

CHƯƠNG 1. ĐA THỨC

Bài 1. ĐƠN THỨC

I. LÝ THUYẾT.

1) Đơn thức và đơn thức thu gọn.

Ví dụ 1: Cho các biểu thức sau:

$$-2x^4y, \frac{1}{5}xy^2, -x-5, x \cdot \frac{3}{-7}y^6, 2x^2-3y, 5$$

Trong các biểu thức trên thì các biểu thức như $-2x^4y$, $\frac{1}{5}xy^2$, $x \cdot \frac{3}{-7}y^6$ và 5 gọi là các đơn thức.

Còn các biểu thức $-x-5$, $2x^2-3y$ không được gọi là các đơn thức.

Kết luận:

- ♣ Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số hoặc một biến hoặc có dạng tích của những số và biến.

Ví dụ 2: Trong các biểu thức sau, đâu là đơn thức?

$$99x^{100}, -1, 1-y, \frac{1}{x}-2, \frac{5}{-9}x, 2\sqrt{x}, 4y(1-x)$$

$$\text{Các đơn thức là } 99x^{100}, -1, \frac{5}{-9}x$$

2) Đơn thức thu gọn, bậc của một đơn thức.

Ví dụ 3: Cho đơn thức $A = 2x^2y \cdot (-3)xy^5z$

Nhận thấy trong đơn thức A có hai số là 2 và -3 và hai biến x, y xuất hiện hai lần nên gọi là đơn thức chưa thu gọn.

Để thu gọn đơn thức A ta làm như sau

$$A = 2x^2y \cdot (-3)xy^5z = 2 \cdot (-3)x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^5z = -6x^3y^6z$$

Với đơn thức A sau khi thu gọn thì tổng các số của các biến là 10 nên đơn thức A có bậc 10

- ♣ Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm một số hoặc có dạng tích của một số với những biến, mỗi biến chỉ xuất hiện một lần và đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.
- ♣ Tổng các số mũ của các biến trong một đơn thức thu gọn với hệ số khác 0 gọi là bậc của đơn thức đó.
- ♣ Trong một đơn thức thu gọn, phần số còn gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến.
Cụ thể: Với đơn thức $(-2)^7 x^3y^5z$ thì phần hệ số là $(-2)^7$ còn phần biến là x^3y^5z
- ♣ Với các đơn thức có hệ số là 1 hay -1 ta không viết số 1 .
Cụ thể: Với đơn thức $-x^5y$ có hệ số là -1
- ♣ Mỗi số khác 0 cũng là một đơn thức thu gọn với bậc là 0
- ♣ Số 0 cũng được gọi là một đơn thức, đơn thức này không có bậc.

3) Đơn thức đồng dạng.

Ví dụ 4: Cho hai đơn thức $A = 4x^2y^4$ và $B = \frac{-5}{2}x^2y^4$

Nhận thấy rằng hai đơn thức A và B có phần biến giống nhau nên gọi là hai đơn thức đồng dạng.

- ♣ Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có phần biến giống nhau.
- ♣ Hai đơn thức đồng dạng thì có cùng bậc.
- ♣ Để thực hiện phép cộng, trừ các đơn thức đồng dạng, ta cộng, trừ phần hệ số và giữ nguyên phần biến.

$$\text{Cụ thể } 3x^2y + (-7)x^2y = -4x^2y$$

II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Xác định hệ số, phần biến, bậc của đơn thức $\frac{-3}{4}x^2y \cdot \left(\frac{2}{3}xy^2z\right)$

Giải

$$\frac{-3}{4}x^2y \cdot \left(\frac{2}{3}xy^2z\right) = \frac{-3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^2 \cdot z = \frac{-1}{2} \cdot x^3y^3z$$

Hệ số là $\frac{-1}{2}$, phần biến là x^3y^3z , bậc là 7.

Bài 2: Thực hiện phép tính:

a) $x^2y - 7x^2y + 5xy^2$

b) $-5xy^3 - 7y^2(xy)$

c) $3x^4 - (5x^2)^2$

Giải

a) $x^2y - 7x^2y + 5xy^2 = -6x^2y + 5xy^2$.

b) $-5xy^3 - 7y^2(xy) = -5xy^3 - 7xy^3 = -12xy^3$.

c) $3x^4 - (5x^2)^2 = 3x^4 - 25x^4 = -22x^4$.

Bài 3: Cho đơn thức $A = \left(\frac{2}{3}x^2y^2\right)\left(\frac{-6}{5}x^4y^3\right)$.

a) Thu gọn rồi tìm bậc của đơn thức A .

b) Tính giá trị của đơn thức A tại $x = -1, y = -2$.

Giải

a) $A = \left(\frac{2}{3}x^2y^2\right)\left(\frac{-6}{5}x^4y^3\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-6}{5} \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot y^3 = \frac{-4}{5} \cdot x^6y^5$. Bậc là 11.

b) Tại $x = -1, y = -2$ thì đơn thức A có giá trị là

$$A = \frac{-4}{5} \cdot (-1)^6 \cdot (-2)^5 = \frac{(-4) \cdot 1 \cdot (-32)}{5} = \frac{128}{5}$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

$$x^2y, -3x-1, \frac{1}{5}-x^2y, -13, \frac{1}{6-x}, (-2)^3xy^7$$

Bài 2: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

$$\frac{6}{x^2}, \frac{x^2 y}{2}, \frac{-1}{x}, \frac{x}{-5^2}, \frac{-4}{5}, \frac{-x^2 y}{xy^2 z}$$

Bài 3: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)x^2, \frac{1}{2}(x^2 - 1), x^2 \cdot \frac{7}{2}, 6\sqrt{y}, \frac{1 - \sqrt{5}}{x}, \frac{x - y^2}{4}$$

Bài 4: Thu gọn, chỉ ra phần hệ số và tìm bậc của các đơn thức sau

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $5x^2 3xy^2$ | 2) $4x^2 \cdot (-4xy^2)$ | 3) $-x^2 y^5 \cdot (-xy)$ |
| 4) $-3xy^2 zy^2 z$ | 5) $-x^3 y^4 z^5 \cdot (-2)$ | 6) $2x^3 y^5 x^2 y^4 x$ |
| 7) $-2xy^2 xy^2 z \cdot 3^2$ | 8) $6xyxy^3 \cdot (-6)$ | 9) $-xy^2 z \cdot (-5)x^2 yz^2$ |
| 10) $\frac{2}{3}xyz \cdot (-3xy^2 z)$ | 11) $\frac{1}{2}x^2 y \cdot \left(\frac{-2}{3}xy^2\right)$ | 12) $\frac{1}{4}x^3 y \cdot (-2)x^3 y^4$ |
| 13) $\left(\frac{-1}{3}x^2 y\right)(2xy^3)$ | 14) $\left(\frac{-3}{4}x^2 y\right)(-xy^3)$ | 15) $\frac{3}{5}x^2 y^5 x^3 y^2 \cdot \frac{-2}{3}$ |
| 16) $\left(\frac{3}{4}x^2 y^3\right)\left(2\frac{2}{5}x^4\right)$ | 17) $\left(\frac{12}{15}x^4 y^5\right)\left(\frac{5}{9}x^2 y\right)$ | 18) $\left(-\frac{1}{7}x^2 y\right)\left(\frac{-14}{5}x^4 y^5\right)$ |

Bài 5: Thu gọn, chỉ ra phần hệ số và tìm bậc của các đơn thức sau

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $5xy^2 \cdot (-3y)^2$ | 2) $x^2 yz \cdot (-2xy)^3$ | 3) $(-2x^2 y)^2 \cdot 8x^3 yz^3$ |
| 4) $(-2xy^3)^2 \cdot (-2xyz)^3$ | 5) $(-5xy^3 z) \cdot (-4x^2)^2$ | 6) $(2x^2 y^3)^2 \cdot (-2xy)$ |
| 7) $\frac{-2}{3}xy^2 z \cdot (-3x^2 y)^2$ | 8) $(-2xy^3) \cdot \frac{3}{8} \cdot (xz^2)^2$ | 9) $\frac{1}{4} \cdot (x^2 y^3)^2 \cdot (-2xy)$ |
| 10) $\frac{1}{6}x \cdot (-2y^5)^3 \cdot (-9x^5 y)$ | 11) $(-3x^4 y^5 z^6)^3 \cdot \frac{1}{9}x^5 \cdot y^4$ | 12) $2xy^2 \cdot \left(\frac{-1}{3}x^2 y^3\right)^2$ |

Bài 6: Thu gọn, chỉ ra phần hệ số và tìm bậc của các đơn thức sau

- | | |
|--|---|
| 1) $A = \frac{3}{4}x^{n-1} \cdot \frac{4}{5}x^{2n+1} y^{2n+1} \cdot \frac{5}{6}xy^{n+1}$ | 2) $B = \frac{6}{4}x^{3-n} \cdot \frac{4}{2}x^{4-n} y^{5-n} \cdot \frac{2}{6}y^{6-n}$ |
| 3) $C = \frac{-4}{3}x^{2-n} y \cdot \frac{6}{7}x^{2n-3} y^{n-1} \cdot \frac{-1}{2}xy$ | 4) $D = \frac{1}{5}xy^{n+1} \cdot \frac{4}{3}x^{n+1} y \cdot \frac{15}{7}x^n y^n$ |

Bài 7: Phân thành các nhóm đơn thức đồng dạng trong các đơn thức sau:

$$-12x^2 y \quad -\frac{3}{8}xyz \quad -100 \quad -3yxz \quad -2xy \cdot x \quad y \cdot \left(-\frac{1}{3}xy\right)$$

Bài 8: Phân thành các nhóm đơn thức đồng dạng trong các đơn thức sau:

$$3x^3 y^2 \quad \frac{x^5 y^4 z^2}{11} \quad \frac{-x^3 y^3}{6} \quad -11x^3 y^3 \quad -6x^5 y^4 z^2 \quad 6\frac{1}{2}x^3 y^2$$

Bài 9: Thực hiện phép tính:

1) $xy - (-xy) + 5xy$

2) $6xy^2 - 3xy^2 - 12xy^2$

3) $3x^2y^3z^4 + (-4x^2y^3z^4)$

4) $4x^2y + (-8x^2y)$

5) $25x^2y + (-55x^2y)$

6) $3x^2y + 4x^2y - x^2y$

7) $xy^2 + x^2y + (-2xy^2)$

8) $12x^2y^3z^4 + (-7x^2y^3z^4)$

9) $-6xy^3 - (-6xy^3) + 6x^3y$

10) $-\frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}x^2 + x$

11) $2x^3 + 3x^3 - \frac{1}{3}x^3$

12) $5xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2$

13) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3$

14) $\frac{3}{4}xyz^2 + \frac{2}{4}xyz^2 + \frac{1}{4}xyz^2$

15) $\frac{5}{8}x^2y^3 + \frac{1}{2}y^3x^2 - 3x^2y^3$

Bài 10: Thực hiện phép tính:

1) $-xyz^2 - 3xz.yz$

2) $-8x^2y - x.(xy)$

3) $4xy^2.x - (-12x^2y^2)$

4) $\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{1}{3}x^2y.y^2$

5) $3xy(x^2y) - \frac{5}{6}x^3y^2$

6) $\frac{3}{4}x^4y - \frac{1}{6}xy.x^3$

7) $\frac{4}{5}y^2x^5 - x^3.x^2y^2$

8) $-xy^3 - \frac{2}{7}y^2.xy$

9) $\frac{5}{6}xy^2z - \frac{1}{4}xyz.y$

10) $15x^4 + 7x^4 - 20x^2.x^2$

11) $\frac{1}{2}x^5y - \frac{3}{4}x^5y + xy.x^4$

12) $13x^2y^5 - 2x^2y^5 + x^6$

Bài 11: Tìm hiệu $A - B$ biết

1) $-x^2y + A + 2xy^2 - B = 3x^2y - 4xy^2$

2) $5xy^2 - A - 6yx^2 + B = -7xy^2 + 8x^2y$

3) $3x^2y^3 - A - 5x^3y^2 + B = 8x^2y^3 - 4x^3y^2$

4) $-6x^2y^3 + A - 3x^3y^2 - B = 2x^2y^3 - 7x^3y^2$

5) $A - \frac{3}{8}xy^2 - B + \frac{5}{6}x^2y = \frac{3}{4}x^2y - \frac{5}{8}xy^2$

6) $5xy^3 - A - \frac{5}{8}yx^3 + B = 2\frac{1}{4}xy^3 - \frac{7}{6}x^3y$

Bài 12: Cho đơn thức: $A = \frac{8}{3}x^2y^2 \cdot \left(\frac{-1}{4}x^2y\right)$.

a) Thu gọn đơn thức A rồi xác định hệ số và tìm bậc của đơn thức.

b) Tính giá trị của A tại $x = -1, y = 1$.

Bài 13: Cho đơn thức $B = \left(\frac{-2}{3}xy^2\right)\left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right)$.

a) Thu gọn đơn thức B

b) Tính giá trị của đơn thức B khi $x = 1, y = -1$.

Bài 14: Cho đơn thức: $C = \frac{1}{3} \cdot (-6x^2y^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^3y\right)$.

a) Thu gọn C

b) Tính giá trị của C tại $x = 1, y = -1$.

Bài 15: Cho đơn thức $D = \left(\frac{-3}{7}x^2y\right)\left(\frac{7}{9}x^2y^2\right)$.

a) Thu gọn đơn thức D rồi xác định hệ số và phân biến của đơn thức.

b) Tính giá trị của đơn thức D tại $x = -1, y = 2$.

Bài 16: Cho đơn thức $F = \left(\frac{-3}{5}xy^2\right)^2 \cdot \left(\frac{20}{27}x^3y\right)$

- Thu gọn đơn thức và tìm bậc của đơn thức F
- Tính giá trị của biểu thức F biết $y = \frac{-x}{3}$ và $x + y = 2$.

Bài 17: Cho 3 đơn thức $\frac{-3}{8}x^2z$, $\frac{2}{3}xy^2z^2$, $\frac{4}{5}x^3y$.

- Tính tích của 3 đơn thức trên.
- Tính giá trị của mỗi đơn thức và giá trị của tích ba đơn thức tại $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$.

Bài 18: Cho hai đơn thức $\frac{-3}{2}x^3y^2z$ và $(-6xy^3z^5)$.

- Tính tích hai đơn thức trên
- Chỉ ra hệ số, phần biến và bậc của đơn thức tích.

Bài 19: Cho đơn thức: $A = \frac{1}{18}x^2y \cdot \frac{-9}{7}xy^2$.

- Thu gọn đơn thức.
- Tính giá trị của đơn thức tại $x = 2$, $y = -1$.

Bài 20: Cho đơn thức $B = \left(\frac{-1}{2}xy^3\right)(2x^3y)^2$.

- Thu gọn đơn thức B
- Tính giá trị của B khi $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$.

Bài 21: Cho hai đơn thức: $A = -18x^3y^4z^5$ và $B = \frac{2}{9}x^5(yz^2)^2$.

- Đơn thức C là tích của đơn thức A và B . Xác định phần biến, phần hệ số, bậc của C .
- Tính giá trị của đơn thức C khi $x = -1$, $y = 1$, $|z| = -1$.

Bài 2. ĐA THỨC

I. LÝ THUYẾT.

1) Đa thức.

Ví dụ 1: Cho các biểu thức sau

$$A = x^2y + x^3 - 4x + 1 \text{ và } B = x^5 - 4xy^3$$

Nhận thấy hai biểu thức A và B là tổng hoặc hiệu của các đơn thức nên gọi là các đa thức.

Kết luận:

- ♣ Đa thức là tổng của những đơn thức, mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.
- ♣ Mỗi đơn thức cũng được gọi là một đa thức.

Ví dụ 2: Cho đa thức $C = x^2y - 5x - 7x^3$

Ta có thể viết đa thức C thành tổng của ba đơn thức $C = x^2y + (-5x) + (-7x^3)$

2) Thu gọn đa thức.

Ví dụ 3: Cho đa thức $A = x^2y^3 - 5x^4 - 6x^2y^3 + 1 + 6x^4$

Nhận thấy trong đa thức A có 5 hạng tử, trong đó có một số hạng tử là đơn thức đồng dạng nên để đơn giản ta sẽ thu gọn đa thức A như sau:

$$A = x^2y^3 - 6x^2y^3 - 5x^4 + 6x^4 + 1 = -5x^2y^3 + x^4 + 1$$

Kết luận:

- ♣ Đa thức thu gọn là đa thức không có hai hạng tử nào đồng dạng.
- ♣ Bậc của một đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.
- ♣ Một số khác 0 cũng được coi là một đa thức bậc 0
- ♣ Số 0 cũng là một đa thức, gọi là đa thức 0 và không có bậc xác định.

II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Thu gọn rồi tìm bậc của mỗi đa thức $A = x^3y^4 - 5y^8 + x^3y^4 + xy^4 - xy^4 + 5y^8$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= x^3y^4 - 5y^8 + x^3y^4 + xy^4 - xy^4 + 5y^8 \\ &= (x^3y^4 + x^3y^4) + (-5y^8 + 5y^8) + (xy^4 - xy^4) = 2x^3y^4 \text{ bậc } 7. \end{aligned}$$

Bài 2: Thu gọn $B = 3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 - 3x^5y^3$ rồi tính giá trị tại $x = 1; y = -2$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= 3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 - 3x^5y^3 = (3x^5y^3 - 3x^5y^3) + (-4x^4y^3 + 2x^4y^3) \\ &= -2x^4y^3 \end{aligned}$$

$$\text{Tại } x = 1; y = -2 \text{ thì } B = -2 \cdot 1^4 \cdot (-2)^3 = 16.$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Trong các biểu thức sau, đâu là đa thức

$$x^2y, x+2y, \frac{1}{x}, 6-\frac{1}{x^2+y^2}, -5, \frac{x+2y}{z^2}$$

Bài 2: Trong các biểu thức sau, đâu là đa thức

$$\frac{1}{2}xy^2 - \frac{x}{3}, \frac{x+2y}{5}, 6-2xy + \frac{1}{x^2}, 0, \frac{-4x^3}{y^4}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Bài 3: Trong các biểu thức sau, đâu là đa thức

$$(1-x^2)^2, 1-x^2+y^2, \frac{x}{x^2+1}, \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}, \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}, \frac{-1}{7}$$

Bài 4: Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau

1) $A = x^6 + y^5 + x^4y^4 + 1 - x^4y^4$

2) $B = 7x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 1 + (-7x^5) - 2$

3) $C = x^4 - 2x^2y^2 + 3xy - 4y + 5 - x^4$

4) $D = x^2 - 2x^2y + 5x^2 + 2x^2y$

5) $E = x^6 + x^2y^5 + xy^6 + x^2y^5 - xy^6$

6) $F = x^3y^4 - 5xy^8 + x^3y^4 + xy^4 + 5y^8$

Bài 5: Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau

1) $A = 5x^2 \cdot 2y^2 - 5x \cdot 3xy - x^2y + 6x^2y^2$

2) $B = 3x \cdot x^4 + 4x \cdot x^3 - 5x^2x^3 - 5x^2 \cdot x^2$

3) $C = 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz$

4) $D = 5x^3y^2 + 4x^2y^2 - x^3 + 8x^2y^2 - 5x^3y^2$

5) $E = 3x^2y - \frac{1}{4}xy + 1 - 3x^2y + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}xy$

6) $F = 3x^5 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{3}{4}xy^2 - 3x^5 - \frac{3}{4}x^2y$

7) $G = x^3 - 5xy + 3x^3 + xy - x^2 + \frac{1}{2}xy - x^2$

8) $H = 3xy^5 - 3x^6y^7 + \frac{1}{2}x^2y - 3xy^5 + 3x^6y^7$

Bài 6: Thu gọn rồi tính giá trị của các đa thức sau

a) $A = \frac{1}{3}x^2y + xy^2 - xy + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy - \frac{1}{3}x^2y$ tại $x = \frac{1}{2}, y = 1$.

b) $B = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{2}{3}x^2y - xy + xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + 2xy$ tại $x = \frac{1}{2}, y = 1$.

c) $C = 2x^2y^4 + 4xyz - 2x^2 - 5 + 3x^2y^4 - 4xyz + 3 - y^9$ tại $x = 1, y = -1$

Bài 3. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

I. LÝ THUYẾT.

1) Cộng, trừ hai đa thức.

Ví dụ 1: Cho hai đa thức $A = 3x + y - z$ và $B = 4x - 2y + 6z$

Khi đó tổng hai đa thức A và B là

$$A + B = 3x + y - z + 4x - 2y + 6z = (3x + 4x) + (y - 2y) + (-z + 6z) = 7x - y + 5z$$

Và hiệu hai đa thức A cho đa thức B là

$$A - B = 3x + y - z - (4x - 2y + 6z) = 3x + y - z - 4x + 2y - 6z = -x + 3y - 7z$$

Kết luận:

- ♣ Cộng hay trừ hai đa thức là thu gọn đa thức nhận được sau khi nối hai đa thức đã cho bởi dấu "+" hay dấu "-".
- ♣ Phép cộng đa thức cũng có các tính chất như giao hoán, kết hợp như phép cộng các số.

II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Thực hiện phép tính $(-5x^2y + 3xy^2 + 7) + (-6x^3y + 4xy^2 - 5)$

Giải

$$\begin{aligned} & (-5x^2y + 3xy^2 + 7) + (-6x^3y + 4xy^2 - 5) = -5x^2y + 3xy^2 + 7 - 6x^3y + 4xy^2 - 5 \\ & = -5x^2y + (3xy^2 + 4xy^2) - 6x^3y + 2 = -5x^2y + 7xy^2 - 6x^3y + 2 \end{aligned}$$

Bài 2: Thực hiện phép tính $(4x^2 + x^2y - 5y^2) - (x^3 - 6xy^2 - x^2y)$

Giải

$$\begin{aligned} & (4x^2 + x^2y - 5y^2) - (x^3 - 6xy^2 - x^2y) = 4x^2 + x^2y - 5y^2 - x^3 + 6xy^2 + x^2y \\ & = 4x^2 + (x^2y + x^2y) - 5y^2 - x^3 + 6xy^2 = 4x^2 + 2x^2y - 5y^2 - x^3 + 6xy^2 \end{aligned}$$

Bài 3: Cho đa thức $A = x^5y + 3x^4 + 5x^2y$, $B = 2xy - 3x^4 - 2xy + 9 + 2x^2y$.

- Tính $C = A + B$
- Tính giá trị của C tại $x = -1$, $y = 2$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } C = A + B &= x^5y + 3x^4 + 5x^2y + 2xy - 3x^4 - 2xy + 9 + 2x^2y \\ &= x^5y + (3x^4 - 3x^4) + (5x^2y + 2x^2y) + (2xy - 2xy) + 9 = x^5y + 7x^2y + 9 \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Thực hiện phép tính

- $(x^2 - 2yz + z^2) - (3yz - z^2 + 5x^2)$
- $(x^2 - 2yz + z^2) + (3yz - z^2 + 5x^2)$
- $(x^3 + 6x^2 + 5y^3) - (2x^3 - 5x + 7y^3)$
- $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 + 2xy + x^2 + 1)$
- $(x^2 - 2xy + y^2) - (y^2 + 2xy + x^2 + 1)$
- $(4x^2 - 5xy + 3y^2) + (3x^2 + 2xy - y^2)$
- $(4x^2 - 5xy + 3y^2) - (3x^2 + 2xy - y^2)$
- $(5x^3 - 10x^2y) + (7x^2y - 5x^3 + 3xy^2)$

$$9) (-3x^2y - 2xy^2 + 6) + (-x^2y + 5xy^2 - 1) \quad 10) (15x^2y - 7xy^2 - 6y^2) + (-12x^2y + 7xy^2)$$

Bài 2: Thực hiện phép tính

$$\begin{aligned} 1) (3x^3 - xy^2 + 4x) + (-2x^3 + xy^2 + 3x) & \quad 2) (3x^3 - xy^2 + 4x) - (-2x^3 + xy^2 + 3x) \\ 3) (x^2 + y - x^2y^2 - 1) + (x^2 - 2y + xy + 1) & \quad 4) (x^2 + y - x^2y^2 - 1) - (x^2 - 2y + xy + 1) \\ 5) (5x^2y + 5x + 3) + (xyz - 4x^2y + 5x - 2) & \quad 6) (xyz - 4x^2y + 5x - 2) - (5x^2y + 5x + 3) \\ 7) (5x^2y - 5xy^2 + xy) + (xy - x^2y^2 + 5x^2y) & \quad 8) (5x^2y - 5xy^2 + xy) - (xy - x^2y^2 + 5x^2y) \\ 9) (x^2y + x^3 - xy^2 + 3) + (x^3 + xy^2 - xy - 6) & \quad 10) (x^3 + xy^2 - xy - 6) - (x^2y + x^3 - xy^2 + 3) \\ 11) (xy + y^2 - x^2y^2 - 2) + (x^2y^2 + 5 - y^2) & \quad 12) (xy + y^2 - x^2y^2 - 2) - (x^2y^2 + 5 - y^2) \end{aligned}$$

Bài 3: Tìm đa thức A biết

$$\begin{aligned} 1) A - (xy + x^2 - y^2) &= x^2 + y^2 & 2) (6x^2 - 3xy^2) + A &= x^2 + y^2 - 2xy^2 \\ 3) A + (x^2 + y^2) &= 5x^2 + 3y^2 - xy & 4) A + (5x^2 - 2xy) &= 6x^2 + 9xy - y^2 \\ 5) A + (3x^2y - 2xy^3) &= 2x^2y - 4xy^3 & 6) A + (x^2 - 2y^2) &= x^2 - y^2 + 3y^2 - 1 \\ 7) A - (2xy - 4y^2) &= 5xy + x^2 - 7y^2 & 8) A - (3xy - 4y^2) &= x^2 - 7xy + 8y^2 \\ 9) A - (5x^2 - xyz) &= xy + 2x^2 - 3xyz + 5 & 10) (25x^2y - 13xy^2 + y^3) - A &= 11x^2y - 2y^3 \\ 11) A - (12x^4 - 15x^2y + 2xy^2 + 7) &= 0 & 12) 2yz^2 - 4y^2z + 5yz - A &= 0 \\ 13) A - (4xy - 3y^2) &= x^2 - 7xy + 8y^2 & 14) A + (5x - 2xy) &= 6x^2 + 9xy - y^2 \\ 15) A - x^3 + 5x^2y &= x^3 + y^3 & 16) (25x^2y - 13xy^2 + x^3) - A &= 11x^2y - 2x^3 \end{aligned}$$

Bài 4: Cho hai đa thức $A = \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) - (a - 2b)$ và $B = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - (a - b)$.

Tính $A + B$ và $A - B$.

Bài 5: Cho hai đa thức $C = x - [b - (c - a - b)]$ và $D = b + [a - (c - b - a)]$.

Tính $C + D$ và $C - D$.

Bài 6: Cho hai đa thức $E = y - [y - (y + 2x - x)]$ và $F = y - [y - x + 2(x - y)]$.

Tính $E + F$ và $E - F$.

Bài 7: Cho hai đa thức $G = \left[\frac{1}{2}ax - 2(ax + 3)\right] - (ax + 1)$ và $H = ax - 2 - [-(ax - 1) + 3] - 4$.

Tính $G + H$ và $G - H$.

Bài 8: Cho hai đa thức: $M = [x + (y - z) - 2x] + y + z - (2 - x - y)$ và $N = x - [x - (y - z) - x]$

Tính $M + N$ và $M - N$.

Bài 9: Cho hai đa thức: $P = a^2 - 2ab + 3b^2$ và $Q = 2a^2 - 3ab - b^2 + (-3a^2 + 2ab - b^2)$.

Tính $P + Q$ và $P - Q$.

Bài 10: Cho hai đa thức: $I = 3a^2 + b^2 - (ab - a^2)$ và $K = 2a^2 + ab - b^2 - (-a^2 + b^2 - ab)$.

Tính $I + K$ và $I - K$.

Bài 11: Cho $A = 2x^4 - x + 3x^2 - 6$, $B = -x^4 + 2 - 3x^2 - 5x$ và $C = -2x^3 + 1 - 3x + x^2$

a) Tính $M = A - B + C$

b) Tính $N = B - C - A$

c) Tính $P = C - A - B$

Bài 12: Cho $A = 5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2$, $B = -8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2$

và $C = x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2$

a) Tính $A - B - C$

b) Tính $B + A - C$

c) Tính $C - A - B$

Bài 13: Cho $A = 16x^4 - 8x^3y + 7x^2y^2 - 9y^4$, $B = -15x^4 + 3x^3y - 5x^2y^2 - 6y^4$

và $C = 5x^3y + 3x^2y^2 + 17y^4 + 1$

a) Tính $A + B - C$

b) Tính $A - C + B$

Bài 14: Cho $A = 4x^2 - 5xy + 3y^2$, $B = 3x^2 + 2xy + y^2$ và $C = -x^2 + 3xy + 2y^2$

a) Tính $A + B + C$

b) Tính $B - C - A$

c) Tính $2A - 3B - C$

Bài 15: Cho $A = x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1$, $B = -2x^2 + xy + 2y^3 - 3 - 5x + 2y$

và $C = 7y^2 + 3x^2 - 4xy - 6x + 4y + 5$

a) Tính $A + B + C$

b) Tính $7A - B - C - 9$

c) Tính $A - 4B - 3C$

Bài 16: Cho $A = 5xy^2 - 4x^2y - 6x^2$, $B = 8yx^2 - 4y^2x + 3y^2$ và $C = -2xy^2 + 3yx^2 + 5x^2$

a) Tính $A - B + C$.

b) Tính $2(A + B) + C$

Bài 17: Cho hai đa thức $A = x^2 - 3xy - y^2 + 1$ và $B = 2x^2 + y^2 - 7xy - 5$.

a) Tính $A + B$.

b) Tìm đa thức C biết $C + A - B = 0$.

c) Tính giá trị của đa thức C với $x = 2$, $y = \frac{-1}{2}$.

Bài 18: Cho $P(x) = 5x^2 + 5x - 4$ và $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$ và $R(x) = 4x^2 - x + 3$.

Tính $P(x) + Q(x) - R(x)$ rồi tính giá trị của đa thức tại $x = \frac{-1}{2}$.

Bài 4. PHÉP NHÂN ĐA THỨC

I. LÝ THUYẾT.

1) Nhân đơn thức với đơn thức.

Ví dụ 1: Để nhân hai đơn thức $3x^2y$ và $-2xy^3$ ta làm như sau

$$3x^2y \cdot (-2xy^3) = 3 \cdot (-2) \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^3 = -6x^3y^4$$

Kết luận:

- ♣ Để nhân hai đơn thức, ta nhân hai hệ số với nhau và nhân hai phần biến với nhau.

2) Nhân đơn thức với đa thức.

Ví dụ 2: Để nhân đơn thức $3x^2$ với đa thức $x^3y - 4yz^2$ ta làm như sau

$$3x^2 \cdot (x^3y - 4yz^2) = 3x^2 \cdot x^3y - 3x^2 \cdot 4yz^2 = 3x^5y - 12x^2yz^2$$

Kết luận:

- ♣ Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

Ví dụ 3: Tính $-4x^2y(x^2 - xy + 2y^2) = -4x^4y + 4x^3y^2 - 8x^2y^3$

3) Nhân đa thức với đa thức.

Ví dụ 4: Để nhân đa thức $x + y$ với đa thức $x^2 + 2xy - 3y^3$ ta làm như sau

$$\begin{aligned}(x + y)(x^2 + 2xy - 3y^3) &= x(x^2 + 2xy - 3y^3) + y(x^2 + 2xy - 3y^3) \\ &= x^3 + 2x^2y - 3xy^3 + x^2y + 2xy^2 - 3y^4\end{aligned}$$

Kết luận:

- ♣ Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia, rồi cộng các tích với nhau.
- ♣ Chú ý rút gọn sau khi nhân đa thức với đa thức.
- ♣ Phép nhân cũng có đầy đủ các tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối.

Ví dụ 5: Tính $(x^2 - y^2 - xy)(x - 2y) = (x - 2y)(x^2 - y^2 - xy)$

$$\begin{aligned}&= x(x^2 - y^2 - xy) - 2y(x^2 - y^2 - xy) = x^3 - xy^2 - x^2y - 2x^2y + 2y^3 + 2xy^2 \\ &= x^3 + xy^2 - 3x^2y + 2y^3\end{aligned}$$

II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Thực hiện phép tính:

a) $2x(1-x) - (2x-1)(x+1)$

b) $x^2y(xy+1) - (xy-1)(x^2y+1)$

Giải

a) $2x(1-x) - (2x-1)(x+1)$
 $\Rightarrow 2x - 2x^2 - (2x^2 + 2x - x - 1)$
 $= 2x - 2x^2 - 2x^2 - 2x + x + 1$
 $= -4x^2 + x + 1$

b) $x^2y(xy+1) - (xy-1)(x^2y+1)$
 $= x^3y^2 + x^2y - (x^3y^2 + xy - x^2y - 1)$
 $= x^3y^2 + x^2y - x^3y^2 - xy + x^2y + 1$
 $= 2x^2y - xy + 1$

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức $A = x^6 - 20x^5 + 20x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 20x + 3$ tại $x = 19$

Giải

$$\begin{aligned} A &= x^6 - 20x^5 + 20x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 20x + 3 \\ &= x^6 - 19x^5 - x^5 + 19x^4 + x^4 - 19x^3 - x^3 + 19x^2 + x^2 - 19x - x + 3 \\ &= x^5(x-19) - x^4(x-19) + x^3(x-19) - x^2(x-19) + x(x-19) - x + 3 \end{aligned}$$

Tại $x = 19 \Rightarrow x - 19 = 0$. Khi đó A có giá trị là $A = -19 + 3 = -16$.

Bài 3: Tìm x biết $(2x-1)(x-5) - 2x^2 + 10x - 25 = 0$

Giải

$$\text{Ta có } (2x-1)(x-5) - 2x^2 + 10x - 25 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 10x - x + 5 - 2x^2 + 10x - 25 = 0$$

$$\Rightarrow -x - 20 = 0 \Rightarrow x = -20. \text{ Vậy } x = -20.$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Thực hiện phép tính (Nhân đơn thức với đa thức)

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| 1) $2xy(x+3y^2)$ | 2) $-7x^2(3x-4y)$ | 3) $x^2y(-3x^2-y^2)$ |
| 4) $2x(2xy-5x^2+4)$ | 5) $-4x(x^2-xy^3+y)$ | 6) $-xy(x^2+2xy-3)$ |
| 7) $3x^2y(x^2-3y+2xy^2)$ | 8) $-xy(x^2+xy+y^2)$ | 9) $xy^2(x^2y-5x+10y)$ |
| 10) $-3y(4x^2y-2xy^2-5)$ | 11) $x^2y(2xy+x^2-xy^2)$ | 12) $-2xy^2(x^2-x^3y+3)$ |
| 13) $-2x^2y(3xy^2-y^2+xy)$ | 14) $9x^2y(xy-2y+7xy^2)$ | 15) $6xy^3(3x^3y-2x^2+3xy^3)$ |

Bài 2: Thực hiện phép tính (Nhân đơn thức với đa thức)

- | | |
|---|--|
| 1) $5(x^2-3x+1)+x(5x+15)+5$ | 2) $x^2(2x-y+y^2)+y^2(-2y+x-x^2)$ |
| 3) $-4x^2(x-7)+4x(x^2-5)-28x^2$ | 4) $2x^2(x-1)+3x(x^2-x-2)+5x^2$ |
| 5) $-4x^2y^3(2x-3y)-2xy(-4x^2y^2-4xy^3)$ | 6) $xy(x^2-3x+4)-x^2y(x+3)+6xy$ |
| 7) $(x^2+xy+y^2)(-2xy)+xy(x^2-xy+y^2)$ | 8) $-4x(3x^2-x+4)-3x(-4x^2+x-5)$ |
| 9) $5x\left(\frac{1}{5}x-2\right)-3\left(6-\frac{1}{3}x^2\right)$ | 10) $3x\left(\frac{4}{3}x-1\right)-4x\left(\frac{-1}{2}x+3\right)+15x$ |

Bài 3: Thực hiện phép tính (Nhân đa thức với đa thức)

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $(3x^2-4)(x+3y)$ | 2) $(x+3)(x^2+3x)$ | 3) $(xy-1)(xy+5)$ |
| 4) $(3x+5y)(2x-7y)$ | 5) $-(x-1)(-x^2+2y)$ | 6) $(-x^2+2y)(x^2+2y)$ |
| 7) $(x+3y)(x-3y+2)$ | 8) $(x+2y)(x-2y+3)$ | 9) $(x^2-xy+y^2)(x+y)$ |
| 10) $(x^2-xy+y^2)(x+y)$ | 11) $(5x-2y)(x^2-xy+1)$ | 12) $(x^2y^2-xy+y)(x-y)$ |
| 13) $(x^2-2xy+y^2)(x-y)$ | 14) $-(x-y)(x^2+xy-1)$ | 15) $-(x^2-2y)(x+y^2-1)$ |

$$16) \left(\frac{1}{2}x-1\right)(2x-3) \quad 17) \left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x-\frac{1}{2}y\right) \quad 18) (x^2-2x+3)\left(\frac{1}{2}x-5\right)$$

Bài 4: Thực hiện phép tính (Nhân đa thức với đa thức)

$$\begin{array}{ll} 1) x^2(x-1)-(x^2+1)(x+2) & 2) x(x-y^2)-(x^2-y)(y+1) \\ 3) (x-5)(x^2+26)+(5-x)(1-5x) & 4) (x-y)(x^2+y)-(x-1)(x^2+y^2) \\ 5) (3x-2)(2x-1)+(-5x-1)(3x+2) & 6) (3x-5)(2x+11)-(2x+3)(3x+7) \\ 7) (2x+3)(x-4)+(x-5)(x-2) & 8) (12x-5)(4x-1)+(3x-7)(1-16x) \end{array}$$

Bài 5: Thực hiện phép tính (Nhân đa thức với đa thức)

$$\begin{array}{ll} 1) 3(x-y)(2x^2-1) & 2) 3(x^2+1)(x+y^2) \\ 3) -2(x^2y-1)(x-1) & 4) -5(x^2-1)(y^2-1) \\ 5) \frac{1}{2}(x-6y)(-x-y) & 6) \frac{-2}{5}(3x-y)(x-2y) \\ 7) 3(2x-1)(3x-1)-(2x-3)(9x-1) & 8) 4(x-2)(x+1)+2(x-2)(x+2) \\ 9) 2(3x-1)(2x+5)-6(2x-1)(x+2) & 10) (3x+2)(2x+9)-6(x+2)(x+1) \\ 11) \left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)(16x-1) & 12) \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(4x-1) \end{array}$$

Bài 6: Tính giá trị của biểu thức

$$\begin{array}{l} a) A = 5x(x^2-3) + x^2(7-5x) - 7x^2 \text{ tại } x = -5. \\ b) B = x(x^2+xy+y^2) - y(x^2+xy+y^2) \text{ tại } x = 10, y = -1. \\ c) C = x(x^2-y) - x^2(x+y) + y(x^2-x) \text{ tại } x = \frac{1}{2}, y = -1. \\ d) D = x(x^2-y) - x^2(x+y) + y(x^2-x) \text{ tại } x = \frac{1}{2}, y = -100. \end{array}$$

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức

$$\begin{array}{l} a) A = (x-2)(x-2) - (x-1)(x+1) \text{ tại } x = 21. \\ b) B = (x-1)(x-7) - (2x-6)(x-1) \text{ tại } x = 0. \\ c) C = (2x+y)(2+y) + (2x+y)(y-2) \text{ tại } x = 1, y = -1. \\ d) D = (x-1)(x+2) - x(x-2) - 3x \text{ tại } x = 100. \end{array}$$

Bài 8: Tính giá trị của các biểu thức sau

$$\begin{array}{l} 1) A = x^3 - 30x^2 - 31x + 1 \text{ tại } x = 31 \\ 2) B = x^3 - 17x^2 - 18x + 2 \text{ tại } x = 18. \\ 3) C = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20 \text{ tại } x = 16 \\ 4) D = x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 10x + 10 \text{ tại } x = -9 \\ 5) E = x^5 - 8x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 6x + 1 \text{ tại } x = 7 \end{array}$$

6) $F = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$ tại $x = 14$

7) $G = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x - 9$ tại $x = 99$.

Bài 9: Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến.

1) $A = x(x^2 + x + 1) - x^2(x + 1) - x + 5$

2) $B = 2x(x - 1) - x(2x + 1) - (3 - 3x)$

3) $C = 2x(6x - 4) - 5x^2(8 + 3x) + 2(5x^2 + 4x + 1) + 3x^2(5x + 6)$

4) $D = -2(x - 7)(x + 3) + (5x - 1)(x + 4) - 3x^2 - 27x$

5) $E = (x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 3) - (2x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 2) - (3x - 5) - 3$

Bài 10: Tìm x biết

1) $3(5x - 1) - x(x - 2) + x^2 - 13x = 7$

2) $4(x + 2) - 7(2x - 1) + 9(3x - 4) = 30$

3) $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$

4) $3x(x - 2) - 3(x^2 + 1) = x^2 + 1 - x(x - 2)$

5) $5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x + 12)$

6) $(7x + 7) + 3x(2x - 1) - 2x(3x + 15) = -42$

Bài 11: Tìm x biết

1) $(3x - 1)(2x + 7) - (x + 1)(6x - 5) = 7$

2) $(3x + 2)(2x + 9) - (x + 2)(6x + 1) = 7$

3) $(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x) = 81$

4) $2(3x - 1)(2x + 5) - 6(2x - 1)(x + 2) = -6$

5) $(2x - 1)(3 - x) + (x - 2)(x + 3) = (1 - x)(x - 2)$

6) $(2x + 3)(x - 4) + (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4)$

7) $(8x - 3)(3x + 2) - (4x + 7)(x + 4) = (2x + 1)(5x - 1) - 33$

Bài 12: Chứng minh rằng:

1) $A = n(3n - 1) - 3n(n - 2) : 5, (\forall n \in R)$

2) $B = n(n + 5) - (n - 3)(n + 2) : 6, (\forall n \in Z)$

3) $C = (n^2 + 3n - 1)(n + 2) - n^3 + 2 : 5, (\forall n \in Z)$

4) $D = (2n + 1)(n^2 - 3n - 1) - 2n^3 + 1 : 5, (\forall n \in Z)$

5) $E = [(n - 1)(n + 1) - (n - 7)(n - 5)] : 12, (\forall n \in Z)$

6) $F = (6n + 1)(n + 5) - (3n + 5)(2n - 1) : 2, (\forall n \in Z)$

7) $G = (5a - 3)(3b - 5) - (3a - 5)(5b - 3) : 16, (\forall a, b \in R)$

Bài 13: Cho a và b là hai số tự nhiên. Biết a chia cho 3 dư 1, b chia 3 dư 2.

Chứng minh ab chia 3 dư 2

Bài 14: Cho a, b là hai số tự nhiên, biết a chia 5 dư 1, b chia 5 dư 2.

Hỏi ab chia 5 dư bao nhiêu?

Bài 5. PHÉP CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC.

I. LÝ THUYẾT.

1) Chia đơn thức cho đơn thức.

Ví dụ 1: Nhận thấy $(2x^3y) \cdot (3x^2y^5) = 6x^5y^6$

$$\text{Khi đó } (6x^5y^6) : (2x^3y) = 3x^2y^5$$

Kết luận:

- ♣ Để đơn thức A chia hết cho đơn thức B thì mỗi biến của B đều là biến của A và có số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A
- ♣ Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B ta chia hệ số với nhau và chia phần biến với nhau.

Ví dụ 2: Tính $15x^2y^2 : 5xy^2 = 3x$

2) Chia đa thức cho đơn thức.

Ví dụ 3: Khi tính $(4x^4 - 8x^2y^2 + 12x^5y)$ chia cho đơn thức $-4x^2$

$$\begin{aligned} &\text{Ta làm như sau } (4x^4 - 8x^2y^2 + 12x^5y) : (-4x^2) \\ &= 4x^4 : (-4x^2) - 8x^2y^2 : (-4x^2) + 12x^5y : (-4x^2) = -x^2 + 2y^2 - 3x^3y \end{aligned}$$

Kết luận:

- ♣ Đa thức A chia hết cho đơn thức B nếu mọi hạng tử của A đều chia hết cho B
- ♣ Muốn chia đa thức A cho đơn thức B ta chia từng hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả.

Ví dụ 4: Tính $(5xy^2 + 9xy - x^2y^2) : (-xy) = -5y - 9 + xy$

II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Thực hiện phép tính:

1) $-8x^2y^3 : (-6xy^2)$

2) $(3xy^2 - x^2y + 2x^2y^2) : (-4xy)$

Giải

1) $-8x^2y^3 : (-6xy^2) = \frac{4}{3}xy$

2) $(3xy^2 - x^2y + 2x^2y^2) : (-4xy) = -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}xy$

Bài 2: Tìm đa thức A biết

1) $A \cdot (2xy^2) = -6(xy^2)^2$

2) $-A \cdot (3x^2y)^2 = 2x^5y^4 + 4x^4y^5$

Giải

1) $A \cdot (2xy^2) = -6(xy^2)^2 \Rightarrow A = -6x^2y^4 : (2xy^2) = -3xy^2.$

2) $-A \cdot (3x^2y)^2 = 2x^5y^4 + 4x^4y^5 \Rightarrow -A = (2x^5y^4 + 4x^4y^5) : (9x^4y^2)$

$$\Rightarrow -A = \frac{2}{9}xy^2 + \frac{4}{9}y^3 \Rightarrow A = -\frac{2}{9}xy^2 - \frac{4}{9}y^3.$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Thực hiện phép tính

1) $10x^2y^4 : 5x^2y$

2) $-6x^4y^2 : 3xy^2$

3) $-8xy^5 : (-4y^5)$

4) $x^3y^2 : (-7x^3y^2)$

5) $2xy^7 : (-3xy^2)$

6) $-5x^2y^2 : (-6xy)$

7) $(-xy)^{10} : (-2xy)^5$

8) $12x^4y^7 : (-3xy^2)^2$

9) $(3x^3y^4)^2 : (-2x^5y^6)$

10) $\frac{5}{4}x^4y^3 : \frac{1}{3}x^3y^3$

11) $\frac{3}{4}x^3y^3 : \left(\frac{-1}{2}x^2y^2\right)$

12) $\frac{3}{4}(x^2y)^2 : \frac{1}{8}xy^2$

Bài 2: Thực hiện phép tính

1) $(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy$

2) $(15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2) : 6x^2y$

3) $(9x^2y^2 + 18x^2y^2 - 3xy^2) : 9xy^2$

4) $(6x^3y^2 - 8x^2y^3 + 4x^3y^3) : 2x^2y^2$

5) $(20x^2y^2 - 5x^2y + 15x^2y^3) : 5x^2y$

6) $(5x^3y^2 - 10x^4y + 20x^2y^2) : 5x^2y$

7) $(15x^2y^2 + 12x^3y^2 - 10xy^3) : 3xy^2$

8) $(27x^4y^2 - 18x^3y^2 + 12x^2y) : 3x^2y$

9) $(16x^5y^6 - 12x^3y^4 - 6x^3y^2) : 4x^2y^2$

10) $(30x^4y^3 - 25x^2y^3 - 3x^4y^4) : 5x^2y^3$

11) $\left(x^3y^3 - \frac{1}{2}x^2y^3 - x^3y^2\right) : \frac{1}{3}x^2y^2$

12) $\left(\frac{2}{3}x^3y^2 - x^2y + 6x^3\right) : \left(-\frac{1}{4}x^2\right)$

Bài 3: Tìm đơn thức A biết

1) $3x^2y^5 : A = \frac{4}{5}y^3$

2) $4x^5y^2 : A = -\frac{1}{2}x^2y$

3) $\frac{-2}{5}xy^5 : A = \frac{15}{4}y^4$

4) $3x^2y^3 \cdot A = \frac{4}{5}x^4y^5$

5) $-xy^3 \cdot A = \frac{7}{5}x^2y^6$

6) $\frac{3}{4}x^2y^2 \cdot A = \frac{-5}{6}x^7y^3$

7) $A \cdot \frac{4}{3}x^2y = \frac{6}{5}x^3y^5$

8) $-A \cdot \frac{1}{2}xy^3 = \frac{-7}{8}x^3y^6$

9) $-A \cdot (-4xy)^2 = \frac{6}{7}x^6y^6$

Bài 4: Tìm đơn thức B biết

1) $(B + 2x^2y^3) \cdot (-3xy) = -3x^2y^2 - 6x^3y^4$

2) $2xy^2(B - x^3y) = 2x^3y^2 - 2x^4y^3$

3) $(-B - 3y) \cdot (-3x^2y) = 9x^2y^2 + 6x^5y^7$

4) $-5x^5y(-xy^4 + B) = -10x^5y^5 + 5x^6y^5$

5) $(2x^3y - 5xy^3) : 3xy = B - \frac{5}{3}y^2$

6) $\left(4x^4y^4 - \frac{5}{4}x^5y^5\right) : 3x^2y^2 = B - \frac{5}{12}x^3y^3$

LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN
CHƯƠNG 1. ĐA THỨC

Bài 1. ĐƠN THỨC

Bài 1:

Các biểu thức là đơn thức là x^2y ; -13 ; $(-2)^3xy^7$.

Bài 2:

Các biểu thức là đơn thức là $\frac{x^2y}{2}$; $\frac{x}{-5^2}$; $\frac{-4}{5}$.

