tại A , do đó

$$A'H = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Mặt khác, AI là đường cao của tam giác $A'AH$ nên $AI = \frac{A'H}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 15: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D = 3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh $2a$, suy ra $BD = 2a\sqrt{2}$.

Mà $B'D = 3a \Rightarrow B'B = \sqrt{B'D^2 - BD^2} = \sqrt{9a^2 - 8a^2} = a$.

Ta có $AC' \cap (A'BC) = O$ (với O là trung điểm của AC').

Suy ra $d(C', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $A'B$, ta chứng minh được $AH \perp (A'BC)$.

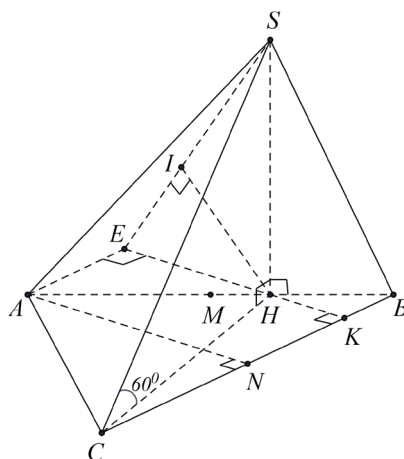
Suy ra $AH = d(A, (A'BC))$.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A và có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Lời giải



Gọi N là trung điểm BC . Trong mặt phẳng (ABC) dựng đường thẳng d qua A và song song với BC .

Ta có: $BC // AE \Rightarrow BC // (SAE) \Rightarrow d(BC, SA) = d(BC, (SAE)) = d(K, (SAE))$

Mặt khác $\frac{HB}{HA} = \frac{HK}{HE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KH}{KE} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(K, (SAE)) = \frac{3}{2}d(H, (SAE)).$

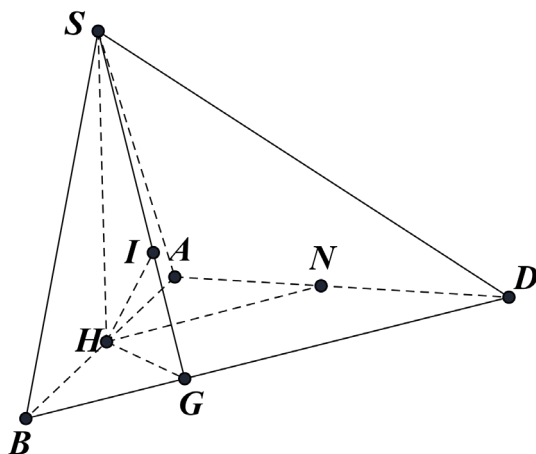
Ta có $\begin{cases} AE \perp SH \\ AE \perp KE \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHE) \Rightarrow (SHE) \perp (SAE)$

$$HI \perp (SAE) \Rightarrow d(H, (SAE)) = HI \Rightarrow d(BC, SA) = \frac{3}{2} HI.$$

$$HK = \frac{1}{3}AN \Rightarrow EH = \frac{2}{3}AN = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HI = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{42}}{4}.$$

Lời giải


$$\Rightarrow d(HN, SD) = d(HN, (SBD)) = d(H, (SBD))$$

Suy ra $HI \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HI$.



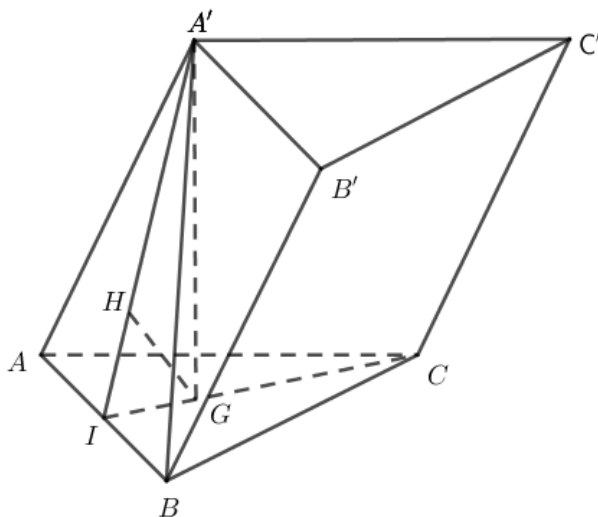
$$\text{Ta có } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Lại có } \triangle BGH \text{ đồng dạng với } \triangle BAD \text{ nên } \frac{HG}{AD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow HG = \frac{AD \cdot BH}{BD} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{5}}{10}\right)^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow d(HN, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 18: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC và diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và AB' .

Lời giải



Chọn mặt phẳng $(AA'B'A')$ chứa AB' và song song với CC' .

$$\text{Khi đó } d(AB', CC') = d(CC', (AA'B'B)) = d(C, (AA'B'B)).$$

Gọi I là trung điểm của AB . Vì tam giác ABC đều nên $CI \perp AB \Rightarrow GI \perp AB$.

$$\text{Vì } \begin{cases} A'G \perp AB \\ GI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'GI) \Rightarrow AB \perp A'I.$$

$$GI = \frac{1}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vì diện tích tam giác } A'AB \text{ bằng } \frac{a^2}{4} \text{ nên } \frac{1}{2}A'I \cdot AB = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow A'I = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Suy ra } A'G = \sqrt{A'I^2 - GI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Trong mặt phẳng $(A'GI)$ kẻ $GH \perp A'I$ ($H \in A'I$).

Khi đó $\begin{cases} GH \perp A'I \\ GH \perp AB \quad (AB \perp (A'GI)) \end{cases}$ suy ra $GH \perp (AA'B'B) \Rightarrow d(G, (AA'B'B)) = GH$.

Xét tam giác $\Delta A'GI$ vuông tại G có

$$GH \cdot A'I = A'G \cdot GI \Rightarrow d(G, (AA'B'B)) = GH = \frac{A'G \cdot GI}{A'I} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Ta lại có } \frac{d(C, (AA'B'B))}{d(G, (AA'B'B))} = \frac{CI}{GI} = 3 \Rightarrow d(C, (AA'B'B)) = 3 \cdot d(G, (AA'B'B)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB', CC') = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 19: Một quạt trần có bề dày thân quạt là 30 cm, người thợ muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ đỉnh quạt đến sàn là 3 m. Cho biết trần nhà cao 4 m, khi đó chiều dài cán quạt là:



Lời giải

Chiều dài cán quạt là: $4 - 3 - 0,3 = 0,7$ m.

Câu 20: Một cây cầu dành cho người đi bộ có mặt sàn cầu cách mặt đường 4 m (giả sử mặt sàn cầu vượt song song với mặt đường), khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 1 m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b là:



Lời giải

Gọi mặt (P) là mặt sàn cầu vượt và mặt (Q) là mặt đường.

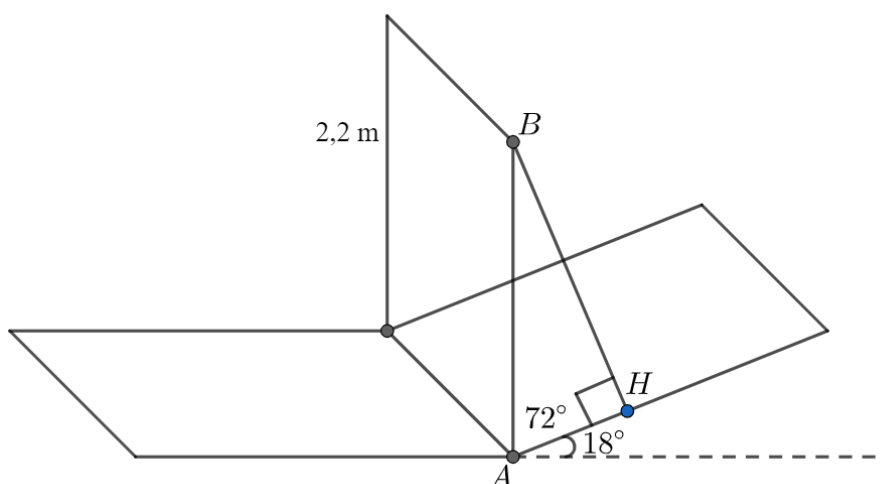
Vì $a \parallel (P), (P) \parallel (Q) \Rightarrow d(a; b) = d(a; (P)) + d((P); (Q)) = 1 + 4 = 5$ m.



Câu 21: Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung không chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,2 m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 18° so với phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa hai thanh ngang của khung và mặt đường dốc (theo đơn vị mét và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

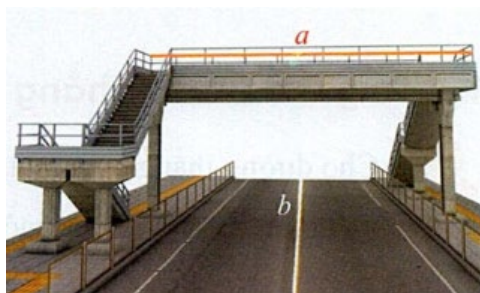


Gọi B là một điểm nằm trên thanh ngang và H là hình chiếu vuông góc của B xuống mặt dốc.

Khi đó khoảng cách giữa hai thanh ngang của khung và mặt đường dốc là BH .

Ta có $BH = AB \cdot \sin 72^\circ \approx 2,09$ m.

Câu 22: Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình bên dưới) có mặt sàn cầu cách mặt đường 3,5 m, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là 0,8 m. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .



Lời giải

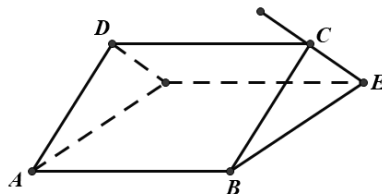


Ta có: $d(a, b) = 3,5 + 0,8 = 4,3(m)$.

Câu 23: Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

Lời giải

Gọi AB là giao tuyến của mặt phẳng mái nhà và mặt phẳng nằm ngang, AD là đường thẳng nằm trên mái nhà và vuông góc với AB , đường thẳng DE là chiếc cột vuông góc với mái nhà, đường thẳng AE nằm trên mặt phẳng nằm ngang, khi đó tam giác ADE vuông tại D , đường thẳng AE là hình chiếu vuông góc của DE trên mặt phẳng nằm ngang, mà góc DAE bằng 30° nên góc giữa hai đường thẳng DE và AE bằng 60° .

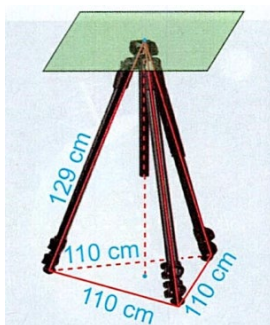


Vậy góc giữa đường thẳng DE (chiếc cột) và mặt phẳng nằm ngang bằng góc giữa hai đường DE và AE bằng 60° .

Câu 24: Giá đỡ ba chân được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng bằng 110 cm. Biết các chân của giá đỡ dài 129 cm. Hỏi chiều cao của giá đỡ bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2)?

Lời giải

Chiều cao của giá đỡ là: $\sqrt{129^2 - \left(\frac{110 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 112 (cm) = 1,12 (m)$.



QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI

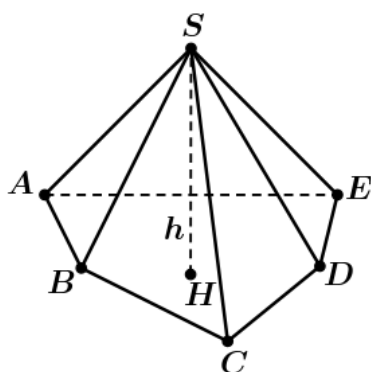
27

THỂ TÍCH

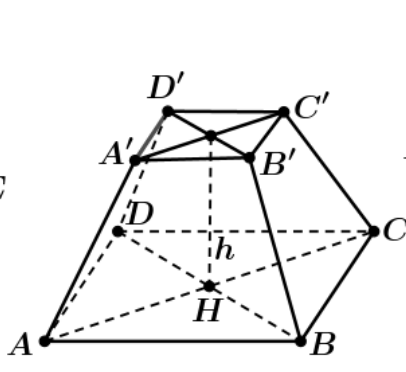
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Lý thuyết chung về thể tích

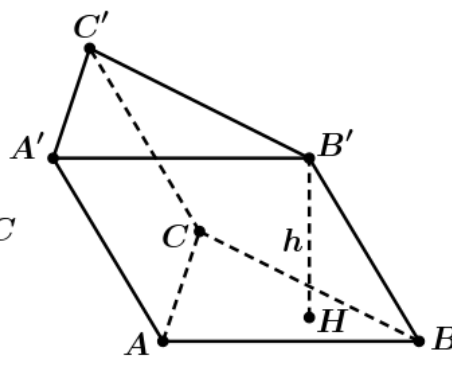
- Thể tích là một trong những khái niệm toán học xuất hiện thường xuyên trong cuộc sống, đo sự chiếm chỗ của vật thể trong không gian. Bài học này đưa ra công thức thể tích của các hình khối ứng với các hình mà ta đã học.
- Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cắt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.



$$V = \frac{1}{3}hS$$



$$V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$$



$$V = hS$$

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là: $V = \frac{1}{3}hS$.
- Thể tích của khối chóp cắt đều có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là: $V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = hS$.

Nhận xét:

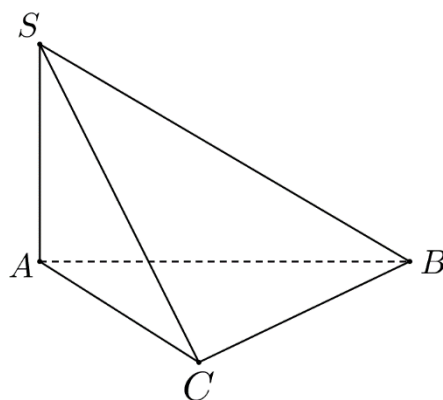
- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

**B** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1: Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy**

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao.
- Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Biết $SA = a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

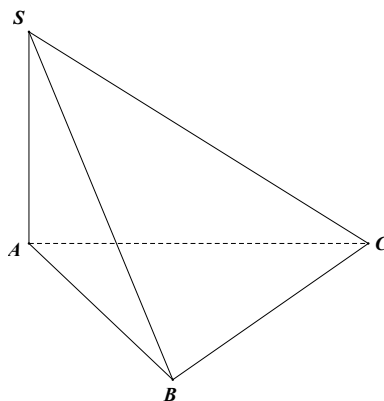


Diện tích tam giác ABC vuông cân tại A là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} 2a \cdot 2a = 2a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 2a^2 = \frac{2a^3}{3}$.

Ví dụ 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp bằng

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC).$$



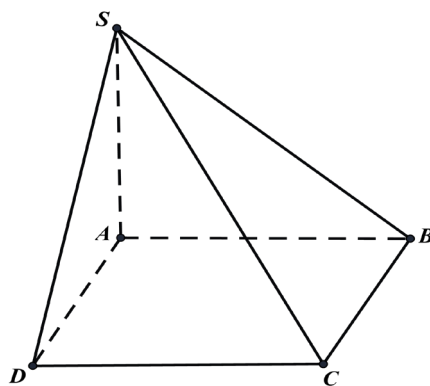
Trong tam giác SAC vuông tại A có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}SA.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (1)

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên (SAB) .

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SB})$$

Vì $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại $B \Rightarrow (\widehat{SC, SB}) = \widehat{BSC} = 30^\circ$.

Ta có $\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = 3a$.

Xét tam giác vuông SAB có $SA^2 = SB^2 - AB^2 = 9a^2 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{2}$.

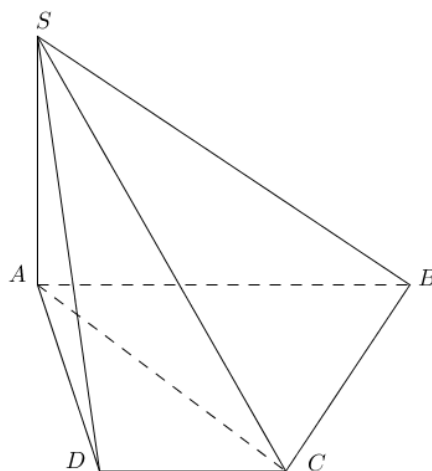
Ta có $S_{ABCD} = AB.BC = \sqrt{3}a^2$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{2}.a^2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.



Ví dụ 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$, $SA = AD = DC = a, BC = a\sqrt{7}$. Tam giác SBC vuông tại C , tam giác SCD vuông tại D . Thể tích khối chóp đã cho bằng

Lời giải



Ta có: $\left. \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp SD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD \subset (SAD)$

Suy ra, tam giác ACD vuông tại $D \Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AC \subset (SAC)$

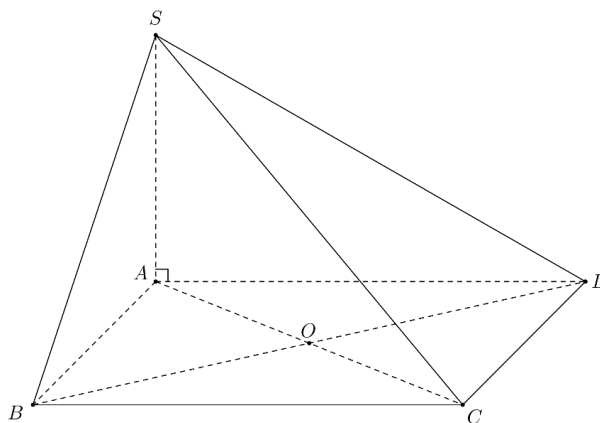
Suy ra, tam giác ABC vuông tại $C \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 7a^2} = 3a$

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{(CD + AB) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 3a) \cdot a}{2} = 2a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 2a^2 = \frac{2}{3}a^3$.

Ví dụ 5: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O ; $AC = 2AB = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SD = a\sqrt{5}$.

Lời giải





Ta có: $AC = 2AB = 2a \Rightarrow AB = a$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB \perp BC$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} \Leftrightarrow BC = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có: $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} \Leftrightarrow SA = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{2}$.

Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra SA là đường cao của khối chóp.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.AB.BC = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

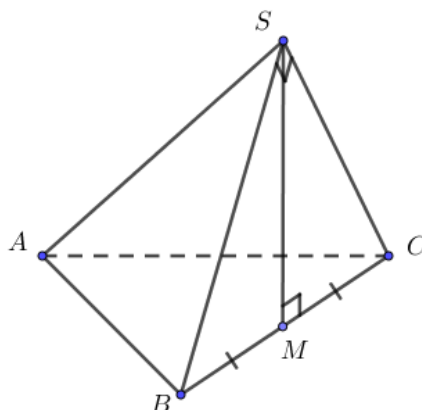
**Dạng 2: Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy**

Để xác định đường cao của khối chóp, ta sử dụng định lý sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha) \\ a \perp d \end{array} \right. \Rightarrow a \perp (\beta)$$

Ví dụ 6: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, mặt bên SBC là tam giác vuông cân tại S và (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Lời giải



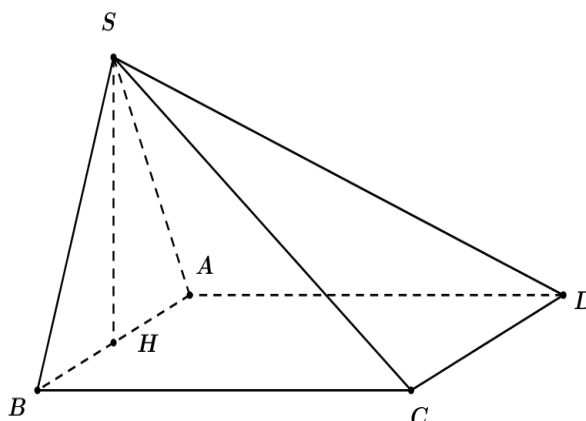
Dựng $SM \perp BC$, ta có $\left\{ \begin{array}{l} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC \\ SM \subset (SBC) \end{array} \right. \Rightarrow SM \perp (ABC).$

Do $\triangle SBC$ vuông cân ở S , suy ra $SM = \frac{1}{2}.BC = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SM.S_{SBC} = \frac{1}{3}.a.\frac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải





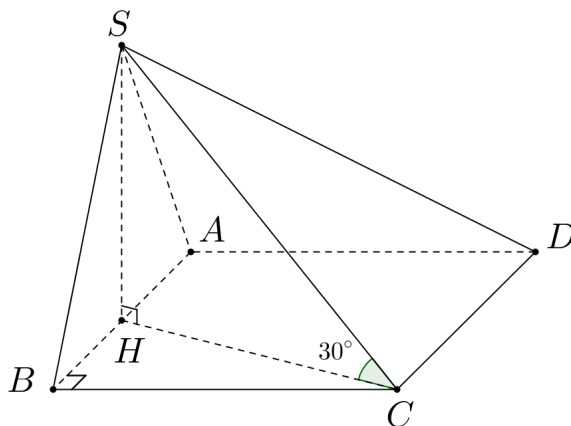
Lấy $H \in AB$ sao cho $SH \perp AB$ (do tam giác SAB đều nên H cũng là trung điểm của AB)

$$\begin{cases} SH \perp AB \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \\ SH \subset (SAB) \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $\triangle SAB$ đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết SC tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB . Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Suy ra $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH} = 30^\circ$.

Vì SH là đường cao của tam giác đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow CH = SH \cdot \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

Trong tam giác vuông BHC , ta có: $BC^2 = HC^2 - HB^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

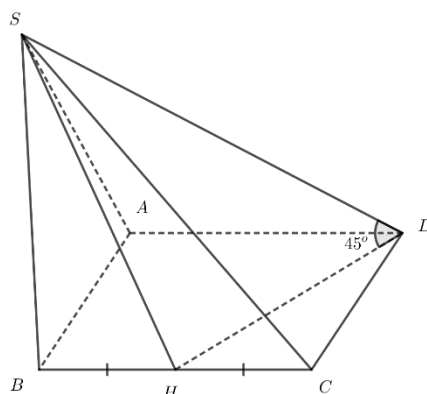
Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Vậy thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.



Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SBC đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ biết góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



Gọi H là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow SH \perp BC$. Mà $(SBC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $(\widehat{SD, (ABCD)}) = \widehat{SDH} = 45^\circ$.

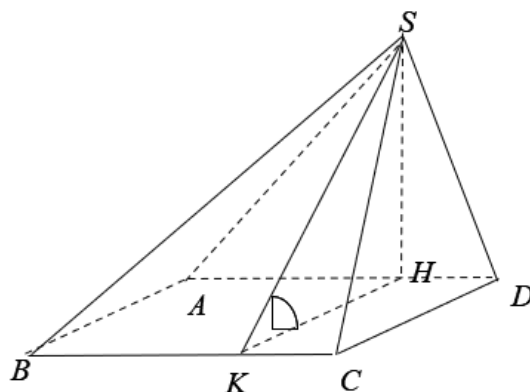
Tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SHD vuông cân tại $H \Rightarrow HD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $CD = \sqrt{DH^2 - CH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot BC \cdot CD = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $AB = a$, $SA = 2SD$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S trên AD và K là hình chiếu của H trên BC .

