CHƯƠNG 5

GIỚI HẠN HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 01 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Chú ý: Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0 , ta có các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q|<1$
- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$ và kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2 Định lý về giới hạn hữu hạn

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \ne 0$).

b) Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \ge 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \ge 0 \end{cases}$.

3 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn u_n có công bội q, với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính bằng công thức sau đây:

$$\boxed{S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q} \quad |q| < 1\ .}$$

4 Giới hạn vô cực của dãy số

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$. Nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương
- $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giới hạn bằng định nghĩa, định lí về giới hạn dãy số

Phương pháp:

- Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh

$$\forall a > 0 \text{ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số } n_a \text{ sao cho } |u_n| < a \ \forall n > n_a$$

- Để chứng minh $\lim u_n = L$ ta chứng minh $\lim(u_n - L) = 0$
- Để chứng minh $\lim u_n = +\infty$ ta chứng minh

$$\forall M > 0 \text{ lớn tùy ý luôn tồn tại một số } n_M \text{ sao cho } u_n > M \ \forall n > n_M$$

- Để chứng minh $\lim u_n = -\infty$ ta chứng minh $\lim(-u_n) = +\infty$
- Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$
- $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim \dfrac{-2n+1}{n}$ b) $\lim \dfrac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$ c) $\lim \dfrac{4}{2n+1}$

d) $\lim \dfrac{n^2-2n+3}{2n^2}$ e) $\lim \dfrac{1}{-3n+7}$ f) $\lim \dfrac{2}{(n+1)(n-2)}$

g) $\lim \dfrac{3}{2^n+1}$ h) $\lim \dfrac{2^n}{5+7^n}$ i) $\lim \dfrac{-3n^2+4n+1}{2n^3-3n+7}$

j) $\lim \dfrac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n}$ k) $\lim \dfrac{4.3^n+5^n}{2.5^n+7^n}$ l) $\lim \dfrac{4^n+7^n}{(2^n+1)(5+7^n)}$

Bài tập 2: Chứng minh các giới hạn sau đây:

a) $\lim \dfrac{2n^2+n}{n^2+4} = 2$ b) $\lim \dfrac{6n+2}{n+5} = 6$ c) $\lim \dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n} = -2$

c) $\lim \dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n} = 1$ d) $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right) = 3$ e) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \dfrac{1}{2}$

Dạng 2: Giới hạn dạng phân thức

Phương pháp: Tính giới hạn $\lim \frac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các đa thức bậc n.

- **Bước 1:** Đặt n^k, n^i với k là số mũ cao nhất của đa thức $f(n)$ và i là số mũ cao nhất của đa thức $g(n)$ ra làm nhân tử chung.
- **Bước 2:** Áp dụng kết quả $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ suy ra $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = ...$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim \frac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2}$ b) $\lim \frac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2}$ c) $\lim \frac{n+2}{n^2 + n + 1}$

d) $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ e) $\lim \frac{-4n^2 + n + 2}{2n^2 + n + 1}$ f) $\lim \frac{5n^2 + 3n - 7}{n^2}$

Bài tập 2: Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - n}$ b) $u_n = \frac{2n+1}{n^2 + n + 3}$ c) $u_n = \frac{2025n + 2024}{n - 2023}$

Bài tập 3: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b bằng bào nhiêu ?

Bài tập 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a bằng bao nhiêu?

Dạng 3: Giới hạn dãy số dạng lũy thừa

Phương pháp: Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các lũy thừa dạng X^n

- **Bước 1:** Đưa biểu thức về cùng số mũ n.
- **Bước 2:** Chia tử và mẫu số cho a^n trong đó a là số có trị tuyệt đối lớn nhất.
- **Bước 3:** Áp dụng kết quả " Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n = 0$".

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\left(2^n+3^n\right)$ b) $\lim\left[-4^n+(-2)^n\right]$ c) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3.3^n+2^n}\right)$

d) $\lim\left(\dfrac{4.3^n-2^n}{2.5^n+4^n}\right)$ e) $\lim\left(\dfrac{7^n+1}{-2.3^n-3.6^n}\right)$ f) $\lim\left(\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}\right)$

g) $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}$ h) $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$ i) $\lim\dfrac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$

j) $\lim\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$ k) $\lim\dfrac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$ l) $\lim\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$.

Bài tập 2: Cho dãy số (u_n), xác định bởi:

a) $u_1=1; u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6}.\forall n\ge 1$. Tính giới hạn $\lim\dfrac{u_n+1}{u_n+4}$

b) $u_1=3, u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}, \forall n\ge 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$

Bài tập 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

Dạng 4: Giới hạn dãy số dạng căn thức

Phương pháp: Ở dạng toán này ta thường gặp 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Đơn giản thì ta chỉ rút nhân tử chung (như dạng 2)

Lưu ý: $\sqrt[2a]{n^{2a}} = |n| = \begin{cases} n & \text{khi } n \geq 0 \\ -n & \text{khi } n < 0 \end{cases}$ ở đây ta chỉ có $n \to +\infty$ nên $\sqrt[2a]{n^{2a}} = n$

Trường hợp 2: Nhân lượng liên hợp, khi giới hạn ở dạng vô định: $\frac{0}{0}; 0.\infty; \frac{\infty}{\infty}$

$\oplus$ $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

$\oplus$ $\sqrt{A} - B = \dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

$\oplus$ $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \dfrac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$

$\oplus$ $\sqrt[3]{A} - B = \dfrac{A-B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}.B + (B)^2}$

Bên cạnh đó áp dụng các tính chất để tính được kết quả của giới hạn:

a) $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ (với k là số nguyên dương).

b) $\lim q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$).

c) Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+5}\right)$

b) $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1} - n\right)$

c) $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3} + n\right)$

d) $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right]$

e) $\lim\sqrt{\dfrac{8n+2}{2n-1}}$

f) $\lim\sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}$

g) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$

h) $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

Bài tập 2: Tính các giới hạn sau đây:

a) $A = \lim\dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}+3n}$

b) $B = \lim\dfrac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}}$

c) $C = \lim\dfrac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$

d) $D = \lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6+n+1}-4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2}$

e) $E = \lim\dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}$

f) $F = \lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$

Dạng 5: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp: Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q|<1$.

- Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n):

$$S=u_1+u_2+...+u_n+...=\frac{u_1}{1-q}$$

- Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng luỹ thừa của 10:

$$X=N,a_1a_2a_3...a_n...=N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+...+\frac{a^n}{10^n}+...$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},...,\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},...$

Bài tập 2: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a=0,212121...$ (chu kỳ là 21). Tìm a dưới dạng phân số.

Bài tập 3: Tổng $S_n=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+...+(0,9)^{n-1}+...$ có kết quả bằng bao nhiêu?

Bài tập 4: Cho $S=1+q+q^2+q^3+...,\ |q|<1$

$T=1+Q+Q^2+Q^3+...,\ |Q|<1;E=1+qQ+q^2Q^2+q^3Q^3+...$. Biểu thị biểu thức E theo S,T

Bài tập 5: Tìm số hạng U_1 của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S=4;\ q=\frac{1}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\lim\dfrac{3}{2n+3}$ được kết quả bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 2: Tính $\lim\dfrac{-3n+4}{3+n}$ được kết quả bằng

A. -1. **B.** $-\infty$. **C.** -3. **D.** 4.

Câu 3: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n(n+1)}{2n^2+n+3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 4: Giới hạn $\lim\dfrac{2n+1}{n^2+3n+2}$ bằng

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 5: Giới hạn $\lim\dfrac{n-n^3}{n^2+n+1}$ bằng

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

Câu 6: Giới hạn $\lim\dfrac{2n^2+n+5}{2n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 7: Giới hạn $L=\lim\dfrac{(2n-3)(3n+1)}{6n^2+n+1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 8: Cho $L=\lim\dfrac{(an+1)^3(n^2+3n+5)}{(2n-1)^2(n^2+3)^2}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $L=\dfrac{1}{2}$.

A. $a=0$. **B.** $a=1$. **C.** $a\in\mathbb{R}$. **D.** $a\in\varnothing$.

Câu 9: Giới hạn $L=\lim\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 10: Cho dãy số $(u_n): u_n=\dfrac{1}{n^2+n}, n\in\mathbb{N}^*$ và $(v_n): v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_n$. Tính $\lim v_n$

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 11: Tính $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+2}+n}{n-1}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** 5.

Câu 12: Tính $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2023}}{2n+2024}$.

A. $\dfrac{\sqrt[3]{2023}}{2024}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 13: Tính $\lim\dfrac{\sqrt{n+5}-2n}{n-1}$.

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Câu 14: Tính $\lim\dfrac{3\sqrt{n+5}-2\sqrt{n}}{n^2+5}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Câu 15: Tính $\lim\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+4n+3}{3n-7}$.

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 4.

Câu 16: Tính $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6+4}-\sqrt[3]{27n^6-3n^2+1}}{n^2-2024}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** -3. **D.** -2.

Câu 17: Tính $\lim\dfrac{\sqrt{n^2-4}-\sqrt[3]{8n^3+n^2}}{n}$.

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** -1.

Câu 18: Giả sử $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-4}-\sqrt[3]{n^3+n^2}}{5n+11}=\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $T=2a-3b$ bằng

A. -9. **B.** -1. **C.** 21. **D.** -11.

Câu 19: Biết $\lim\dfrac{\sqrt{16n^4-4}-\sqrt[3]{n^6+\pi}}{an^2+\pi}=-12$ với $a\neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\in(-12;-2)$. **B.** $a\in(-2;2)$. **C.** $a\in(2;6)$. **D.** $a\in(6;12)$.

Câu 20: Biết $\lim\dfrac{\sqrt{n^4-4}-\sqrt[3]{27n^6+5}+9n+1}{an^2+n+1}=-1$ với $a\neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\in(-7;-1)$. **B.** $a\in(-1;1)$. **C.** $a\in(1;7)$. **D.** $a\in(7;12)$.

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{3n+1}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 22: Tính $\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n+1}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Câu 23: Kết quả của $\lim n\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 24: Giá trị đúng của $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-1}\right)\right]$ là

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{-1}{2}$.

Câu 25: Biết $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)=\dfrac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+2b$ bằng.

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 26: Giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+5n+1}-n\right)$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 27: Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 28: Giới hạn $\lim\left(\sqrt{an^2+bn+1}-n\right)=\dfrac{3}{2}\,(a;b\in\mathbb{Z})$. Khi đó a^3+b^2 bằng.

A. 12. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 29: Biết giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2}\right)\right]=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, giá trị a^2-b bằng.

A. 3. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 30: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $c^2+a=8$ và $\lim\left(\sqrt{an^2+bn}-cn\right)=2$.

Tính $P=a+b+c$

A. -24. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 31: Cho dãy (u_n) có $\lim u_n=3$, dãy (v_n) có $\lim v_n=5$. Khi đó $\lim(u_n.v_n)=?$

A. 15. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 32: Cho $\lim u_n=-3$; $\lim v_n=2$. Khi đó $\lim(u_n-v_n)$ bằng

A. -5. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 33: Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim q^n=0\ (|q|>1)$. **B.** $\lim C=C$ (C là hằng số).

C. $\lim\dfrac{1}{n^k}=0\ (k>1)$. **D.** $\lim\dfrac{1}{n}=0$.

Câu 34: Tìm $\lim\dfrac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3}$.

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 35: Giá trị $\lim\dfrac{1+19n}{18n+19}$ bằng

A. $\dfrac{19}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{19}$.

Câu 36: $\lim(n^2-n+1).(2-n)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 37: $\lim\left(2^{2n}-3^n\right)$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 38: Kết quả của $\lim\dfrac{3^n-2.5^{2n}}{2^{n+1}+5^{n+5}}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 2 **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 39: Biết rằng $\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=b\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a}{b^3}$.

A. $P=\dfrac{1}{27}$. **B.** $P=3$. **C.** $P=27$. **D.** $P=\dfrac{1}{3}$.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 41: $\lim\left[\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right]$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Câu 42: Cho dãy (u_n) với $u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính $S_{2020}=u_1+u_2+u_3+...+u_{2020}$, ta được kết quả

A. $2021-\dfrac{1}{2^{2020}}$. **B.** $2021+\dfrac{1}{2^{2020}}$. **C.** $2020+\dfrac{1}{2^{2019}}$. **D.** $2020-\dfrac{1}{2^{2019}}$.

Câu 43: Tổng vô hạn sau đây $S=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^n}+...$ có giá trị bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 44: Tính tổng các nghiệm $x\in(0;\pi)$ của phương trình $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+...+\sin^n x+...=1$.

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** π. **C.** $\dfrac{5\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{3}$.

Câu 45: Giới hạn $\lim\dfrac{3\sqrt{5n^2+n}}{2(3n+1)}=\dfrac{a\sqrt{5}}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tổng $T=a+b$ bằng

A. 9 **B.** 3 **C.** 8 **D.** 5

Câu 46: Tính giới hạn $\lim\dfrac{3^{n+1}-4.5^n}{2.5^n+5.4^{n+1}}$.

A. $-\dfrac{1}{7}$. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

Câu 47: Giá trị của tham số a để $\lim\dfrac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=\dfrac{4}{3}$ là

A. $a=\dfrac{8}{3}$. **B.** $a=\dfrac{2}{3}$. **C.** $a=\dfrac{3}{2}$. **D.** $a=6$.

Câu 48: Biết $\lim\dfrac{4n+1}{2n+5}=a$ và $\lim\dfrac{3^n+4^n}{4^{n+1}+3}=b$. Tổng $a+4b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 49: Cho $\lim\left(\sqrt{n^2+an}-n\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Số thực a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 50: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $\lim\dfrac{an^3+2bn^2+n+2023}{2n^2+3}=1$. Tổng $2a+b$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 51: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $\lim\left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+bn+1}\right)=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+b=2$. **B.** $a-b=2$. **C.** $a+b=1$. **D.** $a-b=1$.

Câu 52: Giá trị $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 0.

Câu 53: Biết $\lim\dfrac{2n^4+n+1}{n-n^3+3n^4}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+2b$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 54: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 55: Cho số $a=3{,}13131313...$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì là 13, số a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản dạng $a=\dfrac{x}{y}$, trong đó x và y là các số nguyên dương. Tìm tổng $x+y$.

A. $x+y=490$. **B.** $x+y=409$. **C.** $x+y=211$. **D.** $x+y=130$.

Câu 56: Biết $\lim\dfrac{2n^4+n+1}{n-n^3+3n^4}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+2b$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 57: Biết $\lim\dfrac{2n^2+3n^3}{n^3+2}=\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b};(a;b\in\mathbb{N})$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 58: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2^{2023}n}-\sqrt{n^2-2^{2023}n}\right)$ là

A. 2^{2024}. **B.** 2^{2023}. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 61: Giá trị của $E=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{2n^3-3n^2+1}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 62: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3, 2u_{n+1}=u_n+1, \forall n\ge 1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đàu tiên của dãy số (u_n). Tính $\lim S_n$.

A. $\lim S_n=-\infty$. **B.** $\lim S_n=1$. **C.** $\lim S_n=+\infty$. **D.** $\lim S_n=-1$.

Câu 63: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Giới hạn của dãy số bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Câu 64: $\lim\frac{6\sin n-8\cos n}{3n^2+1}$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 65: $\lim\frac{\sqrt[3]{n^2}.\cos(n!)}{2n+1}$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 66: $\lim\left(5-\frac{n.\cos 2n}{n^2+3}\right)$ bằng

A. 5. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 67: Chọn kết quả đúng của $\lim\frac{\sqrt{n^2-2n+5}-\sqrt{n^4+3n^2+1}}{3+5n}$:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $+\infty$.

Câu 68: Biết $\lim\frac{2n^2+3n^3}{n^3+2}=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b};(a;b\in\mathbb{N})$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 69: $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 70: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}$ với $n\in\mathbb{N}^*$ Giá trị của $\lim u_n$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1

Câu 71: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 72: Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+...+\frac{1}{n^2-1}$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 73: Tính giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 74: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 75: Tìm $L=\lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{1+2+...+n}\right)$

A. $L=\frac{5}{2}$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=2$. **D.** $L=\frac{3}{2}$.

Câu 76: Với n là số nguyên dương, đặt $S_n=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Câu 77: Đặt $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$, xét dãy số (u_n) sao cho $u_n=\frac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).\text{f}(6)...f(2n)}$. Tìm $\lim n\sqrt{u_n}$.

A. $\lim n\sqrt{u_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{3}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{2}$.

Câu 78: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n=\frac{1}{C_3^3}+\frac{1}{C_4^3}+\frac{1}{C_5^4}+...+\frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$.

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 79: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** −2. **D.** −3.

Câu 80: Một hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi bán kính của khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng.

A. Chiều cao của mô hình không quá 1,5 mét. **B.** Chiều cao của mô hình tối đa là 2 mét.
C. Chiều cao của mô hình dưới 2 mét. **D.** Mô hình có thể đat được chiều cao tùy ý.

Câu 81: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3,...$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng x và với mỗi số nguyên dương $n\geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$. **B.** $\sqrt{3}x^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Biết giới hạn $\lim\frac{2n+1}{2-3n}=a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giá trị a lớn hơn 0.

b) $x=a$ là trục đối xứng của parabol $(P): y=3x^2+4x-7$.

c) Bộ ba số $-\frac{5}{3};a;\frac{1}{3}$ lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 2.

d) Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q=3$ và $u_1=a$ thì $u_3=6$.

Câu 2: Giả sử ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$. Với $(a;b\in\mathbb{R})$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=a.b$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[2f(x)-g(x)\right]=2a-b$.

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$.

d) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)}\right]=a+\frac{2b}{a}$ với $(a\neq 0)$.

Câu 3: Tính được các giới hạn. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim(\sqrt{2})^n=-\infty$

b) $\lim\pi^n=0$

c) $\lim\left(2n^3+2n^2-4\right)=+\infty$

d) $\lim\left(-5n^4+n^3-4n\right)=-\infty$

Câu 4: Tìm được tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

và $T=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{3^n}+\ldots$ Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=\frac{1}{2}$.

b) $T=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{3^n}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=\frac{1}{3}$.

c) $S>T$

d) $S=\frac{1}{T}$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của $a=2$.

b) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của $a=3$.

c) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của a là một số nguyên

d) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng -2, giá trị của $a=-2$

Câu 6: Đặt $I = \lim\left(\sqrt{n^2+a^2n} - \sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta biến đổi được $I = \lim\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

b) Nếu $I=0$ thì có 3 giá trị a thỏa mãn

c) Nếu $I=0$ thì tổng các giá trị a tìm được bằng 1

d) Có 2 giá trị a nguyên để $I=1$

Câu 7: Cho giới hạn $L = \lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $a=1$ thì $L=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) Khi $a=0$ thì $L=\dfrac{1}{3}$

c) Khi $a>0$ thì $L>0$

d) Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với b, c là các tham số thì $P=\dfrac{a+c}{b^3}=\dfrac{1}{2}$

Câu 8: Cho giới hạn $L=\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $L=2$ khi $a=1$

b) $L=3$ thì có 2 giá trị nguyên a thỏa mãn

c) $L>3$ khi $a>6$

d) Có 3 giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

Câu 9: Biết $\lim\dfrac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=2$ và $\lim\dfrac{3^n+4^{n+1}}{4^n+3}=b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giá trị của $a=2$

b) Giá trị của $b=4$

c) $2a-b=0$

d) Ba số $a,b,16$ lập thành một cấp số nhân

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $u_n=an^2+n-1$ với $a\in\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $a=1$, giới hạn của dãy số đã cho là 1.

b) Với $a=2$, giới hạn của dãy số đã cho là $+\infty$.

c) Với $a=-\dfrac{5}{2}$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

d) Với $a\le 0$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

Câu 11: Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 5000000 đồng một tháng. Cứ sau một chu kỳ 3 năm thì ông An được tăng lương 4%. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 5200000 đồng

b) Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng

c) Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận u_n, sau n chu kì năm công tác là: $u_n = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^n$ đồng

d) Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: $\lim \dfrac{n.\sqrt{n^2+1}}{-2n^2+n+1}$ bằng bao nhiêu (kết quả viết dưới dạng số thập phân)?

Câu 2: Tổng $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \ldots$ bằng bao nhiêu (kết quả viết dưới dạng số thập phân)?

Câu 3: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n-1}{n.2^n} + 2024$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Cho $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{4n^2-3n+1} - (an+b)\right] = 0, (a, b \in \mathbb{R})$. Tính $S = a + 8b$.

Câu 5: Biết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,212121... = \dfrac{a}{b}$ (với a, b là các số dương có ước chung lớn nhất là 1). Tính giá trị $a + b$.

Câu 6: Giới hạn $\lim \dfrac{2n^2 - 3\sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n} + 2n} = \lim \dfrac{a\sqrt{n} - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}}{b + \dfrac{2}{\sqrt{n}}}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $P = a + b^2$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2} - n\right) = \lim \dfrac{a.\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + b.\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right)} + 1}$ với $a;b$ là các số tự nhiên.

Tính $S = (a+b)^2$

Câu 8: Giới hạn $\lim \sqrt[3]{\dfrac{2^{3n} - 3^{n+1}}{8^{n+1} + 6^{n-1}}} = \lim \sqrt[3]{\dfrac{1 - 3.a^n}{8 + \dfrac{1}{6}.b^n}}$ với $a;b$ là các số hữu tỉ. Tính giá trị $8(a+b)$

Câu 9: Tìm giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

Câu 10: Tìm tổng $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \ldots$

Câu 11: Giá trị của tổng $T = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ldots + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \ldots = a + \sqrt{b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S = (a+b)^2$

Câu 12: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414\ldots$ viết dạng phân số có dạng $\dfrac{m}{n}$ với *m;n* là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $n-3m$

Câu 13: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111\ldots$ viết dạng phân số có dạng $\dfrac{a}{b}$ với *a;b* là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $|b-2a|$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1=-2 \\ u_n=3u_{n-1}-1, \forall n\ge 2 \end{cases}$, tính $\lim \dfrac{u_n}{3^n}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Câu 15: Biết rằng giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+5}+3-n\right)=\lim\left(\dfrac{5-a.n}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+b\right)$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S=a^b$

Câu 16: Biết rằng giới hạn $\lim\left(1+3n-\sqrt{9n^2-n+7}\right)=\lim\left(a+\dfrac{n-7}{b.n+c.\sqrt{9n^2-n+7}}\right)$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $|a-b|+c$

Câu 17: Biết giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\dfrac{a}{\sqrt[3]{\left(n^3+3\right)^2}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\dfrac{b}{n+\sqrt{n^2+2}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $T=2a+3b$.

Câu 18: Giới hạn dãy số $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}$ có dạng $\lim\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{b}{n}}+\sqrt{1+\frac{c}{n}}}$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $a^2+b^2+c^2$

Câu 19: Biết giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}-b\right)^2}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $S=a+b$.

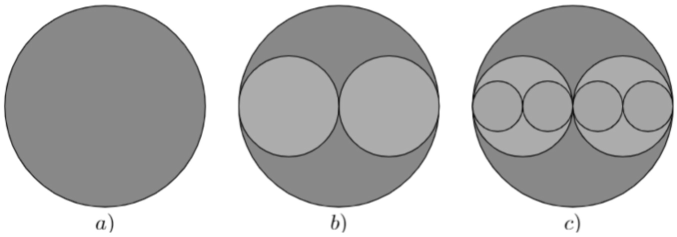
Câu 20: Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Câu 21: Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{1+3+5+...+2n-1}{5n^2-n+1}$.

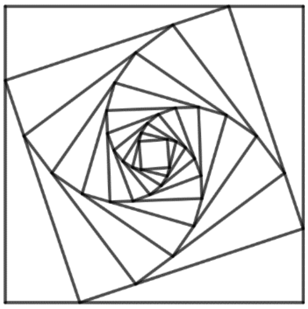
Câu 22: Tính giới hạn $L=\lim\left[\dfrac{\left(3^n+2\right)\left(2^n+1\right)}{3^n+2}-2^n+2\right]$.

Câu 23: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^{24}+6n^{12}+1}-\sqrt[3]{n^{36}+3n^{24}+2}\right)$.

Câu 24: Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính $R=2(\text{cm})$ như Hình $3a$. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\dfrac{R}{2}$ chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình $3b$. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\dfrac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như hình 3c). Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Câu 25: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (hình vẽ). Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i $\left(i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\right)$. Khi đó $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2025}{a^2}\left(S_1 + S_2 + \dots + S_n\right)$ bằng bao nhiêu?



Câu 26: Từ độ cao $55,8\,m$ của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (hình vẽ). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng nảy lên với độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Tổng quãng đường mà quả bóng di chuyển từ khi thả cho đến khi dừng hẳn bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

----------------HẾT----------------

BÀI 02 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giới hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa x_0 và hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên K hoặc $K\setminus\left\{x_0\right\}$. Ta nói hàm số $y=f\left(x\right)$ có giới hạn là số thực L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số $\left(x_n\right)$ bất kì, $x_n\in K\setminus\left\{x_0\right\}$ và $x_n\to x_0$ ta có $f\left(x\right)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0;\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (với c là hằng số).

Định lý về giới hạn hữu hạn:

- Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=M$ khi đó:

  ⊕ $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)+\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=L+M$.

  ⊕ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]=L.M$.

  ⊕ $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)-\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=L-M$.

  ⊕ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

- Nếu $f\left(x\right)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}=\sqrt{f\left(x\right)}=\sqrt{L}$

  (Dấu của $f\left(x\right)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x\neq x_0$)

2 Giới hạn một bên

- Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(x_0;b\right)$. Số thực L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $f\left(x\right)$ khi $x\to x_0$ nếu với mọi dãy số $\left(x_n\right)$ bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ ta có $\lim f\left(x_n\right)=L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=L$ hoặc $f\left(x\right)\to L$ khi $x\to x_0^+$.

- Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a;x_0\right)$. Số thực L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $f\left(x\right)$ khi $x\to x_0$ nếu với mọi dãy số $\left(x_n\right)$ bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$ ta có $\lim f\left(x_n\right)=L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=L$ hoặc $f\left(x\right)\to L$ khi $x\to x_0^-$.

Định lý: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=L$

Nguyên lý kẹp: Cho ba hàm số $f\left(x\right),g\left(x\right),h\left(x\right)$ xác định trên K chứa điểm x_0.

Nếu $g\left(x\right)\leq f\left(x\right)\leq h\left(x\right)\ \forall x\in K$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0} h\left(x\right)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$.

3 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có **g**iới hạn là số thực L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số thực L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

Lưu ý:

Với c,k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c; \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0.$

Định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x\to x_0$ vẫn còn đúng khi $x\to\pm\infty$.

4 Giới hạn vô cực của hàm số

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa về giới hạn hữu hạn.

Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y=f(x)$ khi x dần tới $+\infty$ được định nghĩa như sau:

Định nghĩa giới hạn vô cực: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a, x_n\to+\infty$, ta có $(f(x_n))\to-\infty$. **Kí hiệu:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x))=-\infty$.

Tính chất:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ với k là số lẻ.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với k là số chẵn.

5 Quy tắc tìm giới hạn vô cực của hàm số

Các định lí sau vẫn đúng cho các trường hợp $x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to+\infty, x\to-\infty$.

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$:

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\ne0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$
$+$	$+\infty$	$+\infty$
$+$	$-\infty$	$-\infty$
$-$	$+\infty$	$-\infty$
$-$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$:

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=0$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=0$ và $g\left(x\right)>0$ hoặc $g\left(x\right)<0$ với mọi $x\neq x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g\left(x\right)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right]$
$+$	$+\infty$	$+\infty$
$+$	$-\infty$	$-\infty$
$-$	$+\infty$	$-\infty$
$-$	$-\infty$	$+\infty$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giới hạn của hàm số tại một điểm

Phương pháp:

Bài toán 1: Cả tử số và mẫu số đều là các đa thức

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức và $f(x_0)=g(x_0)=0.$
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: phân tích tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x-x_0$.
- Giả sử $f(x)=(x-x_0).f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0).g_1(x)$
- Khi đó: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Nhận xét:

- Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình trên cho đến khi không còn dạng vô định.
- Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

Bài toán 2: Cả tử số và mẫu số đều là căn thức

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các căn thức và $f(x_0)=g(x_0)=0$.
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn để trục các nhân tử $x-x_0$ ra khỏi căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0.

Nhận xét: Có thể nhân liên hợp một hoặc nhiều lần để khử dạng vô định.

Chú ý: Các hằng đẳng thức:

- $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
- $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$
- $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$ e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x+1}$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n}{x+x^2+...+x^m}$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

Bài tập 2: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}$ i) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x-7}{x^3+1}$

j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2+x-6\right)^2}{-x^3+2x^2}$

Bài tập 3: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x+4}{x^3-4x^2+3}$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$ h) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$

Dạng 2: Tính giới hạn của hàm số tại vô cực

Phương pháp:

Dạng 1: $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x),Q(x)$ là các đa thức hoặc các hàm số.

- Gọi $p=\deg P(x),q=\deg Q(x)$ và $m=\min(p,q)$.
  Chia cả tử và mẫu cho x^m ta có kết luận. ($\deg P(x)$ là bậc cao nhất của đa thức $P(x)$).
- Khi đó:
  Nếu $p\le q$ thì tồn tại giới hạn.
  Nếu $p>q$ thì không tồn tại giới hạn.

Deg = bậc của đa thức

Dạng 2: Giới hạn $\infty-\infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0.\infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Các công thức liên hợp thường gặp:

⊕ $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

⊕ $\sqrt{A}-B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

⊕ $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$

⊕ $\sqrt[3]{A}-B=\dfrac{A-B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}.B+(B)^2}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

b) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

c) $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

d) $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

e) $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+7}{2x^3-1}$

f) $F=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}$

g) $G=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+3}{x-4}$

h) $H=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-2x+3}{5-x}$

i) $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(1+2x)^{50}}$

j) $J=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$

k) $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$

l) $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x+3}{6x+\sqrt{4x^2+x+3}}$

Bài tập 2: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\sqrt{2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$

Dạng 3: Giới hạn một bên của hàm số

Phương pháp: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ thì:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)=\begin{cases}+\infty \Leftrightarrow L.\lim\limits_{x\to x_0} g(x)>0\\ -\infty \Leftrightarrow L.\lim\limits_{x\to x_0} g(x)<0\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\\ +\infty \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L.g(x)>0\\ -\infty \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L.g(x)<0\end{cases}$

Chú ý: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+3}{2-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3-x^2}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{1-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$

f) $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{2-x^2-3x}$

Bài tập 2: Cho hàm số:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{voi } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{voi } x\geq 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{voi } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{voi } x\geq 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Bài tập 3: Tìm các giới hạn một bên và giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3\leq x\leq 3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} & \text{khi } x>3\end{cases}$ khi $x\to 3$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{4(3x^2-5x+2)} & \text{khi } x<1\end{cases}$ khi $x\to 1$

c) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ 5+\dfrac{4-x}{x+1} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ khi $x\to 0$

Bài tập 4: Gọi a,b là các giá trị để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}, x<-1\\ x+1, x\ge -1\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -1. Tính $a-b$.

Dạng 4: Bài toán thực tế và liên môn

Phương pháp: Sử dụng các định nghĩa, định lý để áp dụng vào giải các bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một hồ nuôi tôm chứa $600m^3$ nước mặn với nồng độ muối $1\,kg/m^3$. Chủ hồ nuôi tôm dự định chuyển đổi giống mới nên bơm nước vào hồ với vận tốc $3m^3$ / phút để làm ngọt hóa nước trong hồ.

a) Viết biểu thức $C(x)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau x phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Bài tập 2: Một công ty sản xuất giày da đã xác định được rằng, tính trung bình một công nhân có thể làm được $f(x)=\dfrac{16x}{15+2x}$ đôi giày mỗi ngày sau khi được đào tạo t ngày. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Bài tập 3: Chi phí để sản xuất x chai nước ngọt của công ty nước giải khát A được xác định bởi hàm số $F(x)=50000+15x$ (đơn vị: nghìn đồng).

a) Tính chi phí trung bình $\overline{F}(x)$ để công ty sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{F}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Bài tập 4: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm Thủ Thiêm trong một giây được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{400v}{v^2+3v+6}$, trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim\limits_{v\to 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài tập 5: Một bar ngoài trời ở khu du lịch A đã xác định được rằng, tính trung bình một ngày số lượng khách du lịch đến bar được xác định bởi công thức $f(x)=\dfrac{6000x}{50+12x}$ khách mỗi ngày sau khi số nhân viên của bar được tăng lên x nhân viên. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Bài tập 6: Chi phí để sản xuất x kg chả mực của cửa hàng bán chả mực A được xác định bởi hàm số $F(x)=60000+320x$ (đơn vị: nghìn đồng).

a) Tính chi phí trung bình $\overline{F}(x)$ để công ty sản xuất x kg chả mực.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{F}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Bài tập 7: Trong thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức: $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Bài tập 8: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t)=45t^2-t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tặng người bệnh giữa hai thời điểm t_1,t_2 là $v_{tb}=\dfrac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$. Tính $\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{g(t)-g(10)}{t-10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Bài tập 9: Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25 lít/phút.

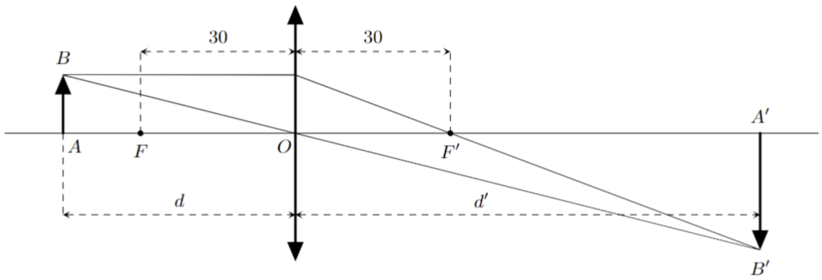
a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị g/l) là $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

Bài tập 10: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ. Công thức thấu kính là $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}$.

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d'=\varphi(d)$.

b) Tìm $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)$, $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$ và $\lim\limits_{d\to f}\varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.



Bài tập 11: Một công ty sản xuất máy tính cầm tay đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $C(t)=\dfrac{30t}{5+t}$ $(t\geq 0)$ chiếc máy tính mỗi ngày sau khi được đào tạo t ngày. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả này.

Bài tập 12: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x)=60000+250x$.

a) Tính chi phí trung bình $\overline{F}(x)$ để công ty sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Bài tập 13: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm trong 1 giây được cho bởi công thức sau đây: $f(v)=\dfrac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$, trong đó v (m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm $\lim\limits_{v\to 15} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài tập 14: Một hồ nước chứa $500m^3$ nước mặn với nồng độ muối $6kg/m^3$. Người ta dự định ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước vào hồ với vận tốc 3 (m^3/ phút).

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)$ là

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Cho $H=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1}$ và $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^2+2}{x^3+x+3}$. Tính $H+K$.

A. 0. **B.** 5. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Câu 4: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\left(x^2-2\right)}{x^2+x+3}=\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z}; b<0$. Biết $\dfrac{a}{b}$ tối giản thì $a+b$ bằng bao nhiêu ?

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$ là

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x-1}{x^2+2x}}$ là

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 7: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4x+4}+2}=\dfrac{a}{b}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a+b=3$. **B.** $b=4a$. **C.** $4b=a$. **D.** $a.b=1$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là 0.

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{9}{6}$. **C.** 0. **D.** Không có giá trị a.

Câu 9: Biết rằng $b<0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-b+x}}{x+1}=-2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $8<a<13$. **B.** $b<-1$. **C.** $a^2+b^2>10$. **D.** $a-b>0$..

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-2}{x+2}=5$. Khi đó hãy tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-4+\sqrt[3]{5f(x)+7}}{x^2+x}$.

A. 4. **B.** -2. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Câu 11: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ có kết quả là

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 12: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{6x^2+x+1}$ có kết quả là

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 13: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ có kết quả là

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Câu 14: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ có kết quả là

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 15: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ có kết quả là

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 16: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có kết quả là

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 17: Cho $a\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+\sqrt{x^2+x+1}}{2x-1}=2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a<-1$. **B.** $-1\le a\le 1$. **C.** $1\le a<2$. **D.** $a\ge 2$.

Câu 18: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(-x^2+1\right)^3\left(1-2x\right)^{94}}{2x^{100}+3}$ có kết quả là

A. $-\infty$. **B.** -2^{100}. **C.** 2^{93}. **D.** -2^{93}.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-x^2+1\right)^3\left(1-2x\right)^{94}}{2x^{100}+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[x^2\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)\right]^3\left[x\left(\frac{1}{x}-2\right)\right]^{94}}{x^{100}\left(2+\frac{3}{x^{100}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)^3x^{94}\left(\frac{1}{x}-2\right)^{94}}{x^{100}\left(2+\frac{3}{x^{100}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(\frac{1}{x}-2\right)^{94}}{2+\frac{3}{x^{100}}}=\frac{(-1)^3.(-2)^{94}}{2}=-2^{93}$$

Câu 19: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-\sqrt{4x^2-x+1}}{a^2x-1}=\dfrac{2}{3}$ với $a=\dfrac{m+\sqrt{57}}{n}>0$ và $m;n$ là số nguyên dương. Khi đó giá trị của biểu thức $S=m+n$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 20: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó m thuộc tập hợp nào?