Bài 3:

Các biểu thức là đơn thức là $x^2 \cdot \frac{7}{2}$

Bài 4:

- | | |
|--|--|
| 1) $15x^3y^2$ hệ số 15, bậc 5 | 2) $-16x^3y^2$ hệ số -16 , bậc 5 |
| 3) x^3y^6 hệ số 1, bậc 9 | 4) $-3xy^4z^2$ hệ số -3 , bậc 7 |
| 5) $2x^3y^4z^5$ hệ số 2, bậc 12 | 6) $2x^6y^9$ hệ số 2, bậc 15 |
| 7) $-18x^2y^4z$ hệ số -18 , bậc 7 | 8) $-36x^2y^4$ hệ số -36 , bậc 6 |
| 9) $5x^3y^3z^3$ hệ số 5, bậc 9 | 10) $-2x^2y^3z^2$ hệ số -2 , bậc 7 |
| 11) $\frac{-1}{3}x^3y^3$ hệ số $\frac{-1}{3}$, bậc 6 | 12) $\frac{-1}{2}x^6y^5$ hệ số $\frac{-1}{2}$, bậc 11 |
| 13) $\frac{-2}{3}x^3y^4$ hệ số $\frac{-2}{3}$, bậc 7 | 14) $\frac{3}{4}x^3y^4$ hệ số $\frac{3}{4}$, bậc 7 |
| 15) $\frac{-2}{5}x^5y^7$ hệ số $\frac{-2}{5}$, bậc 12 | 16) $\frac{9}{5}x^6y^3$ hệ số $\frac{9}{5}$, bậc 9 |
| 17) $\frac{4}{9}x^6y^6$ hệ số $\frac{4}{9}$, bậc 12 | 18) $\frac{2}{5}x^6y^6$ hệ số $\frac{2}{5}$, bậc 12 |

Bài 5:

- | | |
|---|--|
| 1) $45xy^4$ hệ số 45, bậc 5 | 2) $-8x^5y^4z$ hệ số -8 , bậc 10 |
| 3) $32x^7y^3z^3$ hệ số 32, bậc 13 | 4) $-32x^5y^9z^3$ hệ số -32 , bậc 17 |
| 5) $-80x^5y^3z$ hệ số -80 , bậc 9 | 6) $-8x^5y^7$ hệ số -8 , bậc 12 |
| 7) $-6x^5y^4z$ hệ số -6 , bậc 10 | 8) $\frac{-3}{4}x^3y^3z^4$ hệ số $\frac{-3}{4}$, bậc 10 |
| 9) $\frac{-1}{2}x^5y^7$ hệ số $\frac{-1}{2}$, bậc 12 | 10) $12x^6y^{16}$ hệ số 12, bậc 22 |
| 11) $-3x^{17}y^{19}z^{18}$ hệ số -3 , bậc 54 | 12) $\frac{2}{9}x^5y^8$ hệ số $\frac{2}{9}$, bậc 13 |

Bài 6:

- | | |
|---|---|
| 1) $A = \frac{1}{2}x^{3n+1}y^{3n+2}$ hệ số $\frac{1}{2}$, bậc $6n+3$ | 2) $B = x^{7-2n}y^{11-2n}$ hệ số 1, bậc $18-4n$ |
|---|---|

$$3) C = \frac{4}{7}x^n y^{n+1} \text{ hệ số } \frac{4}{7}, \text{ bậc } 2n+1$$

$$4) D = \frac{4}{7}x^{2n+2}y^{2n+2} \text{ hệ số } \frac{4}{7}, \text{ bậc } 4n+4$$

Bài 7:

Các đơn thức đồng dạng $(-12x^2y; -2xy.x)$ và $(-\frac{3}{8}xyz; -3yxz)$

Bài 8:

Các đơn thức đồng dạng $(3x^3y^2; 6\frac{1}{2}x^3y^2)$ và $(\frac{x^5y^4z^2}{11}; -6x^5y^4z^2)$ và $(\frac{-x^3y^3}{6}; -11x^3y^3)$

Bài 9:

$$1) 7xy$$

$$2) -9xy^2$$

$$3) -x^2y^3z^4$$

$$4) -4x^2y$$

$$5) -30x^2y$$

$$6) 6x^2y$$

$$7) -xy^2 + x^2y$$

$$8) 5x^2y^3z^4$$

$$9) 6x^3y$$

$$10) 3x^2 + x$$

$$11) \frac{14}{3}x^3$$

$$12) \frac{23}{4}xy^2$$

$$13) -2x^2 - 2x^3$$

$$14) \frac{3}{2}xyz^2$$

$$15) \frac{-15}{8}x^2y^3$$

Bài 10:

$$1) -4xyz^2$$

$$2) -9x^2y$$

$$3) 16x^2y^2$$

$$4) \frac{1}{6}x^2y^3$$

$$5) \frac{13}{6}x^3y^2$$

$$6) \frac{7}{12}x^4y$$

$$7) \frac{-1}{5}x^5y^2$$

$$8) \frac{-9}{7}xy^3$$

$$9) \frac{7}{12}xy^2z$$

$$10) 2x^4$$

$$11) \frac{3}{4}x^5y$$

$$12) 11x^2y^5 + x^6$$

Bài 11:

$$1) A - B = 4x^2y - 6xy^2$$

$$2) A - B = -14x^2y + 12xy^2$$

$$3) A - B = -x^3y^2 - 5x^2y^3$$

$$4) A - B = 8x^2y^3 - 4x^3y^2$$

$$5) A - B = \frac{-1}{12}x^2y - \frac{1}{4}xy^2$$

$$6) -A + B = \frac{-11}{4}xy^3 - \frac{13}{24}x^3y$$

Bài 12:

$$a) A = \frac{8}{3}x^2y^2 \cdot \left(\frac{-1}{4}x^2y\right) = \frac{-2}{3}x^4y^3 \text{ hệ số } \frac{-2}{3}, \text{ bậc } 7$$

$$b) \text{ Tại } x = -1, y = 1 \text{ thì } A = \frac{-2}{3} \cdot (-1)^4 \cdot 1^3 = \frac{-2}{3}$$

Bài 13:

a) $B = \left(\frac{-2}{3}xy^2\right)\left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right) = \frac{1}{6}x^3y^5$ hệ số $\frac{1}{6}$, bậc 8

b) Tại $x=1, y=-1$ thì $B = \frac{1}{6} \cdot 1^3 \cdot (-1)^5 = -\frac{1}{6}$

Bài 14:

a) $C = \frac{1}{3} \cdot (-6x^2y^2)^2 \left(\frac{1}{2}x^3y\right) = 6x^7y^5$

b) Tại $x=1, y=-1$ thì $C = 6 \cdot 1^7 \cdot (-1)^5 = -6$

Bài 15:

a) $D = \left(\frac{-3}{7}x^2y\right)\left(\frac{7}{9}x^2y^2\right) = \frac{-1}{3}x^4y^3$ hệ số $\frac{-1}{3}$, biến là x^4y^3

b) Tại $x=-1, y=2$ thì $D = \frac{-1}{3} \cdot (-1)^4 \cdot 2^3 = \frac{-8}{3}$

Bài 16:

a) $F = \left(\frac{-3}{5}xy^2\right)^2 \cdot \left(\frac{20}{27}x^3y\right) = \frac{4}{15}x^5y^5$ bậc 10

b) Thay $y = \frac{-x}{3}$ vào $x+y=2$ ta được $x + \frac{-x}{3} = 2 \Rightarrow 3x - x = 6 \Rightarrow x = 3$ và $y = -1$

Khi đó $F = \frac{4}{15} \cdot 3^5 \cdot (-1)^5 = \frac{-324}{5}$

Bài 17:

a) Ta có $\left(\frac{-3}{8}x^2z\right)\left(\frac{2}{3}xy^2z^2\right)\left(\frac{4}{5}x^3y\right) = \frac{-1}{5}x^6y^3z^3$

b) Tại $x=-1; y=-2; z=3$ thì $\frac{-3}{8}x^2z = \frac{-3}{8} \cdot (-1)^2 \cdot 3 = \frac{-9}{8}$ và

$\frac{2}{3}xy^2z^2 = \frac{2}{3} \cdot (-1) \cdot (-2)^2 \cdot 3^2 = -24$ và $\frac{4}{5}x^3y = \frac{4}{5} \cdot (-1)^3 \cdot (-2) = \frac{8}{5}$

và $\frac{-1}{5}x^6y^3z^3 = \frac{-1}{5} \cdot (-1)^6 \cdot (-2)^3 \cdot 3^3 = \frac{216}{5}$

Bài 18:

a) $\left(\frac{-3}{2}x^3y^2z\right) \cdot (-6xy^3z^5) = 9x^4y^5z^6$

b) Hệ số 9, phân biến $x^4y^5z^6$ bậc là 15

Bài 19:

a) $A = \frac{-1}{14}x^3y^3$

b) Tại $x=2, y=-1$ thì $A = \frac{-1}{14} \cdot 2^3 \cdot (-1)^3 = \frac{4}{7}$

Bài 20:

a) $B = \left(\frac{-1}{2}xy^3\right)(2x^3y)^2 = -2x^7y^5$

b) Tại $x = -1, y = \frac{1}{2}$ thì $B = -2 \cdot (-1)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$

Bài 21:

a) $C = (-18x^3y^4z^5) \cdot \frac{2}{9}x^5(yz^2)^2 = -4x^8y^6z^9$. Phân biến $x^8y^6z^9$, hệ số -4 , bậc 23

b) Vì $|z| = -1$ nên không tồn tại giá trị z do đó không tồn tại giá trị của C khi $x = -1, y = 1, |z| = -1$

Bài 2. ĐA THỨC

Bài 1:

Các biểu thức là đa thức là $x^2y; x + 2y; -5$

Bài 2:

Các biểu thức là đa thức là $\frac{x+2y}{5}; 0; \frac{1}{2}xy^2 - \frac{x}{3}$

Bài 3:

Các biểu thức là đa thức là $1 - x^2 + y^2; \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}; \frac{-1}{7}$

Bài 4: Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau

1) $A = x^6 + y^5 + 1$ bậc 6

2) $B = -2x^4 + 3x^2 - 3$ bậc 4

3) $C = -2x^2y^2 + 3xy - 4y + 5$ bậc 4

4) $D = 6x^2$ bậc 2

5) $E = x^6 + 2x^2y^5$ bậc 7

6) $F = 2x^3y^4 - 5xy^8 + xy^4 + 5y^8$ bậc 9

Bài 5: Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau

1) $A = 11x^2y^2 - 16x^2y$

2) $B = -2x^5 - x^4$

3) $C = -3x^2yz + 5xy^2z - xyz$

4) $D = 12x^2y^2 - x^3$

5) $E = 1$

6) $F = \frac{-5}{4}x^2y - \frac{3}{4}xy^2$

7) $G = 4x^3 - 2x^2 - \frac{7}{2}xy$

8) $H = \frac{1}{2}x^2y$

Bài 6: Thu gọn rồi tính giá trị của các đa thức sau

a) $A = \frac{3}{2}xy^2 - 6xy$ tại $x = \frac{1}{2}, y = 1$ thì $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4} - 3 = \frac{-9}{4}$

b) $B = \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{3}x^2y + xy$ tại $x = \frac{1}{2}, y = 1$ thì $B = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

c) $C = 5x^2y^4 - 2x^2 - y^9 - 2$ tại $x = 1, y = -1$ thì

$$C = 5 \cdot 1^2 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot 1^2 - (-1)^9 - 2 = 5 - 2 + 1 - 2 = 2$$

Bài 3. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

Bài 1: Thực hiện phép tính

1) $-4x^2 - 5yz + 2z^2$

3) $-x^3 + 6x^2 + 5x - 2y^3$

5) -1

7) $x^2 - 7xy + 4y^2$

9) $-4x^2y + 3xy^2 + 5$

2) $6x^2 + yz$

4) $2x^2 + 2y^2 + 1$

6) $7x^2 - 3xy + 2y^2$

8) $-3x^2y + 3xy^2$

10) $3x^2y - 6y^2$

Bài 2: Thực hiện phép tính

1) $x^3 + 7x$

3) $2x^2 - y - x^2y^2 + xy$

5) $x^2y + 10x + xyz + 1$

7) $10x^2y - 5xy^2 - x^2y^2 + 2xy$

9) $x^2y + 2x^3 - xy - 3$

11) $xy + 3$

2) $5x^3 - 2xy^2 + x$

4) $3y - x^2y^2 - xy - 2$

6) $xyz - 9x^2y - 5$

8) $-5xy^2 + x^2y^2$

10) $2xy^2 - xy^2 - x^3 - xy - 9$

12) $-2x^2y^2 + 2y^2 + xy - 7$

Bài 3: Tìm đa thức A biết

1) $A = 2x^2 + xy$

3) $A = 4x^2 + 2y^2 - xy$

5) $A = -x^2y - 2xy^3$

7) $A = 7xy + x^2 - 11y^2$

9) $A = xy + 7x^2 - 4xyz + 5$

11) $A = 12x^4 - 15x^2y + 2xy^2 + 7$

13) $A = x^2 - 3xy + 5y^2$

15) $A = 2x^3 + y^3 - 5x^2y$

2) $A = -5x^2 + y^2 + xy^2$

4) $A = x^2 + 11xy - y^2$

6) $A = 4y^2 - 1$

8) $A = x^2 - 4xy + 4y^2$

10) $A = 14x^2y - 13xy^2 + 3y^3$

12) $A = 2yz^2 - 4y^2z + 5yz$

14) $A = 6x^2 + 11xy - y^2 - 5x$

16) $A = 14x^2y - 13xy^2 + 3x^3$

Bài 4:

Ta có $A = \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) - (a - 2b) = \frac{-2}{3}a + \frac{5}{3}b$ và $B = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - (a - b) = \frac{-2}{3}a + \frac{2}{3}b$

Khi đó $A + B = \left(\frac{-2}{3}a + \frac{5}{3}b\right) + \left(\frac{-2}{3}a + \frac{2}{3}b\right) = \frac{-4}{3}a + \frac{7}{3}b$

Và $A - B = \left(\frac{-2}{3}a + \frac{5}{3}b\right) - \left(\frac{-2}{3}a + \frac{2}{3}b\right) = b$

Bài 5:

Ta có $C = x - a - 2b + c$ và $D = 2a + 2b - c$

Khi đó $C + D = (x - a - 2b + c) + (2a + 2b - c) = x + a$

Và $C - D = (x - a - 2b + c) - (2a + 2b - c) = x - 3a - 4b + 2c$

Bài 6:

Ta có $E = x + y$ và $F = -x + 2y$

Khi đó $E + F = (x + y) + (-x + 2y) = 3y$ và $E - F = (x + y) - (-x + 2y) = 2x - y$

Bài 7:

Ta có $G = \frac{-5}{2}ax - 7$ và $H = 2ax - 10$

Khi đó $G + H = \left(\frac{-5}{2}ax - 7\right) + (2ax - 10) = \frac{-1}{2}ax - 17$

Và $G - H = \left(\frac{-5}{2}ax - 7\right) - (2ax - 10) = \frac{-9}{2}ax + 3$

Bài 8:

Ta có $M = 3y$ và $N = x + y - z$

Khi đó $M + N = 3y + (x + y - z) = x + 4y - z$ và $M - N = 3y - (x + y - z) = -x + 2y + z$

Bài 9:

Ta có $P = a^2 - 2ab + 3b^2$ và $Q = -a^2 - ab - 2b^2$

Khi đó $P + Q = (a^2 - 2ab + 3b^2) + (-a^2 - ab - 2b^2) = -3ab + b^2$

Và $P - Q = (a^2 - 2ab + 3b^2) - (-a^2 - ab - 2b^2) = 2a^2 - ab + 5b^2$

Bài 10:

Ta có $I = 3a^2 + b^2 - (ab - a^2) = 4a^2 - ab + b^2$ và $K = 3a^2 + 2ab - 2b^2$

Khi đó $I + K = (4a^2 - ab + b^2) + (3a^2 + 2ab - 2b^2) = 7a^2 + ab - b^2$

Và $I - K = (4a^2 - ab + b^2) - (3a^2 + 2ab - 2b^2) = a^2 - 3ab + 3b^2$

Bài 11:

a) Ta có $M = A - B + C = 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 + x - 7$

b) Ta có $N = B - C - A = -3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - x + 7$

c) Ta có $P = C - A - B = -x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 5$

Bài 12:

a) Ta có $A - B - C = x^3y - xy^2 - 7x^2y^2 + 14xy^3 - x^3$

b) Ta có $B + A - C = x^3y + xy^2 - 15x^2y^2 - 2xy^3 - x^3$

c) Ta có $C - A - B = x^3 - x^3y + 2xy^3 - xy^2 + 15x^2y^2$

Bài 13:

a) Ta có $A + B - C = x^4 - 10x^3y - x^2y^2 - 32y^4 - 1$

b) Ta có $A - C + B = x^4 - 10x^3y - x^2y^2 - 32y^4 - 1$

Bài 14:

a) Ta có $A + B + C = 8x^2 - 6xy + 2y^2$

b) Ta có $B - C - A = 4xy - 4y^2$

c) Ta có $2A - 3B - C = -19xy + y^2$

Bài 15:

a) Ta có $A + B + C = 2x^2 - 6xy + 6y^2 + 2y^3 - 9x + 3y + 3$

b) Ta có $7A - B - C - 9 = 6x^2 - 18xy - 14y^2 - 2y^3 + 25x - 27y - 4$

c) Ta có $A - 4B - 3C = -8y^3 - 22y^2 + 5xy + 40x - 23y - 2$

Bài 16:

a) Ta có $A - B + C = -x^2 - 3y^2 + 7xy^2 - 9x^2y$

b) Ta có $2(A + B) + C = 11x^2y - 7x^2 + 6y^2$

Bài 17:

a) Ta có $A + B = 3x^2 - 10xy - 4$

b) Ta có $C + A - B = 0 \Rightarrow C = B - A = x^2 + 2y^2 - 4xy - 6$

c) Khi $x = 2, y = \frac{-1}{2}$ thì $C = 2^2 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) - 6 = \frac{5}{2}$

Bài 18:

Ta có $P(x) + Q(x) - R(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Tại $x = \frac{-1}{2}$ thì $P(x) + Q(x) - R(x) = 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-1}{2}\right) - 6 = \frac{-27}{4}$

Bài 4. PHÉP NHÂN ĐA THỨC

Bài 1:

16) $2x^2y + 6xy^3$

19) $4x^2y - 10x^3 + 8x$

22) $3x^4y - 9x^2y^2 + 6x^3y^3$

25) $-12x^2y^2 + 6xy^3 + 15y$

28) $-6x^3y^3 + 2x^2y^3 - 2x^3y^2$

17) $-21x^3 + 28x^2y$

20) $-4x^3 + 4x^2y^3 - 4xy$

23) $-x^3y - x^2y^2 - xy^3$

26) $2x^3y^2 + x^4y - x^3y^3$

29) $9x^3y^2 - 18x^2y^2 + 63x^3y^3$

18) $-3x^4y - x^2y^3$

21) $-x^3y - 2x^2y^2 + 3xy$

24) $x^3y^3 - 5x^2y^2 + 10xy^3$

27) $-2x^3y^2 + 2x^4y^3 - 6y^2$

30) $18x^4y^4 - 12x^3y^3 + 18x^2y^6$

Bài 2:

11) $10x^2 + 10$

13) $-4x^3 + 28x^2 + 4x^3 - 20x - 28x^2$

15) $20x^2y^4$

17) $-x^3y - xy^3 - 3x^2y^2$

19) $2x^2 - 10x - 18$

12) $2x^3 - 2y^3 - x^2y + xy^2$

14) $5x^3 - 6x$

16) $-6x^2y + 10xy$

18) $x^2 - x$

20) $2x^2 + 4x$

Bài 3:

1) $3x^3 + 9x^2y - 4x - 12y$

3) $x^2y^2 + 4xy - 5$

5) $x^3 - 2xy - x^2 + 2y$

7) $x^2 + 2x - 9y^2 + 6y$

9) $x^3 + y^3$

11) $5x^3 - 7x^2y + 2xy^2 + 5x - 2y$

13) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

15) $-x^3 - x^2y^2 + x^2 + 2xy + 2y^3 - 2y$

17) $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$

2) $x^3 + 6x^2 + 9x$

4) $6x^2 - 11xy - 35y^2$

6) $-x^4 + 4y^2$

8) $x^2 + 3x - 4y^2 + 6y$

10) $x^3 + y^3$

12) $x^3y^2 - x^2y^3 - x^2y + xy^2 + xy - y^2$

14) $-x^3 + x + xy^2 - y$

16) $x^2 - \frac{7}{2}x + 3$

18) $\frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{23}{2}x - 15$

Bài 4:

1) $-3x^2 - x - 2$

3) $x^3 - 125$

5) $-9x^2 - 20x$

7) $3x^2 - 12x - 2$

2) $-xy^2 - x^2y + y^2 + y$

4) $xy - x^2y - xy^2 + x^2$

6) -76

8) $83x - 2$

Bài 5:

1) $6x^3 - 3x - 6x^2y + 3y$

3) $-2x^3y + 2x^2y + 2x - 2$

5) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}xy + 3y^2$

7) $-x^2 + 14x$

2) $3x^3 + 3x^2y^2 + 3x + 3y^2$

4) $-5x^2y^2 + 5x^2 + 5y^2 - 51$

6) $\frac{-6}{5}x^2 + \frac{14}{5}xy + \frac{-4}{5}y^2$

8) $6x^2 - 4x - 16$

9) $8x + 2$

10) $13x + 6$

11) $16x^3 - x^2 - x + \frac{1}{16}$

12) $4x^3 - x^2 - x + \frac{1}{4}$

Bài 6: Tính giá trị của biểu thức

1) $A = -15x$ tại $x = -5$ thì $A = -15 \cdot (-5) = 75$.

2) $B = x^3 - y^3$ tại $x = 10, y = -1$ thì $B = 10^3 - (-1)^3 = 1000 + 1 = 1001$

3) $C = -2xy$ tại $x = \frac{1}{2}, y = -1$ thì $C = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = 1$

4) $D = -2xy$ tại $x = \frac{1}{2}, y = -100$ thì $D = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-100) = 100$

Bài 7:

1) $A = -4x + 5$ tại $x = 21$ thì $A = -4 \cdot 21 + 5 = -79$.

2) $B = -x^2 + 1$ tại $x = 0$ thì $B = -0^2 + 1 = 1$

3) $C = 4xy + 2y^2$ tại $x = 1; y = -1$ thì $C = 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 = -2$

4) $D = -2$ tại $x = 100$. thì $D = -2$

Bài 8:

1) $A = x^3 - 30x^2 - 31x + 1 = x^3 - 31x^2 + x^2 - 31x + 1 = x^2(x - 31) + x(x - 31) + 1$

Tại $x = 31$ thì $x - 31 = 0 \Rightarrow A = x^2 \cdot 0 + x \cdot 0 + 1 = 1$

2) $B = x^3 - 17x^2 - 18x + 2 = x^3 - 18x^2 + x^2 - 18x + 2 = x^2(x - 18) + x(x - 18) + 2$

Tại $x = 18 \Rightarrow x - 18 = 0 \Rightarrow B = x^2 \cdot 0 + x \cdot 0 + 2 = 2$

3) $C = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20 = x^4 - 16x^3 - x^3 + 16x^2 + x^2 - 16x - x + 16 + 4$
 $= x^3(x - 16) - x^2(x - 16) + x(x - 16) - (x - 16) + 4$

Tại $x = 16 \Rightarrow x - 16 = 0 \Rightarrow C = x^3 \cdot 0 - x^2 \cdot 0 + x \cdot 0 - 0 + 4 = 4$.

4) $D = x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 10x + 10 = x^4 + 9x^3 + x^3 + 9x^2 + x^2 + 9x + x + 9 + 1$
 $= x^3(x + 9) + x^2(x + 9) + x(x + 9) + (x + 9) + 1$

Tại $x = -9 \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow D = x^3 \cdot 0 + x^2 \cdot 0 + x \cdot 0 + 0 + 1 = 1$

5) $E = x^5 - 8x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = x^5 - 7x^4 - x^4 + 7x^3 + 2x^3 - 14x^2 - x^2 + 7x - x + 1$
 $= x^4(x - 7) - x^3(x - 7) + 2x^2(x - 7) - x(x - 7) - x + 1$

Tại $x = 7 \Rightarrow E = x^4 \cdot 0 - x^3 \cdot 0 + 2x^2 \cdot 0 - x \cdot 0 - 7 + 1 = -6$.

6) $F = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x = x^5 - 14x^4 - x^4 + 14x^3 + 2x^3 - 28x^2 - x^2 + 14x - x$
 $= x^4(x - 14) - x^3(x - 14) + 2x^2(x - 14) - x(x - 14) - x$

Tại $x = 14 \Rightarrow x - 14 = 0 \Rightarrow F = x^4 \cdot 0 - x^3 \cdot 0 + 2x^2 \cdot 0 - x \cdot 0 - 14 = -14$

7) $G = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x - 9$

$= x^5 - 99x^4 - x^4 + 99x^3 + x^3 - 99x^2 - x^2 + 99x + x - 9$

$= x^4(x - 99) - x^3(x - 99) + x^2(x - 99) - x(x - 99) + x - 9$

Tại $x = 99 \Rightarrow x - 99 = 0 \Rightarrow F = 99 - 9 = 90$.

Bài 9:

- 1) $A = 5$ nên giá trị của A không phụ thuộc vào giá trị của biến x
- 2) $B = -3$ nên giá trị của B không phụ thuộc vào giá trị của biến x
- 3) $C = 2$ nên giá trị của C không phụ thuộc vào giá trị của biến x
- 4) $D = 38$ nên giá trị của D không phụ thuộc vào giá trị của biến x
- 5) $E = 7$ nên giá trị của E không phụ thuộc vào giá trị của biến x

Bài 10:

- | | |
|--|--|
| <p>1) $3(5x - 1) - x(x - 2) + x^2 - 13x = 7$
 $\Rightarrow 15x - 3 - x^2 + 2x + x^2 - 13x = 7$
 $\Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.</p> | <p>2) $4(x + 2) - 7(2x - 1) + 9(3x - 4) = 30$
 $\Rightarrow 4x + 8 - 14x + 7 + 27x - 36 = 30$
 $\Rightarrow 17x = 51 \Rightarrow x = 3$.</p> |
| <p>3) $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$
 $\Rightarrow 10x - 16 - 12x + 15 = 12x - 16 + 11$
 $\Rightarrow -14x = -4 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$.</p> | <p>4) $3x(x - 2) - 3(x^2 + 1) = x^2 + 1 - x(x - 2)$
 $\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3x^2 - 3 = x^2 + 1 - x^2 + 2x$
 $\Rightarrow -8x = 4 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$.</p> |
| <p>5) $5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x + 12)$
 $\Rightarrow 15x + 25 - 8x + 12 = 5x + 6x + 36$
 $\Rightarrow -4x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.</p> | <p>6) $(7x + 7) + 3x(2x - 1) - 2x(3x + 15) = -42$
 $\Rightarrow 7x + 7 + 6x^2 - 3x - 6x^2 - 30x = -42$
 $\Rightarrow -26x = -49 \Rightarrow x = \frac{49}{26}$.</p> |

Bài 11: Tìm x biết

- | | |
|---|---|
| <p>1) $(3x - 1)(2x + 7) - (x + 1)(6x - 5) = 7$
 $\Rightarrow (6x^2 + 19x - 7) - (6x^2 + x - 5) = 7$
 $\Rightarrow 18x = 9 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$</p> | <p>2) $(3x + 2)(2x + 9) - (x + 2)(6x + 1) = 7$
 $\Rightarrow 6x^2 + 31x + 18 - (6x^2 + 13x + 2) = 7$
 $\Rightarrow 18x = -9 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$.</p> |
| <p>3) $(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x) = 81$
 $\Rightarrow 48x^2 - 32x + 5 - 48x^2 - 7 + 115x = 81$
 $\Rightarrow 83x = 83 \Rightarrow x = 1$</p> | <p>4) $2(3x - 1)(2x + 5) - 6(2x - 1)(x + 2) = -6$
 $\Rightarrow 12x^2 + 26x - 10 - 6(2x^2 + 3x - 2) = -6$
 $\Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1$</p> |
| <p>5) $(2x - 1)(3 - x) + (x - 2)(x + 3) = (1 - x)(x - 2)$
 $\Rightarrow (6x - 2x^2 - 3 + x) + (x^2 + 3x - 2x - 6) = x - 2 - x^2 + 2x$
 $\Rightarrow -x^2 + 8x - 9 = -x^2 + 3x - 2$
 $\Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$.</p> | |
| <p>6) $(2x + 3)(x - 4) + (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4)$
 $\Rightarrow (2x^2 - 8x + 3x - 12) + (x^2 - 2x - 5x + 10) = 3x^2 - 12x - 5x + 20$
 $\Rightarrow 3x^2 - 12x - 2 = 3x^2 - 17x + 20$</p> | |

$$\Rightarrow 5x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{5}.$$

$$\begin{aligned} 7) & (8x-3)(3x+2) - (4x+7)(x+4) = (2x+1)(5x-1) - 33 \\ & \Rightarrow (24x^2 + 8x - 9x - 6) - (4x^2 + 16x + 7x + 28) = 10x^2 - 2x + 5x - 1 - 33 \\ & \Rightarrow 20x^2 - 24x - 34 = 10x^2 + 3x - 34 \\ & \Rightarrow 10x^2 - 27x = 0 \Rightarrow x(10x - 27) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{27}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 12:

- 1) Ta có $A = n(3n-1) - 3n(n-2)$
 $\Rightarrow A = 3n^2 - n - 3n^2 + 6n = 5n : 5$ với mọi n .
- 2) Ta có $B = n(n+5) - (n-3)(n+2)$
 $\Rightarrow B = n^2 + 5n - (n^2 + 2n - 3n - 6) = 6n + 6 : 6$ với mọi n .
- 3) Ta có $C = (n^2 + 3n - 1)(n+2) - n^3 + 2$
 $\Rightarrow C = n^3 + 2n^2 + 3n^2 + 6n - n - 2 - n^3 + 2 = 5n^2 + 5n : 5$ với mọi n .
- 4) Ta có $D = (2n+1)(n^2 - 3n - 1) - 2n^3 + 1$
 $\Rightarrow D = 2n^3 - 6n^2 - 2n + n^2 - 3n - 1 - 2n^3 + 1 = -5n^2 - 5n : 5$ với mọi n .
- 5) Ta có $E = [(n-1)(n+1) - (n-7)(n-5)]$
 $\Rightarrow E = [(n^2 - 1) - (n^2 - 5n - 7n + 35)] = 12n - 36 : 12$ với mọi n .
- 6) Ta có $F = (6n+1)(n+5) - (3n+5)(2n-1)$
 $\Rightarrow F = (6n^2 + 30n + n + 5) - (6n^2 - 3n + 10n - 5) = 24n + 10 : 2$ với mọi n .
- 7) Ta có $G = (5a-3)(3b-5) - (3a-5)(5b-3)$
 $\Rightarrow G = (15ab - 25a - 9b + 15) - (15ab - 9a - 25b + 15) = 16a + 16b : 16$ với mọi n .

Bài 13:

Vì a chia 3 dư 1 nên $a = 3m + 1$ với $m \in \mathbb{N}$.

Và b chia 3 dư 2 nên $b = 3n + 2$ với $n \in \mathbb{N}$

Khi đó $ab = (3m+1)(3n+2) = 6mn + 6m + 3n + 2$ chia 3 dư 2

Bài 14:

Vì a chia 5 dư 1 nên $a = 5m + 1$ với $m \in \mathbb{N}$

Vì b chia 5 dư 2 nên $b = 5n + 2$ với $n \in \mathbb{N}$

Khi đó $ab = (5m+1)(5n+2) = 25mn + 10m + 5n + 2$ chia 5 dư 2.

Bài 5. PHÉP CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC.

Bài 1:

1) $2y^3$

2) $-2x^3$

3) $2x$

4) $\frac{-1}{7}$

5) $\frac{-2}{3}y^5$

6) $\frac{5}{6}xy$

7) $\frac{-1}{32}x^5y^5$

8) $\frac{4}{3}x^2y^3$

9) $\frac{-9}{2}xy^2$

10) $\frac{15}{4}x$

11) $\frac{-3}{2}xy$

12) $6x^3$

Bài 2: Thực hiện phép tính

1) $xy + 2xy^2 - 4$

2) $\frac{5}{2}xy - 1 - \frac{1}{2}y$

3) $x + 2x - \frac{1}{3}$

4) $3x - 4y + 2xy$

5) $4y - 1 + 3y^2$

6) $xy - 2x^2 + 4y$

7) $5x + 4x^2 - \frac{10}{3}y$

8) $9x^2y - 6xy + 4$

9) $4x^3y^4 - 3xy^2 - \frac{3}{2}x$

10) $6x^2 - 5 - \frac{3}{5}x^2y$

11) $3xy - \frac{3}{2}y - 3x$

12) $\frac{-8}{3}xy^2 + 4y - 24x$

Bài 3: Tìm đơn thức A biết

1) $A = \frac{15}{4}x^2y^2$

2) $A = -8x^3y$

3) $A = \frac{-8}{75}xy$

4) $A = \frac{4}{15}x^2y^2$

5) $A = \frac{-7}{5}xy^3$

6) $A = \frac{-10}{9}x^5y$

7) $A = \frac{9}{10}xy^4$

8) $A = \frac{7}{4}x^2y^3$

9) $A = \frac{-3}{56}x^4y^4$

Bài 4: Tìm đơn thức B biết

1) $B = xy$

2) $B = x^2$

3) $B = 2x^3y^6$

4) $B = -2y^4$

5) $B = \frac{2}{3}x^2$

6) $B = \frac{4}{3}x^2y^2$

CHƯƠNG 2. HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ VÀ ỨNG DỤNG

Bài 1. HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG, BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

I. LÝ THUYẾT.

1) Hằng đẳng thức.

Ví dụ 1: Khi thực hiện phép nhân $a.(a+b)$ ta được $a.(a+b) = a^2 + ab$

Như vậy đẳng thức $a.(a+b) = a^2 + ab$ là đẳng thức đúng và khi thay a, b bởi các giá trị khác nhau thì hai vế của đẳng thức luôn nhận giá trị bằng nhau.

Kết luận:

- ♣ Hằng đẳng thức là đẳng thức mà hai vế luôn cùng nhận một giá trị khi thay các chữ trong hằng đẳng thức bằng các số tùy ý.

2) Hiệu hai bình phương.

Ví dụ 2: Thực hiện phép nhân $(a-b)(a+b)$ ta được $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Như vậy $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ gọi là hằng đẳng thức hiệu hai bình phương.

Tổng quát:

- ♣ Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

Ví dụ 3: Tính nhanh $50^2 - 48^2 = (50-48)(50+48) = 2.98 = 196$.

Ví dụ 4: Viết thành tích $4x^2 - 25y^2 = (2x-5y)(2x+5y)$

3) Bình phương của một tổng.

Ví dụ 5: Khi ta thực hiện phép tính $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

Như vậy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gọi là hằng đẳng thức bình phương của một tổng

Tổng quát:

- ♣ Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ví dụ 6: Tính nhanh $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 2.6xy + 9y^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

Ví dụ 7: Viết gọn $9x^2 + 12x + 4$ thành bình phương của một tổng

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2.3x.2 + 2^2 = (3x+2)^2$$

4) Bình phương của một hiệu.

Ví dụ 8: Khi ta thực hiện phép tính $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

Như vậy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ gọi là hằng đẳng thức bình phương của một hiệu.

Ví dụ 9: Tính nhanh $(2x^2 - 1)^2 = 4x^4 - 2.2x^2 + 1 = 4x^4 - 4x^2 + 1$

Ví dụ 10: Viết gọn $9x^2 - 24xy + 16y^2$ thành bình phương của một hiệu

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x)^2 - 2.3x.4y + (4y)^2 = (3x-4y)^2$$

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Triển khai các biểu thức sau theo hằng đẳng thức

- | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $(x+1)^2$ | 2) $(4+x)^2$ | 3) $(6-x)^2$ | 4) $(x-5)^2$ |
| 5) $(5x+1)^2$ | 6) $(2x+3)^2$ | 7) $(2x-1)^2$ | 8) $(3x-2)^2$ |
| 9) $(x+2y)^2$ | 10) $(x+5y)^2$ | 11) $(x-2y)^2$ | 12) $(2x-y)^2$ |
| 13) $(3x+5y)^2$ | 14) $(2x+3y)^2$ | 15) $(2x-3y)^2$ | 16) $(2x-5y)^2$ |
| 17) $(x^2+9)^2$ | 18) $(2x^2+1)^2$ | 19) $(x^2-y^2)^2$ | 20) $(3x-y^2)^2$ |
| 21) $(x+2y^2)^2$ | 22) $(2x+3y^2)^2$ | 23) $(4x-2y^2)^2$ | 24) $(4x^2-2y)^2$ |

Bài 2: Triển khai các biểu thức sau theo hằng đẳng thức

- | | | |
|--|--|--|
| 1) x^2-4 | 2) $1-4x^2$ | 3) $4x^2-9$ |
| 4) $9-25x^2$ | 5) $4x^2-25$ | 6) $9x^2-36$ |
| 7) $(3x)^2-y^2$ | 8) $x^2-(2y)^2$ | 9) $(2x)^2-y^2$ |
| 10) $(3x)^2-9y^4$ | 11) $16x^2-(y^2)^2$ | 12) $x^4-(3y^2)^2$ |
| 13) $(x-1)(x+1)$ | 14) $(x-5)(x+5)$ | 15) $(x-6)(6+x)$ |
| 16) $(2x+1)(2x-1)$ | 17) $(x-2y)(2y+x)$ | 18) $(5x-3y)(3y+5x)$ |
| 19) $\left(\frac{1}{x}-5\right)\left(\frac{1}{x}+5\right)$ | 20) $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ | 21) $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$ |
| 22) $\left(\frac{x}{y}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{2}{3}\right)$ | 23) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{y}{3}-\frac{x}{2}\right)$ | 24) $\left(2x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}+2x\right)$ |
| 25) $\left(2x+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}-2x\right)$ | 26) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}x\right)$ | 27) $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{y}{2}\right)$ |
| 28) $(3x-y^2)(3x+y^2)$ | 29) $(x^2-2y)(x^2+2y)$ | 30) $(x^2-y^2)(x^2+y^2)$ |

Bài 3: Rút gọn biểu thức sau:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1) $(2x+1)^2+(2x-1)^2$ | 2) $-(x+1)^2-(x-1)^2$ | 3) $(x+2y)^2-(x-2y)^2$ |
| 4) $(3x+y)^2+(x-y)^2$ | 5) $-(x+5)^2-(x-3)^2$ | 6) $(3x-2)^2-(3x-1)^2$ |
| 7) $(x-4y)^2+(x+4y)^2$ | 8) $-(-2x+3)^2-(5x-3)^2$ | 9) $(-2x+3)^2-(5x-3)^2$ |
| 10) $(2x+1)^2+(-3x-1)^2$ | 11) $-(x-y)^2-(2x+y)^2$ | 12) $-(x+1)^2+(x-1)^2$ |
| 13) $(2x+7)^2+(-2x-3)^2$ | 14) $-(2x-y)^2-(x+3y)^2$ | 15) $-(2x+7)^2+(-2x-3)^2$ |

Bài 4: Thực hiện phép tính

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $x(1-x)+(x-1)^2$ | 2) $(x-3)^2-x^2+10x-7$ |
| 3) $(x+2)^2-(x-3)(x+1)$ | 4) $(x+4)(x-2)-(x-3)^2$ |
| 5) $(x-2)^2+(x-1)(x+5)$ | 6) $(x+3)(x-3)-x(23+x)$ |

7) $(1-2x)(5-3x)+(4-x)^2$

8) $(x-2)(x+2)-(x-3)(x+1)$

9) $(x+1)^2+(x-2)(x+2)-4x$

10) $(x+2)^2-(x+3)(x-3)+10$

11) $(x+4)^2+(x+5)(x-5)-2x(x+1)$

12) $(x-1)^2-(x-4)(x+4)+(x+3)^2$

13) $(x-1)^2-2(x+3)(x-3)+4x(x-4)$

14) $(y-3)(y+3)(y^2+9)-(y^2+2)(y^2-2)$

Bài 5: Thu gọn về hằng đẳng thức:

1) $4x^4-4x^2+1$

2) $4x^2-12x+9$

3) $36+x^2-12x$

4) $1-10x+25x^2$

5) $x^4+81+18x^2$

6) $4x^2-20x+25$

7) $x^2+4y^4-4xy^2$

8) $x^2+10xy+25y^2$

9) $9y^2-24xy+16x^2$

Bài 6: Thu gọn về hằng đẳng thức:

1) $(2x+1)^2+2(2x+1)+1$

2) $(3x-2y)^2+4(3x-2y)+4$

3) $(x+3)^2+(x-2)^2-2(x+3)(x-2)$

4) $(3x-5)^2-2(3x-5)(3x+5)+(3x+5)^2$

5) $(x-y)^2+(x+y)^2-2(x+y)(x-y)$

6) $(5-x)^2+(x+5)^2-(2x+10)(x-5)$

7) $(x-2)^2+(x+1)^2+2(x-2)(-1-x)$

8) $(2x+3y)^2+(2x-3y)^2-2(4x^2-9y^2)$

Bài 7: Tính

1) $A=8(3^2+1)(3^4+1)\dots(3^{16}+1)$

2) $B=(1-3)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\dots(3^{16}+1)$

3) $C=(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)\dots(5^{16}+1)$

4) $D=15(4^2+1)(4^4+1)\dots(4^{64}+1)$

5) $E=24(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)\dots(5^{128}+1)+(5^{256}-1)$

Bài 8: Tính giá trị của các biểu thức sau

1) $A=(2x+3)^2-(2x-1)^2-6x$ tại $x=201$

2) $B=(2x+5)^2-4(x+3)(x-3)$ tại $x=\frac{1}{20}$

3) $C=x^2-8xy+16y^2$ tại $x-4y=5$

4) $D=9x^2+1620-12xy+4y^2$ tại $3x-2y=20$

Bài 9: Tìm x biết

1) $x^2-9=0$

2) $25-x^2=0$

3) $-x^2+36=0$

4) $4x^2-4=0$

5) $4x^2-36=0$

6) $4x^2-36=0$

7) $(3x+1)^2-16=0$

8) $(2x-3)^2-49=0$

9) $(2x-5)^2-x^2=0$

10) $(x+3)^2-x^2=45$

11) $(5x-4)^2-49x^2=0$

12) $16(x-1)^2-25=0$

Bài 10: Tìm x biết

- 1) $(2x-3)^2 - (x-1)^2 = 0$ 2) $(2x+1)^2 - (x-1)^2 = 0$ 3) $(3x-5)^2 - (x+1)^2 = 0$
 4) $(x+2)^2 - (2x-5)^2 = 0$ 5) $(3x-1)^2 - (x+5)^2 = 0$ 6) $(2x-3)^2 - (x+5)^2 = 0$
 7) $(3x-4)^2 - (x+2)^2 = 0$ 8) $(2x-1)^2 - (3-x)^2 = 0$ 9) $(5x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$

Bài 11: Tìm x biết

- 1) $(2x-1)^2 - (4x^2 - 1) = 0$ 2) $(x+2)^2 - x(x-3) = 2$
 3) $(x-5)^2 - x(x+2) = 5$ 4) $(x-1)^2 + x(4-x) = 11$
 5) $(x-3)(x+3) = (x-5)^2$ 6) $(2x+1)^2 - 4x(x-1) = 17$
 7) $(3x+1)^2 - 9x(x-2) = 25$ 8) $(3x-2)(3x+2) - 9(x-1)x = 0$
 9) $(x+2)^2 - (x-2)(x+2) = 0$ 10) $(x+2)^2 - (x-3)(x+3) = -3$
 11) $(3x+2)^2 - (3x-5)(3x+2) = 0$ 12) $(x+3)^2 - (x+2)(x-2) = 4x+17$
 13) $3(x-1)^2 + (x+5)(2-3x) = -25$ 14) $(x+3)^2 + (x-2)^2 = 2x^2$

Bài 12: Tìm x, y biết

- 1) $x^2 + y^2 + 4y + 13 = 6x$ 2) $x^2 + y^2 + 17 = 2x - 8y$
 3) $x^2 + y^2 + 45 = 12y - 6x$ 4) $4x^2 + 9y^2 + 2 = 4x + 6y$
 5) $9x^2 + 4y^2 + 26 + 4y = 30x$ 6) $9x^2 + y^2 + 20 = 12x + 8y$
 7) $x^2 + 49y^2 + 5 + 14y = 4x$ 8) $16x^2 + 25y^2 + 13 = 20y + 24x$

Bài 13: Chứng minh rằng với mọi x thì

- 1) $A = x^2 - x + 1 > 0$ 2) $B = x^2 + x + 1 > 0$ 3) $C = x^2 + 2x + 2 > 0$
 4) $A = x^2 - 5x + 10 > 0$ 5) $B = x^2 - 8x + 20 > 0$ 6) $C = x^2 - 8x + 17 > 0$
 7) $A = x^2 - 6x + 10 > 0$ 8) $B = 9x^2 - 6x + 2 > 0$ 9) $C = 2x^2 + 8x + 15 > 0$

Bài 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

- 1) $A = x^2 - x + 3$ 2) $B = x^2 + x + 1$
 3) $C = x^2 - 4x + 1$ 4) $D = x^2 - 5x + 7$
 5) $E = x^2 + 2x + 2$ 6) $F = x^2 - 3x + 1$
 7) $G = 3 + x^2 + 3x$ 8) $H = 3x^2 + 3 - 5x$
 9) $I = 4x + 2x^2 + 3$ 10) $K = 4x^2 + 3x + 2$
 11) $M = (x-1)(x-3) + 11$ 12) $N = (x-3)^2 + (x-2)^2$

Bài 15: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

- 1) $A = 4x - x^2 + 1$ 2) $B = 3 - 4x - x^2$
 3) $C = 8 - x^2 - 5x$ 4) $D = -4 - x^2 + 6x$
 5) $E = -10 - x^2 - 6x$ 6) $F = -x^2 + 13x + 1$
 7) $G = -7 - 4x^2 + 8x$ 8) $H = -4x^2 - 12x$

9) $I = 3x - 9x^2 - 1$

11) $M = 2x - 4x^2 - 7$

10) $K = 7 - 9x^2 - 8x$

12) $N = -4x^2 + 4x + 3$

Bài 16: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

1) $A = -3x^2 + 12x - 1$

3) $C = 9x + 2 - 3x^2$

5) $E = 7x - 3x^2 + 5$

7) $G = 15 + 7x - 5x^2$

9) $I = 11 - 5x^2 + 10x$

2) $B = 9 + 4x - 2x^2$

4) $D = 2x - 2 - 3x^2$

6) $F = 2 - 2x^2 - 9x$

8) $H = 10x - 6x^2 + 5$

10) $K = -3x^2 - 6x - 12$

Bài 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1) $A = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$

3) $C = 2 + x^2 + y^2 + 2(x + y)$

5) $E = 2x - 2xy + 2x^2 + y^2$

7) $G = x^2 - x + 2y^2 - 4y + 3$

2) $B = 7 + x^2 + y^2 - 2(x + y)$

4) $D = x^2 - 4x + y^2 + 2y - 10$

6) $F = x^2 + 2y^2 + 2xy + 5 - 2y$

Bài 18: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

1) $A = -x^2 - 4x - y^2 + 2y$

3) $C = -x^2 + 2x - y^2 - 4y + 6$

5) $E = -x^2 - y^2 - 2(x + y) + 3$

2) $B = 1 - 5x^2 - y^2 - 4xy + x$

4) $D = -x^2 - 2x - y^2 + 4y + 6$

6) $-F = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1$

Bài 2. LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU.

I. LÝ THUYẾT.

1) Lập phương của một tổng.

Ví dụ 1: Khi tính $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ gọi là hằng đẳng thức lập phương của một tổng.

Ví dụ 2: Khai triển theo hằng đẳng thức $(x+2)^3 = x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.4 + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Ví dụ 3: Thu gọn $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = x^3 + 3.x^2.4 + 3.x.4^2 + 4^3 = (x+4)^3$

Kết luận:

- Với hai biểu thức A và B tùy ý, ta có $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- Hằng đẳng thức trên còn được viết dưới dạng $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$

2) Lập phương của một hiệu.

Ví dụ 4: Khi tính $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Đẳng thức $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ gọi là hằng đẳng thức lập phương của một hiệu.

Ví dụ 5: Khai triển theo hằng đẳng thức $(x-3)^3 = x^3 - 3.x^2.3 + 3.x.9 - 27 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

Ví dụ 6: Thu gọn $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3.x^2.2 + 3.x.4 - 2^3 = (x-2)^3$

Kết luận:

- Với hai biểu thức A và B tùy ý, ta có $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- Hằng đẳng thức trên còn được viết dưới dạng $(A-B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A-B)$

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Triển khai các biểu thức sau theo hằng đẳng thức:

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| 1) $(x+3)^3$ | 2) $(1+x)^3$ | 3) $(2-x)^3$ | 4) $(x-3)^3$ |
| 5) $(2x+1)^3$ | 6) $(3x+2)^3$ | 7) $(2x-3)^3$ | 8) $(3x-1)^3$ |
| 9) $(x+2y)^3$ | 10) $(2x+y)^3$ | 11) $(3x-y)^3$ | 12) $(x-3y)^3$ |
| 13) $(2x+3y)^3$ | 14) $(3x+2y)^3$ | 15) $(3x-2y)^3$ | 16) $(4x-y)^3$ |

Bài 2: Viết gọn lại thành lập phương của một tổng hoặc một hiệu

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ | 3) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ |
| 4) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ | 5) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ | 6) $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27$ |
| 7) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ | 8) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ | 9) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ |

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $(x-2)^3 + (x+2)^3$ | 2) $(x-1)^3 - (x+1)^3$ | 3) $(1-x)^3 + (x+3)^3$ |
| 4) $(x+2y)^3 - (x-2y)^3$ | 5) $(y-x)^3 - (2x-y)^3$ | 6) $(2x+y)^3 - 2(y-x)^3$ |

$$7) (2x-3)^3 - 2x(2x+1)^2 \quad 8) (3x-1)^3 - 27x^2(x+1) \quad 9) (2x+1)^3 - 8x(x-1)^2$$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

$$1) (x+1)^3 - (x-4)(x+4) - x^3$$

$$2) (x+2)^3 - x(x+3)(x-3) - 12x^2 - 8$$

$$3) (x-2)^3 - x(x-2)(x+2) + 6x(x-3)$$

$$4) x(x-5)(x+5) - (x-5)^3 + 100x$$

$$5) (x-3y)^3 - (x-2y)(2y+x)$$

$$6) (-x-2y)^3 + x(2y-x)(x+2y)$$

$$7) -(2x-y)^3 - x(2x-y)^2 - y^3$$

$$8) -x(x-y)^2 + (x-y)^3 + y^2(y-2x)$$

Bài 5: Tính giá trị của biểu thức

$$1) A = x^3 - 3x^2 + 3x + 1012 \text{ tại } x = 11.$$

$$2) B = x^3 - 6x^2 + 12x - 108 \text{ tại } x = 12.$$

$$3) C = x^3 + 9x^2 + 27x + 2027 \text{ tại } x = -23$$

$$4) D = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 \text{ tại } x = -2y$$

Bài 6: Tìm x biết

$$1) 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$2) x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27$$

$$3) x^2 - 8x + 16 = 5(4-x)^3$$

$$4) (2-x)^3 = 6x(x-2)$$

$$5) (x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$$

$$6) (3-x)^3 - (x+3)^3 = 36x^2 - 54x$$

Bài 3. TỔNG VÀ HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG.

I. LÝ THUYẾT.

1) Tổng hai lập phương.

Ví dụ 1: Khi ta tính tích $a + b$ với $a^2 - ab + b^2$ ta được $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Đẳng thức $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ gọi là hằng đẳng thức tổng hai lập phương.

Tổng quát:

♣ Với A, B là hai biểu thức tùy ý, ta có $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

♣ Biểu thức $A^2 - AB + B^2$ còn gọi là bình phương thiếu của một hiệu.

Ví dụ 2: Khai triển theo hằng đẳng thức $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

2) Hiệu hai lập phương.

Ví dụ 3: Khi ta tính tích $a - b$ với $a^2 + ab + b^2$ ta được $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Đẳng thức $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ gọi là hằng đẳng thức hiệu hai lập phương.

Tổng quát:

♣ Với A, B là hai biểu thức tùy ý, ta có $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

♣ Biểu thức $A^2 + AB + B^2$ còn gọi là bình phương thiếu của một tổng

Ví dụ 4: Khai triển theo hằng đẳng thức $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Khai triển theo hằng đẳng thức

- | | | | |
|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 1) $x^3 + 1$ | 2) $x^3 + 8$ | 3) $x^3 - 8$ | 4) $x^3 - 27$ |
| 5) $x^3 + y^3$ | 6) $x^3 + 8y^3$ | 7) $x^3 - y^3$ | 8) $x^3 - 8y^3$ |
| 9) $1 + 8x^3$ | 10) $1 + 27y^3$ | 11) $1 - 8x^3$ | 12) $27x^3 - 1$ |

Bài 2: Viết thành vế kia của hằng đẳng thức

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ | 2) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ | 3) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ |
| 4) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ | 5) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ | 6) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$ |
| 7) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$ | 8) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$ | 9) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$ |
| 10) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9)$ | 11) $(x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$ | 12) $(x^3 - 2)(x^6 + 2x^3 + 4)$ |

Bài 3: Viết thành vế kia của hằng đẳng thức

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$ | 2) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$ |
| 3) $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$ | 4) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$ |
| 5) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ | 6) $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$ |
| 7) $(4x - 3y)(16x^2 + 9y^2 + 12xy)$ | 8) $(3x - 4y)(9x^2 + 16y^2 + 12xy)$ |

Bài 4: Thực hiện phép tính

1) $(x+1)(x^2-x+1)-(x^3-9)$

2) $x(x-1)^2-(x+2)(x^2-2x+4)$

3) $(x+5)(x^2-5x+25)-(x+5)^3$

4)

5) $(x+5).(x^2-5x+25)-x(x-4)^2+16x$

6) $(x+2)(x^2-2x+4)+(1-x)(1+x+x^2)$

7) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-1)(x+1)$

8) $-(x+2)(x^2-2x+4)+x(x+4)(x-4)$

9) $(x+1)(x^2+x+1)(x-1)(x^2-x+1)$

10) $(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)$

Bài 5: Thực hiện phép tính:

1) $(-x-2)^3+(2x-4)(x^2+2x+4)-x^2(x-6)$

2) $(x-1)^3-(x+2)(x^2-2x+4)+3(x+4)(x-4)$

3) $(x+y)(x^2-xy+y^2)+3(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

4) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)+(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

Bài 6: Cho biểu thức $A=(2x-1)(4x^2+2x+1)-7(x^3+1)$.a) Rút gọn biểu thức A b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=\frac{-1}{2}$.**Bài 7:** Cho biểu thức $A=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)+3y(x+3y)(x-3y)-x(3xy+7x-7)$.a) Chứng minh rằng biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến y b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=-1$.**Bài 8:** Cho biểu thức $A=(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)-3y(x+3y)(x-3y)+x(3xy-7x+7)$.a) Chứng minh rằng biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến y b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=-1$.**Bài 9:** Tìm x biết:

1) $(x-1)(x^2+x+1)+x(x+2)(2-x)=5$

2) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x(x^2+2)=17$

3) $(x+1)(x^2-x+1)-x(x-2)(x+2)=21$

4) $(x-3)(x^2+3x+9)=x(x^2-8)$

5) $(x-1)^3-(x+3)(x^2-3x+9)+3(x^2-4)=2$

Bài 4. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ.

I. LÝ THUYẾT.

1) Phân tích bằng cách đặt nhân tử chung.

♣ Phân tích đa thức thành nhân tử là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

Ví dụ 1: Với đa thức $x^3 + x^2$ ta thấy có chung x^2 nên ta làm như sau $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$

Khi đó x^2 gọi là nhân tử chung.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức $2(x + y) - 3x(x + y) = (x + y)(2 - 3x)$

Chú ý:

♣ Đưa dấu " - " ra ngoài để có nhân tử chung $a - b = -(b - a)$

2) Phân tích bằng cách nhóm hạng tử.

Ví dụ 3: Với đa thức $ax + bx + cx + a + b + c$ ta có thể làm như sau

$$ax + bx + cx + a + b + c = x(a + b + c) + a + b + c = (a + b + c)(x + 1)$$

Ví dụ 4: Với đa thức $xy + 1 + x + y$ ta sẽ nhóm hai hạng tử xy và x lại với nhau, y và 1 lại với nhau.

$$(xy + x) + (y + 1) = x(y + 1) + (y + 1) = (y + 1)(x + 1)$$

3) Phân tích bằng cách dùng hằng đẳng thức.