Ta có: $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ SH \perp AD \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.



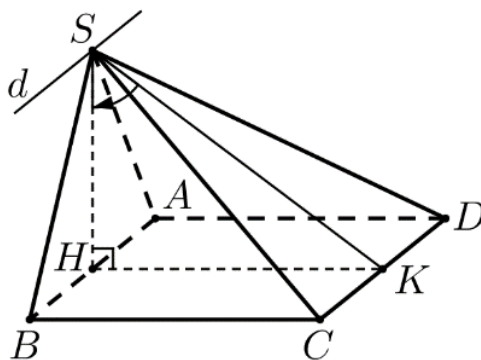
$$\left. \begin{array}{l} HK \perp BC \\ SH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp SK. \text{ Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng } (SBC) \text{ và } (ABCD) \text{ là góc } \widehat{SKH} = 60^\circ, SH = HK \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SD^2} \Rightarrow \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{4SD^2} \Rightarrow SD = \frac{\sqrt{15}a}{2}, SA = a\sqrt{15}, AD = \frac{5\sqrt{3}a}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{5\sqrt{3}a}{2} = \frac{5a^3}{2}.$$

Ví dụ 11: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 2a$ nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Biết $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

Lời giải



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD .

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

$$\text{Vì } \begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = d \\ SH \perp d, SH \subset (SAB). \text{ Do đó } ((SAB), (SCD)) = (\widehat{SH, SK}) = \widehat{HSK}. \\ SK \perp d, SK \subset (SCD) \end{cases}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SHK, \text{ có } \tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \frac{2a}{SH} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow SH = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác đều } SAB \text{ có: } SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = a\sqrt{6}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ bằng } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{6} \cdot 2a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

**Dạng 3: Thể tích khối chóp đều**

Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Trong hình chóp đều:

- Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

Chú ý:

- Đề bài cho hình chóp tam giác đều (tứ giác đều) ta hiểu là hình chóp đều.
- Hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều vì hình chóp tam giác đều thì bản thân nó có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nói một cách khác, hình chóp tam giác đều thì suy ra hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại là không đúng.
- Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

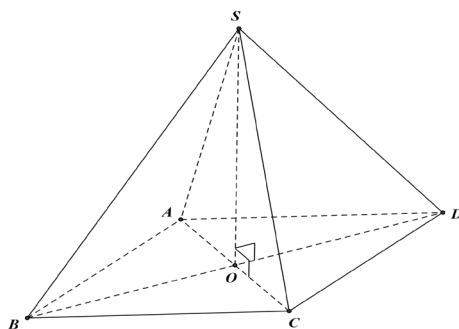
Công thức tính thể tích khối chóp đều và một số công thức giải nhanh:

- Chiều cao h khối chóp xác định bởi $h = \sqrt{b^2 - R_d^2}$, trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và b là độ dài cạnh bên.
- Khối tứ diện đều cạnh a có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ và $V = \frac{\sqrt{3}h^3}{8}$, trong đó $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ là chiều cao khối tứ diện đều.
- Khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$
- Khối chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2\sqrt{2(2b^2 - a^2)}}{6}$
- Khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a , có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$
- Khối bát diện đều cạnh a là hợp của hai khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a có $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$
- Khối chóp lục giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b có $V = \frac{a^2\sqrt{3(b^2 - a^2)}}{2}$

Ví dụ 12: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích của khối chóp tương ứng tính theo a sẽ bằng

Lời giải

Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ như hình vẽ.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.



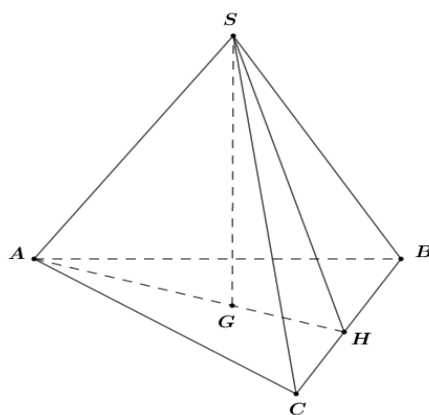
Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = OB = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Ví dụ 13: Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp đó bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có $SG \perp (ABC)$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

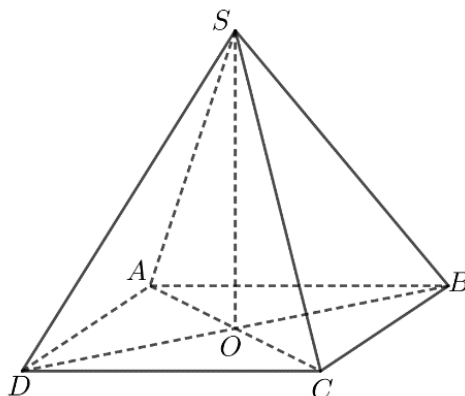
$(\widehat{SA, (ABC)}) = \widehat{SAG} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SGA , ta có $SG = AG \cdot \tan \widehat{SAG} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Ví dụ 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{5}a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải





Ta có: $BO = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{2}a$.

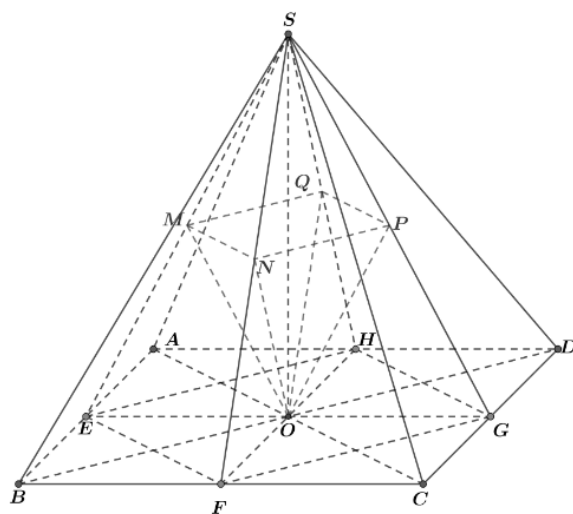
$$BD = 2BO = 2\sqrt{2}a \Rightarrow AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = 2a.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} (2a)^2 \cdot \sqrt{3}a = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3.$$

Ví dụ 15: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy.

Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCD) và (SDA) . Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

Lời giải



Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow (SAB) \perp (SOE).$$

Mặt khác: $(SAB) \cap (SOE) = SE$ đồng thời M là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (SAB) nên $OM \perp SE$ tại M .

$$\text{Ta có: } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2} = OE.$$

Khi đó tam giác SOE vuông cân tại $O \Rightarrow M$ là trung điểm SE .

Chứng minh tương tự ta cũng có N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SF, SG, SH .

$$\text{Khi đó } d(O, (MNPQ)) = d(S, (MNPQ)) = \frac{1}{2} SO = \frac{3a}{4}, S_{MNPQ} = \frac{1}{4} S_{EFGH} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{9a^2}{8}.$$

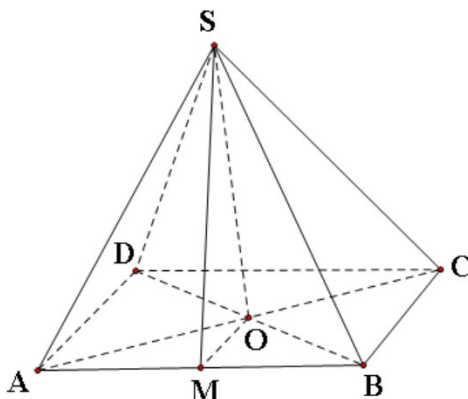
$$\text{Suy ra } V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot d(O, (MNPQ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{9a^2}{8} = \frac{9a^3}{32}.$$

$$\text{Vậy } V_{O.MNPQ} = \frac{9a^3}{32}.$$



Ví dụ 16: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có diện tích xung quanh gấp 2 lần diện tích đáy, diện tích đáy bằng $4a^2$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ tương ứng bằng

Lời giải



Diện tích hình vuông $ABCD$: $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a$.

Gọi M là trung điểm cạnh AB .

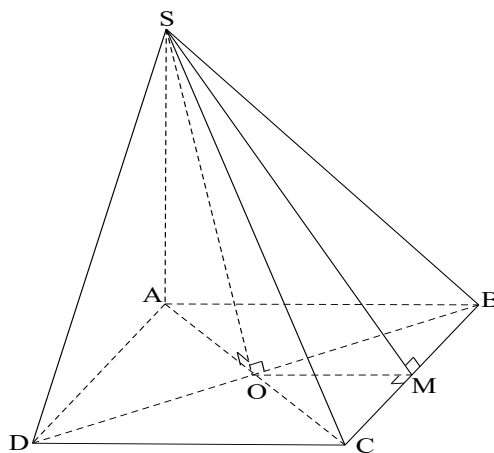
Diện tích xung quanh của khối chóp $S.ABCD$: $4.S_{\Delta SAB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot SM \cdot AB = 8a^2 \Rightarrow SM = 2a$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $ABCD$, trong tam giác vuông SOM có $SO^2 = SM^2 - OM^2 = 3a^2 \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



$ABCD$ là hình vuông có tâm O và cạnh bằng x .

Gọi M là trung điểm của BC . Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMO}$ bằng 60° .

$$\text{Ta có } SM^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{4}, SO^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{2}.$$



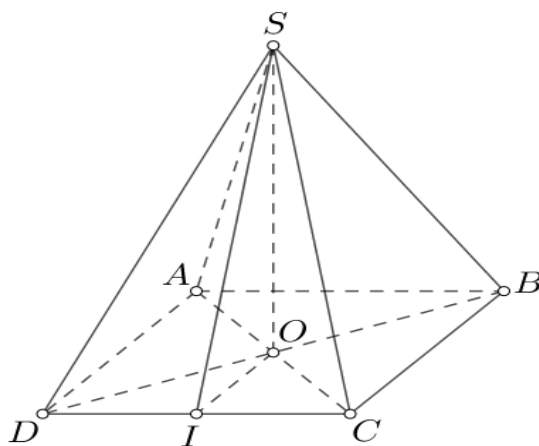
$$\text{Và } \cos \widehat{SMO} = \frac{OM}{SM} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{x^2}{4}}{4a^2 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{4a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Suy ra } SO = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot AB^2 = \frac{32\sqrt{3}a^3}{15\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 18: Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và diện tích xung quanh bằng $8a^2$. Thể tích của khối chóp đó bằng

Lời giải



Xét hình chóp $S.ABCD$ thỏa các giả thiết. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm CD . Ta có $S_{SCD} = \frac{1}{2} SI \cdot CD \Rightarrow 2a^2 = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot 2a \Rightarrow SI = 2a$.

Dễ thấy $OI = a$ và tam giác SOI vuông tại O . Suy ra $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = a\sqrt{3}$.

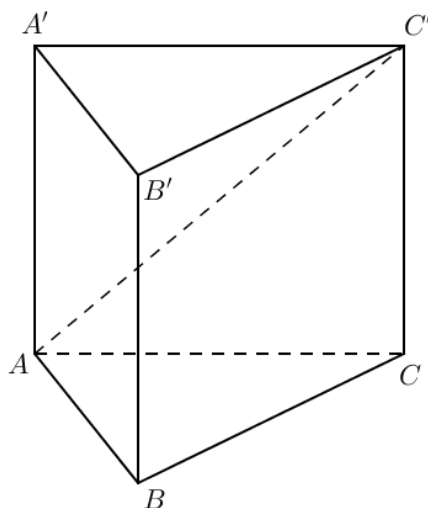
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3.$$



Dạng 4: Thể tích khối lăng trụ đứng

Ví dụ 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C} = 45^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải



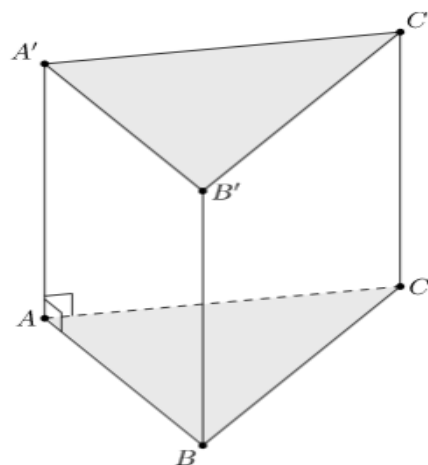
Trong $\triangle ACC'$ có $AC = AC' \cdot \sin \widehat{AC'C} = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$; $CC' = AC' \cdot \cos \widehat{AC'C} = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$.

Trong $\triangle BAC$ có $AC^2 = BA^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 2BA^2 \Rightarrow BA = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = CC' \cdot \frac{1}{2} \cdot BA^2 = a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Ví dụ 20: Cho khối lăng trụ tam giác đều, cạnh bên có độ dài gấp hai lần cạnh đáy. Biết tổng diện tích các mặt của khối lăng trụ là $(12 + \sqrt{3})a^2$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho

Lời giải



Đặt độ dài một cạnh của tam giác đều ABC là x . Do độ dài của cạnh bên của hình lăng trụ gấp hai lần cạnh đáy nên hình chữ nhật $ABB'A'$ có $AB = x$; $AA' = 2x$. Diện tích xung quanh của



khối lăng trụ là $S_1 = 3.x.2x = 6x^2$

Diện tích hai đáy của khối lăng trụ là $S_2 = 2.\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

Tổng diện tích các mặt của trụ tam giác đều là

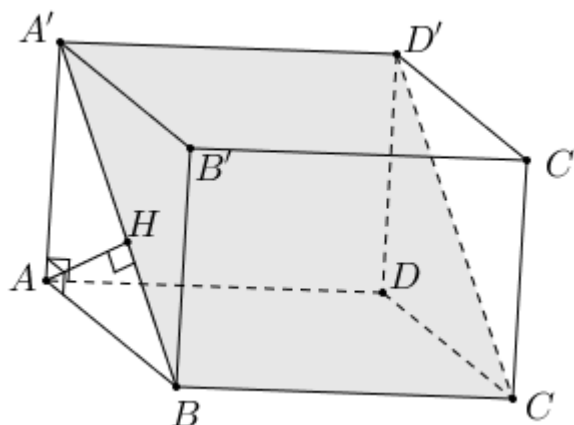
$$S = S_1 + S_2 = 6x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{(12 + \sqrt{3})}{2}x^2 = (12 + \sqrt{3})a^2. \text{ Suy ra } x = \sqrt{2}.a$$

Diện tích một đáy của khối lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Thể tích khối lăng trụ $V = AA' \cdot S_{ABC} = 2.a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \sqrt{6}a^3$

Ví dụ 21: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $A'BCD'$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a .

Lời giải



Ta có: $\left. \begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp BB' \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow (A'BCD') \perp (AA'B'B).$

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'B$, suy ra $\left. \begin{matrix} AH \perp BC \\ AH \perp A'B \end{matrix} \right\} \Rightarrow AH \perp (A'BCD').$

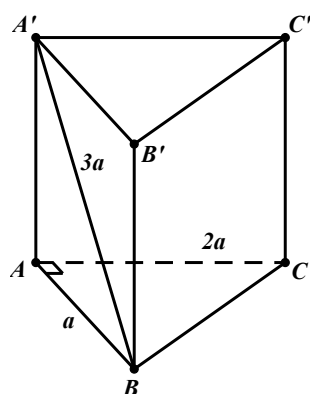
Như vậy AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BCD') \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác $AA'B$, ta có $\frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{4}{3a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3a^2}$ do vậy $AA' = a\sqrt{3}$

Khi đó thể tích hình hộp là: $V = S_{ABCD} \cdot AA' = a^2 \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}.$

Ví dụ 22: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



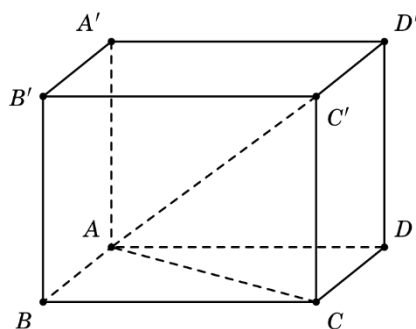
Diện tích đáy là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$.

Tam giác ABA' vuông tại A nên có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích cần tính là $V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = a^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^3$.

Ví dụ 23: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AC' = \sqrt{6}a$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

Lời giải



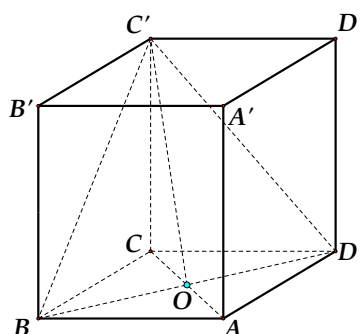
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{6})^2 - (a\sqrt{5})^2} = a$$

Diện tích mặt đáy là $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2$.

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC' S_{ABCD} = a \cdot 2a^2 = 2a^3$.

Ví dụ 24: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $AC = 2\sqrt{2}a$, góc giữa hai mặt phẳng $(C'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng:

Lời giải





Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Dễ thấy $AC \perp BD$ tại O và $BD \perp CC'$

Suy ra $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp OC'$.

Suy ra $[(C'BD), (ABCD)] = (OC', OC) = 45^\circ \Rightarrow CC' = OC = \frac{AC}{2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC' \cdot \left(\frac{AC}{\sqrt{2}}\right)^2 = a\sqrt{2} \cdot 4a^2 = 4\sqrt{2}a^3$.

Ví dụ 25: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

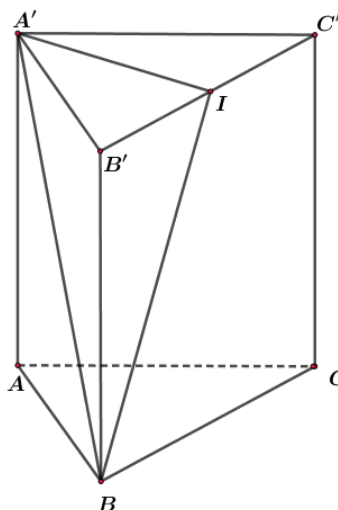
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

B. $\frac{3}{4}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'I \perp B'C'$.

Khi đó $\begin{cases} A'I \perp B'C' \\ A'I \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'I \perp (BB'C'C) \Rightarrow (A'B, (BB'C'C)) = (A'B, BI) = \widehat{A'BI} = 30^\circ$

Đặt $h = BB'$. Ta có $\tan 30^\circ = \frac{A'I}{BI} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow h = a\sqrt{2}$

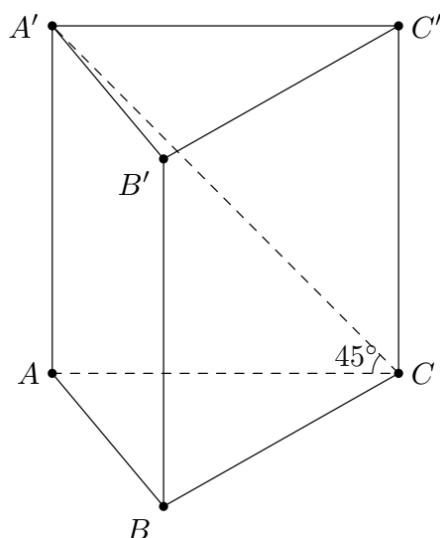
Suy ra thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.



Dạng 5: Thể tích khối lăng trụ đều

Ví dụ 26: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải

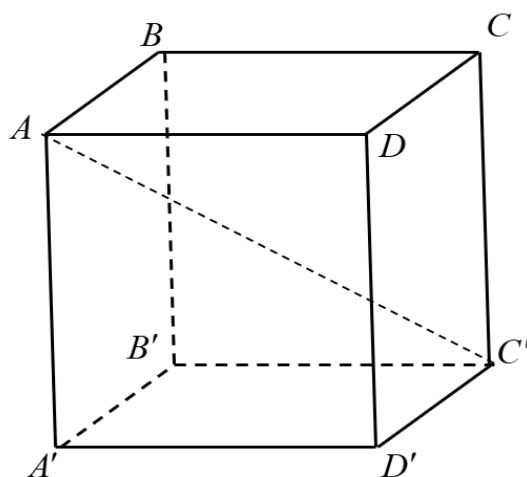


Ta có $\widehat{(A'C, (ABC))} = \widehat{A'CA} = 45^\circ$ nên $\triangle AA'C$ vuông cân tại A suy ra $AA' = AC = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = Sh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 27: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$

Lời giải



Gọi cạnh của hình lập phương là x , khi đó ta có:

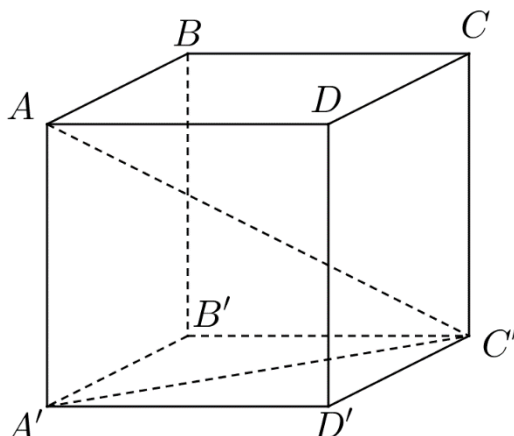
$$AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2 \Leftrightarrow AC'^2 = AA'^2 + AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + x^2 + x^2 \Leftrightarrow x = a.$$

Vậy thể tích của hình lập phương là $V = a^3$.



Ví dụ 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải



Gọi cạnh hình lập phương có độ dài x .

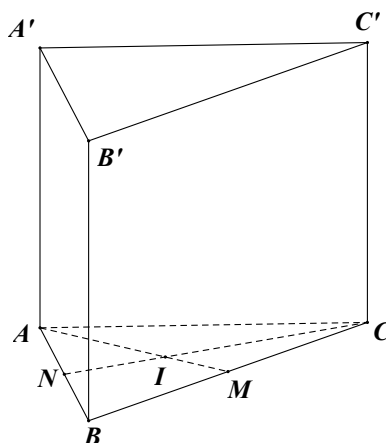
Xét tam giác $A'B'C'$ vuông tại B' có $A'C' = x\sqrt{2}$.

Xét tam giác $AA'C'$ vuông tại A' có $AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = x\sqrt{3}$ suy ra $x\sqrt{3} = 2a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2a$

Vậy thể tích hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = 8a^3$.

Ví dụ 29: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$. Đáy ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R = a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC , N là trung điểm của AB và $I = AM \cap CN$. Đặt $AB = x$.