A. $[3;6]$. **B.** $[-3;0]$. **C.** $[-6;-3]$. **D.** $[1;3]$.

Câu 21: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 22: Tìm $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Câu 24: Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 25: Cho biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=5a+b$.

A. -5. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 26: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** -1.

Câu 27: Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 28: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+2x\right)$.

A. 2. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 29: Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)$.

A. -1. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 30: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$.

A. 3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 31: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)$

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** -3.

Câu 32: Tính $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^3-1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 33: Kết quả của $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Câu 34: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 35: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\frac{3x-11}{x^3-1}}$ bằng

A. $-2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 36: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)\sqrt{\frac{3x}{x^2-1}}$ bằng

A. $-2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 37: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 4. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 38: Kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+16}\right)$ bằng

A. -1. **B.** -4. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 39: Kết quả của $\lim\limits_{x\to3^+}(x-3).\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 40: Kết quả của $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right).\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 41: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x+2}{x-2}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 42: Tính $N=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x+2}{x-3}$.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 43: Giới hạn $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+2}{x-3}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 44: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{4x-3}{x-1}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x-1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=5$ và $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-5$. Khẳng định nào sau đây là đúng?.

A. $\lim\limits_{x\to3}f(x)=5$. **B.** $\lim\limits_{x\to3}f(x)=0$.

C. Không tồn tại $\lim\limits_{x\to3}f(x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to3}f(x)=-5$.

Câu 47: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2+x-1}{x^2-4}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để $I<12$ biết $I=\lim\limits_{x\to -1}\left(x^4-2mx+m^2+3\right)$

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 49: Giả sử ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x).g(x)\right]=a.b$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=a-b$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=a+b$.

Câu 50: Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** -4.

Câu 51: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{4x+2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{-1}{4}$. **D.** $\dfrac{-1}{2}$.

Câu 52: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+9}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 53: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)$?

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 54: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Câu 55: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}$ bằng

A. a. **B.** b. **C.** c. **D.** $\dfrac{a+b}{c}$.

Câu 56: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$?

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 57: Để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $[3;6]$. **B.** $[-3;0]$. **C.** $[-6;-3]$. **D.** $[1;3]$.

Câu 58: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 59: Trong hồ có chứa 7000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t)=\dfrac{700+15t}{30.15t}$. **B.** $C(t)=\dfrac{30.15t}{700+15t}$. **C.** $C(t)=\dfrac{7000+15t}{30.15t}$. **D.** $C(t)=\dfrac{30.15t}{7000+15t}$.

Câu 60: Trong hồ có chứa 4000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 35 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t)=\dfrac{400+15t}{35.15t}$. **B.** $C(t)=\dfrac{35.15t}{400+15t}$. **C.** $C(t)=\dfrac{4000+15t}{35.15t}$. **D.** $C(t)=\dfrac{35.15t}{4000+15t}$.

Câu 61: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\dfrac{50t}{t+4}$ $(t\geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$

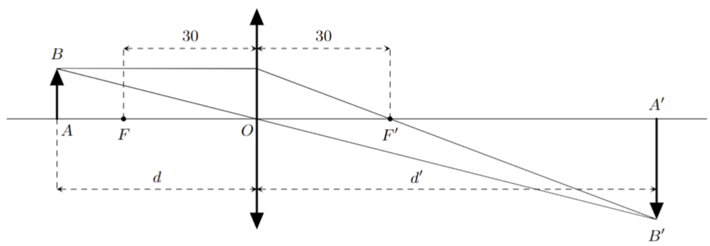
A. 20. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 50.

Câu 62: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\dfrac{40t}{t+4}$ $(t\geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$

A. 20. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 50.

Câu 63: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f>0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính. Ta có công thức $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}$ hay $d'=\dfrac{df}{d-f}$

Tìm giới hạn $\lim\limits_{d\to f^+}\dfrac{df}{d-f}$



A. $-\infty$. **B.** f^2. **C.** $+\infty$. **D.** f.

Câu 64: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\dfrac{30t}{t+4}$ $(t\geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$.

A. 20. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 50.

Câu 65: Một cái hồ đang chứa $400\ m^3$ nước mặn với nồng độ muối $10kg/m^3$. Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $3m^3$ / phút. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t)=\dfrac{3}{400+3t}$. **B.** $C(t)=\dfrac{400+3t}{3}$. **C.** $C(t)=\dfrac{400+3t}{4000}$. **D.** $C(t)=\dfrac{4000}{400+3t}$.

Câu 66: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm trong 1 giây được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{430v}{0,5v^2+16,2v+354}$, trong đó v (m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Khi các xe vào đường hầm với vận tốc xấp xỉ 15 (m/s) thì số xe vào đường hầm mỗi giây là

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 67: Giả sử khoảng cách từ đỉnh của vách đá đến mặt đất là $96\,ft$. Một hòn đá rơi từ đỉnh của một vách đá xuống đất, sau khoảng thời gian t giây, khoảng cách của nó so với đỉnh của vách đá là $s(t)=16t^2$. Tại thời điểm hòn đá chạm xuống đất vận tốc của hòn đá xấp xỉ bằng

A. $32\sqrt{6}$. **B.** $16\sqrt{6}$. **C.** 0 **D.** 32

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=2; \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\sqrt{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\sqrt{3}-2$.

d) $\lim\limits_{x\to -1}\left[f(x)-g(x)\right]=\dfrac{1}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\le 1\\ \sqrt{x^2+a}, x>1\end{cases}$ với a là tham số thực dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)=-9$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{1-x}=+\infty$.

d) Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ thì $a=8$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{(x-3)(x-2)}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=8$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{1-x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ không tồn tại.

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{khi } x<0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \\ 1 & \text{khi } x>0 \end{cases}$. Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

a) $f(0)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

d) Hàm số liên tục tại $x=0$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^2-3x+2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-1$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=\dfrac{1}{4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^3-x^2+x-1}>0$.

d) Để $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{ax+b}=2$ thì $a+3b=1$.

Câu 7: Cho $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $L=5$ khi $a=-10$

b) $L>0$ khi $a>0$

c) $L<0$ khi $a>0$

d) $L=-1$ thì a là một nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$

Câu 8: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

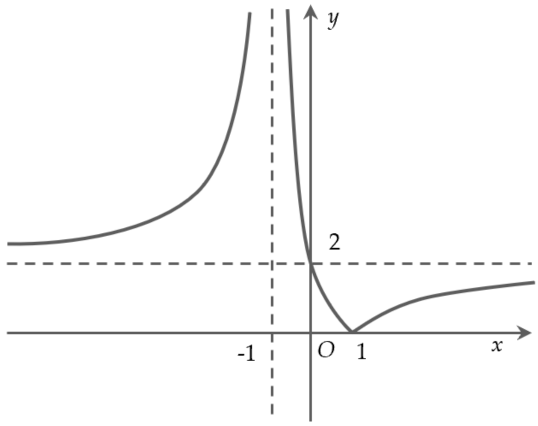
a) $a>0$

b) $b>0$

c) $a>b$

d) $P=4a+b=2$

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2$

d) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

Câu 10: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) a là số lẻ

b) $b>0$

c) $a.b<0$

d) $a-4b=5$

Câu 11: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a=9$

b) $b=3c$

c) $a=3c$

d) $P=a+b+5c=14$

Câu 12: Cho a, 3, c là các số thực khác 0. Biết giới hạn $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $L=3$ khi $\dfrac{a-1}{b}=3$

b) $L=6$ khi $\dfrac{a-1}{b}=4$

c) $L=2$ khi $a+2b=1$

d) $L=1$ khi $a+b=1$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{khi } x<-1 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x\ge -1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\sqrt{5}$

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-3$.

c) Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\sqrt{2}$

d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x\to -1$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{khi } x<2\\ \sqrt{x+2} & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-8$

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-3$

c) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$

d) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$. Tính giá trị của biểu thức $T=2024a-4049b$.

Câu 2: Biết $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{3x^2+2023x+2}-n\sqrt{3}\right)=\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, ở đó a,c là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, b là số nguyên tố. Khi đó hãy tính giá trị của $a+b+c$.

Câu 3: Biết $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}b$

Câu 4: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}$ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Tính giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left(3-2x^3\right)^2.(4x-1)}{\left(x^2-1\right)^2.(3+2x)^3}$

Câu 6: Một cái hồ chứa 600 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Nồng độ muối trong hồ khi t dần về dương vô cùng (đơn vị: gam/lít) là bao nhiêu?

Câu 7: Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-a.x}{b.x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)}$ với $a;b$ là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a+b^2$

Câu 8: Hàm Heaviside có dạng $H(t)=\begin{cases}0 & \text{khi } t<0\\ 1 & \text{khi } t\ge 0\end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$. Tính $\lim\limits_{t\to 0^-}H(t)+\lim\limits_{t\to 0^+}H(t)$.

Câu 9: Biết rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{\sqrt{x+9}+b}+\dfrac{c}{\sqrt{x+16}+d}\right]$ với $a;b;c;d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a;b;c;d$

Câu 10: Trong hệ trục toạ độ Oxy, lấy điểm A thuộc tia Ox và điểm $B(0;2)$ thuộc tia Oy. Giả sử hoành độ điểm A là $a>0$. Độ dài đường cao OH của tam giác OAB được tính theo công thức $\dfrac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$. Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương trục Ox thì độ dài AH thay đổi về gần giá trị bao nhiêu?

Câu 11: Biết rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{9x-2}+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{a}{b.\sqrt{5x-1}+3}-\dfrac{c}{4+d.\sqrt{9x-2}}\right)$ với $a;b;c;d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a;b;c;d$.

Câu 12: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(3+2x^2\right)^5\cdot\left(3x^3-4\right)^2}{\left(5-x^3\right)^2\cdot\left(1-2x^2\right)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\cdot\dfrac{\left(\dfrac{3}{x^2}+a\right)^5\cdot\left(b-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\dfrac{5}{x^3}-c\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}-d\right)^3}$ với $a;b;c;d$ là các số tự nhiên.

Tính tích các số $a;b;c;d$

Câu 13: Biến đổi giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(6-2x^4\right)^4\cdot\left(2-x^2\right)}{\left(x^2-3\right)^5\cdot(6-4x)}$ ta thu được kết quả dạng $\lim\limits_{x\to+\infty}x^a\cdot\dfrac{\left(\dfrac{6}{x^4}-2\right)^4\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{6}{x}-4\right)}$ với a là số tự nhiên. Xác định giá trị của a.

Câu 14: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4-x^2\right)^6\cdot\left(3x^2+2\right)^2}{\left(5x^2-3\right)^2\cdot\left(1-2x^5\right)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)^b}{\left(5-\dfrac{3}{x^2}\right)^a\cdot\left(\dfrac{1}{x^5}-2\right)^3}$ với $a;b;c;d$ là các số tự nhiên.

Tính $S=a-b$

Câu 15: Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$, tại $x=1$

-----------------**HẾT**-----------------

BÀI 03 HÀM SỐ LIÊN TỤC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số liên tục tại một điểm

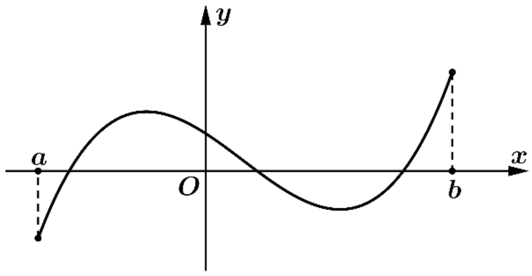
Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

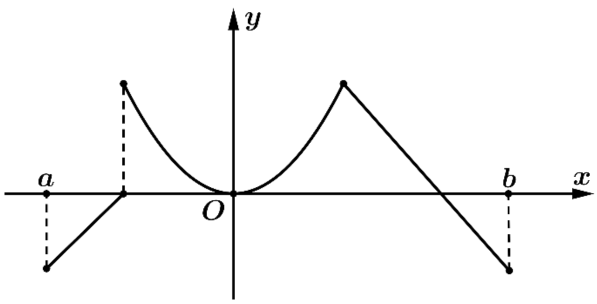
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

2 Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Chú ý: Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a;b];[a;b);(-\infty;b];[a;+\infty)$ được định nghĩa một cách tương tự. Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một " đường liền" trên khoảng đó.





3 Một số định lý

Định lý 1:
- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác thì liên tục trên tập xác định của nó.

Định lý 2: Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại x_0. Khi đó:
- Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x) \cdot g(x)$ cũng liên tục tại x_0.
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Bước 3: So sánh và rút ra kết luận.

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.

Đối với bài toán có chứa tham số thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x);\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Bước 3: So sánh và rút ra kết luận.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq f(x_0)$

Từ đó tìm được tham số thỏa yêu cầu.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ tại điểm $x_0=3$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ -6 & \text{khi } x=-2\end{cases}$ tại điểm $x_0=-2$.

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ 9 & \text{khi } x=3\end{cases}$ tại điểm $x_0=3$

d) $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{khi } x<3\\ x^2-4x+3 & \text{khi } x\geq 3\end{cases}$ tại điểm $x_0=3$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

f) $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$

g) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x>0\\ x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

h) $f\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

Bài tập 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}-3x^2+2x+1 & \text{khi } x\ne 7\\ 5a+1 & \text{khi } x=7\end{cases}$

a) Với $a=0$ hãy xét tính liên tục của hàm số tại $x=7$.

b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x=7$?

Bài tập 3: Tìm tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2x-m & \text{khi } x\ne 2\\ x+m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

Bài tập 4: Tìm tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x\ne -1\\ m^2+5m & \text{khi } x=-1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-1$

Bài tập 5: Tìm tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ m^2+5m & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x_0=1$

Bài tập 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x+1\right)^2 & \text{khi } x>1\\ x^2+3 & \text{khi } x<1\\ k^2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm k để $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$.

Bài tập 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ 3m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Bài tập 8: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 14a.x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x_0=1$.

Bài tập 9: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & \text{khi } x\ne 1\\ 3x+a & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$

Bài tập 10: Tìm m đề hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x_0=0$.

Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn, tập xác định

Phương pháp: Hàm số $f(x)$ liên tục trên một đoạn, khoảng hoặc tập xác định nếu nó liên tục tại mọi điểm trên đoạn, khoảng hoặc tập xác định đó.

Lưu ý:

- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a;b] khi hàm số đó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và thỏa mãn điều kiện: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$
- Hàm số đa thức thường có tính chất liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ, hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số sau:

a) $y = x^2 - 2x + \sin 2x$ b) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 3}$ c) $y = \sqrt{4 - x}$

Bài tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của nó.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} & \text{khi } x < 2 \\ 2 - x & \text{khi } x \ge 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \ne 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Bài tập 3: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \ne -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 4: Tìm giá trị tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ mx & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$.

Bài tập 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{5x - 7} + 3}{4 - \sqrt{4 - 3x}} & \text{khi } x < -4 \\ |mx| - \dfrac{41}{81} & \text{khi } x \ge -4 \end{cases}$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$.

Dạng 3: Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp: Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D thì ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số sao cho $f(a).f(b)<0$.

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D thì ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng dời nhau $(a_i;a_{i+1})(i=1,2,...,\mathrm{k})$ nằm trong D: $f(a_i).f(a_{i+1})<0$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Chứng minh rằng phương trình $x^5-3x-7=0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài tập 2: Chứng minh rằng phương trình $\cos x=x$ có nghiệm.

Bài tập 3: Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x^3+6x+1}-2=0$ có nghiệm dương .

Bài tập 4: Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m phương trình $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm.

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m phương trình $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$ luôn có nghiệm .

Bài tập 6: Chứng minh rằng phương trình $6x^3+2x^2-31x+10=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Bài tập 7: Chứng minh rằng phương trình $a\cos 2x+b\sin x+\cos x=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a,b

Bài tập 8: Chứng minh rằng phương trình $a\cos 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x=0$ luôn có nghiệm trên $[0;2\pi]$

Bài tập 9: Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Bài tập 10: Chứng minh rằng phương trình $x^3-2x^2+x-1-\frac{2}{x}+\frac{m}{x+3}=0$ luôn có nghiệm $\forall m$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại $x=2$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$. Khi đó ta phải gán $f(2)$ bằng bao nhiêu?

A. $f(2)=-4$. **B.** $f(2)=-1$. **C.** $f(2)=1$. **D.** $f(2)=4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{khi } x>0 \\ x & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f(0)=0$. **B.** $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.

C. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\ne 2 \\ 4 & \text{khi } x=2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số liên tục tại $x=2$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.

C. $f(4)=2$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{khi } x<0 \\ 1 & \text{khi } x=0 \\ x+1 & \text{khi } x>0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x=0$.

B. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

C. Hàm số đã cho liên tục tại $x=0$.

D. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x=1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x^2-x+2 & \text{khi } x<1 \\ 4 & \text{khi } x=1 \\ x+2 & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số không có giới hạn tại $x=1$ và không liên tục tại $x=1$.

B. Hàm số có giới hạn tại $x=1$ và liên tục tại $x=1$.

C. Hàm số không có giới hạn tại $x=1$ nhưng liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số có giới hạn tại $x=1$ nhưng không liên tục tại $x=1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x-2} & \text{khi } x<2 \\ -3 & \text{khi } x=2 \\ 1-2x & \text{khi } x>2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số không có giới hạn tại $x=2$ và không liên tục tại $x=2$.

B. Hàm số có giới hạn tại $x=2$ và liên tục tại $x=2$.

C. Hàm số không có giới hạn tại $x=2$ nhưng liên tục tại $x=2$.

D. Hàm số có giới hạn tại $x=2$ nhưng không liên tục $x=2$.

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

A. $m\neq -2$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $m\neq 3$.

Câu 8: Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} & \text{khi } x>4\\ 3x+m & \text{khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục tại $x=4$ khi m nhận giá trị là

A. -20. **B.** 20. **C.** -44. **D.** 44.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $f\left(1\right)$ không tính được. **B.** $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=0$.

C. $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$. **D.** $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & khi\ x>0\\ x+2021 & khi\ x\leq 0\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **ĐÚNG**?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=3$

C. Hàm số gián đoạn tại $x=0$ **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=1$

Câu 11: Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$?

A. $y=x+\dfrac{1}{x}$. **B.** $y=\sqrt{2-x}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-7}$. **D.** $y=x+7$.

Câu 12: Hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{3+x}+\sqrt{4-x}$ liên tục trên

A. $\left(3;10\right)$ **B.** $\left[-3;4\right]$ **C.** $\left[-3;+\infty\right)$ **D.** $\left(-\infty;4\right]$

Câu 13: Hàm số $y=\dfrac{5}{x\left(x^2-1\right)}$ liên tục tại điểm nào sau đây?

A. $x=0$. **B.** $x=\sqrt{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Câu 14: Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\ \ x\neq 1\\ m+2 & khi\ \ x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ ax+1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Xác định số thực a để hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

A. $a=-1$. **B.** $a=1$. **C.** $a=3$. **D.** $a=-3$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}}{x-4} & \text{khi } x\ne 4\\ a+2 & \text{khi } x=4\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số liên tục tại $x_0=4$.

A. $a=3$. **B.** $a=-\dfrac{15}{8}$. **C.** $a=2$. **D.** $a=\dfrac{5}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\ne 2\\ mx+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{17}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$. **C.** $m=\dfrac{13}{2}$. **D.** $m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{khi } x>1\\ -x^2+1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số gián đoạn tại $x=1$. **B.** Hàm số liên tục tại $x=1$.

C. Hàm số gián đoạn trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số liên tục trên khoảng $(0;3)$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x} & \text{khi } x>1\\ ax+2 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x=1$.

A. -3. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 20: Gọi a là giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-x}-x-2\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } 0<x\le 4\\ a+\dfrac{4-x}{x-2}, & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a\in\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$. **B.** $a\in\left(-1;-\dfrac{3}{5}\right)$. **C.** $a\in\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$. **D.** $a\in\left(-\dfrac{2}{5};0\right)$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\ne 2\\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=2$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.

C. $f(4)=2$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-3x+2}$. Khi đó hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 23: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=|x|$. **B.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Câu 24: Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x)=\sqrt{x-5}$. **B.** $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$. **C.** $f(x)=\cot x+3$. **D.** $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2-x}$.

Câu 25: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x+\sin x$. **B.** $y=5x-\tan x$. **C.** $y=2-\cot x$. **D.** $y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số không liên tục tại các điểm $x=\pm1$. **B.** Hàm số liên tục tại mọi $x\in\mathbb{R}$.
C. Hàm số liên tục tại điểm $x=-1$. **D.** Hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

Câu 27: Cho hàm số $y=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{khi } x\ge 2\\ 5x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số liên tục tại $x_0=1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & \text{khi } x\ne\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & \text{khi } x=\sqrt{3}\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục trên tập nào sau đây?

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(-\infty;\sqrt{3}\right]$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Câu 29: Chon hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x\ne 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 30: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ m+2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Câu 31: Số nghiệm của phương trình $x^3-3x-1=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.
C. Có đúng một nghiệm. **D.** Có đúng hai nghiệm.

Câu 33: Đối với tiền điện thông thường theo tháng sẽ được tính theo kiểu bậc thang. Cụ thể như sau:
Mức tiêu thụ điện ở 50 số điện đầu tiên từ $1-50$kw sẽ có giá 865đ/mỗi số điện.
Mức tiêu thụ điện 50 số điện tiếp theo từ $51-100$kw sẽ có giá 1135đ/mỗi số điện
Từ số điện thứ 101 giá tiền là 1495đ/mỗi số điện

Gọi y (đồng) là số tiền anh B phải trả sau khi tiêu thụ x (kw).

Khi đó hàm số của y theo x là $y=\begin{cases} 865x & \text{khi } x\le 50 \\ 1135x-13500 & \text{khi } 50<x\le 100 \\ 1495x-49500 & \text{khi } x>100 \end{cases}$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tự trên $(0;+\infty)$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=50$.
C. Hàm số gián đoạn tại $x=100$. **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=50$ và $x=100$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{khi } x<1 \\ k^2 & \text{khi } x=1 \\ (x+1)^2 & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

A. $k\ne -2$. **B.** $k\ne 2$. **C.** $k\ne \pm 2$. **D.** $k\ne \pm 1$.

Câu 35: Tìm $m,\ n$ để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2}{x-1} & \text{khi } x>1 \\ n & \text{khi } x=1 \\ mx+1 & \text{khi } x<1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $n=-1$ và $m=0$. **B.** $n=m=1$. **C.** $n=0$ và $m=1$. **D.** $n=1$ và $m=0$.

Câu 36: Hàm số nào sau đây không liên tục tại $x=2$?

A. $y=\sqrt{x+2}$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=\dfrac{x^2}{x-2}$. **D.** $y=x^2-3x+2$.

Câu 37: Hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x>0 \\ x+2023 & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số liên tục tại $x=3$.
C. Hàm số gián đoạn tại $x=0$. **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -x\cos x, x<0 \\ \dfrac{x^2}{1+x}, 0\le x<1 \\ x^3, x\ge 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm x thuộc $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=0$.

C. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=1$.

D. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=0$ và $x=1$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\ne 2 \\ m & \text{khi } x=2 \end{cases}$. Giá trị của m để hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=2$ là

A. $m\ne 3$. **B.** $m\ne 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1 \\ \dfrac{2}{3} & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=1$. **B.** Hàm số liên tục tại mọi điểm.

C. Hàm số gián đoạn tại tại $x=1$. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 42: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\ne 1 \\ 3x+m & \text{khi } x=1 \end{cases}$ gián đoạn tại $x=1$

A. $m\ne 0$. **B.** $m\ne 6$. **C.** $m=0$. **D.** $m=6$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x-1}-2}{x^2-1}, & x\ne 1 \\ 4-m & x=1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$ khi

A. $m=3$. **B.** $m\ne 3$. **C.** $m=7$. **D.** $m\ne 7$.

Câu 44: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x<-1 \\ mx+2 & \text{khi } x\ge -1 \end{cases}$ gián đoạn tại $x=-1$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{5}{2}$. **C.** $m\ne \dfrac{3}{2}$. **D.** $m\ne \dfrac{5}{2}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} m^2+mx-2 & \text{khi } x\ne 1 \\ 0 & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Tính tổng các giá trị tìm được của tham số m để hàm số liên tuc tại $x=1$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -1

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=1$.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{11}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$. **C.** $m=\dfrac{13}{2}$. **D.** $m=\dfrac{17}{2}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{khi } x\neq 2\\ m+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x=2$ bằng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Câu 49: Gọi S là tập các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3x & \text{khi } x\neq 1\\ m^2+m-8 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$. Tích các phần tử của tập S bằng

A. -2. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Câu 50: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2mx+m^2-4 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=1$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=1\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=1\end{array}\right.$. **D.** $m=-3$

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x>2\\ m^2x-4m+6 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} & \text{khi } x>8\\ ax+4 & \text{khi } x\le 8\end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x=8$, giá trị của a là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & khi\quad x\neq 0\\ 3 & khi\quad x=0\end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số liên tục tại $x_0=0$. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x^2-x+36a<0$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 54: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3a-5b-1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm điều kiện của tham số a,b để hàm số trên liên tục tại điểm $x=0$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a-8b=1$. **B.** $2a-6b=1$. **C.** $16a-33b=6$. **D.** $2a-4b=1$.

Câu 55: Hàm số nào sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$.

Câu 56: Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$?

A. $y=x+\dfrac{1}{x}$. **B.** $y=\sqrt{2-x}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-7}$. **D.** $y=x+7$.

Câu 57: Hàm số nào trong các hàm số sau đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left|x\right|$. **B.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{x}{\left|x\right|+1}$.

Câu 58: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2}{x^2+5x+6}$. Hàm số đã cho liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-3;3\right)$. **B.** $\left(-\infty;3\right)$. **C.** $\left(-3;2\right)$. **D.** $\left(-2;+\infty\right)$.

Câu 59: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & \text{khi } x<2\\ 2-x & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số liên tục tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số không liên tục trên $\left(2;+\infty\right)$. **D.** Hàm số gián đoạn tại điểm $x=2$.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\leq 2\\ \left(1-m\right)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 61: Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$ (với m là tham số). Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. m là một số hữu tỉ. **B.** m là một số vô tỉ.

C. $m>10$. **D.** $m<0$.

Câu 62: Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x<1\\ 2 & \text{khi } x=1\\ mx+1 & \text{khi } x>1\end{cases}$ liên tục trên tập xác định của nó.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Câu 63: Trong một tủ thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ $10°$ C, mỗi phút tăng $2°$ C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút $3°C$ trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $°$C) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

$$T(t)=\begin{cases}10+2t & \text{khi } 0\le t\le 60\\ k-3t & \text{khi } 60<t\le 100\end{cases}$$ (k là hằng số).

Biết rằng $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Giá trị của k là

A. $k=0$. **B.** $k=340$. **C.** $k=310$. **D.** $k=430$.

Câu 64: Cho hàm số $f(x)=x^3-1000x^2+0,01$. Phương trình $f(x)=0$ nghiệm thuộc khoảng nào trong các khoảng

I. $(-1;0)$. II. $(0;1)$. III. $(1;2)$. IV. $(2;1000)$.

A. Chỉ I,II,III. **B.** Chỉ I và II. **C.** Chỉ I,II,IV. **D.** Cả I,II,III và IV.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2; f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$?

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.
C. Có đúng một nghiệm **D.** Có đúng hai nghiệm.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 67: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$. Trong các mệnh đề sau,mệnh đề nào đúng?

A. Phương trình có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

B. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

C. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

D. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

Câu 68: Cho phương trình $f(x)=x^4-3x^2+x-\dfrac{1}{8}=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Phương trình có đúng một nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

B. Phương trình có đúng hai nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

C. Phương trình có đúng ba nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

D. Phương trình có đúng bốn nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

Câu 69: Cho phương trình $-4x^3+4x-1=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

B. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-\infty;1)$.

D. Hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 70: Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$?

A. Phương trình $2x^2-3x+4=0$.
B. Phương trình $3x^4-4x^2+5=0$.
C. Phương trình $(x-1)^5-x^7-2=0$.
D. Phương trình $3x^{2023}-8x+4=0$.

Câu 71: Phương trình $3x^5+5x^3+10=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-10;-2)$.

Câu 72: Phương trình $2x^4-4x^3-3=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Câu 73: Phương trình $3x^3+4x^2-5=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 74: Số nghiệm của phương trình $x^3+2x=4+3\sqrt{3-2x}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 75: Bảng giá cước của một hãng taxi được cho như sau:

Giá mở cửa	**Giá km tiếp theo**
$11\ 000$ đồng trên $0,7$ km	a đồng trên 1km ($a>11000$ đ)

Giá mở cửa: Khi lên taxi mà quãng đường di chuyển không quá 0,7 km thì hãng taxi vẫn tính 11000 đồng. Gọi y (đồng) là số tiền phải trả sau khi đi x (km). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để hàm số của y theo x liên tục tại $x=0,7$?

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 76: Giá cước gọi quốc tế của tập đoàn viễn thông X trong dịp khuyến mãi mừng thành lập tập đoàn cho bởi bảng sau

Thời gian	**Giá cước (VND/phút)**
5 phút đầu	6000
Từ phút thứ 6 đến phút thứ 10	5800
Từ phút thứ 11 đến phút thứ 20	5200
Từ phút thứ 21 đến phút thứ 30	5000
30 phút trở lên	a $(1000\le a\le 4500)$

Gọi y (đồng) là số tiền bác An phải trả sau khi gọi x (phút). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a là bội của 1000 để hàm số của y theo x liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2025}{x-45} & \text{khi } x\ne 45\\ 2m+4 & \text{khi } x=45\end{cases}$ (m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số $\mathbb{R}\setminus\{45\}$.

b) $\lim\limits_{x\to 45} f(x)=90$.

c) Hàm số liên tục tại $x=20$ với mọi m.

d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=44$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1\\ mx+3 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ (với m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$.

c) Hàm số luôn liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=-1$.

Câu 3: Cho hàm số $g(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) $g(-1)=-2$.

c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x=-1$.

d) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x=1$.

Câu 4: Cho các hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+15}$ và $h(x)=\begin{cases}f(x) & \text{khi } x<1\\ g(x) & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Hàm số $g(x)$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) $h(1)=4$.

d) Hàm số $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

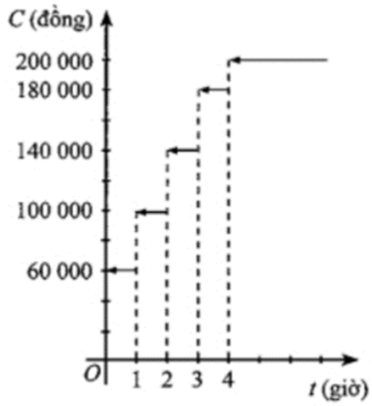
Câu 5: Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đồ thị hàm số $C=C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số $C=C(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

c) Từ đồ thị ta thấy $\lim\limits_{t\to 3} C(t)=180000$.

d) Một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người là 20000 đồng.



Câu 6: Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở của $(0,5km)$	Giá cước các km tiếp theo đến $30km$	Giá cưới từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11000 đồng

a) Công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển

$$f(x)=\begin{cases}5000+13500(x-0,5);\ 0,5<x\le 30\\ 403250+11000(x-30);\ x>30\end{cases}.$$

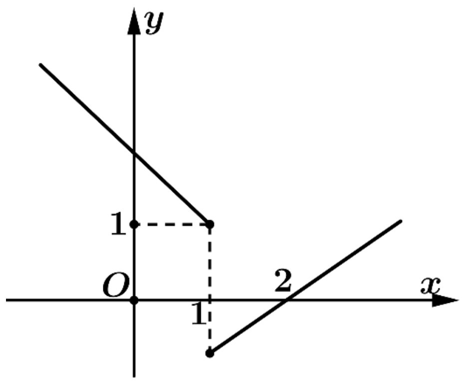
b) Công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển

$$f(x)=\begin{cases}10000x;\ x\le 0,5\\ 5000+13500(x-0,5);\ 0,5<x\le 30\\ 403250+11000(x-30);\ x>30\end{cases}.$$

c) Hàm số $f(x)=\begin{cases}10000x;\ x\le 0,5\\ 5000+13500(x-0,5);\ 0,5<x\le 30\\ 403250+11000(x-30);\ x>30\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

d) Khách hàng đi quãng đường 40 km thì số tiền vị khách đó phải trả là 515000 đồng.

Câu 7: Cho hàm số có đồ thị như hình dưới:



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=0$.

b) Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x=2$.

c) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=1$.

d) Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x=1$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{khi } x\le -1 \\ x+2 & \text{khi } -1<x<1 \\ 2x+3 & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=-2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại điểm $x=0$.

c) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=-1$.

d) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=1$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi } x\ne 1 \\ 8+a^2 & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(1)=8+a^2$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4a+3$.

c) Hàm số đã cho liên tục tại $x=1$ khi $a=0$.

d) Có tất cả 2 giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục tại $x=1$.

Câu 10: Cho phương trình $2x^3-8x-1=0$ (1). Đặt hàm số $y=f(x)=2x^3-8x-1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

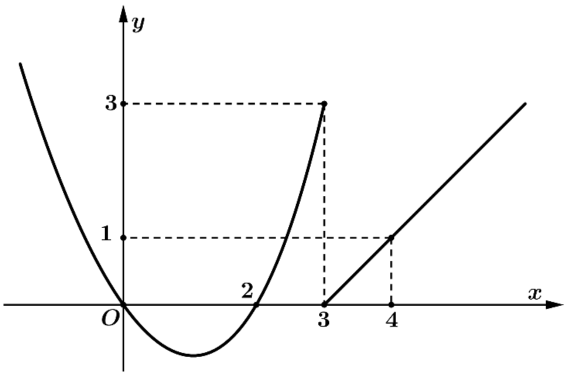
a) Hàm số $y=f(x)=2x^3-8x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-5;-1)$.

c) Phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt.

d) Phương trình $f(\sin x)+1=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $\mathbb{R}$.

c) Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại điểm $x=3$.

d) Hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 2x-1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Xét tính đúng sai cho mỗi khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{2\right\}$.

b) Hàm số liên tục tại điểm $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2}f\left(x\right)=f\left(2\right)$.

c) Hàm số gián đoạn tại điểm $x=2$.

d) Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\leq 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Nếu $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=f\left(1\right)$ thì hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

c) Hàm số liên tục tại $x_0=1$ với $a=-1$.

d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với $a=1$.

Câu 14: Cho phương trình $x^2=\sqrt{x+1}$ (1) và phương trình $x^3-3x+1=0$ (2). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình (1) là $x\geq -1$.

b) Phương trình (1) và (2) có nghiệm trong $(1;2)$.

c) Phương trình (1) và (2) có nghiệm trong $(-1;0)$.

d) Phương trình (1) có nhiều nhất 1 nghiệm.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ -6 & \text{khi } x=-2\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f\left(-2\right)=-6$.

b) $f\left(-2\right)=6$.

c) $\lim\limits_{x\to(-2)}f\left(x\right)=-5$.

d) Hàm số liên tục tại $x=-2$.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}ax+3 & \text{khi } x\geq 1\\ x^2+x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f\left(1\right)=4$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=a+3$.

d) Hàm số liên tục tại $x=1$ khi $a=-2$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a,b,c là các số thực). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $a = -3; b = 0; c = 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-2;0)$

b) Với $a = -3; b = 0; c = 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-2;3)$

c) Với các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c>0 \\ 8+4a+2b+c<0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là 2.

d) Với các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases} a+c>b+1 \\ a+b+c+1<0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là 3.

Câu 18: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.

c) Giới hạn: $\lim\limits_{x \to 5^+} f(t) = 20$

d) Số dân của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Câu 19: Cho các hàm số $f_1(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$; $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & x \neq -2 \\ x-1, & x=-2 \end{cases}$; $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} & \text{khi } x>4 \\ 2x-m & \text{khi } x \le 4 \end{cases}$;

$f_4(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{khi } x<1 \\ k^2 & \text{khi } x=1 \\ (x-2)^2 & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $f_1(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

b) Hàm số $f_2(x)$ liên tục tại $x_0 = -2$.

c) Hàm số $f_3(x)$ liên tục tại $x = 4$ khi $m = -24$.

d) Với $k \neq \pm 1$ thì $f_4(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \dfrac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $g(2)=1$.

b) Giới hạn $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$.

c)Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

d) Khi $a < 1$ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 + 2x + 1$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Với $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(-1;3)$.

c) Với mọi $m \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;1)$

d) Với $m < 1$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm dương.

Câu 22: Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $T(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$T(x) = \begin{cases} 50000,\ 0 < x \le 2 \\ 120000,\ 2 < x < 4 \\ 35000x,\ x \ge 4 \end{cases}$$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $T(2) = 50000$.

b) $\lim_{x\to 4^+} T(x) = 120000$.

c) Hàm số $T(x)$ liên tục tại $x = 4$.

d) Hàm số $T(x)$ liên tục trên $[4;+\infty)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x \ne 1 \\ m^2x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 2: Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \dfrac{1}{2} & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6} & \text{khi } x \ne 2 \\ \dfrac{4mx-1}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số trên liên tục tại $x_0 = 2$

Câu 4: Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$

Câu 5: Tìm giá trị của m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq -2\\ m & \text{khi } x=-2\end{cases}$ liên tục trên tập xác định của chúng.