Ví dụ 5: Với đa thức $x^2 - 8x + 16$ ta thấy nó là một hằng đẳng thức nên ta sẽ làm như sau

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

Ví dụ 6: Với đa thức $x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Phân tích thành nhân tử (Đặt nhân tử chung)

- | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|--------------------|
| 1) $x^2 - x$ | 2) $x^2 - 8x$ | 3) $x^2 + 12x$ | 4) $x^3 - 4x$ |
| 5) $3x^2 - x$ | 6) $2xy + y^2$ | 7) $x^2 - xy$ | 8) $x^3 - x^2y$ |
| 9) $3x - 3y$ | 10) $10x + 15y$ | 11) $3x - 12y$ | 12) $4x - 20$ |
| 13) $6x - 2x^2$ | 14) $2x - 4x^2$ | 15) $3x^2 - 6x$ | 16) $3x^2 + 6x$ |
| 17) $4x^2 + 6x$ | 18) $2x^2 + 6x$ | 19) $2x^3 - 8x$ | 20) $2x^3 - 3x^2$ |
| 21) $3x^4 - 24x$ | 22) $4x^2 - 12x$ | 23) $6x^3 + 9x^2$ | 24) $9x - 16x^2$ |
| 25) $yx^3 + 8y$ | 26) $x^3y + 5x^2y$ | 27) $xy^2 - 25x$ | 28) $7x^2 + 14xy$ |
| 29) $4x^2y - 6xy^2$ | 30) $3xy - 9x^2$ | 31) $6x^2 - 3xy$ | 32) $3xy^2 - 3x^3$ |
| 33) $3xy + 6xz$ | 34) $18x^2y - 12x^3$ | 35) $8xy^2 - 2x^2y$ | 36) $3xy^2 + 6xyz$ |

Bài 2: Phân tích thành nhân tử (Đặt nhân tử chung)

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1) $x^3 + 2x^2 + x$ | 2) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$ | 3) $5x^3 - 10x^2 + 5x$ |
| 4) $2x^3 - 12x^2 + 18x$ | 5) $8x^2y - 8xy + 2x$ | 6) $5x^2y - 35xy + 60y$ |
| 7) $2x^2 + 5x^3 + x^2y$ | 8) $2x^3y - 8x^2y + 8xy$ | 9) $4x^2y - 8xy^2 + 18x^2y^2$ |
| 10) $6x^2y^2 + 4xy^2 - 12x^3y$ | 11) $2x^2y - 3xy^2 + 4x^2y^2$ | 12) $-3x^2y + 6x^2y^2 - 9xy^2$ |
| 13) $2x^3y^4 - 4x^5y^6 + 6y^7x^8$ | 14) $2x^4y^3 - 3x^2y^4 + 5x^3y^4$ | |

Bài 3: Phân tích thành nhân tử (Đặt nhân tử chung)

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1) $5(x-y) - y(x-y)$ | 2) $x(y+1) + 8(y+1)$ | 3) $5(x-y) - x(x-y)$ |
| 4) $z(x+y) - 5(x+y)$ | 5) $3x(x+5) - 2(5+x)$ | 6) $x^2(x-1) + 4(x-1)$ |
| 7) $5x(x-1) - (1-x)$ | 8) $x(y-1) - y(1-y)$ | 9) $y(x-2) - 3(2-x)$ |
| 10) $3(x-y) - y(y-x)$ | 11) $3x(x-2) + 5(2-x)$ | 12) $7x(x-y) - (y-x)$ |
| 13) $3x(x-1) - 2y(1-x)$ | 14) $3(x-y) - 5x(y-x)$ | 15) $x(x-y) + y(y-x)$ |
| 16) $x(y^2-1) + 4(1-y^2)$ | 17) $x(2y-1) - 5(2y-1)$ | 18) $9(x-2y) + x(2y-x)$ |
| 19) $10x(x-y) - 8y(y-x)$ | 20) $3x(x-y) + 6(y-x)$ | 21) $5x(x-1) - 15x(1-x)$ |
| 22) $10x(x-y) - 6y(y-x)$ | 23) $3x(x-2y) + 6y(2y-x)$ | 24) $20x(x+y) - 8y(y+x)$ |
| 25) $xy^2(x-3) + 4x(3-x)$ | 26) $2x(x+y) - 6x^2(x+y)$ | 27) $9x^2(y+z) + 3x(y+z)$ |
| 28) $2x^2(y-1) - 2x(y-1)$ | 29) $10xy(x-y) - 6y(y-x)$ | |

Bài 4: Phân tích thành nhân tử (Đặt nhân tử chung)

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1) $x.(x-1) + (1-x)^2$ | 2) $(x+1)^2 - 3(x+1)$ | 3) $2x(x-2) - (x-2)^2$ |
| 4) $3x(x-1)^2 - (1-x)^3$ | 5) $3x(x+2) - 5(x+2)^2$ | 6) $4x(x-y) + 3(y-x)^2$ |

Bài 5: Phân tích thành nhân tử (Nhóm hạng tử)

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) $2y(x+2) - 3x - 6$ | 2) $3(x+4) - x^2 - 4x$ | 3) $2(x+5) - x^2 - 5x$ |
| 4) $x^2 + 6x - 3(x+6)$ | 5) $x(x+y) - 5x - 5y$ | 6) $x(x-y) + 2x - 2y$ |
| 7) $2x - 6 + 5x(x-3)$ | 8) $3x(x-2) - 4x + 8$ | 9) $x(x+y) - 3x - 3y$ |
| 10) $x(x+y) - 7x - 7y$ | 11) $x^2(x-y) + 2x - 2y$ | 12) $x(x+3y) - 5x - 15y$ |
| 13) $2x(x-5) + 3x - 15$ | 14) $x(x+y) + ax + ay$ | 15) $a(x+y) - 4x - 4y$ |
| 16) $a(x-y) + bx - by$ | 17) $xz + yz - 5(x+y)$ | 18) $5(x-y) + ax - ay$ |

Bài 6: Phân tích thành nhân tử (Nhóm hạng tử)

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $x^2 + 3x - x - 3$ | 2) $x^2 - xy + x - y$ | 3) $xy + y^2 - x - y$ |
| 4) $xy + y - 2x - 2$ | 5) $x^3 - 2x^2 + x - 2$ | 6) $x^4 + x^3y - x - y$ |
| 7) $x^2 + xy - xz - yz$ | 8) $xy + xz + 3y + 3z$ | 9) $x^2 - 3x + xy - 3y$ |
| 10) $xy - 3x - y^2 + 3y$ | 11) $x^2 + 2x - xy - 2y$ | 12) $3x^2 - x - 3xy + y$ |
| 13) $x^2 + 5xy + x + 5y$ | 14) $(x+1)y - 2x - 2$ | 15) $x^2 - 2xy + x - 2y$ |
| 16) $x^2 - 2x + 2y - xy$ | 17) $x^2 + xy - 2x - 2y$ | 18) $x^2 - xy - 6x + 6y$ |
| 19) $2xy + 3z + 6y + xz$ | 20) $3x^2 - 3xy - 5x + 5y$ | 21) $x^2 - 6x - 2xy + 12y$ |
| 22) $x^2 + 3xy - 5x - 15y$ | 23) $3x^2 - 2x - 3xy + 2y$ | 24) $3x^2 - 3xy - 5x + 5y$ |
| 25) $x^3 + 6x^2 + x + 6$ | 26) $9x^3 - 9x^2y - 4x + 4y$ | 27) $2x^2 - 6xy + 5x - 15y$ |
| 28) $x^2y - x^3 - 9y + 9x$ | 29) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ | 30) $5xy^2 - 5x + y^2 - 1$ |
| 31) $4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$ | 32) $10ax - 5ay - 2x + y$ | 33) $a^3 - a^2x - ay + xy$ |

34) $x^2 + ab + ax + bx$

35) $ax - bx + ab - x^2$

Bài 7: Phân tích thành nhân tử (Nhóm hạng tử)

1) $ax^2 - 3axy + bx - 3by$

2) $5x^2y + 5xy^2 - a^2x - a^2y$

3) $2ax^3 + 6ax^2 + 6ax + 18a$

4) $10xy^2 - 5by^2 + 2ax - ab$

5) $ax - bx + cx - 3a + 3b - 3c$

6) $2ax - bx + 3cx - 2a + b - 3c$

7) $ax - bx - 2cx - 2a + 2b + 4c$

8) $3ax^2 + 3bx^2 + ax + bx + 5a + 5b$

9) $ax^2 - bx^2 - 2ax + 2bx - 3a + 3b$

Bài 8: Phân tích thành nhân tử (Hằng đẳng thức)

1) $x^2 - 9$

2) $49 - x^2$

3) $4y^4 - 1$

4) $4x^2 - 1$

5) $x^2 - 9y^2$

6) $25x^2 - 9$

7) $4x^2 - 25$

8) $x^2 - 16y^2$

9) $9x^2 - 1$

10) $x^2 + 6x + 9$

11) $4x^2 + 4x + 1$

12) $10x - x^2 - 25$

13) $9x^2 + 6xy + y^2$

14) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

15) $x^2 + 4y^2 + 4xy$

16) $x^4 + 4 - 4x^2$

17) $x^4 + 2x^2 + 1$

18) $x^4 - 2x^2 + 1$

19) $1 - 8x^3$

20) $x^3 + 27$

21) $8x^3 - y^3$

22) $8x^3 - \frac{1}{8}$

23) $x^3 + \frac{1}{27}$

24) $x^3 - \frac{8}{125}$

Bài 9: Phân tích thành nhân tử (Hằng đẳng thức)

1) $9 - (x - y)^2$

2) $(x - y)^2 - 4$

3) $(x + 2)^2 - y^2$

4) $(x + 5)^2 - y^2$

5) $(x + y)^2 - 9x^2$

6) $16x^2 - (x + 1)^2$

7) $(4x - 5)^2 - 25$

8) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$

9) $(2x - 3)^2 - 25y^2$

10) $(3x + 1)^2 - (x + 1)^2$

11) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

12) $(2xy + 1)^2 - (2x + y)^2$

13) $9(x - y)^2 - 4(x + y)^2$

14) $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2$

15) $(4x^2 - 4x + 1) - (x + 1)^2$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 - x - y^2 - y$

2) $x^2 - y^2 + x - y$

3) $3x - 3y + x^2 - y^2$

4) $5x - 5y + x^2 - y^2$

5) $x^2 - 5x - y^2 - 5y$

6) $x^2 - y^2 + 2x - 2y$

7) $x^2 - 4y^2 + x + 2y$

8) $x^2 - y^2 - 2x - 2y$

9) $x^2 - 4y^2 + 2x + 4y$

10) $x(x - y) + x^2 - y^2$

11) $x^2 - y^2 + 10x - 10y$

12) $x^2 - y^2 + 20x + 20y$

13) $4x^2 - 9y^2 - 4x - 6y$

14) $x^3 - y^3 + 7x^2 - 7y^2$

15) $x^3 + 4x - (y^3 + 4y)$

16) $x^3 + y^3 + 2x + 2y$

17) $x^3 - y^3 - 2x^2y + 2xy^2$

18) $x^3 - 4x^2 + 4x - xy^2$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 - 2x + 1 - y^2$

2) $x^2 + 6x + 9 - y^2$

3) $x^2 + 2x - y^2 + 1$

4) $x^2 - y^2 + 4x + 4$

5) $4a^2 - 4a + 1 - b^2$

6) $x^2 + 4x - y^2 + 4$

7) $x^2 - y^2 - 6y - 9$

8) $x^2 - 6x + 9 - y^2$

9) $x^2 + 8x + 16 - y^2$

10) $4x^2 - y^2 + 4x + 1$

11) $4x^2 + 6y - y^2 - 9$

12) $x^2 - 6x - 4y^2 + 9$

13) $y^2 - x^2 - 12y + 36$

14) $x^2 - y^2 - 2y - 1$

15) $x^2 - y^2 + 14x + 49$

16) $1 - 8x + 16x^2 - y^2$

17) $x^2 - 16y^2 + 4x + 4$

18) $x^2 + 10x - 16y^2 + 25$

19) $y^2 - 14y - 25x^2 + 49$

20) $x^2 - 4y^2 + 16x + 64$

21) $16y^2 - 4x^2 - 12x - 9$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 - 2xy - 4 + y^2$

2) $4 - x^2 - 2xy - y^2$

3) $x^2 + 4y^2 - 4xy - 4$

4) $x^2 - 2xy - 25 + y^2$

5) $9 - x^2 - 2xy - y^2$

6) $x^2 + 2xy - 9 + y^2$

7) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$

8) $x^2 - 2xy + y^2 - 4$

9) $x^2 - 2xy + y^2 - 49$

10) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$

11) $x^2 - 16 - 4xy + 4y^2$

12) $25 - x^2 + 2xy - y^2$

13) $25 - x^2 + 4xy - 4y^2$

14) $4x^2 + 4xy + y^2 - 9$

15) $x^2 + 4xy - 16 + 4y^2$

16) $a^2 - 9 - 8ab + 16b^2$

17) $x^2 - 36 + 4xy + 4y^2$

18) $4(x^2 - y^2) + 4x + 1$

19) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$

20) $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2$

21) $x^2 + y^2 - 2xy - 4z^2$

22) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2$

23) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 12$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2$

2) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$

3) $x^4 - x^2 + 2xy - y^2$

4) $x^2 - 2xy + 2x + y^2 - 2y$

5) $x^2 + y^2 + 2xy + yz + zx$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 - 2x + 1 - y^2 + 2x - 1$

2) $x^2 - 4x + 4 - y^2 - 6y - 9$

3) $4x^2 - 4x + 1 - y^2 - 8y - 16$

4) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2$

5) $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1$

6) $(x^2 + x + 1)^2 + 2x(x^2 + x + 1) + x^2$

7) $(x + y)^2 - 8(x + y) + 12$

8) $(x^2 + 2x)^2 - 2x^2 - 4x - 3$

9) $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$

10) $(x^2 + 2x)^2 + 9x^2 + 18x + 20$

11) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$

12) $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^3 - 2x^2 + x$

2) $x^3 - 6x^2 + 9x$

3) $x^3 - 2x^2 - 8x$

4) $x^3 - 4x^2 + 4x$

5) $2x^3 + 3x^2 - 2x$

6) $2x^3 - 8x^2 + 8x$

7) $4x^3 + 4x^2 + x$

8) $3x^3 - 6x^2 + 3x$

9) $x^3 - 7x^2 + 10x$

10) $2x^3 - 12x^2 + 18x$

11) $2x^3 - 20x^2 + 18x$

12) $a^3 - 8a^2 + 16a$

13) $x^8 - x^2$

14) $x^4 - 27x$

15) $27x^5 + x^2$

16) $(x + y)^3 - x^3 - y^3$

17) $(x + y)^3 - (x - y)^3$

18) $(x + y)^3 + (x - y)^3$

19) $x^3 - y^3 + 2x^2 - 2y^2$

20) $x^3 - y^3 - 4x + 4y$

21) $x^3 - 8y^3 + x^2 - 4y^2$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 - 4xy + 3y^2$

4) $9x^2 + 6xy - 8y^2$

7) $x^2 - 10xy + 16y^2$

10) $2x^2 + 10xy + 8y^2$

2) $4x^2 - 5xy + y^2$

5) $2x^2 + 3xy - 5y^2$

8) $3x^2 - 10xy + 8y^2$

11) $5x^2 + 10xy + 5y^2$

3) $x^2 + 4xy + 3y^2$

6) $x^2 - 35y^2 - 2xy$

9) $4x^2 + 4xy - 15y^2$

12) $-7xy + 3x^2 + 2y^2$

Dạng 2. Tìm x **Bài 17:** Tìm x biết:

1) $x^2 - x = 0$

4) $x + 5x^2 = 0$

7) $x^2 + 7x = 0$

10) $2x^2 - 5x = 0$

13) $5x^2 - 13x = 0$

16) $4x^3 - x = 0$

19) $x^3 - 16x = 0$

2) $x^2 - 4x = 0$

5) $x^2 - 7x = 0$

8) $7x^2 + 2x = 0$

11) $3x^2 + 7x = 0$

14) $-3x^2 + 5x = 0$

17) $x^3 - 4x = 0$

20) $x^3 - 25x = 0$

3) $x^2 + 3x = 0$

6) $3x^2 - 6x = 0$

9) $x^2 + 6x = 0$

12) $5x - 3x^2 = 0$

15) $3x^2 - 7x = 0$

18) $x^3 - 9x = 0$

21) $4x^3 - 36x = 0$

Bài 18: Tìm x biết:

1) $4x(x+1) = 8(x+1)$

4) $x(x+2) - 3(x+2) = 0$

7) $2x(x-5) - 7(5-x) = 0$

10) $5x(x-1) = x-1$

13) $x(x-3) - x + 3 = 0$

16) $2x(x+5) - x - 5 = 0$

19) $5x(x-3) - x + 3 = 0$

22) $x(2x-1) + 4x - 2 = 0$

25) $x(x-20) - x + 20 = 0$

28) $8x(x-5) - 3x + 15 = 0$

2) $5x(x-2) - (2-x) = 0$

5) $2x(x+1) - 3(x+1) = 0$

8) $3x(x-2) + 2(x-2) = 0$

11) $x(x+2) - x - 2 = 0$

14) $2x(x-1) - x + 1 = 0$

17) $x(x-3) + 2x - 6 = 0$

20) $x(x-3) - 2x + 6 = 0$

23) $x(x-4) + 3x - 12 = 0$

26) $2(x+5) - x^2 - 5x = 0$

29) $3x(x-5) - 2x + 10 = 0$

3) $x(x-1) - 2(1-x) = 0$

6) $x^2(x-2) + 3(x-2) = 0$

9) $x(3x+2) - x(2x+3) = 0$

12) $x(x-2) + x - 2 = 0$

15) $x(x+3) - 2x - 6 = 0$

18) $x(x-1) + 2x - 2 = 0$

21) $2(x+3) - x^2 - 3x = 0$

24) $4x(x-2) - 6 + 3x = 0$

27) $3x(x-5) - x^2 + 25 = 0$

30) $8x(x-5) - 2x + 10 = 0$

Bài 19: Tìm x biết:

1) $x^2 + 2x - 3x - 6 = 0$

4) $x^2 + 20x - x - 20 = 0$

7) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

10) $2x^2 - 2x = (x-1)^2$

13) $3(x-6)^2 = 60 - 10x$

16) $2(x-5) - x^2 + 25 = 0$

19) $x^2 - 4 + (x+2)(x-3) =$

2) $x^2 - 8x + 3x - 24 = 0$

5) $x^2 + 10x - 2x - 20 = 0$

8) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

11) $(x-3)^2 + 3 - x = 0$

14) $(x+3)^2 - 6x - 18 = 0$

17) $x(x+1) - x^2 + 1 = 0$

20) $2x(x-1) - (1-x)^2 = 0$

3) $x^2 + 4x - 5x - 20 = 0$

6) $x^2 + 12x + 2x + 24 = 0$

9) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

12) $(x-2)^2 - 4x + 8 = 0$

15) $(x-4)^2 - 4x + 16 = 0$

18) $4x^2 - 25 + (2x+5)^2 = 0$

21) $x^2 - 1 + (x+1)(x-3) = 0$

Bài 20: Tìm x biết:

$$1) x^2 + x - 12 = 0$$

$$4) x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$7) x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$10) x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$13) x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$16) 8x^2 + 30x + 7 = 0$$

$$2) x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$5) x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$8) x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$11) x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$14) x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$17) 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$3) x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$6) x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$9) x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$12) x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$15) 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$18) 9x^2 - 30x + 24 = 0$$

CHƯƠNG 2. HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ VÀ ỨNG DỤNG

Bài 1. HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG, BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

Bài 1:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $x^2 + 2x + 1$ | 2) $16 + 8x + x^2$ | 3) $36 - 12x + x^2$ |
| 4) $x^2 - 10x + 25$ | 5) $25x^2 + 10x + 1$ | 6) $4x^2 + 12x + 9$ |
| 7) $4x^2 - 4x + 1$ | 8) $9x^2 - 12x + 4$ | 9) $x^2 + 4xy + 4y^2$ |
| 10) $x^2 + 10xy + 25y^2$ | 11) $x^2 - 4xy + 4y^2$ | 12) $4x^2 - 4xy + y^2$ |
| 13) $9x^2 + 30xy + 25y^2$ | 14) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ | 15) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ |
| 16) $4x^2 - 20xy + 25y^2$ | 17) $x^4 + 18x^2 + 81$ | 18) $4x^4 + 4x^2 + 1$ |
| 19) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ | 20) $9x^2 - 6xy^2 - y^4$ | 21) $x^2 + 4xy^2 + 4y^2$ |
| 22) $4x^2 + 12xy + 9y^4$ | 23) $16x^2 - 16xy^2 + 4y^4$ | 24) $16x^4 - 16x^2y + 4y^2$ |

Bài 2:

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $(x-2)(x+2)$ | 2) $(1-2x)(1+2x)$ | 3) $(2x-3)(2x+3)$ |
| 4) $(3-5x)(3+5x)$ | 5) $(2x-5)(2x+5)$ | 6) $(3x-6)(3x+6)$ |
| 7) $(3x-y)(3x+y)$ | 8) $(x-2y)(x+2y)$ | 9) $(2x-y)(2x+y)$ |
| 10) $(3x-3y^2)(3x+3y^2)$ | 11) $(4x-y^2)(4x+y^2)$ | 12) $(x^2-3y^2)(x^2+3y^2)$ |
| 13) $x^2 - 1$ | 14) $x^2 - 25$ | 15) $x^2 - 36$ |
| 16) $4x^2 - 1$ | 17) $x^2 - 4y^2$ | 18) $25x^2 - 9y$ |
| 19) $\frac{1}{x^2} - 25$ | 20) $x^2 - \frac{9}{4}$ | 21) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$ |
| 22) $\frac{x^2}{y^2} - \frac{4}{9}$ | 23) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4}$ | 24) $4x^2 - \frac{4}{9}$ |
| 25) $\frac{9}{25} - 4x^2$ | 26) $\frac{x^2}{4} - \frac{16}{9}$ | 27) $\frac{4}{9}x^4 - \frac{y^2}{4}$ |
| 28) $9x^2 - y^4$ | 29) $x^4 - 4y^2$ | 30) $x^4 - y^4$ |

Bài 3:

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|-------------------|
| 1) $8x^2 + 2$ | 2) $-2x^2 - 2$ | 3) $8xy$ |
| 4) $10x^2 + 4xy + 2y^2$ | 5) $-2x^2 - 4x - 34$ | 6) $-6x + 3$ |
| 7) $2x^2 + 32y^2$ | 8) $-29x^2 + 42x - 18$ | 9) $-21x^2 + 18x$ |
| 10) $13x^2 + 10x + 2$ | 11) $-5x^2 - 2xy - 2y^2$ | 12) $-4x$ |
| 13) $8x^2 + 40x + 58$ | 14) $-5x^2 - 2xy - 10y^2$ | 15) $-16x - 40$ |

Bài 4:

- | | |
|---------------|---------------|
| 1) $-x + 1$ | 2) $4x + 2$ |
| 3) $6x + 7$ | 4) $8x - 17$ |
| 5) $2x^2 - 1$ | 6) $-23x - 9$ |

7) $7x^2 - 21x + 21$

9) $2x^2 - 2x - 3$

11) $6x - 9$

13) $3x^2 - 18x + 19$

8) $2x - 1$

10) $4x + 23$

12) $x^2 + 3x + 26$

14) -77

Bài 5:

1) $(2x^2 - 1)^2$

2) $(2x - 3)^2$

3) $(x - 6)^2$

4) $(5x - 1)^2$

5) $(x^2 + 9)^2$

6) $(2x - 5)^2$

7) $(x - 2y^2)^2$

8) $(x + 5y)^2$

9) $(3y - 4x)^2$

Bài 6:

1) $(2x + 2)^2$

2) $(3x - 2y + 2)^2$

3) 25

4) 100

5) $4y^2$

6) $4x^2$

7) 9

8) $36y^2$

Bài 7:

1) $A = 8(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1) \Rightarrow A = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1)$

$$\Rightarrow A = (3^4 - 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1)$$

.....

$$\Rightarrow A = (3^{16} - 1)(3^{16} + 1) = 3^{32} - 1$$

2) $B = (1 - 3)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1)$

$$\Rightarrow B = -(3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1)$$

$$\Rightarrow B = -(3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1)$$

.....

$$\Rightarrow B = -(3^{16} - 1)(3^{16} + 1) = -(3^{32} - 1) = 1 - 3^{32}$$

3) $C = (5 - 1)(5 + 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1) \dots (5^{16} + 1)$

$$\Rightarrow C = (5^2 - 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1) \dots (5^{16} + 1)$$

.....

$$\Rightarrow C = (5^{16} - 1)(5^{16} + 1) = 5^{32} - 1$$

4) $D = 15(4^2 + 1)(4^4 + 1) \dots (4^{64} + 1)$

$$\Rightarrow D = (4^2 - 1)(4^2 + 1)(4^4 + 1) \dots (4^{64} + 1)$$

.....

$$D = (4^{64} - 1)(4^{64} + 1) = 4^{128} - 1$$

$$5) E = 24(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) \dots (5^{128} + 1) + (5^{256} - 1)$$

$$\Rightarrow E = (5^2 - 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) \dots (5^{128} + 1) + (5^{256} - 1)$$

.....

$$\Rightarrow E = (5^{128} - 1)(5^{128} + 1) + (5^{256} - 1) = 5^{256} - 1 + 5^{256} - 1 = 2(5^{256} - 1)$$

Bài 8:

1) $A = 10x + 8$ tại $x = 201$ thì $A = 10 \cdot 201 + 8 = 2018$

2) $B = 20x - 11$ tại $x = \frac{1}{20}$ thì $B = 20 \cdot \frac{1}{20} - 11 = -10$.

3) $C = (x - 4y)^2$ tại $x - 4y = 5$ thì $C = 5^2 = 25$

4) $D = (3x - 2y)^2 + 1620$ tại $3x - 2y = 20$ thì $D = 20^2 + 1620 = 2020$

Bài 9:

1) $x \in \{3; -3\}$

2) $x \in \{5; -5\}$

3) $x \in \{6; -6\}$

4) $x \in \{1; -1\}$

5) $x \in \{3; -3\}$

6) $x \in \{3; -3\}$

7) $x \in \left\{1; \frac{-5}{3}\right\}$

8) $x \in \{5; -2\}$

9) $x \in \left\{5; \frac{5}{3}\right\}$

10) $x \in \{6\}$

11) $x \in \left\{-2; \frac{1}{3}\right\}$

12) $x \in \left\{\frac{9}{4}; \frac{-1}{4}\right\}$

Bài 10:

1) $x \in \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

2) $x \in \{0; -2\}$

3) $x \in \{1; 3\}$

4) $x \in \{1; 7\}$

5) $x \in \{-1; 3\}$

6) $x \in \left\{\frac{-2}{3}; 8\right\}$

7) $x \in \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$

8) $x \in \left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$

9) $x \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

Bài 11:

1) $x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $x \in \left\{\frac{-2}{7}\right\}$

3) $x \in \left\{\frac{5}{3}\right\}$

4) $x \in \{5\}$

5) $x \in \left\{\frac{17}{5}\right\}$

6) $x \in \{2\}$

7) $x \in \{1\}$

8) $x \in \left\{\frac{4}{9}\right\}$

9) $x \in \{-2\}$

10) $x \in \{-4\}$

11) $x \in \left\{\frac{-2}{3}\right\}$

12) $x \in \{2\}$

13) $x \in \{2\}$

14) $x \in \left\{\frac{-13}{2}\right\}$

Bài 12:

1) $x^2 + y^2 + 4y + 13 = 6x$

2) $x^2 + y^2 + 17 = 2x - 8y$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$3) \quad x^2 + y^2 + 45 = 12y - 6x$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + (y-6)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=6 \end{cases}$$

$$5) \quad 9x^2 + 4y^2 + 26 + 4y = 30x$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 30x + 25 + 4y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (3x-5)^2 + (2y+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-5=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{3}; y = -\frac{1}{2}$$

$$7) \quad x^2 + 49y^2 + 5 + 14y = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 49y^2 + 14y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (7y+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 7y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=2; y = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$4) \quad 4x^2 + 9y^2 + 2 = 4x + 6y$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 9y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 + (3y-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 3y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$6) \quad 9x^2 + y^2 + 20 = 12x + 8y$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (3x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \\ y-4=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}; y = 4$$

$$8) \quad 16x^2 + 25y^2 + 13 = 20y + 24x$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 24x + 9 + 25y^2 - 20y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (4x-3)^2 + (5y-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-3=0 \\ 5y-2=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{4}; y = \frac{2}{5}$$

Bài 13:

$$1) \quad A = x^2 - x + 1 > 0$$

$$\text{Ta có } A = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$3) \quad C = x^2 + 2x + 2 > 0$$

$$\text{Ta có } C = x^2 + 2x + 1 + 1$$

$$\Rightarrow C = (x+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

$$5) \quad B = x^2 - 8x + 20 > 0$$

$$\text{Ta có } B = x^2 - 2x \cdot 4 + 16 + 4$$

$$\Rightarrow B = (x-4)^2 + 4 \geq 4 > 0$$

$$7) \quad A = x^2 - 6x + 10 > 0$$

$$2) \quad B = x^2 + x + 1 > 0$$

$$\text{Ta có } B = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow B = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$4) \quad A = x^2 - 5x + 10 > 0$$

$$\text{Ta có } A = x^2 - 2x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + 10 - \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow A = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4} > 0$$

$$6) \quad C = x^2 - 8x + 17 > 0$$

$$\text{Ta có } C = x^2 - 2x \cdot 4 + 16 + 1$$

$$\Rightarrow C = (x-4)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

$$8) \quad B = 9x^2 - 6x + 2 > 0$$

Ta có $A = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 + 1$
 $\Rightarrow A = (x - 3)^2 + 1 \geq 1 > 0$

9) $C = 2x^2 + 8x + 15 > 0$

Ta có $C = 2(x^2 + 4x) + 15$
 $\Rightarrow C = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4) + 15 - 8$
 $\Rightarrow C = 2(x + 2)^2 + 7 \geq 7 > 0$

Bài 14:

1) $A = x^2 - x + 3$

Ta có $A = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 3 - \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow A = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy $A_{min} = \frac{11}{4}$ đạt được khi $x = \frac{1}{2}$.

3) $C = x^2 - 4x + 1$

Ta có $C = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4 + 1 - 4$
 $C = (x - 2)^2 - 3 \geq -3$

Dấu "=" xảy ra khi $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Vậy $C_{min} = -3$ đạt được khi $x = 2$.

5) $E = x^2 + 2x + 2$

Ta có $E = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 + 1$
 $\Rightarrow E = (x + 1)^2 + 1 \geq 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Vậy $E_{min} = 1$ đạt được khi $x = -1$.

7) $G = 3 + x^2 + 3x$

Ta có $G = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 3 - \frac{9}{4}$

Ta có $B = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1 + 1$

$\Rightarrow B = (3x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$

2) $B = x^2 + x + 1$

Ta có $B = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow B = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy $B_{min} = \frac{3}{4}$ đạt được khi $x = -\frac{1}{2}$.

4) $D = x^2 - 5x + 7$

Ta có $D = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + 7 - \frac{25}{4}$
 $\Rightarrow D = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Vậy $D_{min} = \frac{3}{4}$ đạt được khi $x = \frac{5}{2}$.

6) $F = x^2 - 3x + 1$

Ta có $F = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 1 - \frac{9}{4}$
 $\Rightarrow F = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{-5}{4} \geq \frac{-5}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Vậy $F_{min} = \frac{-5}{4}$ đạt được khi $x = \frac{3}{2}$.

8) $H = 3x^2 + 3 - 5x$

Ta có $H = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + 1\right)$

$$\Rightarrow G = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy $I_{min} = \frac{3}{4}$ đạt được khi $x = -\frac{3}{2}$.

9) $I = 4x + 2x^2 + 3$

Ta có $I = 2(x^2 + 2x) + 3$

$$\Rightarrow I = 2(x^2 + 2x + 1) + 3 - 2$$

$$\Rightarrow I = 2(x+1)^2 + 1 \geq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Vậy $I_{min} = 1$ đạt được khi $x=-1$.

11) $M = (x-1)(x-3) + 11$

Ta có $M = x^2 - 4x + 14$

$$\Rightarrow M = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4 + 10$$

$$\Rightarrow M = (x-2)^2 + 10 \geq 10$$

Dấu "=" xảy ra khi $x-2=0 \Rightarrow x=2$

Vậy $M_{min} = 10$ đạt được khi $x=2$.

$$\Rightarrow H = 3\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{6} + \frac{25}{36} + 1 - \frac{25}{36}\right)$$

$$\Rightarrow H = 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right] \geq \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x - \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

Vậy $H_{min} = \frac{11}{12}$ đạt được khi $x = \frac{5}{6}$.

10) $K = 4x^2 + 3x + 2$

Ta có $K = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + 2 - \frac{9}{16}$

$$\Rightarrow K = \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} \geq \frac{23}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$

Vậy $K_{min} = \frac{23}{16}$ đạt được khi $x = -\frac{3}{8}$.

12) $N = (x-3)^2 + (x-2)^2$

Ta có $N = 2x^2 - 10x + 13$

$$\Rightarrow N = 2(x^2 - 5x) + 13$$

$$\Rightarrow N = 2\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4}\right) + 13 - \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow N = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Vậy $N_{min} = \frac{1}{2}$ đạt được khi $x = \frac{5}{2}$.

Bài 15:

1) $A = 4x - x^2 + 1$

Ta có $A = -(x^2 - 4x - 1)$

$$\Rightarrow A = -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 5)$$

$$\Rightarrow A = -\left[(x-2)^2 - 5\right]$$

$$\Rightarrow A = -(x-2)^2 + 5 \leq 5$$

Vậy $A_{max} = 5$ đạt được khi $x=2$.

2) $B = 3 - 4x - x^2$

Ta có $B = -(x^2 + 4x - 3)$

$$\Rightarrow B = -(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 7)$$

$$\Rightarrow B = -\left[(x+2)^2 - 7\right]$$

$$\Rightarrow B = -(x+2)^2 + 7 \leq 7$$

Vậy $B_{max} = 7$ đạt được khi $x=-2$.

$$3) C = 8 - x^2 - 5x$$

$$C = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{57}{4} \leq \frac{57}{4}$$

Vậy $C_{max} = \frac{57}{4}$ đạt được khi $x = -\frac{5}{2}$.

$$5) E = -10 - x^2 - 6x$$

$$E = -(x+3)^2 - 1 \leq -1$$

Vậy $E_{max} = -1$ đạt được khi $x = -3$.

$$7) G = -7 - 4x^2 + 8x$$

$$G = -(2x-2)^2 - 3 \leq -3$$

Vậy $G_{max} = -3$ đạt được khi $x = 1$.

$$9) I = 3x - 9x^2 - 1$$

$$I = -\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4}$$

Vậy $I_{max} = -\frac{3}{4}$ đạt được khi $x = \frac{1}{6}$.

$$11) M = 2x - 4x^2 - 7$$

$$M = -\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} \leq -\frac{27}{4}$$

Vậy $M_{max} = -\frac{27}{4}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4}$.

$$4) D = -4 - x^2 + 6x$$

$$D = -(x-3)^2 + 5 \leq 5$$

Vậy $D_{max} = 5$ đạt được khi $x = 3$.

$$6) F = -x^2 + 13x + 1$$

$$F = -\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{173}{4} \leq \frac{173}{4}$$

Vậy $F_{max} = \frac{173}{4}$ đạt được khi $x = \frac{13}{2}$.

$$8) H = -4x^2 - 12x$$

$$H = -(2x+3)^2 + 9 \leq 9$$

Vậy $H_{max} = 9$ đạt được khi $x = -\frac{3}{2}$.

$$10) K = 7 - 9x^2 - 8x$$

$$K = -\left(3x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{79}{9} \leq \frac{79}{9}$$

Vậy $K_{max} = \frac{79}{9}$ đạt được khi $x = -\frac{4}{9}$.

$$12) N = -4x^2 + 4x + 3$$

$$N = -(2x-1)^2 + 4 \leq 4$$

Vậy $N_{max} = 4$ đạt được khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài 16:

$$1) A = -3x^2 + 12x - 1$$

$$\Rightarrow A = -3(x^2 - 4x) - 1$$

$$\Rightarrow A = -3(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4) - 1 + 12$$

$$\Rightarrow A = -3(x-2)^2 + 11 \leq 11$$

Vậy $A_{max} = 11$ đạt được khi $x = 2$.

$$3) C = 9x + 2 - 3x^2$$

$$\Rightarrow C = -3(x^2 - 3x) + 2$$

$$\Rightarrow C = -3\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + 2 + \frac{27}{4}$$

$$2) B = 9 + 4x - 2x^2$$

$$\Rightarrow B = -2(x^2 - 2x) + 9$$

$$\Rightarrow B = -2(x^2 - 2x + 1) + 9 + 2$$

$$\Rightarrow B = -2(x-1)^2 + 11 \leq 11$$

Vậy $B_{max} = 11$ đạt được khi $x = 1$.

$$4) D = 2x - 2 - 3x^2$$

$$\Rightarrow D = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) - 2$$

$$\Rightarrow D = -3\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) - 2 + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow C = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{35}{4} \leq \frac{35}{4}$$

Vậy $C_{max} = \frac{35}{4}$ đạt được khi $x = \frac{3}{2}$.

5) $E = 7x - 3x^2 + 5$

$$E = -3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{109}{12} \leq \frac{109}{12}$$

Vậy $E_{max} = \frac{109}{12}$ đạt được khi $x = \frac{7}{6}$.

7) $G = 15 + 7x - 5x^2$

$$\Rightarrow G = -5\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{349}{20} \leq \frac{349}{20}$$

Vậy $G_{max} = \frac{349}{20}$ đạt được khi $x = \frac{7}{10}$.

9) $I = 11 - 5x^2 + 10x$

$$\Rightarrow I = -5(x - 1)^2 + 16 \leq 16$$

Vậy $I_{max} = 16$ đạt được khi $x = 1$.

$$\Rightarrow D = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{-5}{3} \leq \frac{-5}{3}$$

Vậy $D_{max} = \frac{-5}{3}$ đạt được khi $x = \frac{1}{3}$.

6) $F = 2 - 2x^2 - 9x$

$$\Rightarrow F = -2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{97}{8} \leq \frac{97}{8}$$

Vậy $F_{max} = \frac{97}{8}$ đạt được khi $x = -\frac{9}{4}$.

8) $H = 10x - 6x^2 + 5$

$$\Rightarrow H = -6\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{55}{6} \leq \frac{55}{6}$$

Vậy $H_{max} = \frac{55}{6}$ đạt được khi $x = \frac{5}{6}$.

10) $K = -3x^2 - 6x - 12$

$$\Rightarrow K = -3(x + 1)^2 - 9 \leq -9$$

Vậy $K_{max} = -9$ đạt được khi $x = -1$.

Bài 17:

1) $A = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$

$$\Rightarrow A = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 1$$

$$\Rightarrow A = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$$

Vậy $A_{min} = 1$ đạt được khi $x = 1; y = 2$.

3) $C = 2 + x^2 + y^2 + 2(x + y)$

$$\Rightarrow C = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1)$$

$$\Rightarrow C = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 0$$

Vậy $C_{min} = 0$ đạt được khi $x = y = -1$.

5) $E = 2x - 2xy + 2x^2 + y^2$

$$E = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2x + 1) - 1$$

$$E = (x - y)^2 + (x + 1)^2 - 1 \geq -1$$

Vậy $E_{min} = -1$ đạt được khi $x = y = -1$.

7) $G = x^2 - x + 2y^2 - 4y + 3$

2) $B = 7 + x^2 + y^2 - 2(x + y)$

$$\Rightarrow B = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + 5$$

$$\Rightarrow B = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 5 \geq 5$$

Vậy $B_{min} = 5$ đạt được khi $x = y = 1$.

4) $D = x^2 - 4x + y^2 + 2y - 10$

$$\Rightarrow D = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) - 15$$

$$\Rightarrow D = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 15 \geq -15$$

Vậy $D_{min} = -15$ đạt được khi $x = 2, y = -1$.

6) $F = x^2 + 2y^2 + 2xy + 5 - 2y$

$$F = (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1) + 4$$

$$F = (x + y)^2 + (y - 1)^2 + 4 \geq 4$$

Vậy $F_{min} = 4$ đạt được khi $y = 1; x = -1$.

$$G = (x^2 - x) + 2(y^2 - 2y) + 3 = \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + 2(y^2 - 2y + 1) + 3 - \frac{1}{4} - 2$$

$$G = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2(y - 1)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}. \text{ Vậy } G_{\min} = \frac{3}{4} \text{ đạt được khi } x = \frac{1}{2}; y = 1.$$

Bài 18:

1) $A = -x^2 - 4x - y^2 + 2y$

$$\Rightarrow A = -(x^2 + 4x) - (y^2 - 2y)$$

$$\Rightarrow A = -(x^2 + 4x + 4) - (y^2 - 2y + 1) + 5$$

$$\Rightarrow A = -(x + 2)^2 - (y - 1)^2 + 5 \leq 5$$

Vậy $A_{\max} = 5$ đạt được khi

$$x = -2; y = 1.$$

2) $B = 1 - 5x^2 - y^2 - 4xy + x$

$$\Rightarrow B = -(4x^2 + 4xy + y^2) - (x^2 - x) + 1$$

$$\Rightarrow B = -(2x + y)^2 - \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow B = -(2x + y)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$$

Vậy $B_{\max} = \frac{5}{4}$ đạt được khi

$$x = \frac{1}{2}; y = -1.$$

3) $C = -x^2 + 2x - y^2 - 4y + 6$

$$\Rightarrow C = -(x^2 - 2x) - (y^2 + 4y) + 6$$

$$\Rightarrow C = -(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) + 11$$

$$\Rightarrow C = -(x - 1)^2 - (y + 2)^2 + 11 \leq 11$$

Vậy $C_{\max} = 11$ đạt được khi $x = 1; y = -2$

4) $D = -x^2 - 2x - y^2 + 4y + 6$

$$\Rightarrow D = -(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) + 6$$

$$\Rightarrow D = -(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 11$$

$$\Rightarrow D = -(x + 1)^2 - (y - 2)^2 + 11 \leq 11$$

Vậy $D_{\max} = 11$ đạt được khi $x = -1; y = 2$

5) $E = -x^2 - y^2 - 2(x + y) + 3$

$$\Rightarrow E = -(x^2 + 2x) - (y^2 + 2y) + 3$$

$$\Rightarrow E = -(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 2y + 1) + 5$$

$$\Rightarrow E = -(x + 1)^2 - (y + 1)^2 + 5 \leq 5$$

Vậy $E_{\max} = 5$ đạt được khi $x = y = -1$.

6) $-F = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1$

$$\Rightarrow -F = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 + 2y + 1)$$

$$\Rightarrow F = -(x - y)^2 - (y + 1)^2 \leq 0$$

Vậy $F_{\max} = 0$ đạt được khi $x = y = -1$.

Bài 2. LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU.

Bài 1:

1) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

3) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$

5) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

7) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

9) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

11) $27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$

13) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

15) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

2) $1 + 3x + 3x^2 + x^3$

4) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

6) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

8) $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

10) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

12) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

14) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

16) $64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$

Bài 2:

1) $(x+1)^3$

2) $(x-1)^3$

3) $(x+2)^3$

4) $(x-2)^3$

5) $(x-3)^3$

6) $(-x+3)^3$

7) $(2x-1)^3$

8) $(x+y)^3$

9) $(x-2y)^3$

Bài 3:

1) $2x^3 + 24x$

2) $-6x^2 - 2$

3) $6x^2 + 30x + 28$

4) $12x^2y + 16y^3$

5) $-9x^3 + 15x^2y - 9xy^2 + 2y$

6) $10x^3 + 6x^2y + 12xy^2 - y^3$

7) $-44x^2 + 52x - 27$

8) $-54x^2 + 9x - 1$

9) $28x^2 - 2x + 1$

Bài 4:

1) $2x^2 + 3x + 17$

2) $-6x^2 + 21x$

3) $-2x - 8$

4) $15x^2 + 125$

5) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 - x^2 + 4y^2$

6) $-2x^3 - 6x^2y - 8xy^2 - 8y^3$

7) $-12x^3 + 16x^2y - 7xy^2$

8) $-x^2y$

Bài 5:

1) $A = x^3 - 3x^2 + 3x + 1012$

$$\Rightarrow A = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1013$$

$$\Rightarrow A = (x-1)^3 + 1013$$

$$\text{Tại } x=11 \Rightarrow A = (11-1)^3 + 1013 = 2013$$

2) $B = x^3 - 6x^2 + 12x - 108$

$$\Rightarrow B = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 100$$

$$\Rightarrow B = (x-2)^3 - 100$$

$$\text{Tại } x=12 \Rightarrow B = (12-2)^3 - 100 = 900.$$

3) $C = x^3 + 9x^2 + 27x + 2027$

$$\Rightarrow C = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 2000$$

$$\Rightarrow C = (x+3)^3 + 2000$$

Tại $x = -23$ thì

$$C = (-20)^3 + 2000 = -6000$$

4) $D = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$$\Rightarrow D = (x+2y)^3$$

Tại $x = -2y$ thì $D = 0^3 = 0$

Bài 6:

1) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$

$$\Rightarrow (2x-1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

3) $x^2 - 8x + 16 = 5(4-x)^3$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = -5(x-4)^3$$

$$\Rightarrow 5(x-4)^3 + (x-4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 [5(x-4)+1] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ 5(x-4)+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=19/5 \end{cases}$$

5) $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$

$$\Rightarrow (6x^2 + 2) - 6x^2 + 12x - 6 = -10$$

$$\Rightarrow 12x = -6$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{2}.$$

2) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27$

$$\Rightarrow (x-2)^3 = 3^3$$

$$\Rightarrow x-2=3 \Rightarrow x=5.$$

4) $(2-x)^3 = 6x(x-2)$

$$\Rightarrow -(x-2)^3 = 6x(x-2)$$

$$\Rightarrow (x-2)^3 + 6x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2) [(x-2)^2 + 6x] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ (x-2)^2 + 6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow x=2$$

6) $(3-x)^3 - (x+3)^3 = 36x^2 - 54x$

$$\Rightarrow -2x^3 - 36x^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2(x+18) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x^2=0 \\ x+18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-18 \end{cases}$$

Bài 3. TỔNG VÀ HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG.

Bài 1:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $(x+1)(x^2-x+1)$ | 2) $(x+2)(x^2-2x+4)$ |
| 3) $(x-2)(x^2+2x+4)$ | 4) $(x-3)(x^2+3x+9)$ |
| 5) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ | 6) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$ |
| 7) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ | 8) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ |
| 9) $(1+2x)(1-2x+4x^2)$ | 10) $(1+3y)(1-3y+9y^2)$ |
| 11) $(1-2x)(1+2x+4x^2)$ | 12) $(3x-1)(9x^2+3x+1)$ |

Bài 2:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|-------------|
| 1) x^3+1 | 2) x^3-1 | 3) x^3-8 | 4) x^3+8 |
| 5) x^3-27 | 6) x^3-64 | 7) x^3-125 | 8) $8x^3+1$ |
| 9) $27x^3+8$ | 10) x^6+27 | 11) x^6+8 | 12) x^9-8 |

Bài 3:

- | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 1) x^3-8y^3 | 2) $8x^3+y^3$ | 3) x^3-27y^3 | 4) $27x^3-y^3$ |
| 5) $8x^3+27y^3$ | 6) $27x^3-8y^3$ | 7) $64x^3-27y^3$ | 8) $27x^3-64y^3$ |

Bài 4:

- | | | |
|--------------|----------------|-----------------|
| 1) 10 | 2) $-2x^2+x-8$ | 3) $-15x^2-75x$ |
| 4) | 5) $8x^2+125$ | 6) 9 |
| 7) $x+8$ | 8) $-16x-8$ | 9) x^6-1 |
| 10) x^6-64 | | |

Bài 5: Thực hiện phép tính:

- | | | | |
|--------------|-------------|-----------------|------------------|
| 1) $-12x-24$ | 2) $-3x-57$ | 3) $25x^3-2y^3$ | 4) $28x^3+26y^3$ |
|--------------|-------------|-----------------|------------------|

Bài 6:

- a) Ta có $A = x^3 - 8$
- b) Tại $x = \frac{-1}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 8 = \frac{-65}{8}$.

Bài 7:

- a) Ta có $A = x^3 - 7x^2 + 7x$. Vậy giá trị của A không phụ thuộc vào biến y .
- b) Khi $x = -1$ thì $A = (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) = -15$.

Bài 8:

- a) Ta có $A = x^3 - 7x^2 + 7x$. Vậy biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến y
- b) Khi $x = -1$ thì $A = (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) = -15$.

Bài 9:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $(x-1)(x^2+x+1)+x(x+2)(2-x)=5$ | 2) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x(x^2+2)=17$ |
|-----------------------------------|-------------------------------------|

$$\Rightarrow x^3 - 1 + x(4 - x^2) = 5$$

$$\Rightarrow 4x - 1 = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$3) (x+1)(x^2 - x + 1) - x(x-2)(x+2) = 21$$

$$\Rightarrow x^3 + 1 - x(x^2 - 4) = 21$$

$$\Rightarrow 4x + 1 = 21 \Rightarrow x = 5.$$

$$5) (x-1)^3 - (x+3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 27) + 3x^2 - 12 = 2$$

$$\Rightarrow 3x - 40 = 2 \Rightarrow x = 14.$$

$$\Rightarrow 8x^3 + 1 - 8x^3 - 16x = 17$$

$$\Rightarrow 1 - 16x = 17 \Rightarrow x = -1.$$

$$4) (x-3)(x^2 + 3x + 9) = x(x^2 - 8)$$

$$\Rightarrow x^3 - 27 = x^3 - 8x$$

$$\Rightarrow x = \frac{27}{8}.$$

Bài 4. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ.