Đáy ABC là tam giác đều và nội tiếp đường tròn bán kính $R = a$ nên $AI = a$, suy ra $AM = \frac{3}{2}AI = \frac{3}{2}a$.

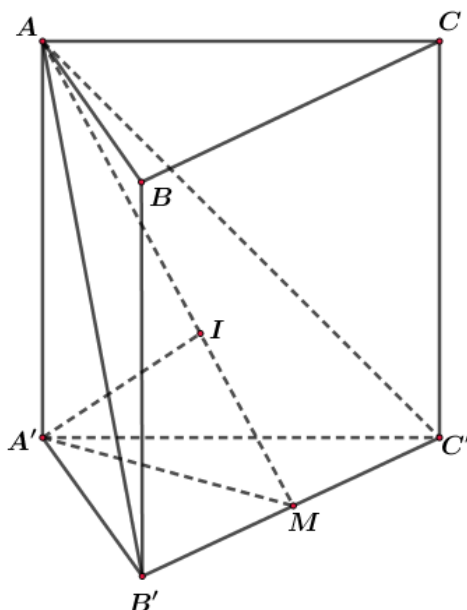
Khi đó, $AM^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2}AM \cdot BC \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}a \cdot \sqrt{3}a \cdot 2a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$.



Ví dụ 30: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng a . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và I là hình chiếu của A' lên AM . Khi đó ta có

$$\begin{cases} B'C' \perp A'M \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'MA) \Rightarrow B'C' \perp A'I \quad (1)$$

$$\text{Mà } AM \perp A'I \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } A'I \perp (AB'C') \Rightarrow d(A', (AB'C')) = A'I = a.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } AA'M : \frac{1}{A'I^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{A'M^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

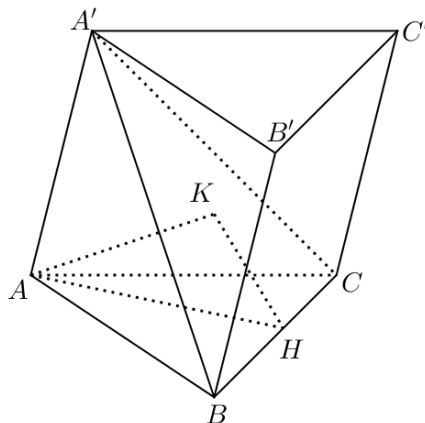
$$\Rightarrow \text{Thể tích khối lăng trụ đã cho là } V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{2}.$$



Dạng 5: Thể tích khối lăng trụ xiên

Ví dụ 31: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác $A'BC$ bằng 4, khoảng cách từ A đến BC bằng 3, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



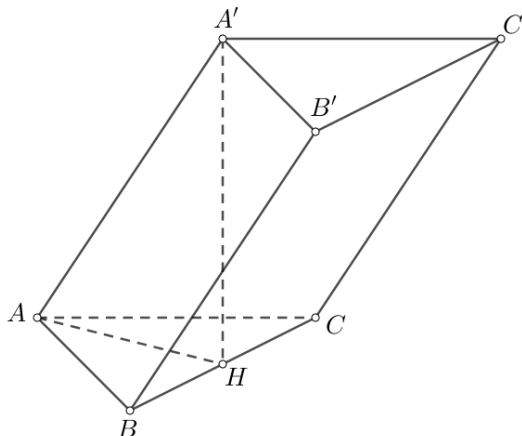
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC và $(A'BC)$.

Khi đó $\widehat{((A'BC), (A'B'C'))} = \widehat{((A'BC), (ABC))} = \widehat{AHK} = 30^\circ \Rightarrow AK = AH \cdot \sin 30^\circ = \frac{3}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'.ABC} = 3V_{A.A'BC} = AK \cdot S_{\Delta A'BC} = 6$.

Ví dụ 32: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC .

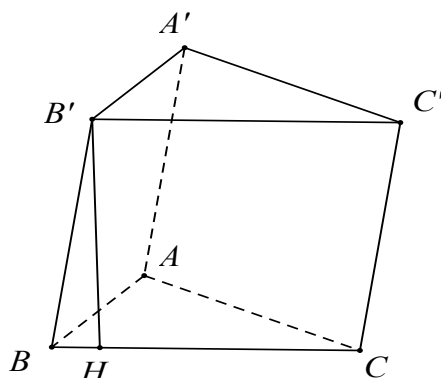
Khi đó $\widehat{(AA', (ABC))} = \widehat{(AA', BH)} = \widehat{A'AH} = 30^\circ$.

Suy ra $A'H = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$. Vậy $V = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.



Ví dụ 33: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ bằng

Lời giải



Ta có $(BCC'B') \perp (ABC)$ (theo giả thiết).

Hạ $B'H \perp BC \Rightarrow B'H \perp (ABC)$ và $\widehat{B'BH} = \widehat{B'BC} = 30^\circ$.

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $h = B'H = BB' \cdot \sin 30^\circ = 2a$.

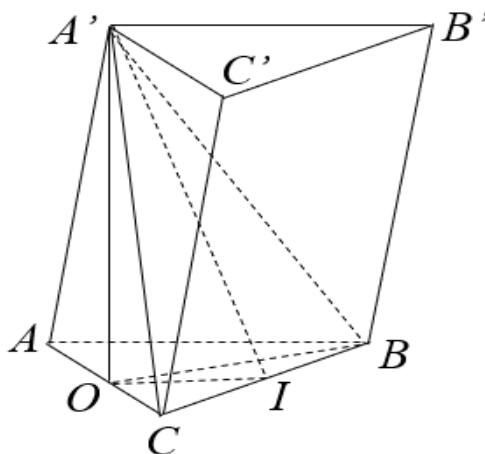
Do đáy là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow$ Diện tích đáy là $S_{\text{đáy}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{LT} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là $V = \frac{1}{3}V_{LT} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 34: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $A'A = A'B = A'C$. Biết rằng $AB = a$ và $BC = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Gọi O, I lần lượt là trung điểm của đoạn AC, BC .



Nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $OI \perp BC$.

Do $A'A = A'B = A'C$ nên $A'O \perp (ABC)$.

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; \quad OI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

$$A'O \perp BC, OI \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'OI) \Rightarrow BC \perp A'I.$$

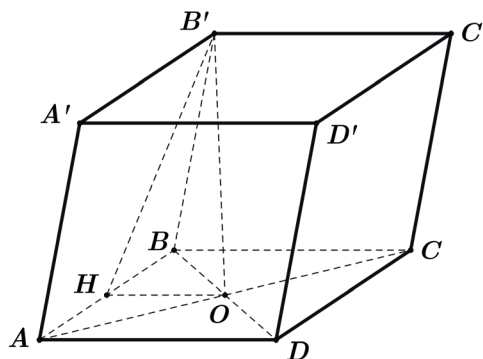
$$\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'I \subset (A'BC), A'I \perp BC \Rightarrow \widehat{((A'BC), (ABC))} = \widehat{(A'I, OI)} = \widehat{A'IO} = 60^\circ. \\ OI \subset (ABC), OI \perp BC \end{cases}$$

$$\text{Tam giác } A'IO \text{ vuông tại } O \text{ nên } \tan \widehat{A'IO} = \frac{A'O}{OI} \Rightarrow A'O = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = A'O \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{4}.$$

Ví dụ 35: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu của B' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD , biết góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD . Kẻ $OH \perp AB$.

Theo giả thiết suy ra $\widehat{B'HO} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } B'O = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

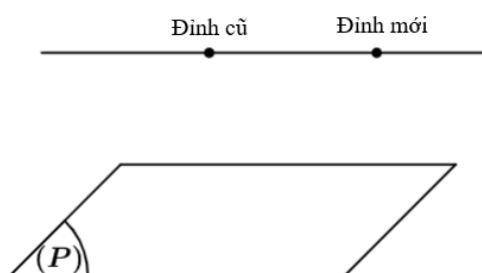
$$\text{Thể tích khối lăng trụ } V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

**Dạng 6: Tỷ số thể tích khối đa diện**

Chú thích: V_1 = Thể tích cũ; V_2 = Thể tích mới (Dùng cho kỹ thuật chuyển đỉnh và đáy)

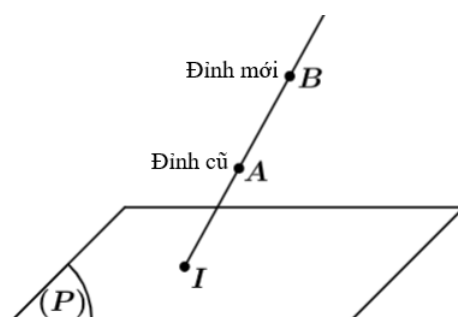
1. Kỹ thuật đổi đỉnh (Đáy không đổi)

a) Song song với đáy:



Khi đó: $V_1 = V_2 = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$

b) Cắt đáy:



Khi đó: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(A; (P)) \cdot S_d}{\frac{1}{3} \cdot d(B; (P)) \cdot S_d} = \frac{IB}{IA}$

2. Kỹ thuật chuyển đáy (Đường cao không đổi)

Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$ với S_1 là diện tích đáy cũ; S_2 là diện tích đáy mới.

Chú ý:

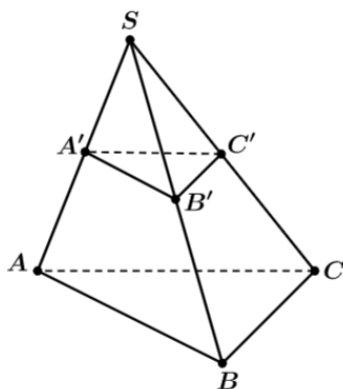
- Đưa hai khối đa diện về cùng một đỉnh; hai đáy mới và cũ nằm trong cùng một mặt phẳng (thường thì đáy cũ chứa đáy mới). Áp dụng công thức tính diện tích của đa giác để so sánh tỉ số giữa đáy cũ và đáy mới.
- Nếu tăng (hoặc giảm) mỗi cạnh của đa giác (tam giác, tứ giác) k lần thì diện tích đa giác sẽ tăng (hoặc giảm) k^2 lần.

3. Một số kết quả quan trọng

Kết quả 1: Cho tam giác OAB . Gọi A' , B' lần lượt nằm trên các cạnh OA và OB . Khi đó:

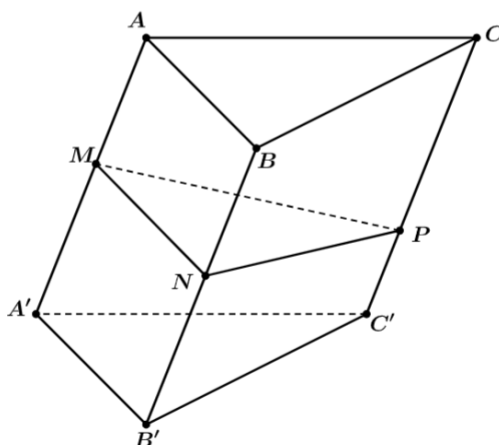
$$\frac{S_{\triangle OA'B'}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB}$$

Kết quả 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A' , B' , C' lần lượt nằm trên các cạnh SA , SB và SC .



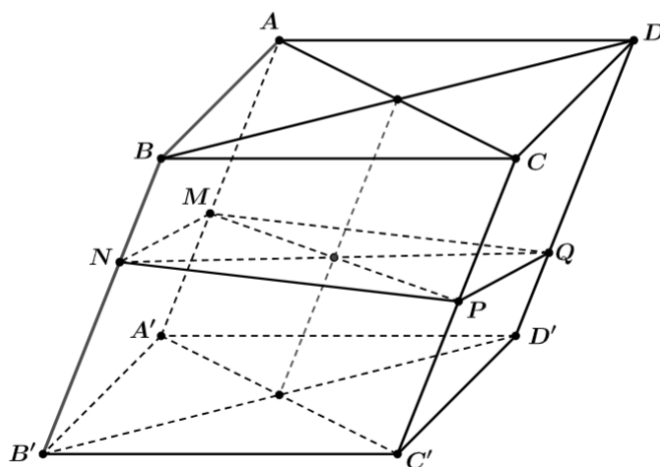
Khi đó: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$

Kết quả 3: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh bên AA' , BB' và CC' lần lượt lấy các điểm M, N, P



Giả sử: $\frac{A'M}{A'A} = x; \frac{B'N}{B'B} = y; \frac{C'P}{C'C} = z$ thì khi đó $\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}} = \frac{x+y+z}{3}$

Kết quả 4: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh bên AA' , BB' , CC' và DD' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho M, N, P, Q đồng phẳng.

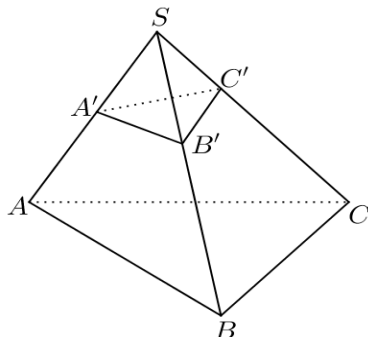


Giả sử: $\frac{A'M}{A'A} = x; \frac{B'N}{B'B} = y; \frac{C'P}{C'C} = z; \frac{D'Q}{D'D} = t$ thì khi đó $x+z = y+t$ và $\frac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}} = \frac{x+y+z+t}{4}$



Ví dụ 36: Cho khối chóp $S.ABC$. Trên ba cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $SA = 2SA', SB = 3SB', SC = 4SC'$. Mặt phẳng $(A'B'C')$ chia khối chóp thành hai khối. Gọi V và V' lần lượt là thể tích các khối đa diện $S.A'B'C'$ và $ABC.A'B'C'$. Khi đó tỉ số $\frac{V}{V'}$ là:

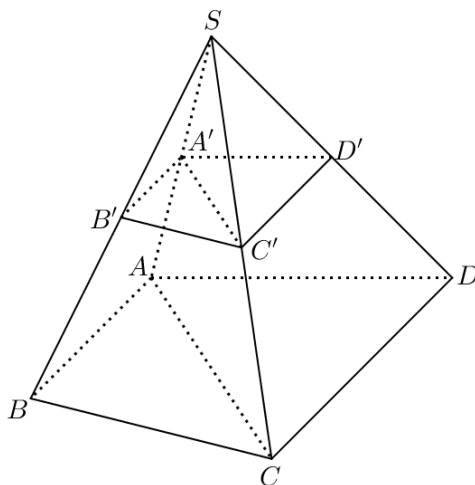
Lời giải



$$\text{Ta có } \frac{V}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{1}{23}.$$

Ví dụ 37: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

Lời giải

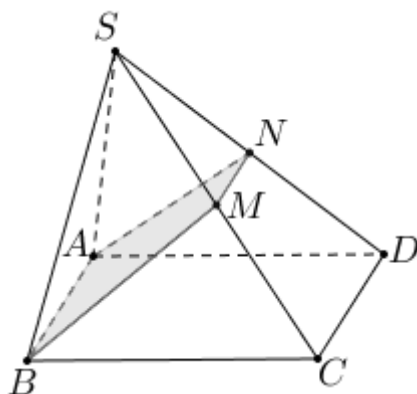


$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{8}; \frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Khi đó } V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{8}(V_{S.ABC} + V_{S.ACD}) = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$$

Ví dụ 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC . Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải



Gọi $N = (\alpha) \cap SD \Rightarrow MN \parallel CD$, suy ra N là trung điểm của SD .

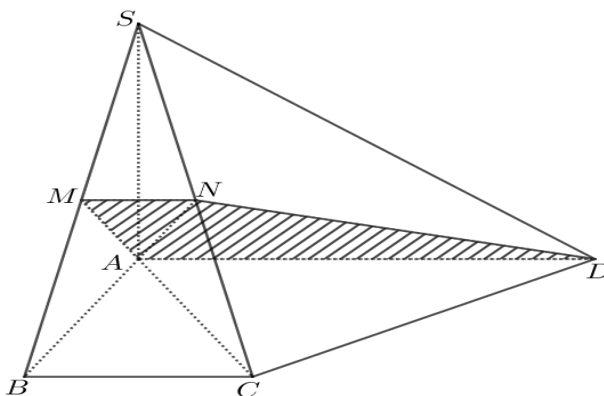
$$\text{Ta có } a = \frac{SA}{SA} = 1, b = \frac{SB}{SB} = 1, c = \frac{SC}{SM} = 2, d = \frac{SD}{SN} = 2.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{1+1+2+2}{4.1.1.2.2} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{V_{ABCDMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Vậy } V_1 = V_{S.ABMN}, V_2 = V_{ABCDMN} \text{ và } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$$

Ví dụ 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . $AB = BC = 2a$, $AD = 4a$. Mặt phẳng (α) đi qua A và trung điểm các cạnh SB , SC chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S , V' là thể tích khối đa diện không chứa đỉnh S . Tỉ số $\frac{V}{V'}$ bằng

Lời giải



Ta có: MN là đường trung bình của tam giác $SBC \Rightarrow MN \parallel BC \parallel AD$.

Mặt phẳng (α) đi qua A và chứa $MN \parallel BC$ nên $(\alpha) \cap (ABCD) = AD$.

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thang $AMND$.

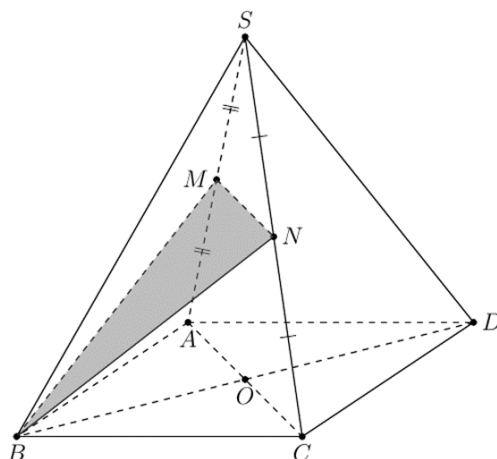
$$\text{Ta có: } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \\ S_{\triangle ACD} = \frac{2}{3} S_{ABCD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} \\ V_{S.ACD} = \frac{2}{3} V_{S.ABCD} \end{cases}.$$



$$V = V_{S.AMN} + V_{S.AND} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ABC} + \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ACD} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} + \frac{1}{2} V_{S.ACD} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} V_{S.ABCD} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} V_{S.ABCD} \right)$$

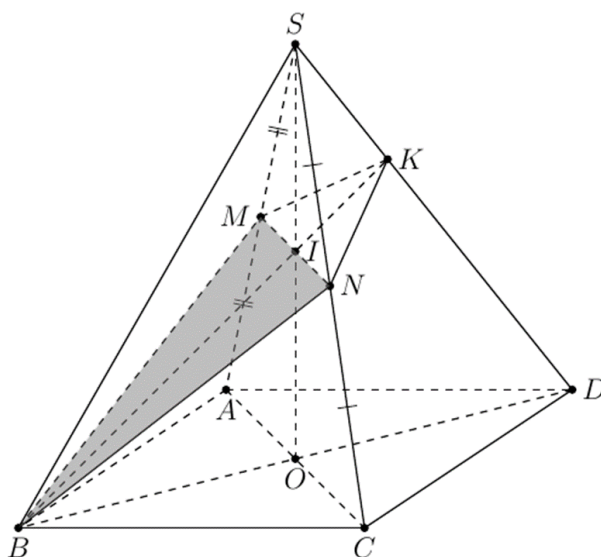
$$= \frac{5}{12} V_{S.ABCD} \Rightarrow V' = V_{S.ABCD} - V = \frac{7}{12} V_{S.ABCD}. \text{ Do đó, } \frac{V}{V'} = \frac{5}{7}.$$

Ví dụ 40: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên $SA = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA, SC . Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại K .



Thể tích khối chóp $S.MNK$ bằng

Lời giải



Gọi $I = MN \cap SO$, suy ra I là trung điểm SO .

Gọi $K = BI \cap SD$, suy ra $K = (BMN) \cap SD$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SOD , cắt tuyến BIK .

$$\frac{BO}{BD} \cdot \frac{IS}{IO} \cdot \frac{KD}{KS} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{KD}{KS} = 1 \Rightarrow \frac{KD}{KS} = 2.$$

$$AB = a \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$



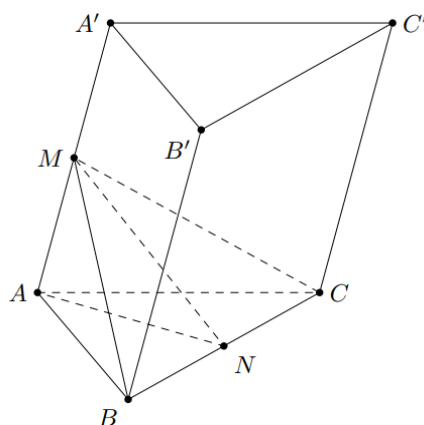
$$V_{S.ACD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{12}.$$

$$\frac{V_{S.MNK}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.MNK} = \frac{1}{12} V_{S.ACD} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^3\sqrt{14}}{12} = \frac{a^3\sqrt{14}}{144}.$$

Ví dụ 41: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi M , N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và BC . Biết khối tứ diện $AMNB$ có thể tích là $3a^3$. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

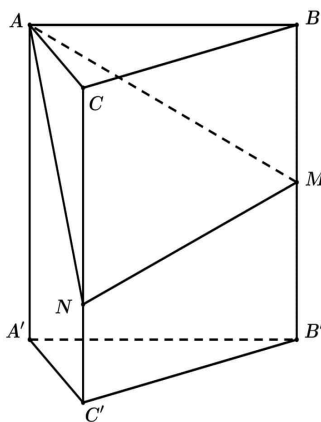


Gọi V là thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$

$$\text{Ta có } V_{M.ABN} = \frac{1}{2} V_{M.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{A'.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} V = \frac{1}{12} V \text{ nên } V = 12V_{AMNB} = 36a^3.$$

Ví dụ 42: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M là trung điểm cạnh BB' , điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Khối chóp $A.BCNM$ có thể tích là V_1 . Tính $\frac{V_1}{V}$.