Câu 6: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-3x-4 & \text{khi } x\geq 1\\ m & \text{khi } x<1\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$.

Câu 8: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x>2\\ a^2x-\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\leq 2\end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$.

Câu 9: Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$. Phương trình có đúng m nghiệm trên khoảng $\left(-1;1\right)$. Tìm m.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t)=\begin{cases}10+a & \text{khi } 0\leq t\leq 5\\ t^2-5t+10 & \text{khi } t>5\end{cases}$, trong đó $v\left(t\right)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Tìm a để hàm $v\left(t\right)$ có liên tục tại điểm $t=5$.

Câu 11: Một hãng taxi đưa ra giá cước $T\left(x\right)$ (đồng) khi đi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như sau: $T\left(x\right)=\begin{cases}10000+a & \text{khi } 0<x\leq 0,7\\ 11000+15100.\left(x-0,7\right) & \text{khi } 0,7<x\leq 30\\ 453430+12000.\left(x-30\right) & \text{khi } x>30\end{cases}$. Tìm a để hàm số $T\left(x\right)$ liên tục tại $x=0,7$.

Câu 12: Giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x>3\\ 1-m^2x & \text{khi } x\leq 3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$ viết dưới dạng $m=-\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, $\left(m>0, a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}^*\right)$. Hiệu của $a-b$ bằng?

Câu 13: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Câu 14: Xác định giá trị của a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+\left(2a+1\right)x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.(Kết quả chính xác đến hàng phần chục)

Câu 15: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}a-b+c-1>0\\ 4a+2b+c+8<0\end{cases}$. Tìm số nghiệm của phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$.

Câu 16: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi tham số $m=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $2a+b$ bằng

Câu 17: Nhiệt độ sấy mít dẻo bằng máy sấy nhiệt được điều khiển tăng từ $30°\text{C}$ mỗi phút tăng $3°\text{C}$ trong 12 phút, sau đó giảm mỗi phút $1°\text{C}$ trong 6 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $°\text{C}$) trong máy sấy nhiệt theo thời gian t (tính theo phút) có dạng $T\left(t\right)=\begin{cases}30+3t & \text{khi } 0\leq t\leq 12\\ m-t & \text{khi } 12<t\leq 18\end{cases}$ (m là hằng số). Biết rằng $T\left(t\right)$ là hàm số liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của m.

Câu 18: Tính tổng các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x<1\\ 2 & \text{khi } x=1\\ m^2x+1 & \text{khi } x<1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

Câu 19: Số dân của một thị trấn sau x năm kể từ năm 1980 được tính bởi công thức $f\left(x\right)=\dfrac{6000x}{50+12x}$ ($f\left(x\right)$ được tính bằng nghìn người). Số dân của thị trấn đó không vượt quá bao nhiêu người.

Câu 20: Tính tổng các giá trị tìm được của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\leq 1\\ \left(2-m\right)x & \text{khi } x>1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 21: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{3x+1}}{x-1}, & \text{khi } x\neq 1\\ a^2+ax-\dfrac{8}{3}, & \text{khi } x=1\end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Câu 22: Gọi S là tập các giá trị của tham số a để hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-3x & \text{khi } x\neq 1\\ a^2+a-8 & \text{khi } x\neq 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính tích các phần tử của S.

Câu 23: Một chuyển động thẳng biến đổi đều trong 5 giây đầu có phương trình đường đi là $s\left(t\right)=2t^2+10t$ và sau đó tiếp tục chuyển động theo phương trình $S\left(t\right)=at^2+3t$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tìm giá trị của a.

Câu 24: Hàm số $v\left(t\right)=\begin{cases}-t^2+4t+12 & \text{khi } 0\leq t\leq 5\\ at-3 & \text{khi } 5<t\leq 10\end{cases}$ mô tả vận tốc (m/s) của một vật tại thời điểm t (giây) trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên kể từ khi vật bắt đầu chuyển động. Biết rằng $v\left(t\right)$ là hàm

liên tục trên đoạn $[0;10]$ và trong 10 giây đầu tiên đó, có hai lần vật đạt vận tốc $10\,(\text{m/s})$ là vào các thời điểm t_1 giây và t_2 giây. Tính t_1+t_2 (Kết quả làm tròn đến hàng phần 10)

-----------------HẾT-----------------

CHƯƠNG 5

GIỚI HẠN HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 01 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Chú ý: Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0 , ta có các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q|<1$
- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$ và kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2 Định lý về giới hạn hữu hạn

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$
- $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{a}{b}$ (nếu $b \ne 0$).

b) Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \ge 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \ge 0 \end{cases}$.

3 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn u_n có công bội q, với $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính bằng công thức sau đây:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q} \quad |q| < 1 .$$

4 Giới hạn vô cực của dãy số

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$. Nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương
- $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giới hạn bằng định nghĩa, định lí về giới hạn dãy số

Phương pháp:

- Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh
  $\forall a > 0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số n_a sao cho $|u_n| < a \ \forall n > n_a$
- Để chứng minh $\lim u_n = L$ ta chứng minh $\lim(u_n - L) = 0$
- Để chứng minh $\lim u_n = +\infty$ ta chứng minh
  $\forall M > 0$ lớn tùy ý luôn tồn tại một số n_M sao cho $u_n > M \ \forall n > n_M$
- Để chứng minh $\lim u_n = -\infty$ ta chứng minh $\lim(-u_n) = +\infty$
- Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\dfrac{-2n+1}{n}$ b) $\lim\dfrac{\sqrt{16n^2-2}}{n}$ c) $\lim\dfrac{4}{2n+1}$

d) $\lim\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2}$ e) $\lim\dfrac{1}{-3n+7}$ f) $\lim\dfrac{2}{(n+1)(n-2)}$

g) $\lim\dfrac{3}{2^n+1}$ h) $\lim\dfrac{2^n}{5+7^n}$ i) $\lim\dfrac{-3n^2+4n+1}{2n^3-3n+7}$

j) $\lim\dfrac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n}$ k) $\lim\dfrac{4.3^n+5^n}{2.5^n+7^n}$ l) $\lim\dfrac{4^n+7^n}{(2^n+1)(5+7^n)}$

Lời giải

a) $\lim\dfrac{-2n+1}{n} = \lim\left(-2+\dfrac{1}{n}\right) = -2$.

b) $\lim\dfrac{\sqrt{16n^2-2}}{n} = \lim\sqrt{\dfrac{16n^2-2}{n^2}} = \sqrt{\lim\left(16-\dfrac{2}{n^2}\right)} = \sqrt{16} = 4$.

c) $\lim\dfrac{4}{2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{4}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{0}{2+0}=0$.

d) $\lim\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2}=\lim\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{2n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

e) $\lim\dfrac{1}{-3n+7}=\lim\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{\left(-3+\dfrac{7}{n}\right)}=0.\dfrac{1}{-3+0}=0$.

f) $\lim\dfrac{2}{(n+1)(n-2)}=\lim\dfrac{1}{n^2}.\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}=0.\dfrac{1}{(1+0)(1-0)}=0$.

g) $\lim\dfrac{3}{2^n+1}=\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.\dfrac{3}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=0.\dfrac{3}{1+0}=0$.

h) $\lim\dfrac{2^n}{5+7^n}=\lim\left(\dfrac{2}{7}\right)^n.\dfrac{1}{5.\left(\dfrac{1}{7}\right)^n+1}=0.\dfrac{1}{5.0+1}=0$.

i) $\lim\dfrac{-3n^2+4n+1}{2n^3-3n+7}=\lim\dfrac{1}{n}.\left(\dfrac{-3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}}\right)=0.\dfrac{-3+0+0}{2-0+0}=0$.

j) $\lim\dfrac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n}=\lim\dfrac{2n^2-2n-2}{n^3+n}=\lim\dfrac{1}{n}.\left(\dfrac{2-\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)=0.\dfrac{2-0-0}{1+0}=0$.

k) $\lim\dfrac{4.3^n+5^n}{2.5^n+7^n}=\lim\left(\dfrac{5}{7}\right)^n\left(\dfrac{4.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1}{2.\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+1}\right)=0.\dfrac{4.0+1}{2.0+1}=0$.

l) $\lim\dfrac{4^n+7^n}{(2^n+1)(5+7^n)}=\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\dfrac{\left(\dfrac{4}{7}\right)^n+1}{\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)\left(5.\left(\dfrac{1}{7}\right)^n+1\right)}\right)=0$.

Bài tập 2: Chứng minh các giới hạn sau đây:

a) $\lim\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$ b) $\lim\dfrac{6n+2}{n+5}=6$ c) $\lim\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$

c) $\lim\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$ d) $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin3n}{3^n}\right)=3$ e) $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

a) Ta có $\lim\left(\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=\lim\dfrac{n-8}{n^2+4}$ vì $0\le\left|\dfrac{n-8}{n^2+4}\right|\le\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$.

Mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=0$ nên do đó $\lim\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$

b) Ta có $\lim\left(\dfrac{6n+2}{n+5}-6\right)=\lim\dfrac{-28}{n+5}$. Vì $\left|\dfrac{-28}{n+5}\right|<\dfrac{28}{n}$.

Mà $\lim\dfrac{28}{n}=0$ nên $\lim\left(\dfrac{6n+2}{n+5}-6\right)=0$ nên do đó $\lim\dfrac{6n+2}{n+5}=6$.

c) Ta có $\lim\left(\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=\lim\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}$. Vì $0<\left|\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}\right|<\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}<\dfrac{3.7^n}{8^n}=3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$.

Mà nên $\lim\left(\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=0$ nên do đó $\lim\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$.

d) Ta có $\lim\left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=\lim\dfrac{3^n}{5^n+3^n}$. Vì $0<\left|\dfrac{3^n}{5^n+3^n}\right|<\dfrac{3^n}{5^n+3^n}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

Mà $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ nên $\lim\left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=0$ nên do đó $\lim\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$.

e) Ta có $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin3n}{3^n}-3\right)=\lim\left(\dfrac{-\sin3n}{3^n}\right)$. Vì $0\le\left|\dfrac{-\sin3n}{3^n}\right|=\dfrac{|-\sin3n|}{3^n}\le\dfrac{1}{3^n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Mà $\lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{-\sin3n}{3^n}\right)=0$ nên do đó $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin3n}{3^n}\right)=3$.

f) Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\dfrac{2\sqrt{n^2+n}-(2n+1)}{2}=\lim\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}$.

Vì $0\le\left|\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}\right|\le\dfrac{1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}\le\dfrac{1}{2\left(2\sqrt{n^2}+2n\right)}=\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{8}\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}=0$.

Do đó $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$.

Dạng 2: Giới hạn dạng phân thức

Phương pháp: Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các đa thức bậc n.

- **Bước 1:** Đặt n^k, n^i với k là số mũ cao nhất của đa thức $f(n)$ và i là số mũ cao nhất của đa thức $g(n)$ ra làm nhân tử chung.
- **Bước 2:** Áp dụng kết quả $\lim \dfrac{1}{n^k}=0$ suy ra $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}=...$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim \dfrac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2}$ b) $\lim \dfrac{n^3-7n}{1+2n^2}$ c) $\lim \dfrac{n+2}{n^2+n+1}$

d) $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ e) $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$ f) $\lim \dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim \dfrac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2}=\lim \dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n}-4\right)}{n^3\left(2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)}=\lim \dfrac{\dfrac{1}{n}-4}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=\dfrac{-4}{2}=-2$.

b) Ta có: $\lim \dfrac{n^3-7n}{1+2n^2}=\lim \dfrac{n^3\left(1-\dfrac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n^2}+2\right)}=\lim \left(n.\dfrac{1-\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+2}\right)=+\infty$.

Vì $\lim \left(\dfrac{1-\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+2}\right)=\dfrac{1}{2}>0; \lim n=+\infty$.

c) Ta có: $\lim \dfrac{n+2}{n^2+n+1}=\lim \dfrac{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim \dfrac{1}{n}.\dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=0$.

d)
$$\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}=\lim \dfrac{n^4}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right).n\left(\dfrac{2}{n}+1\right)n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{2}{n}+1\right)\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=1$$

e) $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}=\lim \dfrac{-4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{-4}{2}=-2$

f) $\lim \dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}=\lim \left(\dfrac{5n^2}{n^2}+\dfrac{3n}{n^2}-\dfrac{7}{n^2}\right)=\lim \left(5+\dfrac{3}{n}-\dfrac{7}{n^2}\right)=5$

Bài tập 2: Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{-3n^3+2n^2+1}{2n^3-n}$ b) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+n+3}$ c) $u_n = \dfrac{2025n+2024}{n-2023}$

Lời giải

a) $\lim u_n = \lim\dfrac{-3n^3+2n^2+1}{2n^3-n} = \lim\dfrac{n^3\left(-3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim\dfrac{-3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n^2}} = -\dfrac{3}{2}$

b) $\lim u_n = \lim\dfrac{2n+1}{n^2+n+3} = \lim\dfrac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)} = \lim\dfrac{1}{n}.\dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}} = 0$

c) $\lim u_n = \lim\dfrac{2025n+2024}{n-2023} = \lim\dfrac{n\left(2025+\dfrac{2024}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{2023}{n}\right)} = \lim\dfrac{2025+\dfrac{2024}{n}}{1-\dfrac{2023}{n}} = 2025$.

Bài tập 3: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b bằng bào nhiêu ?

Lời giải

Ta có: $\lim u_n = \lim\dfrac{2n+b}{5n+3} = \lim\dfrac{2+\dfrac{b}{n}}{5+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{2}{5}\ (\forall b \in \mathbb{R})$

Giải nhanh : $\dfrac{2n+b}{5n+3} \sim \dfrac{2n}{5n} = \dfrac{2}{5}$ với mọi $b \in \mathbb{R}$.

Bài tập 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $2 = \lim u_n = \lim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5} = \lim\dfrac{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{a+\dfrac{5}{n^2}} = \dfrac{4}{a}\ (a \neq 0) \Leftrightarrow a = 2.$

Giải nhanh : $2 \sim \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5} \sim \dfrac{4n^2}{an^2} = \dfrac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2.$

Dạng 3: Giới hạn dãy số dạng lũy thừa

Phương pháp: Tính giới hạn $\lim\frac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các lũy thừa dạng X^n

- **Bước 1:** Đưa biểu thức về cùng số mũ n.
- **Bước 2:** Chia tử và mẫu số cho a^n trong đó a là số có trị tuyệt đối lớn nhất.
- **Bước 3:** Áp dụng kết quả " Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n=0$".

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\left(2^n+3^n\right)$ b) $\lim\left[-4^n+(-2)^n\right]$ c) $\lim\left(\frac{1+3^n}{3.3^n+2^n}\right)$

d) $\lim\left(\frac{4.3^n-2^n}{2.5^n+4^n}\right)$ e) $\lim\left(\frac{7^n+1}{-2.3^n-3.6^n}\right)$ f) $\lim\left(\frac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}\right)$

g) $\lim\frac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot3^{n+1}+2^n}$ h) $\lim\frac{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ i) $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$

j) $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$ k) $\lim\frac{(-1)^n2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$ l) $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$.

Lời giải

a) $\lim\left(2^n+3^n\right)=\lim3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]=+\infty.$

b) $\lim\left[-4^n+(-2)^n\right]=\lim4^n\left[-1+\left(-\frac{2}{4}\right)^n\right]=-\infty.$

c) $\lim\left(\frac{1+3^n}{3.3^n+2^n}\right)=\lim\left(\frac{\frac{1+3^n}{3^n}}{\frac{3.3^n+2^n}{3^n}}\right)=\lim\left(\frac{\frac{1}{3^n}+1}{3+\frac{2^n}{3^n}}\right)=\frac{1}{3}$

d) $\lim\left(\frac{4\cdot3^n-2^n}{3\cdot5^n+4^n}\right)=\lim\left(\frac{\frac{4\cdot3^n-2^n}{5^n}}{\frac{3\cdot5^n+4^n}{5^n}}\right)=\lim\left(\frac{4\cdot\frac{3^n}{5^n}-\frac{2^n}{5^n}}{2+\frac{4^n}{5^n}}\right)=0$

e) $\lim\left(\frac{7^n+1}{-2\cdot3^n-3\cdot6^n}\right)=\lim\left(\frac{\frac{7^n+1}{7^n}}{\frac{-2\cdot3^n-3\cdot6^n}{7^n}}\right)=\lim\left(\frac{1+\frac{1}{7^n}}{-2\cdot\frac{3^n}{7^n}-3\cdot\frac{6^n}{7^n}}\right)=-\infty$

f) $\lim\left(\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}\right)=\lim\left(\dfrac{\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{6^n}}{\dfrac{2.5^n-6^n}{6^n}}\right)=\lim\dfrac{5.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}{2.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-1}=0$

g) $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}=\lim\dfrac{1-\dfrac{3}{2}\left(1-3^n\right)}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1}{4}$

h) Đặt: $u_n=1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n;v_n=1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Ta có: $u_n=1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$. tương tự $v_n=1+\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{2^n}{5^n}\right)$.

Từ đó, $\lim u_n=\dfrac{3}{2},\lim v_n=\dfrac{5}{3}$. Vậy $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}=\dfrac{9}{10}$.

i) Giải nhanh: $\dfrac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}\sim\dfrac{-2.5^{n+1}}{5^n}=-10$ hoặc cụ thể: $\lim\dfrac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-10}{2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1}=-10$.

j) $\lim\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-8.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-3.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1}=\dfrac{0}{1}=0.$

k) $\lim\dfrac{(-1)^n\,2^{5n+1}}{3^{5n+2}}=\lim(-1)^n.\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0.$

l) Ta có: $\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-4.2\left(\dfrac{2}{4}\right)^n-\dfrac{3}{n^4}}{3.\left(\dfrac{2}{4}\right)^n+1}$ suy ra: $\lim\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\dfrac{0}{1}=0.$

Bài tập 2: Cho dãy số (u_n), xác định bởi:

a) $u_1=1;u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6}.\forall n\ge 1$. Tính giới hạn $\lim\dfrac{u_n+1}{u_n+4}$

b) $u_1=3,u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2},\forall n\ge 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$

Lời giải

a) Đặt $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 4}$. Ta có: $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \dfrac{2(u_n + 1)}{5(u_n + 4)} = \dfrac{2}{5} v_n = ... = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$.

Vậy, ta có: $v_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ do đó $\lim \dfrac{u_n + 1}{u_n + 4} = \lim v_n = 0$.

b) Ta có: $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{2} = \dfrac{1}{2^2}(u_{n-1} - 1) = \cdots = \dfrac{1}{2^n}(u_1 - 1) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Do đó, $u_n = \dfrac{1}{2^{n-2}} + 1$ nên $\lim u_n = \lim\left(\dfrac{1}{2^{n-2}} + 1\right) = 1$.

Bài tập 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3 + \dfrac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim \dfrac{an^2 - 1}{3 + n^2} = \lim \dfrac{a - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2} + 1} = a \\ \lim \dfrac{1}{2^n} = \lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\sqrt{3 + \dfrac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \dfrac{1}{2^n}} = \sqrt{3 + a}.$

Ta có $\begin{cases} a \in (0;20),\ a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a + 3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow a \in \{1;6;13\}$.

Dạng 4: Giới hạn dãy số dạng căn thức

Phương pháp: Ở dạng toán này ta thường gặp 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Đơn giản thì ta chỉ rút nhân tử chung (như dạng 2)

Lưu ý: $\sqrt[2a]{n^{2a}} = |n| = \begin{cases} n & \text{khi } n \geq 0 \\ -n & \text{khi } n < 0 \end{cases}$ ở đây ta chỉ có $n \to +\infty$ nên $\sqrt[2a]{n^{2a}} = n$

Trường hợp 2: Nhân lượng liên hợp, khi giới hạn ở dạng vô định: $\frac{0}{0}; 0.\infty; \frac{\infty}{\infty}$

$\oplus$ $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ $\oplus$ $\sqrt{A} - B = \dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

$\oplus$ $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \dfrac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$ $\oplus$ $\sqrt[3]{A} - B = \dfrac{A-B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{A}.B + (B)^2}$

Bên cạnh đó áp dụng các tính chất để tính được kết quả của giới hạn:

a) $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ (với k là số nguyên dương).

b) $\lim q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$).

c) Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+5}\right)$ b) $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1} - n\right)$ c) $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3} + n\right)$

d) $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right]$ e) $\lim \sqrt{\dfrac{8n+2}{2n-1}}$ f) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}$

g) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1} + 2n - 1}{\sqrt{n^2+4n+1} + n}$ h) $\lim \dfrac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1} + n^2}$

Lời giải

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+5}\right) = \lim \dfrac{n^2+7-n^2-5}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}} = 0$

b) Ta có: $\sqrt{n^2-n+1} - n \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1} - n\right) = \lim \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} = \lim \frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = -\frac{1}{2}$$

c) $\sqrt[3]{n^2-n^3} + n \sim \sqrt[3]{-n^3} + n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3} + n\right) = \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2} - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n}-1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

d) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \sim \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n}\right) = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

e) $$\lim\sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}}=\lim\sqrt{\frac{n\left(8+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}}=\lim\sqrt{\frac{8+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{8+0}{2-0}}=2$$

f) $$\lim\sqrt{\frac{2n+9}{n+2}}=\lim\sqrt{\frac{n\left(2+\frac{9}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}}=\lim\sqrt{\frac{2+\frac{9}{n}}{1+\frac{2}{n}}}=\sqrt{\frac{2}{1}}=\sqrt{2}$$

g) $$\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}=\lim\frac{n\sqrt{\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}+n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}+n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n}=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{\sqrt{4}+2}{1+1}=2.$$

h) $$\lim\frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=\lim\frac{n^2-\sqrt[3]{n^6\left(\frac{1}{n^6}-1\right)}}{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}+n^2}$$

$$=\lim\frac{n^2-n^2\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+n^2}=\lim\frac{n^2\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}\right)}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1\right)}=\lim\frac{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1}=\frac{1+\sqrt[3]{-1}}{1+1}=0.$$

Bài tập 2: Tính các giới hạn sau đây:

a) $A=\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}+3n}$

b) $B=\lim\dfrac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}}$

c) $C=\lim\dfrac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$

d) $D=\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6+n+1}-4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2}$

e) $E=\lim\dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}$

f) $F=\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$

Lời giải

a) $A=\lim\frac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}+3n}=\lim\frac{n\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}-2n+1}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3n}=\lim\frac{n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}-2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3\right)}$

$=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}-2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3}=0.$

b) $B=\lim\frac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}}=\lim\frac{2n+1-n\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}}{3n+n\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}}=\lim\frac{2+\frac{1}{n}-\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}}{3+\sqrt{1+\frac{7}{n}}}=\frac{1}{4}.$

c) $C=\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}=\lim\frac{n\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n}=\lim\frac{n\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{n}$

$=\lim\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=\sqrt{3}-1.$

d) $D=\lim\frac{\sqrt[3]{n^6+n+1}-4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2}=\lim\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}}-4\sqrt{1+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2}=\frac{1-4}{4}=-\frac{3}{4}.$

e) $E=\lim\frac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}=\lim\frac{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{8+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{16+\frac{4}{n}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^4}}}=\frac{2+2}{4-1}=\frac{4}{3}.$

f) $F=\lim\frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}=\lim\frac{\left(n^6+1-n^6\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)}{\left(n^4+1-n^4\right)\left[n^4-n^2\cdot\sqrt[3]{1-n^6}+\left(\sqrt[3]{1-n^6}\right)^2\right]}$

$=\lim\frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{n^4-n^2\cdot\sqrt[3]{1-n^6}+\left(\sqrt[3]{1-n^6}\right)^2}=\lim\frac{n^4\left(\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^8}}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^4.\left[1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}\right)^2\right]}$

$=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^8}}+\frac{1}{n^2}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}-1}\right)^2}=\lim\frac{\sqrt{0+0}+0}{1-\sqrt[3]{0+1}+\left(\sqrt[3]{0-1}\right)^2}=\frac{0}{1+1+1}=0.$

Dạng 5: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp: Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q|<1$.

- Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n):

$$S=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\frac{u_1}{1-q}$$

- Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng luỹ thừa của 10:

$$X=N,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots=N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots+\frac{a^n}{10^n}+\ldots$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\ldots,\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ldots$

Lời giải

Theo đề cho ta có: $u_1=1,\ q=-\frac{1}{2}$ nên suy ra $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

Bài tập 2: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a=0,212121\ldots$ (chu kỳ là 21). Tìm a dưới dạng phân số.

Lời giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

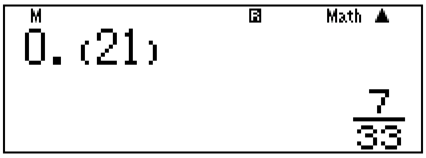
Ta có: $a=0,212121\ldots=0,21+0,0021+0,000021+\ldots=21\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots\right)$

Tổng $S=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots$ là tổng cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=\frac{1}{10^2}$, $q=\frac{1}{10^2}$.

Khi đó: $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{1}{99}$. Do đó $A=21.\frac{1}{99}=\frac{7}{33}$.

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $0,(21)$ và ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $\frac{7}{33}$.



Bài tập 3: Tổng $S_n=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+\ldots+(0,9)^{n-1}+\ldots$ có kết quả bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $S=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+\ldots+(0,9)^{n-1}+\ldots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng có $u_1 = 1,\ q = 0,9$ nên $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-0,9} = 10.$

Bài tập 4: Cho $S = 1 + q + q^2 + q^3 + ...,\ |q| < 1$

$T = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + ...,\ |Q| < 1\,; E = 1 + qQ + q^2Q^2 + q^3Q^3 + ...$ Biểu thị biểu thức E theo S, T

Lời giải

$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ...,\ |q| < 1$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, có $u_1 = 1,\ q = q.$

Khi đó: $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} \Rightarrow q = \dfrac{S-1}{S}$ $\quad (1)$

Tương tự: $T = \dfrac{1}{1-Q} \Rightarrow Q = \dfrac{T-1}{T}.$ $\quad (2)$

$E = 1 + q.Q + q^2.Q^2 + q^3.Q^3 + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng công bội qQ (vì $|qQ| < 1$, và $u_1 = 1$).

$E = \dfrac{u_1}{1-qQ}$ $\quad (3)$

Thay $(1),(2)$ vào (3): $E = \dfrac{u_1}{1 - \dfrac{T-1}{T}.\dfrac{S-1}{S}} \Rightarrow E = \dfrac{ST}{S+T-1}.$

Bài tập 5: Tìm số hạng U_1 của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S = 4;\ q = \dfrac{1}{2}.$

Lời giải

Ta có: $S = \dfrac{u_1}{1-q}\ (|q| < 1) \Rightarrow 4 - \dfrac{u_1}{1-\dfrac{1}{2}} \Rightarrow u_1 = 2.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\lim \frac{3}{2n+3}$ được kết quả bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim \frac{3}{2n+3} = \lim \frac{\frac{3}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{0}{2+0} = 0$.

Câu 2: Tính $\lim \frac{-3n+4}{3+n}$ được kết quả bằng

A. -1. **B.** $-\infty$. **C.** -3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\lim \frac{-3n+4}{3+n} = \lim \frac{-3+\frac{4}{n}}{\frac{3}{n}+1} = \frac{-3+0}{0+1} = -3$.

Câu 3: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2+n+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim u_n = \lim \frac{n(n+1)}{2n^2+n+3} = \lim \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{1+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$.

Câu 4: Giới hạn $\lim \frac{2n+1}{n^2+3n+2}$ bằng

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim \frac{2n+1}{n^2+3n+2} = \lim \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0+0} = 0$.

Câu 5: Giới hạn $\lim \frac{n-n^3}{n^2+n+1}$ bằng

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim \frac{n-n^3}{n^2+n+1}=\lim\left(n.\frac{\frac{1}{n^2}-1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=-\infty$

Vì $\lim n=+\infty$ và $\lim \frac{\frac{1}{n^2}-1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-1}{1+0+0}=-1<0$.

Câu 6: Giới hạn $\lim \frac{2n^2+n+5}{2n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim \frac{2n^2+n+5}{2n+1}=\lim\left(n.\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}\right)=+\infty$

Vì $\lim n=+\infty$ và $\lim \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{2+0+0}{2+0}=1>0$.

Câu 7: Giới hạn $L=\lim \frac{(2n-3)(3n+1)}{6n^2+n+1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $L=\lim \frac{(2n-3)(3n+1)}{6n^2+n+1}=\lim \frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right).n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(6+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim \frac{\left(2-\frac{3}{n}\right).\left(3+\frac{1}{n}\right)}{6+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2.3}{6}=1$.

Câu 8: Cho $L=\lim \frac{(an+1)^3(n^2+3n+5)}{(2n-1)^2(n^2+3)^2}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $L=\frac{1}{2}$.

A. $a=0$. **B.** $a=1$. **C.** $a\in\mathbb{R}$. **D.** $a\in\varnothing$.

Lời giải

Ta có: $L=\lim \frac{(an+1)^3(n^2+3n+5)}{(2n-1)(n^2+3)^2}=\lim \frac{n^3\left(a+\frac{1}{n}\right)^3.n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right).n^4\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^2}$

$=\lim \frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^3.\left(1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^2}=\frac{a^3}{2}$.

Từ đề bài suy ra $\frac{a^3}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=1$. Vậy $a=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: Giới hạn $L=\lim\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(*)$, thật vậy với $(*)$ đúng với $n=1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, ta có:

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)\left[2(k+1)+1\right]}{6}$$

Vậy $(*)$ đúng với $n\in\mathbb{N}^*$. Do đó:

$$L=\lim\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}=\lim\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$

$$=\lim\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n^3}=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{1}{3}.$$

Câu 10: Cho dãy số $(u_n): u_n=\dfrac{1}{n^2+n}, n\in\mathbb{N}^*$ và $(v_n): v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_n$. Tính $\lim v_n$

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có : $u_n=\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

Suy ra: $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Vậy $\lim v_n=\lim\dfrac{n}{n+1}=\lim\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$.

Câu 11: Tính $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+2}+n}{n-1}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+2}+n}{n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}+1}{1-\frac{1}{n}}=3$.

Câu 12: Tính $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2023}}{2n+2024}$.

A. $\dfrac{\sqrt[3]{2023}}{2024}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{\sqrt[3]{n^3+2023}}{2n+2024}=\lim\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2023}{n^3}}}{2+\frac{2024}{n}}=\frac{1}{2}$.

Câu 13: Tính $\lim\frac{\sqrt{n+5}-2n}{n-1}$.

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{\sqrt{n+5}-2n}{n-1}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}-2}{1-\frac{1}{n}}=-2$.

Câu 14: Tính $\lim\frac{3\sqrt{n+5}-2\sqrt{n}}{n^2+5}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{3\sqrt{n+5}-2\sqrt{n}}{n^2+5}=\lim\frac{3\sqrt{\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4}}-2\sqrt{\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{5}{n^2}}=0$.

Câu 15: Tính $\lim\frac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+4n+3}{3n-7}$.

A. 2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+4n+3}{3n-7}=\lim\frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+4+\frac{3}{n}}{3-\frac{7}{n}}=2$.

Câu 16: Tính $\lim\frac{\sqrt[3]{n^6+4}-\sqrt[3]{27n^6-3n^2+1}}{n^2-2024}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{\sqrt[3]{n^6+4}-\sqrt[3]{27n^6-3n^2+1}}{n^2-2024}=\lim\frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^6}}-\sqrt[3]{27-\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^6}}}{1-\frac{2024}{n^2}}=-2$.

Câu 17: Tính $\lim\frac{\sqrt{n^2-4}-\sqrt[3]{8n^3+n^2}}{n}$.

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** -1.

Lời giải

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4}-\sqrt[3]{8n^3+n^2}}{n}=\lim \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{4}{n^2}}-\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{n}}}{1}=-1$.

Câu 18: Giả sử $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-4}-\sqrt[3]{n^3+n^2}}{5n+11}=\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $T=2a-3b$ bằng

A. -9. **B.** -1. **C.** 21. **D.** -11.

Lời giải

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-4}-\sqrt[3]{n^3+n^2}}{5n+11}=\lim \dfrac{\sqrt{9-\dfrac{4}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}}{5+\dfrac{11}{n}}=\dfrac{2}{5}$.

Suy ra $a=2,b=5$. Do đó $T=2(2)-3(5)=-11$.

Câu 19: Biết $\lim \dfrac{\sqrt{16n^4-4}-\sqrt[3]{n^6+\pi}}{an^2+\pi}=-12$ với $a\neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\in(-12;-2)$. **B.** $a\in(-2;2)$. **C.** $a\in(2;6)$. **D.** $a\in(6;12)$.

Lời giải

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{16n^4-4}-\sqrt[3]{n^6+\pi}}{an^2+\pi}=\lim \dfrac{\sqrt{16-\dfrac{4}{n^4}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{\pi}{n^6}}}{a+\dfrac{\pi}{n^2}}=\dfrac{3}{a}$.

Suy ra $\dfrac{3}{a}=-12\Rightarrow a=-\dfrac{1}{4}\in(-2;2)$.

Câu 20: Biết $\lim \dfrac{\sqrt{n^4-4}-\sqrt[3]{27n^6+5}+9n+1}{an^2+n+1}=-1$ với $a\neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\in(-7;-1)$. **B.** $a\in(-1;1)$. **C.** $a\in(1;7)$. **D.** $a\in(7;12)$.

Lời giải

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{n^4-4}-\sqrt[3]{27n^6+5}+9n+1}{an^2+n+1}=\lim \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{4}{n^4}}-\sqrt[3]{27+\dfrac{5}{n^6}}+\dfrac{9}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{a+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{-2}{a}$.

Suy ra $\dfrac{-2}{a}=-1\Rightarrow a=2\in(1;7)$.

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{3n+1}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Ta có:

$$\lim\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{3n+1}\right)=\lim \frac{\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{3n+1}\right)\left(\sqrt{3n+5}+\sqrt{3n+1}\right)}{\sqrt{3n+5}+\sqrt{3n+1}}$$

$$=\lim \frac{4}{\sqrt{3n+5}+\sqrt{3n+1}}=\lim \frac{\dfrac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\dfrac{5}{n}}+\sqrt{3+\dfrac{1}{n}}}=0$$

Câu 22: Tính $\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n+1}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Lời giải

$$\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n+1}\right)=\lim\frac{4n-1}{n+\sqrt{n^2-4n+1}}=\lim\frac{4-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{4-0}{1+\sqrt{1-0+0}}=2.$$

Câu 23: Kết quả của $\lim n\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim n\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{5n}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\lim\frac{5}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}.$$

Ta có: $\begin{cases}\lim 5=5>0\\ \lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=0;\ \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}>0\,\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)n=+\infty$.

Câu 24: Giá trị đúng của $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-1}\right)\right]$ là

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{-1}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-1}\right)\right]=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}.$$

Câu 25: Biết $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)=\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+2b$ bằng.

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\frac{(n+1)^2-\left(n^2+n\right)}{n+1+\sqrt{n^2-n}}=\lim\frac{n+1}{n+1+\sqrt{n^2+n}}$

$$=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow a+2b=5.$$

Câu 26: Giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+5n+1}-n\right)$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+5n+1}-n\right)=\lim\frac{5n+1}{\sqrt{n^2+5n+1}+n}=\lim\frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{5}{2}.$$

Câu 27: Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có: $\lim n\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\lim n\left[\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right]$

$=\lim\left[n\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)+n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right]=\lim n\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)+\lim n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

Ta có: $\lim n\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)=\lim\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Ta có: $\lim n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\lim\dfrac{-n^2}{4n^2+2n\sqrt[3]{8n^3+n}+\left(\sqrt[3]{8n^3+n}\right)^2}$

$=\lim\dfrac{-1}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}+\left(\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}\right)^2}=-\dfrac{1}{12}$.

Vậy $\lim n\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 28: Giới hạn $\lim\left(\sqrt{an^2+bn+1}-n\right)=\dfrac{3}{2}\ (a;b\in\mathbb{Z})$. Khi đó a^3+b^2 bằng.

A. 12. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Ta có: $\lim\left(\sqrt{an^2+bn+1}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{an^2+bn+1}-n\right)\left(\sqrt{an^2+bn+1}+n\right)}{\sqrt{an^2+bn+1}+n}$

$=\lim\dfrac{an^2+bn+1-n^2}{\sqrt{an^2+bn+1}+n}=\lim\dfrac{n^2(a-1)+bn+1}{\sqrt{an^2+bn+1}+n}$.

Vì:

$\lim\left(\sqrt{an^2+bn+1}-n\right)=\dfrac{3}{2}\ (a;b\in\mathbb{Z})$ nên $\lim\dfrac{n^2(a-1)+bn+1}{\sqrt{an^2+bn+1}+n}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=0\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$.

Khi đó $a^2+b^2=1^2+3^2=10$.

Câu 29: Biết giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2}\right)\right]=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, giá trị a^2-b bằng.

A. 3. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2}\right)\right]=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+2}}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$. Ta có $a^2-b=1^2-2=-1$.