Bài 1:

- | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| 1) $3(x-y)$ | 2) $5(2x+3y)$ | 3) $3(x-4y)$ | 4) $4(x-5)$ |
| 5) $2x(3-x)$ | 6) $2x(1-2x)$ | 7) $3x(x-2)$ | 8) $3x(x+2)$ |
| 9) $2x(2x+3)$ | 10) $2x(x+3)$ | 11) $2x(x^2-4)$ | 12) $x^2(2x-3)$ |
| 13) $3x(x^3-8)$ | 14) $4x(x-3)$ | 15) $3x^2(2x+3)$ | 16) $x(9-16x)$ |
| 17) $y(x^3+8)$ | 18) $x^2y(x+5)$ | 19) $x(y^2-25)$ | 20) $7x(x+2y)$ |
| 21) $2xy(2x-3y)$ | 22) $3x(y-3x)$ | 23) $3x(2x-y)$ | 24) $3x(y^2-x^2)$ |
| 25) $3x(y+2z)$ | 26) $6x^2(3y-2x)$ | 27) $2xy(4y-x)$ | 28) $3xy(y+2x)$ |

Bài 2:

- | | | |
|----------------------------------|---------------------------|----------------------|
| 1) $x(x^2+2x+1)$ | 2) $x^2(x^2-4x+4)$ | 3) $5x(x^2-2x+1)$ |
| 4) $2x(x^2-6x+9)$ | 5) $2x(4xy-4y+1)$ | 6) $5y(x^2-7x+12)$ |
| 7) $x^2(2+5x+y)$ | 8) $2xy(x^2-4x+4)$ | 9) $2xy(2x-4y+9xy)$ |
| 10) $2xy(3xy+2y-6x^2)$ | 11) $xy(2x-3y+4xy)$ | 12) $3xy(-x+2xy-3y)$ |
| 13) $2x^3y^4(1-2x^2y^2+3x^5y^3)$ | 14) $x^2y^3(2x^2-3y+5xy)$ | |

Bài 3:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) $(x-y)(5-y)$ | 2) $(y+1)(x+8)$ | 3) $(x-y)(5-x)$ |
| 4) $(x+y)(z-5)$ | 5) $(x+5)(3x-2)$ | 6) $(x-1)(x^2+4)$ |
| 7) $(x-1)(5x+1)$ | 8) $(y-1)(x+y)$ | 9) $(x-2)(y+3)$ |
| 10) $(x-y)(3+y)$ | 11) $(x-2)(3x-5)$ | 12) $(x-y)(7x+1)$ |
| 13) $(x-1)(3x+2y)$ | 14) $(x-y)(3+5x)$ | 15) $(x-y)(x-y)$ |
| 16) $(y^2-1)(x-4)$ | 17) $(2y-1)(x-5)$ | 18) $(x-2y)(9-x)$ |
| 19) $(x-y).2.(5x+4y)$ | 20) $(x-y).3.(x-2)$ | 21) $(x-1).20x$ |
| 22) $(x-y).2.(5x+3y)$ | 23) $(x-2y).3.(x-2y)$ | 24) $(x+y).4.(5x-2y)$ |
| 25) $(x-3).x.(y^2-4)$ | 26) $(x+y).2x.(1-3x)$ | 27) $(y+z).3x.(3x+1)$ |
| 28) $(y-1).2x.(x-1)$ | 29) $(x-y).2y.(5x+3)$ | |

Bài 4:

- | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| 1) $(x-2)(2x-1)$ | 2) $(x+1)(x-2)$ | 3) $(x-2)(x+2)$ |
| 4) $(x-1)^2(4x-1)$ | 5) $(x+2)(-2x-10)$ | 6) $(x-y)(7x-3y)$ |

Bài 5:

- | | | |
|------------------|-----------------|-----------------|
| 1) $(x+2)(2y-3)$ | 2) $(x+4)(3-x)$ | 3) $(x+5)(2-x)$ |
|------------------|-----------------|-----------------|

4) $(x+6)(x-3)$

7) $(x-3)(2+5x)$

10) $(x+y)(x-7)$

13) $(x-5)(2x+3)$

16) $(x-y)(x+b)$

5) $(x+y)(x-5)$

8) $(x-2)(3x-4)$

11) $(x-y)(x^2+2)$

14) $(x+y)(x+a)$

17) $(x+y)(z-5)$

6) $(x-y)(x+2)$

9) $(x+y)(x-3)$

12) $(x+3y)(x-5)$

15) $(x+y)(a-4)$

18) $(x-y)(5+a)$

Bài 6:

1) $(x+3)(x-1)$

4) $(x+1)(y-2)$

7) $(x+y)(x-z)$

10) $(y-3)(x-y)$

13) $(x+5y)(x+1)$

16) $(x-2)(x-y)$

19) $(x+3)(2y+z)$

22) $(x+3y)(x-5)$

25) $(x^2+1)(x+6)$

28) $(y-x)(x^2-9)$

31) $(x-1)(4x^2-9)$

34) $(x+a)(x+b)$

2) $(x-y)(x+1)$

5) $(x-2)(x^2+1)$

8) $(y+z)(x+3)$

11) $(x+2)(x-y)$

14) $(x+1)(y-2)$

17) $(x+y)(x-2)$

20) $(x-y)(3x-5)$

23) $(3x-2)(x-y)$

26) $(x-y)(9x^2-4)$

29) $(x+2)(x^2-4)$

32) $(2x-y)(5a-1)$

35) $(a-x)(b+x)$

3) $(x+y)(y-1)$

6) $(x+y)(x^3-1)$

9) $(x+y)(x-3)$

12) $(3x-1)(x-y)$

15) $(x-2y)(x+1)$

18) $(x-y)(x-6)$

21) $(x-6)(x-2y)$

24) $(x-y)(3x-5)$

27) $(x-3y)(2x+5)$

30) $(y^2-1)(5x+1)$

33) $(a-x)(x^2-y)$

Bài 7:

1) $(x-3y)(ax+b)$

3) $(x+3).2a.(x^2+3)$

5) $(a-b+c)(x-3)$

7) $(a-b-2c)(x-2)$

9) $(a-b)(x^2-2x-3)$

2) $(x+y)(5xy-a^2)$

4) $(2x-b)(5y^2+a)$

6) $(2a-b+3c)(x-1)$

8) $(a+b)(3x^2+x+5)$

Bài 8:

1) $(x-3)(x+3)$

4) $(2x-1)(2x+1)$

7) $(2x-5)(2x+5)$

10) $(x+3)^2$

13) $(3x+y)^2$

2) $(7-x)(7+x)$

5) $(x-3y)(x+3y)$

8) $(x-4y)(x+4y)$

11) $(2x+1)^2$

14) $(2x-3y)^2$

3) $(2y^2-1)(2y^2+1)$

6) $(5x-3)(5x+3)$

9) $(3x-1)(3x+1)$

12) $-(x-5)^2$

15) $(x+2y)^2$

16) $(x^2 - 2)^2$

17) $(x^2 + 1)^2$

18) $(x^2 - 1)^2$

19) $(1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)$

20) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

21) $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

22) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(4x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$

23) $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)$

24) $\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{4}{25}\right)$

Bài 9:

1) $(3 + x - y)(x - x + y)$

2) $(x - y + 2)(x - y - 2)$

3) $(x + 2 + y)(x + 2 - y)$

4) $(x + 5 + y)(x + 5 - y)$

5) $(4x + y)(x - 2y)$

6) $(5x + 1)(3x - 1)$

7) $8x(2x - 5)$

8) $(x + 1)^2(x - 1)^2$

9) $(2x - 3 + 5y)(2x - 3 - 5y)$

10) $4x(2x + 1)$

11) $4xy$

12) $(y + 1)(2x + 1)(2x - 1)(y - 1)$

13) $(5x - y)(x - 5y)$

14) $5(x - y)(x + y)$

15) $3x(x - 2)$

Bài 10:

1) $(x + y)(x - y - 1)$

2) $(x - y)(x + y + 1)$

3) $(x - y)(3 + x + y)$

4) $(x - y)(5 + x + y)$

5) $(x - y - 5)(x + y)$

6) $(x - y)(x + y + 2)$

7) $(x + 2y)(x - 2y + 1)$

8) $(x - y - 2)(x + y)$

9) $(x - 2y + 2)(x + 2y)$

10) $(x - y)(2x + y)$

11) $(x - y)(x + y + 10)$

12) $(x - y + 20)(x + y)$

13) $(2x - 3y - 2)(2x + 3y)$

14) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 7x + 7y)$

15) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 4)$

16) $(x + y)(x^2 - xy + y^2 + 2)$

17) $(x - y)(x^2 - xy + y^2)$

18) $x(x - 2 + y)(x - 2 - y)$

Bài 11:

1) $(x - 1 - y)(x - 1 + y)$

2) $(x + 3 - y)(x + 3 + y)$

3) $(x + 1 - y)(x + 1 + y)$

4) $(x + 2 - y)(x + 2 + y)$

5) $(2a - 1 - b)(2a - 1 + b)$

6) $(x + 2 + y)(x + 2 - y)$

7) $(x + y + 3)(x - y - 3)$

8) $(x - 3 - y)(x - 3 + y)$

9) $(x + 4 - y)(x + 4 + y)$

10) $(2x + 1 - y)(2x + 1 + y)$

11) $(2x + y - 3)(2x - y + 3)$

12) $(x - 3 + 2y)(x - 3 - 2y)$

13) $(y - 6 - x)(y - 6 + x)$

14) $(x + y + 1)(x - y - 1)$

15) $(x + 7 - y)(x + 7 + y)$

16) $(1 - 4x - y)(1 - 4x + y)$

17) $(x+2-4y)(x+2+4y)$

18) $(x+5-4y)(x+5+4y)$

Bài 12:

1) $(x-y-2)(x-y+2)$

2) $(2+x+y)(2-x-y)$

3) $(x-2y+2)(x-2y-2)$

4) $(x-y+5)(x-y-5)$

5) $(3-x-y)(3+x+y)$

6) $(x+y-3)(x+y+3)$

7) $(x-y-1)(x-y+1)$

8) $(x-y-2)(x-y+2)$

9) $(x-y-7)(x-y+7)$

10) $(x+y-5)(x+y+5)$

11) $(x-2y-4)(x-2y+4)$

12) $(5-x+y)(5+x-y)$

13) $(5-x+2y)(5+x-2y)$

14) $(2x+y-3)(2x+y+3)$

15) $(x+2y-4)(x+2y+4)$

16) $(a-4b-3)(a-4b+3)$

17) $(x+2y-6)(x+2y+6)$

18) $(2x+1-2y)(2x+1+2y)$

19) $(x-y+z)(x-y-z)$

20) $(x-y-3z)(x-y+3z)$

21) $(x-y-2z)(x-y+2z)$

22) $3(x+y-z)(x+y+z)$

23) $3(x+y-2)(x+y+2)$

Bài 13:

1) $(x-y)(2-x+y)$

2) $(x-y)(x-y+2)$

3) $(x^2-x+y)(x^2+x-y)$

4) $(x-y)(x-y+2)$

5) $(x+y)(x+y+z)$

Bài 14:

1) $(x-1-y+1)(x-1+y-1)$

2) $(x+y+1)(x-y-5)$

3) $(2x+y+3)(2x-5-y)$

4) $(x-y+z-t)(x-y-z+t)$

5) $(x+y-1)^2$

6) $(x+1)^4$

7) $(x+y-6)(x+y-2)$

8) $(x^2+2x-3)(x^2+2x+1)$

9) $(x^2+x+6)(x^2+x-2)$

10) $(x^2+2x+4)(x^2+2x+5)$

11) $(x^2+x+3)(x^2+x-5)$

12) $(x+5)(x-1)(x+1)(x+3)$

Bài 15:

1) $x(x-1)^2$

2) $x(x-3)^2$

3) $x(x-4)(x+2)$

4) $x(x-2)^2$

5) $x(2x-1)(x+2)$

6) $2x(x-2)^2$

7) $x(2x+1)^2$

8) $3x(x-1)^2$

9) $x(x-2)(x-5)$

10) $2x(x-3)^2$

11) $2x(x-1)(x-9)$

12) $a(a-4)^2$

13) $x^2(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

14) $x(x-3)(x^2+3x+9)$

15) $x^2(3x+1)(9x^2-3x+1)$

16) $3xy(x+y)$

17) $2y(3x^2 + y)$

18) $x(2x^2 + 3y^2)$

19) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y)$

20) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 4)$

21) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2 + x + 2y)$

Bài 16:

1) $(x - y)(x - 3y)$

2) $(4x - y)(x - y)$

3) $(x + 3y)(x + y)$

4) $4y(3x - 2y)(3x + 4y)$

5) $(2x + 5y)(x - y)$

6) $(x - 7y)(x + 5y)$

7) $(x - 2y)(x - 8y)$

8) $(3x + 2y)(x - 4y)$

9) $(2x - 3y)(2x + 5y)$

10) $(2x + 8y)(x + y)$

11) $5(x + y)^2$

12) $(3x - y)(x - 2y)$

Dạng 2. Tìm x**Bài 17:**

1) $x \in \{0; 1\}$

2) $x \in \{0; 4\}$

3) $x \in \{0; -3\}$

4) $x \in \left\{0; \frac{-1}{5}\right\}$

5) $x \in \{0; 7\}$

6) $x \in \{0; 2\}$

7) $x \in \{0; -7\}$

8) $x \in \left\{0; \frac{-2}{7}\right\}$

9) $x \in \{0; -6\}$

10) $x \in \left\{0; \frac{5}{2}\right\}$

11) $x \in \left\{0; \frac{-7}{3}\right\}$

12) $x \in \left\{0; \frac{5}{3}\right\}$

13) $x \in \left\{0; \frac{13}{5}\right\}$

14) $x \in \left\{0; \frac{-5}{3}\right\}$

15) $x \in \left\{0; \frac{7}{3}\right\}$

16) $x \in \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right\}$

17) $x \in \{0; 2; -2\}$

18) $x \in \{0; 3; -3\}$

19) $x \in \{0; 4; -4\}$

20) $x \in \{0; 5; -5\}$

21) $x \in \{0; 3; -3\}$

Bài 18:

1) $x \in \{-1; 2\}$

2) $x \in \left\{2; \frac{-1}{5}\right\}$

3) $x \in \{1; -2\}$

4) $x \in \{-2; 3\}$

5) $x \in \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$

6) $x \in \{2\}$

7) $x \in \left\{5; \frac{-7}{2}\right\}$

8) $x \in \left\{2; \frac{-2}{3}\right\}$

9) $x \in \{0; 1\}$

10) $x \in \left\{1; \frac{1}{5}\right\}$

11) $x \in \{-2; 1\}$

12) $x \in \{2; -1\}$

13) $x \in \{3; 1\}$

14) $x \in \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$

15) $x \in \{-3; 2\}$

16) $x \in \left\{-5; \frac{1}{2}\right\}$

17) $x \in \{3; -2\}$

18) $x \in \{1; -2\}$

19) $x \in \left\{3; \frac{1}{5}\right\}$

20) $x \in \{3; 2\}$

21) $x \in \{-3; 2\}$

22) $x \in \left\{\frac{1}{2}; -2\right\}$

23) $x \in \{4; -3\}$

24) $x \in \left\{2; \frac{-3}{4}\right\}$

25) $x \in \{20; 1\}$

26) $x \in \{-5; 2\}$

27) $x \in \left\{5; \frac{5}{2}\right\}$

28) $x \in \left\{5; \frac{3}{8}\right\}$

29) $x \in \left\{5; \frac{2}{3}\right\}$

30) $x \in \left\{5; \frac{1}{4}\right\}$

Bài 19:

1) $x \in \{-2; 3\}$

2) $x \in \{8; -3\}$

3) $x \in \{-4; 5\}$

4) $x \in \{-20; 1\}$

5) $x \in \{2; -10\}$

6) $x \in \{-2; -12\}$

7) $x \in \{4; 1; -1\}$

8) $x \in \{1\}$

9) $x \in \{-3; 2; -2\}$

10) $x \in \{1; -1\}$

11) $x \in \{3; 4\}$

12) $x \in \{2; 6\}$

13) $x \in \left\{6; \frac{8}{3}\right\}$

14) $x \in \{-3; 3\}$

15) $x \in \{4; 8\}$

16) $x \in \{5; -3\}$

17) $x \in \{-1\}$

18) $x \in \left\{\frac{-5}{2}; 0\right\}$

19) $x \in \left\{-2; \frac{5}{2}\right\}$

20) $x \in \{1; -1\}$

21) $x \in \{-1; 2\}$

Bài 20:

1) $x \in \{3; -4\}$

2) $x \in \{1; 7\}$

3) $x \in \{-1; 5\}$

4) $x \in \{9; -1\}$

5) $x \in \{1; 3\}$

6) $x \in \{-4; -1\}$

7) $x \in \{3; 2\}$

8) $x \in \{1; 3\}$

9) $x \in \{3; -6\}$

10) $x \in \{5; -2\}$

11) $x \in \{-5; 2\}$

12) $x \in \{-5; 7\}$

13) $x \in \{3; 4\}$

14) $x \in \{3; 4\}$

15) $x \in \left\{\frac{3}{2}\right\}$

16) $x \in \left\{\frac{-1}{4}; \frac{-7}{2}\right\}$

17) $x \in \left\{-1; \frac{-2}{3}\right\}$

18) $x \in \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

CHƯƠNG 3. TỨ GIÁC.

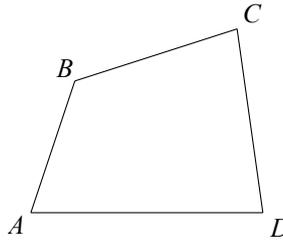
Bài 1. TỨ GIÁC

I. LÝ THUYẾT.

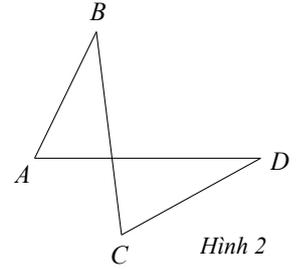
1) Tứ giác lồi.

Ví dụ 1: Cho các hình sau

Ở Hình 1, Hình 2 đều được gọi là các tứ giác.



Hình 1



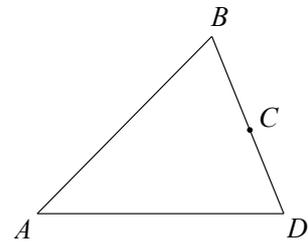
Hình 2

Kết luận:

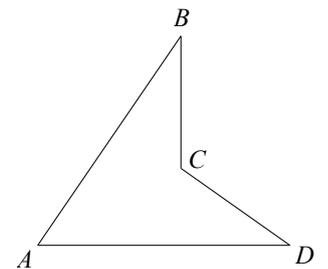
- ♣ Tứ giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó không có hai đoạn thẳng nào cùng nằm trên một đường thẳng.
- ♣ Tứ giác lõm là tứ giác mà hai đỉnh thuộc một cạnh bất kì luôn nằm về một phía của đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.
Cụ thể: Hình 1 là tứ giác lồi, Hình 2 không phải là tứ giác lồi.
Chương trình học chúng ta chỉ xét đến bài toán là các tứ giác lồi.
- ♣ Trong tứ giác $ABCD$ thì các điểm A, B, C, D là các đỉnh, các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA là các cạnh. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối nhau gọi là đường chéo, như đường chéo AC, BD . Hai đường chéo cắt nhau tại một điểm nằm giữa mỗi đường.
- ♣ Trong tứ giác $ABCD$ ở Hình 1 ta có các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}, \widehat{DAB}$ có thể viết gọn là $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$.

Ví dụ 2: Hình 3 không phải là một tứ giác vì hai đoạn thẳng BC, CD cùng nằm trên một đường thẳng.

Ví dụ 3: Tứ giác $ABCD$ ở Hình 4 không phải là tứ giác lõm vì hai đỉnh A, D nằm về hai phía của đường thẳng BC .



Hình 3



Hình 4

2) Tổng các góc của một tứ giác.

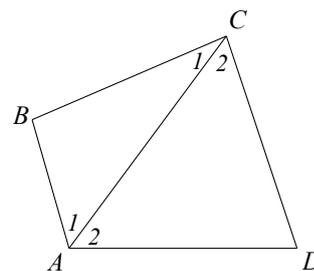
Ví dụ 4: Cho tứ giác $ABCD$ như Hình 4

Kẻ đường chéo AC khi đó tổng số đo 4 góc của tứ giác $ABCD$ là

$$\widehat{BAD} + \widehat{B} + \widehat{BCD} + \widehat{D} = \widehat{A_1} + \widehat{B} + \widehat{C_1} + \widehat{C_2} + \widehat{D} + \widehat{A_2} \\ = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

Kết luận:

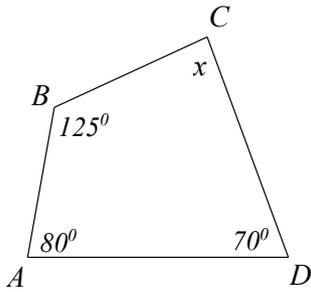
- ♣ Tổng các góc của một tứ giác bằng 360° .



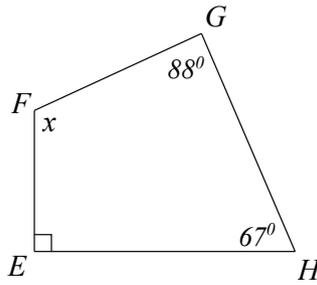
Hình 5

II. LUYỆN TẬP.

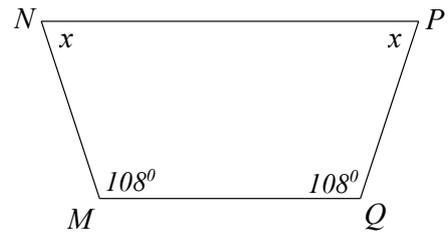
Bài 1: Tính số đo x trong các hình sau



Hình 6



Hình 7



Hình 8

Giải

Hình 6. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 80^\circ + 125^\circ + x + 70^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 85^\circ. \text{ Vậy } x = 85^\circ.$$

Hình 7. Tứ giác $EFGH$ có $\widehat{E} + \widehat{F} + \widehat{G} + \widehat{H} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 90^\circ + x + 88^\circ + 67^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 115^\circ. \text{ Vậy } x = 115^\circ.$$

Hình 8. Tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 108^\circ + x + x + 108^\circ = 360^\circ \Rightarrow 2x = 144^\circ \Rightarrow x = 72^\circ. \text{ Vậy } x = 72^\circ.$$

Bài 2: Cho Hình 9.

a) Tính \widehat{ABC}

b) Tính $\widehat{A_1}$.

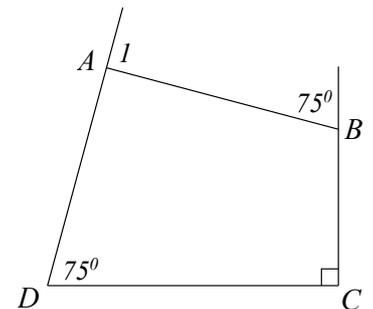
Giải

a) Ta có $\widehat{ABC} + 75^\circ = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

b) Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} + \widehat{ABC} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} + 105^\circ + 90^\circ + 75^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow \widehat{A_1} = 90^\circ.$$



Hình 9

Bài 3: Cho tứ giác $ABCD$ có hai tia phân giác \widehat{D} , \widehat{C} cắt nhau tại I sao cho $\widehat{I} = 90^\circ$. Tính $\widehat{C} + \widehat{D}$ (Hình 10)

Giải

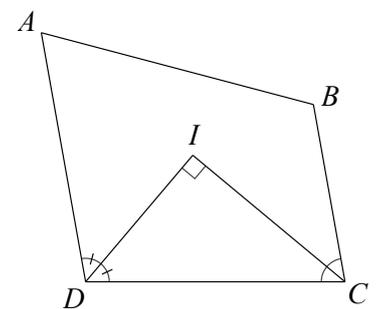
$\triangle IDC$ có $\widehat{I} + \widehat{IDC} + \widehat{ICD} = 180^\circ$

$$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{IDC} + \widehat{ICD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IDC} + \widehat{ICD} = 90^\circ.$$

Vì DI , CI lần lượt là các tia phân giác \widehat{D} , \widehat{C} nên

$$\widehat{D} = 2 \cdot \widehat{IDC}, \widehat{C} = 2 \cdot \widehat{ICD}$$

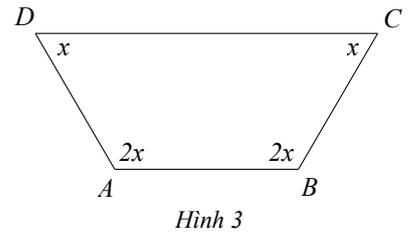
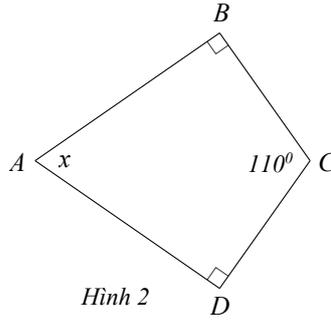
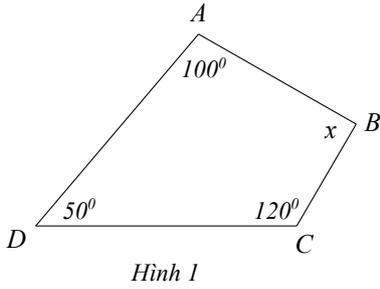
$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{D} = 2 \cdot \widehat{IDC} + 2 \cdot \widehat{ICD} = 2(\widehat{IDC} + \widehat{ICD}) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$



Hình 10

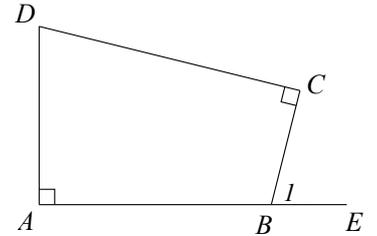
III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Tính số đo x trong các hình sau



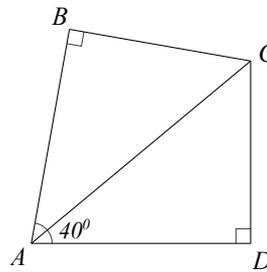
Bài 2: Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$. BE là tia đối của tia BA . (Hình 4)

- Tính $\widehat{D} + \widehat{ABC}$.
- So sánh \widehat{D} và $\widehat{B_1}$.



Bài 3: Tứ giác $ABCD$ có AC là tia phân giác \widehat{BAD} và $\widehat{DAC} = 40^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ (Hình 5)

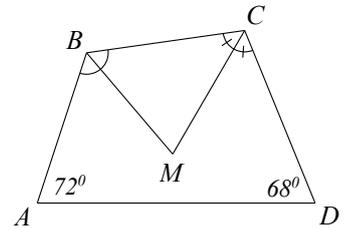
Tính \widehat{BCD} .



Bài 4: Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = 72^\circ$, $\widehat{D} = 68^\circ$.

Hai tia phân giác \widehat{B} , \widehat{C} cắt nhau tại M .

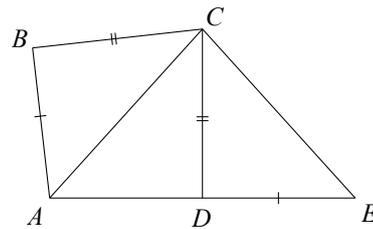
Tính \widehat{BMC} . (Hình 6)



Bài 5: Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ và $CB = CD$.

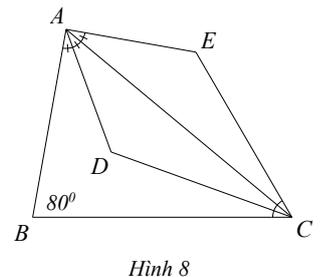
Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = AB$.

- Chứng minh $\triangle ABC = \triangle EDC$ (Hình 7)
- Chứng minh AC là tia phân giác \widehat{BAD} .



Bài 6: Cho Hình 8. Biết $\widehat{B} = 80^\circ$

- Chứng minh $\widehat{D} = \widehat{E}$.
- Tính tổng số đo hai góc đối nhau của tứ giác $ABCE$.



Bài 2. HÌNH THANG CÂN.

I. LÝ THUYẾT.

1) Hình thang, hình thang cân.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \parallel CD$ như Hình 1

Khi đó tứ giác $ABCD$ gọi là hình thang.

Kết luận:

- ♣ Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.
- ♣ Hai cạnh song song AB, CD gọi là hai cạnh đáy.
- ♣ Hai cạnh còn lại AD, BC gọi là hai cạnh bên.
- ♣ Đường vuông góc từ B xuống CD là BH gọi là đường cao

Ví dụ 2: Hình thang $ABCD$ như Hình 2 có

Hai góc $\widehat{D} = \widehat{C}$ nên gọi là hình thang cân.

Kết luận:

- ♣ Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau
- ♣ Trong hình thang cân hai góc kề một đáy bằng nhau.
- ♣ Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau. Cụ thể $AD = BC$.
- ♣ Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau. Cụ thể $AC = BD$.

2) Dấu hiệu nhận biết hình thang cân.

- ♣ Nếu một hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì đó là hình thang cân. Cụ thể hình thang $ABCD$ có $AC = BD$ thì hình thang $ABCD$ là hình thang cân.

Ví dụ 3: Cho hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC$ hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Biết $OC = OB$. Chứng minh hình thang $ABCD$ là hình thang cân. (Hình 4)

Giải

Vì $OB = OC \Rightarrow \triangle OBC$ là tam giác cân.

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$.

Lại có $BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{ODA}$ (so le trong)

và $\widehat{OCB} = \widehat{OAD}$ (so le trong) nên $\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$

$\Rightarrow \triangle OAD$ cân nên $OA = OD$

Khi đó $BD = BO + OD = OC + OA = AC$.

Vậy hình thang $ABCD$ là hình thang cân.

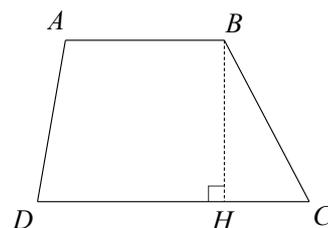
II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho Hình 5.

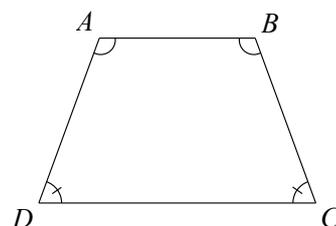
- Chứng minh $ABCD$ là hình thang.
- Số đo x bằng bao nhiêu thì $ABCD$ là hình thang cân.

Giải

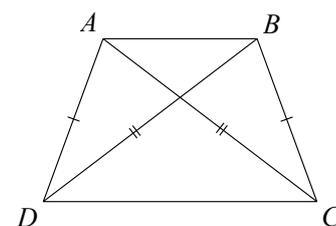
- Ta có $\widehat{B} = \widehat{C} = 75^\circ$ mà \widehat{B}, \widehat{C} là hai góc so le trong nên $AB \parallel CD$
 $\Rightarrow ABCD$ là hình thang.



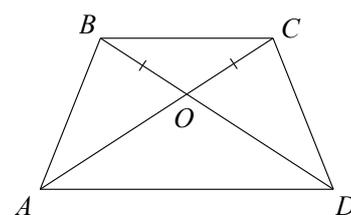
Hình 1



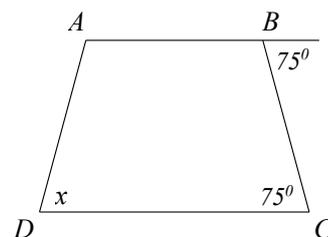
Hình 2



Hình 3



Hình 4



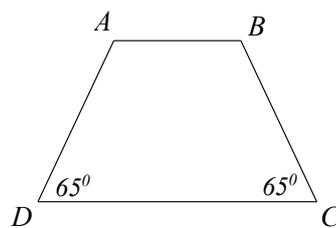
Hình 5

b) Để $ABCD$ là hình thang cân thì $\widehat{D} = \widehat{C} = 75^0 \Rightarrow x = 75^0$.

Bài 2: Cho Hình 6.

a) Cho biết hình thang $ABCD$ là hình thang gì?

b) Tính \widehat{A}, \widehat{B} .



Hình 6

Giải

a) Hình thang $ABCD$ có $\widehat{C} = \widehat{D} = 65^0$ nên là hình thang cân.

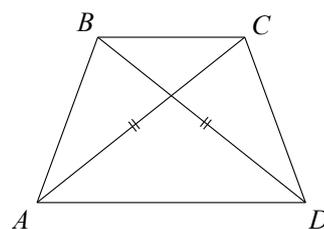
b) $ABCD$ là hình thang nên $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^0 \text{ (trong cùng phía)} \Rightarrow \widehat{A} + 65^0 = 180^0 \Rightarrow \widehat{A} = 115^0 = \widehat{B}.$$

Bài 3: Cho hình thang $ABCD$ như Hình 7, biết $AC = BD$.

a) Hình thang $ABCD$ là hình thang gì?

b) Chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{DAC}$.



Hình 7

Giải

a) Hình thang $ABCD$ có hai đường chéo $AC = BD$ nên là hình thang cân.

b) $ABCD$ là hình thang cân nên $AB = CD$

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle CDA$ có

AD là cạnh chung

$AB = CD$ (chứng minh trên)

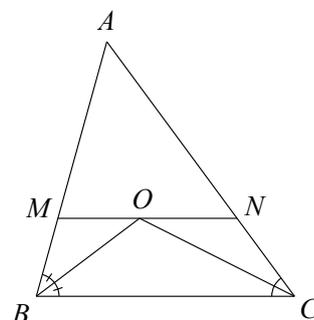
$BD = AC$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \triangle BAD = \triangle CDA \text{ (c - c - c)} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DAC} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Bài 4: Cho $\triangle ABC$, hai đường phân giác góc \widehat{B}, \widehat{C} cắt nhau tại O . Qua O kẻ đường thẳng song song với BC , đường thẳng này cắt AB, AC lần lượt tại M và N . (Hình 8)

a) Tứ giác $BCOM, BCNO$ là các hình gì?

b) Chứng minh $MN = MB + NC$.



Hình 8

Giải

a) Tứ giác $BCOM$ có $OM \parallel BC$ nên là hình thang.

Tứ giác $BCNO$ có $ON \parallel BC$ nên là hình thang.

b) Vì $MO \parallel BC \Rightarrow \widehat{MOB} = \widehat{OBC}$ (so le trong)

Mà $\widehat{OBC} = \widehat{OBM}$ nên $\widehat{MOB} = \widehat{OBM} \Rightarrow \triangle MBO$ cân tại $O \Rightarrow MO = MB$

Chứng minh tương tự $\triangle NOC$ cân tại $O \Rightarrow NO = NC$

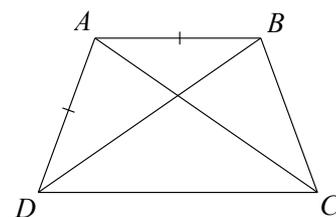
Khi đó $MN = MO + NO = MB + NC$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$, biết $AD = BC$ (Hình 1)

a) Chứng minh $AB = BC$.

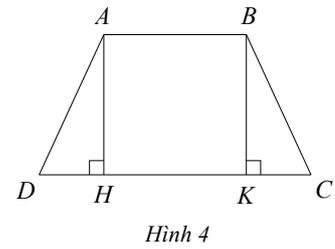
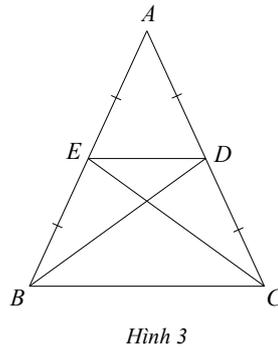
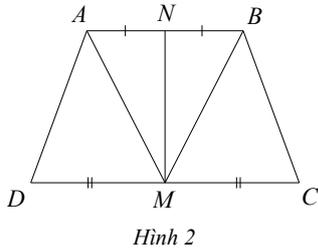
b) Chứng minh DB là phân giác \widehat{ADC} .



Hình 1

Bài 2: Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm CD, AB .

- Chứng minh $AM = BM$. (Hình 2)
- Chứng minh MN là đường cao của hình thang.



Bài 3: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , hai đường trung tuyến BD, CE

- Chứng minh $\triangle AED$ là tam giác cân. (Hình 3)
- Chứng minh tứ giác $BCDE$ là hình thang cân.

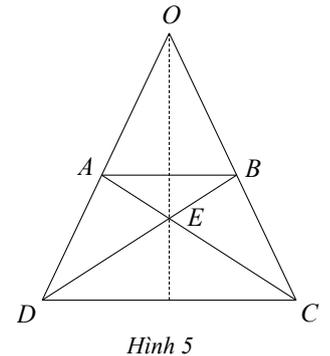
Bài 4: Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$, hai đường cao AH, BK .

- Chứng minh $\triangle AHD = \triangle BKC$. (Hình 4)
- Chứng minh $AB = HK$.
- Chỉ ra $KC = \frac{DC - AB}{2}$.

Bài 5: Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$.

Gọi O là giao điểm của AD và BC , E là giao điểm của AC và BD . (Hình 5)

- Chứng minh $\triangle OAB$ cân tại O .
- Chứng minh $\triangle ABD = \triangle BAC$.
- Chứng minh $EC = ED$.
- O, E và trung điểm của DC thẳng hàng.



Bài 3. HÌNH BÌNH HÀNH.

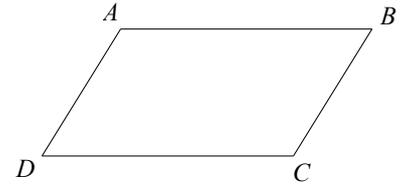
I. LÝ THUYẾT.

1) Hình bình hành và tính chất.

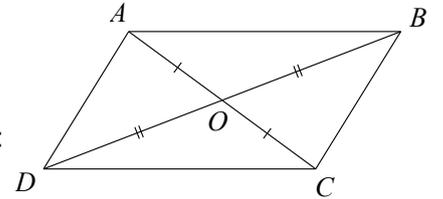
Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AD \parallel BC$
Như hình 1 nên tứ giác $ABCD$ gọi là một hình bình hành.

Kết luận:

- ♣ Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.
- ♣ Trong hình bình hành thì:
 - + Các cạnh đối bằng nhau $AB = CD$ và $AD = BC$.
 - + Các góc đối bằng nhau $\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$.
 - + Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường:
 $OA = OC$, $OB = OD$.



Hình 1



Hình 2

2) Dấu hiệu nhận biết:

- ♣ Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là một hình bình hành.
- ♣ Tứ giác có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau là một hình bình hành.
- ♣ Tứ giác có các góc đối bằng nhau là một hình bình hành.
- ♣ Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là một hình bình hành.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$. Từ A, C hạ AH, CK lần lượt vuông góc với BD .

Chứng minh tứ giác $AHCK$ cũng là hình bình hành.

Giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD = BC$

và $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{CBK}$ (so le trong)

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle CKB$ có:

$$\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$$

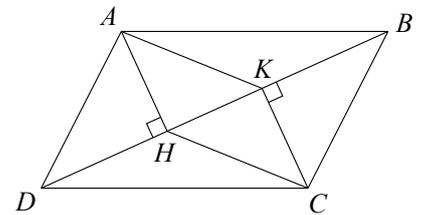
$$AD = BC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{ADH} = \widehat{CBK} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHD = \triangle CKB \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AH = CK \text{ (hai cạnh tương ứng) và } AH \parallel CK \text{ vì cùng vuông góc với } BD$$

Vậy tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.



Hình 3

II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho hình bình hành $ABCD$ như Hình 4.

Biết $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và O là trung điểm của BD

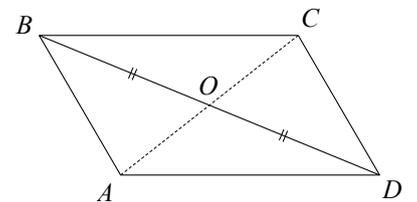
- a) Tính số đo các góc còn lại của hình bình hành.
- b) Chứng minh rằng A, O, C thẳng hàng.

Giải

a) $ABCD$ là hình bình hành nên $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 120^\circ$.

và $BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ = \widehat{ADC}.$$



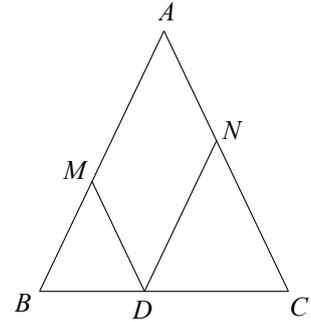
Hình 4

b) $ABCD$ là hình bình hành nên AC, BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mà O là trung điểm của BD nên O là trung điểm của $AC \Rightarrow A, O, C$ thẳng hàng.

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ cân ở A có điểm D trên cạnh BC .

Kẻ $DM \parallel AC, DN \parallel AB$. (Hình 5)



Hình 5

- Chứng minh $AMDN$ là hình bình hành.
- $\triangle BDM$ là tam giác gì?
- So sánh $DM + DN$ với AB .

Giải

a) $AMDN$ có $AM \parallel DN, AN \parallel MD$ nên là hình bình hành.

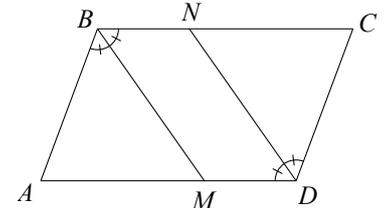
b) $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$

Mà $MD \parallel AC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{BDM}$ (đồng vị) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BDM} \Rightarrow \triangle BDM$ cân tại M .

c) $ABCD$ là hình bình hành nên $DN = AM$

$\triangle BDM$ cân tại $M \Rightarrow MB = MD$. Vậy $DM + DN = BM + AM = AB$.

Bài 3: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB < AD$. Tia phân giác của \widehat{B}, \widehat{D} lần lượt cắt AD, BC tại M, N . (Hình 6)



Hình 6

- $\triangle ABM$ là tam giác gì?
- Chứng minh tứ giác $BMDN$ là hình bình hành.

Giải

a) $ABCD$ là hình bình hành nên $BC \parallel AD$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{MBC}$ (so le trong)

Mà $\widehat{MBC} = \widehat{MBA}$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{ABM} \Rightarrow \triangle ABM$ cân tại A .

b) $ABCD$ là hình bình hành nên $\widehat{B} = \widehat{D} \Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{D} \Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{NDM}$

Mà $BN \parallel MD \Rightarrow \widehat{BMD} + \widehat{MBN} = 180^\circ$ (trong cùng phía)

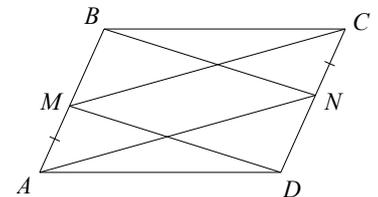
Và $\widehat{BND} + \widehat{NDM} = 180^\circ$ (trong cùng phía)

Suy ra $\widehat{BND} = \widehat{BMD}$. Tứ giác $BMDN$ có các góc đối bằng nhau nên là hình bình hành.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

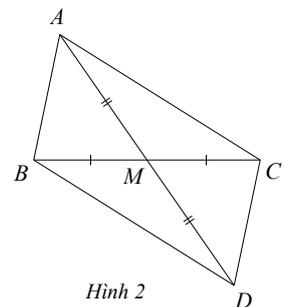
Bài 1: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M , trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $AM = CN$.

- Chứng minh $AMCN$ là hình bình hành. (Hình 1)
- Chứng minh $DMBN$ là hình bình hành.



Hình 1

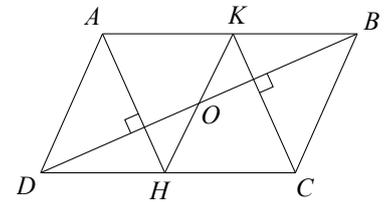
Bài 2: Cho $\triangle ABC$, lấy M là trung điểm của BC , trên tia AM lấy điểm D sao cho $AM = MD$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. (Hình 2)



Hình 2

Bài 3: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB > AD$. Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt DC tại H , từ C vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt AB tại K . (Hình 3)

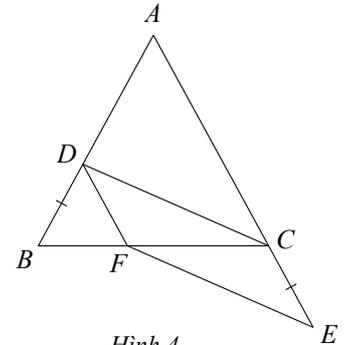
- Chứng minh $AHCK$ là một hình bình hành.
- Chứng minh O là trung điểm của BD thì O cũng là trung điểm của HK .



Hình 3

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , lấy điểm D bất kỳ trên AB , lấy điểm E trên tia đối của tia CA sao cho $CE = BD$. Từ D kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại F .

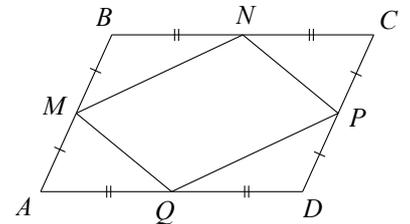
- $\triangle DBF$ là tam giác gì? (Hình 4)
- Chứng minh tứ giác $DCEF$ là hình bình hành.



Hình 4

Bài 5: Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . (Hình 5)

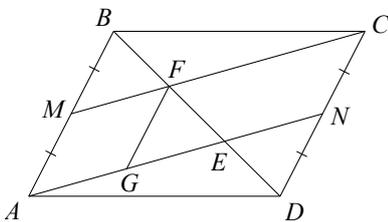
- Chứng minh $MN = PQ$.
- Chứng minh $MNPQ$ là một hình bình hành.



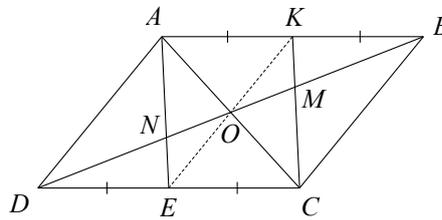
Hình 5

Bài 6: Cho hình bình hành $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . AN và CM cắt BD lần lượt tại E và F .

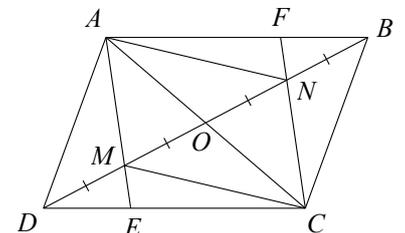
- Chứng minh $AMCN$ là hình bình hành. (Hình 6)
- Từ F kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại G . Chứng minh $BF = FE = ED$.



Hình 6



Hình 7



Hình 8

Bài 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của CD và AB . Đường chéo BD cắt AE, AC, CK lần lượt tại N, O, M . (Hình 7)

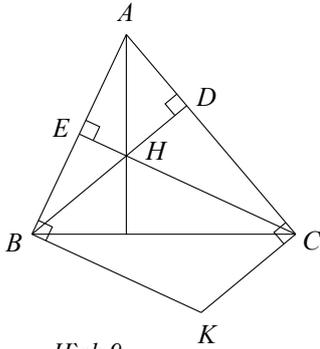
- Chứng minh $AECK$ là hình bình hành.
- Chứng minh ba điểm O, E, K thẳng hàng.
- Chứng minh $DN = NM = MB$.
- Chứng minh $AE = 3KM$.

Bài 8: Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O . Lấy M, N lần lượt là trung điểm của OD, OB . E là giao điểm của AM và CD , F là giao điểm của CN và AB .

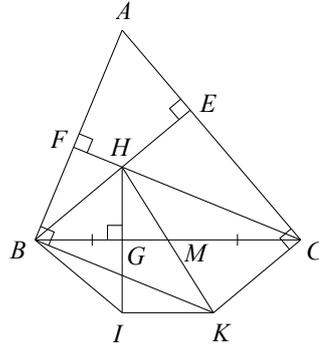
- Chứng minh $AMCN$ là hình bình hành. (Hình 8)
- Chứng minh $DE = BF$.

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Đường vuông góc với AB tại B và đường vuông góc với AC tại C cắt nhau tại K .

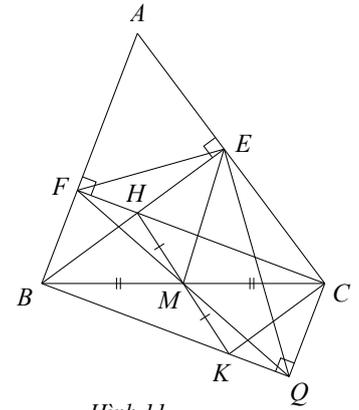
- Chứng minh $AH \perp BC$. (Hình 9)
- Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành.



Hình 9



Hình 10



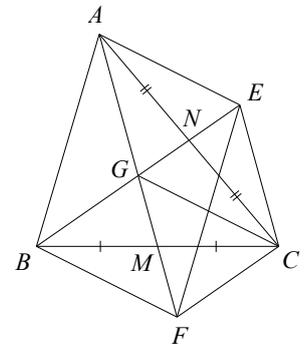
Hình 11

Bài 10: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $AB < AC$. Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB và từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AC hai đường thẳng này cắt nhau tại K . (Hình 10)

- Chứng minh $BHCK$ là hình bình hành
- Chứng minh H, M, K thẳng hàng.
- Từ H vẽ $HG \perp BC$. Trên tia HG lấy I sao cho $HG = GI$. Chứng minh tứ giác $BIKC$ là hình thang cân.

Bài 11: Cho $\triangle ABC$ nhọn biết $AB < AC$. Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm K sao cho $MH = MK$. (Hình 11)

- Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành.
- Chứng minh $BK \perp AB, CK \perp AC$.
- Chứng minh rằng $\triangle MEF$ là tam giác cân.
- Vẽ $CQ \perp BK$ tại Q . Chứng minh $EF \perp EQ$.



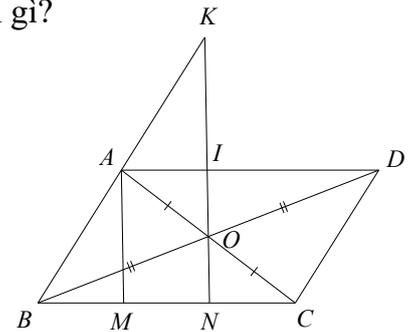
Hình 12

Bài 12: Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường trung tuyến AM, BN cắt nhau tại G . Trên tia BN lấy điểm E sao cho N là trung điểm của EG . (Hình 12)

- Chứng minh tứ giác $AGCE$ là hình bình hành.
- Trên tia AM lấy điểm F sao cho $AG = GF$. Chứng minh $MG = MF, BF \parallel AE$.
- Để $AECF$ là hình thang cân thì $\triangle ABC$ cần thêm điều kiện gì?

Bài 13: Cho $\triangle ABC$ có O là trung điểm của AC . Trên tia BO lấy điểm D sao cho $OD = OB$. (Hình 13)

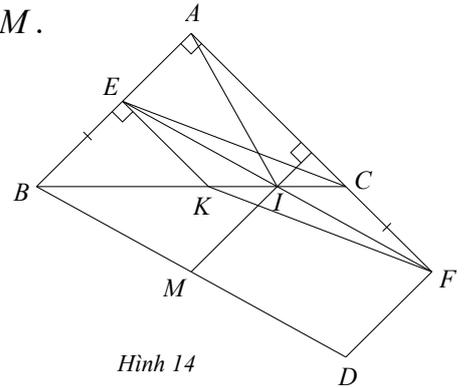
- Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho $BM = MN = NC$. Tia NO cắt AD, AB lần lượt tại I và K . Chứng minh $AI = NC$ và $AM \parallel IN$.



Hình 13

Bài 14: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Trên đoạn thẳng AB lấy điểm E . Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $BE = CF$. Vẽ hình bình hành $BEFD$. Gọi I là giao điểm của EF và BC . Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BI tại K . (Hình 14)

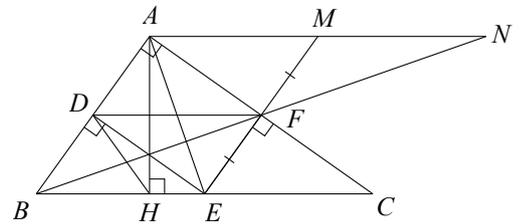
- Chứng minh tứ giác $EKFC$ là hình bình hành.
- Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AF cắt BD tại M .
Chứng minh $AI = BM$.
- Tìm vị trí của E trên AB để A, I, D thẳng hàng.



Hình 14

Bài 15: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$, đường cao AH và trung tuyến AE . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của E trên AB, AC . (Hình 15)

- Chứng minh $BDFE$ là hình bình hành.
- Chứng minh $DFEH$ là hình thang cân.
- Lấy M sao cho F là trung điểm của EM và N sao cho F là trung điểm của BN .
Chứng minh A, N, M thẳng hàng.



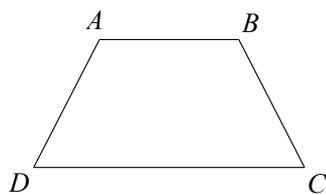
Hình 15

Bài 4. HÌNH CHỮ NHẬT.

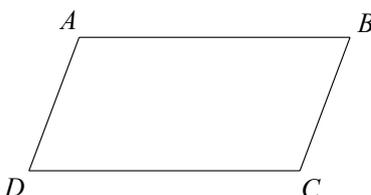
I. LÝ THUYẾT.

1) Hình chữ nhật.

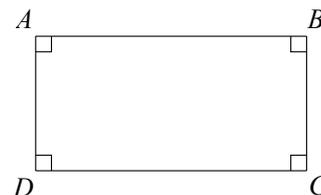
Ví dụ 1: Cho các hình sau, hình nào là hình chữ nhật.



Hình 1



Hình 2



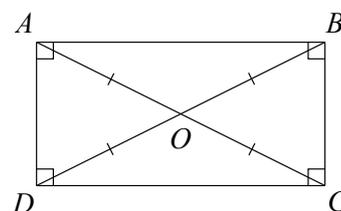
Hình 3

Kết luận:

- ♣ Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.
- ♣ Tứ giác có ba góc vuông cũng là hình chữ nhật.
- ♣ Vì hình chữ nhật cũng là hình thang cân, hình bình hành nên có đầy đủ các tính chất của hai hình này.
- ♣ Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
Hình 4. ta có $AC = BD$ và $OA = OB = OC = OD$.

2) Dấu hiệu nhận biết.

- ♣ Hình bình hành có 1 góc vuông là hình chữ nhật.
- ♣ Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
- ♣ Nếu tam giác có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng thì tam giác đó là tam giác vuông.



Hình 4

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH .

Kẻ $HD \perp AB$, $HE \perp AC$. Tứ giác $ADHE$ là hình gì? (Hình 5)

Giải

Tứ giác $ADHE$ có ba góc vuông là $\widehat{DAE} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$

Nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , M là trung điểm của BC .

Từ M kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in AB$) và $MF \parallel AB$ ($F \in AC$).

- a) Tứ giác $BEFM$, $AEMF$ là hình gì? (Hình 6)
- b) Gọi O là trung điểm của AM . Chứng minh $OE = OF$.

Giải

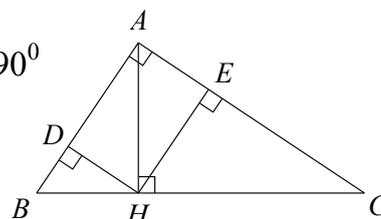
$$\text{a) Vì } \begin{cases} ME \parallel AC \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow ME \perp AB$$

$$\text{Và } \begin{cases} MF \parallel AB \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow MF \perp AC$$

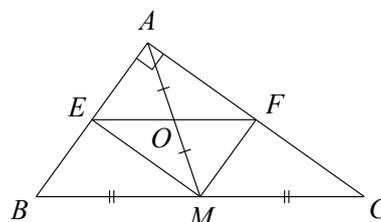
Xét $\triangle EBM$ và $\triangle FMC$ có:

$$\widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$$

$$BM = CM \quad (\text{giả thiết})$$



Hình 5



Hình 6

$\widehat{EBM} = \widehat{FMC}$ (đồng vị) $\Rightarrow \Delta EBM = \Delta FMC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BE = MF$ (hai cạnh tương ứng)

Tứ giác $BEFM$ có $BE \parallel MF$, $BE = MF$ nên là hình bình hành.

Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông $\widehat{A} = \widehat{AEM} = \widehat{AFM} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

- b) Vì $AEMF$ là hình chữ nhật nên hai đường chéo AM , EF cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên $OE = OF$.

II. LUYỆN TẬP.

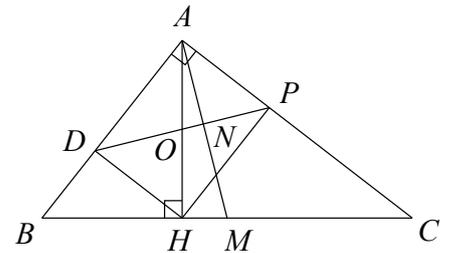
Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A có AH là đường cao, đường trung tuyến AM . Qua H kẻ $HD \parallel AC$ ($D \in AB$) và $HP \parallel AB$ ($P \in AC$). Đoạn DP cắt AH , AM lần lượt tại O và N .

- Chứng minh $AH = DP$. (Hình 7)
- ΔMAC là tam giác gì?
- Chứng minh ΔAPN là tam giác vuông.

Giải

a) Vì $\begin{cases} DH \parallel AC \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp AB$ (1)

Và $\begin{cases} HP \parallel AB \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow HP \perp AC$ (2)



Hình 7

Từ giác $ADHP$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, khi đó hai đường chéo $AH = DP$

- ΔABC vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = MB = MC \Rightarrow \Delta AMC$ cân tại M
- Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$ mà $\widehat{MCA} = \widehat{BHD}$ (đồng vị)

Lại có $ADHP$ là hình chữ nhật nên $OD = OP = OA = OH \Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{ODH}$ (so le trong)

Vì ODH cân tại O nên $\widehat{ODH} = \widehat{OHD}$. Khi đó $\widehat{APN} = \widehat{OHD}$

ΔAPN có $\widehat{NAP} + \widehat{APN} = \widehat{DHP} + \widehat{OHD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ANP} = 90^\circ$ hay ΔAPN vuông tại N .

Bài 2: Cho ΔABC vuông tại A có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. (Hình 8)

- Chứng minh $ABCD$ là hình chữ nhật.
- Lấy điểm E sao cho B là trung điểm của AE . Chứng minh $BEDC$ là hình bình hành.
- EM cắt BD tại K . Chứng minh $EK = 2KM$.

Giải

- Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AD , BC cắt nhau tại

Trung điểm M của mỗi đường nên là hình bình hành

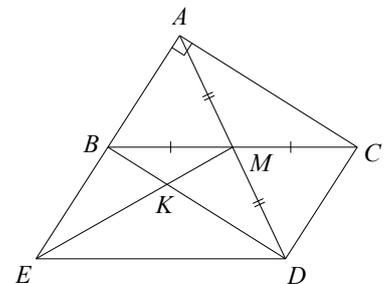
Lại có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

- Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB \parallel CD$, $AB = CD$

Mà $BE = AB \Rightarrow BE = CD$ và $BE \parallel CD$

Tứ giác $BEDC$ là hình bình hành.

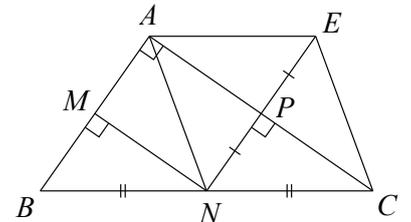
- ΔAED có hai đường trung tuyến EM , DB cắt nhau tại K nên K là trọng tâm



Hình 8

Vậy $EK = 2KM$.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$. N là trung điểm BC . Gọi M, P lần lượt là hình chiếu của N trên AB, AC . Lấy E sao cho P là trung điểm của NE . (Hình 9)



Hình 9

- Chứng minh M, P lần lượt là trung điểm của AB, AC .
- Tứ giác $ANCE$ là hình gì?

Giải

- Tứ giác $APNM$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow AM = NP, AP = MN$.

Vì $AB \parallel NP$ (cùng vuông góc với AC) nên $\widehat{B} = \widehat{PNC}$ (đồng vị)

Xét $\triangle MBN$ và $\triangle PNC$ có:

$$\widehat{M} = \widehat{P} = 90^\circ$$

$$BN = CN \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{B} = \widehat{PNC} \text{ (chứng minh trên)} \Rightarrow \triangle MBN = \triangle PNC \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

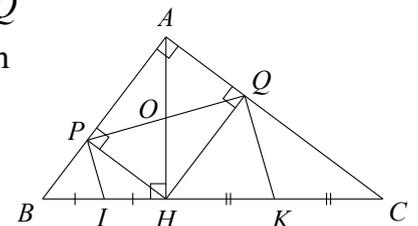
$$\Rightarrow BM = NP, MN = PC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Khi đó $BM = AM$ (cùng bằng NP), $AP = PC$ (cùng bằng MN)

- Tứ giác $ANCE$ có hai đường chéo AC, NE cắt nhau tại trung điểm P của mỗi đường nên là hình bình hành.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

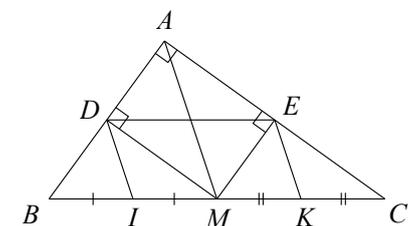
Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của H xuống AB, AC . Gọi I là trung điểm của HB, K là trung điểm của HC, AH cắt PQ ở O .



Hình 1

- Tứ giác $APHQ$ là hình gì? (Hình 1)
- Chứng minh $\triangle KQH$ là tam giác cân
- Chứng minh $\widehat{KQP} = 90^\circ$ và $PI \parallel QK$.

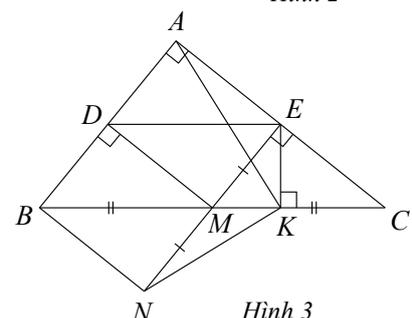
Bài 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, M là trung điểm của BC . Gọi D, E lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MB, MC .



Hình 2

- Tứ giác $DIKE$ là hình gì? (Hình 2)
- $\triangle ABC$ cần thêm điều kiện gì để $DIKE$ là hình chữ nhật.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có M là trung điểm của BC . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC . (Hình 3)



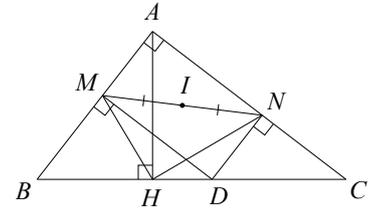
Hình 3

- Chứng minh D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC .
- Chứng minh $BDEM$ là hình bình hành.
- Lấy N sao cho M là trung điểm của NE . Hạ $EK \perp BC$. Chứng minh $AK \perp KN$.