Lời giải



Diện tích hình thang $BCNM$:

$$S_{BCNM} = \frac{1}{2} (BM + CN) \cdot d(B; CC') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} CC' + \frac{2}{3} CC' \right) \cdot d(B; CC') = \frac{7}{12} \cdot CC' \cdot d(B; CC')$$



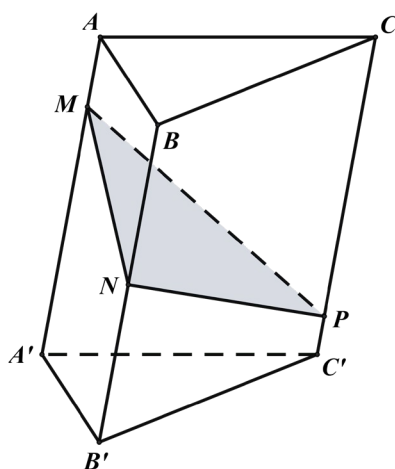
$$= \frac{7}{12} S_{BCC'B'}$$

$$\text{Khi đó: } V_1 = \frac{7}{12} V_{A.BCC'B'} = \frac{7}{12} (V - V_{A.A'B'C'}) = \frac{7}{12} \left(V - \frac{1}{3} \cdot d(A; (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} \right) \setminus$$

$$= \frac{7}{12} \left(V - \frac{1}{3} V \right) = \frac{7V}{18}. \text{ Suy ra } \frac{V_1}{V} = \frac{7}{18}$$

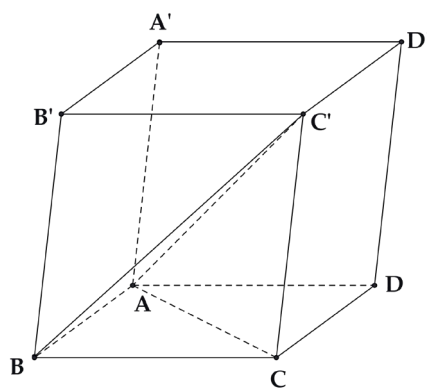
Cách 2: Áp dụng công thức

$$\text{Nếu } \frac{AM}{AA'} = a; \frac{BN}{BB'} = b; \frac{CP}{CC'} = c \text{ thì } \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}(a+b+c)$$



$$\text{Khi đó: } \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} \left(\frac{CN}{CC'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{AA'}{AA'} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{7}{18}.$$

Ví dụ 43: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Thể tích của khối tứ diện $ABC'C$ bằng



Lời giải

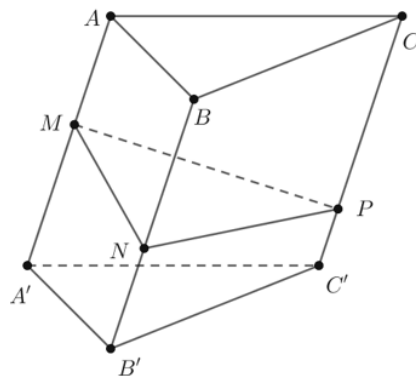
$$\text{Ta có } V_{ABC'C} = \frac{1}{3} \cdot d(C', (ABC)) \cdot S_{ABC}$$

$$= \frac{1}{3} d(C', (ABC)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{6} d(C', (ABC)) \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{6}.$$



Ví dụ 44: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{BN}{BB'} = x, \frac{CP}{CC'} = y$. Biết thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{2V}{3}$. Giá trị lớn nhất của xy bằng:

Lời giải



$$\text{Ta có } V_{ABC.MNP} = V_{M.ABC} + V_{M.NBCP} = \frac{1}{3}d(M, (ABC))S_{ABC} + \frac{1}{3}d(M, (NBCP))S_{NBCP}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{AM}{AA'} d(A', (ABC))S_{ABC} + \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) d(A, (NBCP))S_{BB'C'C}$$

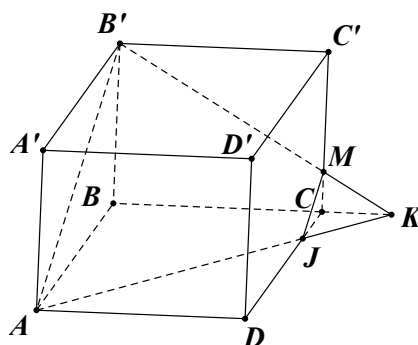
$$= \frac{1}{3} \frac{AM}{AA'} V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{3} \left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}}{3} = \frac{1}{3} + x + y = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x + y = \frac{5}{3} \Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{25}{36}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{5}{6}$

Ví dụ 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $CC' = 4CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối lập phương thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 . Gọi V_2 là phần có chứa điểm B . Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải





Gọi $K = MB' \cap BC$; $J = AK \cap CD$ và V là thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

$$\text{Ta có } \frac{CK}{B'C'} = \frac{CM}{MC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KM}{KB'} = \frac{KJ}{KA} = \frac{KC}{KB} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } V_2 = V_{B'.ABK} - V_{K.CMJ}; \quad \frac{V_{K.CMJ}}{V_{K.BB'A}} = \frac{KC}{KB} \cdot \frac{KM}{KB'} \cdot \frac{KJ}{KA} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{63}{64} V_{B'.ABK}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} d(A, BK).BK = \frac{1}{2} d(A, BK) \cdot \frac{4}{3} BC = \frac{2}{3} S_{ABCD} \Rightarrow V_{B'.ABK} = \frac{2}{9} V.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{7}{32} V \Rightarrow V_1 = \frac{25}{32} V \Rightarrow k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{7}.$$

**C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{3}{4}a^3$.

B. $V = a^3$.

C. $V = 2a^3\sqrt{2}$.

D. $V = \frac{1}{2}a^3$.

Lời giải**Chọn B**

$$V = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (2a)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = a^3.$$

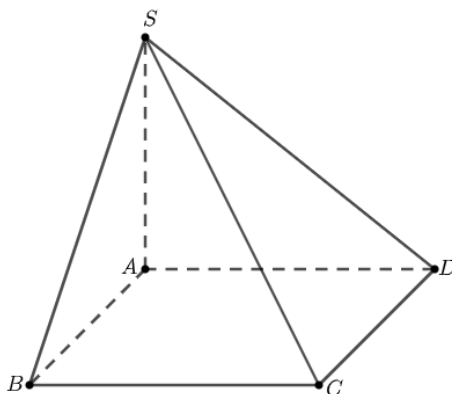
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $4\sqrt{3}a^3$.

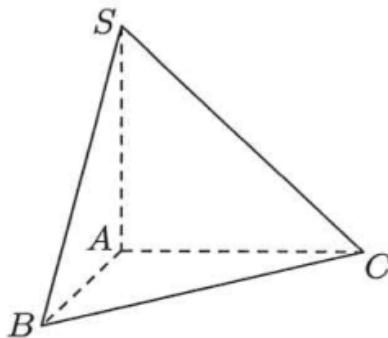
C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Thể tích khối chóp: } V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot 2a = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2$; SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (tham khảo hình vẽ).



Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 12.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Thể tích khối chóp đã cho $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.2.2.3 = 2.$

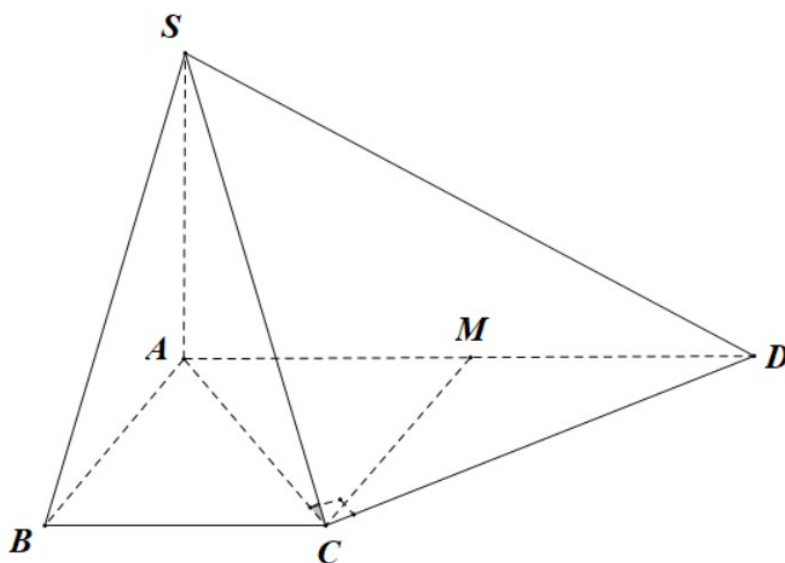
A. $\frac{8\sqrt{6} a^3}{3}$.

B. $\frac{4\sqrt{6} a^3}{3}$.

C. $\frac{8\sqrt{6} a^3}{15}$.

D. $4\sqrt{6} a^3$.

Chọn D


$$\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^0$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{6}a$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3} 2\sqrt{6}a. \frac{(4a+2a).2a}{2} = 4\sqrt{6}a^3 ..$$

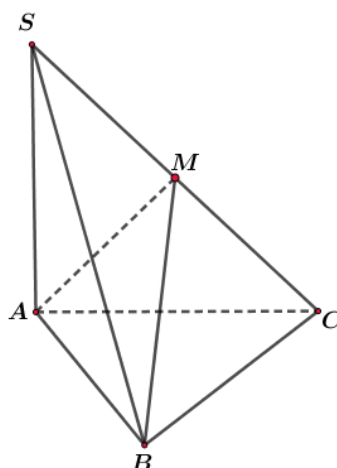
A. $\frac{1}{2}a^3$.

B. $\frac{1}{4}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Chọn B



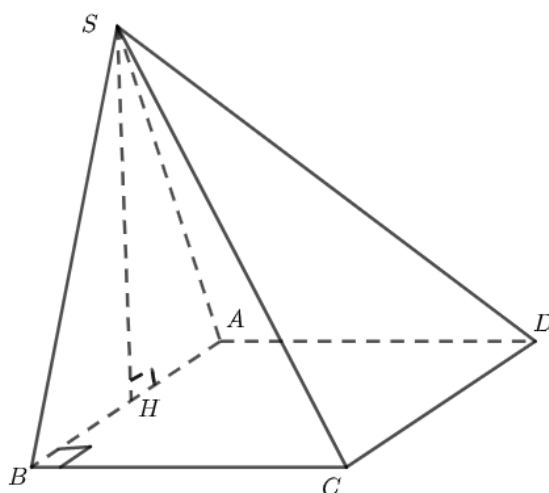
Vì M là trung điểm của SC nên

$$V_{S.AMB} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2}BA \cdot BC = \frac{1}{12} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot \sqrt{4a^2 - a^2} = \frac{1}{4}a^3.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}$; $AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là

- A. $4\sqrt{3}a^3$.. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.. C. $4a^3$.. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra SH là đường cao của tam giác SAB
 $\Rightarrow SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vì tam giác SAB đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên $SH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a$.

Diện tích tam giác ABD : $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABD$: $V_{S.ABD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 2a^2\sqrt{3} \cdot 3a = 2\sqrt{3}a^3$..



Câu 7: Cho hình chóp $SABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , có $AB = a\sqrt{3}$; $BC = a$. Tam giác SAC cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy, $mp(SBC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $SABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^3}{4}$.

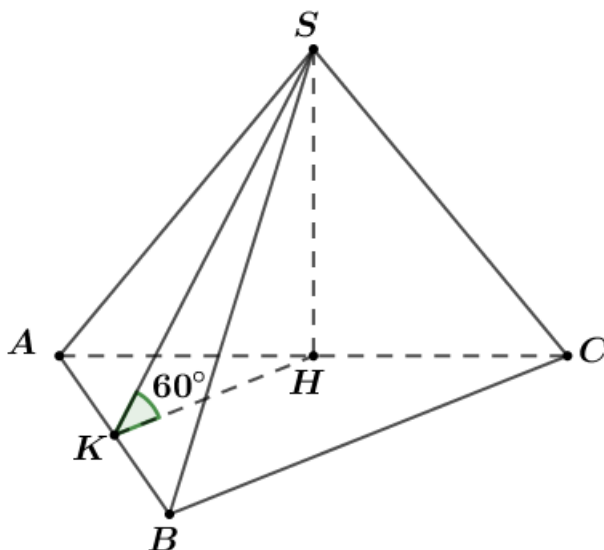
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $2a^3$.

Lời giải

Theo giả thiết, trong tam giác SAC kẻ đường cao $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Khi đó $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}$.



Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác ABC kẻ $HK \perp AB \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ$; $HK = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SKH , ta có $SH = \tan 60^\circ.HK = \sqrt{3}.\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 8: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$?

A. $\frac{9}{2}a^3$.

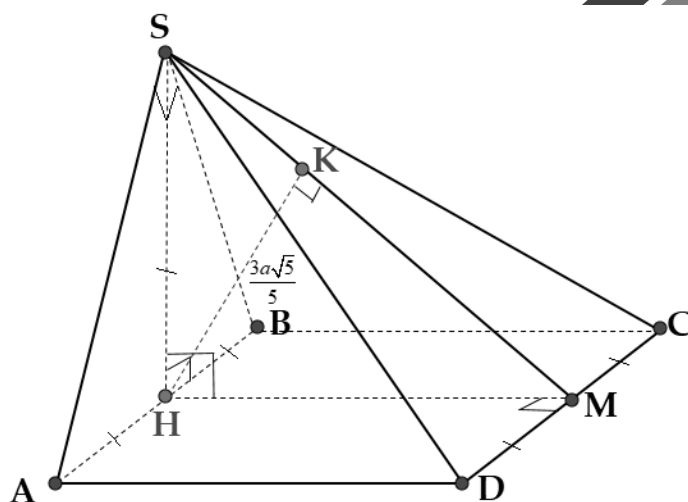
B. $3\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{27}{2}a^3$.

D. $\frac{3}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Đặt cạnh hình vuông $ABCD$ là x ($x > 0$).

Tam giác SAB vuông cân tại S suy ra chiều cao $SH = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow CD \perp HM$. Lại có $CD \perp SH$ (do $SH \perp (ABCD)$)
 $\Rightarrow CD \perp (SHM)$.

Gọi K là hình chiếu của H lên $SM \Rightarrow HK \subset (SHM) \Rightarrow CD \perp HK$. Suy ra $HK \perp (SCD)$.
 $\Rightarrow d(H, (SCD)) = HK$.

Lại có: $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ mà $H \in AB \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác SHM vuông tại H có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{5}{9a^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{5}{9a^2} = \frac{5}{x^2} \Rightarrow x = 3a.$$

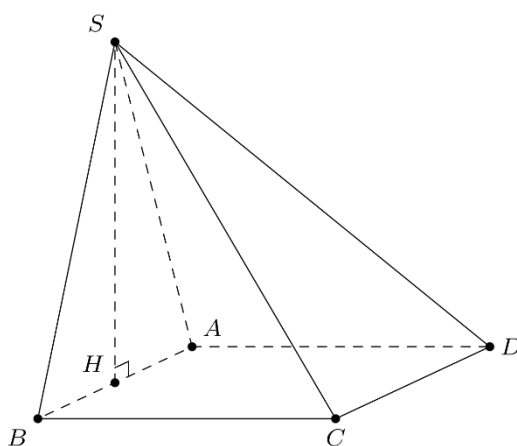
Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot (3a)^2 = \frac{9a^3}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $4a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH \perp AB$

Theo đề ta có $SH \perp (ABCD)$

Xét $\triangle SAB$ đều có đường cao SH suy ra $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot (2a)^2 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2a^3\sqrt{3}$.

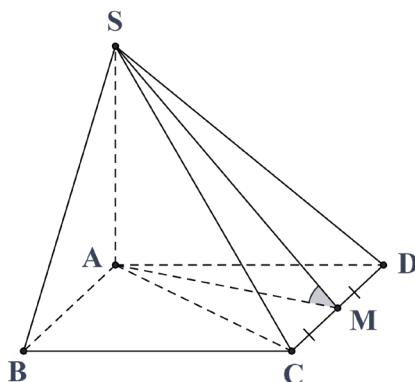
B. $3a^3\sqrt{3}$.

C. $a^3\sqrt{3}$.

D. $2a^3$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABC cân (do $AB = AC$ bởi $ABCD$ là hình thoi) có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên nó đều.

Gọi M là trung điểm cạnh CD suy ra $AM \perp CD$;

Ta có $\begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp SA \end{cases}$ suy ra $CD \perp SM$ nên $((SCD), (ABCD)) = (SM, AM) = \widehat{SMA} = 60^\circ$, với

$AM = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ ta có $SA = AM \cdot \tan 60^\circ = 3a$.



Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.2S_{ABC} = \frac{1}{3}.3a.2.(2a)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 11: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ biết $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a\sqrt{33}}{9}$.

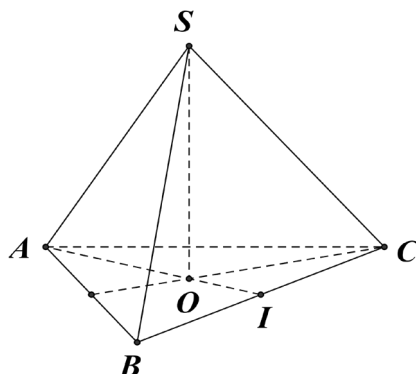
B. $V = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

C. $V = \frac{a\sqrt{141}}{6}$.

D. $V = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC , khi đó AI là đường cao của tam giác đáy. Chiều cao của chóp là SO

Theo định lý Pitago ta có $AI = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AO = \frac{2}{3}AI = \frac{2a\sqrt{3}}{3.2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O ta có $SO = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Câu 12: Tính thể tích của khối tứ diện đều biết chiều cao tứ diện bằng a .

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$.

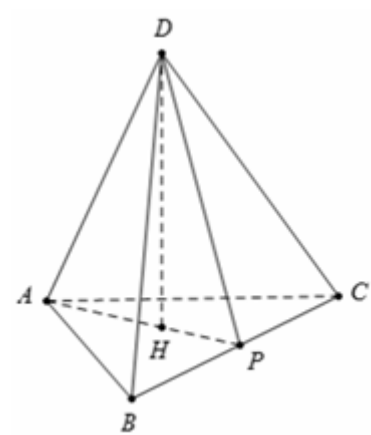
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A





Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh $AB = x$, P là trung điểm BC , đường cao $DH = a$

$AP = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. Áp dụng định lí Pi-ta-go trong tam giác ADH ta có:

$$DH^2 + HA^2 = DA^2 \Rightarrow a^2 + \frac{x^2}{3} = x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

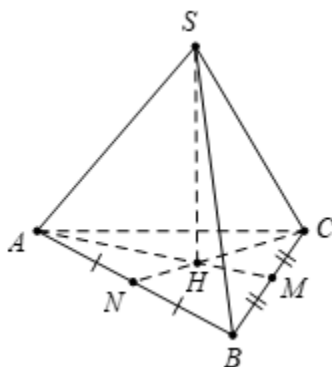
Do đó: $S_{\triangle ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 13: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = 2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

- A. $\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC

Ta có $AM = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

Mặt khác $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

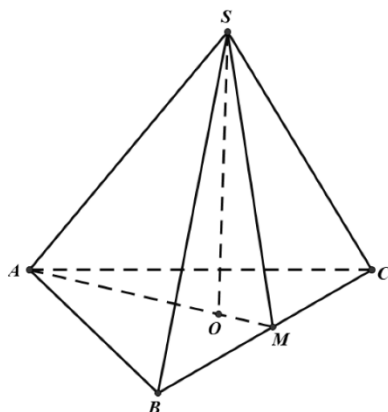
Vậy thể tích của khối chóp đã cho là: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 14: Cho khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{42}}{6}$ và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{42}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Góc giữa mặt bên và đáy bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ$

$$\text{Đặt } AB = x \Rightarrow \begin{cases} AO = \frac{x\sqrt{3}}{3} \\ OM = \frac{x\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Xét } \triangle SOM : SO = OM \cdot \tan 60 = \frac{x\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{x}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle SOA : AO^2 + SO^2 = SA^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{42}}{6}\right)^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 60° và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng a . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $V = \frac{2a^3}{9}$.

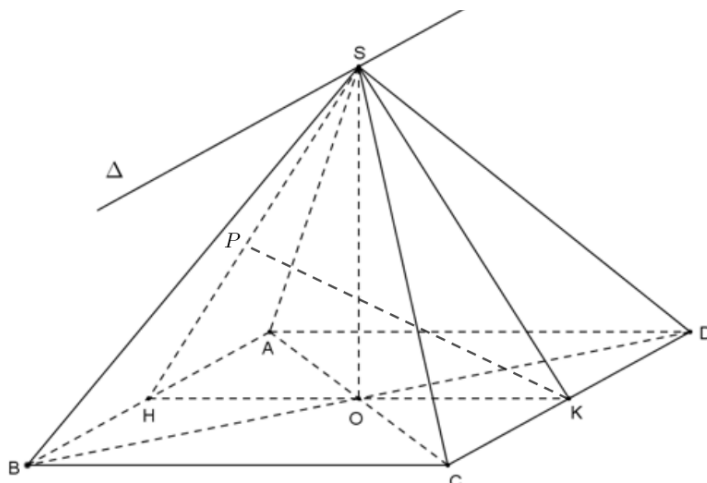
B. $V = \frac{4a^3}{9}$.

C. $a^3\sqrt{3}$.

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn B





Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$.

Ta có: S là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

$AB \subset (SAB); CD \subset (SCD); AB // CD$.

Suy ra hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng Δ đi qua S , song song với AB và CD .

Gọi $H; K$ lần lượt là trung điểm của AB và $CD \Rightarrow HK$ đi qua O và $HK \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} SO \perp AB \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow \Delta \perp (SHK)$ (Do $\Delta // AB$).

$\Rightarrow \widehat{((SAB); (SCD))} = \widehat{(SH; SK)} = 60^\circ \Rightarrow SH \perp SK \Rightarrow$ Tam giác SHK là tam giác đều.

Kẻ KP vuông góc SH tại P .

Do $CD // AB \subset (SAB) \Rightarrow CD // (SAB)$ nên $d(CD; AB) = d(CD; (SAB)) = d(K; (SAB)) = a$

Khi đó ta có: $\begin{cases} KP \perp SH \\ KP \perp AB \end{cases} \Rightarrow KP \perp (SAB) \Rightarrow d(K; (SAB)) = KP = a \Rightarrow SO = a$ và $HK = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ (Do tam giác SHK là tam giác đều)

Suy ra $S_{ABCD} = HK^2 = \frac{4a^2}{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{4a^2}{3} = \frac{4}{9} a^3$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có AB, AC, AA' đôi một vuông góc với nhau. Biết $AB = a, AC = 2a, AA' = 3a$, tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3$.

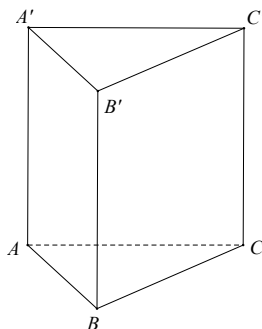
B. $V = 3a^3$.

C. $V = 6a^3$.

D. $V = 2a^3$.

Lời giải

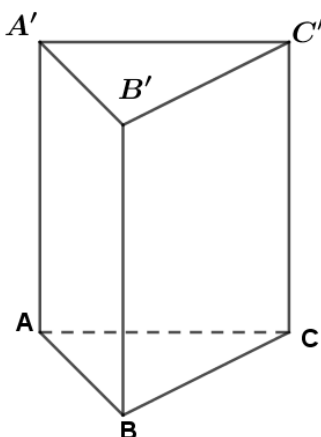
Chọn B



$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot AA' = 3a^3$.