Câu 30: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $c^2+a=8$ và $\lim\left(\sqrt{an^2+bn}-cn\right)=2$.

Tính $P=a+b+c$

A. -24. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải

Từ giả thiết $\lim\left(\sqrt{an^2+bn}-cn\right)=2$ suy ra $a>0$, $c>0$.

Ta có $\lim\left(\sqrt{an^2+bn}-cn\right)=2\Leftrightarrow\lim\dfrac{\left(a-c^2\right)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+cn}=2\Leftrightarrow\begin{cases}a-c^2=0 & (1)\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=2 & (2)\end{cases}$

Mà $c^2+a=8\ (3)$

Từ (1) và (3) ta có: $a=c^2=4\Rightarrow c=2$

Thay vào $(2)\Rightarrow b=8$

Khi đó $P=a+b+c=14$.

Câu 31: Cho dãy (u_n) có $\lim u_n=3$, dãy (v_n) có $\lim v_n=5$. Khi đó $\lim(u_n.v_n)=?$

A. 15. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Nếu $\lim u_n=a,\lim v_n=b$ thì $\lim(u_n.v_n)=a.b$. Do đó $\lim(u_n.v_n)=3.5=15$.

Câu 32: Cho $\lim u_n=-3$; $\lim v_n=2$. Khi đó $\lim(u_n-v_n)$ bằng

A. -5. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim(u_n-v_n)=\lim u_n-\lim v_n=-3-2=-5$.

Câu 33: Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim q^n=0\ \left(|q|>1\right)$. **B.** $\lim C=C$ (C là hằng số).

C. $\lim\dfrac{1}{n^k}=0\ (k>1)$. **D.** $\lim\dfrac{1}{n}=0$.

Lời giải

Vì $\lim q^n=0$ nếu $|q|<1$.

Câu 34: Tìm $\lim\dfrac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3}$.

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\lim \dfrac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3} = \lim \dfrac{3-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{4}{n^4}}{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{3}{n^4}} = +\infty$.

Câu 35: Giá trị $\lim \dfrac{1+19n}{18n+19}$ bằng

A. $\dfrac{19}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{19}$.

Lời giải

$$\lim \frac{1+19n}{18n+19} = \lim \frac{\frac{1}{n}+19}{18+\frac{19}{n}} = \frac{19}{18}.$$

Câu 36: $\lim\left(n^2-n+1\right).(2-n)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Ta có $\lim\left(n^2-n+1\right) = \lim n^2\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$ và $\lim(2-n) = \lim n\left(\dfrac{2}{n}-1\right) = -\infty$ nên

$\lim\left(n^2-n+1\right).(-n+2) = -\infty$.

Câu 37: $\lim\left(2^{2n}-3^n\right)$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\left(2^{2n}-3^n\right) = \lim\left(4^n-3^n\right) = \lim 4^n\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right] = +\infty$ vì $\lim 4^n = +\infty$ và

$\lim\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right] = 1 > 0$.

Câu 38: Kết quả của $\lim \dfrac{3^n-2.5^{2n}}{2^{n+1}+5^{n+5}}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 2 **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim \dfrac{3^n-2.5^{2n}}{2^{n+1}+5^{n+5}} = \lim \dfrac{3^n-2.25^n}{2.2^n+5^5.5^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-2.5^n}{2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5^5} = -\infty$.

Câu 39: Biết rằng $\lim \dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = b\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a}{b^3}$.

A. $P=\dfrac{1}{27}$. **B.** $P=3$. **C.** $P=27$. **D.** $P=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=\lim\dfrac{\sqrt[3]{a+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}=b\sqrt{3}.\Rightarrow\sqrt[3]{a}=3b\Rightarrow P=27.$

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\frac{n^2-8n-(n-a^2)^2}{\sqrt{n^2-8n}+n-a^2}=\lim\frac{\left(2a^2-8\right)n-a^4}{\sqrt{n^2-8n}+n-a^2}=\lim\frac{2a^2-8-\dfrac{a^4}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{n}}+1-\dfrac{a^2}{n}}$$

$=a^2-4.$

Vậy $a=\pm2$.

Câu 41: $\lim\left[\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right]$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\lim\left[\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right]=\lim n\left[\sqrt{2+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}\right]=+\infty$

Vì $\lim n=+\infty$ và $\lim\left[\sqrt{2+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}\right]=\sqrt{2}-1>0$.

Câu 42: Cho dãy (u_n) với $u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính $S_{2020}=u_1+u_2+u_3+...+u_{2020}$, ta được kết quả

A. $2021-\dfrac{1}{2^{2020}}$. **B.** $2021+\dfrac{1}{2^{2020}}$. **C.** $2020+\dfrac{1}{2^{2019}}$. **D.** $2020-\dfrac{1}{2^{2019}}$.

Lời giải

$$S_{2020}=2020+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}=2020+\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2020}}{1-\dfrac{1}{2}}=2021-\frac{1}{2^{2020}}.$$

Câu 43: Tổng vô hạn sau đây $S=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^n}+...$ có giá trị bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $1;\frac{1}{3};\frac{1}{3^2};...;\frac{1}{3^n};...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q=\frac{1}{3}<1$.

$S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$.

Câu 44: Tính tổng các nghiệm $x\in(0;\pi)$ của phương trình $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+...+\sin^n x+...=1$.

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** π. **C.** $\frac{5\pi}{6}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Với $x=\frac{\pi}{2}$ thay vào (1) ta có $1+1+1+..+1+...=1$ vô lý.

Với $x\in(0;\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ thì $\sin x;\sin^2 x;\sin^3 x;\sin^n x..$ là CSN lùi vô hạn công bội $q=\sin x$,.

Do đó, VT(1) là tổng của CSN lùi vô hạn nên ta được

$$(1)\Leftrightarrow\frac{\sin x}{1-\sin x}=1\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{2}\xrightarrow{x\in(0;\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}\\x=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right..$$

Vậy tổng các nghiệm $x\in(0;\pi)$ là $\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\pi$.

Câu 45: Giới hạn $\lim\frac{3\sqrt{5n^2+n}}{2(3n+1)}=\frac{a\sqrt{5}}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tổng $T=a+b$ bằng

A. 9 **B.** 3 **C.** 8 **D.** 5

Lời giải

$$\lim\frac{3\sqrt{5n^2+n}}{2(3n+1)}=\lim\frac{3\sqrt{5+\frac{1}{n}}}{2\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=1;b=2\Rightarrow T=3.$$

Câu 46: Tính giới hạn $\lim\frac{3^{n+1}-4.5^n}{2.5^n+5.4^{n+1}}$.

A. $-\frac{1}{7}$. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có }\lim\frac{3^{n+1}-4.5^n}{2.5^n+5.4^{n+1}}=\lim\frac{3.3^n-4.5^n}{2.5^n+20.4^n}=\lim\frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n-4}{2+20.\left(\frac{4}{5}\right)^n}=-2.$$

Câu 47: Giá trị của tham số a để $\lim\frac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=\frac{4}{3}$ là

A. $a=\frac{8}{3}$. **B.** $a=\frac{2}{3}$. **C.** $a=\frac{3}{2}$. **D.** $a=6$.

Lời giải:

Ta có: $\lim\frac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=\lim\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{a+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{2}{a}$. Theo giả thiết: $\frac{2}{a}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$.

Câu 48: Biết $\lim\frac{4n+1}{2n+5}=a$ và $\lim\frac{3^n+4^n}{4^{n+1}+3}=b$. Tổng $a+4b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{4n+1}{2n+5}=\lim\frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}=2\Rightarrow a=2$ và

$\lim\frac{3^n+4^n}{4^{n+1}+3}=\lim\frac{3^n+4^n}{4.4^n+3}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{4+3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{1}{4}\Rightarrow b=\frac{1}{4}$. Vậy $a+4b=3$.

Câu 49: Cho $\lim\left(\sqrt{n^2+an}-n\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Số thực a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+an}-n\right)=\lim\frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}=\lim\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}\in(1;2)$.

Câu 50: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $\lim\frac{an^3+2bn^2+n+2023}{2n^2+3}=1$. Tổng $2a+b$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Do . $\lim\frac{an^3+2bn^2+n+2023}{2n^2+3}=1\Rightarrow a=0$. (vì nếu $a\neq 0$ thì bậc cao nhất của tử lớn hơn bậc cao nhất của mẫu thì giới hạn là vô cực).

Lúc đó: $\lim\lim\frac{an^3+2bn^2+n+2023}{2n^2+3}=\lim\frac{2bn^2+n+2023}{2n^2+3}=\lim\frac{2b+\frac{1}{n}+\frac{2023}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}=b=1$.

Vậy $2a+b=1$

Câu 51: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $\lim\left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+bn+1}\right)=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+b=2$. **B.** $a-b=2$. **C.** $a+b=1$. **D.** $a-b=1$.

Lời giải

Do $\lim\left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+bn+1}\right)=1 \Rightarrow \lim\dfrac{\left(n^2+an+2\right)-\left(n^2+bn+1\right)}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+bn+2}}=1$

$$\Leftrightarrow \lim\frac{(a-b)n+1}{\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{n^2+bn+1}}=1 \Leftrightarrow \lim\frac{(a-b)+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1 \Leftrightarrow \frac{a-b}{2}=1 \Leftrightarrow a-b=2.$$

Câu 52: Giá trị $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **<u>B</u>.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có: $1;2;3;...;n$ là một cấp số cộng với $u_1=1;\ d=1$ suy ra: $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Do đó: $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\left(\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\right)=\lim\dfrac{n+1}{2n}=\lim\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2}.$

Câu 53: Biết $\lim\dfrac{2n^4+n+1}{n-n^3+3n^4}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+2b$.

<u>A</u>. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

$$\lim\frac{2n^4+n+1}{n-n^3+3n^4}=\lim\frac{n^4\left(2+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n}+3\right)}=\lim\frac{2+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n}+3}=\frac{2}{3}.$$

Suy ra $a=2;b=3 \Rightarrow a+2b=8$.

Câu 54: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$.

A. 3. **<u>B</u>.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=\lim\frac{-4n+7+2an-a^2}{\sqrt{n^2-4n+7}-(a-n)}=\lim\frac{2a-4+\frac{7-a^2}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}-\frac{a}{n}+1}=a-2$$

Để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$ thì $a-2=0 \Leftrightarrow a=2$.

Câu 55: Cho số $a=3{,}13131313...$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì là 13, số a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản dạng $a=\dfrac{x}{y}$, trong đó x và y là các số nguyên dương. Tìm tổng $x+y$

.

A. $x+y=490$. **B.** $x+y=409$. **C.** $x+y=211$. **D.** $x+y=130$.

Lời giải

Ta có $a=3+\frac{13}{100}+\frac{13}{100^2}+\frac{13}{100^3}+...=3+\frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{310}{99}$.

Suy ra $\begin{cases} x=310 \\ y=99 \end{cases} \Rightarrow x+y=409$.

Câu 56: Biết $\lim\frac{2n^4+n+1}{n-n^3+3n^4}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+2b$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

$$\lim\frac{2n^4+n+1}{n-n^3+3n^4}=\lim\frac{n^4\left(2+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n}+3\right)}=\lim\frac{2+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n}+3}=\frac{2}{3}.$$

Suy ra $a=2;b=3\Rightarrow a+2b=8$.

Câu 57: Biết $\lim\frac{2n^2+3n^3}{n^3+2}=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b};(a;b\in\mathbb{N})$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

$\lim\frac{2n^2+3n^3}{n^3+2}=\lim\frac{n^3\left(\frac{2}{n}+3\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}=\lim\frac{\frac{2}{n}+3}{1+\frac{2}{n^3}}=3$ suy ra $a=3;b=1\Rightarrow a+b=4$.

Câu 58: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2^{2023}n}-\sqrt{n^2-2^{2023}n}\right)$ là

A. 2^{2024}. **B.** 2^{2023}. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2^{2023}n}-\sqrt{n^2-2^{2023}n}\right)=\lim\frac{2^{2024}n}{\sqrt{n^2+2^{2023}n}+\sqrt{n^2-2^{2023}n}}$$

$$=\lim\frac{2^{2024}}{\sqrt{1+\frac{2^{2023}}{n}}+\sqrt{1-\frac{2^{2023}}{n}}}=2^{2023}.$$

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=\lim\frac{-4n+7+2an-a^2}{\sqrt{n^2-4n+7}-(a-n)}=\lim\frac{2a-4+\frac{7-a^2}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}-\frac{a}{n}+1}=a-2$$

Để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$ thì $a-2=0\Leftrightarrow a=2$.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Ta có

$$\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\frac{n^2-8n-(n-a^2)^2}{\sqrt{n^2-8n}+n-a^2}=\lim\frac{\left(2a^2-8\right)n-a^4}{\sqrt{n^2-8n}+n-a^2}=\lim\frac{2a^2-8-\frac{a^4}{n}}{\sqrt{1-\frac{8}{n}}+1-\frac{a^2}{n}}$$

$=a^2-4.$

Vậy $a=\pm2$.

Câu 61: Giá trị của $E=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{2n^3-3n^2+1}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

$$E=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{2n^3-3n^2+1}\right)=\lim n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}\right).$$

Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}\right)=1-\sqrt[3]{2}<0\end{cases}\Rightarrow E=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{2n^3-3n^2+1}\right)=-\infty$$

Câu 62: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3, 2u_{n+1}=u_n+1, \forall n\ge1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đàu tiên của dãy số (u_n). Tính $\lim S_n$.

A. $\lim S_n=-\infty$. **B.** $\lim S_n=1$. **C.** $\lim S_n=+\infty$. **D.** $\lim S_n=-1$.

Lời giải

Ta có $2u_{n+1}=u_n+1,\forall n\ge1\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2},\forall n\ge1$. Đặt $v_n=u_n-1,\forall n\ge1$.

Khi đó: $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{2}(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n,\forall n\ge1$. Vậy (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$. Gọi T_n là tổng n số hạng đầu tiên của (v_n).

Ta có: $T_n = v_1\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}} = 2v_1\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right] \Rightarrow S_n = T_n + n \Rightarrow limS_n = +\infty$

Câu 63: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Giới hạn của dãy số bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Với mỗi số nguyên k mà $1 \le k \le n$, ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Suy ra $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad \forall n$.

Mà $\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ nên $\lim u_n = 1$.

Câu 64: $\lim\dfrac{6\sin n - 8\cos n}{3n^2+1}$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Vì $0 \le \left|\dfrac{6\sin n - 8\cos n}{3n^2+1}\right| \le \dfrac{10}{3n^2+1}$ và $\lim\dfrac{10}{3n^2+1} = 0$ nên $\lim\dfrac{6\sin n - 8\cos n}{3n^2+1} = 0$.

Câu 65: $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^2}.\cos(n!)}{2n+1}$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Vì $-\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2n+1} \le \dfrac{\sqrt[3]{n^2}.\cos(n!)}{2n+1} \le \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2n+1}$ và $\lim\dfrac{-\sqrt[3]{n^2}}{2n+1} = \lim\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2n+1} = 0$ nên $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^2}.\cos(n!)}{2n+1} = 0$.

Câu 66: $\lim\left(5 - \dfrac{n.\cos 2n}{n^2+3}\right)$ bằng

A. 5. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Vì $0 \le \left|\dfrac{n.\cos 2n}{n^2+3}\right| \le \dfrac{n}{n^2+3}$ và $\lim\dfrac{n}{n^2+3} = 0$ nên $\lim\dfrac{n.\cos 2n}{n^2+3} = 0$.

Suy ra $\lim\left(5 - \dfrac{n.\cos 2n}{n^2+3}\right) = 5 - 0 = 5$.

Câu 67: Chọn kết quả đúng của $\lim\dfrac{\sqrt{n^2-2n+5} - \sqrt{n^4+3n^2+1}}{3+5n}$:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt{n^2-2n+5}-\sqrt{n^4+3n^2+1}}{3+5n}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4}}-\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n}}.$$

Ta có $\begin{cases}\lim\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4}}-\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)=-1\\ \lim\left(\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n}\right)=0\\ \frac{3}{n^2}+\frac{5}{n}>0,\forall n>0\end{cases}$ $\Rightarrow\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4}}-\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n}}=-\infty.$.

Câu 68: Biết $\lim\frac{2n^2+3n^3}{n^3+2}=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b};(a;b\in\mathbb{N})$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

$$\lim\frac{2n^2+3n^3}{n^3+2}=\lim\frac{n^3\left(\frac{2}{n}+3\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}=\lim\frac{\frac{2}{n}+3}{1+\frac{2}{n^3}}=3 \text{ suy ra } a=3;b=1\Rightarrow a+b=4.$$

Câu 69: $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{1+2+3+...+n}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)=\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

Câu 70: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}$ với $n\in\mathbb{N}^*$ Giá trị của $\lim u_n$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1

Lời giải

Ta có $1+3+...+(2n-1)=n^2\longrightarrow\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{2n-1}{n^2}=\frac{1+3+...+(2n-1)}{n^2}=\frac{n^2}{n^2}=1$

Suy ra $\lim u_n=1$.

Câu 71: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có : $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

Suy ra : $\lim u_n=\lim\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

Câu 72: Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+...+\frac{1}{n^2-1}$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có: $u_n=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+...+\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(n-1)(n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}$.

Suy ra: $\lim u_n=\lim\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}\right]=\frac{3}{4}$.

Câu 73: Tính giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$.

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Câu 74: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\lim\frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}=\lim\frac{\frac{1-2^{n+1}}{-1}}{\frac{1-3^{n+1}}{-2}}=\lim\frac{(1-2^{n+1}).2}{1-3^{n+1}}=\lim\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}=0$$

Câu 75: Tìm $L=\lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{1+2+...+n}\right)$

A. $L=\frac{5}{2}$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=2$. **D.** $L=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $1+2+3+...+k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1=1$, $d=1$ nên $1+2+3+...+k=\dfrac{(1+k)k}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+2+...+k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=\dfrac{2}{k}-\dfrac{2}{k+1}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

$L=\lim\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{4}+...+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n+1}\right)=\lim\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{n+1}\right)=2$.

Câu 76: Với n là số nguyên dương, đặt $S_n=\dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Suy ra

$S_n=\dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

$=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+....\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Suy ra $\lim S_n=1$

Câu 77: Đặt $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1$, xét dãy số (u_n) sao cho $u_n=\dfrac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).\mathrm{f}(6)...f(2n)}$. Tìm $\lim n\sqrt{u_n}$.

A. $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{3}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1=\left(n^2+1\right)\left[(n+1)^2+1\right]$.

Do đó $u_n=\dfrac{\left(1^2+1\right)\left(2^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(4^2+1\right)...\left[(2n-1)^2+1\right]\left[4n^2+1\right]}{\left(2^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(4^2+1\right)\left(5^2+1\right)...\left[4n^2+1\right]\left[(2n+1)^2+1\right]}$

$\Rightarrow u_n=\dfrac{2}{(2n+1)^2+1}\Rightarrow n\sqrt{u(n)}=\sqrt{\dfrac{2n^2}{(2n+1)^2+1}}$.

$\lim n\sqrt{u(n)}=\lim\sqrt{\dfrac{2n^2}{(2n+1)^2+1}}=\lim\sqrt{\dfrac{2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 78: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n=\dfrac{1}{C_3^3}+\dfrac{1}{C_4^3}+\dfrac{1}{C_5^4}+...+\dfrac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$.

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $C_n^3=\dfrac{n!}{3!(n-3)!}=\dfrac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)!\times 6}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\Rightarrow\dfrac{1}{C_n^3}=\dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Vậy ta có $S_n=\dfrac{6}{1.2.3}+\dfrac{6}{2.3.4}+\dfrac{6}{3.4.5}+...+\dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Nhận xét $\dfrac{2}{1.2.3}=\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{2.3}$; $\dfrac{2}{2.3.4}=\dfrac{1}{2.3}-\dfrac{1}{3.4}$;…; $\dfrac{2}{(n-2)(n-1)n}=\dfrac{1}{(n-2)(n-1)}-\dfrac{1}{(n-1)n}$

$\Rightarrow S_n=3\left(\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{2.3}-\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=3\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}\right)=3\left(\dfrac{n-2}{2n}\right)=\dfrac{3n-6}{2n}$

Vậy $\lim S_n=\lim\left(\dfrac{3n-6}{2n}\right)=\lim\left(\dfrac{3-\frac{6}{n}}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$.

Câu 79: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

$\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\dfrac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{a}{2}$

Ta có: $\lim u_n=-1\Leftrightarrow\dfrac{a}{2}=-1\Leftrightarrow a=-2$.

Câu 80: Một hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khỗi cầu có bán kính gấp đôi bán kính của khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng.

A. Chiều cao của mô hình không quá 1,5 mét. **B.** Chiều cao của mô hình tối đa là 2 mét.
C. Chiều cao của mô hình dưới 2 mét. **D.** Mô hình có thể đat được chiều cao tùy ý.

Lời giải

Giả sử có n khối cầu

Gọi bán kính của khối cầu thứ nhất (khối cầu dưới cùng) là $R_1=\dfrac{1}{2}$ mét.

Gọi bán kính của khối cầu thủ 2 (ngay trên khối cầu thứ nhất) là R_2.

Gọi bán kính của khối cầu thủ n (ngay trên khối cầu thứ $n-1$) là R_n $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)$.

Khi đó dãy các số $R_1, R_2, ..., R_n, ...$ là một cấp số nhân với công bội $q=\dfrac{1}{2}$.

Chiều cao của mô hình là $h=2(R_1+R_2+...+R_n)=2.\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ (mét).

Suy ra với $h=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<2, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Do đó chiều cao của mô hình dưới 2 mét.

Câu 81: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3,...$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng x và với mỗi số nguyên dương $n\geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$. **B.** $\sqrt{3}x^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$.

Lời giải

Với $n=1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng x nên diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ là $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Với $n=2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{x}{2}$ nên diện tích tam giác $A_2B_2C_2$ là $S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

….

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $\frac{x}{2^{n-1}}$ nên diện tích tam giác $A_nB_nC_n$ là $S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^2$.

Khi đó ta được dãy $S_1,S_2,...S_n...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ và công bội $q=\frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Biết giới hạn $\lim \frac{2n+1}{2-3n} = a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giá trị a lớn hơn 0.

b) $x = a$ là trục đối xứng của parabol $(P): y = 3x^2 + 4x - 7$.

c) Bộ ba số $-\frac{5}{3}; a; \frac{1}{3}$ lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 2.

d) Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q = 3$ và $u_1 = a$ thì $u_3 = 6$.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\lim \frac{2n+1}{-3n+2} = \lim \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(-3+\frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{-3+\frac{2}{n}} = \frac{-2}{3}$ suy ra: $a = -\frac{2}{3}$

b) Đúng: Trục đối xứng của parabol $(P): y = 3x^2 + 4x - 7$ là $x = -\frac{4}{2.3} = -\frac{2}{3}$

c) Sai: Ba số $-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}$ tạo thành một cấp số cộng với công sai bằng 1

d) Sai: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q = 3$ và $u_1 = a = -\frac{2}{3} \Rightarrow u_3 = u_1.q^2 = -\frac{2}{3}.3^2 = -6$

Câu 2: Giả sử ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Với $(a; b \in \mathbb{R})$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = a.b$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[2f(x) - g(x)\right] = 2a - b$.

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

d) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)}\right] = a + \frac{2b}{a}$ với $(a \neq 0)$.

Lời giải

a) Đúng: Vì theo định lí về giới hạn hữu hạn.

b) Đúng: Vì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\mathrm{c}f(x)\right] = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x) (c \in \mathbb{R})$ nên $\lim\limits_{x\to x_0}\left[2f(x) - g(x)\right] = 2a - b.$

c) Sai:Vì b có thể bằng 0.

d) Sai: Vì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)+2g(x)}{f(x)}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[1+\dfrac{2g(x)}{f(x)}\right]=1+\dfrac{2b}{a}$;$(a\neq 0)$.

Câu 3: Tính được các giới hạn. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim(\sqrt{2})^n=-\infty$

b) $\lim\pi^n=0$

c) $\lim\left(2n^3+2n^2-4\right)=+\infty$

d) $\lim\left(-5n^4+n^3-4n\right)=-\infty$

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\lim\left(\sqrt{2}\right)^n=+\infty$ (do $\sqrt{2}>1$)

b) Sai: Ta có: $\lim\pi^n=+\infty$ (do $\pi>1$)

c) Đúng: Ta có $\lim\left(2n^3+2n^2-4\right)=\lim n^3\cdot\left(2+\dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{n^3}\right)=+\infty$.

Vì $\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ \lim\left(2+\dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{n^3}\right)=2>0\end{cases}$

d) Đúng: Vì $\lim\left(-5n^4+n^3-4n\right)=\lim n^4\cdot\left(-5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^3}\right)=-\infty$.

Vì $\begin{cases}\lim n^4=+\infty\\ \lim\left(-5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^3}\right)=-5<0\end{cases}$

Câu 4: Tìm được tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots$

và $T=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{3^n}+\ldots$ Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=\dfrac{1}{2}$.

b) $T=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{3^n}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=\dfrac{1}{3}$.

c) $S>T$

d) $S=\dfrac{1}{T}$

Lời giải

a) Đúng: Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội $q=\dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

b) Sai: Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = -\frac{1}{3}$.

Vì vậy $T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

c) Đúng: $S = 2$, $T = \frac{3}{4} \Rightarrow S > T$.

d) Sai: $\Rightarrow S > T$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của $a = 2$.
b) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của $a = 3$.
c) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của a là một số nguyên
d) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng -2, giá trị của $a = -2$

Lời giải

a) Đúng: $\lim \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5} = \lim \frac{4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{a + \frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a}\ (a \neq 0)$

Khi đó $2 = \lim u_n \Leftrightarrow 2 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2$

b) Sai: Khi đó $1 = \lim u_n \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 4$

c) Sai: Khi đó $3 = \lim u_n \Leftrightarrow 3 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$

d) Đúng: Khi đó $-2 = \lim u_n \Leftrightarrow -2 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = -2$

Câu 6: Đặt $I = \lim\left(\sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta biến đổi được $I = \lim \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}$
b) Nếu $I = 0$ thì có 3 giá trị a thỏa mãn
c) Nếu $I = 0$ thì tổng các giá trị a tìm được bằng 1
d) Có 2 giá trị a nguyên để $I = 1$

Lời giải

a) Sai: Ta biến đổi được $I = \lim \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}$

$\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1} \to = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp.

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=\lim\dfrac{(a^2-a-2)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

b) Sai: $I=\lim\dfrac{a^2-a-2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{a^2-a-2}{2}$

Khi $I=0\Leftrightarrow\dfrac{a^2-a-2}{2}=0\Leftrightarrow a^2-a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=2\end{array}\right.$.

c) Sai: Nếu $I=0$ thì tổng các giá trị a tìm được bằng 1. Khi đó $-1+2=1\neq 0$

d) Sai: Có 2 giá trị a nguyên để $I=1$

Khi $I=1\Leftrightarrow\dfrac{a^2-a-2}{2}=1\Leftrightarrow a^2-a-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\\a=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$.

Câu 7: Cho giới hạn $L=\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $a=1$ thì $L=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) Khi $a=0$ thì $L=\dfrac{1}{3}$

c) Khi $a>0$ thì $L>0$

d) Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với b, c là các tham số thì $P=\dfrac{a+c}{b^3}=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=\lim\dfrac{\sqrt[3]{a+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}$

a) Đúng: Khi $a=1$ thì $L=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Với $a=1$ thì $L=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) Sai: Khi $a=0$ thì $L=\dfrac{1}{3}$. Với $a=1$ thì $L=\sqrt{3}$

c) Đúng: Khi $a>0$ thì $L>0$. Với $a>0$ thì $\sqrt[3]{a}>0\Rightarrow\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}>0\Rightarrow L>0$

d) Sai: Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với b, c là các tham số thì $P=\dfrac{a+c}{b^3}=\dfrac{1}{2}$

$$L=\frac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}=b\sqrt{3}+c\Rightarrow\begin{cases}b=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\\c=0\end{cases}\Rightarrow P=\frac{a+c}{b^3}=\frac{a}{\dfrac{a}{27}}=27$$

Câu 8: Cho giới hạn $L=\lim\sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $L=2$ khi $a=1$

b) $L=3$ thì có 2 giá trị nguyên a thỏa mãn

c) $L>3$ khi $a>6$

d) Có 3 giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\begin{cases}\lim\frac{an^2-1}{3+n^2}=\lim\frac{a-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+1}=a\\ \lim\frac{1}{2^n}=\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}=\sqrt{3+a}.$

Khi đó $L=2\Leftrightarrow\sqrt{3+a}=2\Leftrightarrow 3+a=4\Leftrightarrow a=1$

b) Sai: Khi đó $L=3\Leftrightarrow\sqrt{3+a}=3\Leftrightarrow 3+a=9\Leftrightarrow a=6$

c) Đúng: Khi đó $L>3\Leftrightarrow\sqrt{3+a}>3\Leftrightarrow 3+a>9\Leftrightarrow a>6$

d) Đúng: Ta có $\begin{cases}a\in(0;20),\ a\in\mathbb{Z}\\ \sqrt{a+3}\in\mathbb{Z}\end{cases}\longrightarrow a\in\{1;6;13\}.$

Câu 9: Biết $\lim\frac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=2$ và $\lim\frac{3^n+4^{n+1}}{4^n+3}=b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giá trị của $a=2$

b) Giá trị của $b=4$

c) $2a-b=0$

d) Ba số $a,b,16$ lập thành một cấp số nhân

Lời giải

a) Sai: Ta có $\lim\frac{2n^2-n+4}{an^2+n+3}=2\Leftrightarrow\lim\frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(a+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}=2$

$\Leftrightarrow\lim\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{a+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=2\Leftrightarrow\frac{2}{a}=2\Leftrightarrow a=1$

b) Đúng: Ta có $b=\lim\frac{3^n+4^{n+1}}{4^n+3}=\lim\frac{3^n+4^n.4}{4^n+3}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}{1+3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}=4.\Rightarrow b=4$

c) Sai: Vậy $a=1,b=4\Rightarrow 2a-b=2.1-4=-2$.

d) Đúng: Ta có $a=1,b=4$.

Mà $b^2=16$ và $a.16=1.16=16 \Rightarrow b^2=a.16$ nên theo tính chất của cấp số nhân ta có $1,4,16$ lập thành một cấp số nhân với $u_1=1,q=4$.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $u_n=an^2+n-1$ với $a\in\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $a=1$, giới hạn của dãy số đã cho là 1.

b) Với $a=2$, giới hạn của dãy số đã cho là $+\infty$.

c) Với $a=-\dfrac{5}{2}$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

d) Với $a\le 0$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

Lời giải

a) Sai: Với $a=1$, $u_n=n^2+n-1$.

Ta có: $\lim\left(n^2+n-1\right)=\lim n^2\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=+\infty$.

b) Đúng: Với $a=2$, $u_n=2n^2+n-1$.

Ta có: $\lim\left(2n^2+n-1\right)=\lim n^2\left(2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=+\infty$.

c) Đúng: Với $a=-\dfrac{5}{2}$, $u_n=-\dfrac{5}{2}n^2+n-1$.

Ta có: $\lim\left(-\dfrac{5}{2}n^2+n-1\right)=\lim n^2\left(-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=-\infty$.

d) Sai: Với $a<0$. Ta có: $\lim\left(an^2+n-1\right)=\lim n^2\left(a+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=-\infty$.

Với $a=0$, $u_n=n-1$. Ta có: $\lim(n-1)=\lim n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$.

Câu 11: Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 5000000 đồng một tháng. Cứ sau một chu kỳ 3 năm thì ông An được tăng lương 4%. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 5200000 đồng

b) Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng

c) Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận u_n, sau n chu kì năm công tác là: $u_n=5000000.\left(\dfrac{26}{25}\right)^n$ đồng

d) Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng

Lời giải

a) Đúng: Mức lương 3 năm tiếp theo của ông An là:

$5000000+5000000.\dfrac{4}{100}=5000000.\left(1+\dfrac{1}{25}\right)=5200000$ (đồng)

b) Sai: 1 năm = 12 tháng.

Tổng lương 3 năm đầu là $36.5000000=180000000$ đồng.

Tổng lương từ năm thứ 4 đến năm thứ 6 là: $36.520000=187200000$ đồng.

Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là: $180000000+187200000=367200000$ đồng.

c) Sai: Chu kì thứ nhất mức lương của ông An là: $u_1 = 5000000$ đồng.

Chu kì thứ hai mức lương của ông An là:

$$u_2 = 5000000 + 5000000.\frac{4}{100} = 5000000.\left(1+\frac{1}{25}\right) = 5000000.\frac{26}{25} \text{ (đồng)}$$

Chu kì thứ ba mức lương của ông An là:

$$u_3 = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right) + 5000000.\left(\frac{26}{25}\right).\frac{1}{25} = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right).\left(1+\frac{1}{25}\right) = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2 \text{ (đồng).}$$

Chu kì thứ tư mức lương của ông An là:

$$u_4 = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2 + 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2.\frac{1}{25} = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2\left(1+\frac{1}{25}\right) = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^3 \text{ (đồng).}$$

Cứ tiếp tục như vậy ta dự đoán được sau chu kì thứ n số tiền lương ông An nhận được là:

$$u_n = 5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{n-1} \text{ (đồng).}$$

d) Đúng: Tổng tiền lương của chu kì thứ nhất là: $36.5000000 = 180000000$ đồng.

Tổng tiền lương của chu kì thứ hai là: $36.5000000.\frac{26}{25}$ đồng.

Tổng tiền lương của chu kì thứ ba là: $36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2$ đồng.

….

Tổng tiền lương của chu kì thứ mười một là: $36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{10}$ đồng.

Tổng tiền lương 2 năm tiếp theo của chu kì thứ mười hai là: $24.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{11}$ đồng.

Tổng tiền lương sau tròn 35 năm là:

$$S = 36.5000000 + 36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right) + 36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^2 + \ldots$$

$$+36.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{10} + 24.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{11}$$

$$= 36.5000000\left(1+\frac{26}{25}+\left(\frac{26}{25}\right)^2+\ldots+\left(\frac{26}{25}\right)^{10}\right) + 24.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{11}$$

$$= \frac{36.5000000.\left(1-\left(\frac{26}{25}\right)^{11}\right)}{1-\frac{26}{25}} + 24.5000000.\left(\frac{26}{25}\right)^{11} = 2612277740 \text{ đồng.}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: $\lim \dfrac{n.\sqrt{n^2+1}}{-2n^2+n+1}$ bằng bao nhiêu (kết quả viết dưới dạng số thập phân)?

Lời giải

$$\lim \frac{n\sqrt{n^2+1}}{-2n^2+n+1}=\lim \frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^2\left(-2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{-2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{2}=-0,5.$$

Câu 2: Tổng $S=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\ldots$ bằng bao nhiêu (kết quả viết dưới dạng số thập phân)?

Lời giải

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=\frac{1}{3}$, công bội $q=-\frac{1}{3}$.

Vì vậy $S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}=0,25$.

Câu 3: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3n-1}{n.2^n}+2024$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-1}{n.2^n}+2024\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3-\frac{1}{n}}{2^n}+2024\right)$.

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)=3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\frac{1}{n}}{2^n}=0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0+2024=2024$.

Câu 4: Cho $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{4n^2-3n+1}-(an+b)\right]=0,(a,b\in\mathbb{R})$. Tính $S=a+8b$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{4n^2-3n+1}-(an+b)\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4n^2-3n+1-a^2n^2}{\sqrt{4n^2-3n+1}+an}-b\right)=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(4-a^2)n^2-3n+1}{\sqrt{4n^2-3n+1}+an}-b\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases}4-a^2=0\\ a>0\\ \dfrac{-3}{2+a}-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-\dfrac{3}{4}\end{cases}.$$

Vậy $S=a+8b=-4$.

Câu 5: Biết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,212121...=\dfrac{a}{b}$ (với a,b là các số dương có ước chung lớn nhất là 1). Tính giá trị $a+b$.

Lời giải

Ta có $0,212121...=0,21+0,0021+0,000021+...=\frac{21}{100}+\frac{21}{100^2}+\frac{21}{100^3}+...=\frac{\frac{21}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{7}{33}$.

Do đó $a=7,b=33$. Vậy $a+b=40$.

Câu 6: Giới hạn $\lim\frac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n}=\lim\frac{a\sqrt{n}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{b+\frac{2}{\sqrt{n}}}$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính $P=a+b^2$

Lời giải

Ta có:

$$\lim\frac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n}=\lim\frac{n\sqrt{n}\left(2\sqrt{n}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{n\sqrt{n}\left(3+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}=\lim\frac{2\sqrt{n}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{3+\frac{2}{\sqrt{n}}}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\to P=a+b^2=11$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right)=\lim\frac{a.\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+b.\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+1}$ với $a;b$ là các số tự nhiên.