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Điểm D trên cạnh BC .

Hạ $DM \perp AB, DN \perp AC$.

- Tứ giác $AMDN$ là hình gì? (Hình 4)
- Gọi AH là đường cao $\triangle ABC$. Tính \widehat{MHN} .



Hình 4

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$. M là trung điểm của BC . Kẻ

$ME \perp AB (E \in AB)$. Kẻ $MF \perp AC (F \in AC)$ (Hình 5)

- Chứng minh $EF = \frac{BC}{2}$.
- Gọi AK là đường cao của $\triangle ABC$.

Chứng minh $KMFE$ là hình thang cân.

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$, đường cao

AH . Từ H kẻ $HM \perp AB (M \in AB)$. Kẻ $HN \perp AC (N \in AC)$.

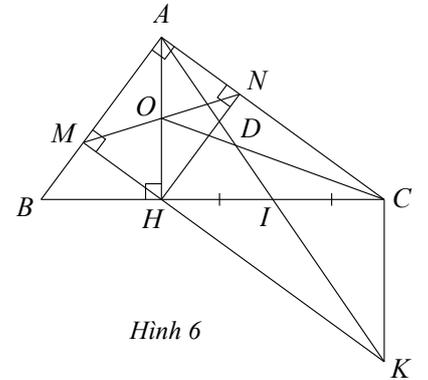
Gọi I là trung điểm của HC , lấy K trên tia AI sao cho I là trung điểm của AK .

- Chứng minh $AC \parallel HK$. (Hình 6)
- Chứng minh $MNCK$ là hình thang cân.
- MN cắt AH tại O , CO cắt AK tại D .

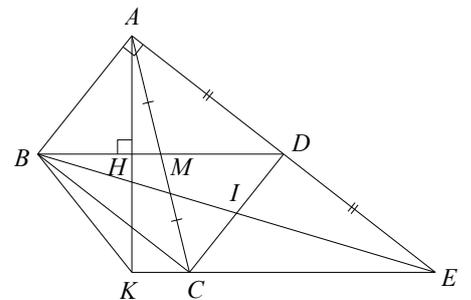
Chứng minh $AK = 3AD$.

Bài 7: Cho $\triangle ABD$ vuông tại A có $AB < AD$. M là trung điểm của BD . Lấy C sao cho M là trung điểm của AC . (Hình 7)

- Chứng minh $ABCD$ là hình chữ nhật.
- Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DA = DE$.
Gọi I là trung điểm của CD . Chứng minh $IB = IE$.
- Kẻ $AH \perp BD$. Lấy K sao cho H là trung điểm của AK . Chứng minh $BDCK$ là hình thang cân.



Hình 6



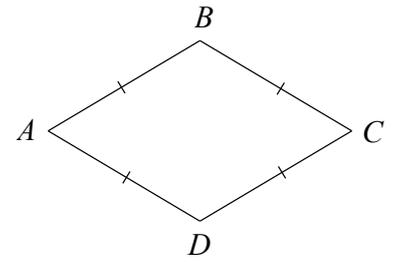
Hình 7

Bài 5: HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG.

I. LÝ THUYẾT.

1) Hình thoi.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$ như *Hình 1* có
 $AB = BC = CD = DA$ nên tứ giác này gọi là hình thoi.



Hình 1

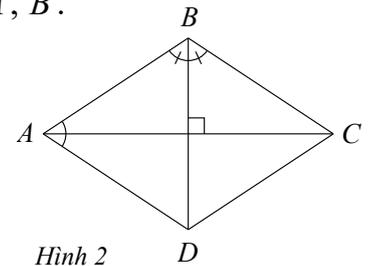
Kết luận:

- ♣ Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
- ♣ Hình thoi cũng là hình bình hành nên có tính chất của hình bình hành.
- ♣ Trong hình thoi, hai đường chéo vuông góc với nhau.
- ♣ Trong hình thoi, hai đường chéo là tia phân giác của các góc trong hình thoi.

Cụ thể: *Hình 2* $AC \perp BD$ và AC, BD lần lượt là phân giác \widehat{A}, \widehat{B} .

2) Dấu hiệu nhận biết.

- ♣ Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- ♣ Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- ♣ Hình bình hành có một đường chéo là tia phân giác của một góc là hình thoi.



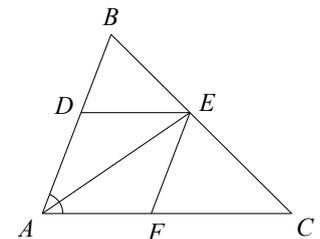
Hình 2

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ nhọn, tia phân giác \widehat{BAC} cắt BC tại E .

Từ E kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại F .

Từ E kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại D .

Chứng minh $ADEF$ là hình thoi. (*Hình 3*)



Hình 3

Giải

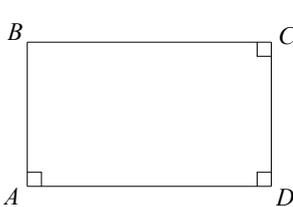
Tứ giác $ADEF$ có $AD \parallel EF, DE \parallel AF$ nên là hình bình hành.

Lại có đường chéo AE là tia phân giác góc \widehat{DAF}

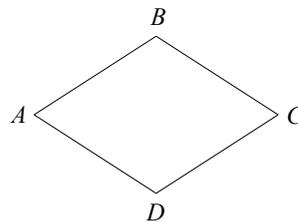
Nên là hình thoi.

3) Hình vuông.

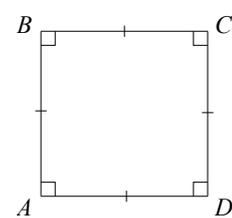
Ví dụ 3: Tìm hình vuông trong các hình sau



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Kết luận:

- ♣ Hình vuông là tứ giác có 4 góc vuông và 4 cạnh bằng nhau.
- ♣ Hình vuông cũng là hình chữ nhật, hình thoi nên có đầy đủ các tính chất của hai hình trên.
- ♣ Trong một hình vuông, hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau, cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và là các đường phân giác của các góc hình vuông.

4) Dấu hiệu nhận biết.

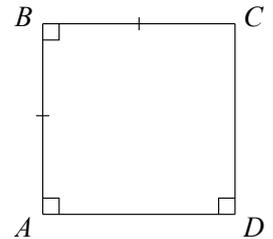
- ♣ Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- ♣ Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- ♣ Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác một góc là hình vuông.

Ví dụ 4: Cho Hình 7. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông.

Giải

Tứ giác $ABCD$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật $ABCD$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.



Hình 7

II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và tia phân giác Om . Lấy điểm A trên Om . Kẻ AB, AC lần lượt vuông góc với Ox, Oy .

Chứng minh $OBAC$ là hình vuông.

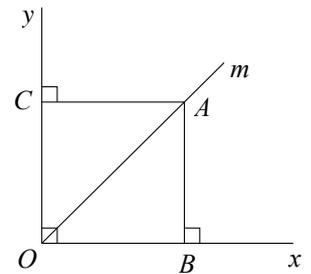
Giải

Tứ giác $OBAC$ có ba góc vuông $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{BOC} = 90^\circ$

Nên là hình chữ nhật.

Lại có A nằm trên tia phân giác $OM \Rightarrow AB = AC$

Khi đó $OBAC$ là hình vuông.



Hình 8

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Trên cạnh BC lấy hai điểm H, G sao cho $BH = HG = GC$. Qua H và G kẻ các đường thẳng vuông góc với BC chúng cắt AB, AC lần lượt tại E, F .

- Chứng minh $\triangle BHE$ là tam giác vuông cân.
- Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình vuông.

Giải

a) $\triangle ABC$ vuông cân nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$.

$\triangle BHE$ vuông tại H có $\widehat{BEH} + \widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEH} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BEH} = 45^\circ$.

Vậy $\triangle BEH$ vuông cân tại H .

b) Chứng minh tương tự câu a ta được $\triangle CFG$ vuông cân tại $G \Rightarrow GF = GC$ và $HB = HE$
 Mặt khác $BH = HG = GC \Rightarrow EH = HG = GF$ và $EH \parallel FG$ (cùng vuông góc với BC)
 Tứ giác $EFGH$ có $EH \parallel FG, EH = FG$ nên là hình bình hành

Hình bình hành $EFGH$ có một góc vuông \widehat{H} nên là hình chữ nhật

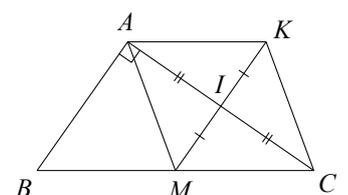
Hình chữ nhật $EFGH$ có hai cạnh kề bằng nhau $EH = HG$ nên là hình vuông.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AC , Trên tia đối của tia IM lấy điểm K sao cho $IK = IM$. (Hình 10)

- Chứng minh $AMCK$ là hình thoi.
- Chứng minh $AKMB$ là hình bình hành.
- Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để tứ giác $AMCK$ là hình vuông.

Giải

a) Tứ giác $AMCK$ có hai đường chéo AC, MK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.



Hình 10

$\triangle ABC$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = MC = MB$

Vậy hình bình hành $AMCK$ có $AM = MC$ nên là hình thoi.

b) Vì $AMCK$ là hình thoi nên $AK \parallel BM$ và $AK = MC = BM$

Tứ giác $AKMB$ có $AK \parallel BM$, $AK = BM$ nên là hình bình hành.

c) Để $AMCK$ là hình vuông thì cần có một góc vuông hay $AM \perp MC$

Khi đó $\triangle ABC$ có AM vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên cân tại A

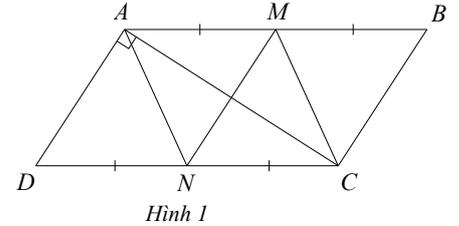
Vậy $\triangle ABC$ vuông cân tại A thì $AMCK$ là hình vuông.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . (Hình 1)

a) Chứng minh $MN \perp AC$.

b) Tứ giác $AMCN$ là hình gì?

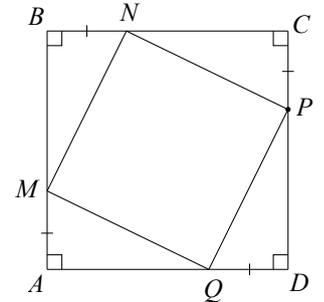


Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. (Hình 2)

a) Chứng minh $MB = NC = PD = QA$.

b) Chứng minh $\triangle QAM = \triangle NCP$.

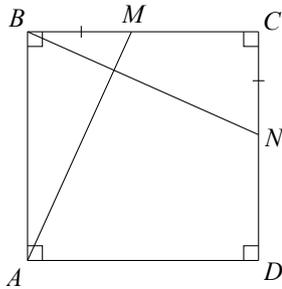
c) Chứng minh $MNPQ$ là hình vuông.



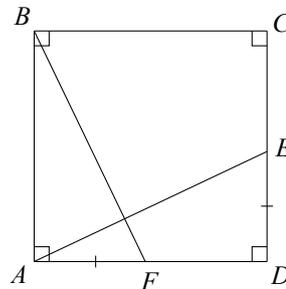
Bài 3: Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M , trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $BM = CN$. (Hình 3)

a) Chứng minh $AM = BN$.

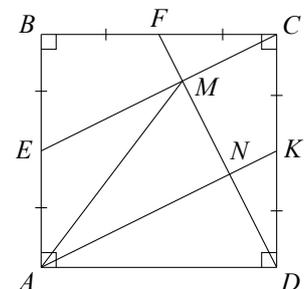
b) Chứng minh $AM \perp BN$.



Hình 3



Hình 4



Hình 5

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm F , trên cạnh DC lấy điểm E sao cho $AF = DE$. (Hình 4)

a) Chứng minh $\triangle ABF = \triangle ADE$.

b) Chứng minh $\widehat{FAE} + \widehat{AFB} = 90^\circ$.

c) Chứng minh $AE \perp BF$.

Bài 5: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

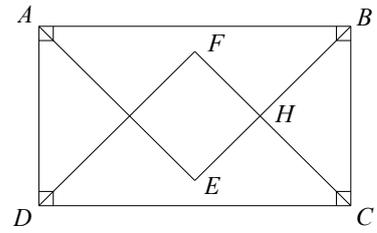
a) Chứng minh $AECK$ là hình bình hành. (Hình 5)

b) Chứng minh $DF \perp CE$ tại M .

c) AK cắt DF tại N . Chứng minh $ND = NM$.

Bài 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tia phân giác góc \widehat{C} , \widehat{D} cắt nhau tại F . Tia phân giác góc \widehat{A} , \widehat{B} cắt nhau tại E . (Hình 6)

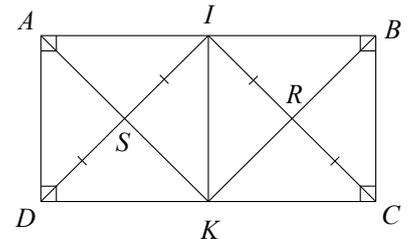
- Tính các góc $\triangle DFC$.
- Chứng minh $\triangle AEB = \triangle CFD$.
- BE cắt CF tại H . AE cắt DF tại G .
Chứng minh $GEHF$ là hình vuông.



Hình 6

Bài 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi I là trung điểm của AB và K là trung điểm của DC . (Hình 7)

- Chứng minh $AIKD$ và $BIKC$ là hình vuông.
- Chứng minh $\triangle DIC$ vuông cân.
- Gọi S và R lần lượt là tâm các hình vuông $AIKD$, $BIKC$. Chứng minh $ISKR$ là hình vuông.



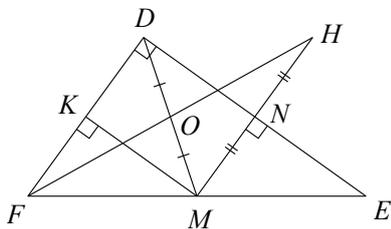
Hình 7

Bài 8: Cho $\triangle DEF$ vuông tại D có $DE > DF$. DM là

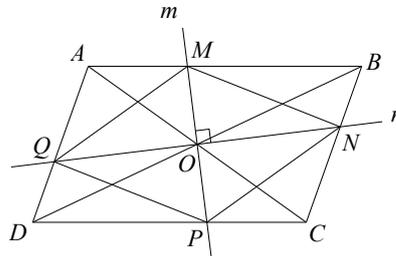
đường trung tuyến. Gọi MN là đường vuông góc kẻ từ M đến

DE , MK là đường vuông góc kẻ từ M đến DF . Trên tia MN lấy H sao cho N là trung điểm của MH . (Hình 8)

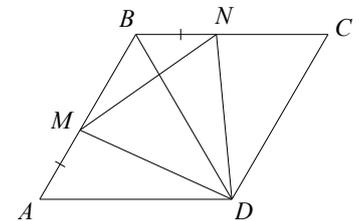
- Tứ giác $DKMN$ là hình gì?
- Gọi O là trung điểm của DM . Chứng minh 3 điểm H, O, F thẳng hàng.
- $\triangle DEF$ cần thêm điều kiện gì để tứ giác $DKMN$ là hình vuông.



Hình 8



Hình 9



Hình 10

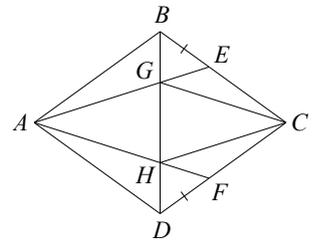
Bài 9: Cho hình bình hành $ABCD$. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Đường thẳng m đi qua O cắt AB, CD lần lượt tại M và P . Đường thẳng n đi qua O và vuông góc với m cắt cạnh BC và DA lần lượt tại N và Q . (Hình 9)

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Chứng minh $MNPQ$ là hình thoi.

Bài 10: Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$. Gọi M, N lần lượt trên AB, BC sao cho $AM = BN$. (Hình 10)

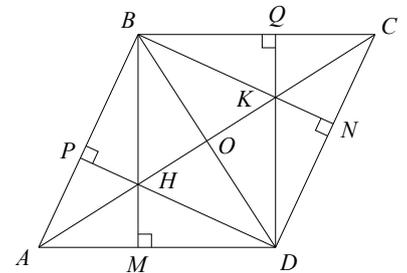
- Chứng minh $\widehat{ADM} = \widehat{BDN}$.
- Chứng minh $\triangle MDN$ là tam giác đều.

Bài 11: Cho hình thoi $ABCD$. Lấy E, F trên BC và CD sao cho $BE = DF$. Gọi G, H lần lượt là giao điểm của AE, AF với BD . Chứng minh $AGCH$ là hình thoi. (Hình 11)



Hình 11

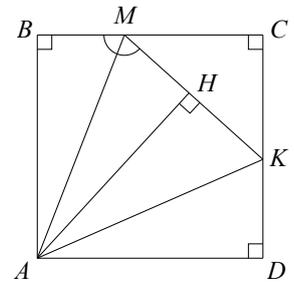
Bài 12: Cho hình thoi $ABCD$ có \widehat{B} là góc tù. Từ B hạ $BM \perp AD, BN \perp CD$. Từ D hạ $DP \perp AB, DQ \perp BC$. Gọi H là giao điểm của MB và PD , K là giao điểm của BN và DQ . O là giao điểm của AC và BD . (Hình 12)



Hình 12

- Chứng minh H là trực tâm $\triangle ABD$.
- Chứng minh A, H, K, C thẳng hàng.
- Chứng minh $\widehat{PDQ} = \widehat{MBN}$.
- Chứng minh $\widehat{PHM} = \widehat{QKN}$.
- Chứng minh tứ giác $BHDK$ là hình thoi.

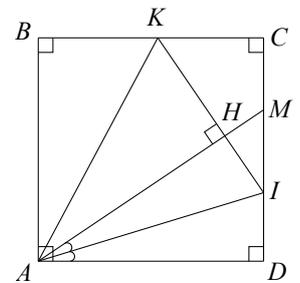
Bài 13: Cho hình vuông $ABCD$. Từ điểm M thuộc cạnh BC vẽ đường thẳng cắt CD ở K sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$. Kẻ $AH \perp MK$ ở H . (Hình 13)



Hình 13

- Chứng minh $\triangle ABM = \triangle AHM$ và $AH = AD$.
- Chứng minh $\triangle DAK = \triangle HAK$.
- Chứng minh $\widehat{MAK} = \frac{1}{2} \widehat{A} = 45^\circ$.

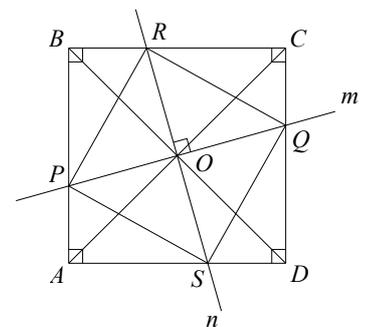
Bài 14: Cho hình vuông $ABCD$. M là điểm tùy ý trên cạnh DC . Tia phân giác của \widehat{DAM} cắt CD tại I . Kẻ $IH \perp AM$ tại H và tia IH cắt BC tại K . (Hình 14)



Hình 14

- Chứng minh $\triangle ADI = \triangle AHI$.
- Chứng minh $\triangle ABK = \triangle AHK$.
- Chứng minh $\widehat{IAK} = 45^\circ$.

Bài 15: Cho hình vuông $ABCD$. O là giao điểm của hai đường chéo. Hai đường thẳng m, n vuông góc với nhau tại O . Đường thẳng m cắt AB, CD lần lượt tại P, Q . Đường thẳng n cắt BC, AD lần lượt ở R, S . (Hình 15)

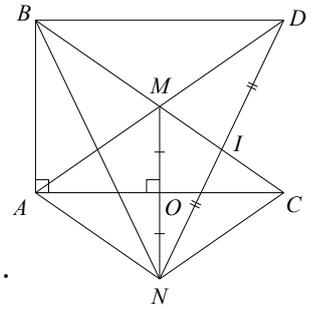


Hình 15

- Chứng minh $\triangle AOP = \triangle BOR$.
- Chứng minh $OP = OR = OS = OQ$.
- Chứng minh $PRQS$ là hình vuông.

Bài 16: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$ và trung tuyến AM . (Hình 16)

- Chứng minh $\triangle AMC$ cân.
- Từ M hạ $MO \perp AC$. Trên tia MO lấy N sao cho $MO = NO$. Chứng minh $AMCN$ là hình thoi.
- Gọi I là trung điểm của MC và D là điểm trên tia NI sao cho $IN = ID$. Chứng minh ba điểm A, M, D thẳng hàng.
- $\triangle ABC$ cần thêm điều kiện gì về góc để M là trực tâm của $\triangle BND$.

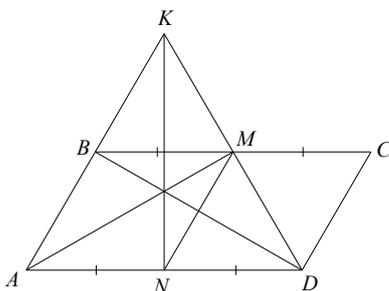


Hình 16

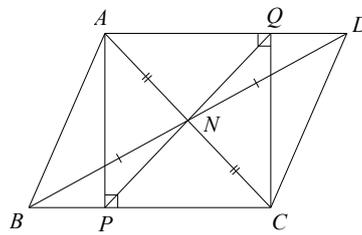
Bài 17: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $AD = 2AB$.

Gọi M là trung điểm của BC , N là trung điểm của AD . (Hình 17)

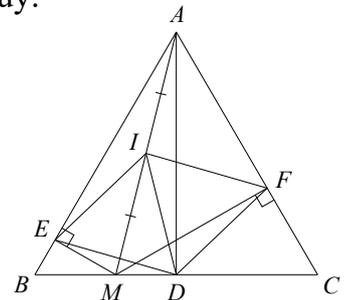
- Chứng minh $MCDN$ là hình thoi.
- Chứng minh $ABMD$ là hình thang cân và $AM = BD$.
- DM kéo dài cắt AB tại K . Chứng minh AM, DB, KN đồng quy.



Hình 17



Hình 18



Hình 19

Bài 18: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $AB < AC$. Gọi N là trung điểm của AC . Lấy điểm D trên tia BN sao cho $BN = ND$. (Hình 18)

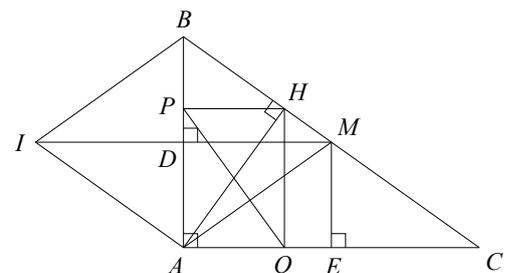
- Chứng minh $ABCD$ là hình bình hành.
- Kẻ $AP \perp BC, CQ \perp AD$. Chứng minh P, N, Q thẳng hàng.
- $\triangle ABC$ cần thêm điều kiện gì để tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Bài 19: Cho $\triangle ABC$ đều, M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC . E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC . I và D lần lượt là trung điểm của AM, BC . (Hình 19)

- Chứng minh I cách đều ba điểm D, F, E .
- Tính số đo \widehat{DIE} .
- Chứng minh $DEIF$ là hình thoi.

Bài 20: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , trung tuyến AM . Kẻ $MD \perp AB$ tại $D, ME \perp AC$ tại E .

- Chứng minh $ADME$ là hình chữ nhật. (Hình 20)
- Lấy điểm I sao cho D là trung điểm của IM . Tứ giác $AMBI$ là hình gì?
- Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để tứ giác $AMBI$ là hình vuông.
- Vẽ đường cao AH của $\triangle ABC$, kẻ $HP \perp AB, HQ \perp AC$. Chứng minh $PQ \perp AM$.



Hình 20

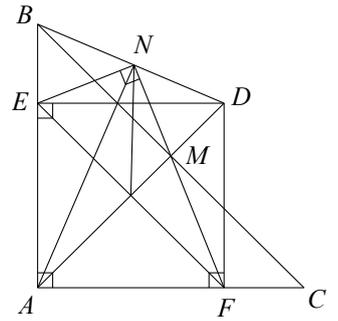
Bài 21: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D bất kì. Từ D kẻ các đường thẳng vuông góc với AB, AC lần lượt tại E, F .

- Chứng minh $AEDF$ là hình vuông. (Hình 21)
- Chứng minh $EF \parallel BC$.
- Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với MF tại N .

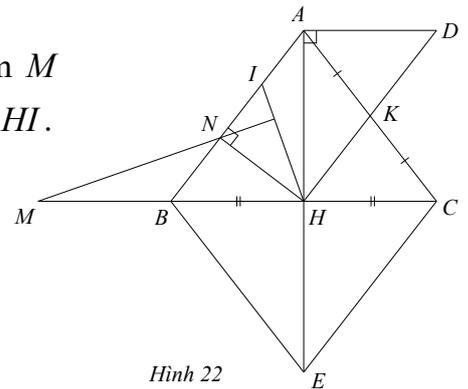
Chứng minh $\widehat{AND} = 90^\circ$.

Bài 22: Cho $\triangle ABC$ cân tại A . H, K lần lượt là trung điểm của BC và AC . Trên tia AH lấy điểm E sao cho $AH = HE$. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AH cắt HK tại D . (Hình 22)

- Chứng minh $AKHB$ là hình thang và $ABEC$ là hình thoi.
- Chứng minh $AD = BH$.
- Kẻ $HN \perp AB$ tại N . I là trung điểm của AN . Vẽ điểm M sao cho B là trung điểm của HM . Chứng minh $MN \perp HI$.
(Sử dụng đường trung bình của tam giác)



Hình 21

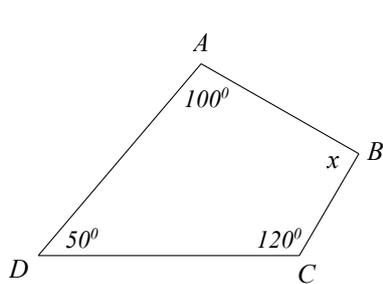


Hình 22

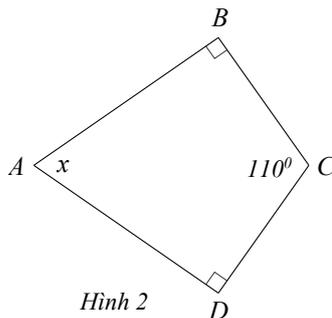
LỜI GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

Bài 1. TỨ GIÁC

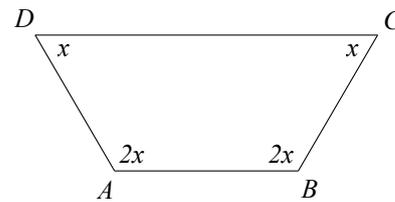
Bài 1:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Hình 1. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 100^\circ + x + 120^\circ + 50^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 90^\circ. \text{ Vậy } x = 90^\circ.$$

Hình 2. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow x + 90^\circ + 110^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 70^\circ. \text{ Vậy } x = 70^\circ.$$

Hình 3. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 2x + 2x + x + x = 360^\circ \Rightarrow 6x = 360^\circ \Rightarrow x = 60^\circ. \text{ Vậy } x = 60^\circ, 2x = 120^\circ.$$

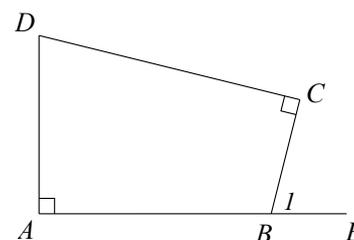
Bài 2: (Hình 4)

a) Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{ABC} + 90^\circ + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{D} = 180^\circ.$$

b) Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (Kề bù)

Như vậy $\widehat{D} = \widehat{B}_1$.



Hình 4

Bài 3: (Hình 5)

Vì AC là tia phân giác \widehat{BAD} nên $\widehat{BAD} = 2.\widehat{DAC} = 2.40^\circ = 80^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} + \widehat{B} + \widehat{BCD} + \widehat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 80^\circ + 90^\circ + \widehat{BCD} + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 100^\circ.$$

Bài 4: (Hình 6)

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

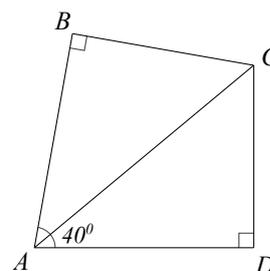
$$\Rightarrow 72^\circ + \widehat{B} + \widehat{C} + 68^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 220^\circ.$$

Lại có BM, CM lần lượt là các tia phân giác \widehat{B}, \widehat{C}

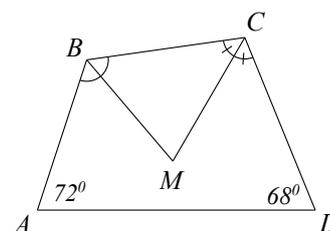
$$\text{Nên } \widehat{MBC} = \frac{\widehat{B}}{2}; \widehat{MCB} = \frac{\widehat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{MCB} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ.$$

$$\triangle MBC \text{ có } \widehat{M} + \widehat{MBC} + \widehat{MCB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M} + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M} = 70^\circ.$$



Hình 5



Hình 6

Bài 5: (Hình 7)

a) Ta có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ mà $\widehat{ADC} + \widehat{EDC} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{EDC}.$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EDC$ có:

$BC = DC$ (giả thiết)

$DE = AB$ (giả thiết)

$\widehat{B} = \widehat{EDC}$ (Chứng minh trên)

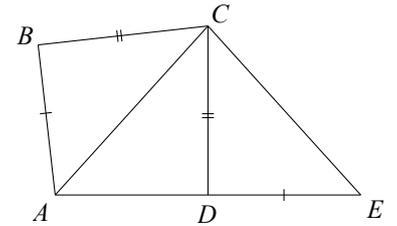
$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle EDC \text{ (c.g.c)}$$

b) Vì $\triangle ABC = \triangle EDC \Rightarrow CA = CE$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle CAE$ cân tại C .

$$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CEA} \text{ (tính chất tam giác cân)} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \triangle ABC = \triangle EDC \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{E} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CAE}$. Hay AC là tia phân giác \widehat{BAD} .



Hình 7

Bài 6: (Hình 8)

a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle AEC$ có:

$\widehat{DAC} = \widehat{EAC}$ (giả thiết)

AC là cạnh chung

$\widehat{DCA} = \widehat{ECA}$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle AEC \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E} \text{ (Hai góc tương ứng)}$$

b) $\triangle ABC$ có $\widehat{B} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 100^\circ$.

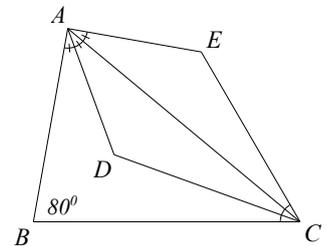
Mà AD, CD là hai tia phân giác hai góc $\widehat{BAC}, \widehat{BCA}$ nên $\widehat{DAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}; \widehat{DCA} = \frac{\widehat{BCA}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{DCA} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BCA}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

$$\triangle ACD \text{ có } \widehat{D} + \widehat{DAC} + \widehat{DCA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 130^\circ = \widehat{E}.$$

Khi đó tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{E} = 80^\circ + 130^\circ = 210^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{BCE} = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$$

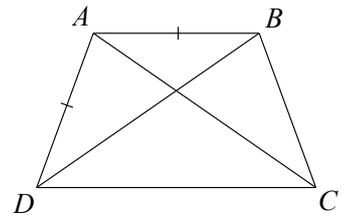


Hình 8

Bài 2. HÌNH THANG CÂN.

Bài 1: (Hình 1)

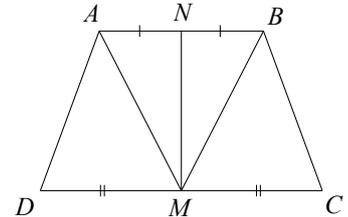
- a) $ABCD$ là hình thang cân nên $AD = BC$ mà $AB = AD$
 $\Rightarrow AB = BC$.
- b) $\triangle ABD$ có $AB = AD$ nên cân tại $A \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABD}$
 Mà $AB \parallel DC \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong)
 $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BDC}$. Vậy DB là phân giác \widehat{ADC} .



Hình 1

Bài 2: (Hình 2)

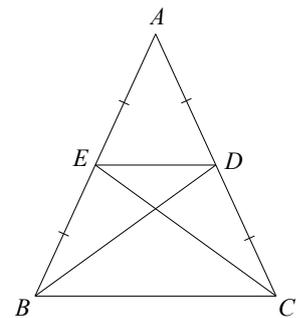
- a) $ABCD$ là hình thang cân nên $AD = BC$ và $\widehat{D} = \widehat{C}$
 Xét $\triangle ADM$ và $\triangle BCM$ có:
 $AD = BC$ (giả thiết)
 $\widehat{D} = \widehat{C}$ (giả thiết)
 $DM = CM$ (giả thiết)
 $\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BCM$ (c - g - c) $\Rightarrow AM = BM$ (hai cạnh tương ứng)
- b) Vì $MA = MB \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M khi đó MN vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $MN \perp AB$. Vậy MN là đường cao của hình thang $ABCD$.



Hình 2

Bài 3: (Hình 3)

- a) $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.
 Mà $AD = CD = \frac{AC}{2}$ và $EA = EB = \frac{AB}{2}$
 Nên $AE = AD$ vậy $\triangle AED$ cân tại A .
- b) Vì $\triangle AED$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (1)
 Và $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (2)



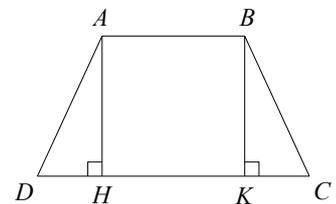
Hình 3

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{AED}, \widehat{ABC}$ là hai góc đồng vị nên $ED \parallel BC$

Do đó $BCDE$ là hình thang lại có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (giả thiết) nên $ABCD$ là hình thang cân.

Bài 4: (Hình 4)

- a) Xét $\triangle AHD$ và $\triangle BKC$ có:
 $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$.
 $AD = BC$ (giả thiết)
 $\widehat{D} = \widehat{C}$ (giả thiết)
 $\Rightarrow \triangle AHD = \triangle BKC$ (cạnh huyền - góc nhọn)
- b) Vì $\begin{cases} AB \parallel HK \\ AH \perp HK \end{cases} \Rightarrow AB \perp AH$ khi đó $ABKH$ là hình thang có hai đáy $AH \parallel BK$ lại có hai góc ở đáy $\widehat{A} = \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow ABKH$ là hình thang cân nên $AB = HK$.
- c) Vì $\triangle AHD = \triangle BKC \Rightarrow DH = KC$ (hai cạnh tương ứng)



Hình 4

$$\text{Khi đó } DC - AB = (DH + HK + KC) - AB = DH + KC = 2KC \Rightarrow KC = \frac{DC - AB}{2}.$$

Bài 5: (Hình 5)

a) $ABCD$ là hình thang cân nên $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ và $AD = BC$.

$\triangle ODC$ có $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ nên là tam giác cân $\Rightarrow OD = OC$

Mà $AD = BC \Rightarrow OA = OB$ hay $\triangle OAB$ cân tại O .

b) $ABCD$ là hình thang cân nên $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$ có:

AB là cạnh chung

$\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ (giả thiết)

$AD = BC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BAC$ (c - g - c)

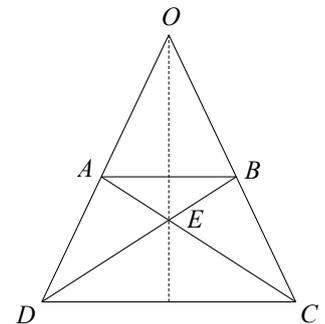
c) Vì $\triangle ABD = \triangle BAC \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BCA}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ECD} \Rightarrow \triangle EDC$ cân tại $E \Rightarrow ED = EC$

d) Ta thấy $OD = OC$ nên O nằm trên đường trung trực của DC .

$ED = EC$ nên E nằm trên đường trung trực của DC .

Vậy O, E và trung điểm của DC thẳng hàng.

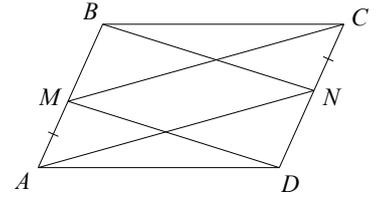


Hình 5

Bài 3. HÌNH BÌNH HÀNH.

Bài 1: (Hình 1)

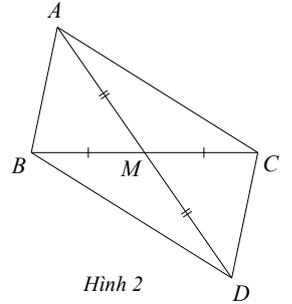
- a) $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD \Rightarrow AM \parallel CN$
 Và $AM = CN$ nên $AMCN$ là hình bình hành.
- b) Vì $AB = CD$ mà $AM = CN$
 Trừ theo vế ta được $AB - AM = CD - CN \Rightarrow BM = DN$
 Tứ giác $DMBN$ có $BM \parallel DN$ nên là hình bình hành.



Hình 1

Bài 2: (Hình 2)

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AD, BC cắt nhau tại M
 Và $AM = DM, BM = CM$ nên là hình bình hành.



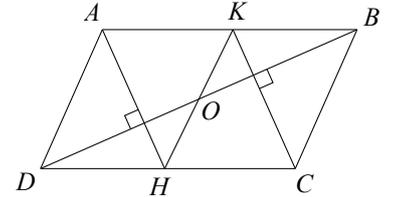
Hình 2

Bài 3: (Hình 3)

- a) Ta có $\begin{cases} AH \perp BD \\ CK \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \parallel CK.$

Lại có $AK \parallel HC$ nên $AHCK$ là hình bình hành.

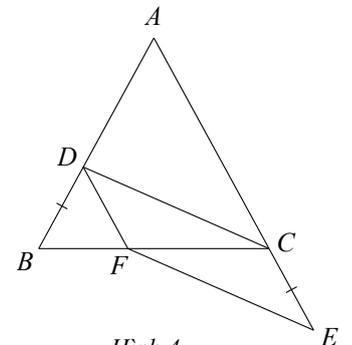
- b) Vì O là trung điểm của BD mà $ABCD$ là hình bình hành
 Nên O là trung điểm của AC
 Mà $AHCK$ cũng là hình bình hành nên O là trung điểm
 của AC thì O cũng là trung điểm của HK .



Hình 3

Bài 4: (Hình 4)

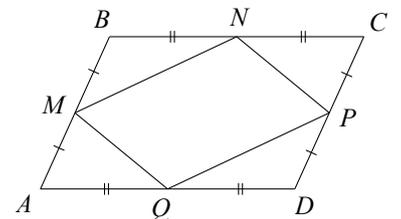
- a) $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{ACB}$.
 Vì $DF \parallel AC \Rightarrow \widehat{DFB} = \widehat{ACB}$ (đồng vị)
 Nên $\widehat{B} = \widehat{DFB}$ vậy $\triangle DBF$ là tam giác cân.
- b) $\triangle DBF$ cân $\Rightarrow DF = DB = CE$
 Tứ giác $DCEF$ có $DF \parallel CE, DF = CE$
 nên là hình bình hành.



Hình 4

Bài 5: (Hình 5)

- a) $AB = CD \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = MA = MB = PC = PD$
 và $BC = AD \Rightarrow \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = NB = NC = QA = QD$
 Xét $\triangle BMN$ và $\triangle DPQ$ có:
 $BN = DQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$
 $\widehat{B} = \widehat{D}$ (giả thiết)
 $MB = PD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$
 $\Rightarrow \triangle BMN = \triangle DPQ$ (c - g - c) $\Rightarrow MN = PQ$ (hai cạnh tương ứng)



Hình 5

b) Chứng minh tương tự ta được $NP = MQ$

Tứ giác $MNPQ$ có các cạnh đối bằng nhau nên là hình bình hành.

Bài 6: (Hình 6)

a) Ta có $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = MB = MA = NC = ND$

Và $AM \parallel CN$ nên tứ giác $AMCN$ là hình bình hành.

b) Tứ giác $AMFG$ có $AM \parallel GF, MF \parallel AG$

nên là hình bình hành $\Rightarrow AM = GF = MB$

Lại có $\widehat{FGE} = \widehat{MAG}$ (đồng vị) và $\widehat{MAG} = \widehat{BMF}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{FGE} = \widehat{BMF}$.

Xét $\triangle BMF$ và $\triangle FGE$ có:

$BM = FG$ (chứng minh trên)

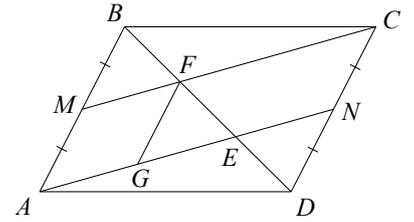
$\widehat{MBF} = \widehat{EFG}$ (đồng vị)

$\widehat{FGE} = \widehat{BMF}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \triangle BMF = \triangle FGE$ ($g - c - g$)

$\Rightarrow BF = FE$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh tương tự $\triangle EFG = \triangle EDN$ ($g - c - g$) $\Rightarrow EF = ED$ (hai cạnh tương ứng)

Vậy $BF = FE = ED$



Hình 6

Bài 7: (Hình 7)

a) Ta có $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \Rightarrow AK = KB = DE = EC$

Tứ giác $AECK$ có $AK \parallel EC$ và $AK = EC$

Nên $AECK$ là hình bình hành.

b) $ABCD$ là hình bình hành có AC cắt BD tại O

Nên O là trung điểm của AC

$AECK$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC thì O là trung điểm của EK

Hay E, O, K thẳng hàng.

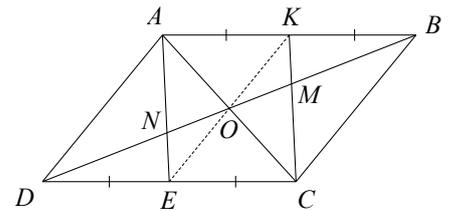
c) $\triangle ADC$ có N là trọng tâm $\Rightarrow DN = \frac{2}{3}DO$, $\triangle ABC$ có M là trọng tâm $\Rightarrow BM = \frac{2}{3}BO$

Mà $OD = OB \Rightarrow DN = BM$

Lại có $NO = \frac{1}{3}DO, MO = \frac{1}{3}BO = \frac{1}{3}DO \Rightarrow NM = NO + MO = \frac{2}{3}DO$

Vậy $DN = NM = MB$.

d) $AECK$ là hình bình hành nên $AE = CK$ mà $KM = \frac{1}{3}KC \Rightarrow KM = \frac{1}{3}AE \Rightarrow AE = 3KM$.



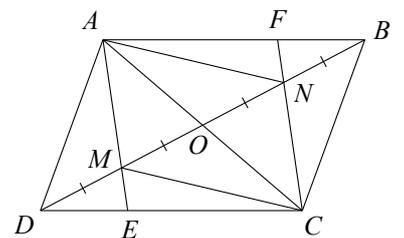
Hình 7

Bài 8: (Hình 8)

a) $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$

$OB = OD \Rightarrow \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}OD \Rightarrow OM = ON = NB = MD$

Tứ giác $AMCN$ có $OM = ON, OA = OC$



Hình 8

Nên là hình bình hành.

- b) Tứ giác $AECF$ có $AE \parallel CF$, $AF \parallel CE$ nên là hình bình hành
 $\Rightarrow AF = CE$ mà $AB = CD \Rightarrow AB - AF = CD - CE \Rightarrow BF = DE$

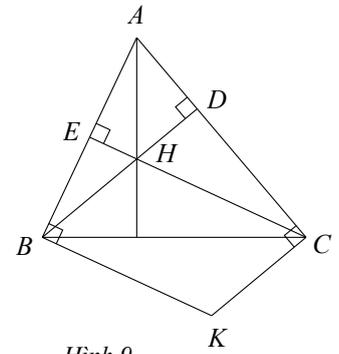
Bài 9: (Hình 9)

- a) $\triangle ABC$ có H là trực tâm nên $AH \perp BC$.

b) Ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ KB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel BK \quad (1)$

Và $\begin{cases} BH \perp AC \\ KC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel CK \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow BHCK$ là hình bình hành.



Hình 9

Bài 10: (Hình 10)

a) Ta có $\begin{cases} BH \perp AC \\ KC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel KC \quad (1)$

Và $\begin{cases} CH \perp AB \\ KB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel KB \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow BHCK$ là hình bình hành.

- b) Vì $BHCK$ là hình bình hành nên BC cắt HK tại trung điểm M của $BC \Rightarrow M$ là trung điểm của $HK \Rightarrow H, M, K$ thẳng hàng.

- c) $\triangle BHI$ có BG vừa là đường cao, trung tuyến nên BG là trung trực của HI .

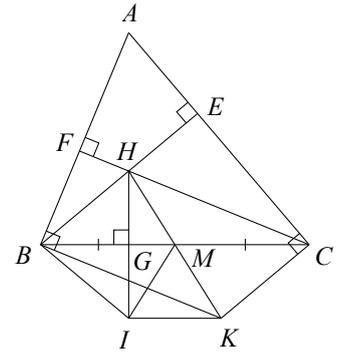
Khi đó $MH = MI$

$\triangle HIK$ có IM là đường trung tuyến và $IM = \frac{1}{2}HK \Rightarrow \triangle HIK$ vuông tại $I \Rightarrow IK \perp HI$.

Mà $BC \perp HI \Rightarrow BC \parallel IK \Rightarrow BCKI$ là hình thang.

$\triangle BIH$ cân tại B lại có BG là trung trực nên là phân giác $\widehat{HBI} \Rightarrow \widehat{GBI} = \widehat{GBH}$

Mà $\widehat{HBG} = \widehat{GCK}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{IBC} = \widehat{KCB} \Rightarrow BCKI$ là hình thang cân.



Hình 10

Bài 11: (Hình 11)

- a) $BHCK$ có $MB = MC$, $MH = MK$ nên là hình bình hành.

- b) $BHCK$ là hình bình hành nên $HC \parallel BK$ mà $HC \perp AB \Rightarrow BK \perp AB$
 Tương tự $KC \parallel BH$ mà $BH \perp AC \Rightarrow KC \perp AC$.

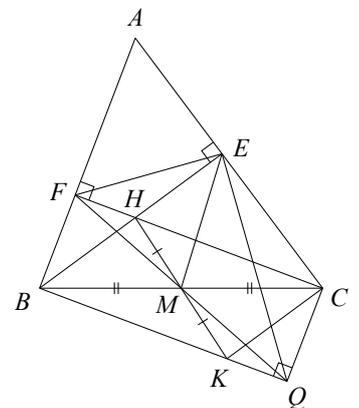
- c) $\triangle FBC$ vuông tại F có FM là trung tuyến nên $FM = \frac{1}{2}BC$.

$\triangle EBC$ vuông tại E có EM là trung tuyến nên $EM = \frac{1}{2}BC$

Khi đó $ME = MF \Rightarrow \triangle MEF$ cân tại M .

- d) $BQ \parallel FC$ và $\begin{cases} AB \perp BK \\ CQ \perp BK \end{cases} \Rightarrow AB \parallel CQ$

$BFCQ$ có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.



Hình 11

Khi đó BC, FQ cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường

$\triangle EFQ$ có $EM = MF = MQ$ hay đường trung tuyến $EM = \frac{1}{2}FQ$

$\Rightarrow \triangle EFQ$ vuông tại E hay $EF \perp EQ$.

Bài 12: (Hình 12)

a) $AGCE$ có hai đường chéo AC, GE cắt nhau tại N và $NA = NC, NE = NG$ nên là hình bình hành.

b) $\triangle ABC$ có G là trọng tâm nên $GM = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}GF$ (1)

$\Rightarrow MF = GF - GM = GF - \frac{1}{2}GF = \frac{1}{2}GF$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow GM = MF$

Khi đó $BGCF$ có hai đường chéo BC, GF cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên là hình bình hành $\Rightarrow BF \parallel GC$ mà $GC \parallel AE \Rightarrow BF \parallel AE$.

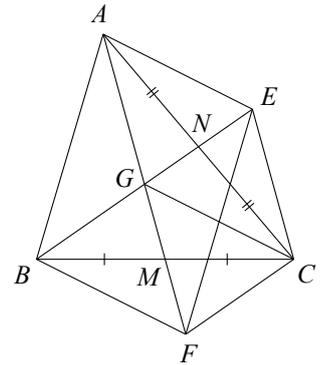
c) Nhận thấy $AECF$ có $AF \parallel EC$ nên là hình thang.

Để $AECF$ là hình thang cân thì $AC = EF$ (3)

Lại có $GN = NE \Rightarrow GE = 2GN = BG$ và $GF = 2GM = AG$

Hay $ABFE$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm G mỗi đường nên là hình bình hành $\Rightarrow AB = EF$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow AC = AB$ hay $\triangle ABC$ cân tại A thì $AECF$ là hình thang cân.



Hình 12

Bài 13: (Hình 13)

a) $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

b) Xét $\triangle OIA$ và $\triangle ONC$ có

$\widehat{IOA} = \widehat{NOC}$ (đối đỉnh)

$OA = OC$ (giả thiết)

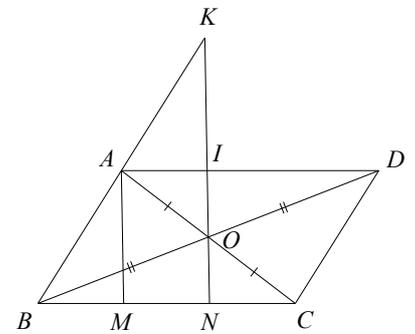
$\widehat{OAI} = \widehat{OCN}$ (so le trong)

$\Rightarrow \triangle OIA = \triangle ONC$ (g - c - g)

$\Rightarrow AI = NC$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $MN = NC \Rightarrow MN = AI$

Tứ giác $AMNI$ có $AI \parallel MN, AI = MN$ nên là hình bình hành $\Rightarrow AM \parallel IN$.



Hình 13

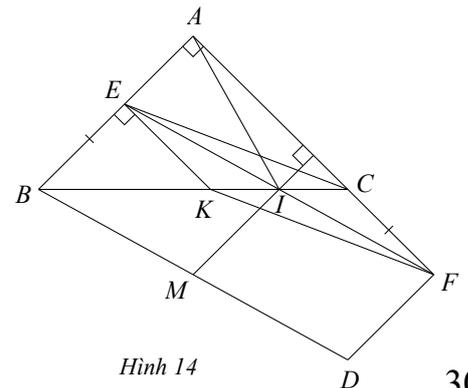
Bài 14: (Hình 14)

a) Ta có $\begin{cases} EK \perp AB \\ FC \perp AB \end{cases} \Rightarrow EK \parallel CF$ (1)

Mặt khác $\triangle EBK$ vuông tại E lại có $\widehat{B} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EKB} = 45^\circ \Rightarrow \triangle EBK$ vuông cân tại E

$\Rightarrow EK = EB = CF$ (2)



Hình 14

Từ (1), (2) tứ giác $EKFC$ là hình bình hành.

b) Ta có $\begin{cases} BE \perp AC \\ MI \perp AC \end{cases} \Rightarrow BE \parallel MI$ và $BM \parallel EI$ nên $BEIM$ là hình bình hành $\Rightarrow BM = EI$.

$EKFC$ là hình bình hành có hai đường chéo EF, KC cắt nhau tại I nên $IE = IF$

$\triangle AEF$ vuông tại A có AI là đường trung tuyến nên $AI = EI = IF$

Vậy $AI = EI = BM$.

c) Giả sử A, I, D thẳng hàng khi đó $\triangle AFD$ vuông tại F . Lại có $IA = IF \Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{IFA}$

Mà $\widehat{IFA} + \widehat{IFD} = 90^\circ$ và $\widehat{IAF} + \widehat{IDF} = 90^\circ$ nên $\widehat{IDF} = \widehat{IFD} \Rightarrow \triangle IDF$ cân tại I

Hay $IF = ID$ khi đó I là trung điểm của AD

Tứ giác $AEDF$ có hai đường chéo EF, AD cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường nên là hình bình hành $\Rightarrow AE = DF$ mà $DF = BE \Rightarrow AE = BE$ hay E là trung điểm của AB .

Bài 15: (Hình 15)

a) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ EF \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \parallel EF$ (1)

Xét $\triangle DBE$ và $\triangle FEC$ có:

$\widehat{BDE} = \widehat{FEC} = 90^\circ$

$BE = EC$ (giả thiết)

$\widehat{DBE} = \widehat{FEC}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \triangle DBE = \triangle FEC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BD = EF$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow BDFE$ là hình bình hành.

b) $BDFE$ là hình bình hành nên $DF \parallel HE \Rightarrow HEFD$ là hình thang.

Lại có $DE = FC$ (hai cạnh tương ứng) (3)

$\triangle ABC$ vuông tại A có AE là trung tuyến nên $AE = CE \Rightarrow \triangle AEC$ cân tại E .

Có EF là đường cao nên là đường trung tuyến $\Rightarrow AF = FC$

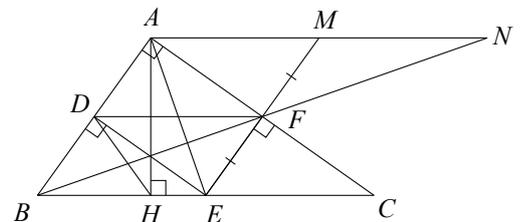
$\triangle AHC$ vuông tại H có HF là đường trung tuyến nên $HF = FC = AF$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow DE = HF$ khi đó hình thang $HEFD$ là hình thang cân.

c) F là trung điểm của $EM \Rightarrow AECM$ là hình bình hành $\Rightarrow AM \parallel EC$. (5)

F là trung điểm của $BN \Rightarrow ABCN$ là hình bình hành $\Rightarrow AN \parallel BC$. (6)

Từ (5), (6) $\Rightarrow A, M, N$ thẳng hàng.



Hình 15

Bài 4. HÌNH CHỮ NHẬT.