Câu 17: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho



A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối lăng trụ $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

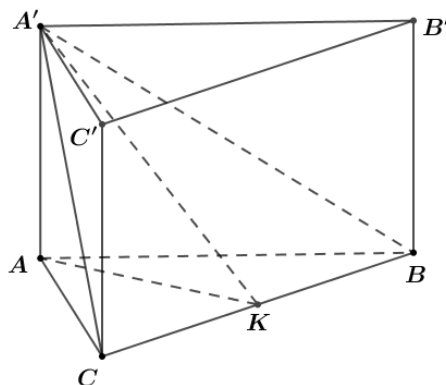
A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Do đáy ABC đều nên các cạnh $A'B = A'C$. Kẻ $A'K \perp BC \Rightarrow \widehat{AKA'} = 60^\circ$ và $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Xét $\triangle A'AK$: $AA' = \tan 60^\circ \cdot AK = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.

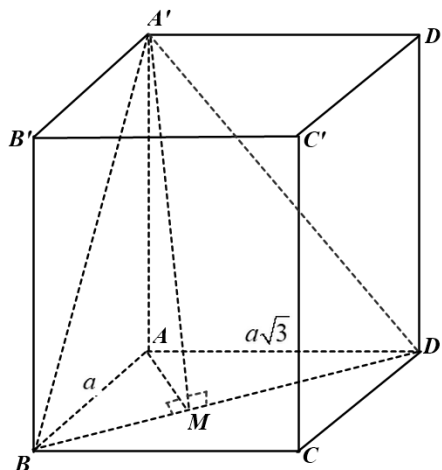
Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.



Câu 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $(A'BD)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho là:

- A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Trong $(ABCD)$ gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BD

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AA' \\ BD \perp AM \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AM) \Rightarrow BD \perp A'M$$

$$\text{Do đó } ((A'BD); (ABCD)) = (A'M; AM) = \widehat{A'MA} = 60^\circ$$

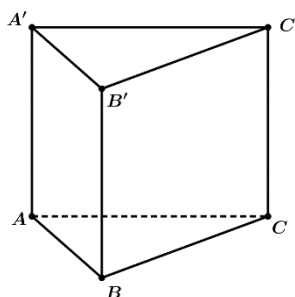
$$\text{Ta có } AM = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Xét tam giác $A'AM$ vuông tại A :

$$\tan \widehat{A'MA} = \tan 60^\circ = \frac{AA'}{AM} \Rightarrow AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{\triangle ABCD} = \frac{3a}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 20: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AC = AA' = 2$ (tham khảo hình vẽ)



Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng



A. 2.

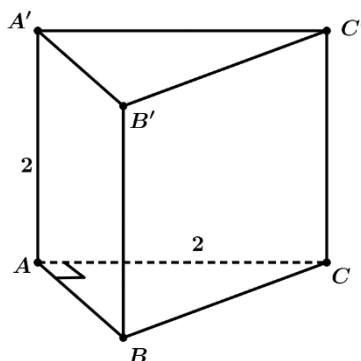
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = 2 \cdot 2 = 4$.

Câu 21: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích tam giác ACD' bằng $a^2\sqrt{3}$. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. $8a^3$.

B. a^3 .

C. $2\sqrt{2}a^3$.

D. $4\sqrt{2}a^3$.

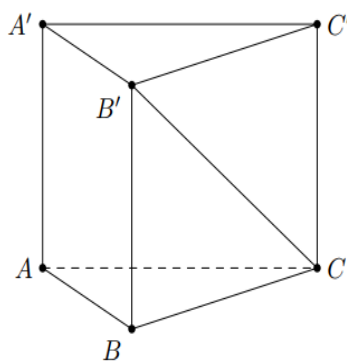
Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } AB = x \Rightarrow \begin{cases} AC = x\sqrt{2} \\ AD' = x\sqrt{2} \\ CD' = x\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta ACD'} = \frac{(x\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow x = a\sqrt{2} \Rightarrow V_{LP} = (a\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}a^3.$$

Câu 22: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và góc giữa đường thẳng CB' và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $2a^3\sqrt{3}$.

B. $a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải

Chọn A

Ta có góc giữa đường thẳng CB' và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa đường thẳng CB' và đường thẳng CB hay chính là góc $\widehat{B'CB}$ mà theo giả thiết góc này bằng 45° nên $\Delta B'BC$ vuông cân tại B suy ra $B'B = BC = 2a$.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC = 2a$. Tính thể tích V của hình lập phương.

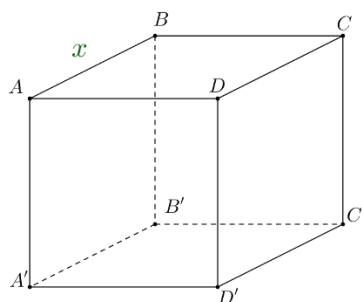
A. $V = 8a^3$.

B. $V = a^3$.

C. $4\sqrt{2}a^3$.

D. $2\sqrt{2}a^3$.

Lời giải



Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương

$$\text{Ta có: } 2x^2 = (2a)^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$

Do đó thể tích khối lập phương là: $V = (a\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

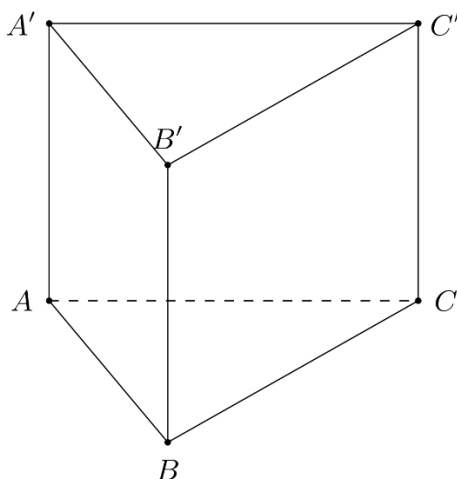
B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{4}$.

C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

D. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B





Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 25: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích đáy là: $S = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao khối lăng trụ là: $h = 2\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

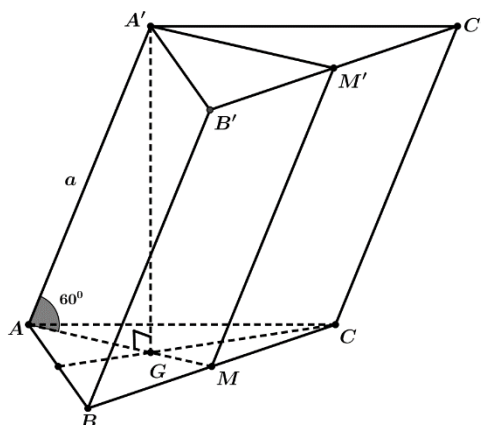
Thể tích khối lăng trụ là $V = Sh = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{4}$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Mặt phẳng $(BB'C'C)$ tạo với mặt phẳng $(A'B'C')$ góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{a^3}{8}$. B. $V = \frac{27a^3}{32}$. C. $V = \frac{3a^3}{32}$. D. $V = \frac{9a^3}{32}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$ và G là trọng tâm tam giác ABC .

Vì tam giác ABC đều nên $BC \perp AM$. Mà $BC \perp A'G$ nên $BC \perp (AA'MM')$.

Khi đó $((ABC), (BCC'B')) = (AM, MM')$.



Xét hình bình hành $AA'M'M$ có $\widehat{A'AM}$ là góc nhọn và bù với góc $\widehat{AMM'}$ nên

$$((ABC), (BCC'B')) = (AM, MM') = 180^\circ - \widehat{AMM'} = \widehat{A'AM} = 60^\circ.$$

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G , ta có $A'G = AA' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = AA' \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$,

$$\Rightarrow AM = \frac{3}{2}AG = \frac{3a}{4}.$$

Xét tam giác ABM vuông tại M , ta có $\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AM}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

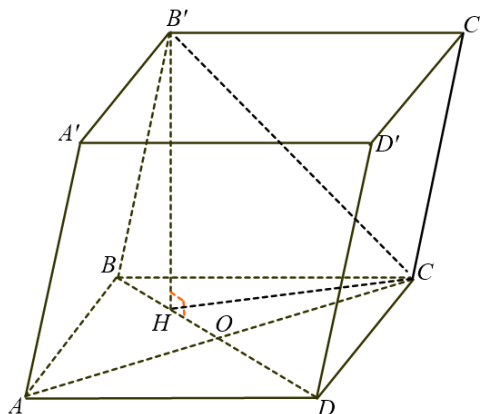
$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'G = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{32}.$$

Câu 27: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O có $AC = 2a$, $BD = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với trung điểm H của OB . Đường thẳng $B'C$ tạo với mặt đáy một góc 45° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

- A. $2a^3\sqrt{7}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $3a^3\sqrt{21}$. D. $a^3\sqrt{21}$.

Lời giải



Ta có $HO = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $OC = \frac{AC}{2} = a$.

Xét tam giác OHC vuông tại O có: $HC = \sqrt{OH^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Ta có $(B'C, (ABCD)) = (B'C, HC) = \widehat{B'CH} = 45^\circ$.

Xét $\Delta B'CH$ vuông tại H và $\widehat{B'CH} = 45^\circ$. Suy ra $\Delta B'CH$ vuông cân tại H .

Do đó $B'H = HC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = B'H \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{3} = a^3\sqrt{21}$.

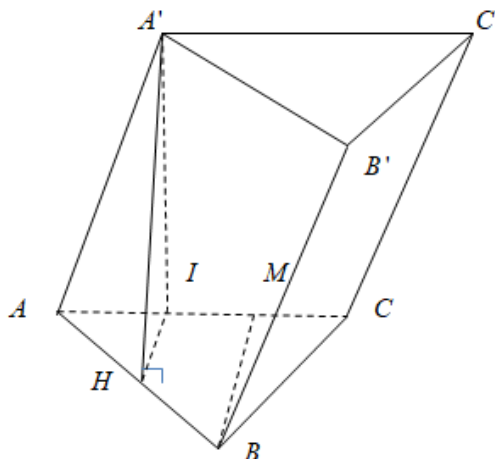


Câu 28: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Tam giác $A'AB$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{3a^3}{32}$. B. $V = \frac{3a^3}{16}$. C. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow A'H \perp AB$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (A'BC) \perp (ABC) \\ (A'BC) \cap (ABC) = AB \Rightarrow A'H \perp (ABC) \\ A'H \perp AB \end{cases}$$

Dựng $HI \perp AC \Rightarrow AC \perp (A'HI) \Rightarrow A'I \perp AC$

Suy ra $((ACC'A'), (ABC)) = (A'I, HI) = \widehat{A'IH} = 60^\circ$

$$\text{Dựng } BM \perp AC \Rightarrow HI = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Trong tam giác $A'IH$ có $A'H = HI \cdot \tan \widehat{A'IH} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$

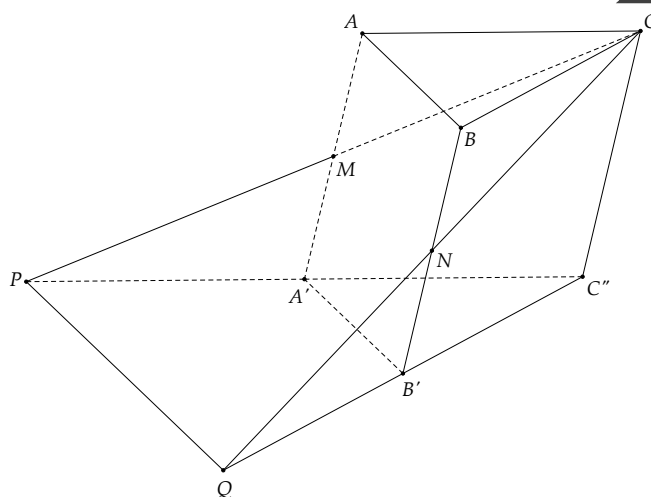
$$\text{Vậy thể tích lăng trụ: } V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}.$$

Câu 29: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

- A. 2.. B. $\frac{2}{3}$.. C. 1.. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta thấy $A'B'$ là đường trung bình của tam giác $C'PQ$ nên $S_{C'PQ} = 4S_{A'B'C'}$.

$$\text{Ta được } V_{C.C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot d(C, (A'B'C')) \cdot S_{C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot d(C, (A'B'C')) \cdot 4S_{A'B'C'} = \frac{4}{3} V_{ABC.A'B'C'}. \quad (1)$$

Lại có

$$\begin{aligned} V_{C.ABMN} &= \frac{1}{3} d(C, (ABMN)) \cdot S_{ABMN} = \frac{1}{3} d(C, (ABMN)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABB'A'} = \frac{1}{2} V_{C.ABB'A'} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}. \text{ Do đó } V_{CMN.A'B'C'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \quad (2) \end{aligned}$$

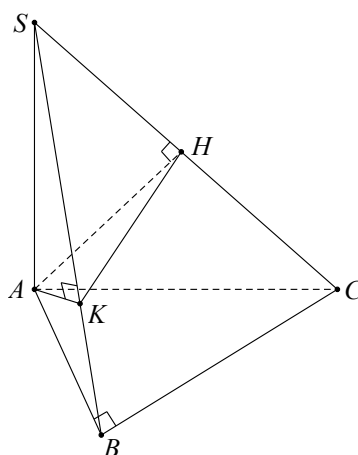
$$\text{Từ (1) và (2) ta được } V_{MA'P.NB'Q} = V_{C.C'PQ} - V_{CMN.C'A'B'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2..$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SC, SB . Biết góc giữa $(AHK), (ABC)$ bằng 45° . Tính thể tích khối tứ diện $ABHK$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $V_{ABHK} = V_{HABK}$, $V_{S.ABC} = V_{C.SAB}$. Khi đó: $\frac{V_{ABHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{HABK}}{V_{C.SAB}} = \frac{d(H, (SAB))}{d(C, (SAB))} \cdot \frac{S_{\Delta ABK}}{S_{\Delta SAB}}$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = a \Rightarrow BC = AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$, mà $AK \subset (SAB) \Rightarrow AK \perp BC$.

Khi đó $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp SB \end{cases} \Rightarrow AK \perp SC$ (1).

Mặt khác, ta lại có $AH \perp SC$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $SC \perp (AHK)$, lại có $SA \perp (ABC)$.

Suy ra $\left(\widehat{(AHK), (ABC)} \right) = \left(\widehat{SC, SA} \right) = \widehat{ASC}$ (do tam giác SAC vuông tại A).

Theo giả thiết: $\widehat{ASC} = 45^\circ \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$ (do $\tan \widehat{ASC} = \frac{AC}{SA} = 1$).

Xét tam giác SAB vuông tại A có:

$$\frac{SK}{SB} = \frac{SK \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{2}{3}.$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có:

$$\frac{SH}{SC} = \frac{SH \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}.$$



Ta có $HC \cap (SAB) = \{S\}$. Khi đó $\frac{d(H, (SAB))}{d(C, (SAB))} = \frac{SH}{SC} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle SAB}} = \frac{BK}{BS} = \frac{1}{3} \text{ (do } \frac{SK}{SB} = \frac{2}{3} \text{)}$$

Khi đó $\frac{V_{HABK}}{V_{C.SAB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{HABK} = \frac{1}{6} V_{C.SAB} = \frac{1}{6} V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} aa = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36}$

Câu 31: Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC , mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện. Đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ là

A. $\frac{V_2}{V_1} = 3$.

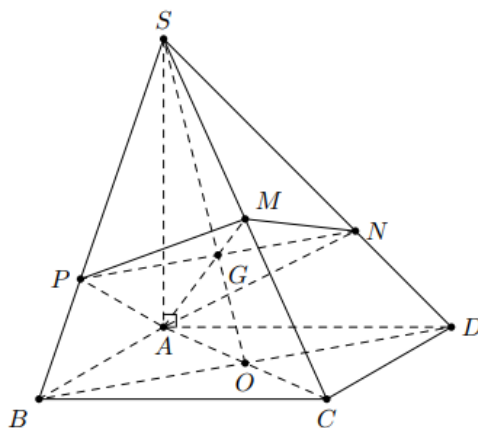
B. $\frac{V_2}{V_1} = 2$.

C. $\frac{V_2}{V_1} = 1$.

D. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$.

Khi đó SO cắt AM tại G . Suy ra G là trọng tâm tam giác SAC .

Do đó $\frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$.

Trong mặt phẳng (SBD) , qua G kẻ d song song BD cắt SD , SB tại hai điểm N , P .

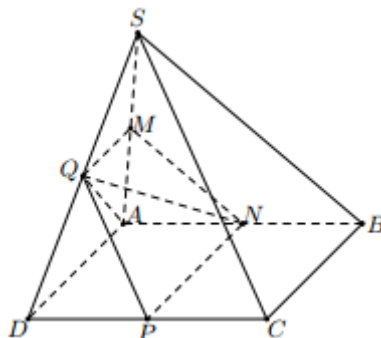
Khi đó ta có $\frac{SP}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$. Suy ra $\frac{V_1}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 + 2 \right) = \frac{1}{3}$. Vậy $\frac{V_2}{V_1} = 2$.



- Câu 32:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SA . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng (SBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số của thể tích phần chứa đỉnh S và thể tích phần còn lại.
- A. $\frac{5}{16}$. B. $\frac{5}{11}$. C. $\frac{16}{5}$. D. $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Thiết diện là hình thang $MNPQ$ với N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, SD .

Ta có $V_{MNPQAD} = V_{Q.ANPD} + V_{S.ABCD}$

$$V_{Q.ANPD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}$$

$$V_{N.AMQ} = \frac{1}{2} V_{N.ADQ} = \frac{1}{2} V_{Q.AND} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{Q.ANPD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{1}{16} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQAD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} + \frac{1}{16} V_{S.ABCD} = \frac{5}{16} V_{S.ABCD}$$

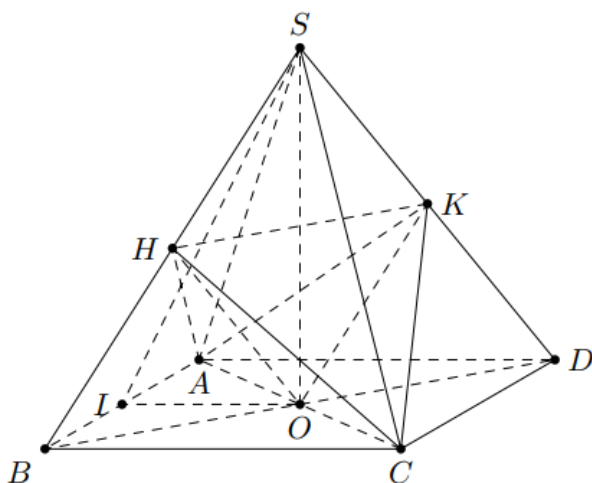
$$\text{Tỉ số thể tích cần tìm là: } \frac{\left(1 - \frac{5}{16}\right) V_{S.ABCD}}{\frac{5}{16} V_{S.ABCD}} = \frac{11}{5}.$$

- Câu 33:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$ và diện tích tam giác SAB bằng a^2 . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SB, SD . Thể tích khối đa diện $ABCKH$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{15}}{36} a^3$. B. $\frac{\sqrt{15}}{4} a^3$. C. $\frac{\sqrt{15}}{24} a^3$. D. $\frac{\sqrt{15}}{12} a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình $ABCD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm AB suy ra $SI \perp AB$. Khi đó $SI = \frac{2S_{SAB}}{AB} = \frac{2a^2}{a} = 2a$.

Ta có $SO = \sqrt{SI^2 - IO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ nên

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}.$$

Mặt khác O là trung điểm BD suy ra $S_{BOKH} = \frac{1}{2} S_{SBD}$.

Thể tích khối đa diện $ABCKH$ bằng

$$V_{ABCKH} = 2V_{A.BOKH} = 2 \cdot \frac{1}{2} V_{A.SBD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}.$$

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $36a^3$. Gọi I, J là hai điểm lần lượt thuộc BB', CC' thỏa mãn $\frac{B'I}{B'B} = \frac{C'J}{C'C} = \frac{2}{3}$ và M, N lần lượt là giao điểm của $A'I, A'J$ với mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích khối đa diện $IJCMBN$.

A. $7a^3$.

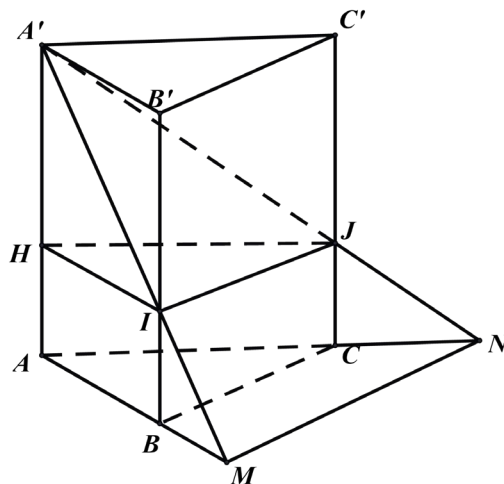
B. $12a^3$.

C. $9a^3$.

D. $6a^3$.

Lời giải

Chọn A





Không mất tính tổng quát, ta giả sử $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng. Khi đó, ta có:

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'A \cdot S_{ABC} = 36a^3.$$

Ta có: $\frac{MI}{MA'} = \frac{MB}{MA} = \frac{IB}{A'A} = \frac{1}{3}$ và $\frac{NJ}{NA'} = \frac{NC}{NA} = \frac{IC}{A'A} = \frac{1}{3}$ suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{2}$.

Do đó, ta có:

$$V_{A'.AMN} = \frac{1}{3} A'A \cdot S_{AMN} = \frac{1}{3} A'A \cdot \frac{9}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4} \cdot 36a^3 = 27a^3.$$

Gọi $H \in A'A$ sao cho $\frac{A'H}{A'A} = \frac{2}{3}$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} V_{A'.ABCJI} &= V_{IJH.ABC} + V_{A'.IJH} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{3} \cdot A'H \cdot S_{IJH} \\ &= \frac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot A'A \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 36a^3 + \frac{2}{9} \cdot 36a^3 = 20a^3 \end{aligned}$$

Vậy $V_{IJBGMN} = V_{A'.AMN} - V_{A'.ABCJI} = 27a^3 - 20a^3 = 7a^3$.

Câu 35: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A thỏa mãn $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, đồng thời $A'A, A'B, A'C$ cùng tạo với đáy một góc 60° . Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C', BC$. Tính thể tích khối tứ diện $MNAH$.