Tính $S=(a+b)^2$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right)=\lim\frac{n^2+2n-2-n^2}{\sqrt{n^2+2n-2}+n}=\lim\frac{2n-2}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}+n}$$

$$=\lim\frac{n\left(2-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}+1\right)}=\lim\frac{2-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}+1}=\lim\frac{2.\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+2.\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+1}$$

Khi đó $a=b=2\Rightarrow S=(a+b)^2=16$

Câu 8: Giới hạn $\lim\sqrt[3]{\frac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}}=\lim\sqrt[3]{\frac{1-3.a^n}{8+\frac{1}{6}.b^n}}$ với $a;b$ là các số hữu tỉ. Tính giá trị $8(a+b)$

Lời giải

$$\lim\sqrt[3]{\frac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}}=\lim\sqrt[3]{\frac{8^n-3.3^n}{8.8^n+\frac{1}{6}6^n}}=\lim\sqrt[3]{\frac{8^n\left(1-3.\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)}{8^n\left(8+\frac{1}{6}\left(\frac{6}{8}\right)^n\right)}}=\lim\sqrt[3]{\frac{1-3\left(\frac{3}{8}\right)^n}{8+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^n}}$$

Khi đó $\begin{cases} a = \dfrac{3}{8} \\ b = \dfrac{3}{4} \end{cases} \to 8(a+b) = 9$

Câu 9: Tìm giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

Lời giải

$\lim\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

$=\lim\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\lim\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$

Câu 10: Tìm tổng $S=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\ldots$

Lời giải

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=\dfrac{1}{3}$, công bội $q=-\dfrac{1}{3}$.

Vì vậy $S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 11: Giá trị của tổng $T=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ldots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\ldots=a+\sqrt{b}$ với *a;b* là các số tự nhiên. Tính giá trị $S=(a+b)^2$

Lời giải

Ta thấy T là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội $q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì vậy $T=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2+\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}\Rightarrow S=(a+b)^2=16$

Câu 12: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414\ldots$ viết dạng phân số có dạng $\dfrac{m}{n}$ với *m;n* là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $n-3m$

Lời giải

Ta có: $0,271414\ldots=0,27+0,0014+0,000014+\ldots$

Xét tổng $0,0014+0,000014+0,00000014+\ldots$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là $u_1=0,0014$ và công bội $q=\dfrac{1}{100}$.

Vì vậy $0,271414\ldots = 0,27 + \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{27}{100} + \dfrac{0,0014}{1-\dfrac{1}{100}} = \dfrac{2687}{9900} \Rightarrow \begin{cases} m = 2687 \\ n = 9900 \end{cases} \Rightarrow n - 3m = 1839$.

Câu 13: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111\ldots$ viết dạng phân số có dạng $\dfrac{a}{b}$ với $a;b$ là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $|b-2a|$

Lời giải

Ta có: $0,51111\ldots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \ldots$

Xét tổng $0,01 + 0,001 + 0,0001 + \ldots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $u_1 = 0,01$ và công bội $q = \dfrac{1}{10}$.

Vì vậy $0,51111\ldots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \ldots$

$= 0,5 + \dfrac{u_1}{1-q} = 0,5 + \dfrac{0,01}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{23}{45} \Rightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 45 \end{cases} \Rightarrow |b-2a| = 1$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$, tính $\lim \dfrac{u_n}{3^n}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

Xét số a thoả mãn $u_n - a = 3(u_{n-1} - a), \forall n \geq 2 \Leftrightarrow u_n = 3u_{n-1} - 2a, \forall n \geq 2$.

Suy ra $-2a = -1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n - \dfrac{1}{2} = 3\left(u_{n-1} - \dfrac{1}{2}\right), \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Đặt $v_n = u_n - \dfrac{1}{2} \Rightarrow v_{n-1} = u_{n-1} - \dfrac{1}{2}, \forall n \geq 2$ và $v_1 = u_1 - \dfrac{1}{2} = -2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

Khi đó dãy (v_n) thoả mãn $\begin{cases} v_1 = -\dfrac{5}{2} \\ v_n = 3v_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Ta thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = -\dfrac{5}{2}$, công bội $q = 3$, suy ra $v_n = -\dfrac{5}{2} \cdot 3^{n-1}, \forall n \geq 1$

Do đó $u_n = v_n + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \dfrac{1}{2}, \forall n \geq 1$.

Vậy $\lim \dfrac{u_n}{3^n} = \lim \dfrac{-\dfrac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \dfrac{1}{2}}{3^n} = \lim\left(-\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2 \cdot 3^n}\right) = -\dfrac{5}{6} \approx -0,8$.

Câu 15: Biết rằng giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n\right) = \lim\left(\dfrac{5 - a.n}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + b\right)$ với $a;b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $S = a^b$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-4n+5}+3-n\right)$$

$$=\lim\left(\frac{\left(\sqrt{n^2-4n+5}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2-4n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+3\right)$$

$$=\lim\left(\frac{n^2-4n+5-n^2}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+3\right)=\lim\left(\frac{-4n+5}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+3\right)$$

Khi đó $\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow S=a^b=64$

Câu 16: Biết rằng giới hạn $\lim\left(1+3n-\sqrt{9n^2-n+7}\right)=\lim\left(a+\dfrac{n-7}{b.n+c.\sqrt{9n^2-n+7}}\right)$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $|a-b|+c$

Lời giải

$$\lim\left(1+3n-\sqrt{9n^2-n+7}\right)=\lim\left(1+\frac{9n^2-9n^2+n-7}{3n+\sqrt{9n^2-n+7}}\right)=\lim\left(1+\frac{n-7}{3n+\sqrt{9n^2-n+7}}\right)$$

Khi đó $\begin{cases}a=1\\b=3\Rightarrow|a-b|+c=3\\c=1\end{cases}$

Câu 17: Biết giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\dfrac{a}{\sqrt[3]{\left(n^3+3\right)^2}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\dfrac{b}{n+\sqrt{n^2+2}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương. Tính $T=2a+3b$.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-n\right)+\lim\left(n-\sqrt{n^2+2}\right)$$

$$=\lim\frac{n^3+3-n^3}{\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}+\lim\frac{n^2-n^2-2}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim\frac{3}{\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{\left(n^3+3\right)^2}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}$$

Do đó, $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\to T=2a+3b=12$.

Câu 18: Giới hạn dãy số $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}$ có dạng $\lim\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{b}{n}}+\sqrt{1+\frac{c}{n}}}$ với $a;b;c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $a^2+b^2+c^2$

Lời giải

$$\lim u_n = \lim \frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n} = \lim \frac{\left(n^2+2n\right)-\left(n^2+n\right)}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}\right)} = \lim \frac{n}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}\right)}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=6.$$

Câu 19: Biết giới hạn $\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}-b\right)^2}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}$ với $a;b$ là các số nguyên dương.

Tính $S=a+b$.

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim \frac{2n^2-n^3+n^3}{n^2+n-n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt[3]{\left(2n^2-n^3\right)^2}+n^2-n\sqrt[3]{2n^2-n^3}}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\right)}}{\sqrt[3]{n^6\cdot\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}+n^2-n\cdot\sqrt[3]{n^3\left(\frac{2}{n}-1\right)}} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\left(\frac{2}{n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}} \to \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \to S=3$$

Câu 20: Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

Nhận xét: Ta cần áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

$S=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\frac{u_1}{1-q}$ trong đó u_1, q theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội $q=-\frac{1}{2}$.

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\ldots=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Câu 21: Tính giới hạn $L=\lim\frac{1+3+5+\ldots+2n-1}{5n^2-n+1}$.

Lời giải

Ta có tổng $1+3+5+...+2n-1$ là tổng cấp số cộng của n số hạng với $u_1=1,d=2$.

Suy ra $1+3+5+...+2n-1=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

Do đó $L=\lim\dfrac{1+3+5+...+2n-1}{5n^2-n+1}=\lim\dfrac{n^2}{5n^2-n+1}=\lim\dfrac{1}{5-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{5}$.

Vậy $L=0,2$.

Câu 22: Tính giới hạn $L=\lim\left[\dfrac{\left(3^n+2\right)\left(2^n+1\right)}{3^n+2}-2^n+2\right]$.

Lời giải

Ta có $L=\lim\left[\dfrac{\left(3^n+2\right)\left(2^n+1\right)}{3^n+2}-2^n+2\right]=\lim\left[\dfrac{\left(3^n+2\right)\left(2^n+1\right)-2^n\left(3^n+2\right)}{3^n+2}\right]+2$

$=\lim\dfrac{6^n+3^n+2.2^n+2-6^n-2.2^n}{3^n+2}+2=\lim\dfrac{3^n+2}{3^n+2}+2=\lim 1+2=3$.

Câu 23: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^{24}+6n^{12}+1}-\sqrt[3]{n^{36}+3n^{24}+2}\right)$.

Lời giải

Ta có $L=\lim\left(\sqrt{n^{24}+6n^{12}+1}-\sqrt[3]{n^{36}+3n^{24}+2}\right)$

$L=\lim\left(\sqrt{n^{24}+6n^{12}+1}-n^{12}\right)+\lim\left(n^{12}-\sqrt[3]{n^{36}+3n^{24}+2}\right)=L_1+L_2$.

Trong đó

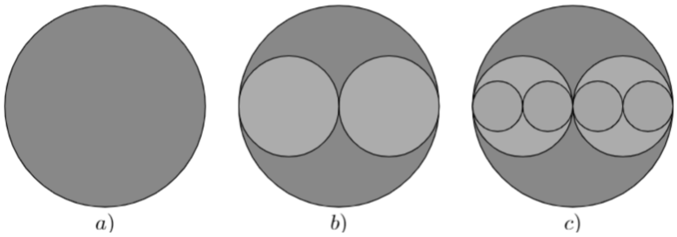
$+\ L_1=\lim\left(\sqrt{n^{24}+6n^{12}+1}-n^{12}\right)=\lim\dfrac{6n^{12}+1}{\sqrt{n^{24}+6n^{12}+1}+n^{12}}=\lim\dfrac{6+\dfrac{1}{n^{12}}}{\sqrt{1+\dfrac{6}{n^{12}}+\dfrac{1}{n^{24}}}+1}=3$.

$+\ L_2=\lim\left(n^{12}-\sqrt[3]{n^{36}+3n^{24}+2}\right)=\lim\dfrac{-3n^{24}-2}{n^{24}+n^{12}\sqrt[3]{n^{36}+3n^{24}+2}+\left(\sqrt[3]{n^{36}+3n^{24}+2}\right)^2}$

$=\lim\dfrac{-3-\dfrac{2}{n^{24}}}{1+\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^{12}}+\dfrac{2}{n^{36}}}+\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^{12}}+\dfrac{2}{n^{36}}}\right)^2}=-1$.

Vậy $L=3+(-1)=2$.

Câu 24: Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính $R = 2(\text{cm})$ như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình $3b$. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như hình c). Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Lời giải

Gọi u_1 là diện tích của hình tròn thứ nhất, ta có $u_1 = \pi R^2$.

Gọi u_2 là tổng diện tích của 2^1 hình tròn cắt lần thứ hai, ta có $u_2 = 2\pi.\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2.\frac{1}{2}$.

Gọi $.u_3.$ là tổng diện tích của 2^2 hình tròn cắt lần thứ ba, ta có $u_3 = 4\pi.\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \pi R^2.\frac{1}{2^2}$.

…

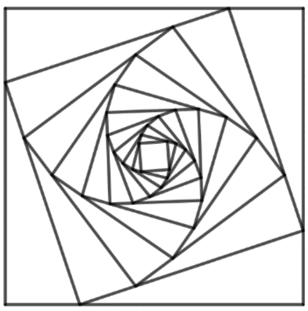
Gọi u_n là tổng diện tích của 2^{n-1} hình tròn cắt lần thứ n, ta có $u_n = 2^{n-1}\pi.\left(\frac{R}{2^{n-1}}\right)^2 = \pi R^2.\frac{1}{2^{n-1}}$.

Dãy $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ là cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = \pi R^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích của các hình tròn là:

$$S = \pi R^2 + \pi R^2.\frac{1}{2} + \pi R^2.\frac{1}{2^2} + ... = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2 = 2\pi.2^2 \approx 25,1\left(cm^2\right).$$

Câu 25: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (hình vẽ). Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i $\left(i \in \{1, 2, 3, ..., n\}\right)$. Khi đó $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2025}{a^2}\left(S_1 + S_2 + ... + S_n\right)$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Cạnh của hình vuông C_1 là a Do đó $S_1 = a^2$.

Cạnh của hình vuông C_2 là $\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$. Do đó $S_2=\frac{10}{16}a^2=\frac{10}{16}S_1$.

Tương tự ta có $S_3=\frac{10}{16}S_2$; ... ; $S_n=\frac{10}{6}S_{n-1}$.

Khi đó $S_1+S_2+...+S_n=S_1\left[1+\left(\frac{10}{16}\right)+\left(\frac{10}{16}\right)^2+\left(\frac{10}{16}\right)^3+...+\left(\frac{10}{16}\right)^{n-1}\right]$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2025}{a^2}\left(S_1+S_2+...+S_n\right)=\frac{2025}{a^2}.\frac{a^2}{1-\frac{10}{16}}=\frac{2025}{a^2}.\frac{8}{3}.a^2=5400.$

Câu 26: Từ độ cao $55,8m$ của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (hình vẽ). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng nảy lên với độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Tổng quãng đường mà quả bóng di chuyển từ khi thả cho đến khi dừng hẳn bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải

Quãng đường đầu tiên bóng rơi xuống chạm đất lần 1 là $55,8m$.

Quãng đường nảy lên lần thứ nhất và rơi xuống chạm đất lần 2 là: $2.\frac{55,8}{10}m$.

Quãng đường nảy lên lần thứ hai và rơi xuống chạm đất lần 3 là: $2.\frac{55,8}{10^2}m$.

Quãng đường nảy lên lần thứ ba và rơi xuống chạm đất lần thứ 4 là: $2.\frac{55,8}{10^3}m$.

Vậy nếu gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng nảy lên lần thứ n rồi chạm đất thì khi đó ta có:

$$S_n=55,8+2.55,8\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...+\frac{1}{10^n}\right)=55,8\left(1+2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...+\frac{1}{10^n}\right)\right)$$

$$=55,8\left(1+\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\right).$$

Do đó tổng quãng đường mà quả bóng di chuyển từ khi thả cho đến khi dừng hẳn là

$$S=\lim S_n=\lim\left(55,8\left(1+\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\right)\right)=55,8\left(1+\frac{2}{9}\right)\simeq 68,2.$$

-----------------HẾT-----------------

BÀI 02 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giới hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ ta có $f(x) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0; \lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (với c là hằng số).

Định lý về giới hạn hữu hạn:

- Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ khi đó:

  ⊕ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L + M$.

  ⊕ $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = L.M$.

  ⊕ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L - M$.

  ⊕ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} = \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

  (Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$)

2 Giới hạn một bên

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Số thực L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n) = L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Số thực L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n) = L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Định lý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Nguyên lý kẹp: Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên K chứa điểm x_0.

Nếu $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ $\forall x \in K$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

3 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a;+\infty\right)$. Ta nói hàm số $y=f\left(x\right)$ có giới hạn là số thực L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số $\left(x_n\right)$ bất kỳ, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta có $f\left(x_n\right)\to L.$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=L$ hay $f\left(x\right)\to L$ khi $x\to+\infty$.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(-\infty;a\right)$. Ta nói hàm số $y=f\left(x\right)$ có giới hạn là số thực L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số $\left(x_n\right)$ bất kỳ, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ ta có $f\left(x_n\right)\to L.$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=L$ hay $f\left(x\right)\to L$ khi $x\to-\infty$.

Lưu ý:

Với c,k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c;\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0.$

Định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x\to x_0$ vẫn còn đúng khi $x\to\pm\infty$.

4 Giới hạn vô cực của hàm số

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa về giới hạn hữu hạn.

Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y=f\left(x\right)$ khi x dần tới $+\infty$ được định nghĩa như sau:

Định nghĩa giới hạn vô cực: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a;+\infty\right)$. Ta nói hàm số $y=f\left(x\right)$ có giới hạn $-\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số $\left(x_n\right)$ bất kì, $x_n>a,x_n\to+\infty$, ta có $\left(f\left(x_n\right)\right)\to-\infty$. **Kí hiệu:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=-\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-f\left(x\right)\right)=-\infty$.

Tính chất:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ với k là số lẻ.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với k là số chẵn.

5 Quy tắc tìm giới hạn vô cực của hàm số

Các định lí sau vẫn đúng cho các trường hợp $x\to x_0^+,x\to x_0^-,x\to+\infty,x\to-\infty$.

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f\left(x\right).g\left(x\right)$:

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L\neq0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
−	$+\infty$	$-\infty$
−	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$:

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ và $g(x)>0$ hoặc $g(x)<0$ với mọi $x\neq x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
−	$+\infty$	$-\infty$
−	$-\infty$	$+\infty$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giới hạn của hàm số tại một điểm

Phương pháp:

Bài toán 1: Cả tử số và mẫu số đều là các đa thức

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức và $f(x_0)=g(x_0)=0$.
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: phân tích tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x-x_0$.
- Giả sử $f(x)=(x-x_0).f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0).g_1(x)$
- Khi đó: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Nhận xét:

- Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình trên cho đến khi không còn dạng vô định.
- Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

Bài toán 2: Cả tử số và mẫu số đều là căn thức

- Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các căn thức và $f(x_0)=g(x_0)=0$.
- Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$: nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn để trục các nhân tử $x-x_0$ ra khỏi căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0.

Nhận xét: Có thể nhân liên hợp một hoặc nhiều lần để khử dạng vô định.

Chú ý: Các hằng đẳng thức:

- $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
- $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$
- $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$ e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x+1}$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n}{x+x^2+\ldots+x^m}$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{(-3)^2-9}{-3-3}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}=\dfrac{1+0+0^2+0^3}{1+0}=1$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}=\dfrac{|-1-1|}{(-1)^4-1-3}=-\dfrac{2}{3}$.

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}=\dfrac{(-2)^2-5(-2)+2}{2|-2|+1}=\dfrac{16}{5}$.

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{3(-1)^2+1}-(-1)}{(-1)-1}=\dfrac{-3}{2}$.

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\sqrt{1+\sqrt{2}}-1$.

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$.

h) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}=0.\sin\dfrac{1}{2}=0$.

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x+1}=\dfrac{1+1^2+...+1^n-n}{1+1}=\dfrac{n-n}{2}=0$.

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n}{x+x^2+...+x^m}=\dfrac{1+1^2+...+1^n}{1+1^2+...+1^m}=\dfrac{n}{m}$.

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}=\dfrac{0}{1}=0$.

l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}=\dfrac{0}{2}=0$

Bài tập 2: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}$ i) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x-7}{x^3+1}$

j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2+x-6\right)^2}{-x^3+2x^2}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-2)}{x(x+4)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{-4-2}{-4}=\dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{1-2x}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2-x)=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2.2-1}{2+3}=\dfrac{3}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(1+x)(1-x+x^2)}{(1+x)(1-x)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x+x^2}{1-x}=\dfrac{1-(-1)+(-1)^2}{1-(-1)}=\dfrac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x-3}=-\dfrac{1}{6}$.

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{2x-1}=\dfrac{5}{3}$.

g) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(2x+1)}{(x-4)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x+1}{x+5}=1$.

h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{-x^3+x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(x^2+5x+1\right)}{(x-2)\left(-x^2-2x-3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+1}{-x^2-2x-3}=-\dfrac{15}{11}$.

i) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x-7}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(4x-7)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x-7}{x^2-x+1}=-\dfrac{11}{3}$.

j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2+x-6\right)^2}{-x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+3)^2}{-x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)^2}{-x^2}=0$.

Bài tập 3: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x+4}{x^3-4x^2+3}$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$ h) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\left(\sqrt{9+x}+3\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[4\left(\sqrt{9+x}+3\right)\right]=24$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{-(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{-\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=-\dfrac{4}{3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{1+x^2}+1}=4$.

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2-x)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)}{2(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=\dfrac{1}{4}$.

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3+x-1}{x^3-4x^2+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x+7}+3}+x-1}{(x-1)\left(x^2-3x-3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{2x+7}+3}+1}{x^2-3x-3}=-\dfrac{4}{15}$.

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)}{4x^2-\left(3x^2+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)=2(-1)-\sqrt{3(-1)^2+1}=-4$

h) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left[4x^2-25(x-1)\right]\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\left(9-(x+4)\right)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left(4x^2-25x+25\right)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(4x-5)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(5-4x)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{2x+5\sqrt{x-1}}=\dfrac{(5-4.5)\left(3+\sqrt{5+4}\right)}{2.5+5\sqrt{5-1}}=-\dfrac{9}{2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(12x+1)}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-12x}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3}{1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}}=\dfrac{-3}{1+\sqrt[3]{12\cdot 0+1}+\sqrt[2]{(12\cdot 0+1)^2}}=-1$

Dạng 2: Tính giới hạn của hàm số tại vô cực

Phương pháp:

Dạng 1: $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x),Q(x)$ là các đa thức hoặc các hàm số.

- Gọi $p=\deg P(x), q=\deg Q(x)$ và $m=\min(p,q)$.
  Chia cả tử và mẫu cho x^m ta có kết luận. ($\deg P(x)$ là bậc cao nhất của đa thức $P(x)$).
- Khi đó:
  Nếu $p\le q$ thì tồn tại giới hạn.
  Nếu $p>q$ thì không tồn tại giới hạn.

Deg = bậc của đa thức

Dạng 2: Giới hạn $\infty-\infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0.\infty$.

Sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Các công thức liên hợp thường gặp:

$\oplus$ $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

$\oplus$ $\sqrt{A}-B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$

$\oplus$ $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$

$\oplus$ $\sqrt[3]{A}-B=\dfrac{A-B^3}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}.B+(B)^2}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

b) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

c) $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

d) $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

e) $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+7}{2x^3-1}$

f) $F=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}$

g) $G=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+3}{x-4}$

h) $H=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-2x+3}{5-x}$

i) $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(1+2x)^{50}}$

j) $J=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$

k) $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$

l) $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x+3}{6x+\sqrt{4x^2+x+3}}$

Lời giải

a) Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}=\dfrac{0}{1}=0$.

b) Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}=\dfrac{0}{2}=0$.

c) Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

d) Ta có:

$D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

e) $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{0-0+0}{2-0}=0$

f) $F=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{\left(-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{2+0-0}{-1-0+0}=-2$

g) $G=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.\dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}}\right)=+\infty$, vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}}=3$

h) $H=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(2-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x\left(\dfrac{5}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2.\dfrac{2-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{5}{x}-1}\right)=-\infty$,

vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{5}{x}-1}=-2$

i) $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{20}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}.x^{30}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}.\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\dfrac{(2-0)^{20}(3+0)^{30}}{(2+0)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$

j) $J=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2\right)}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2}{2+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$

k) $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2\right)}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2}{2+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$

l) $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x+3}{6x+\sqrt{4x^2+x+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x+3}{6x-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8+\dfrac{3}{x}}{6-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=2$

Bài tập 2: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\sqrt{2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$

Lời giải

a) Khi $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\sim\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2+3x\right)-\left(x^2+4x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+|x|\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=-\dfrac{1}{2}.$

» Giải nhanh: $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}$

$=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}\sim\dfrac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

b) $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\sim\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1-2x-1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt[3]{x^2\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{x^2\left(4-\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt[3]{x^2}\left[\sqrt[3]{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{4-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2}\right]}=0.$

» Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}=$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{4x^2-1}-\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\sim\frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\to 0.$$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=0-1=-1.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[x^2+5x+4-\left(x^2+5x-2\right)\right]}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+5x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[x^2+5x+4-x^2-5x+2\right]}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+5x-2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+5x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}=3.$$

e) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}-\sqrt{2}\right)=-\infty$,

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}-\sqrt{2}\right)=1-\sqrt{2}<0$.

f) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}.\frac{1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=0$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{4}$.

g) Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1}=-2$$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}+x-\sqrt{x^2-x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}+\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=\frac{3}{2}.$$

Dạng 3: Giới hạn một bên của hàm số

Phương pháp: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x) = \begin{cases} +\infty \Leftrightarrow L.\lim\limits_{x \to x_0} g(x) > 0 \\ -\infty \Leftrightarrow L.\lim\limits_{x \to x_0} g(x) < 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty & \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) > 0 \\ -\infty & \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) < 0 \end{cases}$

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau đây:

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x+3}{2-x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3-x^2}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{1-x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right)$

e) $\lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$

f) $\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$

g) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

h) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{2-x^2-3x}$

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} (2x+3) = 7 > 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2-x) = 0 \\ 2-x < 0 \ khi \ x \to 2^+ \end{cases}$ nên $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x+3}{2-x} = -\infty$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3-x^2}{1-x} = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} (3-x^2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (1-x) = 0 \\ 1-x < 0, \forall x > 1 \end{cases}$.

c) $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{1-x^2} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{\sqrt{(-x-1)(-x+4)}}{(-x-1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-1}(x-1)} = -\infty$

Do $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \left(\sqrt{-x+4} \right) = \sqrt{5}$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \left(\sqrt{-x-1}(x-1) \right) = 0, \sqrt{-x-1}(x-1) < 0, \forall x < -1$.

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-2} \right) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2} \right) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1-(x+1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(1-(x+1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\right)=-11$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ và $x\to 2^+\Rightarrow x>2\Rightarrow x-2>0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-2}\right)=-\infty$

e) Do $x\to -4^+\Rightarrow x>-4\Rightarrow x+4>0$ nên $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x\left(x^2-16\right)}{x+4}=\lim\limits_{x\to -4^+}x\left(x+4\right)=32$

f) Do $x\to -4^-\Rightarrow x<-4\Rightarrow x+4<0$ nên $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{-\left(x+4\right)}=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{-x-4}}=+\infty$.

g) Do $x\to 2^-\Rightarrow x<2\Rightarrow x-2<0\Rightarrow 2-x>0$

Nên $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(2-x)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{1-2x}=-\dfrac{1}{3}$.

h) Do $x\to 1^-\Rightarrow x<1\Rightarrow x-1<0$ nên $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{2-x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{(1-x)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x+2}=-\dfrac{1}{3}$.

Bài tập 2: Cho hàm số:

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{voi } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{voi } x\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)$

b) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{voi } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{voi } x\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)$

Lời giải

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{voi } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{voi } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)$ là

Do $x\to 1^+\Rightarrow x>1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3.1^2+1}=2$

b) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{voi } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{voi } x\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)$

Do $x\to 1^-\Rightarrow x<1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0\ \&\ 1-x>0\ \left(\forall x<1\right)\end{cases}$.

Bài tập 3: Tìm các giới hạn một bên và giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3\le x\le 3\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} & \text{khi } x>3\end{cases}$ khi $x\to 3$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{4(3x^2-5x+2)} & \text{khi } x<1\end{cases}$ khi $x\to 1$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ 5+\dfrac{4-x}{x+1} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ khi $x\to 0$

Lời giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}=+\infty$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

b) Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{4(3x^2-5x+2)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x-2)}{4(x-1)(3x-2)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-2)}{4(3x-2)}=-\dfrac{1}{4}\ne\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

c) Ta có :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-1$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5+\dfrac{4-x}{x+1}\right)=9\ne\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Bài tập 4: Gọi a,b là các giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}, x<-1\\ x+1, x\ge -1\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -1. Tính $a-b$.

Lời giải

Do hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -1 nên $x=-1$ là nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$, do đó ta $1-a+b=0\Leftrightarrow b=a-1$.

Ta viết lại hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1+a}{x-1}, x<-1\\ x+1, x\ge -1\end{cases}$.

Mặt khác giới hạn cần tìm tồn tại $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\Leftrightarrow\dfrac{a-2}{-2}=0\Leftrightarrow a=2\Rightarrow b=1$.

Do đó $a-b=1$.

Dạng 4: Bài toán thực tế và liên môn

Phương pháp: Sử dụng các định nghĩa, định lý để áp dụng vào giải các bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một hồ nuôi tôm chứa $600m^3$ nước mặn với nồng độ muối $1\,kg/m^3$. Chủ hồ nuôi tôm dự định chuyển đổi giống mới nên bơm nước vào hồ với vận tốc $3m^3$/ phút để làm ngọt hóa nước trong hồ.

a) Viết biểu thức $C(x)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau x phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

a) Khối lượng muối có trong hồ nuôi tôm là: $1.600=600\,(kg)$.

Sau x phút, lượng nước trong hồ là: $600+3x\,(m^3)$.

Nồng độ muối tại thời điểm x phút kể từ khi bơm thêm nước ngọt vào là: $C(x)=\dfrac{600}{600+3x}$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{600}{600+3x}=0$.

Ý nghĩa: Điều này có nghĩa là khi t càng lớn thì nồng độ muối trong hồ sẽ dần về 0. Tức là đến một thời điểm nào đó muối trong hồ không còn đáng kể và nước trong hồ coi như nước ngọt.

Bài tập 2: Một công ty sản xuất giày da đã xác định được rằng, tính trung bình một công nhân có thể làm được $f(x)=\dfrac{16x}{15+2x}$ đôi giày mỗi ngày sau khi được đào tạo t ngày. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16x}{15+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16}{\dfrac{15}{x}+2}=\dfrac{16}{2}=8$.

Ý nghĩa: Khi thời gian đào tạo tăng lên thì số đôi giày mỗi công nhân sản xuất được trong một ngày cũngđược cũng tăng lên nhưng không quá 8 đôi giày/ ngày.

Bài tập 3: Chi phí để sản xuất x chai nước ngọt của công ty nước giải khát A được xác định bởi hàm số $F(x)=50000+15x$ (đơn vị: nghìn đồng).

a) Tính chi phí trung bình $\overline{F}(x)$ để công ty sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là: $\overline{F}(x)=\dfrac{50000+15x}{x}$ (nghìn đồng).

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50000+15x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{50000}{x}+15}{1}=15$ (nghìn đồng).

Ý nghĩa: Khi số sản phẩm công ty sản xuất ra càng nhiều thì chi phí trung bình để sản xuất ra một sản phẩm sẽ giảm dần, số sản phẩm x đủ lớn thì chi phí trung bình xấp xỉ 15 nghìn đồng mỗi sản phẩm và không thể thấp hơn.

Bài tập 4: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm Thủ Thiêm trong một giây được cho bởi công thức $f\left(v\right)=\dfrac{400v}{v^2+3v+6}$, trong đó $v\left(m/s\right)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim\limits_{v\to 20} f\left(v\right)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{v\to 20} f\left(v\right)=\lim\limits_{v\to 20}\dfrac{400v}{v^2+3v+6}=\dfrac{400.20}{20^2+3.20+6}\approx 17$.

Ý nghĩa: Khi các xe vào đường hầm với vận tốc xấp xỉ $20m/s$ thì trung bình mỗi giây có khoảng 17 xe vào đường hầm.

Bài tập 5: Một bar ngoài trời ở khu du lịch A đã xác định được rằng, tính trung bình một ngày số lượng khách du lịch đến bar được xác định bởi công thức $f\left(x\right)=\dfrac{6000x}{50+12x}$ khách mỗi ngày sau khi số nhân viên của bar được tăng lên x nhân viên. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6000x}{50+12x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6000}{\dfrac{50}{x}+12}=\dfrac{6000}{12}=500$.

Ý nghĩa: Khi số nhân viên trong bar tăng lên thì số khách đến bar trong một ngày cũng được cũng tăng lên nhưng không quá 500 khách/ ngày.

Bài tập 6: Chi phí để sản xuất x kg chả mực của cửa hàng bán chả mực A được xác định bởi hàm số $F\left(x\right)=60000+320x$ (đơn vị: nghìn đồng).

a) Tính chi phí trung bình $\overline{F}\left(x\right)$ để công ty sản xuất x kg chả mực.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}\left(x\right)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là: $\overline{F}\left(x\right)=\dfrac{6000+320x}{x}$ (nghìn đồng).

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6000+320x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{6000}{x}+320}{1}=320$ (nghìn đồng).

Ý nghĩa: Khi khối lượng chả mực cửa hàng sản xuất ra càng nhiều thì chi phí trung bình để sản xuất ra một kg sản phẩm sẽ giảm dần, số sản phẩm x đủ lớn thì chi phí trung bình xấp xỉ 320 nghìn đồng mỗi kg chả mực và không thể thấp hơn.

Bài tập 7: Trong thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức: $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Lời giải

Từ công thức khối lượng $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, ta thấy m là một hàm số của v, với tập xác định là nửa khoảng $\left[0;c\right)$. Rõ ràng khi v tiến gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v\to c^-$, ta có $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\to 0$.

Do đó $\lim\limits_{v\to c^-} m(v)=+\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng.

Bài tập 8: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t)=45t^2-t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tặng người bệnh giữa hai thời điểm t_1,t_2 là $v_{tb}=\dfrac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$. Tính $\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{g(t)-g(10)}{t-10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Lời giải

Ta có $g(10)=45.10^2-10^3$.

Khi đó $\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{g(t)-g(10)}{t-10}=\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{45t^2-t^3-45.10^2-10^3}{t-10}=\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{45(t^2-10^2)-(t^3-10^3)}{t-10}$

$=\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{45(t-10)(t+10)-(t-10)(t^2+10t+100)}{t-10}=\lim\limits_{t\to 10}\left[45(t+10)-(t^2+10t+100)\right]$

$=\lim\limits_{t\to 10}(-t^2+35t+350)=600$.

Ý nghĩa: Từ kết quả trên, ta thấy tốc độ tăng người bệnh ngay tại thời điểm $t=10$ ngày là 600 người/ngày.

Bài tập 9: Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25 lít/phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị g/l) là $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

Lời giải

a) Sau t phút thì lượng muối trong bể là $30.25.t=750t\ (g)$ và thể tích nước trong bể là $5000+25t\ (l)$.

Vậy nồng độ muối của nước trong bể sau t phút là $C(t)=\dfrac{750t}{5000+25t}=\dfrac{30t}{200+t}\ (g/l)$.

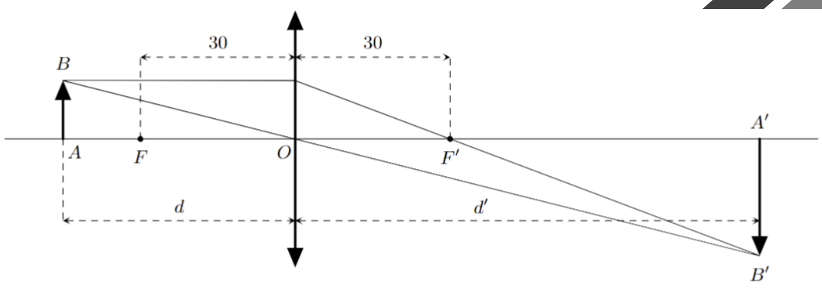
b) Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{30t}{200+t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{30}{\dfrac{200}{t}+1}=\dfrac{30}{1}=30$.

Ý nghĩa: Theo kết quả đó, ta thấy khi lượng nước trong bể tăng theo thời gian đến vô hạn thì nồng độ muối của nước sẽ tăng dần đến giá trị $30(g/l)$, tức là xấp xỉ nồng độ muối của loại nước muối cho thêm vào bể.

Bài tập 10: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ. Công thức thấu kính là $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}$.

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d'=\varphi(d)$.

b) Tìm $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)$, $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$ và $\lim\limits_{d\to f}\varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.



Lời giải

a) Theo giả thiết: $\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{d}\Leftrightarrow\dfrac{1}{d'}=\dfrac{d-f}{df}\Leftrightarrow d'=\dfrac{df}{d-f}$.

b) Ta có: $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)=\lim\limits_{d\to f^+}\dfrac{df}{d-f}=+\infty$; $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)=\lim\limits_{d\to f^-}\dfrac{df}{d-f}=-\infty$.

Và $\lim\limits_{d\to f}\varphi(d)=\lim\limits_{d\to f}\dfrac{df}{d-f}=\infty$.

Ý nghĩa: Khi khoảng cách của vật tới thấu kính mà gần với tiêu cự thì khoảng cách ảnh của vật đến thấu kính ra xa vô tận nên lúc đó bằng mắt thường mình không nhìn thấy.

Bài tập 11: Một công ty sản xuất máy tính cầm tay đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $C(t)=\dfrac{30t}{5+t}$ $(t\geq 0)$ chiếc máy tính mỗi ngày sau khi được đào tạo t ngày. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{30t}{5+t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{30}{\dfrac{5}{t}+1}\right)=30$

Ý nghĩa: Khi thời gian đào tạo một nhân viên tăng lên thì số máy tính trung bình mỗi nhân viên lắp ráp được trong một ngày cũng tăng lên, như không quá 30 chiếc mỗi ngày.

Bài tập 12: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x)=60000+250x$.

a) Tính chi phí trung bình $\overline{F}(x)$ để công ty sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là $\overline{F}(x)=\dfrac{60000+250x}{x}$ (nghìn đồng).

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{F}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{60000+250x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{60000}{x}+250\right)=250$ (nghìn đồng).

Ý nghĩa: Khi số sản phẩm công ty sản xuất ra càng nhiều thì chi phí trung bình để sản xuất ra một sản phẩm sẽ giảm dần, số sản phẩm x đủ lớn thì chi phí trung bình xấp xỉ 250 (nghìn đồng) mỗi sản phẩm và không thể thấp hơn.