Bài 1: (Hình 1)

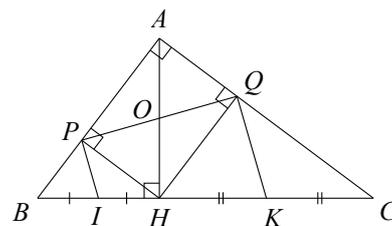
- a) Tứ giác $APHQ$ có 3 góc vuông $\widehat{A} = \widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$
Nên là hình chữ nhật.
- b) $\triangle QHC$ có QK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

$$\text{Nên } QK = \frac{HC}{2} = HK = KC \Rightarrow \triangle KHQ \text{ cân tại } K.$$

- c) $APHQ$ là hình chữ nhật nên hai đường chéo AH, PQ
Bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường hay
 $OA = OP = OQ = OH$ khi đó $\triangle OHQ$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OQH} = \widehat{OHQ}$
Và $\triangle KHQ$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KQH} = \widehat{KHQ}$.

$$\text{Do đó } \widehat{OQK} = \widehat{OQH} + \widehat{HQK} = \widehat{OHQ} + \widehat{OHK} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{KQP} = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự cho $PI \perp QP$ khi đó $PI \parallel QK$ (cùng vuông góc với PQ)



Hình 1

Bài 2: (Hình 2)

- a) Ta có $\begin{cases} MD \perp AB \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow MD \parallel CE$

$$\Rightarrow \widehat{IMD} = \widehat{KCE} \text{ (đồng vị)} \quad (1)$$

$\triangle DBM, \triangle EMC$ là các tam giác vuông có các đường

trung tuyến ứng với cạnh huyền DI, EK nên $DI = \frac{BM}{2}; EK = \frac{MC}{2}$

mà $BM = MC \Rightarrow DI = EK$.

$$\text{Lại có } \widehat{DIM} = 180^\circ - 2\widehat{IMD}, \widehat{EKC} = 180^\circ - 2\widehat{C} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{EKC}$ mà $\widehat{DIM}, \widehat{EKC}$ đồng vị nên $DI \parallel EK$.

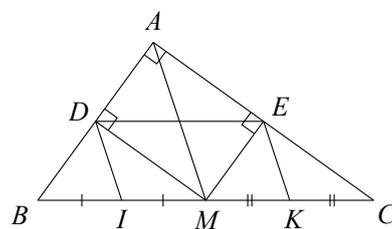
Tứ giác $DIKE$ có $DI \parallel EK, DI = EK$ nên là hình bình hành.

- b) $\triangle AMC$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = MC = MB \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{AMC} = 180^\circ - 2\widehat{C} \quad (3)$

Từ (2), (3) $\Rightarrow \widehat{EKM} = \widehat{AMC}$ mà $\widehat{EKM}, \widehat{AMC}$ đồng vị nên $AM \parallel EK$.

Để hình bình hành $DEKI$ là hình chữ nhật thì cần $EK \perp IK$ mà

$AM \parallel EK \Rightarrow AM \perp MK$. Khi đó AM là đường cao $\triangle ABC$ hay $\triangle ABC$ cân tại A .



Hình 2

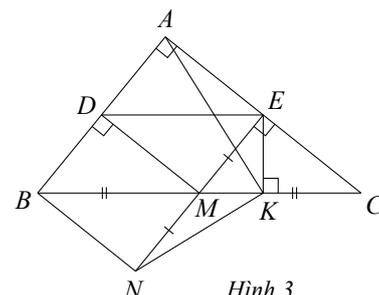
Bài 3: (Hình 3)

- a) Tứ giác $ADME$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật
 $\Rightarrow AD = ME, AE = DM$ và $AD \parallel ME$

Xét $\triangle DBM$ và $\triangle EMC$ có:

$$BM = MC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{DBM} = \widehat{EMC} \text{ (đồng vị)}$$



Hình 3

$$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ \Rightarrow \triangle DBM = \triangle EMC \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BD = ME, DM = EC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Khi đó } BD = AD (= ME), AE = EC (= DM)$$

b) Tứ giác $BDEM$ có $BD \parallel ME, BD = ME$ nên là hình bình hành.

c) Tứ giác $ABNE$ có $AB \parallel NE$

$$\text{Lại có } AB = 2AD, NE = 2ME \text{ mà } AD = ME \Rightarrow AB = NE$$

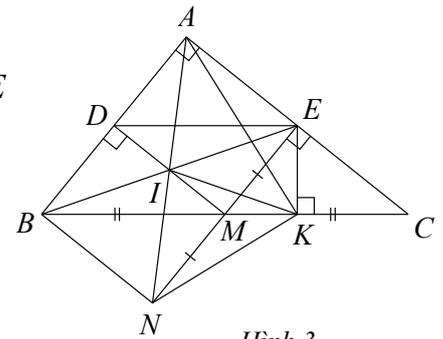
Nên $ABNE$ là hình bình hành lại có $\widehat{A} = 90^\circ$

Nên là hình chữ nhật. Khi đó AN, BE cắt nhau tại

trung điểm I của mỗi đường hay $IA = IB = IN = IE$

$\triangle BKE$ vuông tại K có KI là trung tuyến

$$\text{nên } KI = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}AN. \text{ Khi đó } \triangle AKN \text{ vuông tại } K \Rightarrow AK \perp NK.$$



Hình 3

Bài 4: (Hình 4)

a) Tứ giác $AMDN$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

b) $AMDN$ là hình chữ nhật nên hai đường chéo AD, MN

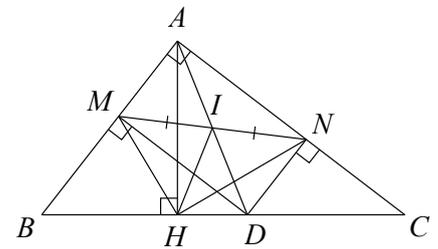
cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường

$$\Rightarrow IA = IM = ID = IN.$$

$\triangle AHD$ vuông tại H có HI là đường trung tuyến

$$\Rightarrow HI = \frac{AD}{2} = \frac{MN}{2}$$

$$\triangle MHN \text{ có } HI \text{ là đường trung tuyến mà } HI = \frac{MN}{2} \Rightarrow \triangle MHN \text{ vuông tại } H$$



Hình 4

Bài 5: (Hình 5)

a) Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Khi đó hai đường chéo $AM = EF$

$\triangle ABC$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến

$$\text{Nên } AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow EF = \frac{BC}{2}.$$

b) Vì $AB \parallel MF \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{FMC}$ (đồng vị)

Xét $\triangle EBM$ và $\triangle FMC$ có:

$$\widehat{BEM} = \widehat{MFC} = 90^\circ$$

$$BM = CM \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{B} = \widehat{FMC} \text{ (chứng minh trên)} \Rightarrow \triangle EBM = \triangle FMC \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

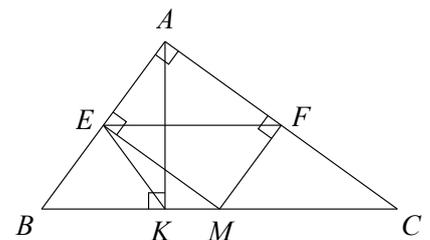
$$\Rightarrow EM = FC \text{ (hai cạnh tương ứng) mà } EM \parallel FC \text{ nên } EFCM \text{ là hình bình hành}$$

$$\Rightarrow EF \parallel MC \Rightarrow KMFE \text{ là hình thang.}$$

Vì $EM = AF, EM = FC \Rightarrow AF = FC$ hay F là trung điểm của AC .

$$\text{Lại có } \triangle KAC \text{ vuông tại } K \text{ có } KF \text{ là đường trung tuyến nên } KF = \frac{AC}{2} \text{ mà } EM = \frac{AC}{2}$$

$$\text{nên } KF = EM.$$



Hình 5

Vậy hình thang $KMFE$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân

Bài 6: (Hình 6)

- a) Tứ giác $AHKC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường nên là hình bình hành
 $\Rightarrow AC \parallel HK$.

- b) Vì $NC \parallel MK \Rightarrow MNCK$ là hình thang.

$$AHCK \text{ là hình bình hành nên } \widehat{HKC} = \widehat{HAC} \quad (1)$$

Tứ giác $AMHN$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Khi đó $OA = ON = OM = OH \Rightarrow \triangle OMH$ cân tại O .

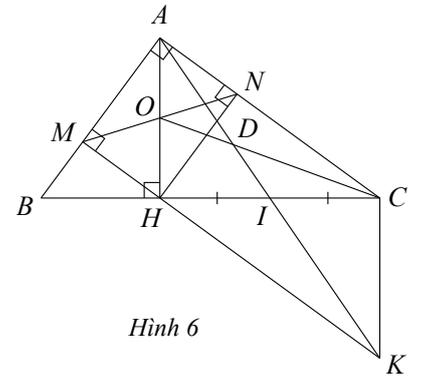
$$\Rightarrow \widehat{OMH} = \widehat{OHM} \text{ mà } \widehat{OAN} = \widehat{OHM} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAN} = \widehat{OMH} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{OMH} = \widehat{HKC}$. Hình thang $MNCK$ có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thang cân.

- c) $\triangle AHC$ có hai đường trung tuyến AI, CO cắt nhau tại D nên D là trọng tâm.

$$\Rightarrow AD = \frac{2}{3}AI \text{ mà } AI = \frac{1}{2}AK. \text{ Thay vào ta được } AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AK = \frac{1}{3}AK \Rightarrow AK = 3AD.$$



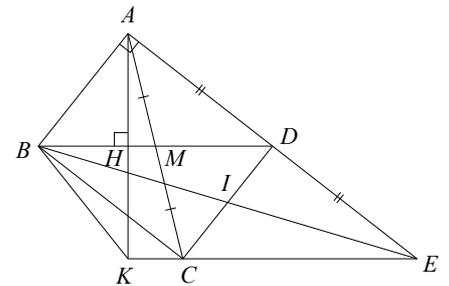
Hình 6

Bài 7: (Hình 7)

- a) Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên là hình bình hành.

Lại có $\widehat{BAD} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

- b) $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC = AD = DE$
 và $BC \parallel DE$ nên $BCED$ là hình bình hành
 khi đó hai đường chéo BE, CD cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường, hay $IB = IE$.



Hình 7

- c) Ta có BD vuông góc với AK tại trung điểm H của AK nên BD là đường trung trực của AK . Khi đó $MK = KA = KC$

$$\triangle AKC \text{ có đường trung tuyến } KM \text{ mà } KM = \frac{AC}{2} \Rightarrow \triangle AKC \text{ vuông tại } K.$$

Ta có $KC \parallel BD$ vì cùng vuông góc với $AK \Rightarrow BDCK$ là hình thang

$$\text{Lại có } BC = \frac{1}{2}AE \text{ và } \triangle AKE \text{ vuông tại } K \text{ có } KD \text{ là trung tuyến nên } KD = \frac{1}{2}AE$$

Khi đó hình thang $BDCK$ có hai đường chéo $BC = KD$ nên là hình thang cân.

Bài 5: HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG.

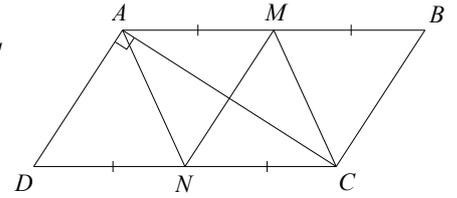
Bài 1: (Hình 1)

a) $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = DC \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC$

$$\Rightarrow AM = BM = DN = CN$$

Tứ giác $AMCN$ có $AM \parallel NC$, $AM = NC$

nên là hình bình hành.



Hình 1

Lại có $\triangle ADC$ vuông tại A có AN là đường trung tuyến nên $AN = \frac{1}{2}DC = DN = CN$

Hình bình hành $AMCN$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi, khi đó hai đường chéo AC , MN vuông góc với nhau

b) Tứ giác $AMCN$ là hình thoi.

Bài 2: (Hình 2)

a) $ABCD$ là hình vuông nên $AB = BC = CD = DA$

Mà $AM = BN = CP = DQ$. Trừ theo vế ta được

$$AB - AM = BC - BN = CD - CP = DA - DQ$$

$$\Rightarrow MB = NC = PD = QA$$

b) Xét $\triangle QAM$ và $\triangle NCP$ có:

$$\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$$

$$AQ = NC \text{ (chứng minh trên)}$$

$$AM = CP \text{ (giả thiết)} \Rightarrow \triangle QAM = \triangle NCP \text{ (c-g-c)}$$

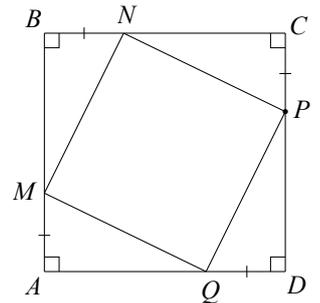
c) Từ $\triangle QAM = \triangle NCP \Rightarrow NP = MQ$ hai cạnh tương ứng.

Chứng minh tương tự câu b cho $\triangle QAM = \triangle PDQ$ và $\triangle QAM = \triangle MBN$

$$\text{Khi đó } \Rightarrow MQ = PQ, MN = MQ \text{ và } \widehat{AMQ} = \widehat{DQP}$$

$$\text{Mà } \widehat{AMQ} + \widehat{AQM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DQP} + \widehat{AQM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MQP} = 90^\circ$$

Tứ giác $MNPQ$ có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi, lại có $\widehat{MQP} = 90^\circ$ nên là hình vuông.



Hình 2

Bài 3: (Hình 3)

a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle BCN$ có:

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$$

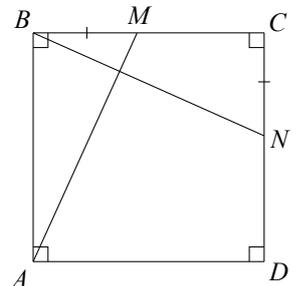
$$AB = BC \text{ (giả thiết)}$$

$$BM = CN \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle BCN \text{ (c-g-c)} \Rightarrow AM = BN \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Từ $\triangle ABM = \triangle BCN \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CBN}$ (hai góc tương ứng)

$$\text{Mà } \widehat{BAM} + \widehat{BMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBN} + \widehat{BMA} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BN$$



Hình 3

Bài 4: (Hình 4)

- a) Xét $\triangle ABF$ và $\triangle ADE$ có

$$\widehat{BAF} = \widehat{D} = 90^\circ$$

$$AB = AD \text{ (giả thiết)}$$

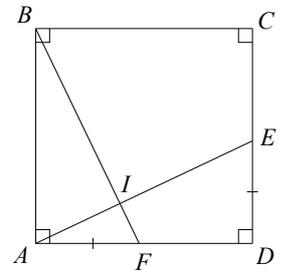
$$AF = DE \text{ (giả thiết)} \Rightarrow \triangle ABF = \triangle ADE \text{ (c - g - c)}$$

- b) Từ $\triangle ABF = \triangle ADE \Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{ABF}$ (hai góc tương ứng)

$$\widehat{ABF} + \widehat{AFB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{AFB} = 90^\circ$$

- c) Giả sử AE cắt BF tại I

$$\triangle AIF \text{ có } \widehat{IAF} + \widehat{IFA} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AIF \text{ vuông tại } I \text{ hay } AE \perp BF$$



Hình 4

Bài 5: (Hình 5)

- a) $ABCD$ là hình vuông nên $AB = BC = CD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} CD \Rightarrow AE = EB = BF = FC = CK = KD$$

Tứ giác $AECK$ có $AE \parallel CK$, $AE = CK$ nên là hình bình hành.

- b) Xét $\triangle DCF$ và $\triangle CBE$ có:

$$\widehat{DCF} = \widehat{B} = 90^\circ$$

$$DC = BC \text{ (giả thiết)}$$

$$CF = BE \text{ (chứng minh trên)} \Rightarrow \triangle DCF = \triangle CBE \text{ (c - g - c)}$$

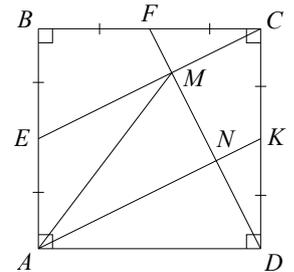
$$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{CFD} \text{ (hai góc tương ứng) mà } \widehat{BEC} + \widehat{BCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CFD} + \widehat{BCE} = 90^\circ$$

Vậy $\triangle MCF$ vuông tại M hay $DF \perp EC$ tại M .

- c) Ta có $\begin{cases} EC \parallel AK \\ EC \perp DF \end{cases} \Rightarrow AK \perp DF$

$\triangle CMD$ vuông tại M có MK là trung tuyến nên $MK = MD \Rightarrow \triangle MKD$ cân tại K

Mà KN là đường cao nên cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow MN = ND$



Hình 5

Bài 6: (Hình 6)

- a) CF , DF lần lượt là hai tia phân giác \widehat{C} , \widehat{D}

$$\text{Nên } \widehat{FCD} = \widehat{FDC} = 45^\circ$$

$$\triangle FDC \text{ có } \widehat{DFC} + \widehat{FDC} + \widehat{FCD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DFC} = 90^\circ$$

- b) Chứng minh tương tự $\triangle ABE$ vuông cân tại E

Xét $\triangle FDC$ và $\triangle EAB$ có:

$$\widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$$

$$AB = DC \text{ (giả thiết)}$$

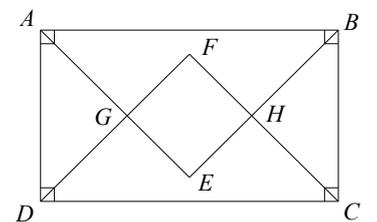
$$\widehat{EAB} = \widehat{FDC} = 45^\circ \Rightarrow \triangle FDC = \triangle EAB \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

- c) $\triangle BCH$ có $\widehat{HBC} = \widehat{HCB} = 45^\circ \Rightarrow \triangle HBC$ vuông cân tại $H \Rightarrow HB = HC$

Tứ giác $GEHF$ có 4 góc vuông nên là hình chữ nhật.

Lại có $FC = EB$ (hai cạnh tương ứng) mà $HC = HB$

Nên $FC - HC = EB - HB \Rightarrow FH = EH$ hay $GEHF$ là hình vuông.



Hình 6

Bài 7: (Hình 7)

a) Vì $AB = 2BC \Rightarrow BC = \frac{AB}{2} = AD$

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB = DC \Rightarrow \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC$

$\Rightarrow AI = DK = AD$. Tứ giác $AIKD$ có $AI \parallel DK, AI = DK$

Nên là hình bình hành, lại có $AD = AI$

Nên $AIKD$ là hình thoi.

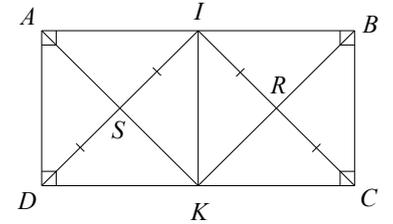
Lại có $\widehat{IAD} = 90^\circ \Rightarrow AIKD$ là hình vuông. Chứng minh tương tự cho tứ giác $BIKC$

b) Vì $AIKD$ là hình vuông nên DI là tia phân giác $\widehat{ADK} \Rightarrow \widehat{IDK} = 45^\circ$

Tương tự $\widehat{ICD} = 45^\circ$. $\triangle IDC$ cân có $\widehat{DIC} = 90^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

c) Vì $AIKD, BCKI$ là các hình vuông, nên hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $SI = SK = \frac{DI}{2}$ và $IR = RK = \frac{IC}{2} \Rightarrow ISKR$ là hình thoi.

Lại có $\widehat{DIC} = 90^\circ$ nên là hình vuông.



Hình 7

Bài 8: (Hình 8)

a) Tứ giác $DKMN$ có $\widehat{D} = \widehat{K} = \widehat{N} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

b) Vì $DKMN$ là hình chữ nhật nên $DF \parallel MH$

Xét $\triangle KFM$ và $\triangle NME$ có:

$\widehat{K} = \widehat{N} = 90^\circ$

$FM = ME$ (giả thiết)

$\widehat{KMF} = \widehat{ENM}$ (đồng vị) $\Rightarrow \triangle KFM = \triangle NME$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow KF = MN$ (hai cạnh tương ứng) mà $MN = DK \Rightarrow DF = 2DK$ và $MH = 2MN$

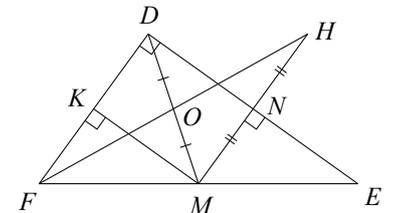
Do đó $DF = MH$. Tứ giác $DFMH$ có $DF \parallel MH, DF = MH$ nên là hình bình hành.

Nên hai đường chéo DM, FH cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường hay F, O, H thẳng hàng.

c) Đề hình chữ nhật $DKMN$ là hình vuông thì $DK = DN$ (1)

Mà $DK = \frac{1}{2} DF$ và $DN = KM = NE \Rightarrow DN = \frac{1}{2} DE$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow DF = DE \Rightarrow \triangle DFE$ cân thêm điều kiện cân tại D



Hình 8

Bài 9: (Hình 9)

a) $ABCD$ là hình bình hành nên hai đường chéo AC, BD

Cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường

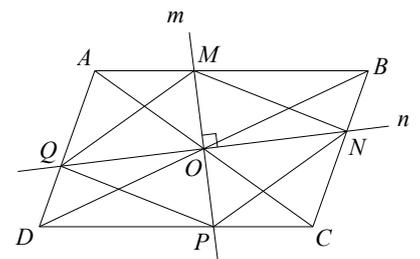
Xét $\triangle OBM$ và $\triangle ODP$ có:

$OB = OD$ (giả thiết)

$\widehat{OBM} = \widehat{ODP}$ (so le trong)

$\widehat{BOM} = \widehat{DOP}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle OBM = \triangle ODP$ (g – c – g)

$\Rightarrow OM = OP$ (hai cạnh tương ứng)



Hình 9

Chứng minh tương tự $\angle OAQ = \angle OCN$ ($g - c - g$) $\Rightarrow OQ = ON$ (hai cạnh tương ứng)
 $MNPQ$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

b) Hình bình hành $MNPQ$ có hai đường chéo $MP \perp NQ$ nên là hình thoi.

Bài 10: (Hình 10)

a) $AB = BD \Rightarrow \triangle ABD$ đều nên $\widehat{A} = \widehat{B}_1 = \widehat{D}$

mà $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{A}$

Xét $\triangle BND$ và $\triangle AMD$ có:

$BN = AM$ (giả thiết)

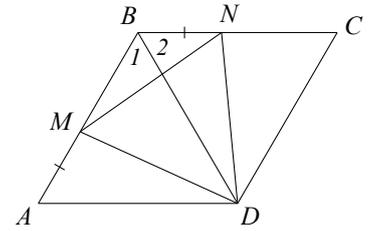
$\widehat{A} = \widehat{B}_2$ (chứng minh trên)

$AD = BD$ ($\triangle ABD$ đều) $\Rightarrow \triangle BND = \triangle AMD$ ($c - g - c$)

$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{BDN}$ (hai góc tương ứng)

b) Ta có $\triangle DMN$ có $DM = DN$ (hai cạnh tương ứng) nên $\triangle DMN$ cân tại D

Lại có $\widehat{ADM} = \widehat{BDN} \Rightarrow \widehat{MDN} = \widehat{MDB} + \widehat{BDN} = \widehat{MDB} + \widehat{ADM} = 60^\circ$. Vậy $\triangle DMN$ đều.



Hình 10

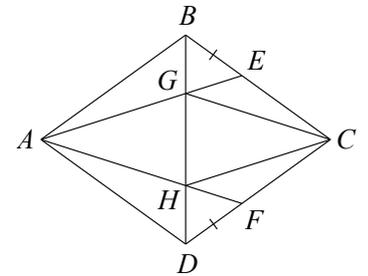
Bài 11: (Hình 11)

Ta có $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ tại trung điểm của mỗi đường nên BD là trung trực của AC

$\Rightarrow GA = GC, HA = HC$ (1)

và AC là trung trực của $BD \Rightarrow AG = AH, CG = CH$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AG = GC = CH = HA$ nên $AGCH$ là hình thoi.



Hình 11

Bài 12: (Hình 12)

a) $\triangle ABD$ có hai đường cao BM, DP cắt nhau tại H

Nên H là trực tâm $\triangle ABD$.

b) $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ tại O

nên A, C, O thẳng hàng (1)

Từ câu a $\Rightarrow AH \perp BD$ tại O nên $H \in AO$ (2)

Tương tự K là trực tâm $\triangle BCD \Rightarrow CK \perp BD$ tại O

Nên $K \in CO$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow A, H, K, C$ thẳng hàng.

c) Vì $ABCD$ là hình thoi nên hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường $\Rightarrow AC$ là trung trực của BD

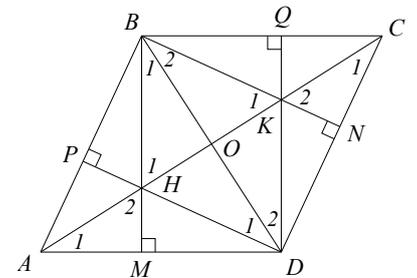
$\Rightarrow HB = HD \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$ và $KB = KD \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{D}_2$. Cộng theo vế $\widehat{MBN} = \widehat{PDQ}$

d) $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (4)

Tứ giác $APHM$ có $\widehat{PHM} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \widehat{BAD}$ (5)

Tứ giác $CQKN$ có $\widehat{QKN} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \widehat{BCD}$ (6)

Từ (4), (5), (6) $\Rightarrow \widehat{PHM} = \widehat{QKN}$.



Hình 12

e) $\widehat{A}_1 + \widehat{H}_2 = 90^\circ$ và $\widehat{C}_1 + \widehat{K}_2 = 90^\circ$ mà $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{H}_2 = \widehat{K}_2$

Lại có $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ (đối đỉnh) và $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$ (đối đỉnh) nên $\widehat{H}_1 = \widehat{K}_1 \Rightarrow \triangle BHK$ cân tại B
 $\Rightarrow BH = BK = KD = HD$ nên $BHKD$ là hình thoi.

Bài 13: (Hình 13)

a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle AHM$ có:

$\widehat{B} = \widehat{H} = 90^\circ$

AM là cạnh chung

$\widehat{AMB} = \widehat{AMH}$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle AHM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$AH = AB$ (hai cạnh tương ứng) mà $AB = AD \Rightarrow AH = AD$

b) Xét $\triangle DAK$ và $\triangle HAK$ có:

$\widehat{D} = \widehat{H} = 90^\circ$

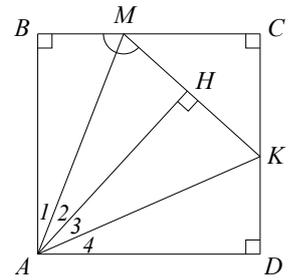
AK là cạnh chung

$AD = AH$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \triangle DAK = \triangle HAK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

c) Từ $\triangle ABM = \triangle AHM \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (hai góc tương ứng)

Từ $\triangle DAK = \triangle HAK \Rightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ (hai góc tương ứng)

Vậy $\widehat{MAK} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \frac{1}{2} \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$.



Hình 13

Bài 14: (Hình 14)

a) Xét $\triangle ADI$ và $\triangle AHI$ có:

$\widehat{H} = \widehat{D} = 90^\circ$

AI là cạnh chung

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (giả thiết) $\Rightarrow \triangle ADI = \triangle AHI$ (cạnh huyền – góc nhọn)

b) Từ $\triangle ADI = \triangle AHI \Rightarrow AH = AD$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AD = AB \Rightarrow AH = AB$

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle AHK$ có:

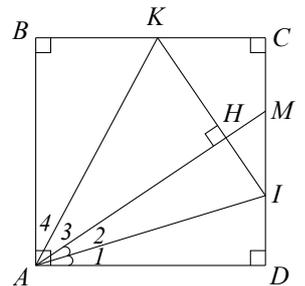
$\widehat{B} = \widehat{H} = 90^\circ$

AK là cạnh chung

$AB = AH$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \triangle ABK = \triangle AHK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

c) Từ $\triangle ABK = \triangle AHK \Rightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ (hai góc tương ứng)

Khi đó $\widehat{IAK} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \frac{1}{2} \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$



Hình 14

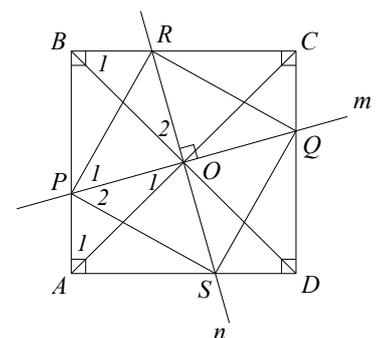
Bài 15: (Hình 15)

a) Ta có $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = 90^\circ$ và $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

Mặt khác $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = 45^\circ$

Xét $\triangle AOP$ và $\triangle BOR$ có

$OA = OB$ (giả thiết)



Hình 15

Vậy $ABMD$ là hình thang cân.

- c) $\triangle KAD$ có $\widehat{KAD} = \widehat{KDA}$ nên là tam giác cân.

Xét $\triangle MBK$ và $\triangle MCD$ có:

$$MB = MC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

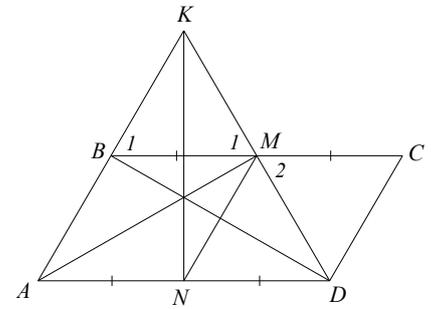
$$\widehat{B}_1 = \widehat{C} \text{ (so le trong)} \Rightarrow \triangle MBK = \triangle MCD \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow MK = MD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Khi đó AM là đường trung tuyến,

Và $BK = CD$ (hai cạnh tương ứng) mà $CD = AB \Rightarrow AB = BK \Rightarrow DB$ là đường trung tuyến.

$\triangle KAD$ có ba đường trung tuyến AM, BD, KN nên đồng quy.



Hình 17

Bài 18: (Hình 18)

- a) Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường nên là hình bình hành.

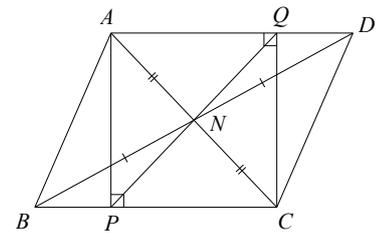
b) Ta có $\begin{cases} AP \perp BC \\ AQ \parallel BC \end{cases} \Rightarrow AP \perp AQ$

Tứ giác $APCQ$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Khi đó hai đường chéo AC, PQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, mà

$$NA = NC \Rightarrow N \text{ là trung điểm của } PQ \Rightarrow P, N, Q \text{ thẳng hàng.}$$

- c) Để tứ giác $ABCD$ là hình vuông thì ta cần $AB \perp BC, AB = BC$ hay $\triangle ABC$ vuông cân tại B .



Hình 18

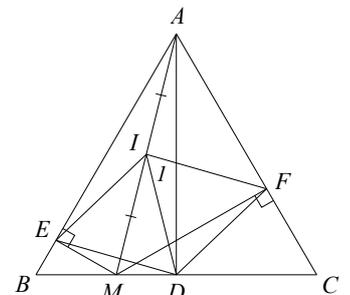
Bài 19: (Hình 19)

- a) $\triangle AEM$ vuông tại E có EI là trung tuyến nên $EI = \frac{1}{2} AM$.

$$\triangle AFM \text{ vuông tại } F \text{ có } FI \text{ là trung tuyến nên } FI = \frac{1}{2} AM.$$

$$\triangle ABC \text{ đều nên } AD \text{ là đường trung tuyến cũng là đường cao} \\ \Rightarrow AD \perp BC$$

$$\triangle ADM \text{ vuông tại } D \text{ có } DI \text{ là trung tuyến nên } DI = \frac{1}{2} AM.$$



Hình 19

Vậy ba điểm D, E, F cách đều điểm I một khoảng bằng $\frac{AM}{2}$.

- b) $\triangle DIE$ có $DI = EI$ nên là tam giác cân.

$$\text{Lại có } \triangle AIE \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{EIM} = 2\widehat{EAI} \text{ (góc ngoài của } \triangle AEI)$$

$$\text{Và } \triangle ADI \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{DIM} = 2\widehat{DAI} \text{ (góc ngoài của } \triangle ADI)$$

$$\text{Khi đó } \widehat{EID} = \widehat{EIM} + \widehat{DIM} = 2\widehat{EAI} + 2\widehat{DAI} = 2\widehat{BAD}$$

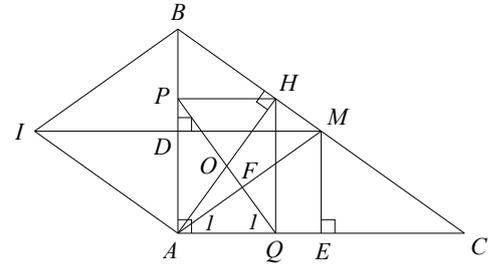
$\triangle ABC$ đều nên AD là trung tuyến còn là tia phân giác

$$\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{DAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ. \text{ Vậy } \widehat{EID} = 2\widehat{BAD} = 2.30^\circ = 60^\circ$$

- c) Ta có $\triangle IAF$ có $IA = IF \Rightarrow \triangle IAF$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{IFA}$
 Nên $\widehat{I_1} = \widehat{MIF} - \widehat{MID} = 2\widehat{IAF} - 2\widehat{IAD} = 2\widehat{DAF} = 2.30^\circ = 60^\circ$
 $\triangle IDF$ cân tại I lại có $\widehat{I_1} = 60^\circ \Rightarrow \triangle IDF$ đều
 $\Rightarrow DF = IF = EI = ED$ nên tứ giác $DEIF$ là hình thoi.

Bài 20: (Hình 20)

- a) Tứ giác $ADME$ có $\widehat{DAE} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$
 Nên $ADME$ là hình chữ nhật.
 b) Vì $\begin{cases} DM \perp AB \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow DM \parallel AC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{BMD}$ (so le)

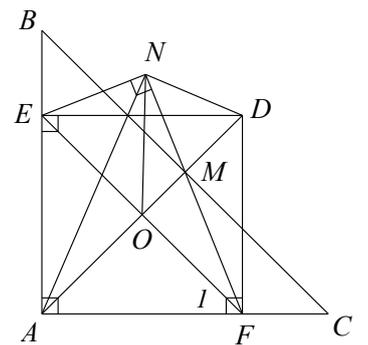


Hình 20

- Xét $\triangle DMB$ và $\triangle ECM$ có:
 $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$
 $BM = CM$ (giả thiết)
 $\widehat{DMB} = \widehat{C}$ (so le trong) $\Rightarrow \triangle DMB = \triangle ECM$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow ME = BD$ (hai cạnh tương ứng) mà $ME = AD \Rightarrow AD = BD$
 Tứ giác $AMBI$ có hai đường chéo AB, MI cắt nhau tại D là trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Lại có $MI \perp AB \Rightarrow AMBI$ là hình thoi.
 c) Để $AMBI$ là hình vuông thì $AM \perp BM$ hay AM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $\triangle ABC$ vuông cân tại A .
 d) Giả sử AM cắt PQ tại F và PQ cắt AH tại O
 Khi đó $\triangle OAQ$ có $OA = OQ \Rightarrow \triangle OAQ$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{Q_1} = \widehat{OAQ}$
 $\triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}$
 Nên $\widehat{A_1} + \widehat{Q_1} = \widehat{C} + \widehat{OAQ} = 90^\circ \Rightarrow \triangle FAQ$ vuông tại $F \Rightarrow AM \perp PQ$.

Bài 21: (Hình 21)

- a) Tứ giác $AEDF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AED} = \widehat{AFD} = 90^\circ$
 nên là hình chữ nhật.
 $\triangle ABC$ vuông cân tại A có AM là trung tuyến nên
 AM cũng là đường phân giác \widehat{EAF} .
 Hình chữ nhật $AEDF$ có đường chéo AD là tia phân giác
 \widehat{EAF} nên là hình vuông.
 b) $\triangle AEF$ vuông tại A có $AE = AF$ nên vuông cân tại A
 $\Rightarrow \widehat{F_1} = 45^\circ = \widehat{C}$ mà $\widehat{F_1}, \widehat{C}$ đồng vị nên $EF \parallel BC$.
 c) Gọi O là giao của AD với $EF \Rightarrow OE = OD = OF = OA$
 $\triangle ENF$ vuông tại N có NO là đường trung tuyến nên $NO = EO = FO$
 $\triangle AND$ có NO là đường trung tuyến mà $NO = \frac{AD}{2} \Rightarrow \triangle AND$ vuông tại N .



Hình 21

Bài 22: (Hình 22)

- a) $\triangle ABC$ cân tại A nên AH vừa là trung tuyến cũng là đường cao.
 $\triangle AHC$ vuông tại H có HK là trung tuyến nên $HK = KC$
 $\Rightarrow \triangle KHC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{H_1}$
 Mà $\widehat{C} = \widehat{B} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{H_1}$ mà $\widehat{B}, \widehat{H_1}$ đồng vị
 nên $HK \parallel AB$ hay $AKHB$ là hình thang.
 Tứ giác $ABEC$ có hai đường chéo AE, BC cắt nhau tại H
 là trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.
 Lại có $AE \perp BC \Rightarrow ABEC$ là hình thoi.

- b) Ta có $\begin{cases} AD \perp AH \\ HC \perp AH \end{cases} \Rightarrow AD \parallel HC$

$$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{A_1} \text{ (so le trong)}$$

Xét $\triangle KAD$ và $\triangle KCH$ có

$$\widehat{K_1} = \widehat{K_2} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$KA = KC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (so le trong)} \Rightarrow \triangle KAD = \triangle KCH \text{ (g - c - g)}$$

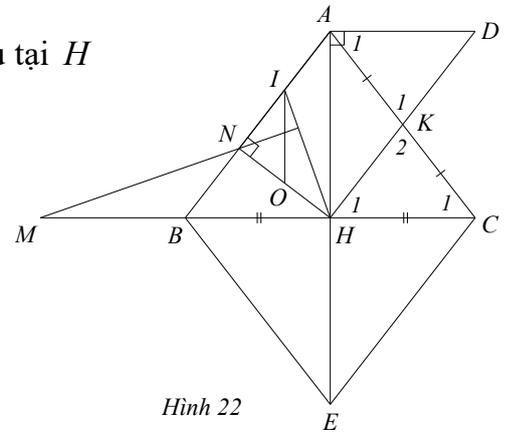
$$\Rightarrow AD = HC \text{ (hai cạnh tương ứng) mà } HC = BH \Rightarrow AD = BH$$

- c) Lấy O là trung điểm của NH . Khi đó OI là đường trung bình $\triangle ANH$

$$\Rightarrow OI \parallel AH \text{ mà } AH \perp BC \Rightarrow OI \perp BC$$

$$\triangle BIH \text{ có } O \text{ là trực tâm nên } BO \perp IH$$

Mà BO là đường trung bình $\triangle HMN$ nên $BO \parallel MN$. Vậy $MN \perp IH$.



Hình 22

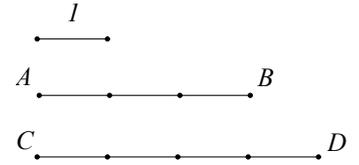
CHƯƠNG 4. ĐỊNH LÝ THALÈS

Bài 1. ĐỊNH LÝ THALÈS TRONG TAM GIÁC.

I. LÝ THUYẾT.

1) Đoạn thẳng tỉ lệ.

Ví dụ 1: Cho các đoạn thẳng ở Hình 1.



Hình 1

Nếu chọn độ dài đoạn trên cùng là 1. Thì tỉ số $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$.

Kết luận:

- ♣ Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Ví dụ 2: Cho bốn đoạn thẳng $AB = 2cm, CD = 4cm, EF = 5cm, MN = 10cm$

Khi đó ta có hai tỉ số $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ và $\frac{EF}{MN} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Thấy rằng hai tỉ số này bằng nhau

Nên tạo thành một tỉ lệ thức $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{MN}$.

Kết luận:

- ♣ Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ

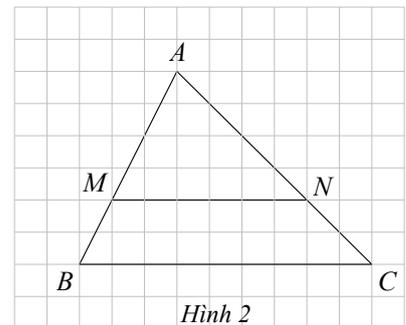
thức $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

2) Định lý Talès trong tam giác.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$, từ điểm $M \in AB$ vẽ đường thẳng song song với BC cắt AC tại N .

Như Hình 2. Khi đó hãy tính các tỉ số sau

- $\frac{AM}{AB}$ và $\frac{AN}{AC}$
- $\frac{AM}{MB}$ và $\frac{AN}{NC}$
- $\frac{MB}{AB}$ và $\frac{NC}{AC}$



Hình 2

Giải

- Ta được $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ và $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
- Ta được $\frac{AM}{MB} = 2$ và $\frac{AN}{NC} = 2 \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$
- Ta được $\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$ và $\frac{NC}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$

Kết luận:

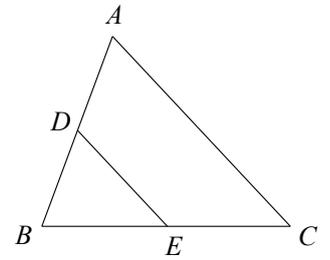
- ♣ Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ. (*Định lý Talès thuận*)
- ♣ Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại. (*Định lý Talès đảo*)

Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ và $DE \parallel AC$ như Hình 3.

Lập các tỉ số theo định lí Talès.

Giải

$$\triangle ABC \text{ có } DE \parallel AC \text{ nên } \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}; \frac{DA}{AB} = \frac{EC}{BC}; \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}.$$



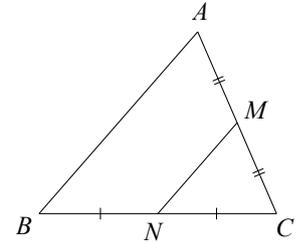
Hình 3

Ví dụ 5: Cho Hình 4. Chứng minh rằng $MN \parallel AB$.

Giải

$$\text{Ta có } AM = MC \Rightarrow \frac{AM}{MC} = 1 \text{ và } BN = NC \Rightarrow \frac{BN}{NC} = 1$$

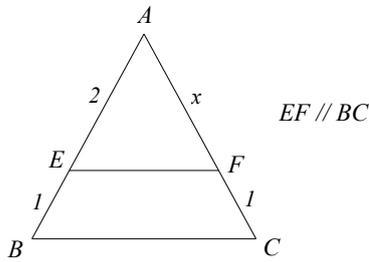
$$\triangle ABC \text{ có } \frac{AM}{MC} = \frac{BN}{NC} = 1 \Rightarrow MN \parallel AB.$$



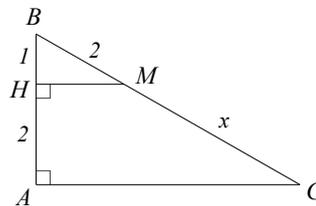
Hình 4

II. LUYỆN TẬP.

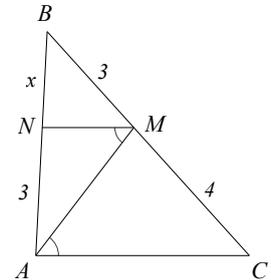
Bài 1: Tìm x trong các hình sau



Hình 5



Hình 6



Hình 7

Giải

$$\text{Hình 5. } \triangle ABC \text{ có } EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Hình 6. Vì } \begin{cases} HM \perp AB \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow HM \parallel AC \Rightarrow \frac{BH}{HA} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Hình 7. Vì } \widehat{NMA} = \widehat{MAC} \text{ mà } \widehat{NMA}, \widehat{MAC} \text{ so le trong } \Rightarrow MN \parallel AC$$

$$\text{Khi đó } \frac{BN}{NA} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Qua trọng tâm G kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại D, E . (Hình 8)

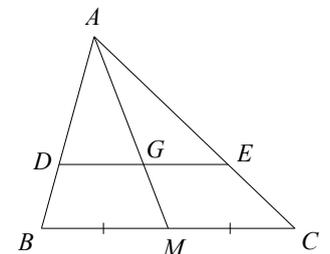
a) Chứng minh $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$

b) Chứng minh $AE = 2EC$.

Giải

a) $\triangle ABM$ có $DG \parallel BM \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$

b) $\triangle AMC$ có $GE \parallel MC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow AE = 2EC$.



Hình 8

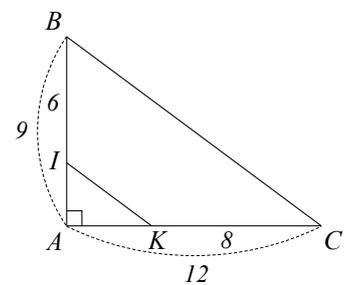
Bài 3: Cho Hình 9. Biết $AB = 9$, $AC = 12$, $IB = 6$, $KC = 8$.

Chứng minh $IK \parallel BC$.

Giải

$$\triangle ABC \text{ có } \frac{IB}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{KC}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

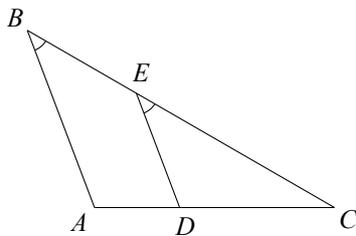
$$\text{Nên } \frac{IB}{AB} = \frac{KC}{AC} \Rightarrow IK \parallel BC.$$



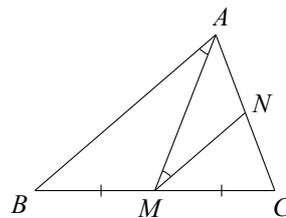
Hình 9

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

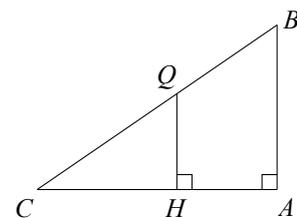
Bài 1: Viết các hệ thức theo Định lí Talès trong các hình sau:



Hình 1

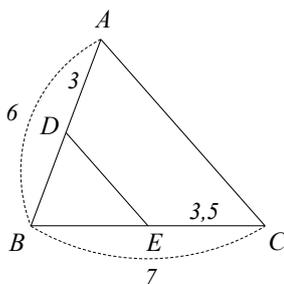


Hình 2

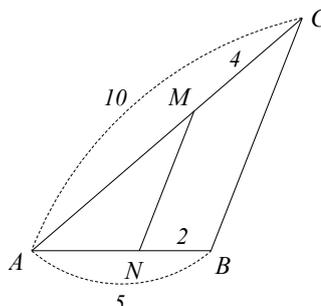


Hình 3

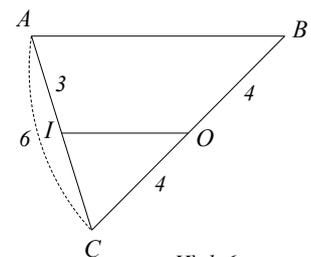
Bài 2: Cho Hình 4. Chứng minh $DE \parallel AC$.



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Bài 3: Cho Hình 5. Chứng minh $BC \parallel MN$.

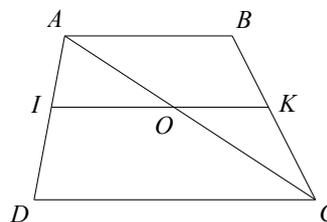
Bài 4: Cho Hình 6. Chứng minh $AB \parallel IO$.

Bài 5: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Lấy điểm I trên cạnh AB , từ I kẻ đường thẳng song song với CD cắt AC , BC lần lượt tại O và K . (Hình 7)

a) Chứng minh $\frac{AI}{ID} = \frac{AO}{OC}$.

b) Chứng minh $\frac{AO}{OC} = \frac{BK}{KC}$

c) Chứng minh $AI \cdot KC = ID \cdot BK$



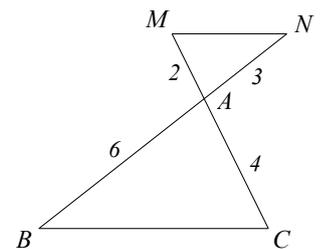
Hình 7

Bài 6: Cho Hình 8.

a) Trên tia AC lấy D sao cho $AD = 2$

Trên tia AB lấy E sao cho $AE = 3$. Chứng minh $MN \parallel DE$

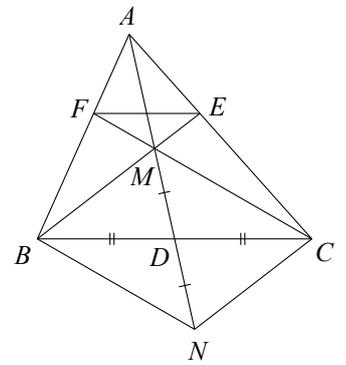
b) Chứng minh $MN \parallel BC$.



Hình 8

Bài 7: Cho $\triangle ABC$, AD là đường trung tuyến, M là điểm nằm trên đoạn AD . BM cắt AC tại E , CM cắt AB tại F . Lấy điểm N trên tia đối của tia DM sao cho $DN = DM$. Chứng minh $EF \parallel BC$.

(Hình 9)

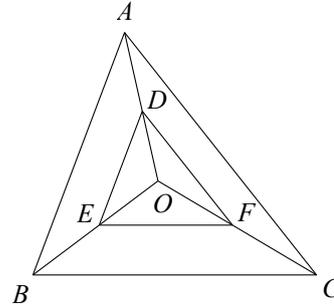


Bài 8: Cho $\triangle ABC$. Điểm O nằm trong tam giác. Lấy điểm D trên OA , từ D kẻ $DE \parallel AB$ ($E \in OB$) và $DF \parallel AC$ ($F \in OC$)

a) Chứng minh $\frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OA}$. (Hình 10)

b) Chứng minh $\frac{OF}{OC} = \frac{OD}{OA}$.

c) Chứng minh $EF \parallel BC$.



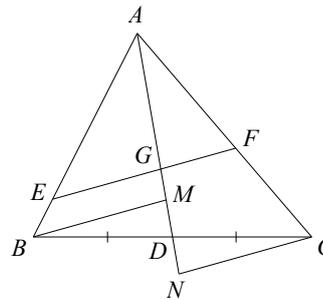
Hình 10

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ có AD là trung tuyến.

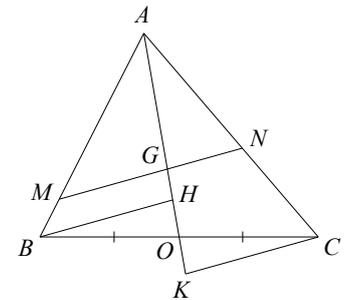
Trọng tâm là điểm G , đường thẳng đi qua G cắt AB , AC lần lượt tại E , F . Từ B và C kẻ các đường thẳng song song với EF cắt AD lần lượt tại M , N . (Hình 11)

a) Chứng minh $\frac{BE}{AE} = \frac{MG}{AG}$.

b) Chứng minh $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$.



Hình 11



Hình 12

Bài 10: Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AO , trọng tâm G , đường thẳng đi qua G cắt AB , AC lần lượt tại M , N . Từ B , C kẻ các đường thẳng song song với MN cắt AO lần lượt tại H , K .

Chứng minh $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$. (Hình 12)

Bài 2. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

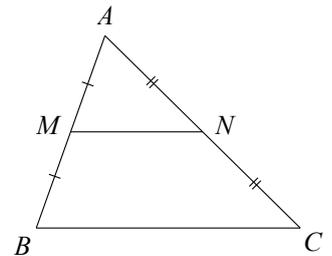
I. LÝ THUYẾT.

1) Định nghĩa đường trung bình của tam giác.

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$, Lấy M là trung điểm của AB ,

N là trung điểm của AC . (Hình 1)

Khi đó đoạn thẳng MN gọi là đường trung bình của $\triangle ABC$.



Hình 1

Kết luận:

- ♣ Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm Hai cạnh của tam giác.

Ví dụ 2: Hãy chỉ ra đường trung bình của tam giác trong các hình sau

Giải

Hình 2.

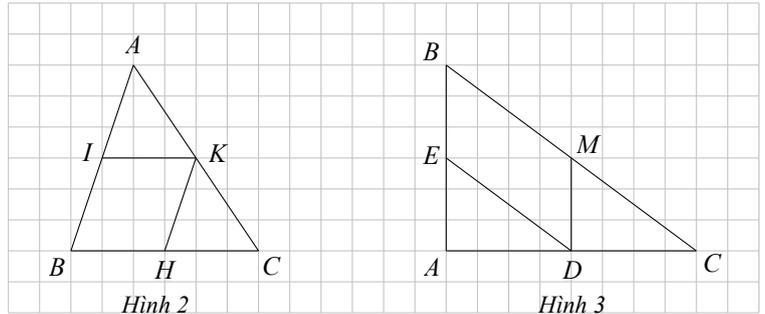
IK là đường trung bình $\triangle ABC$.

KH là đường trung bình $\triangle ABC$.

Hình 3.

MD là đường trung bình $\triangle ABC$.

DE là đường trung bình $\triangle ABC$.



Hình 2

Hình 3

2) Tính chất đường trung bình của tam giác.

Kết luận:

- ♣ Đường trung bình của tam giác song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh đó

Cụ thể: $\triangle ABC$ có MN là đường trung bình thì $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{BC}{2}$ (Hình 1).

- ♣ Trong một tam giác, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì nó đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

Cụ thể: $\triangle ABC$ có $\begin{cases} DA = DB \\ DE \parallel BC \end{cases} \Rightarrow AE = CE$. (Hình 4).

Lúc này DE sẽ là đường trung bình $\triangle ABC$.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$, M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .

Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại D . (Hình 5)

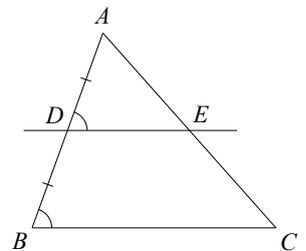
- Chứng minh $MD = AN$.
- Chứng minh $MDCN$ là hình bình hành.

Giải

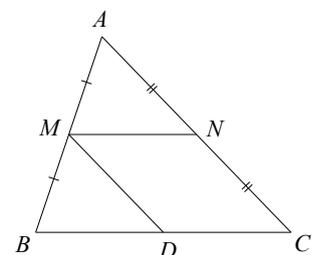
a) $\triangle ABC$ có $\begin{cases} MA = MB \\ MD \parallel AC \end{cases} \Rightarrow BD = DC$ hay D là trung điểm BC .

Nên DM là đường trung bình $\triangle ABC \Rightarrow MD = \frac{AC}{2} = AN$.

- Tứ giác $MDCN$ có $MD \parallel NC, MD = NC$ nên là hình bình hành.