A. $\frac{3a^3}{2}$.

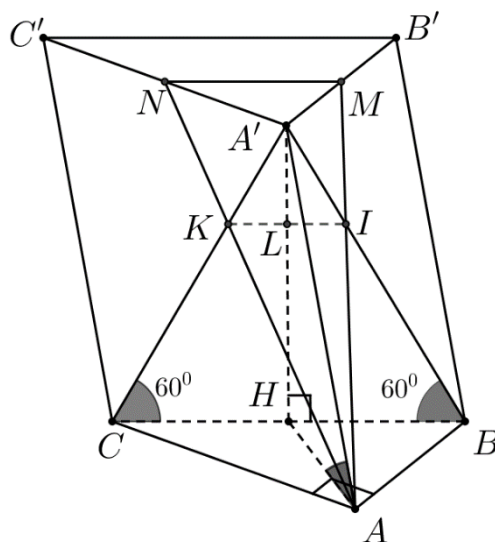
B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là hình chiếu của A' lên mp (ABC) , khi đó các tam giác $\Delta A'OA, \Delta A'OB, \Delta A'OC$ là các tam giác vuông tại O và bằng nhau. Khi đó $OA = OB = OC \Rightarrow O \equiv H$ hay $A'H \perp (ABC)$

Ta có $BC = 2a \Rightarrow HB = a \Rightarrow A'H = HB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.



$$\text{Do đó } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \sqrt{3} \cdot a \sqrt{3} = \frac{a^3}{2}.$$

Gọi K là giao điểm của $A'C$ và NA , I là giao điểm của $A'B$ và MA , L là giao điểm của KI và $A'H$. Ta có $\frac{KA'}{KC} = \frac{IA'}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow KI \parallel BC$ và $\frac{LA'}{LH} = \frac{1}{2}$.

$$V_{MNAH} = V_{H.AMN} = \frac{1}{3} S_{AMN} \cdot d(H, (AMN)) = \frac{1}{3} S_{AMN} \cdot 2d(A'; (AMN)) = 2V_{A'.AMN} = 2V_{A.A'MN}$$

Mặt khác, $V_{A.A'MN} = \frac{1}{4} V_{A'.ABC}$ (vì khối hai khối tứ diện có cùng chiều cao nhưng $S_{A'MN} = \frac{1}{4} S_{ABC}$)

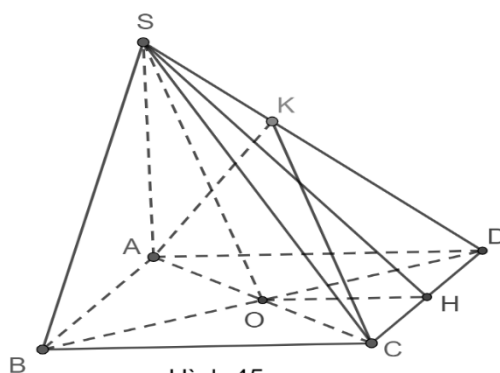
$$\text{Do đó } V_{MNAH} = 2 \cdot \frac{1}{4} V_{A'.ABC} = \frac{1}{2} V_{A'.ABC} = \frac{1}{2} \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{4}$$

**D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

Câu 1: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
- Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.
- Số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .
- Côsin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải



Hình 45

a) Đúng: Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ nên O là chân đường cao của khối chóp $S.ABCD$.

Khi đó, chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng SO .

Trong hình vuông $ABCD$, ta có: $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Sai: Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$. Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}.$$

c) Đúng: Vì $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$. Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SAO}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O có: $\cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\widehat{SAO} = 30^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .



d) Sai: Gọi H là hình chiếu của O trên CD . Vì OCD là tam giác vuông cân tại O nên H là trung điểm CD . Mà tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Suy ra $\widehat{SHO}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, CD, B]$.

Xét tam giác DBC có OH là đường trung bình nên $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SOH vuông tại O có: $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Suy ra $\cos \widehat{SHO} = \frac{OH}{SH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Vậy cosin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của BC , biết $\widehat{AMS} = 60^\circ$.

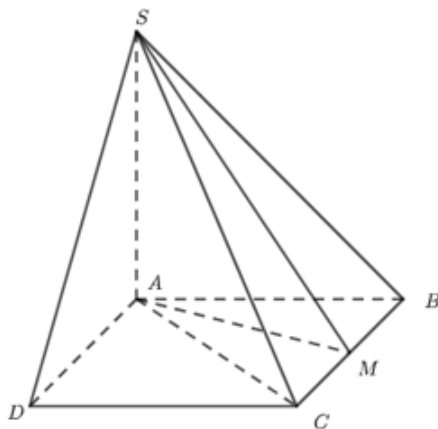
a) $SA \perp (ABCD)$.

b) $SA = 3a$.

c) $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$$

b) Sai: Lại có $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều cạnh $a \Rightarrow AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét $\triangle SAM$: $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AM} \Rightarrow SA = \frac{3}{2}a$

c) Sai: Ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$$

d) Đúng: Kẻ $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4}$$

$$\text{Do } AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \frac{3a}{4}.$$

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$.

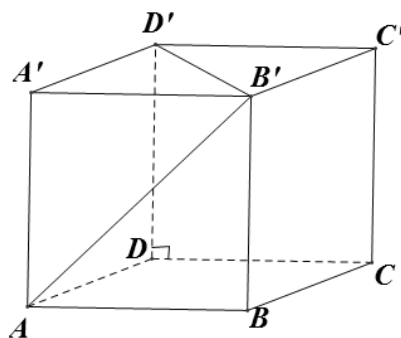
a) Công thức tính thể tích hình lăng trụ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.

b) Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.

c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .

d) Thể tích của khối lăng trụ bằng $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Công thức tính thể tích của khối chóp là: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.

b) Đúng: Diện tích đáy là: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

c) Sai: Xét tam giác vuông ABB' có $AB'^2 = AB^2 + BB'^2 \Leftrightarrow (a\sqrt{5})^2 = a^2 + BB'^2 \Leftrightarrow BB' = 2a$.

d) Đúng: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD} \cdot AA' = a^2\sqrt{2} \cdot 2a = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng 30° .

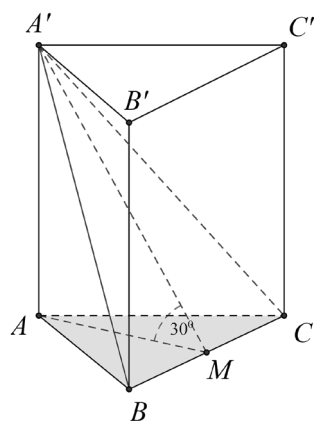
a) Góc nhị diện bằng góc $\widehat{A'MA}$, với M là trung điểm của BC .

b) Diện tích đáy của hình lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .

d) Thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



a) Đúng: Góc nhị diện $[A', BC, A]$ là góc giữa hai nửa mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) cạnh BC .

Gọi M là trung điểm của BC .

Vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$.

Lại có $AA' \perp BC$ nên $BC \perp A'M$.

Suy ra góc nhị diện $[A', BC, A]$ là góc $\widehat{A'MA} = 30^\circ$.

b) Đúng: Diện tích tam giác đều ABC là: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

c) Sai: Vì tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông $A'AM$ có $\tan \widehat{A'MA} = \frac{AA'}{AM} \Leftrightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$.

d) Sai: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 5: Cho khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a và khoảng cách giữa hai đáy bằng $3a$.

a) Tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.

b) Đáy lớn của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích bằng $S_1 = a^2\sqrt{3}$.

c) Đáy nhỏ của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích bằng $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

d) Chiều cao của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ bằng $h = 3a$.

Lời giải

a) Sai: Các mặt bên của khối chóp cắt đều là hình thang cân.

b) Đúng: Diện tích đáy lớn là $S_1 = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

c) Đúng: Diện tích đáy nhỏ là $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

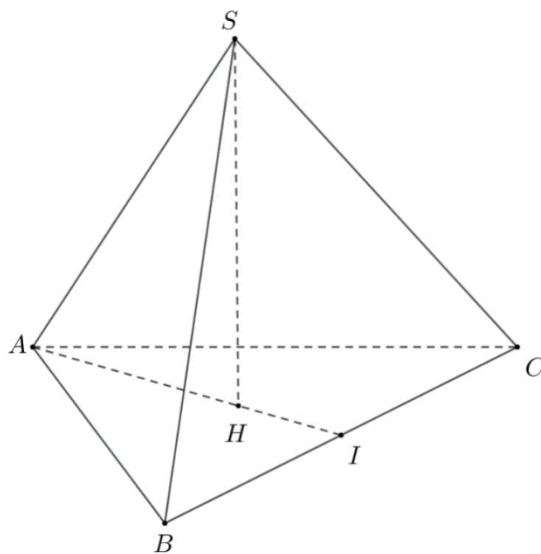
d) Đúng: Chiều cao h của khối chóp cắt chính là khoảng cách giữa hai đáy nên $\Rightarrow h = 3a$.



Câu 6: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và thể tích bằng $\frac{a^3}{4\sqrt{3}}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

- H là trọng tâm của tam giác ABC .
- $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- $SH = 2a$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

Lời giải



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên H là trọng tâm tam giác ABC .

Gọi I là trung điểm BC . AI vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} \Rightarrow SH = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4\sqrt{3}}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a.$$

$$\text{Xét tam giác } SHA \text{ vuông tại } H \text{ có: } \tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Vậy góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

- Đúng: Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên H là trọng tâm tam giác ABC .
- Sai: Gọi I là trung điểm BC . AI vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{c) Sai: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} \Rightarrow SH = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4\sqrt{3}}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a.$$

Vậy góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° .

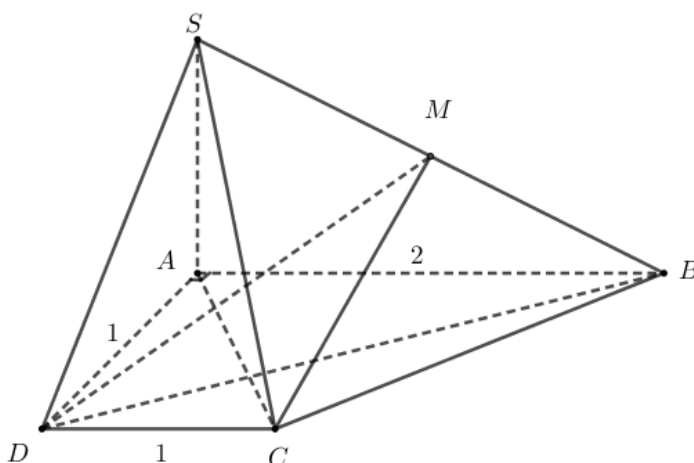
a) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCD}$.

b) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{6}$.

c) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Thể tích của khối chóp $M.BCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải



a) Sai: Vì A là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

b) Đúng: Ta có: $h = SA = AC.\tan 60^0 = \sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

c) Đúng: Ta có: $B = S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot AD = \frac{2+1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Đúng: Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}.CD.AD = \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2}$. Mặt khác, M là trung điểm của đoạn thẳng SB

nên suy ra: $d(M, (ABCD)) = \frac{1}{2}d(S, (ABCD)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Do đó $V_{M.BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

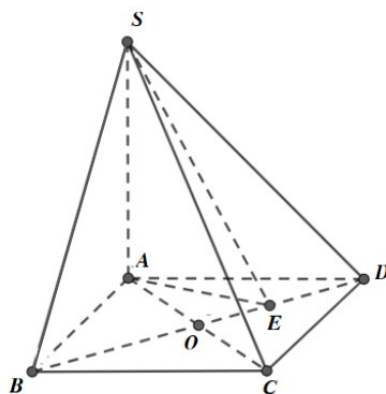
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

a) Chiều cao của khối chóp đã cho là cạnh bên SB .



- b) Diện tích mặt đáy của hình chóp đã cho là $S_{ABCD} = 2a^2$
 c) Thể tích của khối chóp $V_{D.SAC} = V_{B.SAD}$
 d) Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{15}$

Lời giải



- a) Sai: Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ là chiều cao của khối chóp.
 b) Đúng: Ta có diện tích của mặt đáy là: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot 2a = 2a^2$.

- c) Đúng: Ta có $V_{D.SAC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$

$$V_{B.SAD} = V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

Suy ra: $V_{D.SAC} = V_{B.SAD}$

- d) Sai: Kẻ $AE \perp BD$ tại $E \Rightarrow \left(\widehat{(SBD), (ABCD)} \right) = \widehat{SEA} = 60^\circ$

$$\text{Xét } \triangle ABD \text{ vuông tại } A. \text{ Ta có } AE = \frac{AD \cdot AB}{\sqrt{AD^2 + AB^2}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Xét $\triangle SAE$ vuông tại A

$$SA = AE \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

$$\text{Khi đó thể tích } S.ABCD : V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{15}}{5} \cdot 2a^2 = \frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$$

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

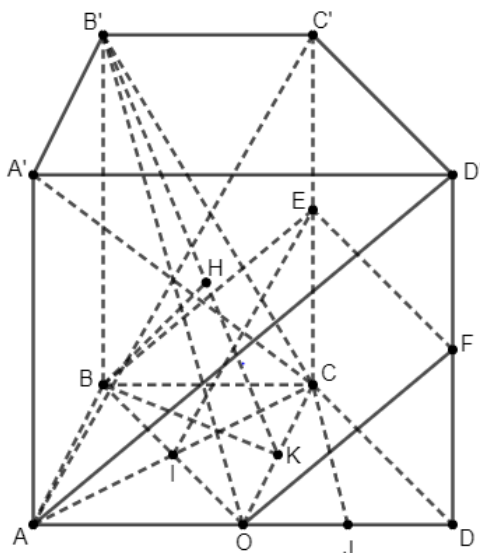
- a) Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{CA'A}$.
 b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(B'CO)$.



c) Thể tích của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{9a^3}{4}$.

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng $A'C$. Biết (P) chia khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A bằng $\frac{15a^3}{8}$.

Lời giải



a) Sai: Vì $A'A \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Vậy $(A'C, (ABCD)) = \widehat{A'CA} \Rightarrow \widehat{A'CA} = 45^\circ$.

b) Đúng: Ta có $AB \parallel (B'CO) \Rightarrow d(AB, B'C) = d(AB, (B'CO)) = d(B, (B'CO))$.

c) Đúng: Gọi O là trung điểm của AD

$\Rightarrow ABCO, BCDO$ là các hình thoi cạnh a và ABO, BCO, CDO là các tam giác đều cạnh a .

Có $(A'C, (ABCD)) = \widehat{A'CA} \Rightarrow \widehat{A'CA} = 45^\circ$

$\Rightarrow$ tam giác $AA'C$ vuông cân tại $A \Rightarrow AA' = a\sqrt{3} \Rightarrow BB' = a\sqrt{3}$.

Mặt khác: $S_{ABCO} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^3}{4}$.

d) Đúng: Có $BO \perp AC, BO \perp AA' \Rightarrow BO \perp A'C$ (1)

Gọi I là tâm hình thoi $ABCO$, E và F lần lượt là trung điểm của CC' và DD'

$\Rightarrow BEFO$ là hình bình hành

Có $IE \parallel AC', AC' \perp A'C$ (do $\Rightarrow ACC'A'$ là hình vuông) $\Rightarrow IE \perp A'C$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (BEFO) \perp A'C \Rightarrow (BEFO)$ chính là mặt phẳng (P) đi qua B và vuông góc với $A'C$

(P) chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện, gồm khối lăng trụ tam giác $BCE.ODF$ và khối đa diện có các đỉnh $A, B, E, F, O, A', B', C', D'$ (khối này chứa đỉnh A , có thể tích V cần tính)



Gọi J là trung điểm của $OD \Rightarrow CJ \perp (ADD'A')$ và $CJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$S_{ODF} = \frac{1}{4}S_{ADD'} = \frac{1}{8}S_{ADD'A'} = \frac{1}{8}a\sqrt{3}.2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

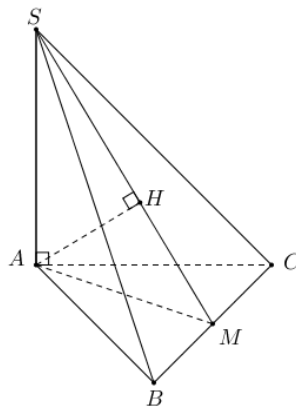
$$\Rightarrow V_{BCE.ODF} = CJ.S_{ODF} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{8}$$

$$\text{Vậy thể tích cần tính là } V = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{BCE.ODF} = \frac{9a^3}{4} - \frac{3a^3}{8} = \frac{15a^3}{8}.$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

- Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
- Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC)
- Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$
- Cosin góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{33}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

Ta có: $AH \perp SM$.

Mặt khác $BC \perp (SAM)$ nên $BC \perp AH$. Ta suy ra $AH \perp (SBC)$.

Nên SH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (SBC) .

Ta suy ra góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) là góc $\alpha = \widehat{ASH}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A ta có:



$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{11}{6a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{11} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Xét tam giác SAH vuông tại H ta có: $\sin \widehat{ASH} = \frac{AH}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{66}}{11}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

a) Đúng: Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

b) Đúng: Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC)

c) Sai: Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$

d) Sai: Cosin góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB = AC = a$.

Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

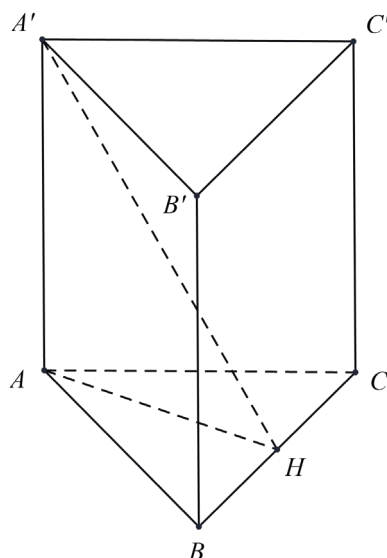
a) Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = a^2$.

b) Độ dài đường cao của lăng trụ bằng $\frac{a}{2}$.

c) Thể tích khối lăng trụ là $V = \frac{a^3}{2}$.

d) Thể tích khối chóp $A.A'B'C'$ là $V' = \frac{a^3}{6}$.

Lời giải





a) Sai: Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$.

b) Sai: Dựng $AH \perp BC$, có $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp A'H$.

Mặt khác $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow A'H = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$.

Do $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA' = \sqrt{A'H^2 - AH^2} = a$.

c) Đúng: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$.

d) Đúng: $V' = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{6}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD .

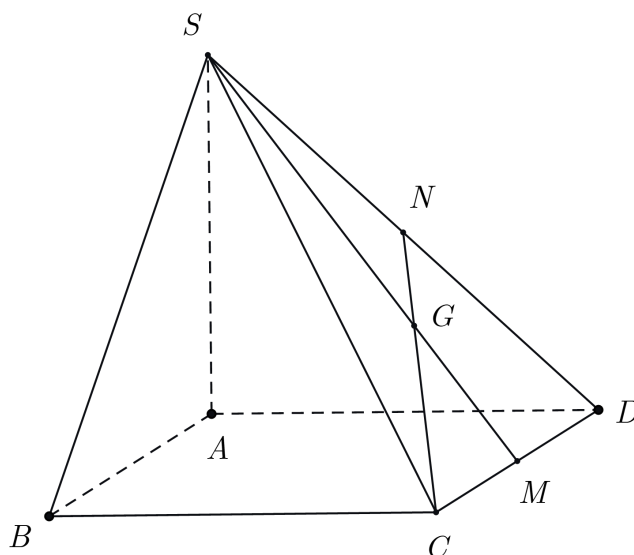
a) Thể tích khối chóp được xác định bởi công thức $V = Bh$

b) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng a^3 .

c) Thể tích khối chóp $S.BCD$ bằng $\frac{a^3}{6}$.

d) Thể tích khối chóp $G.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{9}$.

Lời giải



a) Sai: $V = \frac{1}{3}Bh$

b) Sai: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot AB \cdot AD = \frac{a^3}{3}$



c) Đúng: $V_{S.BCD} = \frac{1}{3}SA \cdot \frac{1}{2}BC \cdot BD = \frac{a^3}{6}$

d) Đúng: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và SD .

Ta có $\frac{1}{3} = \frac{GM}{SM} = \frac{d(G, (ABCD))}{d(S, (ABCD))}$.

Ta có $V_{G.ABCD} = \frac{1}{3}d(G, (ABCD)) \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{9}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° .

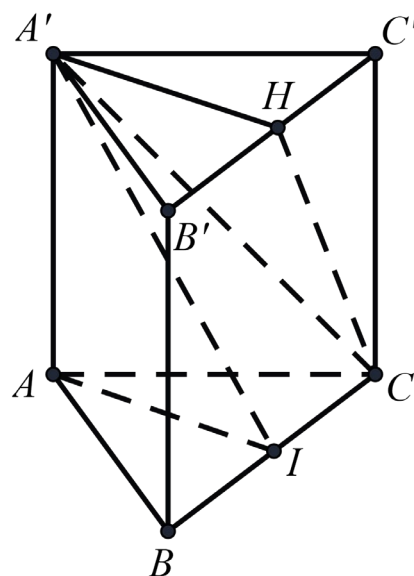
a) Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .

b) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

c) Tang của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

d) Thể tích khối chóp $A'.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải



Dựng $A'H \perp B'C' \Rightarrow H$ là trung điểm của $B'C'$.

Mặt khác $A'H \perp BB' \Rightarrow A'H \perp (BCC'B')$.

Khi đó $(A'C; (BCC'B')) = \widehat{A'CH} = 30^\circ$

Ta có: $\sin \widehat{A'CH} = \frac{A'H}{A'C} \Leftrightarrow \sin 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{A'C} \longrightarrow A'C = a\sqrt{3}$



Suy ra $AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$

a) Sai: $d(A', (BCC'B')) = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Sai: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

c) Đúng: Gọi I là trung điểm của BC . Ta có: $((A'BC), (ABC)) = \widehat{A'IA}$

$$\tan \widehat{A'IA} = \frac{AA'}{AI} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

d) Đúng: Thể tích khối chóp $A'.ABC$ bằng $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{6}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A ; $BC = 2a$; $\widehat{ABC} = 30^\circ$.
Cạnh bên của lăng trụ bằng $2a\sqrt{3}$.

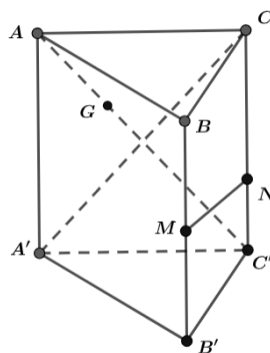
a) Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$, $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC}$.

b) Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được tính theo a bằng a^3 .

c) Thể tích của khối chóp $A.BCC'B'$ bằng $2a^3$.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ACA' , M là trung điểm của BB' , N trên cạnh CC' sao cho $CN = 2NC'$. Thể tích của khối chóp $G.BCNM$ bằng $\frac{7}{9}a^3$.