Bài tập 13: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm trong 1 giây được cho bởi công thức sau đây: $f\left(v\right)=\dfrac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$, trong đó v (m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm $\lim\limits_{v\to 15} f\left(v\right)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{v\to 15} f\left(v\right)=\lim\limits_{v\to 15}\dfrac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}=\dfrac{290,4.15}{0,36.15^2+13,2.15+264}\approx 8$.

Ý nghĩa: Khi các xe vào đường hầm với vận tốc xấp xỉ 20 (m/s) thì trung bình mỗi giây có khoảng 8 xe vào đường hầm.

Bài tập 14: Một hồ nước chứa $500m^3$ nước mặn với nồng độ muối $6kg/m^3$. Người ta dự định ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước vào hồ với vận tốc 3 (m^3/ phút).

a) Viết biểu thức $C\left(t\right)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C\left(t\right)$ và giải thích ý nghĩa của kết quả này.

Lời giải

a) Khối lượng muối có trong hồ là $500.6=3000\ (kg)$.

Sau t phút, lượng nước trong hồ là $500+3t$ (m^3).

Nồng độ muối tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C\left(t\right)=\dfrac{3000}{500+3t}\ (kg/m^3)$.

b) Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} C\left(t\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{3000}{500+3t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3000}{t}}{\dfrac{500}{t}+3}=\dfrac{0}{3}=0$.

Điều này có nghĩa là khi t càng lớn thì nồng độ muối trong hồ sẽ dần về 0. Tức là, đến một thời điểm nào đó nồng độ muối trong hồ không còn đáng kể và nước trong hồ xem như nước ngọt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)$ là

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)=3.2^2+7.2+11=37$.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|=\left|\sqrt{3}^2-4\right|=1$.

Câu 3: Cho $H=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1}$ và $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^2+2}{x^3+x+3}$. Tính $H+K$.

A. 0. **B.** 5. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có : $H=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1}=0$ và $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2}{x^3+x+3}=\dfrac{3}{5}$ nên $H+K=\dfrac{3}{5}$.

Câu 4: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\left(x^2-2\right)}{x^2+x+3}=\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z}; b<0$. Biết $\dfrac{a}{b}$ tối giản thì $a+b$ bằng bao nhiêu ?

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\left(x^2-2\right)}{x^2+x+3}=\dfrac{2}{-5}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-5\end{cases}$ nên $a+b=2+(-5)=-3$.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$ là

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Lời giải

Ta có : $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}=\sqrt{\dfrac{9.3^2-3}{(2.3-1)\left(3^4-3\right)}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x-1}{x^2+2x}}$ là

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x-1}{x^2+2x}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^2-2-1}{2^2+2.2}}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 7: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4x+4}+2}=\dfrac{a}{b}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a+b=3$. **B.** $b=4a$. **C.** $4b=a$. **D.** $a.b=1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$, chọn $\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$ nên $b=4a$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là 0.

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{9}{6}$. **C.** 0. **D.** Không có giá trị a.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=3+2a=0\Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 9: Biết rằng $b<0,\ a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-b+x}}{x+1}=-2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $8<a<13$. **B.** $b<-1$. **C.** $a^2+b^2>10$. **D.** $a-b>0$..

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-b+x}}{x+1}=\dfrac{1-\sqrt{1-b}}{1}=-2\Leftrightarrow 1-\sqrt{1-b}=-2\Leftrightarrow b=-8$.

Mà $a+b=5\Leftrightarrow a+(-8)=5\Leftrightarrow a=13$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-2}{x+2}=5$. Khi đó hãy tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-4+\sqrt[3]{5f(x)+7}}{x^2+x}$.

A. 4. **B.** -2. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-2}{x+2}=5\Leftrightarrow\dfrac{\lim\limits_{x\to -3}\left(f(x)-2\right)}{\lim\limits_{x\to -3}(x+2)}=5\Leftrightarrow\dfrac{\lim\limits_{x\to -3}f(x)-2}{-1}=5\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to -3}f(x)=-3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-4+\sqrt[3]{5f(x)+7}}{x^2+x}=\dfrac{-4+\sqrt[3]{5.(-3)+7}}{(-3)^2-3}=-1$.

Câu 11: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ có kết quả là

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$

Câu 12: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{6x^2+x+1}$ có kết quả là

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 0 .

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{6x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{6+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

Câu 13: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ có kết quả là

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 2 .

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x.\dfrac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=-\infty.$

Câu 14: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ có kết quả là

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2}=\dfrac{1}{5}.$

Câu 15: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ có kết quả là

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}{-\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2}=\dfrac{-3}{-1}=3.$

Câu 16: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có kết quả là

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}=-1$

Câu 17: Cho $a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax + \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x - 1} = 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a < -1$. **B.** $-1 \le a \le 1$. **C.** $1 \le a < 2$. **D.** $a \ge 2$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax + \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x - 1} = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(a + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right)}{x\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a+1}{2} = 2 \Leftrightarrow a = 3$.

Vậy $a = 3$.

Câu 18: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(-x^2 + 1\right)^3 (1 - 2x)^{94}}{2x^{100} + 3}$ có kết quả là

A. $-\infty$. **B.** -2^{100}. **C.** 2^{93}. **D.** -2^{93}.

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(-x^2 + 1\right)^3 (1 - 2x)^{94}}{2x^{100} + 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left[x^2\left(-1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right]^3 \left[x\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)\right]^{94}}{x^{100}\left(2 + \dfrac{3}{x^{100}}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^6\left(-1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^3 x^{94}\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)^{94}}{x^{100}\left(2 + \dfrac{3}{x^{100}}\right)}$$

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(-1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^3 \left(\dfrac{1}{x} - 2\right)^{94}}{2 + \dfrac{3}{x^{100}}} = \dfrac{(-1)^3.(-2)^{94}}{2} = -2^{93}$$

Câu 19: Biết $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{a^2x - 1} = \dfrac{2}{3}$ với $a = \dfrac{m + \sqrt{57}}{n} > 0$ và $m;n$ là số nguyên dương. Khi đó giá trị của biểu thức $S = m + n$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{a^2x - 1} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\left(a + \sqrt{4 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right)}{x\left(a^2 - \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{a+2}{a^2} = \dfrac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{3 + \sqrt{57}}{4} \ (N) \\ a = \dfrac{3 - \sqrt{57}}{4} \ (L) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow S = 7.$$ Vậy $S = 7$.

Câu 20: Biết $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{mx - 2} = \dfrac{1}{2}$. Khi đó m thuộc tập hợp nào?

A. $[3;6]$. **B.** $[-3;0]$. **C.** $[-6;-3]$. **D.** $[1;3]$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{mx - 2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\left(-\sqrt{4 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + \dfrac{4}{x}\right)}{x\left(m - \dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-2}{m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -4$.

Vậy $m=-4\in[-6;-3]$.

Câu 21: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=-\infty$,

vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=1>0.$

Câu 22: Tìm $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Lời giải

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2}=-\infty$ vì $\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ và $x^2>0$ với mọi $x\neq0$.

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)=+\infty$,

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}+1>0$.

Câu 24: Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 25: Cho biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=5a+b$.

A. -5. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{5+\dfrac{2}{x}}-\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{5}\sqrt{5}$.

Suy ra: $a=-\dfrac{1}{5}$, $b=0$. Vậy $S=-1$.

Câu 26: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** -1.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x+x\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(3+\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty,$$

vì $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $\lim_{x\to-\infty}\left(3+\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}\right)=6>0$.

Câu 27: Biết rằng $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=-5.$$

Khi $a+1>0\Leftrightarrow a>-1$, ta được $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=+\infty$ (không thỏa mãn)

Khi $a+1<0\Leftrightarrow a<-1$, ta được $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=-\infty$ (không thỏa mãn)

Khi $a+1=0\Leftrightarrow a=-1$, ta được:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-(-2+b)x+2b+1}{x-2}\right)=2-b$$

Do đó, $2-b=-5\Leftrightarrow b=7$. Vậy $a+b=6$.

Câu 28: Tìm $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+2x\right)$.

A. 2. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\right)=-\infty$ vì $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $\lim_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=1$.

Câu 29: Tìm $\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)$.

A. -1. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+x-\sqrt[3]{x^3+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+2}+\left(\sqrt[3]{x^3+2}\right)^2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}\right)^2\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{-2}{x^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}\right)^2}\right)=1$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)=1$.

Câu 30: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$.

A. 3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)$.

Nếu $a>2$ thì $L=-\infty$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=2-a<0$.

Tương tự nếu $a<2$ thì $L=+\infty$.

Từ đó suy ra $a=2$. Khi đó $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(2x+b)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-3-4b)x+1-b^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+2x+b}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3-4b+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2+\frac{b}{x}}=\frac{-3-4b}{4}\text{ suy ra }-3-4b=0\Leftrightarrow b=-\frac{3}{4}.$$

Vậy $a-4b=5$.

Câu 31: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)$

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{4x^2+1-x^2}{\sqrt{4x^2+1}+x}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{x.\left(\sqrt{4x^2+1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1.\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-3.$$

Câu 32: Tính $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^3-1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^3-1\right).\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\frac{\left(x^3-1\right)^2x}{x^2-1}}$

$$=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\frac{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)^2x}{(x-1)(x+1)}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)^2x}{(x+1)}}=0.$$

Câu 33: Kết quả của $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{(x-2)(x+2)}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}=0.$

Câu 34: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3+x^2}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Câu 35: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^3-1}}$ bằng

A. $-2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Khi $x\to+\infty$ thì $1-2x<0$ nên ta có: $\lim\limits_{x\to\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to\to+\infty}-\sqrt{\dfrac{(1-2x)^2(3x-11)}{x^3-1}}$

$=\lim\limits_{x\to\to+\infty}-\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{1}{x^2}-2\right)^2\left(3-\dfrac{11}{x}\right)}{1-\dfrac{1}{x^3}}}=-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}.$

Câu 36: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}$ bằng

A. $-2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Khi $x\to+\infty$ thì $1+x>0$ nên ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(1+x)^2 3x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2.3x}{1-\dfrac{1}{x^2}}}=+\infty.$

Câu 37: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 4. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^2+16-x^2}{\sqrt{x^2+16}+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{16}{\sqrt{x^2+16}+x}\right)=0.$

Câu 38: Kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+16}\right)$ bằng

A. -1. **B.** -4. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+16}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}.|x|\sqrt{1+\frac{16}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}.(-x)\sqrt{1+\frac{16}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{16}{x^2}}=-1.$

Câu 39: Kết quả của $\lim\limits_{x\to3^+}(x-3).\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to3^+}(x-3).\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)=\lim\limits_{x\to3^+}\sqrt{x-3}.\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)=0.$

Câu 40: Kết quả của $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right).\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right).\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\sqrt{x+1}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\frac{x}{x-1}}=0.$

Câu 41: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x+2}{x-2}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}(2x+2)=6>0\\ \lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0\\ x-2>0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x+2}{x-2}=+\infty.$

Câu 42: Tính $N=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x+2}{x-3}$.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $N=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x+2}{x-3}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to3^+}(x+2)=3+2=5>0$

và $\lim\limits_{x\to3^+}(x-3)=0$; $x-3>0$ khi $x\to3^+$.

Câu 43: Giới hạn $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+2}{x-3}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+2}{x-3}=-\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to3^-}(3x+2)=3.3+2=11>0$ và $\lim\limits_{x\to3^-}(x-3)=0$; $x-3<0$).

Câu 44: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{4x-3}{x-1}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}(4x-3)=1>0\\ \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0\\ x-1<0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4x-3}{x-1}=-\infty$.

Câu 45: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-1)=1>0$, $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ và $x>1\Leftrightarrow x-1>0$ suy ra $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}=+\infty$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=5$ và $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-5$. Khẳng định nào sau đây là đúng?.

A. $\lim\limits_{x\to3}f(x)=5$. **B.** $\lim\limits_{x\to3}f(x)=0$.

C. Không tồn tại $\lim\limits_{x\to3}f(x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to3}f(x)=-5$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$, suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

Câu 47: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-4}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to2^+}(x^2+x-1)=5>0$ và $\lim\limits_{x\to2^+}(x^2-4)=0$ và $x^2-4>0$ khi $x\to2^+$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-4}=+\infty$.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để $I<12$ biết $I=\lim\limits_{x\to-1}(x^4-2mx+m^2+3)$

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $I=\lim\limits_{x\to-1}(x^4-2mx+m^2+3)=(-1)^4-2m(-1)+m^2+3=m^2+2m+4$.

$I<12\Leftrightarrow m^2+2m+4<12\Leftrightarrow m^2+2m-8<0\Leftrightarrow -4<m<2$.

Do m nguyên nên $m\in\{-3,-2,-1,0,1\}$.

Câu 49: Giả sử ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x).g(x)]=a.b$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=a-b$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=a+b$.

Lời giải

Vì b có thể bằng 0 nên mệnh đề sai là $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$

Câu 50: Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^5-3x^3+x+1)$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** -4.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(-4-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)=+\infty$.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)=-4<0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty\end{cases}$.

Câu 51: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{4x+2}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{-1}{4}$. **D.** $\frac{-1}{2}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}$$

Câu 52: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+9}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}1=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+9\right)=+\infty\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+9}=0$.

Câu 53: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)$?

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}+x\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{2+\frac{1}{x}}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x}}+1\right)\right]$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x}}+1\right)=1-\sqrt{2}<0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)=+\infty$.

Câu 54: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}=-2$.

Câu 55: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}$ bằng

A. a. **B.** b. **C.** c. **D.** $\dfrac{a+b}{c}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c+\dfrac{a}{x^2}}{1+\dfrac{b}{x^2}}=\dfrac{c+0}{1+0}=c$.

Câu 56: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$?

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2(1+\dfrac{1}{x^2})}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1$.

Câu 57: Để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $[3;6]$. **B.** $[-3;0]$. **C.** $[-6;-3]$. **D.** $[1;3]$.

Lời giải

Khi $m=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x.\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{4}{x}}{2}=-\infty$ nên $m=0$ không thỏa mãn.

Khi $m\neq 0$, ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{4}{x}}{m-\dfrac{2}{x}}=-\dfrac{2}{m}$.

Theo bài ra ta có: $-\dfrac{2}{m}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=-4\in[-6;-3]$.

Câu 58: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\left((2-a)x-3\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[-\left((2-a)-\dfrac{3}{x}\right)\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty\Rightarrow-(2-a)\geq 0\Leftrightarrow a\geq 2$.

Với $a \geq 2 \Rightarrow a(a-2) \geq 0$ suy ra $P = a(a-2)+4 \geq 4$. Dấu "=" xảy ra khi $a = 2$. Vậy GTNN của P là 4.

Câu 59: Trong hồ có chứa 7000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t) = \dfrac{700+15t}{30.15t}$. **B.** $C(t) = \dfrac{30.15t}{700+15t}$. **C.** $C(t) = \dfrac{7000+15t}{30.15t}$. **D.** $C(t) = \dfrac{30.15t}{7000+15t}$.

Lời giải

Sau t phút lượng nước trong hồ là $7000+15t$ (lít)

Khối lượng muối có trong hồ tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $30.15t$ (gam)

Nồng độ muối tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C(t) = \dfrac{30.15t}{7000+15t}$ (gam/lít).

Câu 60: Trong hồ có chứa 4000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 35 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t) = \dfrac{400+15t}{35.15t}$. **B.** $C(t) = \dfrac{35.15t}{400+15t}$. **C.** $C(t) = \dfrac{4000+15t}{35.15t}$. **D.** $C(t) = \dfrac{35.15t}{4000+15t}$.

Lời giải

Sau t phút lượng nước trong hồ là $4000+15t$ (lít)

Khối lượng muối có trong hồ tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $35.15t$ (gam)

Nồng độ muối tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C(t) = \dfrac{35.15t}{4000+15t}$ (gam/lít).

Câu 61: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \dfrac{50t}{t+4}$ $(t \geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$

A. 20. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 50.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{50t}{t+4} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{50t}{t\left(1+\dfrac{4}{t}\right)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{50}{1+\dfrac{4}{t}} = 50$.

Câu 62: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \dfrac{40t}{t+4}$ $(t \geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$

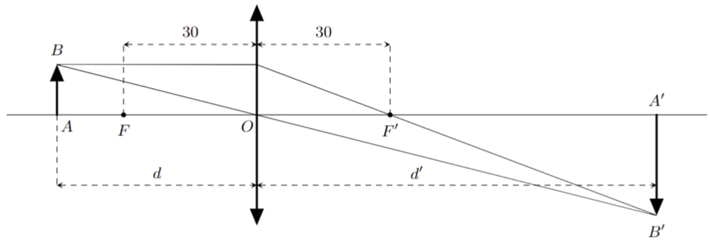
A. 20. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 50.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{40t}{t+4} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{40t}{t\left(1+\dfrac{4}{t}\right)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{40}{1+\dfrac{4}{t}} = 40$.

Câu 63: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính. Ta có công thức $\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{f}$ hay $d'=\frac{df}{d-f}$

Tìm giới hạn $\lim\limits_{d\to f^+}\frac{df}{d-f}$



A. $-\infty$. **B.** f^2. **C.** $+\infty$. **D.** f.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{d\to f^+} df = f^2$ và $\lim\limits_{d\to f^+}\frac{1}{d-f}=+\infty$ nên $\lim\limits_{d\to f^+}\frac{df}{d-f}=\lim\limits_{d\to f^+}\left(df\cdot\frac{1}{d-f}\right)=+\infty$.

Câu 64: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\frac{30t}{t+4}$ $(t\ge 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)$.

A. 20. **B.** 30. **C.** 40. **D.** 50.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{30t}{t+4}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{30t}{t\left(1+\frac{4}{t}\right)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{30}{1+\frac{4}{t}}=30$.

Câu 65: Một cái hồ đang chứa $400\ m^3$ nước mặn với nồng độ muối $10kg/m^3$. Người ta ngọt hóa nước hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $3m^3$ / phút. Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

A. $C(t)=\frac{3}{400+3t}$. **B.** $C(t)=\frac{400+3t}{3}$. **C.** $C(t)=\frac{400+3t}{4000}$. **D.** $C(t)=\frac{4000}{400+3t}$.

Lời giải

Khối lượng muối có trong hồ là $400.10=4000(kg)$

Sau t phút lượng nước trong hồ là $400+3t\left(m^3\right)$

Nồng độ muối tại thời điểm t phút kể từ khi bơm là $C(t)=\frac{4000}{400+3t}$ $\left(kg/m^3\right)$

Câu 66: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm trong 1 giây được cho bởi công thức $f(v)=\frac{430v}{0,5v^2+16,2v+354}$, trong đó v (m/s) là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Khi các xe vào đường hầm với vận tốc xấp xỉ 15 (m/s) thì số xe vào đường hầm mỗi giây là

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{v\to 15} f(v)=\lim\limits_{v\to 15}\dfrac{430v}{0,5v^2+16,2v+354}=\dfrac{430.15}{0,5.15^2+16,2.15+354}\approx 9$.

Câu 67: Giả sử khoảng cách từ đỉnh của vách đá đến mặt đất là $96\,ft$. Một hòn đá rơi từ đỉnh của một vách đá xuống đất, sau khoảng thời gian t giây, khoảng cách của nó so với đỉnh của vách đá là $s(t)=16t^2$. Tại thời điểm hòn đá chạm xuống đất vận tốc của hòn đá xấp xỉ bằng

A. $32\sqrt{6}$. **B.** $16\sqrt{6}$. **C.** 0 **D.** 32

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{v\to 15} f(v)=\lim\limits_{v\to 15}\dfrac{430v}{0,5v^2+16,2v+354}=\dfrac{430.15}{0,5.15^2+16,2.15+354}\approx 9$.

Hòn đá sẽ chạm đất khi và chỉ khi $s(t)=96=16t^2 \Leftrightarrow t^2=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{6}\ (tm) \\ t=-\sqrt{6}\ (l) \end{array}\right.$

Vậy hòn đá sẽ chạm đất tại thời điểm $t=\sqrt{6}\approx 2,4495\ (s)$

Tại thời điểm hòn đá chạm xuống đất vận tốc của hòn đá là

$$\lim_{t\to\sqrt{6}}\frac{s(t)-s\left(\sqrt{6}\right)}{t-\sqrt{6}}=\lim_{t\to\sqrt{6}}\frac{16t^2-16.\sqrt{6}^2}{t-\sqrt{6}}=\lim_{t\to\sqrt{6}}16\left(t+\sqrt{6}\right)=32.\sqrt{6}\approx 78,4.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=2; \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\sqrt{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\sqrt{3}-2$.

d) $\lim\limits_{x\to -1}\left[f(x)-g(x)\right]=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}=\dfrac{\sqrt{3.1^2+1}}{1+1}=1$.

Và $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2.(-2)}{-2+1}=4$.

b) Đúng: Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}=2$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{3}.$$

c) Sai: Ta có $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to-\infty} f(x)-\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\sqrt{3}-2=-\sqrt{3}-2$.

d) Đúng: $\lim_{x\to-1}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{3x^2+1}-2x\right)}{(x+1)\left(\sqrt{3x^2+1}-2x\right)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{3x^2+1}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)\left(\sqrt{3x^2+1}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{1-x}{\sqrt{3x^2+1}-2x}=\frac{1}{2}$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\le 1\\ \sqrt{x^2+a}, x>1\end{cases}$ với a là tham số thực dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim_{x\to-5} f(x)=-9$.

b) $\lim_{x\to1^-} f(x)=1$ và $\lim_{x\to1^+} f(x)=a$.

c) $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{1-x}=+\infty$.

d) Để tồn tại $\lim_{x\to1} f(x)$ thì $a=8$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\lim_{x\to-5} f(x)=\lim_{x\to-5}\left[2.(-5)+1\right]=-9$.

b) Sai: $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(2x+1)=3$ và $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\sqrt{x^2+a}=\sqrt{1+a}$.

c) Sai: Ta có $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{1-x}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2+a}}{1-x}$; $\lim_{x\to1^+}\sqrt{x^2+a}=\sqrt{1+a}>0,\forall a>0$.

$\lim_{x\to1^+}(1-x)=0$ và khi $x\to1^+\Rightarrow 1-x<0$

Suy ra $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{1-x}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2+a}}{1-x}=-\infty$.

d) Đúng: Để tồn tại $\lim_{x\to1} f(x)$ thì $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$; $f(1)=3$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(2x+1)=3$; $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\sqrt{x^2+a}=\sqrt{1+a}$.

Suy ra để hàm số tồn tại $\lim_{x\to1} f(x)$ thì $\sqrt{1+a}=3\Leftrightarrow a=8$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\frac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-3)(x-2)}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=8$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$

Lời giải

a) Sai: $f(x)=\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-3)(3x-1)}{(x-3)(x-2)}$

b) Đúng: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(3x-1)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-1}{x-2}=8$.

c) Sai: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=3$.

d) Sai: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-1}{x-2}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=5>0$ và $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0;\ x-2>0$

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{1-x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ không tồn tại.

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

Lời giải

a) Đúng: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+3}{1-x}=1$

b) Sai: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{1-x}=0$

c) Đúng: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(3-x)=2$

d) Sai: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{1-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}-1\right)}=-\infty$

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-1} = -1 < 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi} \quad x < 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \\ 1 & \text{khi} \quad x > 0 \end{cases}$. Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

a) $f(0) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

d) Hàm số liên tục tại $x = 0$.

Lời giải

a) Đúng: $f(0) = 0$

b) Đúng: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

c) Sai: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

d) Sai: Do không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = -1$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x^2-1} = \dfrac{1}{4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x^3-x^2+x-1} > 0$.

d) Để $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{ax+b} = 2$ thì $a + 3b = 1$.

Lời giải

a) Đúng: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3\text{x}+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.

b) Sai: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$.

c) Sai: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^3-x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2}<0$.

d) Đúng: Để $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{ax+b}=2$ thì $ax+b$ có nghiệm bằng 1 $\Leftrightarrow a+b=0\Leftrightarrow b=-a$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{ax+b}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{a(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{a}=-\dfrac{1}{a}=2\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a+3b=-\dfrac{1}{2}+3.\dfrac{1}{2}=1$.

Câu 7: Cho $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $L=5$ khi $a=-10$

b) $L>0$ khi $a>0$

c) $L<0$ khi $a>0$

d) $L=-1$ thì a là một nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$

Lời giải

$L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax+5}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(a+\dfrac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1}=-\dfrac{a}{2}.$$

a) Đúng: Khi đó $L=5\Leftrightarrow-\dfrac{a}{2}=5\Leftrightarrow a=-10$.

b) Sai: Khi đó $L>0\Leftrightarrow-\dfrac{a}{2}>0\Leftrightarrow a<0$.

c) Đúng: Khi đó $L<0\Leftrightarrow-\dfrac{a}{2}<0\Leftrightarrow a>0$.

d) Đúng: Khi đó $L=-1\Leftrightarrow-\dfrac{a}{2}=-1\Leftrightarrow a=2$.

$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$

Câu 8: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a>0$

b) $b>0$

c) $a>b$

d) $P=4a+b=2$

Lời giải

a) Sai: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2023}{x+2024}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-a\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2023}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2024}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-a\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2023}{x}}{1+\dfrac{2024}{x}}=-a$.

Nên $-a=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

b) Đúng: Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+bx+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+bx+1}+x}$

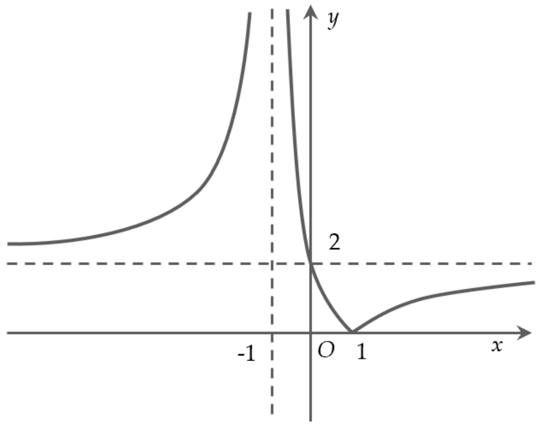
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx+1}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(b+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{b}{2}$.

Nên $\dfrac{b}{2}=2\Leftrightarrow b=4$.

c) Sai: Có $a=-\dfrac{1}{2}$ và $b=4$.

d) Đúng: Vậy $P=4\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4=2$.

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$

d) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

Lời giải

a) Đúng: Mệnh đề $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ đúng.

b) Sai: Mệnh đề $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ sai

c) Sai: Mệnh đề $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=2$ sai.

d) Đúng: Mệnh đề $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=+\infty$ đúng

Câu 10: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) a là số lẻ

b) $b>0$

c) $a.b<0$

d) $a-4b=5$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-ax\right)-b\right)=0$

$$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1-a^2x^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(4-a^2\right)x^2-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}4-a^2=0\\ a>0\\ \dfrac{-3}{2+a}-b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-\dfrac{3}{4}\end{cases}.$$

a) Sai: a là một số chẵn

b) Sai: $b<0$

c) Đúng: $a.b<0$

d) Đúng: $a-4b=5$

Câu 11: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a=9$

b) $b=3c$

c) $a=3c$

d) $P=a+b+5c=14$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(a-c^2\right)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}=-2$.

Điều này xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}a-c^2=0 \quad (a,\, c>0)\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=-2\end{cases}$. (Vì nếu $c\le 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=+\infty$).

Mặt khác, ta cũng có $c^2+a=18$.

Do đó, $\begin{cases}a=c^2=9\\ b=-2\left(\sqrt{a}+c\right)\end{cases} \Leftrightarrow a=9$, $b=-12$, $c=3$. Vậy $P=a+b+5c=12$.

a) Đúng: $a=9$

b) Sai:

c) Đúng:

d) Sai: $P=a+b+5c$

Câu 12: Cho a, 3, c là các số thực khác 0. Biết giới hạn $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $L=3$ khi $\frac{a-1}{b}=3$

b) $L=6$ khi $\frac{a-1}{b}=4$

c) $L=2$ khi $a+2b=1$

d) $L=1$ khi $a+b=1$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-(ax)^2}{(bx-1)\left(\sqrt{x^2-3x}-ax\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left[\left(1-a^2\right)x-3\right]}{(bx-1)\left(\sqrt{x^2-3x}-ax\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(1-a^2\right)-\frac{3}{x}}{\left(b-\frac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}}-a\right)}=\frac{\left(1-a^2\right)}{b(-1-a)}=\frac{a-1}{b}$.

a) Đúng: Ta có $L=\frac{a-1}{b}$. Khi đó $L=3$ thì $\frac{a-1}{b}=3$

b) Sai: $L=6$ khi $\frac{a-1}{b}=4$

c) Đúng: Khi $L=2$ thì $\frac{a-1}{b}=2\Leftrightarrow a-1=2b\Leftrightarrow a-2b=1$

d) Đúng: Khi $L=1$ thì $\frac{a-1}{b}=1\Leftrightarrow a-1=b\Leftrightarrow a-b=1$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{khi } x<-1\\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x\ge -1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\sqrt{5}$

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-3$.

c) Giới hạn $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\sqrt{2}$

d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x\to-1$

Lời giải

a) Sai: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-4$

b) Đúng: Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n<-1$ và $x_n\to-1$ ta có: $f(x_n)=x_n-2$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim f(x_n)=-1-2=-3$.

c) Đúng: Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n>-1$ và $x_n\to-1$ ta có: $f(x_n)=\sqrt{x_n^2+1}$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim f(x_n) = \sqrt{(-1)^2+1} = \sqrt{2}$.

d) Vì $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (hay $-3 \neq \sqrt{2}$) nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{khi } x<2 \\ \sqrt{x+2} & \text{khi } x\geq 2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -8$

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -3$

c) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$

d) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

Lời giải

a) Sai: Ta có $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \sqrt{5}$

b) Đúng: Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n < 2$ và $x_n \to 2$ ta có: $f(x_n) = 1 - x_n^2$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim f(x_n) = 1 - 2^2 = -3$.

c) Đúng: Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n > 2$ và $x_n \to 2$ ta có $f(x_n) = \sqrt{x_n + 2}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim f(x_n) = \sqrt{2+2} = 2$.

d) Sai: Vì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (hay $-3 \neq 2$) nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1} + ax + b\right) = 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2024a - 4049b$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1} + ax + b\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{(a+1)x^2 + (a+b+3)x + b+1}{x+1}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{(a+1)x + (a+b+3) + \dfrac{b+1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ a+b+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow T = 2024a - 4049b = 2024.(-1) - 4049(-1) = 2025.$$

Câu 2: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+2023x+2}-n\sqrt{3}\right)=\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, ở đó a,c là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, b là số nguyên tố. Khi đó hãy tính giá trị của $a+b+c$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2023x+2}{\sqrt{3x^2+2023x+2}+x\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2023+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{3+\dfrac{2023}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{3}}=\dfrac{2023\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $a+b+c=2023+3+6=2032$.

Câu 3: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}b$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=-5$

Vì giới hạn là hữu hạn và bằng -5 nên $\begin{cases}a+1=0\\2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=7\end{cases}$

Vậy $P=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}b=\dfrac{1}{2}.(-1)+\dfrac{1}{4}.7=1,25$.

Câu 4: Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to1}\frac{3x+1-4}{(2x^2-3x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(2x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3}{(2x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\frac{3}{4}=0,75$$

Câu 5: Tính giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(3-2x^3\right)^2.(4x-1)}{\left(x^2-1\right)^2.(3+2x)^3}$

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3-2x^3\right)^2.(4x-1)}{\left(x^2-1\right)^2.(3+2x)^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6\left(\dfrac{3}{x^3}-2\right)^2.x\left(4-\dfrac{1}{x}\right)}{x^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^2.x^3\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{x^3}-2\right)^2.\left(4-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^2.\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^3}=2$$

Câu 6: Một cái hồ chứa 600 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút. Nồng độ muối trong hồ khi t dần về dương vô cùng (đơn vị: gam/lít) là bao nhiêu?

Lời giải

Sau t phút bơm nước vào hồ thì lượng nước là $600+15t$ (lít) và lượng muối có được là $30.15t$ gam.

Nồng độ muối của nước là: $C(t)=\dfrac{30.15t}{600+15t}=\dfrac{30t}{40+t}$ (gam/lít).

Khi t dần về dương vô cùng, ta có:

$$\lim_{t\to+\infty}C(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{40+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{t\left(\dfrac{40}{t}+1\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30}{\dfrac{40}{t}+1}=30\text{ (gam/lít)}$$

Câu 7: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-a.x}{b.x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)}$ với $a;b$ là các số tự nhiên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a+b^2$

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}$$

Xét $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+x}$.

Xét $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}=0$, do $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}\right)=+\infty$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow P=2$.

Câu 8: Hàm Heaviside có dạng $H(t)=\begin{cases}0 & \text{khi } t<0\\1 & \text{khi } t\ge 0\end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$. Tính $\lim\limits_{t\to0^-}H(t)+\lim\limits_{t\to0^+}H(t)$.

Lời giải

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n<0$ và $t_n\to0$, ta có $H(t_n)=0$.

Khi đó: $\lim\limits_{t\to0^-}H(x)=\lim H(t_n)=0$.

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n>0$ và $t_n\to0$, ta có $H(t_n)=1$.

Khi đó: $\lim\limits_{t\to0^+}H(t)=\lim H(t_n)=1$.

Câu 9: Biết rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{\sqrt{x+9}+b}+\dfrac{c}{\sqrt{x+16}+d}\right]$ với $a;b;c;d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a;b;c;d$

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}+\frac{\sqrt{x+16}-4}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}+\frac{x+16-16}{x\left(\sqrt{x+16}+4\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}\right]$$

Vậy tổng các số $a;b;c;d$ là 9

Câu 10: Trong hệ trục toạ độ Oxy, lấy điểm A thuộc tia Ox và điểm $B(0;2)$ thuộc tia Oy. Giả sử hoành độ điểm A là $a>0$. Độ dài đường cao OH của tam giác OAB được tính theo công thức $\dfrac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$. Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương trục Ox thì độ dài AH thay đổi về gần giá trị bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $h(a)=OH=\dfrac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$.

Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo tia Ox thì $a\to+\infty$.

Ta có: $\lim\limits_{a\to+\infty}h(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{2a}{\sqrt{4+a^2}}=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{2a}{a\sqrt{\dfrac{4}{a^2}+1}}=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{4}{a^2}+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{1}}=2$.

Vậy khi điểm A dần về vô cực thì độ dài OH dần về 2.

Câu 11: Biết rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{9x-2}+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{a}{b.\sqrt{5x-1}+3}-\dfrac{c}{4+d.\sqrt{9x-2}}\right)$ với $a;b;c;d$ là các số nguyên dương. Tính tổng các số $a;b;c;d$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{9x-2}+1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3+4-\sqrt{9x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}+\frac{4-\sqrt{9x-2}}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{5x-1-9}{(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}+\frac{16-9x+2}{(x-2)\left(4+\sqrt{9x-2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{5(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}+\frac{9(2-x)}{(x-2)\left(4+\sqrt{9x-2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3}-\frac{9}{4+\sqrt{9x-2}}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=1\\c=9\\d=1\end{cases}\Rightarrow S=16$$

Câu 12: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(3+2x^2\right)^5\cdot\left(3x^3-4\right)^2}{\left(5-x^3\right)^2\cdot\left(1-2x^2\right)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\cdot\dfrac{\left(\dfrac{3}{x^2}+a\right)^5\cdot\left(b-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\dfrac{5}{x^3}-c\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}-d\right)^3}$ với $a;b;c;d$ là các số tự nhiên.

Tính tích các số $a;b;c;d$

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3+2x^2\right)^5\cdot\left(3x^3-4\right)^2}{\left(5-x^3\right)^2\cdot\left(1-2x^2\right)^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{10}\left(\dfrac{3}{x^2}+2\right)^5\cdot x^6\left(3-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{x^6\left(\dfrac{5}{x^3}-1\right)^2\cdot x^6\left(\dfrac{1}{x^2}-2\right)^3}=\lim_{x\to-\infty}x^4\cdot\frac{\left(\dfrac{3}{x^2}+2\right)^5\cdot\left(3-\dfrac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\dfrac{5}{x^3}-1\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}-2\right)^3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=1\\d=2\end{cases}\Rightarrow P=12$$

Câu 13: Biến đổi giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(6-2x^4\right)^4\cdot\left(2-x^2\right)}{\left(x^2-3\right)^5\cdot(6-4x)}$ ta thu được kết quả dạng $\lim\limits_{x\to+\infty}x^a\cdot\dfrac{\left(\dfrac{6}{x^4}-2\right)^4\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{6}{x}-4\right)}$

với a là số tự nhiên. Xác định giá trị của a.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(6-2x^4\right)^4\cdot\left(2-x^2\right)}{\left(x^2-3\right)^5\cdot(6-4x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{16}\left(\dfrac{6}{x^4}-2\right)^4\cdot x^2\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}{x^{10}\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^5\cdot x\left(\dfrac{6}{x}-4\right)}=\lim_{x\to+\infty}x^7\cdot\frac{\left(\dfrac{6}{x^4}-2\right)^4\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{6}{x}-4\right)}$$

Khi đó $a=7$.