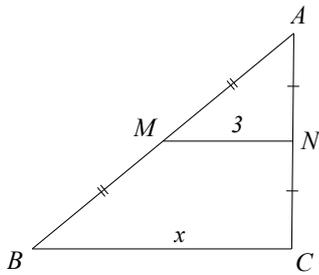
Hình 4



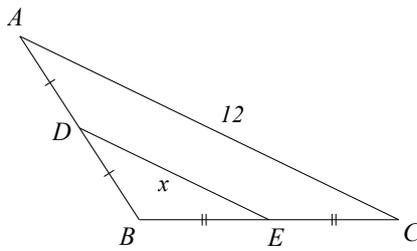
Hình 5

II. LUYỆN TẬP.

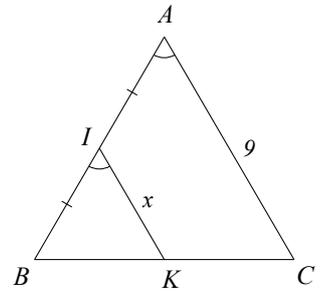
Bài 1: Tìm số đo x trong các hình sau:



Hình 6



Hình 7



Hình 8

Giải

Hình 6. $\triangle ABC$ có $\begin{cases} MA = MB \\ NA = NC \end{cases} \Rightarrow MN$ là đường trung bình $\Rightarrow BC = 2MN \Rightarrow x = 2.3 = 6$

Hình 7. $\triangle ABC$ có $\begin{cases} DA = DB \\ EB = EC \end{cases} \Rightarrow DE$ là đường trung bình $\Rightarrow DE = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Hình 8. Ta có $\widehat{A} = \widehat{I}$ mà \widehat{A}, \widehat{I} đồng vị nên $IK \parallel AC$

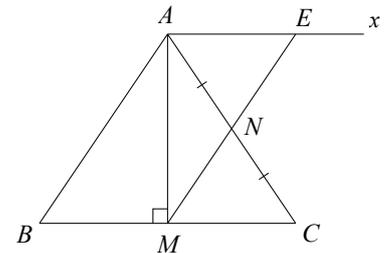
$\triangle ABC$ có $\begin{cases} IB = IA \\ IK \parallel AC \end{cases} \Rightarrow KB = KC$ hay IK là đường trung bình $\Rightarrow IK = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2}$

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AM , N là trung điểm của AC . Từ A kẻ tia Ax song song với BC cắt MN tại E . (Hình 9)

- Chứng minh $MB = MC$.
- Chứng minh $ME \parallel AB$.
- Chứng minh $AE = MC$.

Giải

- $\triangle ABC$ cân tại A nên AM vừa là đường cao cũng là trung tuyến $\Rightarrow BM = CM$.
- $\triangle ABC$ có $\begin{cases} MB = MC \\ NA = NC \end{cases} \Rightarrow MN$ là đường trung bình $\Rightarrow MN \parallel AB$ hay $ME \parallel AB$.
- Tứ giác $ABME$ có $AE \parallel BM$, $AB \parallel ME$ nên $ABME$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = BM = MC$.



Hình 9

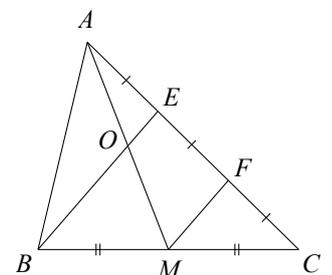
Bài 3: Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Trên AC lấy điểm E, F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt AM tại O . (Hình 10)

- Chứng minh $OEFM$ là hình thang.
- Chứng minh $BO = 3.OE$

Giải

- $\triangle BCE$ có $\begin{cases} EF = FC \\ BM = MC \end{cases} \Rightarrow MF$ là đường trung bình $\Rightarrow MF \parallel BE$

Nên tứ giác $OEFM$ là hình thang.

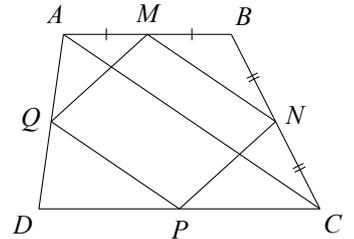


Hình 10

b) $\triangle AMF$ có $\begin{cases} EA = EF \\ OE \parallel MF \end{cases} \Rightarrow OA = OM$ nên OE là đường trung bình $\Rightarrow OE = \frac{1}{2}MF$ mà $MF = \frac{1}{2}BE \Rightarrow OE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BE = \frac{1}{4}BE \Rightarrow OB = \frac{3}{4}BE \Rightarrow BO = 3OE$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

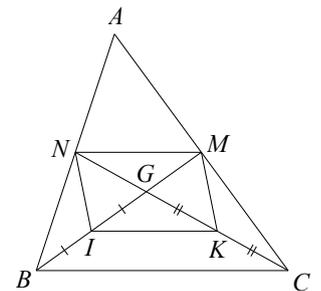
Bài 1: Cho hình thang $ABCD$. Lấy M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA . (Hình 1)



Hình 1

- Chứng minh $MN \parallel AC$.
- Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

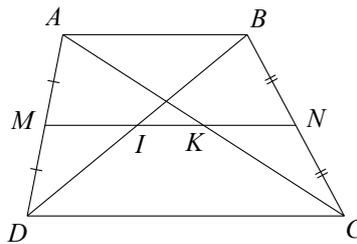
Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của GB, GC . (Hình 2)



Hình 2

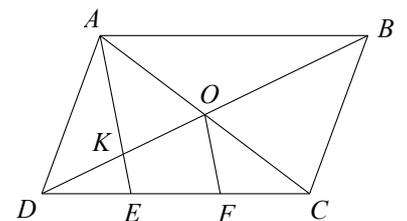
- Chứng minh $MN = IK$.
- Tứ giác $MNIK$ là hình gì?

Bài 3: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC và $MN \parallel AB$. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của MN với BD và AC . Biết $AB = 6\text{cm}$. (Hình 3)



Hình 3

- Tính MI .
- Chứng minh $MI = KN$.

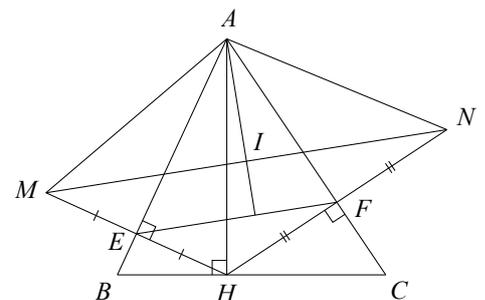


Hình 4

Bài 4: Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Trên cạnh CD lấy điểm E sao cho $ED = \frac{DC}{3}$, AE cắt BD tại K . Từ O kẻ đường thẳng song song với AE cắt CD tại F . (Hình 4)

- Chứng minh OF là đường trung bình $\triangle ACE$.
- Chứng minh $DE = EF = FC$.
- Chứng minh $KO = KD$.

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH . Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC . Lấy điểm M sao cho E là trung điểm của HM , điểm N sao cho F là trung điểm của HN . I là điểm trung điểm của MN . (Hình 5)

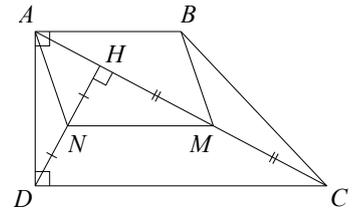


Hình 5

- Chứng minh $\triangle AMN$ cân.
- Chứng minh $MN \parallel EF$.
- Chứng minh $AI \perp EF$.

Bài 6: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu của D trên AC và M, N lần lượt là trung điểm của HC, HD .

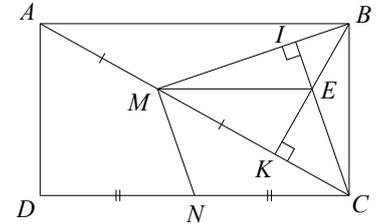
- Chứng minh $MN = AB$. (Hình 6)
- Chứng minh $ABMN$ là hình bình hành.
- Chứng minh $\widehat{BMD} = 90^\circ$.



Hình 6

Bài 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AK, DC . Kẻ $CI \perp BM$ ($I \in BM$) và CI cắt BK tại E . (Hình 7)

- Chứng minh $EB = EK$.
- Chứng minh $MNCE$ là hình bình hành.
- Chứng minh $MN \perp BM$.

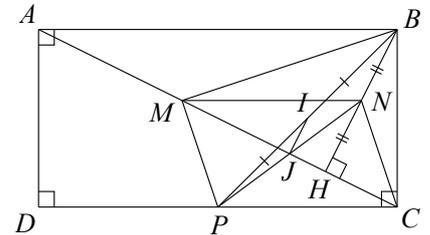


Hình 7

Bài 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Vẽ $BH \perp AC$.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AH, BH, CD .

- Chứng minh $MNCP$ là hình bình hành. (Hình 8)
- Chứng minh $MP \perp BM$.
- Gọi I là trung điểm của BP , J là giao điểm của MC và NP . Chứng minh $IJ \parallel HN$.

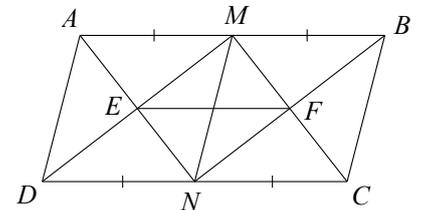


Hình 8

Bài 9: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi

M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (Hình 9)

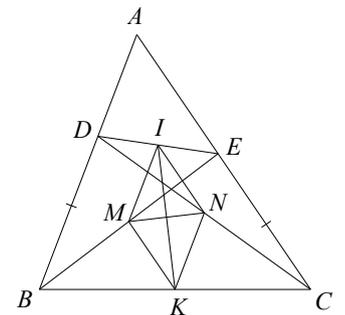
- Chứng minh $AMND$ là hình thoi.
- Chứng minh $AN \parallel MC$.
- Gọi E là giao điểm của AN và DM , F là giao điểm của MC với BN . Chứng minh $EF \parallel DC$.
- Tìm điều kiện của hình bình hành $ABCD$ để $MENF$ là hình vuông.



Hình 9

Bài 10: Cho $\triangle ABC$. Lấy các điểm D, E lần lượt trên AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi M, N, I, K lần lượt là trung điểm của BE, CD, DE và BC . (Hình 10)

- Chứng minh $MK = IN$.
- Chứng minh $MN \perp IK$.

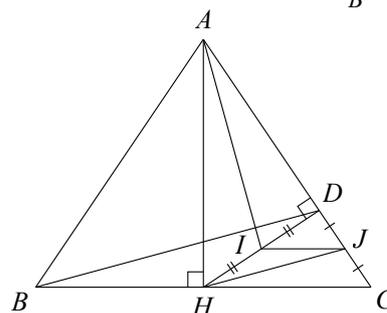


Hình 10

Bài 11: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH .

Gọi D là hình chiếu của H trên AC . Lấy I, J lần lượt là trung điểm của HD, DC . (Hình 11)

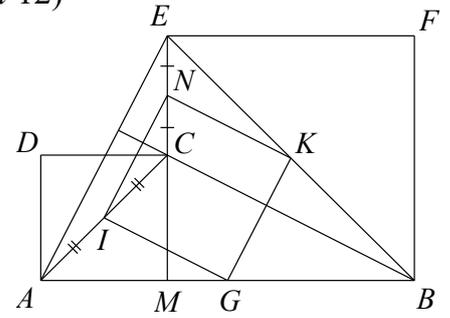
- Chứng minh $IJ \perp AH$.
- Chứng minh $AI \perp BD$.



Hình 11

Bài 12: Cho đoạn thẳng AB và một điểm M thay đổi trên đoạn AB ($M \neq A, B$). Vẽ các hình vuông $AMCD$ và $BMEF$ về cùng một phía đối với AB . (Hình 12)

- Chứng minh $AE = BC$, $AE \perp BC$.
- Gọi G, I, N, K lần lượt là trung điểm của AB, AC, CE, EB . Chứng minh $GINK$ là hình vuông



Hình 12

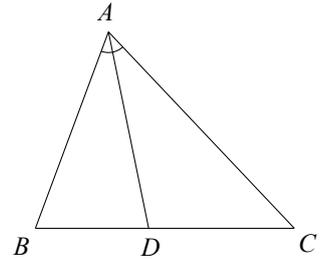
Bài 3. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

I. LÝ THUYẾT.

1) Tính chất đường phân giác của tam giác.

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$, tia phân giác \widehat{BAC} cắt BC tại D .

Khi đó ta có các tỉ số sau $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{CA}$ hoặc $\frac{BD}{BA} = \frac{DC}{CA}$.



Hình 1

Kết luận:

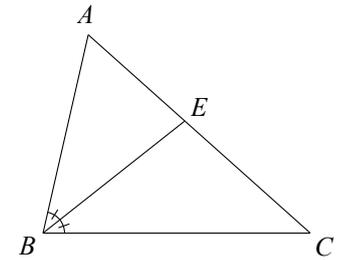
- ♣ Trong một tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng đó.
- ♣ Trong $\triangle ABC$ nếu $D \in BC$ và thỏa mãn $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{CA}$ thì AD là đường phân giác của \widehat{A} .

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ có BE là tia phân giác \widehat{ABC} .

Tìm tỉ số bằng với tỉ số $\frac{AE}{AB}$.

Giải

BE là phân giác $\triangle ABC$ nên $\frac{AE}{AB} = \frac{CE}{CB}$.



Hình 2

Ví dụ 3: Cho Hình 3. Tìm số đo x .

Giải

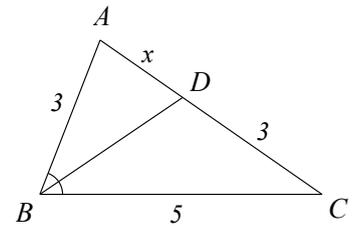
$\triangle ABC$ có BD là đường phân giác \widehat{ABC}

Nên $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{5}$.

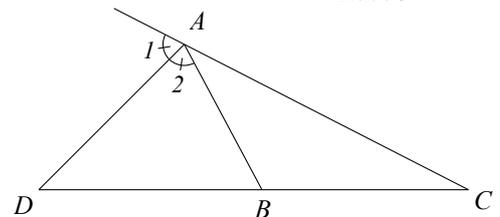
- ♣ Đường phân giác góc ngoài của một tam giác cũng có tính chất tương tự. Cụ thể: (Hình 4)

$\triangle ABC$ có AD là tia phân giác góc ngoài.

$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{BA}{CA}$ hoặc $\frac{DB}{BA} = \frac{DC}{CA}$



Hình 3



Hình 4

II. LUYỆN TẬP.

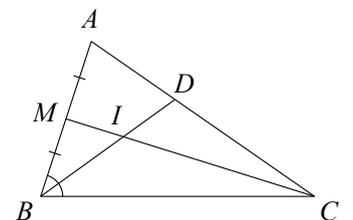
Bài 1: Cho $\triangle ABC$ cân tại C có $AB = 3cm$, $AC = 5cm$. Đường phân giác AD cắt đường trung tuyến CM tại I . (Hình 5)

- Tính tỉ số $\frac{IC}{IM}$.
- Tính tỉ số $\frac{CD}{CB}$.

Giải

a) Ta có $MA = MB = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$. và $\triangle ABC$ cân tại C nên $AC = BC = 5cm$

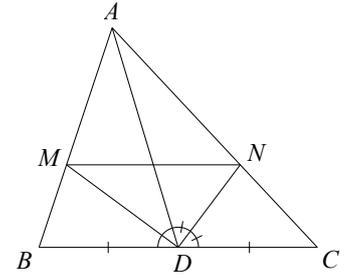
$\triangle BMC$ có BI là đường phân giác nên $\frac{IC}{BC} = \frac{IM}{BM} \Rightarrow \frac{IC}{IM} = \frac{BC}{BM} = 5 : \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$.



Hình 5

b) $\triangle ABC$ có BD là đường phân giác nên $\frac{DC}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{5} = \frac{AD}{3} = \frac{DC+AD}{5+3} = \frac{5}{8}$

Bài 2: Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AD . Vẽ tia phân giác \widehat{ADB} cắt AB tại M , tia phân giác \widehat{ADC} cắt AC tại N . (Hình 6)



Hình 6

a) Chứng minh $\frac{MB}{MA} = \frac{BD}{AD}$.

b) Chứng minh $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$.

c) Chứng minh $MN \parallel BC$.

Giải

a) $\triangle ABD$ có DM là đường phân giác nên $\frac{MB}{BD} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BD}{AD}$. (1)

b) $\triangle ADC$ có DN là đường phân giác nên $\frac{NC}{CD} = \frac{NA}{AD} \Rightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{CD}{AD}$. (2)

Mà $BD = CD$ (3). Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$.

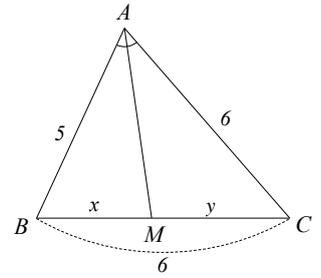
c) $\triangle ABC$ có $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA} \Rightarrow MN \parallel BC$.

Bài 3: Tìm x, y trong Hình 7.

Giải

$\triangle ABC$ có AM là đường phân giác nên

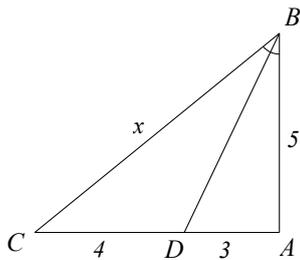
$$\frac{BM}{AB} = \frac{CM}{AC} = \frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{x+y}{5+6} = \frac{6}{11} \Rightarrow x = \frac{30}{11}; y = \frac{36}{11}.$$



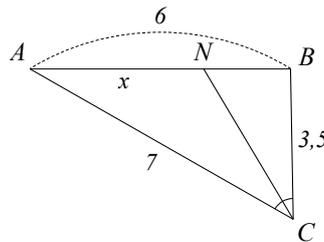
Hình 7

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

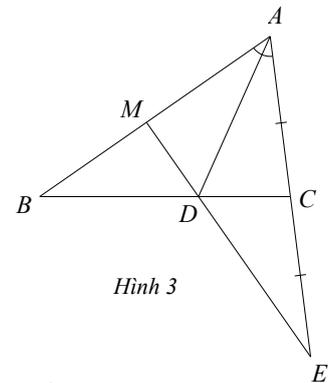
Bài 1: Tìm x trong các hình sau



Hình 1



Hình 2



Hình 3

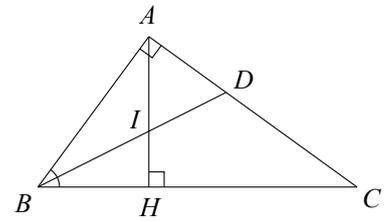
Bài 2: Cho $\triangle ABC$, phân giác AD . Trên tia đối của tia CA lấy E sao cho $CE = CA$. ED cắt AB tại M . (Hình 3)

a) Tính tỉ số $\frac{BD}{CD}$.

b) Tính tỉ số $\frac{AM}{AE}$.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao, BD là đường phân giác \widehat{ABC} với $D \in AC$. AH cắt BD tại I .

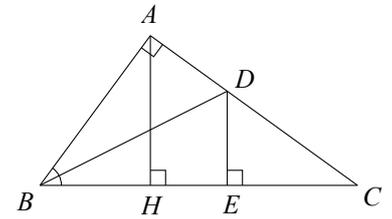
- Tính tỉ số $\frac{AI}{AB}$ và $\frac{AD}{AB}$. (Hình 4)
- Chứng minh $\triangle AID$ cân tại A .
- Chứng minh $\frac{IH}{BH} = \frac{DC}{BC}$.



Hình 4

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác \widehat{ABC} cắt AC tại D . (Hình 5)

- Tính tỉ số $\frac{AD}{DC}$.
- Từ D hạ $DE \perp BC$ ($E \in BC$). Chứng minh $\frac{AB}{BC} = \frac{HE}{EC}$.

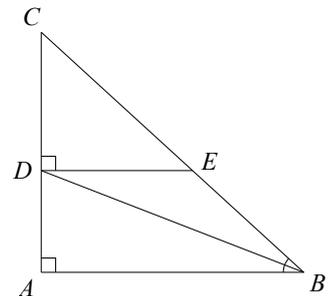


Hình 5

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , phân giác \widehat{ABC} cắt AC tại D .

Từ D vẽ đường thẳng vuông góc với AC , đường thẳng này cắt BC tại E . (Hình 6)

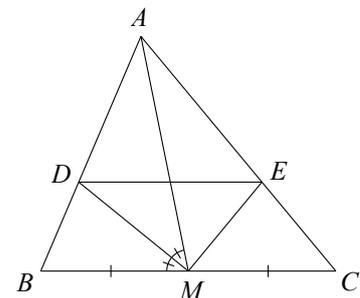
- Chứng minh $DC \cdot AB = DA \cdot CB$
- Chứng minh $\frac{CB}{AB} = \frac{CE}{BE}$.



Hình 6

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM và MD là đường phân giác \widehat{AMB} . Từ D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại E . (Hình 7)

- Chứng minh $\frac{EA}{EC} = \frac{AM}{BM}$.
- Chứng minh ME là đường phân giác \widehat{AMC} .



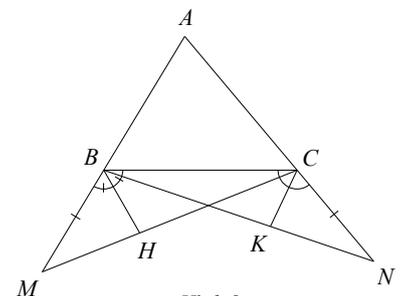
Hình 7

Bài 7: Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M .

Trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $CN = BM$.

BH là tia phân giác của $\triangle MBC$ và CK là tia phân giác $\triangle BCN$.

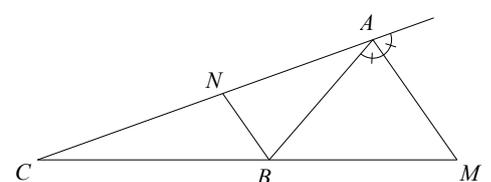
Chứng minh $\frac{MH}{HC} = \frac{NK}{KB}$. (Hình 8)



Hình 8

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ có \widehat{B} là góc tù. Tia phân giác góc ngoài tại A cắt BC kéo dài tại M . Từ B kẻ đường thẳng song song với AM cắt AC tại N . (Hình 9)

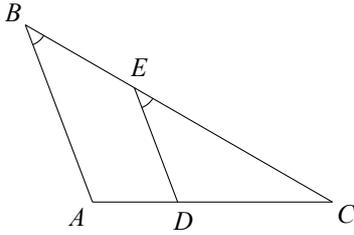
- Chứng minh $AC \cdot MB = AB \cdot MC$
- Chứng minh $\frac{MB}{MC} = \frac{NA}{AC}$.



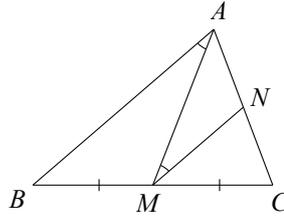
Hình 9

CHƯƠNG 4.
Bài 1. ĐỊNH LÍ THALÈ TRONG TAM GIÁC.

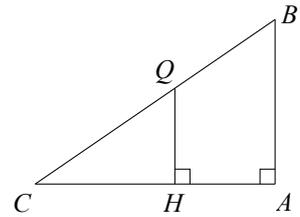
Bài 1:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Hình 1: $\widehat{B} = \widehat{E}$ mà \widehat{B}, \widehat{E} đồng vị nên $DE \parallel AB$. Ta có các hệ thức sau

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}; \frac{BE}{CB} = \frac{AD}{CA}; \frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AD}.$$

Hình 2: $\widehat{BAM} = \widehat{AMN}$ mà $\widehat{BAM}, \widehat{AMN}$ so le nên $AB \parallel MN$. Ta có các hệ thức sau

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB}; \frac{AN}{AC} = \frac{BM}{BC}; \frac{CN}{AN} = \frac{CM}{MB}.$$

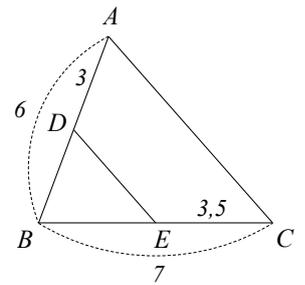
Hình 3: $QH \perp AC, AB \perp AC \Rightarrow QH \parallel AB$. Ta có các hệ thức sau

$$\frac{CH}{CA} = \frac{CQ}{CB}; \frac{HA}{CA} = \frac{QB}{CB}; \frac{CH}{HA} = \frac{CQ}{QB}.$$

Bài 2: (Hình 4)

$$\triangle ABC \text{ có } \frac{DA}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{EC}{BC} = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nên } \frac{DA}{AB} = \frac{EC}{BC} \Rightarrow DE \parallel AC.$$

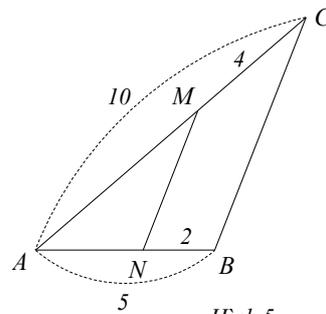


Hình 4

Bài 3: (Hình 5)

$$\triangle ABC \text{ có } \frac{MC}{AC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ và } \frac{NB}{AB} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Nên } \frac{MC}{AC} = \frac{NB}{AB} \Rightarrow BC \parallel MN.$$



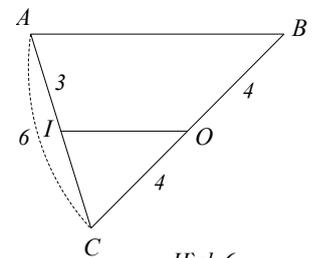
Hình 5

Bài 4: (Hình 6)

$$\text{Ta có } \triangle ABC = BO + OC = 4 + 4 = 8$$

$$\triangle ABC \text{ có } \frac{AI}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{OB}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nên } \frac{AI}{AC} = \frac{OB}{BC} \Rightarrow AB \parallel IO.$$

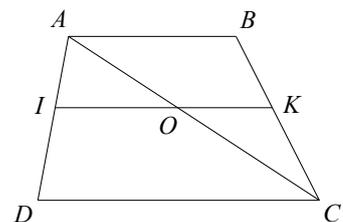


Hình 6

Bài 5: (Hình 7)

a) $\triangle ADC$ có $IO \parallel DC \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AO}{OC}$. (1)

b) $\triangle ABC$ có $OK \parallel AB \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BK}{KC}$. (2)



Hình 7

c) Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{BK}{KC} \Rightarrow AI \cdot KC = ID \cdot BK$.

Bài 6: (Hình 8)

a) Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ADE$ có:

$AM = AD$ (giả thiết)

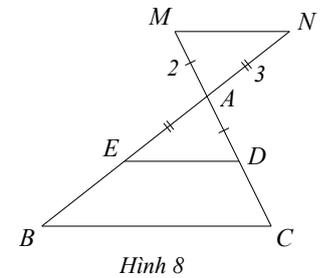
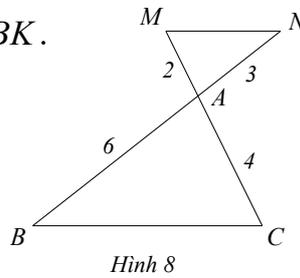
$\widehat{MAN} = \widehat{CAB}$ (đối đỉnh)

$AN = AE$ (giả thiết) $\Rightarrow \triangle AMN = \triangle ADE$ (c - g - c)

$\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{ADE}$ (hai góc tương ứng) mà $\widehat{M}, \widehat{ADE}$ so le trong nên $MN \parallel DE$. (1)

b) $\triangle ABC$ có $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ và $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow DE \parallel BC$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow MN \parallel BC$.



Bài 7: (Hình 9)

Tứ giác $BMCN$ có hai đường chéo BC, MN cắt nhau tại D

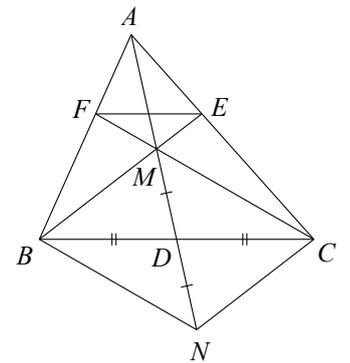
Là trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành

$\Rightarrow BM \parallel NC, BN \parallel CM$.

$\triangle ABN$ có $FM \parallel BN \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AM}{AN}$. (1)

$\triangle ACN$ có $ME \parallel NC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AM}{AN}$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow EF \parallel BC$.



Bài 8: (Hình 10)

a) $\triangle OAB$ có $DE \parallel AB \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OA}$. (1)

b) $\triangle OAC$ có $DF \parallel AC \Rightarrow \frac{OF}{OC} = \frac{OD}{OA}$. (2)

c) Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} \Rightarrow EF \parallel BC$.

Bài 9: (Hình 11)

a) $\triangle ABM$ có $EG \parallel BM \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{MG}{AG}$.

b) $\triangle ANC$ có $GF \parallel NC \Rightarrow \frac{CF}{AF} = \frac{GN}{AG}$.

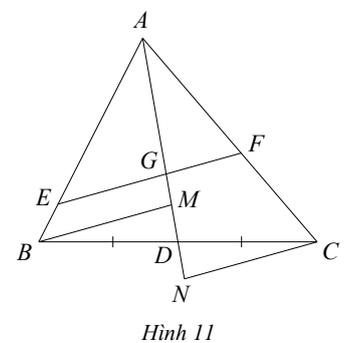
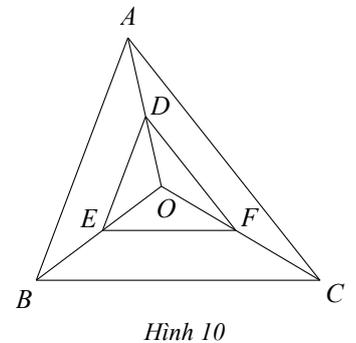
Xét $\triangle BDM$ và $\triangle CDN$ có:

$BD = CD$ (giả thiết)

$\widehat{BDM} = \widehat{CDN}$ (đối đỉnh)

$\widehat{MBD} = \widehat{NCD}$ (so le trong) $\Rightarrow \triangle BDM = \triangle CDN$ (c - g - c)

$\Rightarrow DM = DN$ (hai cạnh tương ứng)



$$\text{Khi đó } \frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = \frac{MG}{AG} + \frac{GN}{AG} = \frac{MG + (GM + MD + DN)}{AG} = \frac{2(MG + MD)}{AG} = \frac{2GD}{AG} = 1.$$

Bài 10: (Hình 12)

Xét $\triangle OBH$ và $\triangle OCK$ có:

$$BO = CO \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{BOH} = \widehat{COK} \text{ (đối đỉnh)}$$

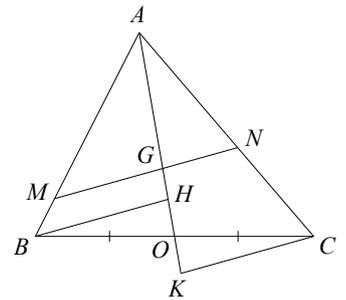
$$\widehat{OBH} = \widehat{OCK} \text{ (so le trong)} \Rightarrow \triangle OBH = \triangle OCK \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow OH = OK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\triangle ABH \text{ có } MG \parallel BH \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AH}{AG}$$

$$\triangle AKC \text{ có } GN \parallel KC \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{AK}{AG}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} &= \frac{AH}{AG} + \frac{AK}{AG} = \frac{AH + AK}{AG} = \frac{(AG + GH) + (AG + GH + HO + OK)}{AG} \\ &= \frac{2AG + 2(GH + OH)}{AG} = \frac{3AG}{AG} = 3. \end{aligned}$$



Hình 12

Bài 2. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

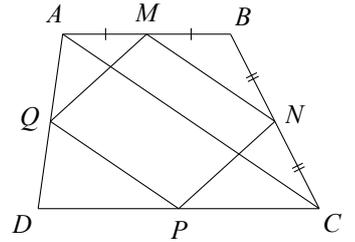
Bài 1: (Hình 1)

$$\text{a) } \triangle ABC \text{ có } \begin{cases} MA = MB \\ NB = NC \end{cases} \Rightarrow MN \text{ là đường trung bình} \\ \Rightarrow MN \parallel AC. \quad (1)$$

$$\text{b) } \triangle ADC \text{ có } \begin{cases} QA = QD \\ PD = PC \end{cases} \Rightarrow QP \text{ là đường trung bình} \\ \Rightarrow QP \parallel AC. \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow MN \parallel QP$

Mặt khác $MN = \frac{1}{2} AC = QP$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.



Hình 1

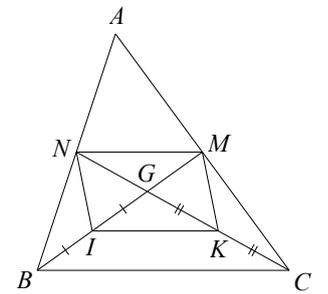
Bài 2: (Hình 2)

$$\text{a) } \triangle ABC \text{ có } \begin{cases} MA = MC \\ NA = NB \end{cases} \Rightarrow MN \text{ là đường trung bình} \\ \Rightarrow MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2} BC. \quad (1)$$

$$\triangle GBC \text{ có } \begin{cases} IG = IB \\ KG = KC \end{cases} \Rightarrow IK \text{ là đường trung bình} \\ \Rightarrow IK \parallel BC, IK = \frac{1}{2} BC \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow MN = IK$.

b) Tứ giác $MNIK$ có $MN \parallel IK, MN = IK$ nên là hình bình hành.



Hình 2

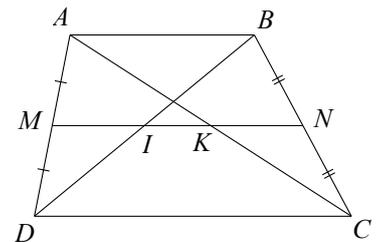
Bài 3: (Hình 3)

$$\text{a) } \triangle ABD \text{ có } \begin{cases} MA = MD \\ MI \parallel AB \end{cases} \Rightarrow IB = ID$$

Hay MI là đường trung bình $\Rightarrow MI = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3\text{cm}$.

$$\text{b) } \triangle ABC \text{ có } \begin{cases} NB = NC \\ KN \parallel AB \end{cases} \Rightarrow KA = KC$$

Hay KN là đường trung bình $\Rightarrow KN = \frac{1}{2} AB$. Vậy $MI = KN \left(= \frac{1}{2} AB \right)$.



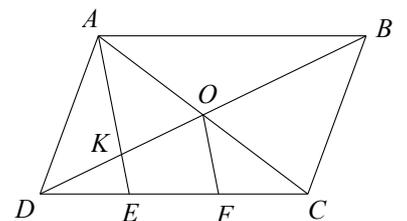
Hình 3

Bài 4: (Hình 4)

a) $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của hai đường chéo AC, BD .

$$\triangle ABE \text{ có } \begin{cases} OA = OC \\ OF \parallel AE \end{cases} \Rightarrow FC = FE$$

Hay OF là đường trung bình



Hình 4

b) Vì $DE = \frac{1}{3}DC \Rightarrow EC = \frac{2}{3}DC$

Mà $EF = FC = \frac{EC}{2} \Rightarrow EF = FC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}DC = \frac{1}{3}DC = DE$ hay $DE = EF = FC$.

c) $\triangle DOF$ có $\begin{cases} ED = EF \\ KE \parallel OF \end{cases} \Rightarrow KO = KD$.

Bài 5: (Hình 5)

a) $\triangle AMH$ có AE vừa là đường cao vừa là trung tuyến
Nên $\triangle AMH$ cân tại $A \Rightarrow AM = AH$. (1)

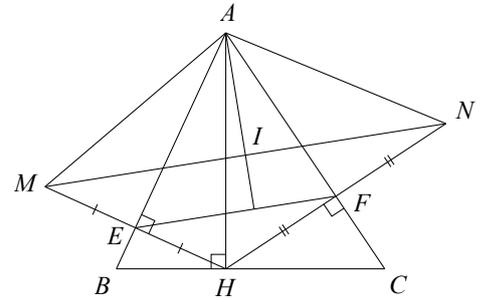
$\triangle AHN$ có AF vừa là đường cao vừa là trung tuyến
Nên $\triangle AHN$ cân tại $A \Rightarrow AH = AN$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A .

b) $\triangle HMN$ có $\begin{cases} EM = EH \\ FN = FH \end{cases} \Rightarrow EF$ là đường trung bình

Nên $EF \parallel MN$.

c) $\triangle AMN$ cân tại A nên AI là trung tuyến cũng là đường cao
 $\Rightarrow AI \perp MN$ mà $MN \parallel EF \Rightarrow AI \perp EF$.



Hình 5

Bài 6: (Hình 6)

a) $\triangle HDC$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}DC$

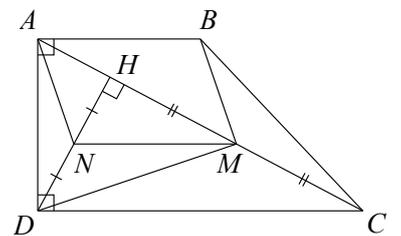
Mà $AB = \frac{1}{2}DC \Rightarrow AB = MN$.

b) Ta có $AB \parallel DC$ mà $MN \parallel DC \Rightarrow AB \parallel MN$
Lại có $AB = MN \Rightarrow ABMN$ là hình bình hành.

c) Vì $\begin{cases} MN \parallel DC \\ DC \perp AD \end{cases} \Rightarrow MN \perp AD$

$\triangle ADM$ có hai đường cao DH, MN cắt nhau tại N nên N là trực tâm $\Rightarrow AN \perp DM$

Mà $AN \parallel BM \Rightarrow BM \perp DM$ hay $\widehat{BMD} = 90^\circ$.



Hình 6

Bài 7: (Hình 7)

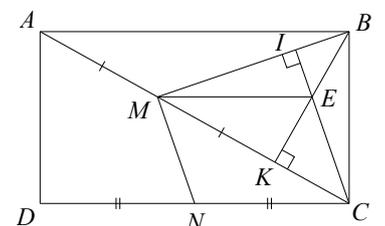
a) $\triangle BMC$ có E là trực tâm nên $ME \perp BC$
Mà $AB \perp BC \Rightarrow ME \parallel AB$.

$\triangle KAB$ có $\begin{cases} MA = MK \\ ME \parallel AB \end{cases} \Rightarrow EB = EK$

b) Ta có $ME \parallel AB, AB \parallel DC \Rightarrow ME \parallel NC$.

Lại có $ME = \frac{1}{2}AB = NC$. Vậy $MNCE$ là hình bình hành.

c) Vì $MNCE$ là hình bình hành nên $MN \parallel EC$ mà $EC \perp MB \Rightarrow MN \perp MB$.



Hình 7

Bài 8: (Hình 8)

- a) $\triangle ABH$ có MN là đường trung bình

$$\Rightarrow MN \parallel AB, MN = \frac{1}{2} AB.$$

Mà $AB \parallel CP, CP = \frac{1}{2} AB$ nên $MN \parallel PC, MN = PC$.

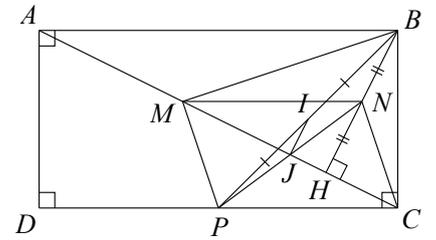
Khi đó $MNCP$ là hình bình hành.

- b) Vì $MN \parallel AB$ mà $AB \perp BC$ nên $MN \perp BC$.

$\triangle BMC$ có N là trực tâm nên $CN \perp MB$ mà $CN \parallel MP \Rightarrow MP \perp MB$

- c) $MNCP$ là hình bình hành nên hai đường chéo MC, PN cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường $\Rightarrow JP = JN$.

$\triangle PBN$ có IJ là đường trung bình nên $IJ \parallel BN \Rightarrow IJ \parallel HN$.



Hình 8

Bài 9: (Hình 9)

- a) Ta có $AM = MB = \frac{1}{2} AB = DN = NC$

Tứ giác $AMND$ có $AM \parallel DN, AM = DN$

Nên là hình bình hành. Lại có $AD = \frac{1}{2} AB = AM$

Vậy $AMND$ là hình thoi.

- b) Tứ giác $AMCN$ có $\begin{cases} AM \parallel NC \\ AM = NC \end{cases} \Rightarrow AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow AN \parallel MC$.

- c) Vì $AMND$ là hình bình hành nên E là trung điểm của DM .

Tương tự F là trung điểm của MC

$\triangle MDC$ có EF là đường trung bình nên $EF \parallel DC$.

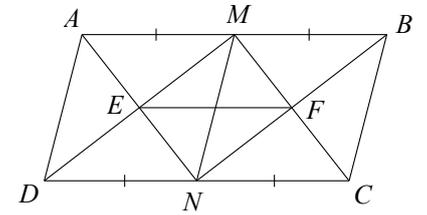
- d) Ta có $\begin{cases} MB \parallel DN \\ MB = DN \end{cases} \Rightarrow MBND$ là hình bình hành $\Rightarrow EM \parallel NF$

Lại có $EN \parallel MF \Rightarrow EMFN$ là hình bình hành.

$AMND$ là hình thoi nên $ME \perp EN \Rightarrow EMFN$ là hình chữ nhật.

Để $MENF$ là hình vuông thì $EM = EN \Rightarrow DE = EN = AE$ hay $\triangle ADN$ vuông tại D

Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.



Hình 9

Bài 10: (Hình 10)

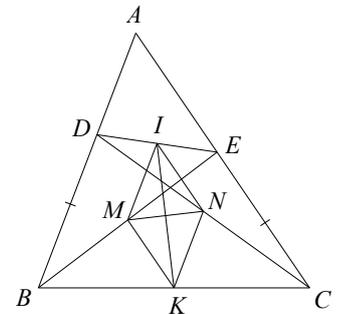
- a) $\triangle BEC$ có MK là đường trung bình nên $MK = \frac{1}{2} EC$. (1)

$$\triangle DEC$$
 có IN là đường trung bình nên $IN = \frac{1}{2} EC$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow IN = KN$.

- b) Tương tự $IM = \frac{1}{2} BD$ và $NK = \frac{1}{2} BD \Rightarrow IM = NK = \frac{1}{2} BD$

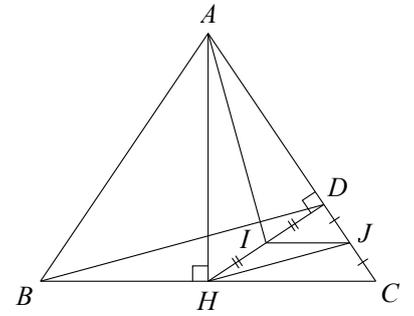
Mà $BD = EC$ nên $IM = IN = KM = KN$ hay $IMKN$ là hình thoi $\Rightarrow IK \perp MN$.



Hình 10

Bài 11: (Hình 11)

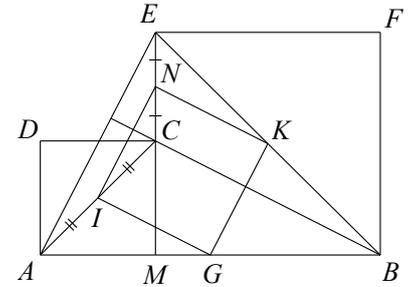
- a) $\triangle DHC$ có IJ là đường trung bình $\Rightarrow IJ \parallel HC$
 Mà $AH \perp HC \Rightarrow IJ \perp AH$.
- b) $\triangle CBD$ có HJ là đường trung bình $\Rightarrow HJ \parallel BD$. (1)
 $\triangle AHJ$ có I là trực tâm nên $AI \perp HJ$ (2)
 Từ (1), (2) $\Rightarrow AI \perp BD$.



Hình 11

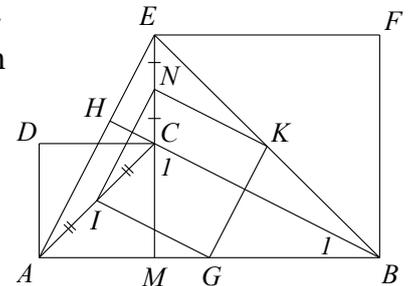
Bài 12: (Hình 12)

- a) Xét $\triangle EMA$ và $\triangle BMC$ có
 $\widehat{EMA} = \widehat{BMC} = 90^\circ$
 $AM = MC$ (giả thiết)
 $EM = BM$ (giả thiết)
 $\Rightarrow \triangle EMA = \triangle BMC$ (c - g - c)
 $\Rightarrow AE = BC$ (hai cạnh tương ứng)
 Và $\widehat{AEC} = \widehat{B_1}$ (hai góc tương ứng)
 Gọi BC cắt AE tại H .
 Khi đó $\widehat{C_1} + \widehat{B_1} = 90^\circ = \widehat{HCE} + \widehat{AEM} = 90^\circ \Rightarrow AE \perp BC$.



Hình 12

- b) $\triangle ABC$ có IG là đường trung bình nên $IG \parallel BC$, $IG = \frac{1}{2}BC$.
 $\triangle EBC$ có NK là đường trung bình nên $NK \parallel BC$, $NK = \frac{1}{2}BC$
 Như vậy $NK \parallel IG$, $NK = IG$. nên $GINK$ là hình bình hành
 Lại có IN là đường trung bình $\triangle IAE \Rightarrow IN = \frac{1}{2}AE$
 Nên $NI = NK \Rightarrow GINK$ là hình thoi.
 Mặt khác $IG \parallel BC$ mà $BC \perp AE \Rightarrow IG \perp AE$
 Lại có $NI \parallel AE \Rightarrow IG \perp IN$. Vậy $GINK$ là hình vuông.



Hình 12

Bài 3. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

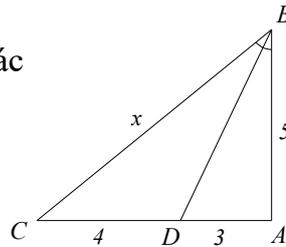
Bài 1:

Hình 1.

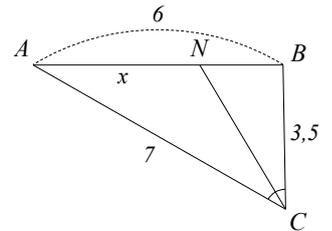
$\triangle ABC$ có BD là đường phân giác

$$\text{Nên } \frac{CD}{CB} = \frac{DA}{AB} \Rightarrow \frac{4}{x+3} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = 4 \cdot 5 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$



Hình 1



Hình 2

Hình 2.

$$\triangle ABC \text{ có } CN \text{ là đường phân giác nên } \frac{AN}{AC} = \frac{NB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{6-x}{3,5} \Rightarrow \frac{7}{2}x = 7(6-x)$$

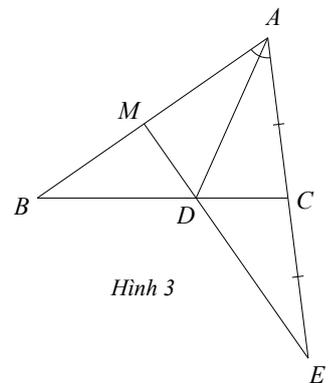
$$\Rightarrow \frac{7}{2}x = 42 - 7x \Rightarrow \frac{21}{2}x = 42 \Rightarrow x = 4.$$

Bài 2: (Hình 3)

a) $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác nên $\frac{BD}{BA} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

b) $\triangle AME$ có AD là đường phân giác nên:

$$\frac{DM}{MA} = \frac{DE}{EA} \Rightarrow \frac{DM}{DE} = \frac{MA}{EA}.$$



Hình 3

Bài 3: (Hình 4)

a) $\triangle ABH$ có BI là đường phân giác nên $\frac{AI}{AB} = \frac{IH}{BH}$. (1)

$\triangle ABC$ có BD là đường phân giác nên $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$. (2)

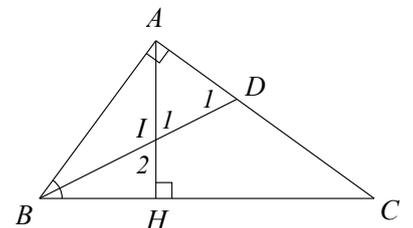
b) Ta có $\widehat{D}_1 + \widehat{ABD} = 90^\circ$ và $\widehat{I}_2 + \widehat{IBH} = 90^\circ$

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{IBH}$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \widehat{I}_2 = \widehat{D}_1 = \widehat{I}_1. \text{ Vậy } \triangle AID \text{ cân tại } A.$$

c) $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AI = AD$ (3)

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{IH}{BH} = \frac{DC}{BC}.$$



Hình 4

Bài 4: (Hình 5)

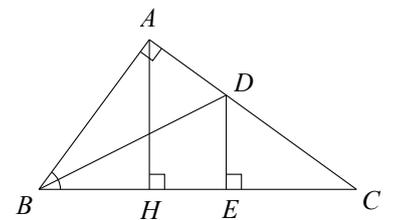
a) $\triangle ABC$ có BD là đường phân giác nên

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}. \quad (1)$$

b) $\triangle AHC$ có $AH \parallel DE$ vì cùng vuông góc với BC .

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{HE}{EC} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{HE}{EC}.$$



Hình 5

Bài 5: (Hình 6)

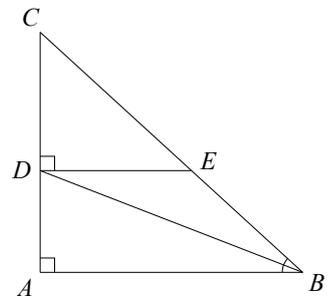
a) $\triangle ABC$ có BD là đường phân giác nên

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = DC \cdot AB \quad (1)$$

b) $\triangle ABC$ có $DE \parallel AB$ vì cùng vuông góc với AC .

$$\Rightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA} \quad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AB}$ kết hợp với (2) $\Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{BC}{AB}$



Hình 6

Bài 6: (Hình 7)

a) $\triangle ABC$ có $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AD}{BD} \quad (1)$

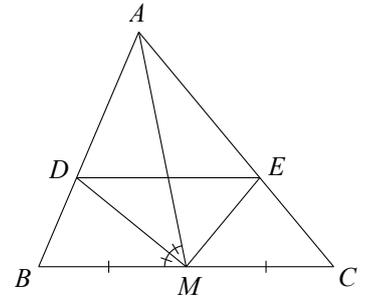
$\triangle ABM$ có MD là đường trung tuyến nên

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AM}{BM} \quad (3)$

b) Ta có $\frac{AE}{CE} = \frac{AM}{BM}$ mà $BM = MC \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{AM}{MC}$.

$\triangle AMC$ có $\frac{EA}{EC} = \frac{AM}{MC}$ nên ME là phân giác \widehat{AMC} .



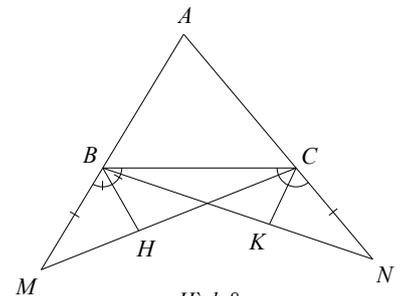
Hình 7

Bài 7: (Hình 8)

$\triangle BMC$ có BH là đường phân giác nên $\frac{MH}{HC} = \frac{MB}{BC}$

$\triangle BCN$ có CK là đường phân giác nên $\frac{KN}{KB} = \frac{CN}{BC}$

Mà $BM = CN$ nên $\frac{MH}{HC} = \frac{KN}{KB}$.



Hình 8

Bài 8: (Hình 9)

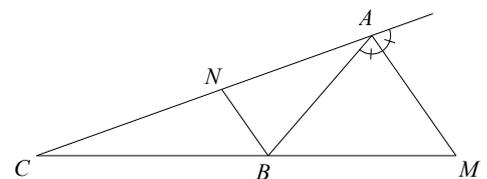
a) $\triangle ABC$ có AM là đường phân giác góc ngoài

Nên $\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow MB \cdot AC = AB \cdot MC \quad (1)$

b) Từ (1) $\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$

$\triangle ACM$ có $BN \parallel AM \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AN}{AC} \quad (3)$

Từ (2), (3) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AC}$.



Hình 9

CHƯƠNG 5. DỮ LIỆU VÀ BIỂU ĐỒ.

Bài 1. THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

I. LÝ THUYẾT.

1) Thu thập dữ liệu.

Ví dụ 1: Một số bạn trong tổ một đã thu thập dữ liệu như sau:

Bạn Nam: Lập bảng hỏi các bạn về điểm kiểm tra giữa học kì 2 của các bạn trong lớp.

Bạn Hương: Tra thông tin trên mạng về các hãng xe máy đang bán trên thị trường

Bạn Ánh: Kiểm tra số km đi được của xe máy các thầy cô ở trong trường.

Trong các cách thu thập dữ liệu trên, thì bạn Nam và bạn Ánh đã thu thập dữ liệu một cách trực tiếp, còn bạn Hương đã thu thập dữ liệu một cách gián tiếp.

Kết luận:

- ♣ Thu thập dữ liệu có thể là trực tiếp hoặc gián tiếp:
- ♣ Thu thập dữ liệu trực tiếp là việc thu thập dữ liệu thông qua quan sát, làm thí nghiệm, lập bảng hỏi, phỏng vấn,
- ♣ Thu thập dữ liệu gián tiếp là việc thu thập dữ liệu từ những nguồn có sẵn như sách, báo, mạng internet,
- ♣ Để có thể đưa ra các kết luận hợp lí, dữ liệu thu thập được phải đảm bảo tính đại diện cho toàn bộ đối tượng đang được quan tâm.

Ví dụ 2: Để thu thập các dữ liệu sau, ta nên làm như thế nào? và cách đó là thu thập dữ liệu trực tiếp hay gián tiếp?

- a) Dữ liệu về số người trong mỗi nhà của các nhà gần nhà em.
- b) Dữ liệu thông tin dự báo thời tiết trong 7 ngày tới.

Giải

- a) Nếu đến từng nhà và hỏi về số người trong mỗi gia đình thì đó là cách thu thập dữ liệu trực tiếp.
Nếu nhờ bác tổ trưởng tổ dân phố hay trưởng xóm thì đó là cách thu thập dữ liệu gián tiếp.
- b) Để có thông tin về dự báo thời tiết trong 7 ngày tới ta có thể vào internet để xem, cách thu thập này là cách thu thập dữ liệu gián tiếp.

2) Phân loại dữ liệu.

Ví dụ 3: Cho hai dãy dữ liệu về số liệu như sau:

- a) Cân nặng của 4 bạn trong một nhóm: 49,2 kg; 48,9 kg; 50,3 kg; 51,1 kg.
- b) Số bút của 4 bạn trong nhóm trên mang để trong cặp: 2; 3; 1; 3.

Nhận thấy:

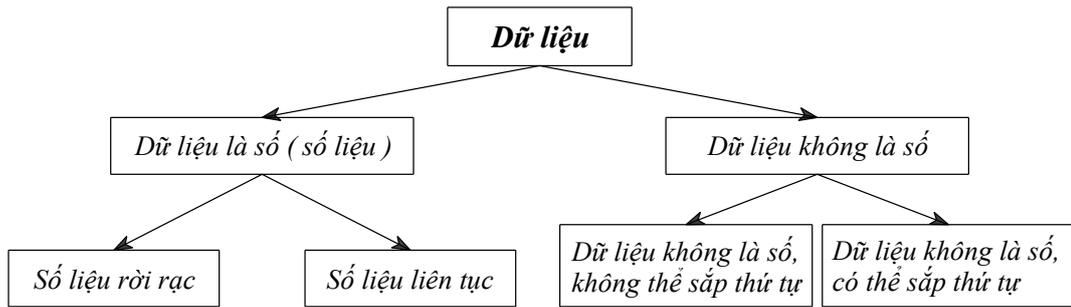
Số cân nặng có thể là một giá trị tùy ý nào đó trong khoảng từ 45 kg đến 55 kg nên được gọi là số liệu liên tục.