Lời giải



a) Đúng: Theo giả thiết, $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên AA' là chiều cao của lăng trụ, do đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC}$

b) Sai: Xét tam giác ABC vuông tại A có $AC = 2a \cdot \sin 30^\circ = a$; $AB = 2a \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Trong đó $h = AA' = 2a\sqrt{3}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Vậy $V_{lt} = 3a^3$.



c) Đúng: Ta có, $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$ mà $V_{A.A'B'C'} + V_{A.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'}$ nên

$$V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 3a^3 = 2a^3$$

d) Đúng: Do G là trọng tâm của tam giác ACA' nên $\frac{GC'}{AC'} = \frac{2}{3}$ nên $\frac{d(G; (BCC'B'))}{d(A; (BCC'B'))} = \frac{GC'}{AC'} = \frac{2}{3}$

Từ đó suy ra $d(G; (BCC'B')) = \frac{2}{3} d(A; (BCC'B'))$. Mặt khác tứ giác $BCNM$ là hình thang

$$\text{vuông tại } B, C \text{ nên } S_{BCNM} = \frac{(BM + CN)BC}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}BB' + \frac{2}{3}CC'\right)BC}{2} = \frac{7}{12}BB' \cdot BC = \frac{7}{12}S_{BCC'B'}.$$

Vì vậy ta có :

$$V_{G.BCNM} = \frac{1}{3} d(G; (BCNM)) \cdot S_{BCNM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} d(A; (BCC'B')) \cdot \frac{7}{12} S_{BCC'B'} = \frac{7}{18} V_{A.BCC'B'} = \frac{7}{18} \cdot 2a^3 = \frac{7}{9} a^3$$

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

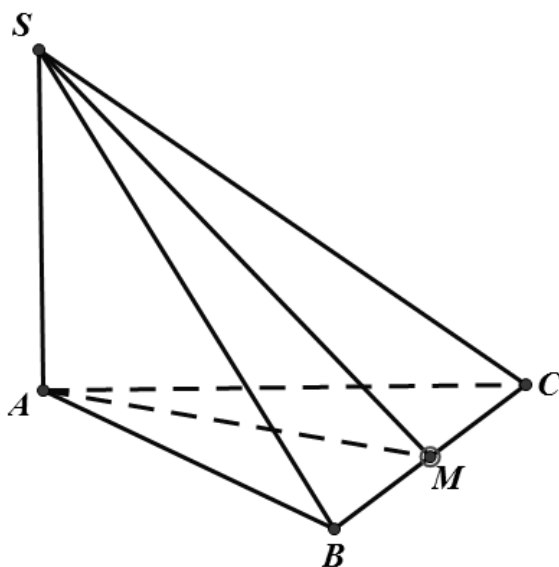
a) Nếu $SA = a\sqrt{3}$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

b) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng a^3 thì chiều cao khối chóp đã cho bằng $2a\sqrt{3}$.

c) Nếu $SC = a\sqrt{3}$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

d) Nếu góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 30° thì thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải



a) Sai: Diện tích đáy $B = S_{ABC} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Chiều cao: $h = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích cần tìm là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$.

b) Đúng: Chiều cao khối chóp $h = \frac{3V}{B} = \frac{3a^3}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = 2a\sqrt{3}$.

c) Đúng: Chiều cao $h = SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a$.

Vậy thể tích cần tìm là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

d) Sai: Từ A kẻ $AM \perp BC$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ BC \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAM)$$

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp (SAM) \\ (SAM) \cap (SBC) = SM; (SAM) \cap (ABC) = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{SMA} = 30^\circ$$

Xét tam giác vuông AMB ta có $AM^2 = AB^2 - BM^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét tam giác vuông SAM ta có $SA = AM \cdot \tan \widehat{SMA} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra: $V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$, có $AB = 193 \text{ cm}$, $BC = 194 \text{ cm}$, $CA = 195 \text{ cm}$, hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° .

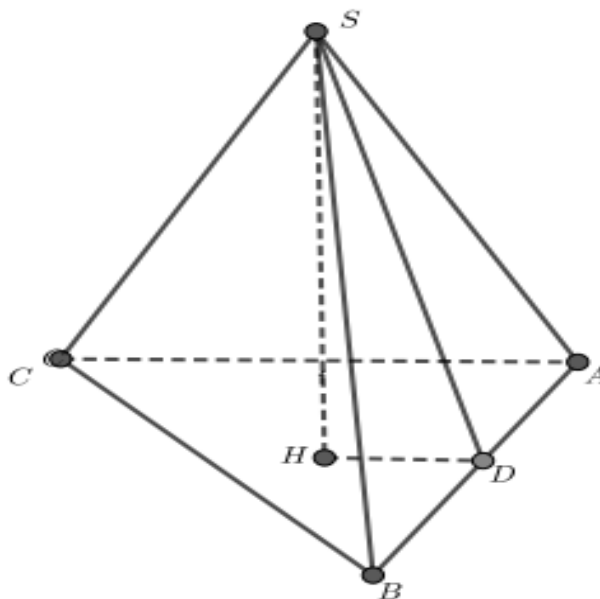
a) Gọi H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Trong tam giác ABC , kẻ HD vuông góc với AB tại D . Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SBH} = 45^\circ$.

b) Diện tích đáy của hình chóp là $S_{ABC} = 16296 \text{ cm}^2$.

c) Chiều cao của hình chóp là 56 cm .

d) Thể tích khối chóp đã cho là 912576 cm^3 .

Lời giải



a) Sai: Gọi H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Trong tam giác ABC , kẻ HD vuông góc với AB tại D . HD bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là góc $\widehat{SDH} = 45^\circ$.

b) Đúng: Nửa chu vi tam giác ABC là $p = \frac{AB + BC + CA}{2} \Rightarrow p = 291(cm)$.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S_{ABC} = 16296(cm^2).$$

c) Đúng: Ta lại có $S_{ABC} = p.r \Leftrightarrow S_{ABC} = p.HD \Rightarrow HD = \frac{S_{ABC}}{p} \Rightarrow HD = 56$.

Xét tam giác SDH vuông tại H có $HD = 56$, $\widehat{SDH} = 45^\circ$

Suy ra $SH = DH = 56(cm)$.

d) Sai: Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH \Rightarrow V = 304192(cm^3)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy, với

$$SA = \frac{a}{2}.$$

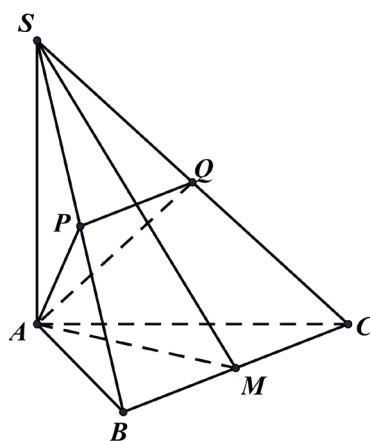
a) Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

c) Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm SB, SC . Thể tích khối chóp $A.BCQP$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải



a) Đúng : Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

b) Sai : Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$.

c) Sai : Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

Ta có : $BC \perp AM$ (AM là đường trung tuyến của ΔABC đều)

$$BC \perp SA (SA \perp (ABC))$$

Do đó: $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC, SM \subset (SBC) \\ AM \perp BC, AM \subset (ABC) \end{cases}$$

Do đó: góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SMA}$

$$\text{Xét tam giác đều } ABC : AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SMA \text{ có: } \tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{SMA} = 30^\circ$$

Vậy góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 30° .

$$\text{d) Sai: Ta có: } \frac{V_{S.APQ}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SQ}{SC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra } V_{S.APQ} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{24} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{96}$$



$$\text{Do đó: } V_{A.BCQP} = V_{S.ABC} - V_{S.APQ} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24} - \frac{a^3\sqrt{3}}{96} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}$$

Câu 18: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° .

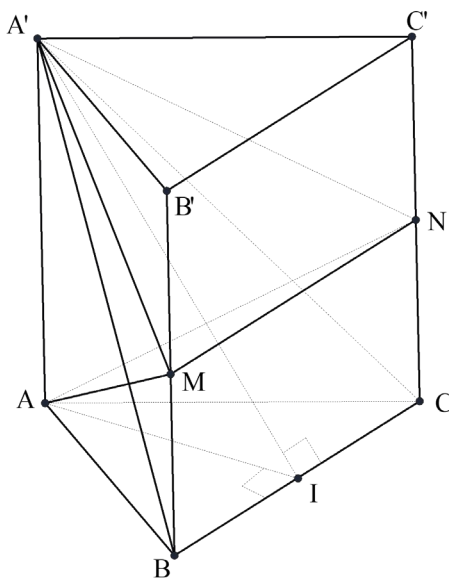
a) Diện tích đáy của hình lăng trụ đã cho là $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$.

b) Hình lăng trụ đã cho có chiều cao $h = 3\sqrt{3}$.

c) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = 27\sqrt{3}$.

d) Thể tích của tứ diện $A'AMN$ bằng $3\sqrt{3}$ với M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB', CC' .

Lời giải



a) Đúng: Ta có $S_{ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

b) Sai: Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB . Ta có

$$\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ (A'I) \perp BC \quad (A'A \perp BC, AI \perp BC) \\ (A'I) \cap (A'BC) = A'I \\ (A'I) \cap (ABC) = AI \end{cases}$$

Nên $((A'BC), (ABC)) = (A'I, AI) = \widehat{A'IA} = 30^\circ$.

$$\tan 30^\circ = \frac{A'A}{AI} \Rightarrow A'A = AI \cdot \tan 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 \text{ hay } h = 3.$$

c) Đúng: Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'A = 9\sqrt{3} \cdot 3 = 27\sqrt{3}$.

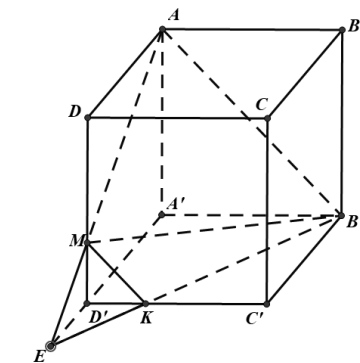
d) Sai: Ta có $V_{A'B'C'NM} = \frac{1}{2} V_{A'B'C'CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{A'B'C'ABC} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'ABC}$.

$$\text{Và } V_{ABCNM} = \frac{1}{2} V_{AB'C'CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{A'B'C'ABC} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'ABC}.$$



Do đó $V_{A'MN} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}.27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi M là điểm thuộc cạnh DD' sao cho $MD' = \frac{1}{3}DD'$. Mặt phẳng (AMB') cắt cạnh $C'D'$ tại K , $K = B'E \cap C'D'$ như hình vẽ sau:



- Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$
- Thể tích khối đa diện $D'KM.AA'B'$ là $V_{D'KM.AA'B'} = \frac{1}{27}a^3$
- Tỉ số thể tích khối đa diện $D'KM.AA'B'$ và $ABCD.A'B'C'D'$ là $\frac{V_{AA'B'KMD'}}{V} = \frac{13}{54}$
- Thể tích khối đa diện lồi $ABCDMKC'B'$ bằng $\frac{26}{27}a^3$.

Lời giải

a) Đúng: Vì thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a là $V = a^3$

b) Sai: Ta thấy $MD' = \frac{a}{3}$, $ED' = \frac{1}{3}EA' = \frac{a}{2}$; $KD' = \frac{a}{3}$.

$$\Rightarrow V_{AA'B'KMD'} = V_{A.A'B'E} - V_{M.D'EK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot a \cdot a - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{13}{54}a^3$$

c) Đúng: Vì $\frac{V_{AA'B'KMD'}}{V} = \frac{13}{54}$.

d) Sai: Vì $V_{ABCDMKC'B'} = V - V_{AA'B'KMD'} = a^3 - \frac{13}{54}a^3 = \frac{41}{54}a^3$.

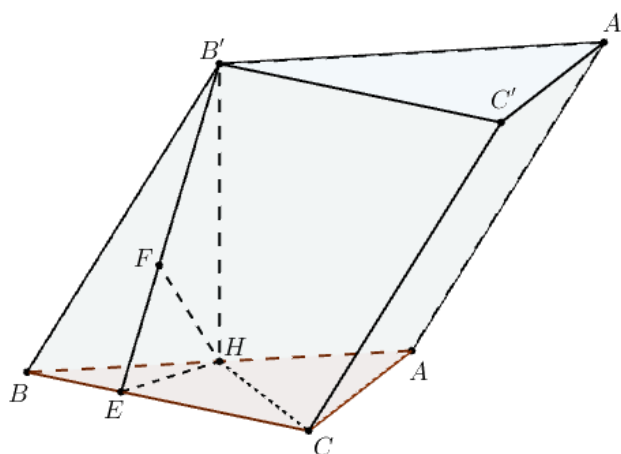
Câu 20: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 2. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng đáy trùng trung điểm H của cạnh AB , biết góc giữa $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$.
- Khoảng cách từ điểm H đến cạnh BC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Chiều cao hạ từ đỉnh B' xuống mặt đáy (ABC) bằng $\frac{3}{4}$.



d) Thể tích của khối lăng trụ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải



a) Sai: Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

Đúng: Dựng $HE \perp BC$, tam giác BEH vuông tại E , $\widehat{HBE} = 60^\circ$ có:

$$HE = HB \sin \widehat{HBE} = 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Sai: Kẻ $HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$ suy ra $BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC')$

$$\Rightarrow \widehat{(B'H, (BCC'B'))} = \widehat{HB'F} = \widehat{HB'E} \Rightarrow \widehat{HB'E} = 30^\circ.$$

d) Đúng: Khi đó $B'H = \frac{HE}{\tan 30^\circ} = \frac{3}{2}$

$$\text{Vậy } V = V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot B'H = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

a) Nếu $AB = 3a, AD = 4a, AA' = a$ thì $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 12a^3$.

b) Giả sử $AB = 3a, AD = 4a$, đường chéo BD' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° . Khi đó thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là $60\sqrt{3}a^3$.

c) Giả sử $AB = 3a, AD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(ABCD)$ bằng 30° . Thể tích khối hộp

chữ nhật đã cho bằng $48\sqrt{3}a^3$

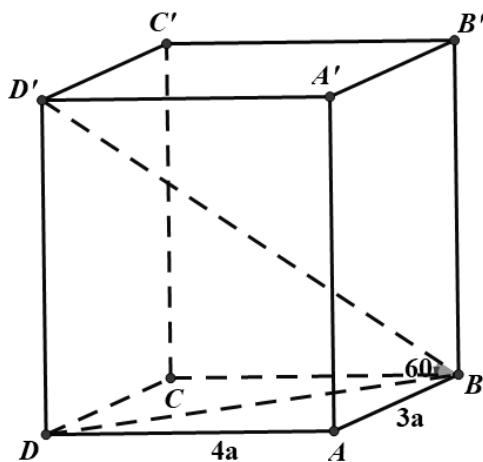
d) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Biết rằng đáy là hình vuông, $AA' = 2a$, khoảng cách từ G đến mặt



phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{4a}{9}$. Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng $\frac{64\sqrt{5}a^3}{5}$

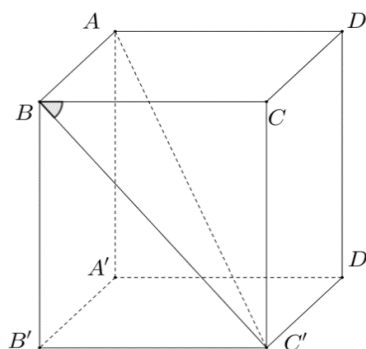
Lời giải

a) Đúng: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.AA' = 12a^3$



b) Đúng: $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow (BD'; (ABCD)) = \widehat{DBD'} = 60^\circ \Rightarrow DD' = BD \cdot \tan 60^\circ = 5a\sqrt{3}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.DD' = 60\sqrt{3}a^3$

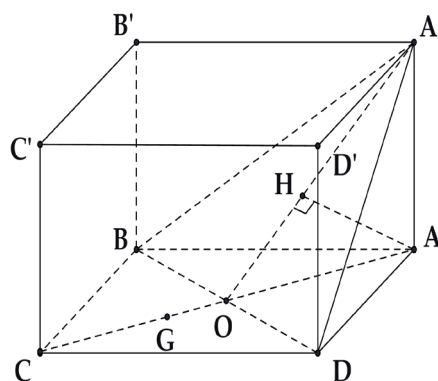


c) Sai: Ta có $\begin{cases} (ABC') \cap (ABCD) = AB \\ BC' \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow ((ABC'), (ABCD)) = C'BC = 30^\circ.$

Tam giác $C'BC$ vuông tại C nên $CC' = BC \cdot \tan C'BC = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = AB.AD.CC' = 3a.4a.\frac{4\sqrt{3}a}{3} = 16\sqrt{3}a^3$.

d) Sai: Gọi O là giao điểm của AC và BD .



Ta có $AG \cap (A'BD) = O$ nên $d(A, (A'BD)) = \frac{AO}{GO} d(G, (A'BD)) = 3d(G, (A'BD)) = \frac{4a}{3}$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'O)$, trong $(AA'O)$ dựng $AH \perp A'O$ tại H .

Khi đó $\begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AH \Rightarrow AH = \frac{4a}{3}$.

Gọi $x > 0$ là cạnh hình vuông $ABCD$, ta có $AO = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Khi đó

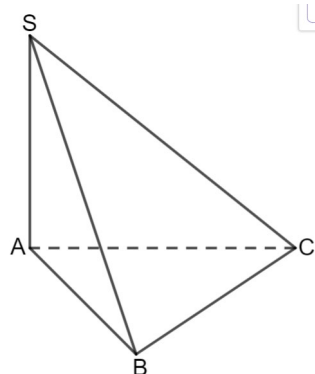
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{AA'^2} \Leftrightarrow \frac{9}{16a^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{4a^2} \Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{5}{16a^2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{10}a}{5}.$$

Thể tích khối hộp chữ nhật $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot AA' = \frac{4\sqrt{10}a}{5} \cdot \frac{4\sqrt{10}a}{5} \cdot 2a = \frac{64a^3}{5}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng 60° .

- Chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là SA .
- Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCA}$.
- Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



Ta có $SC \cap (ABC) = C$, $SA \perp (ABC)$ suy ra AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$



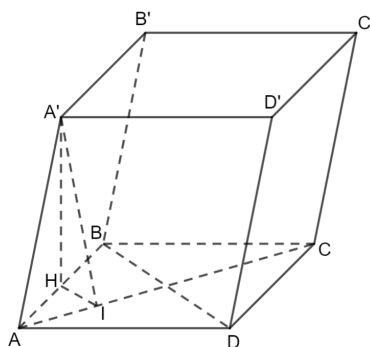
Vậy góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng AC , SC và bằng góc $\widehat{SCA}$.

- a) Đúng: Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- b) Đúng: Chiều cao hình chóp $S.ABC$ là $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
- c) Sai: Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$.
- d) Đúng

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Mặt bên $(A'B'BA)$ vuông góc với mặt đáy, biết $A'AB$ là tam giác cân, góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(ABCD)$ bằng 60° .

- a) Gọi $A'H$ là đường cao của tam giác cân $A'AB$. Khi đó, H là trung điểm AB .
- b) Chiều cao của lăng trụ là AA' .
- c) Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.
- d) Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi $A'H$ là đường cao của tam giác cân $A'AB$. Khi đó, H là trung điểm AB .

a) Đúng: Vì $(A'B'BA) \perp (ABCD)$, $A'H \perp AB$ suy ra $A'H \perp (ABCD)$.

b) Sai: Kẻ $HI \perp AC$ tại I , $AC \perp A'H$ suy ra $AC \perp A'I$

Góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$, $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng $A'I$, HI và bằng góc $\widehat{A'IH}$.

$$BD = 2a, HI = \frac{1}{4}BD = \frac{a}{2}.$$

Chiều cao của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $A'H = HI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $S_{ABCD} = 2a^2$.

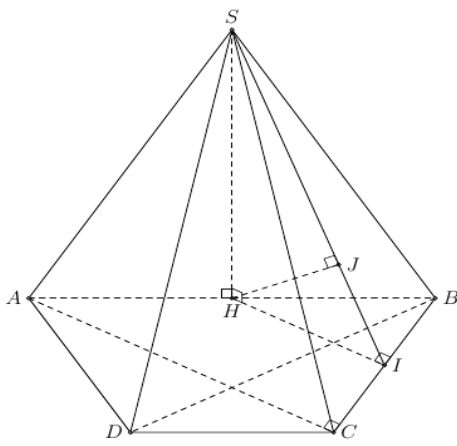
c) Sai: Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $S_{ABCD} = 2a^2$.

d) Đúng: Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a^3\sqrt{3}$.

**E** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân với $AB = 2a, AD = BC = CD = a$ mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



Gọi I, H lần lượt là trung điểm AB, BC . Ta có
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AB \end{cases}$$

Hình thang cân $ABCD$ có
$$\begin{cases} HA = HB = \frac{AB}{2} = a \\ AD = DC = BC = a \end{cases} \Rightarrow \triangle BHC \text{ đều} \Rightarrow HI \perp BC.$$

Mà $AC \parallel HI \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Vì H là trung điểm $AB \Rightarrow d(H, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Do
$$\begin{cases} BC \perp HI \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHI) \Rightarrow (SHI) \perp (SBC).$$

Trong mặt phẳng (SHI) , kẻ $HJ \perp SI, J \in SI \Rightarrow HJ \perp (SBC) \Rightarrow HJ = d(H, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Có $HI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a).

Mặt khác $\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Leftrightarrow SH^2 = 3a^2 \Leftrightarrow SH = a\sqrt{3}$.

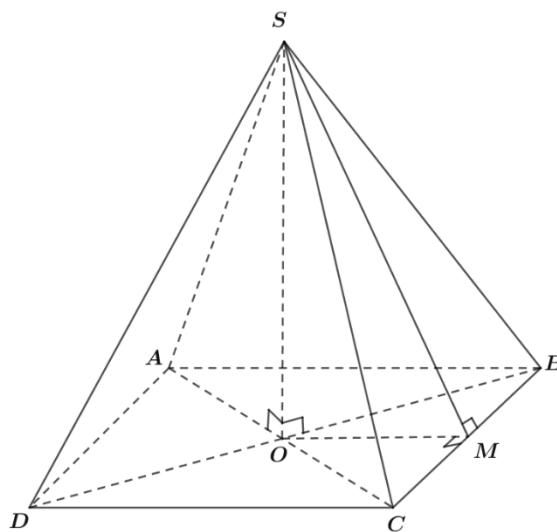
Ba tam giác $\triangle ADH, \triangle HDC, \triangle HBC$ đều cạnh $a \Rightarrow S_{ABCD} = 3S_{\triangle ADH} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$.



Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{m\sqrt{3}a^3}{n\sqrt{5}}$; $m, n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

Lời giải.



$ABCD$ là hình vuông có tâm O và cạnh bằng x .

Gọi M là trung điểm của BC . Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMO}$ bằng 60° .

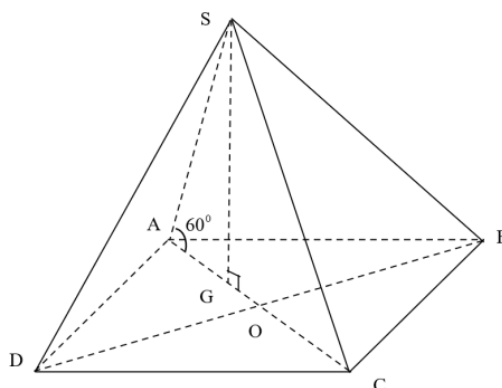
$$\text{Ta có } SM^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{4}, SO^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Và } \cos \widehat{SMO} = \frac{OM}{SM} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{x^2}{4}}{4a^2 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{4a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Suy ra } SO = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{5}}. \text{ Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot AB^2 = \frac{32\sqrt{3}a^3}{15\sqrt{5}}.$$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a , góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Biết đỉnh S cách đều ba điểm A, B, D . Đường thẳng SA hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải.





Ta có: $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$.

$\Rightarrow$ Tam giác ABD đều cạnh a

$$\Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD .

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \frac{2}{3} AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Lại có: đỉnh S cách đều ba điểm A, B, D và tam giác ABD đều $\Rightarrow SG \perp (ABCD)$.

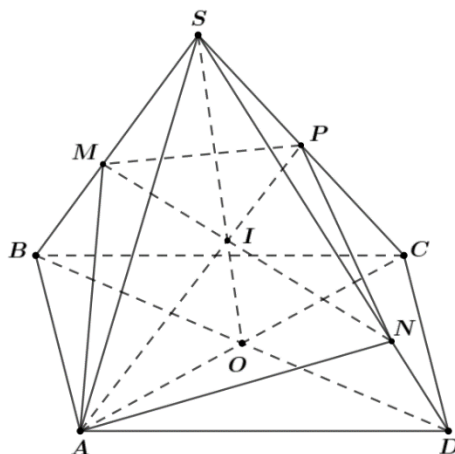
$$\Rightarrow (\widehat{SA; (ABCD)}) = \widehat{SAG} = 60^\circ.$$

$$\text{Xét tam giác } SAG \text{ vuông tại } G: \tan \widehat{SAG} = \frac{SG}{AG} \Rightarrow SG = AG \cdot \tan \widehat{SAG} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 60^\circ = a.$$

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích V . Gọi P là trung điểm SC . Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SB , SD lần lượt tại M , N . Gọi V' là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ bằng

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$ và I là giao điểm của SO và AP . Suy ra MN đi qua trọng tâm I của tam giác SBD .

$$\text{Đặt } x = \frac{SB}{SM}, x \geq 1.$$

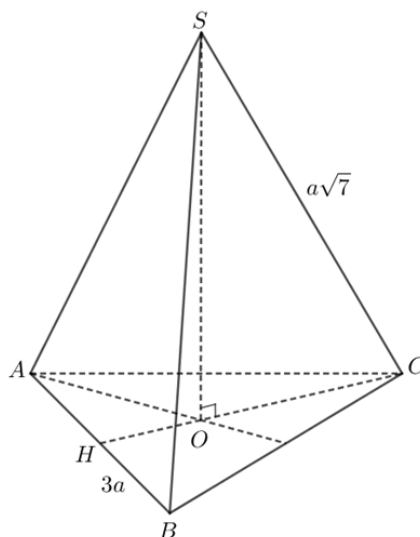
$$\text{Ta có } \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = \frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SP} = 3 \Leftrightarrow \frac{SD}{SN} = 3 - x \geq 1, \text{ suy ra } 1 \leq x \leq 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } \frac{V'}{V} &= \frac{V_{S.AMP}}{V} + \frac{V_{S.ANP}}{V} = \frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(3-x)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{x(3-x)} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{\left(\frac{x+3-x}{2} \right)^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ là $\frac{1}{3}$, xảy ra khi $x = 3 - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa điều kiện).

Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a .

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB và O là tâm của tam giác đều ABC .

$$\text{Ta có: } CH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CO = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Vì $SO \perp (ABC)$ và $OC \subset (ABC)$ nên ta có $SO \perp OC$.

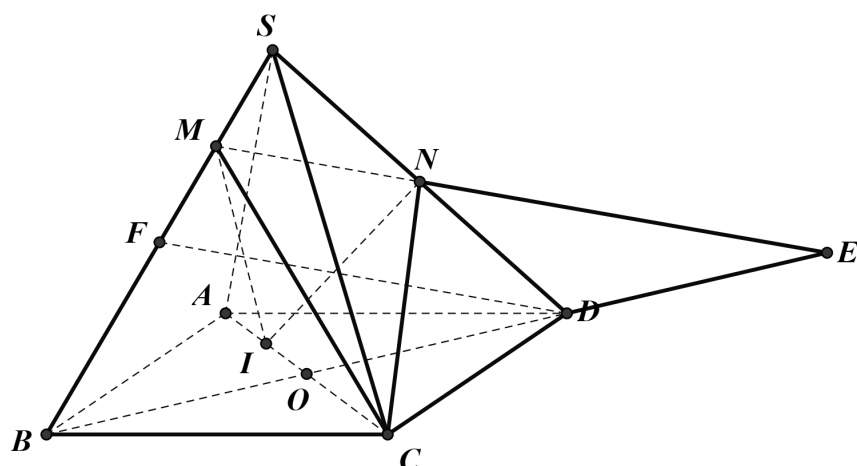
$$\text{Xét tam giác } SOC \text{ vuông tại } O: SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - (a\sqrt{3})^2} = 2a.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC: V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.2a.\frac{9a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và có thể tích bằng V . Gọi M, N, I lần lượt là các điểm nằm trên cạnh SB, SD sao cho $SM = \frac{1}{4}SB$, $SN = \frac{1}{2}SD$ và I là trung điểm AO . Xác định thể tích tứ diện $IMNC$ theo V .

Lời giải



Gọi $E = MN \cap BD$, F là trung điểm SB .

Suy ra $MN \parallel FD$ và $FD \parallel ME$.

$$\Rightarrow \frac{MN}{FD} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{FD}{ME} = \frac{BF}{BM} = \frac{2}{3}. \text{ Từ đó } \Rightarrow \frac{MN}{ME} = \frac{1}{3}$$

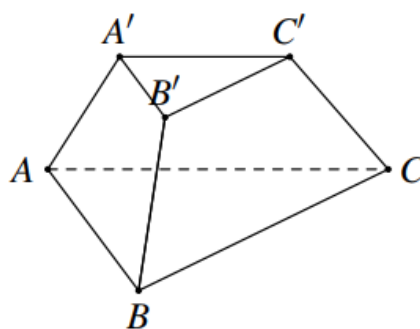
$$\text{Ta có: } \frac{V_{MNIC}}{V_{MEIC}} = \frac{MN}{ME} \cdot \frac{MI}{MI} \cdot \frac{MC}{MC} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{V_{MEIC}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(M; (ABCD)) \cdot S_{\triangle ICE}}{\frac{1}{3} \cdot d(S; (ABCD)) \cdot S_{\triangle ABCD}} = \frac{MB}{SB} \cdot \frac{\frac{1}{2} IC \cdot EO}{\frac{1}{2} AC \cdot BD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{9}{16} \quad (2).$$

$$\text{Nhân (1), (2) vế theo vế, suy ra: } \frac{V_{MNIC}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\text{Vậy: } V_{MNIC} = \frac{3}{16} V_{SABCD} = \frac{3}{16} V.$$

Câu 7: Tính thể tích của khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a, A'B' = a$.



Lời giải

$$\text{Diện tích tam giác đều } ABC: S = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(4a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}a^2.$$

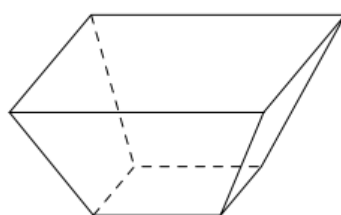


$$\text{Diện tích tam giác đều } A'B'C' : S' = \frac{A'B'^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

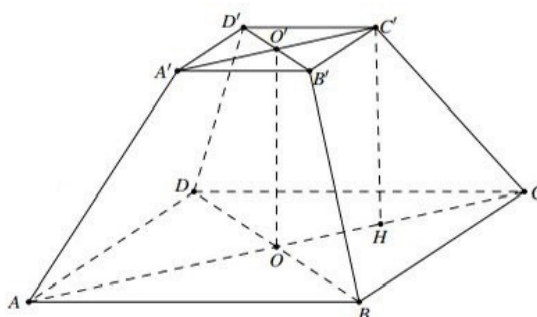
$$\text{Thể tích khối chóp cụt là: } V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S.S'} + S').$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.3a.\left(4\sqrt{3}a^2 + \sqrt{4\sqrt{3}a^2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}\right) = \frac{21\sqrt{3}a^3}{4}.$$

Câu 8: Tính thể tích của một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm, đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm.



Lời giải



Xét tam giác vuông $HC'C$

$$\text{Ta có: } OC = 40\sqrt{2}, O'C' = 20\sqrt{2} \text{ suy ra } C'H = \sqrt{80^2 - (40\sqrt{2} - 20\sqrt{2})^2} = 20\sqrt{14} \text{ (cm)}.$$

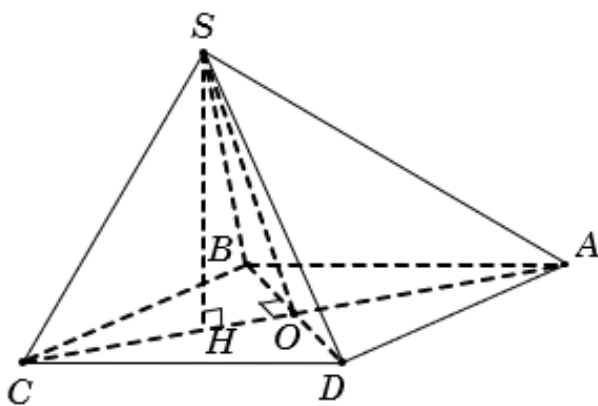
$$\text{Suy ra } OO' = C'H = 20\sqrt{14} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Thể tích của cái sọt đựng đồ là: } V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S.S'} + S').$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.20\sqrt{14}.(6400 + \sqrt{6400.1600} + 1600) \approx 279377,08 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 1.
Để thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất thì x bằng

Lời giải



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OA = OC$. (1)

Theo bài ra, ta có $\triangle SBD = \triangle CBD \Rightarrow OS = OC$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $OS = OA = OC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 1}$.

Suy ra $OA = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2}$ và $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2.OA.OB = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}}{2}$.

Ta có $SB = SC = SD = 1$, suy ra hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $BCD \rightarrow H \in AC$.

Trong tam giác vuông SAC , ta có $SH = \frac{SA.SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

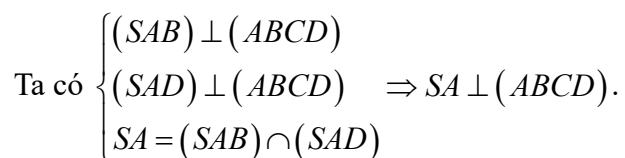
Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{6} x \sqrt{3 - x^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x^2 + 3 - x^2}{2} \right) = \frac{1}{4}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} \leq \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A với đáy lớn $AD = 2a$, $BC = a$ và $AB = \frac{3a}{2}$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$.

Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Trong (SAH) , kẻ $AK \perp SH$ tại K .

$$\text{Suy ra } d(A, (SCD)) = 2d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Mà $AK \perp SH$. Suy ra $AK \perp (SCD)$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(3a)^2} = \frac{13}{36a^2}$.

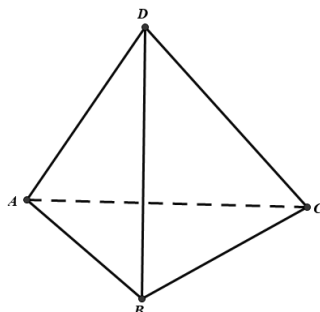
Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} SA . S_{ABCD} = \frac{1}{3} SA . \frac{AD+BC}{2} . AB = \frac{1}{3} . \frac{6\sqrt{11}a}{11} . \frac{2a+a}{2} . \frac{3a}{2} = \frac{9\sqrt{11}a^3}{22} \text{ (đvtt).}$$



Câu 11: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$ và số đo góc $\widehat{ACB}$ bằng 45° . Biết rằng ba cạnh AD, BC, AC thỏa mãn điều kiện $AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3$. Độ dài cạnh CD bằng bao nhiêu?

Lời giải.



$$\text{Ta có } V_{A.BCD} = V_{D.ABC} \leq \frac{1}{3} AD \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} AD \cdot \left(\frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin 45^\circ \right).$$

$$\text{Do } V_{A.BCD} = \frac{1}{6} \text{ suy ra } \frac{1}{6} \leq \frac{1}{6} AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} \geq 1 \quad (1)$$

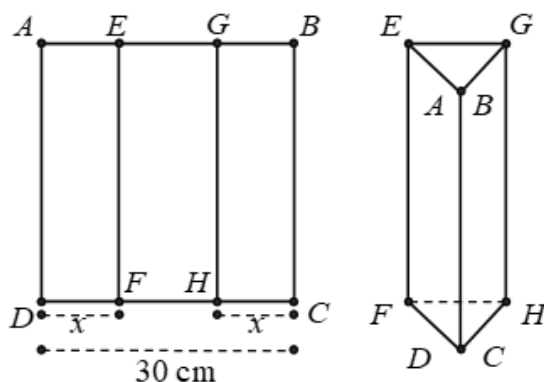
Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} \geq 3\sqrt[3]{AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}}}, \text{ do } AD + BC + \frac{AC}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} \leq 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} DA \perp (ABC) \\ AD \cdot BC \cdot \frac{AC}{\sqrt{2}} = 1 \\ AD = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DA \perp (ABC) \\ AD = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{3}. \text{ Vậy } DC = \sqrt{3}.$$

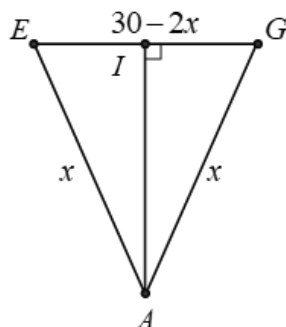
Câu 12: Một tấm kẽm chữ nhật $ABCD$ có $AB = 30\text{cm}$, $AD = 40\text{cm}$. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:



Lời giải



Đường cao lăng trụ là $AD = 40\text{cm}$ không đổi. Để thể tích lăng trụ lớn nhất chỉ cần diện tích đáy lớn nhất.

Trong tam giác AEG cân tại A , gọi I là trung điểm cạnh $EG \Rightarrow AI \perp EG$

Khi đó $IG = 15 - x$, ($0 < x < 15$)

$$\text{Có } AI = \sqrt{x^2 - (15 - x)^2} = \sqrt{30x - 225}, x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right).$$

$$S_{\Delta AEG} = \frac{1}{2} AI \cdot EG = \frac{1}{2} (30 - 2x) \sqrt{30x - 225} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{(15 - x)^2 (2x - 15)}$$

Vậy ta cần tìm $x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$ để $S(x) = (15 - x)^2 (2x - 15)$ lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $15 - x$, $15 - x$, $2x - 15$ ta được

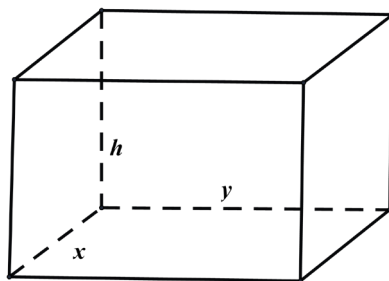
$$S(x) = (15 - x)^2 (2x - 15) \leq \left(\frac{15 - x + 15 - x + 2x - 15}{3}\right)^3 = 125$$

Vậy diện tích đáy lớn nhất là $S = 125\text{cm}^2$ đạt được khi $15 - x = 2x - 15 \Leftrightarrow x = 10\text{cm}$

Khi đó thể tích lớn nhất là $V = S \cdot h = 125 \cdot 40 = 5000\text{cm}^3$ đạt được khi $x = 10\text{cm}$.

Câu 13: Một phòng học có dạng là một hình hộp chữ nhật có chiều dài là 8m , chiều rộng là 6m , thể tích là 192m^3 . Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường phía trong phòng. Biết diện tích các cửa bằng 10m^2 . Tính diện tích cần quét vôi.

Lời giải



Gọi x, y, h ($x, y, h > 0$) lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của phòng học.

$$\text{Ta có: } V = xyh \Leftrightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{192}{6 \cdot 8} = 4 \text{ (m)}$$

$$\text{Diện tích xung quanh phòng học là } 2xh + 2hy = 2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 = 112 \text{ (m}^2\text{)}.$$



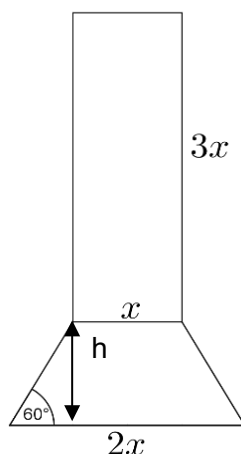
Diện tích trần nhà là $x.y = 6.8 = 48 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích cần quét vôi là $112 + 48 - 10 = 150 \text{ (m}^2\text{)}$.

Câu 14: Một ống khói có cấu trúc gồm một khối chóp cắt tứ giác đều có thể tích V_1 và một khối hộp chữ nhật có thể tích V_2 ghép lại với nhau như hình bên dưới. Cho biết bản vẽ hình chiếu của ống khói với phương chiếu trùng với phương của một cạnh đáy khối chóp cắt, hãy tính tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.



Lời giải



Hình chiếu của ống khói gồm một hình chữ nhật có chiều dài là $3x$, chiều rộng là x và một hình thang cân có độ dài 2 đáy là x và $2x$.

Do khối chóp cắt tứ giác đều có 2 đáy đều là hình vuông nên ta thấy một mặt của khối hộp chữ nhật là hình vuông cạnh x (mặt tiếp xúc của 2 khối). Từ đây ta có 3 kích thước của khối hộp chữ nhật là x , x , và $3x$.

Đối với khối chóp cắt tứ giác đều, 2 đáy lần lượt có độ dài cạnh là x và $3x$. Nếu ta gọi h là chiều cao của hình thang cân trong hình thì h cũng đồng thời là chiều cao của khối chóp cắt.

Thể tích phần ống dạng khối hộp chữ nhật: $V_2 = x.x.3x = 3x^3$.

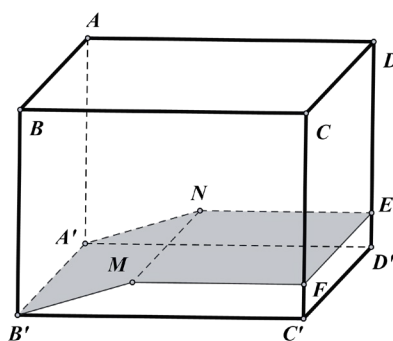
Dựa theo công thức tính được thể tích phần khối chóp cắt:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot h \left(x^2 + x.2x + (2x)^2 \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2} \cdot \tan 60^\circ \right) \cdot 7x^2 = \frac{7\sqrt{3}}{6} x^3.$$

Vậy tỉ số thể tích: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7\sqrt{3}}{18}.$

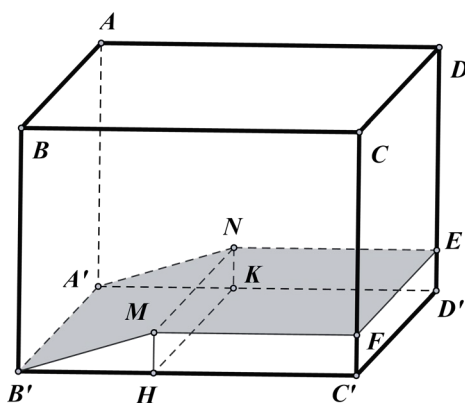


Câu 15: Một bể bơi ban đầu có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ sau đó người ta làm lại mặt đáy như hình vẽ.



Biết rằng $A'B'MN$ và $MNEF$ là các hình chữ nhật, $(MNEF) \parallel (A'B'C'D')$, $AB = 10$ m, $AD = 30$ m, $A'A = 20$ m, $MF = DE = 17$ m. Tỉ số thể tích của bể sau khi làm lại mặt đáy với thể tích của bể lúc ban đầu gần nhất với số nào dưới đây?

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta có thể tích khối lăng trụ tam giác

$$V_{B'MH.A'NK} = \frac{1}{2} B'H.HM.A'B' = \frac{1}{2} \cdot (30 - 17) \cdot (20 - 17) \cdot 10 = 195.$$

Thể tích khối hộp chữ nhật $V_{MNEF.HKD'C'} = HM.MF.MN = 3 \cdot 17 \cdot 10 = 510$.

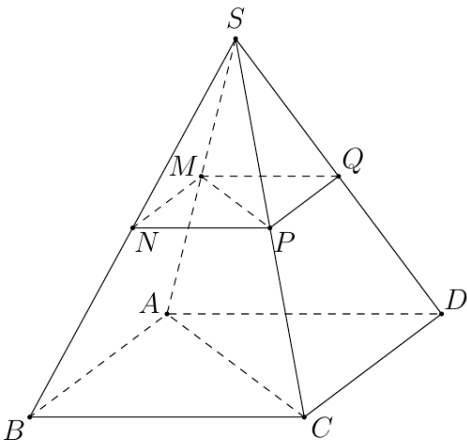
Suy ra thể tích của bể bơi sau khi làm lại mặt đáy là

$$V_s = AB.A'A.AD - (195 + 510) = 10 \cdot 20 \cdot 30 - 705 = 5295 m^3.$$

Ta có tỉ số thể tích giữa hai bể bơi trước và sau là $\frac{V_s}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{5295}{10 \cdot 20 \cdot 30} \approx 0,87$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



Gọi thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ lần lượt là V' và V .

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD}$, do đó $V = 2V_{S.ABC} = 2V_{S.ACD}$.

Ta có
$$\frac{V'}{V} = \frac{V_{S.MNP} + V_{S.MPQ}}{V} = \frac{V_{S.MNP}}{V} + \frac{V_{S.MPQ}}{V} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}.$$