Câu 14: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4-x^2\right)^6\cdot\left(3x^2+2\right)^2}{\left(5x^2-3\right)^2\cdot\left(1-2x^5\right)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)^b}{\left(5-\dfrac{3}{x^2}\right)^a\cdot\left(\dfrac{1}{x^5}-2\right)^3}$ với $a;b;c;d$ là các số tự nhiên.

Tính $S=a-b$

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-x^2\right)^6\cdot\left(3x^2+2\right)^2}{\left(5x^2-3\right)^2\cdot\left(1-2x^5\right)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{12}\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot x^4\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}{x^4\left(5-\dfrac{3}{x^2}\right)^2\cdot x^{15}\left(\dfrac{1}{x^5}-2\right)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)^6\cdot\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}{\left(5-\dfrac{3}{x^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^5}-2\right)^3}$$

Khi đó $a=b=2\Rightarrow S=0$

Câu 15: Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$, tại $x=1$

Lời giải

$$\lim_{x\to 1^+} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{-x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$. Do đó $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$.

-----------------HẾT-----------------

BÀI 03 HÀM SỐ LIÊN TỤC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số liên tục tại một điểm

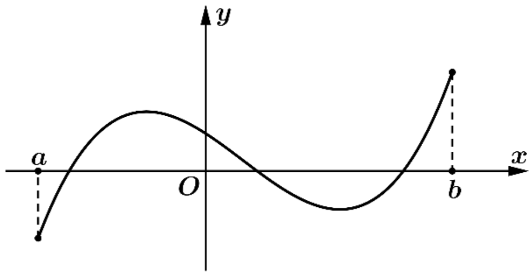
Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

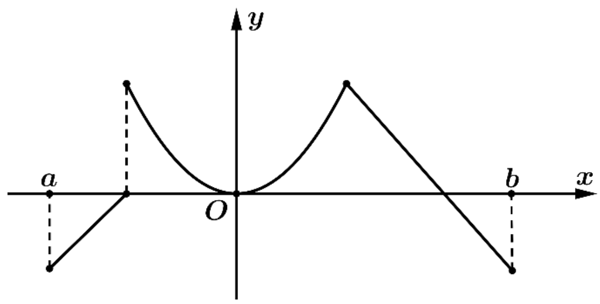
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

2 Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa: Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Chú ý: Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a;b];[a;b);(-\infty;b];[a;+\infty)$ được định nghĩa một cách tương tự. Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một " đường liền" trên khoảng đó.





3 Một số định lý

Định lý 1:

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác thì liên tục trên tập xác định của nó.

Định lý 2: Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x)\cdot g(x)$ cũng liên tục tại x_0.
- Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

Định lý 3: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm $x_0\in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $f\left(x_0\right)$.

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$.

Bước 3: So sánh và rút ra kết luận.

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$ thì hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại điểm x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$ thì hàm số $f\left(x\right)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.

Đối với bài toán có chứa tham số thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tính $f\left(x_0\right)$.

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right);\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$.

Bước 3: So sánh và rút ra kết luận.

Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$

Hàm số $f\left(x\right)$ gián đoạn tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$

Từ đó tìm được tham số thỏa yêu cầu.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-4}$ tại điểm $x_0=3$

b) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ -6 & \text{khi } x=-2\end{cases}$ tại điểm $x_0=-2$.

c) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ 9 & \text{khi } x=3\end{cases}$ tại điểm $x_0=3$

d) $f\left(x\right)=\begin{cases}-x+1 & \text{khi } x<3\\ x^2-4x+3 & \text{khi } x\geq 3\end{cases}$ tại điểm $x_0=3$

e) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

f) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$

g) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x>0\\ x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

h) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$ và $x_0\in(2;+\infty)$.

Ta có: $f(3)=\dfrac{1}{5}$ và $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{9-4}=\dfrac{1}{5}=f(3)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=3$.

b) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$ và có $f(-2)=-6$

$$\lim_{x\to(-2)}f(x)=\lim_{x\to(-2)}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to(-2)}\frac{(x+2)(x-3)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)}(x-3)=-5\ne f(-2).$$

Vậy hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại $x=-2$.

c) Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f(3)=9$; $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}x^2=9=f(3)$.

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0=3$

d) Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$ và có $f(3)=3^2-4.3+3=0$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(-x+1)=-2 \text{ và } \lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^2-4x+3)=0$$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x_0=3$.

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

e) Ta có: $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ và có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=-\dfrac{1}{2}$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.

f) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1}=1=f(2)$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=2$.

g) Ta có $f(0)=0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$.

Ta có: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_o=0$.

h) Ta có $f(1)=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{2}=-\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-3x^2+2x+1 & \text{khi } x\neq 7\\ 5a+1 & \text{khi } x=7\end{cases}$

a) Với $a=0$ hãy xét tính liên tục của hàm số tại $x=7$.

b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x=7$?

Lời giải

a) Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 7} f(x)=\lim\limits_{x\to 7}\left(-3x^2+2x+1\right)=-3.7^2+2.7+1=-125$ và $f(7)=5a+1=1$

Vì $\lim\limits_{x\to 7} f(x)\neq f(7)$ nên hàm số không liên tục tại $x=7$ khi $a=0$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to 7} f(x)=\lim\limits_{x\to 7}\left(-3x^2+2x+1\right)=-3.7^2+2.7+1=-125$ và $f(7)=5a+1$

Hàm số liên tục tại $x=7 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 7} f(x)=f(7)\Leftrightarrow 5a+1=-125\Leftrightarrow a=-\dfrac{126}{5}$

Bài tập 3: Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-m & \text{khi } x\neq 2\\ x+m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x-m\right)=8-m$ và $f(2)=2+m$

Để hàm số liên tục tại $x_0=2\Leftrightarrow 8-m=m+2\Leftrightarrow m=3$

Bài tập 4: Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ m^2+5m & \text{khi } x=-1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-1$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-3)=-4$

Và $f(-1)=m^2+5m$

Để hàm số liên tục tại $x_0=-1 \Leftrightarrow m^2+5m=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$

Bài tập 5: Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x>1 \\ m^2+5m & \text{khi } x\le 1 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x_0=1$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4}{(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}=\dfrac{1}{3}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=2m+3$

Để hàm số gián đoạn tại $x_0=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ne f(1) \Leftrightarrow 2m+3\ne \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m\ne \dfrac{-4}{3}$

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & \text{khi } x>1 \\ x^2+3 & \text{khi } x<1 \\ k^2 & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=k^2$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+3\right)=4$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)^2=4$ suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$.

Vậy để hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ne f(1) \Leftrightarrow k^2\ne 4 \Leftrightarrow k\ne \pm 2$.

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\ne 1 \\ 3m & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ne f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}\ne 3m$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}\ne 3m \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x+2)\ne 3m \Leftrightarrow 3\ne 3m \Leftrightarrow m\ne 1.$

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{khi } x<1 \\ 14a.x & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=14a$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 14ax=14a.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4x^6-(8-4x)}{(x-1)\left(2x^3+\sqrt{8-4x}\right)}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)\left(4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+4x+8\right)}{(x-1)\left(2x^3+\sqrt{8-4x}\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+4x+8}{2x^3+\sqrt{8-4x}}=7.$$

$f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow 14a=7\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

Bài tập 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & \text{khi } x\neq1\\ 3x+a & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{3x+a}$

Nếu $a=-3$ thì $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{3(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2}{3}=1>0$ và $f(1)=0$

Nên hàm số không liên tục tại $x=1$.

Nếu $a\neq-3$ thì $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{3x+a}=0$, nhưng $f(1)=3+a\neq0$

Nên hàm số không liên tục tại $x=1$.

Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 10: Tìm m đề hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{khi } x\geq0\end{cases}$ liên tục tại $x_0=0$.

Lời giải

Ta có: $f(0)=m+\frac{1}{2}$ và $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\lim_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1-(1+x)}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2}=\frac{-1}{3}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(m+\frac{x^3-3x+1}{x+2}\right)=m+\frac{1}{2}.$$

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim_{x\to0^+}=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)\Leftrightarrow m+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$.

Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn, tập xác định

Phương pháp: Hàm số $f(x)$ liên tục trên một đoạn, khoảng hoặc tập xác định nếu nó liên tục tại mọi điểm trên đoạn, khoảng hoặc tập xác định đó.

Lưu ý:

- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a;b] khi hàm số đó liên tục trên khoảng ($a;b$) và thỏa mãn điều kiện: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$
- Hàm số đa thức thường có tính chất liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ, hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số sau:

a) $y=x^2-2x+\sin 2x$ b) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-3}$ c) $y=\sqrt{4-x}$

Lời giải

a) Ta thấy x^2-2x là hàm đa thức và $\sin 2x$ là hàm số lượng giác có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên hàm số $y=x^2-2x+\sin 2x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Điều kiện $2x^2+x-3\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}$ nên tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-3}{2};1\right\}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-3}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên hàm số liên tục trên từng khoảng xác định là: $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right);\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$ và $(1;+\infty)$.

c) Tập xác định $D=(-\infty;4]$ nên hàm số $y=\sqrt{4-x}$ liên tục trên $(-\infty;4]$.

Bài tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của nó.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & \text{khi } x<2 \\ 2-x & \text{khi } x\geq 2 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\neq 1 \\ a & \text{khi } x=1 \end{cases}$

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Trên $(-\infty;2)$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16}$ xác định nên hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$.

Trên $(2;+\infty)$ thì $f(x)=2-x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2;+\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-3}{2(x^2+2x+4)}=\dfrac{-1}{24}$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2-x)=0$

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại $x=2$.

Do đó hàm số bị gián đoạn tại $x=2$.

Vậy hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Hàm số bị gián đoạn tại $x=2$.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}$ xác định nên hàm số liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x-2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)=1$

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại $x=1$.

Vậy hàm số liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Hàm số bị gián đoạn tại $x=1$.

Bài tập 3: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ m & \text{khi } x=-2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Trên $(-\infty;-2);(-2;+\infty)$, hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ xác định nên liên tục trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=-2$ thì $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)\Leftrightarrow m=-4$.

Bài tập 4: Tìm giá trị tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ mx & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục trên $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$. Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(mx\right)=m$ và $f\left(1\right)=m$.

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

Bài tập 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{5x-7}+3}{4-\sqrt{4-3x}} & \text{khi } x<-4\\ \left|mx\right|-\dfrac{41}{81} & \text{khi } x\ge -4\end{cases}$ liên tục trên $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Lời giải

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(-\infty;-4\right)$ và $\left(-4;+\infty\right)$.

Để hàm số liên tục trên $\left(-\infty;+\infty\right)$ thì hàm số phải liên tục tại $x=-4$.

$\lim\limits_{x\to-4^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{\sqrt[3]{5x-7}+3}{4-\sqrt{4-3x}}=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{5\left(x+4\right)\left(4+\sqrt{4-3x}\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{5x-7}\right)^2-3\sqrt[3]{5x-7}+9\right)3\left(x+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{5\left(4+\sqrt{4-3x}\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{5x-7}\right)^2-3\sqrt[3]{5x-7}+9\right)3}=\dfrac{40}{81}$

$\lim\limits_{x\to-4^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-4^+}\left(\left|mx\right|-\dfrac{41}{81}\right)=\left|4m\right|-\dfrac{41}{81}$ và $f\left(-4\right)=\left|4m\right|-\dfrac{41}{81}$.

Hàm số liên tục tại $x=-4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-4^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-4^+} f\left(x\right)=f\left(-4\right)\Leftrightarrow\left|4m\right|-\dfrac{41}{81}=\dfrac{40}{81}\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{4}$

Dạng 3: Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp: Để chứng minh phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D thì ta chứng minh hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên D và có hai số sao cho $f\left(a\right).f\left(b\right)<0$.

Để chứng minh phương trình $f\left(x\right)=0$ có k nghiệm trên D thì ta chứng minh hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng dời nhau $\left(a_i;a_{i+1}\right)\left(i=1,2,...,\mathrm{k}\right)$ nằm trong D: $f\left(a_i\right).f\left(a_{i+1}\right)<0$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Chứng minh rằng phương trình $x^5-3x-7=0$ có ít nhất một nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^5-3x-7$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $\left[0;2\right]$.

Ta có $f\left(0\right)=-7, f\left(2\right)=19$ nên $f\left(0\right).f\left(2\right)<0$. Khi đó phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(0;2\right)$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng phương trình $\cos x=x$ có nghiệm.

Lời giải

Ta có $\cos x=x\Leftrightarrow\cos x-x=0.$

Xét hàm số $f\left(x\right)=cosx-x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $f\left(0\right)=1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ nên $f\left(0\right).f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. Khi đó phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x^3+6x+1}-2=0$ có nghiệm dương .

Lời giải

Ta có $\sqrt{x^3+6x+1}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{x^3+6x+1}=2\Leftrightarrow x^3+6x+1=4\Leftrightarrow x^3+6x-3=0$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3+6x-3$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $\left[0;1\right]$.

Ta có $f\left(0\right)=-3, f\left(1\right)=4$ nên $f\left(0\right).f\left(1\right)<0$. Khi đó phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(0;1\right)$.

Vậy phương trình $\sqrt{x^3+6x+1}-2=0$ có ít nhất một nghiệm dương.

Bài tập 4: Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=(1-m^2)x^5-3x-1$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $[-1;0]$.

Ta có $f(0)=-1, f(-1)=m^2+1$ nên $f(0).f(-1)<0, \forall m\in\mathbb{R}.$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1;0)$.

Vậy phương trình $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có ít nhất một nghiệm .

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m phương trình $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$ luôn có nghiệm .

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $[-2;-1]$.

Ta có $f(-1)=-1, f(-2)=m^2+2$ nên $f(-2).f(-1)<0, \forall m\in\mathbb{R}.$

Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-2;-1)$.

Vậy phương trình $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$ luôn có ít nhất một nghiệm .

Bài tập 6: Chứng minh rằng phương trình $6x^3+2x^2-31x+10=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x)=6x^3+3x^2-31x+10$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$.

$\begin{cases} f(-3)=-32 \\ f(0)=10 \end{cases} \Rightarrow f(-3).f(0)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(-3;0)$.

$\begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=-12 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(1;2)$.

$\begin{cases} f(1)=-12 \\ f(2)=8 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(1;2)$.

Mặt khác vì $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên $f(x)=0$ chỉ có tối đa ba nghiệm.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Bài tập 7: Chứng minh rằng phương trình $a\cos 2x+b\sin x+\cos x=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a,b

Lời giải

Đặt $f(x)=a\cos 2x+b\sin x+\cos x$ có tập xác định là $R \Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

$f(0)=a+1; f(\pi)=a-1; f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-a+b; f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-a-b$.

Vì $f(0)+f(\pi)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ nên trong bốn số phải có hai số mà tích của chúng bé hơn hoặc bằng không.

Vậy phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a,b.

Bài tập 8: Chứng minh rằng phương trình $a\cos 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x=0$ luôn có nghiệm trên $[0;2\pi]$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=a\cos 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x$ liên tục trên R

Nên cũng liên tục trên các đoạn $[0;2\pi]$

$f(0)=a+b+c, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-b+1, f(\pi)=-a+b-c, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-b-1$

Suy ra $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ nên suy ra nếu không có giá trị nào trong bốn giá trị bằng 0 thì ít nhất có một giá trị âm và dương.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 9: Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x-m\sin x\cos x$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x_0\neq k\frac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Bài tập 10: Chứng minh rằng phương trình $x^3-2x^2+x-1-\frac{2}{x}+\frac{m}{x+3}=0$ luôn có nghiệm $\forall m$

Lời giải

$x^3-2x^2+x-1-\frac{2}{x}+\frac{m}{x+3}=0\Leftrightarrow mx+(x-2)(x+3)\left(x^3+x+1\right)=0\ (*)$

Đặt $f(x)=mx+(x-2)(x+3)\left(x^3+x+1\right)$.

Nhận xét f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\begin{cases} f(-3).f(0)=18m \\ f(0).f(2)=-12m \end{cases}$

Trường hợp 1: Nếu $m=0$, phương trình luôn có 1 nghiệm $x=2$

Trường hợp 2: Nếu $m\neq 0\Rightarrow(*)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-3;0)$ hoặc $(0;2)$

Suy ra: $\forall m\in\mathbb{R}$, luôn có ít nhất một nghiệm thuộc D.

Vậy $\forall m\in\mathbb{R}$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại $x=2$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$. Khi đó ta phải gán $f(2)$ bằng bao nhiêu?

A. $f(2)=-4$. **B.** $f(2)=-1$. **C.** $f(2)=1$. **D.** $f(2)=4$.

Lời giải

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Suy ra $f(2)=4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{khi } x>0 \\ x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f(0)=0$. **B.** $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.

C. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$.

Lời giải

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+2\right)=0^2+2=2 \end{cases} \Rightarrow \text{hàm số gián đoạn tại } x_0=0.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\ne 2 \\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số liên tục tại $x=2$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.

C. $f(4)=2$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f(2)=4$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4=f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{khi } x<0 \\ 1 & \text{khi } x=0 \\ x+1 & \text{khi } x>0\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x=0$.

B. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.

C. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 0$.

D. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(2x^2 - 1) = -1 \neq f(0)$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1 = f(0)$.

Do đó hàm số f gián đoạn tại $x = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 2 & \text{khi } x < 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ x + 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số không có giới hạn tại $x = 1$ và không liên tục tại $x = 1$.

B. Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ và liên tục tại $x = 1$.

C. Hàm số không có giới hạn tại $x = 1$ nhưng liên tục tại $x = 1$.

<u>D</u>. Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ nhưng không liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $\begin{cases} f(1) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+2) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2 - x + 2) = 3 \end{cases}$

Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ nhưng không liên tục tại $x = 1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ -3 & \text{khi } x = 2 \\ 1 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

<u>A</u>. Hàm số không có giới hạn tại $x = 2$ và không liên tục tại $x = 2$.

B. Hàm số có giới hạn tại $x = 2$ và liên tục tại $x = 2$.

C. Hàm số không có giới hạn tại $x = 2$ nhưng liên tục tại $x = 2$.

D. Hàm số có giới hạn tại $x = 2$ nhưng không liên tục $x = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $\begin{cases} f(2) = -3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4 - x^2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-}(-x - 2) = -4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(1 - 2x) = -3 \end{cases}$

Suy ra hàm số không có giới hạn tại $x = 2$ và không liên tục tại $x = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

A. $m\neq -2$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $m\neq 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3.$

Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)\Leftrightarrow m\neq 3$.

Câu 8: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} & \text{khi } x>4\\ 3x+m & \text{khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục tại $x=4$ khi m nhận giá trị là

A. -20. **B.** 20. **C.** -44. **D.** 44.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(3x+m)=12+m=f(4)$

$$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\left[(x+4)(\sqrt{x}+2)\right]=32.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=4$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)\Leftrightarrow 12+m=32\Leftrightarrow m=20.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $f(1)$ không tính được. **B.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

C. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **D.** $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Lời giải

Ta có: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ và $f(1)=2$.

Suy ra hàm số đã cho liên tục tại $x=1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & khi\ x>0\\ x+2021 & khi\ x\le 0\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **ĐÚNG**?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=3$

C. Hàm số gián đoạn tại $x=0$ **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=1$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=1$

$\ne \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2021)=2021$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=0$

Câu 11: Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=x+\dfrac{1}{x}$. **B.** $y=\sqrt{2-x}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-7}$. **D.** $y=x+7$.

Lời giải

Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

Câu 12: Hàm số $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{4-x}$ liên tục trên

A. $(3;10)$ **B.** $[-3;4]$ **C.** $[-3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;4]$

Lời giải

Tập xác định của hàm số $[-3;4]$.

Vì với mọi $x_0\in(-3;4)$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{4-x}\right)=f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-3;4)$. Ngoài ra ta có:

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{4-x}\right)=\sqrt{7}=f(-3)$ nên hàm số liên tục phải tại $x=-3$

và $\lim\limits_{x\to(4)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(4)^-}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{4-x}\right)=\sqrt{7}=f(4)$ nên hàm số liên tục trái tại $x=4$.

Do đó hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-3;4]$.

Câu 13: Hàm số $y=\dfrac{5}{x\left(x^2-1\right)}$ liên tục tại điểm nào sau đây?

A. $x=0$. **B.** $x=\sqrt{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Đặt $f(x)=\dfrac{5}{x\left(x^2-1\right)}$.

Hàm số $y=\dfrac{5}{x\left(x^2-1\right)}$ xác định khi $\begin{cases}x\neq 0\\ x-1\neq 0\\ x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 1\\ x\neq -1\end{cases}$.

Ta thấy $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{5}{x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{5}{\sqrt{2}(2-1)}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; $f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{5}{x\left(x^2-1\right)}=f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra hàm số liên tục tại $x=\sqrt{2}$.

Câu 14: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\ \ x\neq 1\\ m+2 & khi\ \ x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\Rightarrow x_0=1\in D$.

Ta có: $f(1)=m+2$ và $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Rightarrow m+2=2\Leftrightarrow m=0$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ ax+1 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$. Xác định số thực a để hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

A. $a=-1$. **B.** $a=1$. **C.** $a=3$. **D.** $a=-3$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
Ta có $f(1)=a+1$

và $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax+1)=a+1$; $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x-3)=-2$.
Hàm số đã cho liên tục tại $x=1\Leftrightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\Leftrightarrow a+1=-2\Leftrightarrow a=-3$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ a+2 & \text{khi } x=4\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số liên tục tại $x_0=4$.

A. $a=3$. **B.** $a=-\dfrac{15}{8}$. **C.** $a=2$. **D.** $a=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}\right).\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+8}\right)}{(x-4).\left(\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x+8}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\left(\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x+8}\right)}=\dfrac{1}{8}$

Hàm số liên tục tại $x_0=4 \Leftrightarrow f(4)=\lim\limits_{x\to 4} f(x) \Leftrightarrow a+2=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow a=-\dfrac{15}{8}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{17}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$. **C.** $m=\dfrac{13}{2}$. **D.** $m=\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2)=2m+1$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$.

Để $f(x)$ liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \Leftrightarrow 2m+1=12 \Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{khi } x>1\\ -x^2+1 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số gián đoạn tại $x=1$. **B.** Hàm số liên tục tại $x=1$.

C. Hàm số gián đoạn trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số liên tục trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-2)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^2+1\right)=0$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x} & \text{khi } x>1\\ ax+2 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x=1$.

A. -3. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Xét $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2+2-\sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x}$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{5x-1}-2}{1-x}+\frac{2-\sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{5x-5}{(1-x)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}+\frac{8-\left(x^2+x+6\right)}{(1-x)\left(4+2\sqrt[3]{x^2+x+6}+\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}\right)^2\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{-5}{\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}+\frac{x+2}{4+2\sqrt[3]{x^2+x+6}+\left(\sqrt[3]{x^2+x+6}\right)^2}\right)=-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=-1$$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax+2)=a+2$ và $f(1)=a+2$

Hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+2=-1\Leftrightarrow a=-3$.

Câu 20: Gọi a là giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-x}-x-2\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } 0<x\le4\\ a+\dfrac{4-x}{x-2}, & \text{khi } x\le0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a\in\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$. **B.** $a\in\left(-1;-\frac{3}{5}\right)$. **C.** $a\in\left(0;\frac{2}{5}\right)$. **D.** $a\in\left(-\frac{2}{5};0\right)$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{4-x}-x-2\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt{4-x}-2\sqrt{1+x}}{x}-1\right)$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{4-x-4-4x}{x\left(\sqrt{4-x}+2\sqrt{1+x}\right)}-1\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-5x}{x\left(\sqrt{4-x}+2\sqrt{1+x}\right)}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-5}{\sqrt{4-x}+2\sqrt{1+x}}-1\right)=-\frac{9}{4}.$$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(a+\dfrac{4-x}{x-2}\right)=a-2$ và $f(0)=a-2$.

Hàm số liên lục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)\Leftrightarrow a-2=-\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{4}$

Vậy $a\in\left(-\frac{2}{5};0\right)$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\ne2\\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=2$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.

C. $f(4)=2$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$ và $f(2)=4$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-3x+2}$. Khi đó hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Hàm số có nghĩa khi $x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Vậy theo định lí ta có hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+3x+2}$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1);(1;2)$ và $(2;+\infty)$

Câu 23: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=|x|$. **B.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hàm số liên tục trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 24: Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x)=\sqrt{x-5}$. **B.** $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$. **C.** $f(x)=\cot x+3$. **D.** $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2-x}$.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$ là hàm phân thức hữu tỉ và có tập xác định là $D=\mathbb{R}$ do đó hàm số

$f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 25: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x+\sin x$. **B.** $y=5x-\tan x$. **C.** $y=2-\cot x$. **D.** $y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Lời giải

Hàm số $y=x+\sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số không liên tục tại các điểm $x=\pm 1$. **B.** Hàm số liên tục tại mọi $x\in\mathbb{R}$.
C. Hàm số liên tục tại điểm $x=-1$. **D.** Hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^2-1}$ có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. Do đó hàm số không liên tục tại các điểm $x=\pm 1$.

Câu 27: Cho hàm số $y=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{khi } x\ge 2\\ 5x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số liên tục tại $x_0=1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

Lời giải

Với $x>2$, ta có $f(x)=-x^2+x+3$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Với $x<2$, ta có $f(x)=5x+2$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$.

Tại $x=2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+x+3)=1$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(5x+2)=12$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\Rightarrow$ hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & \text{khi } x\ne\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & \text{khi } x=\sqrt{3}\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục trên tập nào sau đây?

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(-\infty;\sqrt{3}\right]$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Nếu $x\ne\sqrt{3}$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $\left(-\infty;\sqrt{3}\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. Tại $x=\sqrt{3}$, ta có $f\left(\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$,

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(x-\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(x+\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=\sqrt{3}$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 29: Chon hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{-(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}(-1)=-1$.

Tương tự ta có $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=1$ (có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Vậy $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3^+}f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi m, hàm số đã cho không liên tục tại $x=3$.

Câu 30: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m+2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\Rightarrow x_0=1\in D$.

Ta có: $f(1)=m+2$ và $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Rightarrow m+2=2\Leftrightarrow m=0$.

Câu 31: Số nghiệm của phương trình $x^3-3x-1=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^3-3x-1$

Do $f(x)=x^3-3x-1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $[-2;-1],[-1;0],[0;2]$.

Ta có $\begin{cases}f(-2)=-3\\ f(-1)=1\end{cases}\Rightarrow f(-2)f(-1)<0\longrightarrow(1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;-1)$.

$\begin{cases}f(-1)=1\\ f(0)=-1\end{cases}\Rightarrow f(-1)f(0)<0\longrightarrow(1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

$\begin{cases}f(2)=1\\ f(0)=-1\end{cases}\Rightarrow f(2)f(0)<0\longrightarrow(1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$.

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2;2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x)=0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm.
B. Có ít nhất một nghiệm.
C. Có đúng một nghiệm.
D. Có đúng hai nghiệm.

Lời giải

Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5$.

Khi đó: $\begin{cases} g(-1)=f(-1)-5=2-5=-3 \\ g(4)=f(4)-5=7-5=2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4)<0.$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$ hay phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$.

Câu 33: Đối với tiền điện thông thường theo tháng sẽ được tính theo kiểu bậc thang. Cụ thể như sau:
Mức tiêu thụ điện ở 50 số điện đầu tiên từ $1-50$kw sẽ có giá 865đ/mỗi số điện.
Mức tiêu thụ điện 50 số điện tiếp theo từ $51-100$kw sẽ có giá 1135đ/mỗi số điện
Từ số điện thứ 101 giá tiền là 1495đ/mỗi số điện

Gọi *y* (đồng) là số tiền anh B phải trả sau khi tiêu thụ *x* (kw).

Khi đó hàm số của *y* theo *x* là $y=\begin{cases} 865x & \text{khi} \quad x\le 50 \\ 1135x-13500 & \text{khi} \quad 50<x\le 100 \\ 1495x-49500 & \text{khi} \quad x>100 \end{cases}$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tự trên $(0;+\infty)$.
B. Hàm số gián đoạn tại $x=50$.
C. Hàm số gián đoạn tại $x=100$.
D. Hàm số gián đoạn tại $x=50$ và $x=100$.

Lời giải

Ta xét hàm số: $y=\begin{cases} 865x & \text{khi} \quad x\le 50 \\ 1135x-13500 & \text{khi} \quad 50<x\le 100 \\ 1495x-49500 & \text{khi} \quad x>100 \end{cases}$

Nhận thấy hàm số liên tục trên từng khoảng $(0;50)$; $(50;100)$; $(100;+\infty)$

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=50; x=100$:

Ta có $\lim\limits_{x\to 50^-}(865x)=43250=y(50)$ và $\lim\limits_{x\to 50^+}(1135x-13500)=43250$.

Từ trên ta có $\lim\limits_{x\to 50^-} y=\lim\limits_{x\to 50^+} y=43250=y(50)$ nên hàm số liên tục tại $x=50$.

Xét tương tự, hàm số liên tục tại $x=100$.

Câu 34: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+3 & \text{khi } x<1\\ k^2 & \text{khi } x=1\\ \left(x+1\right)^2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của k để $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$.

A. $k\neq -2$. **B.** $k\neq 2$. **C.** $k\neq \pm 2$. **D.** $k\neq \pm 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ ta có $\begin{cases}f\left(1\right)=k^2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x+1\right)^2=4\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+3\right)=4\end{cases}$.

Hàm số $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)\neq f\left(1\right)\Leftrightarrow k^2\neq 4\Leftrightarrow k\neq \pm 2.$

Câu 35: Tìm $m,\ n$ để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ n & \text{khi } x=1\\ mx+1 & \text{khi } x<1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $n=-1$ và $m=0$. **B.** $n=m=1$. **C.** $n=0$ và $m=1$. **D.** $n=1$ và $m=0$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ ta có $\begin{cases}f\left(1\right)=n\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2\left(x-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1.\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(mx+1\right)=m+1\end{cases}$

Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow m+1=n=1\Leftrightarrow \begin{cases}m=0\\ n=1\end{cases}$.

Câu 36: Hàm số nào sau đây không liên tục tại $x=2$?

A. $y=\sqrt{x+2}$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=\dfrac{x^2}{x-2}$. **D.** $y=x^2-3x+2$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ không xác định tại $x=2$ nên gián đoạn tại $x=2$.

Câu 37: Hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-4}$ không xác định tại $x=2$ nên gián đoạn tại $x=2$.

Câu 38: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ x+2023 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số liên tục tại $x=3$.
C. Hàm số gián đoạn tại $x=0$.
D. Hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=1\ne \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+2023\right)=2023$

Do đó, không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=0$.

Câu 39: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}-x\cos x, x<0\\ \dfrac{x^2}{1+x}, 0\le x<1\\ x^3, x\ge 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại mọi điểm x thuộc $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f\left(x\right)$ bị gián đoạn tại điểm $x=0$.

C. Hàm số $f\left(x\right)$ bị gián đoạn tại điểm $x=1$.

D. Hàm số $f\left(x\right)$ bị gián đoạn tại điểm $x=0$ và $x=1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x\cos x\right)=0=\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1+x}=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2}\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^3=1$. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$

Mặt khác $f\left(0\right)=0$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$, gián đoạn tại $x=1$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\ne 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$. Giá trị của m để hàm số $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=2$ là

A. $m\ne 3$.
B. $m\ne 1$.
C. $m=1$.
D. $m=3$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1; f\left(2\right)=m$

Do đó, để hàm số gián đoạn tại $x=2$ thì $m\neq 1$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ \dfrac{2}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=1$. **B.** Hàm số liên tục tại mọi điểm.
C. Hàm số gián đoạn tại tại $x=1$. **D.** Tất cả đều sai.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{3}; f\left(2\right)=\dfrac{2}{3}$

Do đó, hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Câu 42: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ gián đoạn tại $x=1$

A. $m\neq 0$. **B.** $m\neq 6$. **C.** $m=0$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=3; f\left(1\right)=3+m$

Do đó, để hàm số gián đoạn tại $x=1$ thì $3+m\neq 3\Leftrightarrow m\neq 0$.

Câu 43: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x^2+2x-1}-2}{x^2-1}, & x\neq 1\\ 4-m & x=1\end{cases}$. Hàm số $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$ khi

A. $m=3$. **B.** $m\neq 3$. **C.** $m=7$. **D.** $m\neq 7$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2+2x-1}-2}{x^2-1}=1; f\left(1\right)=4-m$

Do đó để hàm số gián đoạn tại $x=1$ thì $4-m\neq 1\Leftrightarrow m\neq 3$.

Câu 44: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x<-1\\ mx+2 & \text{khi } x\geq -1\end{cases}$ gián đoạn tại $x=-1$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{5}{2}$. **C.** $m\neq\dfrac{3}{2}$. **D.** $m\neq\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}=\dfrac{-1}{2}; \lim\limits_{x\to -1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(mx+2\right)=-m+2$.

Mặt khác $f\left(-1\right)=-m+2$

Do đó để hàm số gián đoạn tại $x=-1$ thì $-m+2\neq\frac{-1}{2}\Leftrightarrow m\neq\frac{5}{2}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2+mx-2 & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính tổng các giá trị tìm được của tham số m để hàm số liên tuc tại $x=1$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -1

Lời giải

Hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m^2+m-2=0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt nên theo định lý Viet tổng các giá trị của tham số m cần tìm bằng -1.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=1$.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và $f(1)=m$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1$.

Hàm số liên tục tại điểm $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=\frac{11}{2}$. **B.** $m=\frac{15}{2}$. **C.** $m=\frac{13}{2}$. **D.** $m=\frac{17}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}x^2+2x+4=12$.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=2$ $\Leftrightarrow 12=mx+1\Leftrightarrow 11=2m\Leftrightarrow m=\frac{11}{2}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{khi } x\neq 2\\ m+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x=2$ bằng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x+2)=6$ và $f(2)=m+1$

Hàm số liên tục tại $x=2$ $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 6=m+1\Leftrightarrow m=5$.

Câu 49: Gọi S là tập các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & \text{khi } x\neq 1 \\ m^2+m-8 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$. Tích các phần tử của tập S bằng

A. -2. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Lời giải

Ta có $f(1)=m^2+m-8$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x)=-2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow m^2+m-8=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-3\end{array}\right.$.

Vậy $S=\{2;-3\}$. Tích các phần tử S là -6.

Câu 50: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \\ 2mx+m^2-4 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1\end{array}\right.$. **D.** $m=-3$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$ và $f(1)=m^2+2m-4$

Hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow m^2+2m-4=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3\end{array}\right.$

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x>2 \\ m^2x-4m+6 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(m^2x-4m+6\right)=2m^2-4m+6;\ f(2)=2m^2-4m+6$

Hàm số liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2) \Leftrightarrow 2m^2-4m+6=4 \Leftrightarrow 2m^2-4m+2=0 \Leftrightarrow m=1$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} & \text{khi } x>8 \\ ax+4 & \text{khi } x\le 8\end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x=8$, giá trị của a là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Tập xác định: $D = R$.

Ta có $f(8) = 8a + 4$.

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8^+}\frac{(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)} = \lim_{x\to 8^+}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right) = 12.$$

và $\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-}(ax+4) = 8a+4$.

Hàm số liên tục tại $x = 8 \Leftrightarrow \lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = f(8) \Leftrightarrow 8a+4 = 12 \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & khi \quad x \neq 0 \\ 3 & khi \quad x = 0 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x^2 - x + 36a < 0$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $f(0) = 3$. Ta có: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{4x}{x(ax+2a+1)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4}{(ax+2a+1)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)} = \frac{2}{2a+1}$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \dfrac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{6}$

Ta có bất phương trình $x^2 - x + 36a < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 4.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 3a-5b-1 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$. Tìm điều kiện của tham số a, b để hàm số trên liên tục tại điểm $x = 0$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a - 8b = 1$. **B.** $2a - 6b = 1$. **C.** $16a - 33b = 6$. **D.** $2a - 4b = 1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-1+1-\sqrt{1-bx}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x} + \frac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{ax+1-1}{x\left(\sqrt[3]{(ax+1)^2}+\sqrt[3]{ax+1}+1^2\right)} + \frac{1-(1-bx)}{x\left(1+\sqrt{1-bx}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{\left(\sqrt[3]{(ax+1)^2}+\sqrt[3]{ax+1}+1^2\right)}+\frac{b}{\left(1+\sqrt{1-bx}\right)}\right)=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{2a+3b}{6}.$$

Ta lại có $f(0)=3a-5b-1$.

Hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a+3b}{6}=3a-5b-1 \Leftrightarrow 2a+3b=18a-30b-6 \Leftrightarrow 16a-33b=6$.

Câu 55: Hàm số nào sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$.

Lời giải

Do các hàm số $y=x^3+1$, $y=x^4-2x^2+1$ là các hàm đa thức có TXĐ $D=\mathbb{R}$ nên đều liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số ở đáp án $y=\sin x$ là hàm số lượng giác có TXĐ $D=\mathbb{R}$ nên cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ có TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-4}{x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x-4}{x-2}=-\infty$ nên hàm số gián đoạn tại $x=2$. Vậy hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 56: Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=x+\dfrac{1}{x}$. **B.** $y=\sqrt{2-x}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-7}$. **D.** $y=x+7$.

Lời giải

Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$. Chọn hàm số $y=x+7$.