Số bút bi của một bạn nào đó không thể nhận được giá trị lớn hơn 2 và nhỏ hơn 3 nên gọi là số liệu rời rạc.

Kết luận:

- ♣ Số liệu nhận giá trị tùy ý trong một khoảng nào đó gọi là số liệu liên tục (dạng số liệu hay gặp là: chiều cao, cân nặng, nhiệt độ,

- ♣ Số liệu không phải là số liệu liên tục gọi là số liệu rời rạc (dạng số liệu hay gặp là số học sinh trong lớp, số sản phẩm của công nhân,)



Ví dụ 4: Hãy cho biết trong các câu sau, đâu là dữ liệu liên tục, đâu là dữ liệu rời rạc.

- Số đồng hồ có trong nhà của các bạn tổ 1 là: 3; 4; 2; 1.
- Thời gian hoàn thành một bài tập về nhà: 4,5 phút; 5,1 phút; 9,2 phút

Giải

- Đây là dãy dữ liệu rời rạc.
- Đây là dãy dữ liệu liên tục.

II. LUYỆN TẬP.

Bài 1: Em hãy thu thập các dữ liệu sau và cho biết dữ liệu mà em thu thập được là trực tiếp hay gián tiếp.

- Họ và tên các bạn tổ của mình.
- Số trang của mỗi chương trong sách Toán 8 mà em đang học.

Giải

- Học sinh tự thu thập bằng cách hỏi các bạn cùng tổ, cách thu thập này là trực tiếp.
- Học sinh mở mục lục SGK Toán và đếm số trang của mỗi chương:
 Chương 1: 27 trang. Chương 2: 19 trang. Chương 3: 27 trang.
 Chương 4: 14 trang. Chương 5: 20 trang.

Đây là cách thu thập gián tiếp.

Bài 2: Em muốn ước lượng thời gian tự học của các bạn ở nhà,

- Em muốn thu thập dữ liệu này em sẽ làm gì? Đó là cách thu thập gián tiếp hay trực tiếp.
- Dữ liệu mà em thu thập được là số liệu hay không, nếu có thì nó có phải là liên tục không?

Giải

- Để thu thập dữ liệu về thời gian học của các bạn ở nhà, em có thể đến hỏi trực tiếp từng bạn. Đây là cách thu thập trực tiếp.
- Dữ liệu thu thập được là số liệu và nó là số liệu liên tục.

Bài 3: Cô Hải giao cho cả lớp một bài toán tìm x để về nhà làm

- Để thu thập kết quả của bài toán đó, cô Hải có thể sử dụng phương pháp thu thập nào?
- Dữ liệu thu thập được có phải là số liệu hay không? Đây là dữ liệu liên tục hay rời rạc.

Giải

- Để thu thập kết quả bài toán đó, cô Hải có thể gọi từng bạn đọc kết quả đã làm của mình ở nhà. Đây là phương pháp thu thập trực tiếp.
- Dữ liệu thu thập được của cô Hải là số liệu và số liệu này là số liệu liên tục.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Dữ liệu thu thập được ở mỗi câu sau thuộc loại dữ liệu nào?

- Tên các hãng điện thoại.
- Số tiền có trong túi.
- Số điểm trong túi kiểm tra của một học sinh?

Bài 2: Dữ liệu thu thập được ở mỗi câu sau thuộc loại dữ liệu nào?

- Tên các môn học mà em đang học.
- Thời gian ngủ trưa của các thành viên trong gia đình em.
- Số sản phẩm bán được của một cửa hàng bán quần áo.

Bài 3: Nên sử dụng phương pháp thu thập dữ liệu nào để có được dữ liệu ở mỗi câu sau:

- Tên của các loại chim đẹp nhất.
- Tên món ăn mà mẹ em hay nấu.
- Số lần bố mẹ cho đi chơi trong một tháng của bản thân.

Bài 4: Theo WHO khuyến cáo, thuốc lá điện tử (làm nóng) tạo ra chất khí độc hại, có nhiều chất độc giống như trong khói thuốc lá điều thông thường.

- Em thu thập dữ liệu các chất độc hại đó bằng cách nào? Cách thu thập đó là trực tiếp hay gián tiếp.
- Em hãy thu thập thêm các dữ liệu về tác hại của thuốc lá điện tử và cho biết các dữ liệu đó có phải là số liệu hay không, hay là loại dữ liệu gì?

Bài 5: Cho các dãy dữ liệu là số liệu sau, em hãy cho biết đâu là dữ liệu liên tục, đâu là dữ liệu rời rạc

- Nhiệt độ không khí trung bình 5 ngày trong tháng 1 / 2023 là $17,3^{\circ}C$; $17,5^{\circ}C$; $18,1^{\circ}C$; $17,9^{\circ}C$; $16,9^{\circ}C$.
- Số đôi giày của các thành viên trong một gia đình: 2; 4; 6; 3.
- Số công tơ điện của một hộ gia đình trong 5 giờ liên tiếp là $133,4kW.h$; $134,1kW.h$; $135,0kW.h$; $137,7kW.h$; $140,2kW.h$
- Số học sinh vi phạm nội quy của lớp 8A trong 4 tuần của tháng 3 là: 6; 3; 7; 6.

Bài 6: Để mừng thọ các cụ vào đầu xuân. Bác tổ trưởng hội người cao tuổi trong thôn cần lên danh sách các cụ năm nay tròn 70 tuổi, 80 tuổi và 90 tuổi để mừng thọ.

- Bác tổ trưởng có cách nào để thu thập dữ liệu trên? Cách đó là trực tiếp hay gián tiếp?
- Trong các dữ liệu bác tổ trưởng thu được, dữ liệu nào không phải là số, dữ liệu nào là số. Dữ liệu là số có phải là dữ liệu liên tục hay không? Dữ liệu không phải là số có thể sắp thứ tự hay không?

Bài 7: Để khen thưởng cho các con cháu trong họ có thành tích xuất sắc trong năm học, bác trưởng họ đã kêu gọi các gia đình trong họ có con em có giấy khen mang bản photo đến nộp để nhận phần thưởng?

- Các làm của bác trưởng họ là phương pháp thu thập dữ liệu gián tiếp hay trực tiếp.
- Nếu các cháu được giấy khen tiên tiến thì thưởng 200000 đồng, còn giấy khen học sinh giỏi là 300000 đồng, học sinh đỗ giải Huyện, TP là 500000 đồng. Vậy dữ liệu mà bác trưởng họ thu được gồm những dữ liệu gì?

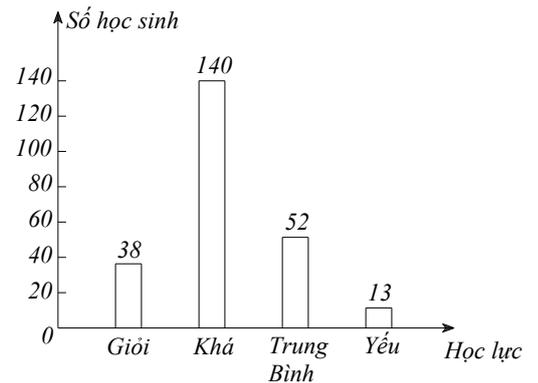
Bài 2. BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BẢNG, BIỂU ĐỒ.

I. LÝ THUYẾT.

1) Lựa chọn biểu đồ tranh hay biểu đồ cột.

Ví dụ 1: Cho hai biểu đồ như hình bên

Toán	
Ngữ Văn	
Tin Học	
Lịch sử và Địa lí	
Khoa học tự nhiên	
 : 9 quyển sách	



Nhận xét:

Ở biểu đồ tranh thì các giá trị của mỗi đối tượng phải có mối quan hệ nhất định và các biểu tượng phải vẽ là rất nhiều.

Kết luận:

- ♣ Có thể dùng biểu đồ tranh hay biểu đồ cột để biểu diễn số lượng các đối tượng khác nhau. Tuy nhiên khi dùng biểu đồ tranh mà phải vẽ rất nhiều biểu tượng thì ta nên dùng biểu đồ cột.

Ví dụ 2: Cho bảng số liệu về sự lựa chọn trái cây yêu thích của 12 bạn.

Trái cây	Đu đủ	Chuối	Thanh long	Dưa đỏ
Học sinh	2	3	2	5

- Với bảng trên em sẽ dùng biểu đồ nào để thể hiện thông tin trong bảng? Giải thích?
- Vẽ biểu đồ mà em lựa chọn ở câu a.

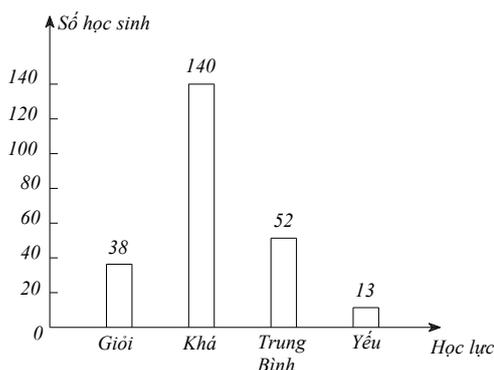
Giải

- Với thông tin trong bảng, ta nên vẽ biểu đồ tranh.
- Ta có biểu đồ

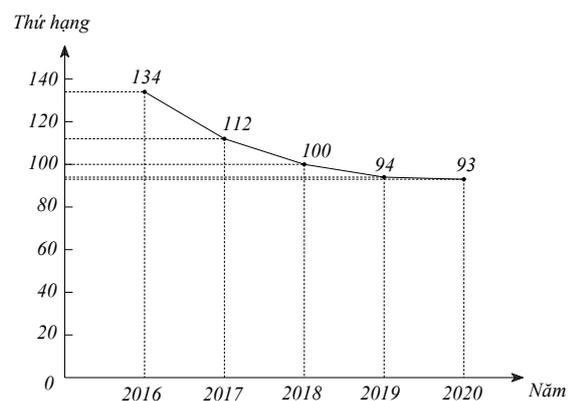
Quả	Đu đủ	Chuối	Thanh long	Dưa đỏ
Số lượng học sinh chọn				

2) Lựa chọn biểu đồ cột hay biểu đồ đoạn thẳng.

Ví dụ 3: Cho hai biểu đồ sau



Hình 1



Hình 2

Hình 1: Biểu đồ thể hiện học lực của học sinh khối 8 trong học kì 1 của một trường THCS.

Hình 2: Biểu đồ thể hiện thứ hạng bóng đá của Việt Nam trong 5 năm từ 2016 – 2020

Nhận xét:

Đối với biểu đồ cột, do chứa các cột để thể hiện giá trị của mỗi đối tượng nên ta thể hiện được ít các đối tượng hơn so với biểu đồ đường.

Kết luận:

- ♣ Nếu muốn biểu diễn sự thay đổi của một đại lượng theo thời gian ta dùng biểu đồ đoạn thẳng. Khi số lượng thời điểm quan sát ít ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ cột.

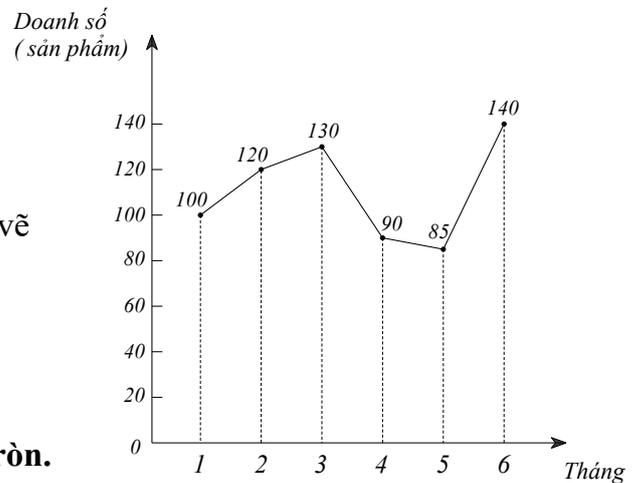
Ví dụ 4: Cho bảng dữ liệu về doanh số trong 6 tháng đầu năm của một doanh nghiệp.

Tháng	Tháng 1	Tháng 2	Tháng 3	Tháng 4	Tháng 5	Tháng 6
Doanh số (sản phẩm)	100	120	130	90	85	140

- Với thông tin ở bảng trên, theo em ta nên dùng biểu đồ nào là hợp lí, giải thích vì sao lại chọn biểu đồ đó.
- Vẽ biểu đồ mà em đã lựa chọn.

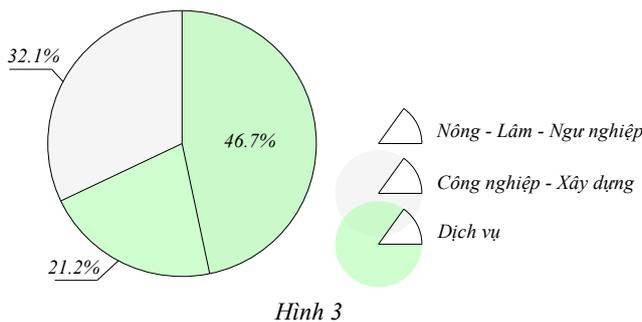
Giải

- Với thông tin ở bảng trên, ta nên dùng biểu đồ đoạn thẳng.
Vì trong bảng trên có tới 6 tháng, nên nếu vẽ biểu đồ cột sẽ cần 6 cột,
- Ta có biểu đồ như hình bên.



3) Lựa chọn biểu đồ cột kép hay biểu đồ quạt tròn.

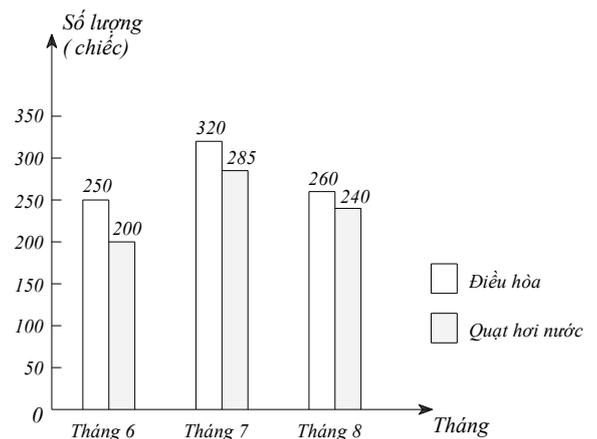
Ví dụ 5: Cho hai biểu đồ sau



Hình 3

Hình 3: Biểu đồ về mô hình và cơ cấu lao động.

Hình 4: Biểu đồ về số lượng bán ra hai loại mặt hàng là Điều hòa và Quạt hơi nước.



Hình 4

Nhận xét:

Ở biểu đồ hình quạt tròn thì tổng các thành phần là 100% nên ta phải đưa số liệu các đơn vị về phần trăm, còn biểu đồ hình cột kép chủ yếu để so sánh hai đối tượng theo cùng một thời gian.

Kết luận:

- ♣ Khi muốn so sánh hai tập dữ liệu với nhau ta dùng biểu đồ cột kép. Khi muốn biểu diễn tỉ lệ các phần trong tổng thể ta dùng biểu đồ hình quạt tròn.

Ví dụ 6: Cho bảng số liệu về chất lượng đánh giá sản phẩm của khách hàng của một cửa hàng bán đồ điện tử.

Đánh giá	Rất tốt	Tốt	Trung bình	Không tốt
Số lượng	6	32	10	2

- Với bảng trên, ta nên dùng biểu đồ quạt tròn hay cột kép để biểu diễn thông tin trên.
- Hãy tính xem với đánh giá rất tốt, tốt hay trung bình chiếm bao nhiêu %

Giải

- Với bảng trên ta nên dùng biểu đồ hình quạt tròn để thể hiện thông tin.
- Ta có tổng số lượng đánh giá là $6 + 32 + 10 + 2 = 50$

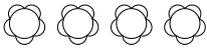
Đánh giá rất tốt chiếm số % là $\frac{6}{50} \cdot 100\% = 12\%$

Đánh giá tốt chiếm số % là $\frac{32}{50} \cdot 100\% = 64\%$

Trung bình chiếm số % là $\frac{10}{50} \cdot 100\% = 20\%$

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho biểu đồ thể hiện số điểm tốt đạt được của các tổ trong tuần.

Tổ 1	Tổ 2	Tổ 3	Tổ 4
			
 : 5 điểm tốt			

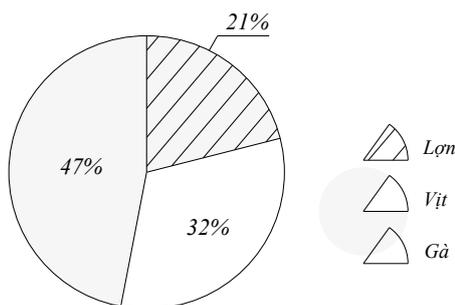
- Biểu đồ trên là biểu đồ gì? mỗi biểu tượng bông hoa ứng với bao nhiêu điểm tốt.
- Lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ khác thể hiện dữ liệu trong bảng thống kê.

Bài 2: Cho biểu đồ ở Hình 1 thể hiện sĩ số học sinh khối lớp 8

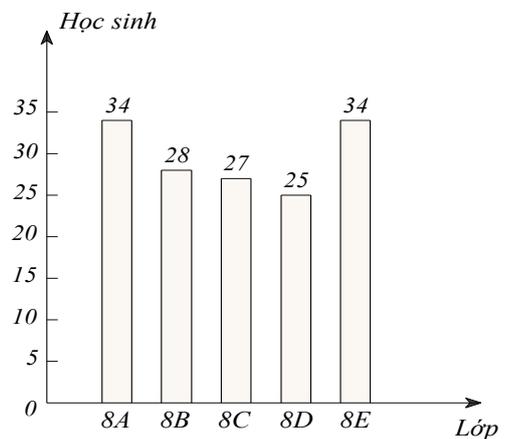
- Đây là biểu đồ gì?
- Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên và vẽ biểu đồ khác thể hiện bảng thống kê vừa lập.

Bài 3: Cho biểu đồ ở Hình 2 thể hiện tỉ lệ phần trăm các loại gia cầm trong một trang trại.

- Đây là biểu đồ gì? có bao nhiêu loại gia cầm trong trang trại này.
- Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.



Hình 2



Hình 1

Bài 4: Cho bảng thống kê về thời gian tự học của bạn Tiến như sau

Thứ	2	3	4	5	6	7	CN
Thời gian (phút)	80	100	60	70	90	60	0

- Vẽ biểu đồ thích hợp cho bảng thống kê trên.
- Với bảng thống kê trên, có thể vẽ được những biểu đồ nào thì phù hợp.

Bài 5: Cho bảng thống kê thể hiện điểm cộng và trừ về thành tích thi đua của khối 8 trong 1 tuần.

Lớp	8A ₁	8A ₂	8A ₃	8A ₄
Điểm cộng	25	28	19	15
Điểm trừ	8	10	8	6

Vẽ biểu đồ thích hợp cho bảng thống kê trên.

Bài 6: Cho bảng thống kê thể hiện tỉ lệ phần trăm xếp loại học lực của lớp 8B trong học kì 1

Học lực	Giỏi	Khá	Trung bình
Tỉ lệ phần trăm	25%	60%	15%

Vẽ biểu đồ thích hợp thể hiện bảng thống kê trên.

Bài 7: Cho bảng thống kê về tỉ lệ phần trăm yêu thích môn học của lớp 8C.

Môn học yêu thích	Toán	Văn	Anh	Khoa học
Tỉ lệ phần trăm	30%	25%	20%	25%

- Vẽ biểu đồ cột thể hiện bảng thống kê trên.
- Vẽ biểu đồ quạt tròn thể hiện bảng thống kê trên
- Có nhận xét gì về việc so sánh hai biểu đồ trên và việc bảng thống kê cho tỉ lệ phần trăm nhưng lại được biểu thị trên biểu đồ cột.

Bài 8: Cho bảng thống kê về số học sinh đạt học sinh giỏi cấp huyện môn Toán của bốn trường.

Khối lớp	6	7	8	9
Số học sinh	16	24	20	25

- Vẽ biểu đồ đoạn thẳng thể hiện bảng thống kê trên.
- Hãy tính toán và vẽ biểu đồ hình quạt tròn thể hiện biểu đồ trên.

Bài 3. PHÂN TÍCH SỐ LIỆU THỐNG KÊ DỰA VÀO BIỂU ĐỒ.

I. LÝ THUYẾT.

1) Các lưu ý khi đọc và diễn giải biểu đồ.

Ví dụ 1: Cho hai biểu đồ thể hiện số học sinh nam của hai lớp 8A, 8B.

Nhận thấy:

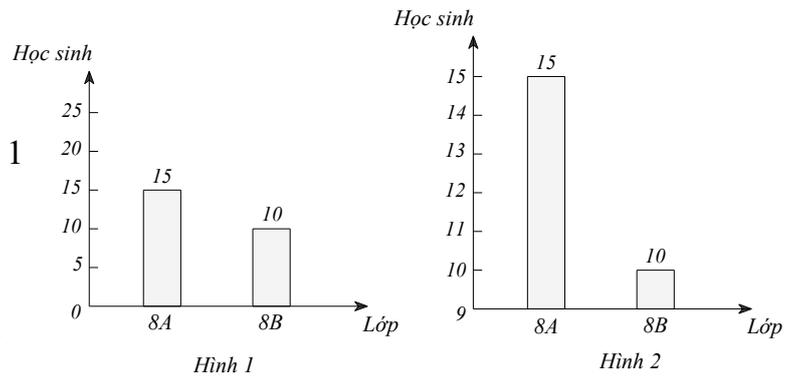
Hai biểu đồ trên cùng biểu diễn một dữ liệu.

Tuy nhiên, trong biểu đồ ở Hình 1 tỉ lệ chiều cao hai cột bằng với

tỉ lệ số liệu $\frac{15}{10}$.

còn ở biểu đồ ở Hình 2 thì cột ở lớp 8A gấp 6 lần cột ở lớp 8B

sự khác nhau này là do gốc của trục đứng không phải là số 0.



Kết luận:

- ♣ Trong biểu đồ cột, khi gốc của trục đứng khác 0 thì tỉ lệ chiều cao của các cột không bằng tỉ lệ số liệu mà chúng biểu diễn.

Ví dụ 2: Cho hai biểu đồ

ở Hình 3 và Hình 4

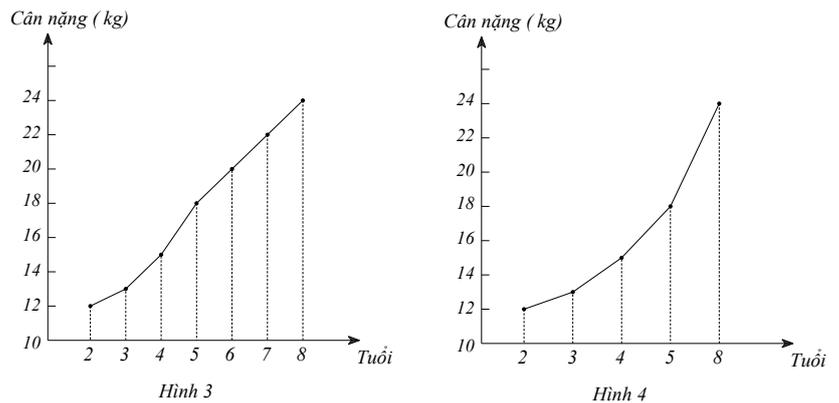
Nhận thấy:

Ở đoạn cuối của Hình 3 có độ dốc lớn hơn độ dốc của đoạn cuối ở Hình 4 nên dễ nhầm rằng ở 8 tuổi

đứa bé này tăng nhanh.

Thực ra là ở trục ngang được chia tỉ lệ không đều

từ năm 5 tuổi đến năm 8 tuổi.

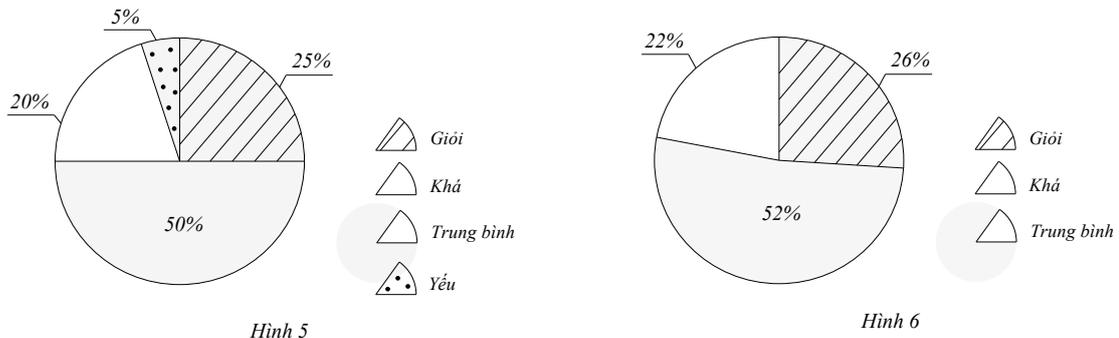


Kết luận:

- ♣ Trong biểu đồ đoạn thẳng, khi các trục quan sát trên trục ngang không đều nhau, ta không thể dựa vào độ dốc để kết luận về độ tăng hoặc giảm của đại lượng được biểu diễn

2) Đọc và phân tích số liệu từ biểu đồ.

Ví dụ 3: Cho biểu đồ về học lực của hai lớp 8A (Hình 5) và lớp 8D (Hình 6) trong học kì 1.



a) Hãy so sánh về số học sinh giỏi ở hai lớp 8A và 8D.

- b) Ở Học kì 1 lớp 8A có 40 học sinh và lớp 8D có 50 học sinh. Tính số học sinh trung bình của lớp 8A và lớp 8B.
- c) Em có nhận xét gì về số học sinh yếu ở hai lớp này.

Giải

- a) Ở lớp 8A số học sinh giỏi là 25% ít hơn số học sinh giỏi ở lớp 8D với 26% là 1%.
- b) Lớp 8A có 40 học sinh. Trong đó học sinh trung bình chiếm 20%

Nên số học sinh trung bình lớp 8A là $40 \cdot 20\% = 40 \cdot \frac{1}{5} = 8$ (học sinh)

Lớp 8D có 50 học sinh. Trong đó học sinh trung bình chiếm 22%

Nên số học sinh trung bình của lớp 8D là $50 \cdot 22\% = 50 \cdot \frac{11}{50} = 11$ (học sinh)

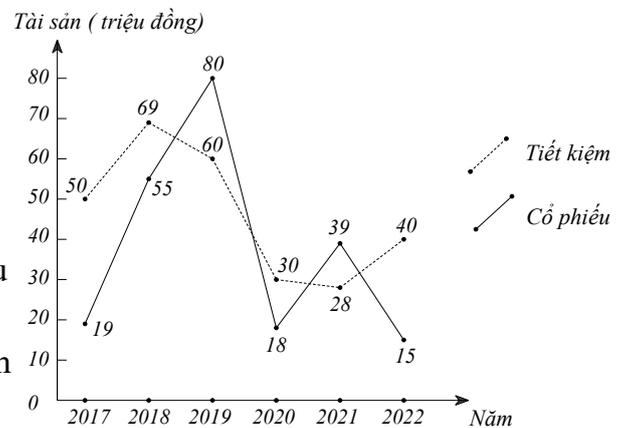
- c) Ở lớp 8A có 5% học sinh yếu, trong khi lớp 8D không có bạn nào bị học lực yếu.

Kết luận:

- ♣ Khi phân tích số liệu, ta có thể kết hợp thông tin từ hai hay nhiều biểu đồ.
- ♣ Để so sánh sự thay đổi theo thời gian của hai hay nhiều đại lượng, người ta thường biểu diễn chúng trên cùng một biểu đồ.

Ví dụ 4: Cho biểu đồ phân bố tài sản của nước ta ở mảng tiết kiệm và cổ phiếu từ năm 2017 – 2022. (Hình 7)

- a) Lập bảng thống kê cho số liệu ở biểu đồ trên.
- b) Tại thời điểm nào thì tài sản ở mảng cổ phiếu có giá trị cao nhất và thấp nhất.
- c) Tại thời điểm nào thì tài sản ở mảng tiết kiệm có giá trị thấp nhất và cao nhất.



Hình 7

Giải

- a) Ta có bảng thống kê sau

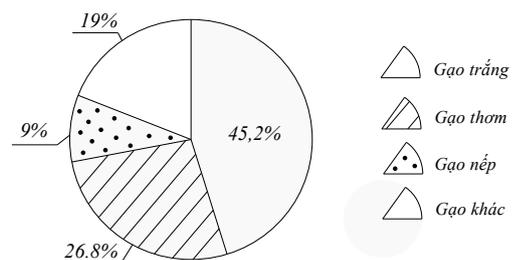
	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Tiết kiệm	50	69	60	30	28	40
Cổ phiếu	19	55	80	18	39	15

- b) Vào năm 2019 thì cổ phiếu có giá trị cao nhất là 80 triệu đồng, vào năm 2022 thì cổ phiếu có giá trị thấp nhất chỉ còn 15 triệu đồng và giảm mạnh từ năm 2019 – 2020.
- c) Vào năm 2018 thì tiết kiệm có giá trị cao nhất là 69 triệu đồng vẫn thấp hơn so với cổ phiếu ở năm 2019. Và vào năm 2021 thì tiết kiệm có mức thấp nhất vào 28 triệu đồng.

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho biểu đồ xuất khẩu các loại gạo của nước ta trong năm 2020.

- a) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.
- b) Loại gạo nào nước ta xuất khẩu nhiều nhất và ít nhất chiếm bao nhiêu phần trăm.
- c) Biết rằng tổng lượng gạo xuất khẩu là 6,15 triệu

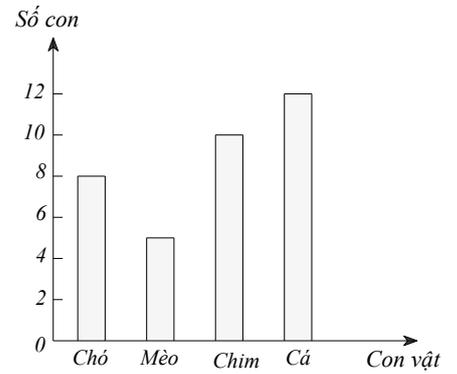


Hình 1

tấn gạo. Hãy tính xem số lượng gạo thơm nước ta xuất khẩu trong năm 2020.

Bài 2: Biểu đồ ở Hình 2 thể hiện số các con vật nuôi của các bạn trong lớp 8B

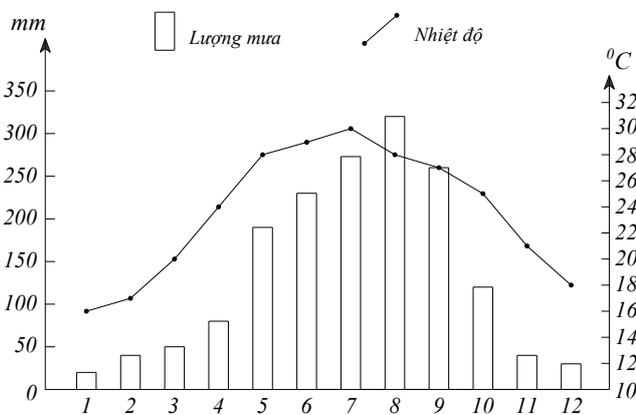
- Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.
- Con vật nào được nuôi nhiều nhất, ít nhất, là bao nhiêu?
- Trong các con vật nuôi trên, số con vật nào nhiều gấp đôi con vật nào?



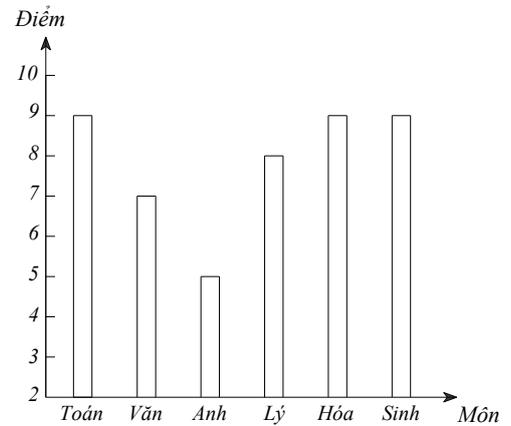
Hình 2

Bài 3: Cho biểu đồ về lượng mưa và nhiệt độ trong năm 2022 của Hà Nội (Hình 3).

- Tháng nào có nhiệt độ cao nhất, thấp nhất? Vì sao lại có sự khác biệt này?
- Tháng nào có lượng mưa nhiều nhất, ít nhất?
- Em thích tháng nào nhất trong năm và tháng đó có nhiệt độ và lượng mưa như thế nào?



Hình 3



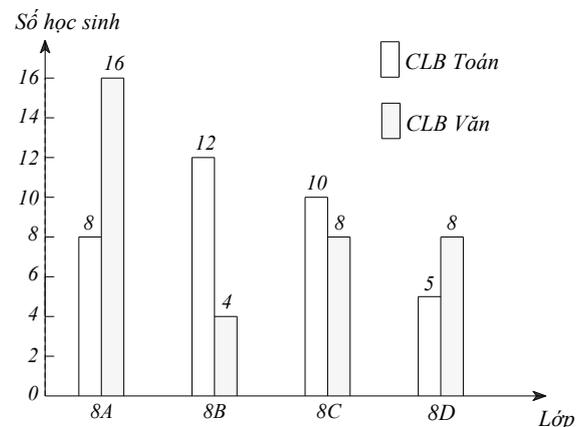
Hình 4

Bài 4: Biểu đồ Hình 4 về số điểm đạt được của một số môn trong đợt kiểm tra giữa học kì 2 của bạn Hòa.

- Bạn Hòa có điểm môn nào cao nhất, thấp nhất? Là bao nhiêu điểm?
- Bạn Hòa có bị môn nào dưới trung bình không? Có môn nào được điểm suất xác không?
- Lập bảng thống kê bảng điểm cho bạn Hòa và chỉ ra điểm giống và khác nhau giữa điểm của bản thân với điểm của bạn Hòa?

Bài 5: Biểu đồ ở Hình 5 thể hiện số lượng học sinh khối lớp 8 tham gia hai câu lạc bộ Toán và Văn của trường.

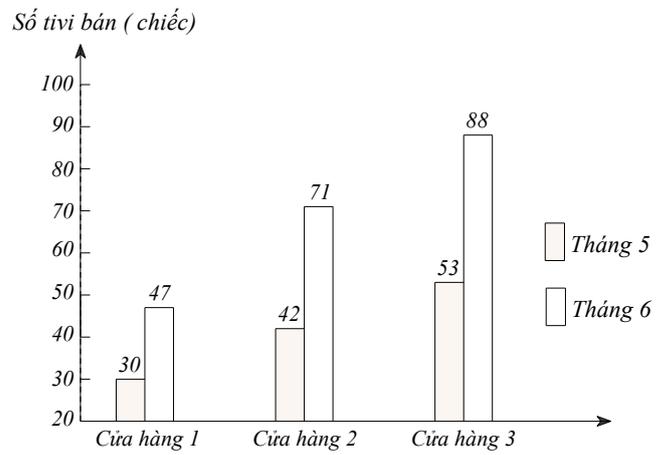
- Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.
- Cho biết về sự khác nhau về việc tham gia đăng kí hai câu lạc bộ Toán và Văn của hai lớp 8A và 8B.
- Nếu lớp 8A có số lượng tham gia câu lạc bộ môn Toán chiếm 20% tổng số học sinh cả lớp. Hãy tính xem lớp 8A có bao nhiêu học sinh.
- Hãy so sánh tỉ số học sinh tham gia CLB Toán và CLB Văn của hai lớp 8A và 8B.



Hình 5

Bài 6: Biểu đồ ở Hình 6 thống kê số lượng tivi bán được của ba cửa hàng trong tháng 5 và tháng 6 của năm 2018.

- So sánh số lượng tivi bán được của mỗi cửa hàng trong tháng 5 và tháng 6.
- Cửa hàng 3 bán được nhiều tivi nhất trong cả tháng 5 và tháng 6. Em có thể đưa ra một lí do phù hợp nhất để giải thích cho kết quả này được không? Em đồng ý với những nhận xét nào sau đây:

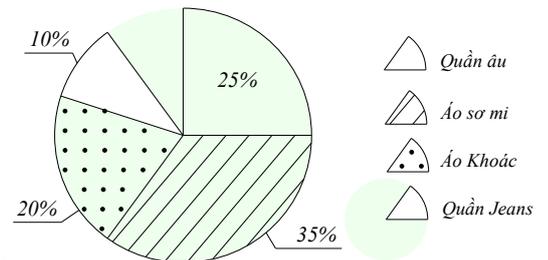


Hình 6

- + Cửa hàng 3 bán tivi với giá rẻ nhất.
 - + Cửa hàng 3 chăm sóc khách hàng tốt nhất.
 - + Cửa hàng 3 có nhiều loại tivi cho người mua hàng lựa chọn.
 - + Cửa hàng 3 ở vị trí thuận lợi cho việc đi lại mua bán của người mua hàng?
- Số lượng tivi mà cả ba cửa hàng bán được trong tháng 6 nhiều hơn số lượng tivi mà cả ba cửa hàng bán được trong tháng 5 là bao nhiêu chiếc? Em có biết giải bóng đá World Cup 2018 diễn ra vào tháng nào không? Sự kiện đó có liên quan đến việc mua bán tivi trong tháng 6 hay không?
 - Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

Bài 7: Một cửa hàng bán quần áo đưa ra chương trình khuyến mại giảm giá như biểu đồ ở Hình 6

- Trong các mặt hàng trên, sản phẩm nào được giảm giá nhiều nhất, ít nhất với mức giảm bao nhiêu phần trăm?
- Hãy giải thích vì sao trong biểu đồ trên tổng các thành phần lại không phải 100%. Với các số liệu ở biểu đồ ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ nào?
- Cô Hải đã mua 2 chiếc áo sơ mi với giá mỗi chiếc



Hình 7

- Cô Hải đã mua 2 chiếc áo sơ mi với giá mỗi chiếc sau khi giảm giá là 325 000 đồng và 4 chiếc quần âu. Khi đó tổng số tiền hóa đơn cô Hải thanh toán tại quầy là 1 850 000 đồng. Em hãy tính xem mỗi chiếc áo sơ mi và mỗi chiếc quần âu cô Hải mua trị giá bao nhiêu tiền nếu chưa được giảm giá?

CHƯƠNG 5. DỮ LIỆU VÀ BIỂU ĐỒ.

Bài 1. THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

Bài 1:

- a) Tên các hãng điện thoại là dữ liệu không phải là số, không thể sắp thứ tự.
- b) Số tiền trong túi là số liệu rời rạc.
- c) Số điểm trong túi kiểm tra của một học sinh là số liệu rời rạc.

Bài 2:

- a) Tên các môn đang học là dữ liệu không phải là số, không thể sắp thứ tự.
- b) Thời gian ngủ trưa của các thành viên trong gia đình là số liệu liên tục.
- c) Số sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo là số liệu rời rạc.

Bài 3:

- a) Để thu thập dữ liệu về tên các loài chim đẹp nhất ta nên sử dụng phương pháp thu thập dữ liệu gián tiếp qua mạng internet.
- b) Để thu thập tên các món ăn mẹ em hay nấu, ta sử dụng phương pháp thu thập dữ liệu trực tiếp, ghi chép lại các món ăn mẹ nấu hàng ngày trong 10 ngày.
- c) Để thu thập về số lần bố mẹ cho đi chơi trong 1 tháng, ta sử dụng phương pháp thu thập dữ liệu trực tiếp, bằng cách ghi chép lại những buổi đi chơi trong 1 tháng.

Bài 4:

- a) Để thu thập các chất độc hại trong thuốc lá điện tử ta nên tìm hiểu qua mạng internet hoặc qua báo chí? Đây là cách thu thập dữ liệu gián tiếp.
- b) Học sinh tự thu thập

Bài 5:

- a) Nhiệt độ không khí là số liệu liên tục.
- b) Số đôi giày các thành viên trong gia đình là số liệu rời rạc.
- c) Số công tơ điện là số liệu liên tục.
- d) Số học sinh vi phạm nội quy là số liệu rời rạc.

Bài 6:

- a) Bác tổ trưởng có thể tham khảo danh sách các thành viên trong hội người cao tuổi ở trong thôn. Đây là cách thu thập dữ liệu gián tiếp.
- b) Trong các dữ liệu thu thập được, dữ liệu về họ và tên không là số liệu và có thể sắp thứ tự, còn dữ liệu về năm sinh hay tuổi là số liệu và nó là số liệu rời rạc.

Bài 7:

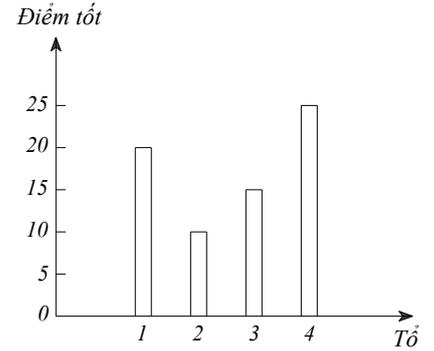
- a) Các làm của bác trưởng họ là phương pháp thu thập dữ liệu trực tiếp.
- b) Dữ liệu mà bác trưởng họ thu được gồm các dãy dữ liệu sau:
Danh sách tên các con cháu có giấy khen tiên tiến.
Danh sách tên các con cháu có giấy khen học sinh giỏi
Danh sách tên các con cháu có giấy khen HSG Huyện, TP.
Và danh sách số tiền đã trao cho các cháu.

Bài 2. BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BẢNG, BIỂU ĐỒ.

Bài 1:

- a) Biểu đồ trên là biểu đồ tranh, mỗi bông hoa ứng với 5 điểm tốt.
b) Ta có bảng thống kê sau và biểu đồ sau (Hình 1)

Tổ	Điểm tốt
1	20
2	10
3	15
4	25

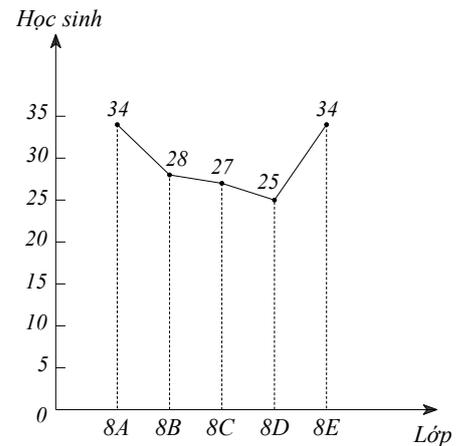


Hình 1

Bài 2:

- a) Đây là biểu đồ cột.
b) Ta có bảng thống kê và biểu đồ sau (Hình 2)

Lớp	8A	8B	8C	8D	8E
Sĩ số	34	28	27	25	34



Hình 2

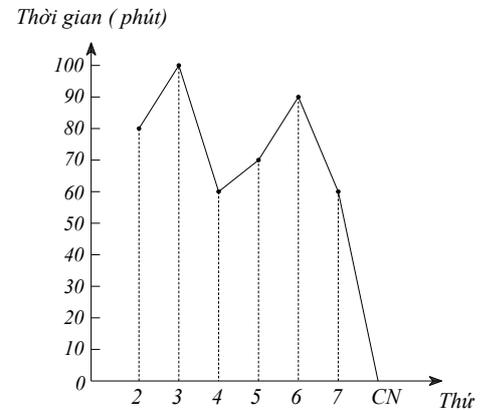
Bài 3:

- a) Đây là biểu đồ quạt tròn, có 3 loại gia cầm gồm lợn, vịt và gà.
b) Ta có bảng thống kê sau

Gia cầm	Lợn	Vịt	Gà
Tỉ lệ phần trăm (%)	21	32	47

Bài 4:

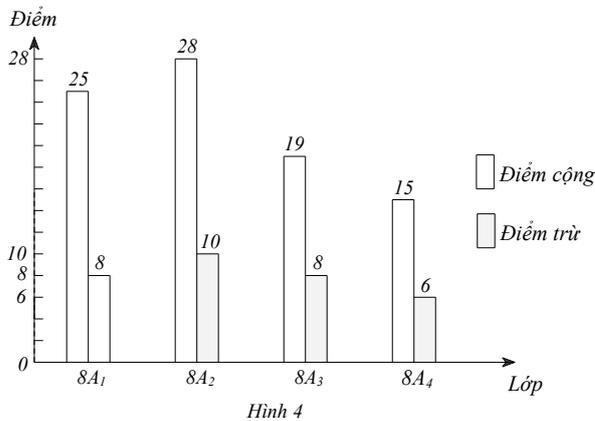
- a) Ta có biểu đồ thể hiện thời gian tự học của bạn Tiến trong một tuần. (Hình 3)
b) Với bảng thống kê trên, ta có thể vẽ biểu đồ cột hoặc biểu đồ tranh.



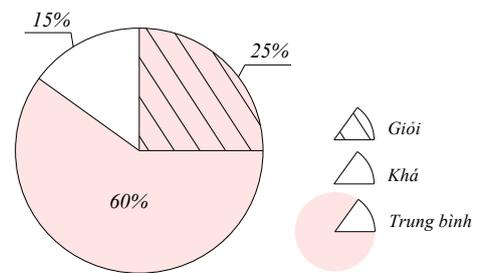
Hình 3

Bài 5: Ta có biểu đồ như Hình 4.

Bài 6: Ta có biểu đồ như Hình 5.



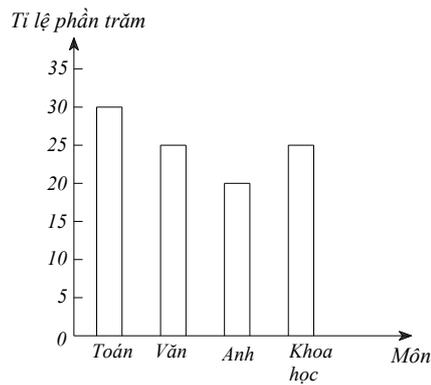
Hình 4



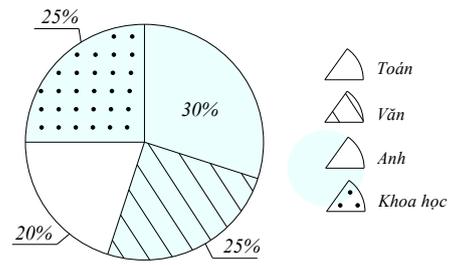
Hình 5

Bài 7:

a) Ta có biểu đồ cột như Hình 6.



Hình 6

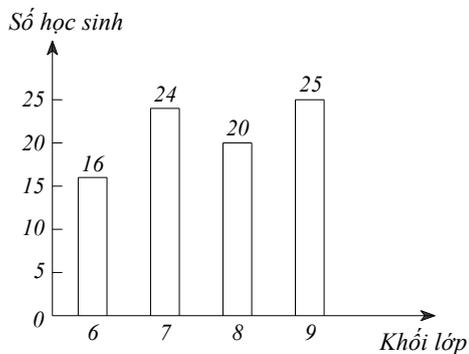


Hình 7

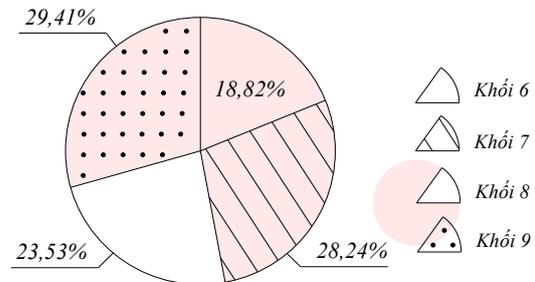
b) Ta có biểu đồ quạt tròn như Hình 7.

c) Với hai biểu đồ trên thì nhận thấy việc ta vẽ biểu đồ cột để có sự so sánh giữa các thành phần hơn là biểu đồ quạt tròn.

Bài 8:



Hình 8



Hình 9

a) Ta có biểu đồ cột như Hình 8

b) Tổng số học sinh giỏi cấp huyện môn Toán của cả 4 khối lớp là $16 + 24 + 20 + 25 = 85$

Học sinh giỏi khối 6 chiếm số phần trăm là $\frac{16}{85} \cdot 100\% = 18,82\%$

Học sinh giỏi khối 7 chiếm số phần trăm là $\frac{24}{85} \cdot 100\% = 28,24\%$

Học sinh giỏi khối 8 chiếm số phần trăm là $\frac{20}{85} \cdot 100\% = 23,53\%$

Học sinh giỏi khối 9 chiếm số phần trăm là $\frac{25}{85} \cdot 100\% = 29,41\%$

Khi đó biểu đồ hình quạt tròn như Hình 9.

Bài 3. PHÂN TÍCH SỐ LIỆU THỐNG KÊ DỰA VÀO BIỂU ĐỒ.

Bài 1:

a) Ta có bảng thống kê

Loại gạo	Gạo trắng	Gạo thơm	Gạo nếp	Gạo khác
Tỉ lệ phần trăm	45,2%	26,8%	9%	19%

b) Gạo trắng được nước ta xuất khẩu nhiều nhất với 45,2%

Còn gạo nếp được nước ta xuất khẩu ít nhất với 9%

c) Vì gạo thơm chiếm 26,8% tổng lượng gạo xuất khẩu nên số lượng gạo thơm xuất khẩu

nước ta trong năm 2020 là $6,15 \cdot \frac{26,8}{100} = 1,6482$ triệu tấn gạo.

Bài 2:

a) Ta có bảng thống kê

Con vật	Chó	Mèo	Chim	Cá
Số lượng	8	5	10	12

b) Trong các con vật nuôi của các bạn lớp 8B thì con cá được nuôi nhiều nhất với 12 con
Và con mèo được nuôi ít nhất với chỉ 5 con.

c) Trong các con vật trên, nhận thấy số con chim là 10 gấp đôi số con mèo là 5 con.

Bài 3:

a) Tháng có nhiệt độ cao nhất là tháng 7 với nhiệt độ khoảng $30^{\circ}C$ và tháng có nhiệt độ thấp nhất là tháng 1 với nhiệt độ trung bình vào khoảng $16^{\circ}C$.

Sự khác biệt này là do Hà Nội có 4 mùa Xuân, Hạ, Thu, Đông, Khi đó tháng 7 là tháng nằm trong mùa hè, nên nhiệt độ trung bình sẽ cao, ngược lại tháng 1 vẫn chịu ảnh hưởng của mùa đông nên nhiệt độ sẽ thấp.

b) Tháng có lượng mưa nhiều nhất là tháng 8, tháng có lượng mưa ít nhất là tháng 1

c) Học sinh tự trả lời.

Bài 4:

a) Bạn Hòa có điểm các môn Toán, Hóa, Sinh cao nhất với 9 điểm và môn Tiếng anh có điểm thấp nhất với 5 điểm.

b) Bạn Hòa không có môn nào bị điểm dưới trung bình, và cũng không có điểm nào tuyệt đối là 10.

c) Ta có bảng thống kê sau

Môn	Toán	Văn	Anh	Lý	Hóa	Sinh
Điểm	9	7	5	8	9	9

Bài 5:

a) Ta có bảng thống kê

Lớp	8A	8B	8C	8D
CLB Toán	8	12	10	5
CLB Văn	16	4	8	8

b) Ở lớp 8A số lượng đăng kí CLB Văn nhiều gấp 2 lần CLB Toán. Trong khi đó ở lớp 8B số học sinh tham gia CLB Toán nhiều hơn CLB Văn đến gấp 3 lần.

- c) Lớp 8A có 8 bạn tham gia CLB Toán chiếm 20% tổng số học sinh cả lớp, nên lớp 8A có số học sinh là $8 : 20\% = 8 : \frac{1}{5} = 40$ (học sinh)
- d) Ở lớp 8A tỉ số tham gia CLB Toán và Văn là $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Còn ở lớp 8B thì tỉ số đó là $\frac{12}{4} = 3$.

Bài 6:

- a) Nhận thấy ở cả ba cửa hàng thì số lượng ti vi bán ra ở tháng 5 ít hơn so với tháng 6
 Tại cửa hàng 1 số lượng bán ra ở tháng 6 hơn tháng 5 là 17 chiếc.
 Còn ở cửa hàng 2 tháng 6 bán được nhiều hơn tháng 5 là 29 chiếc.
 Và tại cửa hàng số 3 tháng 6 bán được nhiều hơn tháng 5 là 35 chiếc.
- b) Cửa hàng 3 kể cả tháng 5 và tháng 6 số lượng bán ra đều hơn hai cửa hàng còn lại.
 Có thể do nhiều yếu tố như các nhận xét trên.
- c) Trong tháng 6 tổng số ti vi bán được của cả ba cửa hàng là $(47 + 71 + 88) = 206$ chiếc.
 Trong khi đó tháng 5 tổng số ti vi bán được của cả ba cửa hàng là $(30 + 42 + 53) = 125$ chiếc.
 Như vậy trong tháng 6 cả ba cửa hàng bán được nhiều hơn tháng 5 là $206 - 125 = 81$ chiếc.
 Các thông tin về World Cup 2018 để học sinh tự tìm hiểu (kiến thức mở rộng)

- d) Ta có bảng thống kê sau

	Cửa hàng 1	Cửa hàng 2	Cửa hàng 3
Tháng 5	30	42	53
Tháng 6	47	71	88

Bài 7:

- a) Trong các mặt hàng được giảm giá thì áo sơ mi được giảm giá nhiều nhất với 35% và quần Jeans được giảm giá ít nhất với 10%
- b) Vì mức giảm phần trăm là trên mỗi sản phẩm chứ không phải trên tổng sản phẩm, nên tổng giá trị các thành phần không bằng 100%. Với số liệu trong biểu đồ ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ cột. hoặc biểu đồ đường
- c) Cô Hải đã mua hai chiếc áo sơ mi với giá 325 000 đồng mỗi chiếc, nên số tiền mua 4 chiếc quần âu là $1\ 850\ 000 - 2.325\ 000 = 1\ 200\ 000$ đồng.
 Vì mỗi chiếc áo sơ mi sau khi giảm giá 35% thì chỉ còn 65% giá trị khi chưa giảm giá.
 Nên giá mỗi chiếc áo khi chưa giảm giá là $325\ 000 : \frac{65}{100} = 500\ 000$ đồng.
 Mỗi chiếc quần âu sau khi giảm giá là $1\ 200\ 000 : 4 = 300\ 000$ đồng.
 Và giá này đã được giảm 25% nên 300 000 ứng với 75% giá trị khi chưa giảm giá.
 Vậy giá mỗi chiếc quần âu khi chưa giảm giá là $300\ 000 : \frac{75}{100} = 400\ 000$ đồng