Câu 57: Hàm số nào trong các hàm số sau đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=|x|$. **B.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Lời giải

Ta có tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 58: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+5x+6}$. Hàm số đã cho liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-3;3)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;-3\}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+5x+6}$ là hàm phân thức, liên tục trên từng khoảng xác định tập xác định, tức liên tục trên $(-\infty;-3)$; $(-3;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 59: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & \text{khi } x<2\\ 2-x & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số không liên tục trên $(2;+\infty)$.
D. Hàm số gián đoạn tại điểm $x=2$.

Lời giải

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$

Với $x<2\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16}$ xác định nên hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$.

Với $x>2\Rightarrow f(x)=2-x$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $(2;+\infty)$.

Tại $x=2$ ta có : $f(2)=2-2=0$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2-x)=0$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-3)}{2(x^2+2x+4)}=-\frac{1}{24}\ne\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Hàm số không liên tục tại $x=2$.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ (1-m)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ (*)

Ta có: $f(2)=m^2.2^2=4m^2$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(m^2x)=4m^2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}[(1-m)x]=2(1-m)$

Do đó $(*)\Leftrightarrow 4m^2=2(1-m)\Leftrightarrow 2m^2+m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 61: Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;+\infty)$ (với m là tham số).

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. m là một số hữu tỉ. **B.** m là một số vô tỉ.

C. $m>10$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $[0;+\infty)$ và liên tục trên $[0;+\infty)$.

Khi đó để $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;+\infty)$ thì hàm số liên tục tại $x=1$.

Tức là ta cần có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ (*)

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x+1)(\sqrt{x}+1)\right]=4\\ f(1)=m\end{cases}$

Do đó (*) xảy ra khi và chỉ khi $m=4$.

Câu 62: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x<1\\ 2 & \text{khi } x=1\\ mx+1 & \text{khi } x>1\end{cases}$ liên tục trên tập xác định của nó.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Khi $x<1$ ta có: $f(x)=x^2+x$ là đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$.

Khi $x>1$ ta có: $f(x)=mx+1$ là đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$.

Khi $x=1$ ta có: $f(1)=2$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(mx+1)=m+1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2$.

Suy ra $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow m+1=2 \Leftrightarrow m=1$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $D=\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 63: Trong một tủ thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10°C, mỗi phút tăng 2°C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút $3^\circ C$ trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ$C) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

$$T(t)=\begin{cases}10+2t & \text{khi } 0\le t\le 60\\ k-3t & \text{khi } 60<t\le 100\end{cases}\ (k \text{ là hằng số}).$$

Biết rằng $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Giá trị của k là

A. $k=0$. **B.** $k=340$. **C.** $k=310$. **D.** $k=430$.

Lời giải

Tập xác định: $D=[0;100]$

Hàm số $T(t)$ liên tục trên $(0;60)$ và $(60;100)$.

Khi đó để hàm số liên tục trên $[0;100]$ thì hàm số liên tục tại $t=60$.

Tức là ta cần có $\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)=T(0)\\ \lim\limits_{t\to 60^-} T(t)=\lim\limits_{t\to 60^+} T(t)=T(60)\ (*)\\ \lim\limits_{t\to 100^-} T(t)=T(100)\end{cases}$

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)=\lim\limits_{t\to 0^+}(10+2t)=10\\ T(0)=10+2.0=10\end{cases}$

$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 100^-} T(t)=\lim\limits_{t\to 100^-}(k-3t)=k-300\\ T(100)=k-3.100=k-300\end{cases}$

$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 60^-} T(t)=\lim\limits_{t\to 60^-}(10+2t)=130\\ \lim\limits_{t\to 60^+} T(t)=\lim\limits_{t\to 60^+}(k-3t)=k-180\\ T(60)=k-3.60=k-180\end{cases}$

Do đó $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi $k-180=130 \Leftrightarrow k=340$.

Câu 64: Cho hàm số $f(x)=x^3-1000x^2+0,01$. Phương trình $f(x)=0$ nghiệm thuộc khoảng nào trong các khoảng

I. $(-1;0)$. II. $(0;1)$. III. $(1;2)$. IV. $(2;1000)$.

A. Chỉ I,II,III. **B.** Chỉ I và II. **C.** Chỉ I,II,IV. **D.** Cả I,II,III và IV.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-1000x^2+0,01$. liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn $[-1;0];[0;1];[1;2];[2;1000]$.

Ta có $f(-1)=-1000,99; f(0)=0,01$ nên $f(0).f(-1)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;0)$.

Ta có $f(1)=-998,99; f(0)=0,01$ nên $f(0).f(1)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0;1)$.

Ta có $f(1)=-998,99; f(2)=-3991,99$ nên $f(2).f(1)>0$. Khi đó ta chưa kết luận được số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $(1;2)$.

Ta có $f(1000)=0,01; f(2)=-3991,99$ nên $f(2).f(1000)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(2;1000)$.

Mà phương trình bậc ba chỉ có nhiều nhất ba nghiệm nên ở mỗi khoảng I,II,IV phương trình đều có một nghiệm và trên khoảng III không có nghiệm.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2; f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$?

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.
C. Có đúng một nghiệm **D.** Có đúng hai nghiệm.

Lời giải

Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5$ liên tục trên $[-1;4]$.

Ta có $g(-1)=-3; g(4)=2$ nên $g(-1).g(4)<0$. Khi đó phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;4)$. Nên phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;4)$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn $[-2;-1];[-1;0];[0;2]$.

Ta có $f(-2)=-3; f(-1)=1$ nên $f(-2).f(-1)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-2;-1)$.

Ta có $f(-1)=1; f(0)=-1$ nên $f(0).f(-1)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;0)$.

Ta có $f(0)=-1; f(2)=1$ nên $f(0).f(2)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0;2)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng ba nghiệm vì phương trình bậc ba có tối đa ba nghiệm.

Câu 67: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$. Trong các mệnh đề sau,mệnh đề nào đúng?

A. Phương trình có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

B. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

C. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

D. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=2x^4-5x^2+x+1$. liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn $[-2;-1];[-1;0];[0;1]$.

Ta có $f(-2)=15; f(0)=-3$ nên $f(-2).f(-1)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-2;-1)$.

Ta có $f(-1)=-3; f(0)=1$ nên $f(-1).f(0)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;0)$. Vậy đáp án C, D sai.

Ta có $f(0)=1; f(1)=-1$ nên $f(0).f(1)<0.$ Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0;1)$. Vậy đáp án A sai.

Câu 68: Cho phương trình $f(x)=x^4-3x^2+x-\frac{1}{8}=0.$ Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Phương trình có đúng một nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

B. Phương trình có đúng hai nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

C. Phương trình có đúng ba nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

D. Phương trình có đúng bốn nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^4-3x^2+x-\frac{1}{8}=0.$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn $[-1;0];\left[0;\frac{1}{2}\right];\left[\frac{1}{2};1\right];[1;3]$.

Ta có $f(-1)=\frac{23}{8}; f(0)=-\frac{1}{8}$ nên $f(-1).f(0)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;0)$.

Ta có $f(0)=-\frac{1}{8}; f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$ nên $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}; f(1)=-\frac{9}{8}$ nên $f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Ta có $f(1)=-\frac{9}{8}; f(3)=\frac{23}{8}$ nên $f(1).f(3)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(1;3)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất bốn nghiệm trên $(-1;3)$. Mặt khác phương trình bậc bốn có tối đa 4 nghiệm.Vậy phương trình có đúng bốn nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

Câu 69: Cho phương trình $-4x^3+4x-1=0.$ Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

B. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(-3;\frac{1}{2}\right)$.

C. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-\infty;1)$.

D. Hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn $[-2;0];\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Ta có $f(-2)=23; f(0)=-1$ nên $f(-2).f(0)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;0)$. Vậy đáp án A đúng.

Ta có $f(0)=-1; f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ nên $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Vậy đáp án B đúng.

Đáp án D đúng.

Ta có $f(-2)=23; f(0)=-1$ nên $f(-2).f(0)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;0)$. Vậy phương trình không thể vô nghiệm trên $(-\infty;1)$. Vậy đáp án C sai.

Câu 70: Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$?

A. Phương trình $2x^2-3x+4=0$.

B. Phương trình $3x^4-4x^2+5=0$.

C. Phương trình $(x-1)^5-x^7-2=0$.

D. Phương trình $3x^{2023}-8x+4=0$.

Lời giải

Ta có phương trình $2x^2-3x+4=0$ vô nghiệm nên đáp án A sai.

Ta có phương trình $3x^4-4x^2+5=0$ vô nghiệm nên đáp án B sai.

Xét hàm số $f(x)=(x-1)^5-x^7-2$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có $f(0)=-3; f(1)=-3$ nên $f(1).f(0)>0$.Khi đó ta chưa kết luận được số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trong khoảng $(0;1)$. Vậy đáp án C sai.

Xét hàm số $f(x)=3x^{2023}-8x+4$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có $f(0)=4; f(1)=-1$ nên $f(1).f(0)<0$.Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

Câu 71: Phương trình $3x^5+5x^3+10=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-10;-2)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3x^5+5x^3+10$

Hàm số liên tục trên đoạn $[-2;-1]$

Ta có $f(-2)=-126; f(-1)=2$ nên $f(-2).f(-1)<0$.Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-2;-1)$.

Trên các khoảng $(-1;0);(0;1)$ thì $f(x)=3x^5+5x^3+10$ luôn nhận giá trị dương nên phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

Trên khoảng $(-10;-2)$ thì $f(x)=3x^5+5x^3+10$ luôn nhận giá trị âm nên phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 72: Phương trình $2x^4-4x^3-3=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=2x^4-4x^3-3$

Hàm số liên tục trên đoạn $[-3;0]$

Ta có $f(-3)=267; f(0)=-3$ nên $f(-3).f(0)<0$.Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-3;0)$.

Trên các khoảng $(0;1);(1;2);\left(\frac{3}{2};2\right)$ thì $f(x)=2x^4-4x^3-3$ luôn nhận giá trị âm nên phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm

Câu 73: Phương trình $3x^3+4x^2-5=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3x^3+4x^2-5$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có $f(1)=2; f(0)=-5$ nên $f(1).f(0)<0$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

Trên các khoảng $(-2;-1);(-1;0)$ thì $f(x)=3x^3+4x^2-5$ luôn nhận giá trị âm nên phương trình

$f(x)=0$ vô nghiệm.

Trên khoảng $(1;2)$ thì $f(x)=3x^3+4x^2-5$ luôn nhận giá trị dương nên phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 74: Số nghiệm của phương trình $x^3+2x=4+3\sqrt{3-2x}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Điều kiện: $x\le\dfrac{3}{2}$. Phương trình $\Leftrightarrow x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4=0$

Ta có hàm số $f(x)=x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$

Ta có: $f(0)<0, f\left(\dfrac{3}{2}\right)>0\Rightarrow f(0).f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

Giả sử phương trình có 2 nghiệm a, b và $f(a)-f(b)=0$

$$\Leftrightarrow(a-b)\left(a^2+ab+b^2+2+\frac{6}{\sqrt{3-2a}+\sqrt{3-2b}}\right)=0$$

Do $a^2+ab+b^2+2+\dfrac{6}{\sqrt{3-2a}+\sqrt{3-2b}}$

$$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+2+\frac{6}{\sqrt{3-2a}+\sqrt{3-2b}}>0 \text{ với } \forall a,b<\frac{3}{2}\Rightarrow a=b$$

Vậy phương trình có đúng một nghiệm nên hàm số liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 75: Bảng giá cước của một hãng taxi được cho như sau:

Giá mở cửa	Giá km tiếp theo
11 000 đồng trên $0,7$ km	a đồng trên 1km ($a>11000$ đ)

Giá mở cửa: Khi lên taxi mà quãng đường di chuyển không quá 0,7 km thì hãng taxi vẫn tính 11000 đồng. Gọi y (đồng) là số tiền phải trả sau khi đi x (km). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để hàm số của y theo x liên tục tại $x=0,7$?

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Nếu quảng đường đi không quá 0,7 km ($x\le0,7$) thì số tiền phải trả là: $y=11000$ (đồng)

Nếu quãng đường khách đi trên 0,7 km ($x>0,7$) thì số tiền phải trả là: $y=11000+(x-0,7).a$ (đồng)

Do đó ta có hàm số của y theo x là: $y=\begin{cases}11000 & \text{khi } x\le0,7\\ 11000+(x-0,7).a & \text{khi } x>0,7\end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0,7^-} 11000 = 11000 = y(0,7)$ và $\lim\limits_{x\to 0,7^+} \left(11000+(x-0,7).a\right) = 11000$.

Từ trên ta có $\lim\limits_{x\to 0,7^-} y = \lim\limits_{x\to 0,7^+} y = 11000 = y(0,7), \forall a$

Vậy có vô số số a thỏa mãn.

Câu 76: Giá cước gọi quốc tế của tập đoàn viễn thông X trong dịp khuyến mãi mừng thành lập tập đoàn cho bởi bảng sau

Thời gian	**Giá cước (VND/phút)**
5 phút đầu	6000
Từ phút thứ 6 đến phút thứ 10	5800
Từ phút thứ 11 đến phút thứ 20	5200
Từ phút thứ 21 đến phút thứ 30	5000
30 phút trở lên	a $(1000 \le a \le 4500)$

Gọi y (đồng) là số tiền bác An phải trả sau khi gọi x (phút). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a là bội của 1000 để hàm số của y theo x liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Gọi y (đồng) là số tiền bác An phải trả sau khi gọi x (phút). ($x \ge 0; y \ge 0$)

Nếu $x \le 5$ thì $y = 6000x$ (đồng)

Nếu $5 < x \le 10$ thì $y = 6000.5 + (x-5).5800 = 5800x + 1000$ (đồng)

Nếu $10 < x \le 20$ thì $y = 6000.5 + 5.5800 + (x-10).5200 = 5200x + 7000$ (đồng)

Nếu $20 < x \le 30$ thì $y = 6000.5 + 5.5800 + 10.5200 + (x-20).5000 = 5000x + 11000$ (đồng)

Nếu $x > 30$ thì $y = 6000.5 + 5.5800 + 10.5200 + 10.5000 + (x-30).a = (x-30).a + 161000$ (đồng)

Vậy ta có hàm số $y = \begin{cases} 6000x & \text{khi } 0 \le x \le 5 \\ 5800x + 1000 & \text{khi } 5 < x \le 10 \\ 5200x + 7000 & \text{khi } 10 < x \le 20 \\ 5000x + 11000 & \text{khi } 20 < x \le 30 \\ (x-30).a + 161000 & \text{khi } x > 30 \end{cases}$

Nhận thấy hàm số liên tục trên từng khoảng $(0;5)$; $(5;10)$; $(10;20)$; $(20;30)$; $(30;+\infty)$ và liên tục tại các điểm $x = 5; x = 10; x = 20$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 30$:

Ta có $\lim\limits_{x\to 30^-} (5000x + 11000) = 161000 = y(30)$; $\lim\limits_{x\to 30^+} \left((x-30).a + 161000\right) = 161000$.

Từ trên ta có $\lim\limits_{x\to 30^-} y = \lim\limits_{x\to 30^+} y = 161000 = y(30), \forall a$

Vì $a \vdots 1000; a \in [1000;4500] \Rightarrow a \in \{1000;2000;3000;4000\}$

Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2025}{x-45} & \text{khi } x\neq 45\\ 2m+4 & \text{khi } x=45\end{cases}$ (m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số $\mathbb{R}\setminus\left\{45\right\}$.

b) $\lim\limits_{x\to 45} f\left(x\right)=90$.

c) Hàm số liên tục tại $x=20$ với mọi m.

d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=44$.

Lời giải

a) Sai: Hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Vậy a) Sai

b) Đúng: Ta có $\lim\limits_{x\to 45}\dfrac{x^2-2025}{x-45}=\lim\limits_{x\to 45}\left(x+45\right)=90$. Vậy a) Đúng.

c) Đúng: Ta có $f\left(20\right)=65$

$\lim\limits_{x\to 20}\dfrac{x^2-2025}{x-45}=\lim\limits_{x\to 20}\left(x+45\right)=65=f\left(20\right)$, nên $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=20$. Vậy c) Đúng.

d) Sai: Với $x\neq 45$ thì $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2025}{x-45}$ hàm số xác định trên khoảng $\left(-\infty;45\right)\cup\left(45;+\infty\right)$

Suy ra hàm số liên tục trên từng khoảng $\left(-\infty;45\right)$ và $\left(45;+\infty\right)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=45\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 45} f\left(x\right)=f\left(45\right)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 45}\dfrac{x^2-2025}{x-45}=2m+4\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 45}\dfrac{\left(x-45\right)\left(x+45\right)}{x-45}=2m+4\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 45}\left(x+45\right)=2m+4$

$\Leftrightarrow 90=2m+45\Leftrightarrow m=43$. Suy ra $m=43$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1\\ mx+3 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ (với m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=2$.

c) Hàm số luôn liên tục trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=-1$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Sai: Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(\sqrt{x}+1)(x+1)\right]=4$

c) Đúng: Với $x>1$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$, hàm số xác định trên $(1;+\infty)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Sai: Với $x>1$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$, hàm số xác định trên $(1;+\infty)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

Với $x<1$ thì $f(x)=mx+3$, hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;1)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=1$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(mx+3)=m+3$, $f(1)=m+3$

Suy ra $m+3=4\Leftrightarrow m=1$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=1$.

Câu 3: Cho hàm số $g(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) $g(-1)=-2$.

c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x=-1$.

d) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x=1$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có hàm số $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$ xác định trên $[-1;1]$ và hàm số $y=x-1$ xác định trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ nên hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Sai: $g(-1)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

c) Sai: Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-2$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Vì $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)\ne\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.

Do đó hàm số $g(x)$ không liên tục tại $x=-1$.

d) Đúng : Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$ đồng thời $g(1)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$. Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại $x=1$.

Câu 4: Cho các hàm số $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+15}$ và $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x<1 \\ g(x) & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Hàm số $g(x)$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) $h(1)=4$.

d) Hàm số $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$ xác định trên khoảng $(-\infty;1)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Đúng: Hàm số $g(x)=\sqrt{x+15}$ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) Đúng: $h(1)=g(1)=\sqrt{1+15}=4$.

d) Sai: Tập xác định của hàm số $h(x)$ là $\mathbb{R}$.

Trên khoảng $(-\infty;1)$ ta có $h(x)=f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$ nên hàm số $h(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

Trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có $h(x)=g(x)=\sqrt{x+15}$ nên hàm số $h(x)$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

Tại $x=1$: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x+15}=4$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)\ne\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

Do đó hàm số $h(x)$ không liên tục tại $x=1$ nên hàm số $h(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

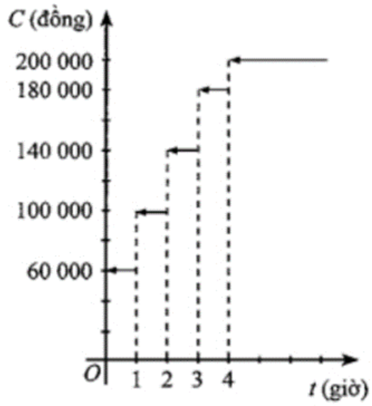
Câu 5: Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số $C = C(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

c) Từ đồ thị ta thấy $\lim\limits_{t\to 3} C(t) = 180000$.

d) Một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người là 20000 đồng.



Lời giải

a) Đúng: Đồ thị hàm số $C = C(t)$ (hình vẽ) biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Sai: Từ đồ thị ta thấy hàm số $C(t)$ bị gián đoạn tại $t = 1$ (giờ); $t = 2$ (giờ); $t = 3$ (giờ) $t = 4$ (giờ) nên hàm số không liên tục trên $[0;+\infty)$.

c) Sai: Ta có: $\lim\limits_{t\to 3^+} C(t) = 180000, \lim\limits_{t\to 3^-} C(t) = 140000$

Vì $\lim\limits_{t\to 3^+} C(t) \neq \lim\limits_{t\to 3^-} C(t)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{t\to 3} C(t)$

d) Sai: Một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người luôn là $180000 - 140000 = 40000$ (đồng).

Câu 6: Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa $(0,5km)$	Giá cước các km tiếp theo đến $30km$	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11000 đồng

a) Công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển

$$f(x) = \begin{cases} 5000 + 13500(x - 0,5);\ 0,5 < x \le 30 \\ 403250 + 11000(x - 30);\ x > 30 \end{cases}.$$

b) Công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển

$$f(x)=\begin{cases}10000x;\ x\le 0,5\\ 5000+13500(x-0,5);\ 0,5<x\le 30\\ 403250+11000(x-30);\ x>30\end{cases}.$$

c) Hàm số $f(x)=\begin{cases}10000x;\ x\le 0,5\\ 5000+13500(x-0,5);\ 0,5<x\le 30\\ 403250+11000(x-30);\ x>30\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

d) Khách hàng đi quãng đường 40 km thì số tiền vị khách đó phải trả là 515000 đồng.

Lời giải

a) Sai: Đoạn mở cửa (0,5 km):

Giá mở cửa là 10.000 đồng cho 0,5 km đầu tiên. Khi $0<x\le 0,5$, tiền cước là: $f(x)=10000$

Đoạn từ 0,5 km đến 30 km:

Sau 0,5 km, giá cước là 13.500 đồng cho mỗi km. Ta có:

Khi $0,5<x\le 30$, tiền cước là: $f(x)=10000+13500(x-0,5)$

Vì 10.000 đồng là giá mở cửa, và ta trừ 0,5 km đầu tiên đã tính trong giá mở cửa.

Đoạn từ km thứ 31 trở đi:

Giá cước giảm còn 11.000 đồng mỗi km. Ta tiếp tục từ mức giá của 30 km đầu:

Khi $x>30$, tiền cước là: $f(x)=10000+13500(30-0,5)+11000(x-30)$

b) Đúng: Đoạn mở cửa (0,5 km):

Giá mở cửa là 10.000 đồng cho 0,5 km đầu tiên.

Khi $0<x\le 0,5$, tiền cước là: $f(x)=10000$

Đoạn từ 0,5 km đến 30 km:

Sau 0,5 km, giá cước là 13.500 đồng cho mỗi km. Ta có:

Khi $0,5<x\le 30$, tiền cước là: $f(x)=10000+13500(x-0,5)$

Vì 10.000 đồng là giá mở cửa, và ta trừ 0,5 km đầu tiên đã tính trong giá mở cửa.

Đoạn từ km thứ 31 trở đi:

Giá cước giảm còn 11.000 đồng mỗi km. Ta tiếp tục từ mức giá của 30 km đầu:

Khi $x>30$ tiền cước là: $f(x)=10000+13500(30-0,5)+11000(x-30)$

Khi đó: $f(x)=\begin{cases}10000x;\ x\le 0,5\\ 5000+13500(x-0,5);\ 0,5<x\le 30\\ 403250+11000(x-30);\ x>30\end{cases}$

c) Đúng: Xét tính liên tục của hàm số

Ta cần kiểm tra tính liên tục tại các điểm chuyển tiếp $x=0,5$ và $x=30$.

Tại $x=0,5$: $\lim\limits_{x\to 0,5^-} f(x)=f(0,5)=5000$ và $\lim\limits_{x\to 0,5^+} f(x)=5000+13500(0,5-0,5)=5000$.

Hàm số liên tục tại $x=0,5$.

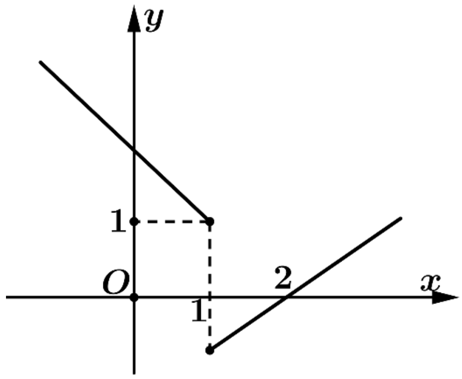
Tại $x=30$: $\lim\limits_{x\to 0,5^-} f(x)=f(30)=5000+13500(30-0,5)=403205$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 0,5^+} f(x)=5000+13500(30-0,5)=403205.$

Hàm số liên tục tại $x=30$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

d) Sai: Khách hàng đi quãng đường 40 km thì số tiền vị khách đó phải trả là:
$f(40)=403250+11000(40-30)=513250$ đồng

Câu 7: Cho hàm số có đồ thị như hình dưới:



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=0$.
b) Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x=2$.
c) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=1$.
d) Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x=1$.

Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số đã cho suy ra hàm số liên tục tại điểm $x=0$, không liên tục tại điểm $x=1$ và liên tục tại điểm $x=2$
a) Đúng: Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=0$.
b) Sai: Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=2$.
c) Sai: Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x=1$.
d) Đúng: Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x=1$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{khi } x\le -1 \\ x+2 & \text{khi } -1<x<1 \\ 2x+3 & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=-2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại điểm $x=0$.

c) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=-1$.

d) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=1$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;-1)$ nên hàm số liên tục tại điểm $x=-2$

b) Sai: Ta lại có hàm số liên tục trên khoảng $(-1;1)$ nên hàm số liên tục tại điểm $x=0$

c) Đúng: Mặt khác, ta có $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+x+1)=f(-1)=1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+2)=1$ suy ra hàm số liên tục tại $x=-1$.

d) Sai: Lại có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+3)=5$ suy ra hàm số không liên tục tại $x=1$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi } x\neq 1\\ 8+a^2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(1)=8+a^2$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4a+3$.

c) Hàm số đã cho liên tục tại $x=1$ khi $a=0$.

d) Có tất cả 2 giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục tại $x=1$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $f(1)=8+a^2$.

b) Sai: Tập xác định: $D=[-3;+\infty)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=4(a+2)=4a+8.$$

c) Đúng: Hàm số đã cho liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 4(a+2)=8+a^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=4\end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x=1$ khi $a=0$.

d) Đúng: giải thích ở câu trên ta có 2 giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại $x=1$.

Câu 10: Cho phương trình $2x^3-8x-1=0\quad(1)$. Đặt hàm số $y=f(x)=2x^3-8x-1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=f(x)=2x^3-8x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-5;-1)$.

c) Phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt.

d) Phương trình $f(\sin x)+1=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y=f(x)=2x^3-8x-1$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Sai: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số liên tục trên $[-5;-1]$.

Lại có $f(-5)=-211<0$ và $f(-1)=5>0$, khi đó $f(-5).f(-1)<0$.

Vậy phương trình (1) đã cho có nghiệm trong khoảng $(-5;-1)$.

c) Đúng: Hàm số $f(x)=2x^3-8x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-5)=-211,\ f(-1)=5>0,\ f(2)=-1<0,\ f(3)=29>0$ nên phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm trên $(-5;-1),(-1;2),(2;3)$.

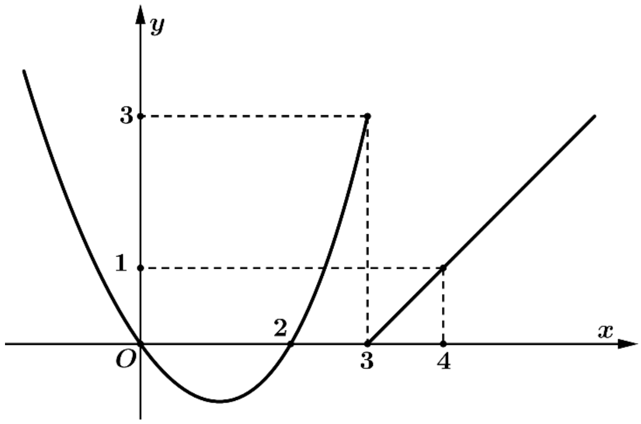
Mà phương trình bậc ba có tối đa 3 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$

d) Sai: $f(\sin x)+1=0\Leftrightarrow 2\sin^3 x-8\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sin^2 x-4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\in[-1;1]\\ \sin x=2\notin[-1;1]\\ \sin x=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ mà $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$, suy ra $x \in \{0; \pi; 2\pi\}$.

Vậy phương trình $f(\sin x) + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2$.

b) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $\mathbb{R}$.

c) Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 3$.

d) Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$. Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 3$. Như vậy:

a) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2$.

b) Sai: Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 3$ nên không liên tục trên khoảng $\mathbb{R}$.

c) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 3$.

d) Sai: Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ không xác định tại $x = 0$ và $x = 2$ suy ra hàm số gián đoạn tại $x = 0, x = 2$. Suy ra hàm số không liên tục trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai cho mỗi khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

c) Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 2$.

d) Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

c) Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$. $f(2)=2.2-1=3$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=3$. Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

d) Với $x\neq 2$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Suy ra hàm số liên tục trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Mặt khác hàm số liên tục tại $x=2$. Suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Nếu $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ thì hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

c) Hàm số liên tục tại $x_0=1$ với $a=-1$.

d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với $a=1$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Nếu $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ thì hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

c) Sai: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x^2+2)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+2)=3.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a)=2+a$ và $f(1)=2+a$.

Hàm số liên tục tại $x_0=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 2+a=3\Leftrightarrow a=1$.

d) Đúng: Khi $x<1$ thì $f(x)=2x+a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

Khi $x>1$ thì $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

Khi $a=1$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với $a=1$.

Câu 14: Cho phương trình $x^2=\sqrt{x+1}$ (1) và phương trình $x^3-3x+1=0$ (2). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình (1) là $x\ge -1$.

b) Phương trình (1) và (2) có nghiệm trong $(1;2)$.

c) Phương trình (1) và (2) có nghiệm trong $(-1;0)$.

d) Phương trình (1) có nhiều nhất 1 nghiệm.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện xác định của phương trình (1) là $x\ge -1$.

b) Đúng : Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2-\sqrt{x+1}=0$. Đặt $f(x)=x^2-\sqrt{x+1}$.

Ta có : $\begin{cases} f(1)=1-\sqrt{2}<0 \\ f(2)=4-\sqrt{3}>0 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0$.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(-1;+\infty)$ do đó liên tục trên $[1;2]$

Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm trong $(1;2)$.

Đặt $g(x)=x^3-3x+1$. Ta có $\begin{cases} g(1)=-1 \\ g(2)=3 \end{cases} \Rightarrow g(1).g(2)<0$.

Hàm số $y=g(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ do đó liên tục trên $[1;2]$

Phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm trong $(1;2)$.

c) Sai : Xét trên khoảng $(-1;0)$

Ta có $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-1).f(0)<0$ nên hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$

Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1;0)$.

Một cách tương tự ta chứng minh được phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên các khoảng $(-2;-1),(0;1),(1;2)$.

Mặt khác, phương trình (2) là phương trình bậc ba nên có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt và $(-2;-1),(0;1),(1;2)$ là các khoảng rời nhau do đó phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt thuộc 3 khoảng này.

Phương trình (2) không có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

d) Sai : Từ câu b) và c) suy ra: Phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x\neq -2 \\ -6 & \text{khi } x=-2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(-2)=-6$.

b) $f(-2)=6$.

c) $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)=-5$.

d) Hàm số liên tục tại $x=-2$.

Lời giải

a) Đúng: Khi $x=-2$ ta có $f(-2)=-6$.

b) Sai: $f(-2)=-6$

c) Đúng: $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)}\dfrac{(x+2)(x-3)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)}(x-3)=-5$.

d) Sai: $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)=-5\neq f(-2)$ nên hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại $x=-2$.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}ax+3 & \text{khi } x\ge 1\\ x^2+x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f\left(1\right)=4$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=a+3$.

d) Hàm số liên tục tại $x=1$ khi $a=-2$.

Lời giải

a) Sai: $f\left(1\right)=a.1+3=a+3$

b) Đúng: $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x-1\right)=1$

c) Đúng: $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax+3\right)=a+3$

d) Đúng: Hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow a+3=1\Leftrightarrow a=-2$

Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ (a,b,c là các số thực). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $a=-3; b=0; c=2$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $\left(-2;0\right)$

b) Với $a=-3; b=0; c=2$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-2;3\right)$

c) Với các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\ 8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là 2.

d) Với các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases}a+c>b+1\\ a+b+c+1<0\end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là 3.

Lời giải

a) Đúng: Ta có hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Suy ra hàm số liên trên tục $\left[-2;0\right]$

Ta có: $\begin{cases}f\left(-2\right)=-18\\ f\left(0\right)=2\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(-2;0\right)$.

b) Đúng: Ta có hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số liên tục trên $[-2;3]$.

Ta có: $\begin{cases} f(-2)=-18 \\ f(0)=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;0)$.

$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(2)=-2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$.

Do đó phương trình có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$.

c) Sai: Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Khi đó $\begin{cases} f(2)=8+4a+2b+c<0 \\ f(-2)=-8+4a-2b+c>0 \end{cases}$

$f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$

$\begin{cases} f(2)<0 \\ f(-2)>0 \end{cases} \Rightarrow f(-2).f(2)<0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-2;2)$

$\begin{cases} f(2)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(2;+\infty)$

$\begin{cases} f(-2)>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-\infty;-2)$

Mà hàm số $f(x)$ là hàm bậc ba nên đồ thị của nó cắt trục Ox tối đa tại 3 điểm

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại đúng 3 điểm.

d) Đúng: Vì hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba nên đồ thị hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và số giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox nhiều nhất là 3.

Theo đề bài ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ $y(-1)=a+c-b-1>0$, $y(1)=a+b+c+1<0$

Do đó hàm số đã cho có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.

Từ đó suy ra số giao điểm cần tìm là 3.

Câu 18: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.

c) Giới hạn: $\lim\limits_{x\to5^+} f(t)=20$

d) Số dân của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Lời giải

a) Đúng: Vào đầu năm 1980 thì ta có $t=10$; $f(10)=18$.

Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Sai: Vào đầu năm 1995 ta có $t=25; f(25)=22$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 22 nghìn người

c) Sai: Giới hạn: $\lim\limits_{x\to 5^+} f(t)=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{26t+10}{t+5}=\dfrac{26.5+10}{5+5}=14$

d) Đúng: Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{x\to 5+\infty}\dfrac{26t+10}{t+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{26+\dfrac{10}{t}}{1+\dfrac{5}{t}}=26$.

Vậy số dân của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Câu 19: Cho các hàm số $f_1(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$; $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2}, & x\neq -2\\ x-1, & x=-2\end{cases}$; $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}\text{ khi } x>4\\ 2x-m \text{ khi } x\le 4\end{cases}$;

$f_4(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{khi } x<1\\ k^2 & \text{khi } x=1\\ (x-2)^2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $f_1(x)$ liên tục tại $x_0=2$.

b) Hàm số $f_2(x)$ liên tục tại $x_0=-2$.

c) Hàm số $f_3(x)$ liên tục tại $x=4$ khi $m=-24$.

d) Với $k\neq\pm 1$ thì $f_4(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ do đó $x_0=2\notin D$ nên hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

b) Sai: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ do đó $x_0=-2\in D$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}(x-2)=-4$, $f(-2)=-3$

Do đó $\lim\limits_{x\to-2} f(x)\neq f(-2)$ nên hàm số gián đoạn tại $x_0=-2$.

c) Đúng: TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(2x-m)=8-m=f(4)$;

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(x+4)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\left[(x+4)(\sqrt{x}+2)\right]=32.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=4$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)\Leftrightarrow 8-m=32\Leftrightarrow m=-24.$

d) Đúng: TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $\begin{cases}f(1)=k^2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)^2=1.\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x^2)=1\end{cases}$

Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ne f(1)\Leftrightarrow k^2\ne 1\Leftrightarrow k\ne \pm 1.$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\ne 2\\ \dfrac{2a+1}{6} & \text{khi } x=2\end{cases}$ và $g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $g(2)=1$.

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

c)Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

d) Khi $a<1$ thì hàm số $y=f(x)+g(x)$ liên tục tại $x_0=2$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $g(2)=\sin\dfrac{2\pi}{4}=1$

b) Đúng: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\dfrac{1}{2}.$

c) Đúng: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $g(1)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

d) Sai: $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\sin\dfrac{2\pi}{4}=1$ nên $g(2)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=2$ và ta có $f(2)=\dfrac{2a+1}{6}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \dfrac{2a+1}{6}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=1$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)=(m-1)x^3+2x+1$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Với $m=\dfrac{1}{2}$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(-1;3)$.

c) Với mọi $m\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;1)$

d) Với $m<1$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm dương.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi m thì $y=f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Khi $m=\frac{1}{2}$ ta có $y=f\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^3+2x+1$ đây là hàm liên tục trên $\left[-1;0\right]$ và $\left[0;3\right]$.

Ta có $\begin{cases} f\left(-1\right)=-\frac{1}{2} \\ f\left(0\right)=1 \end{cases} \Rightarrow f\left(-1\right).f\left(0\right)<0$ nên $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(-1;0\right)$.

Ta có $\begin{cases} f\left(0\right)=1 \\ f\left(3\right)=-\frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow f\left(0\right).f\left(3\right)<0$ nên $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(0;3\right)$.

Từ đó suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên $\left(-1;3\right)$.

c) Đúng: $y=f\left(x\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $\begin{cases} f\left(-1\right)=-m \\ f\left(1\right)=m+2 \end{cases} \Rightarrow f\left(-1\right).f\left(1\right)=-m\left(m+2\right)<0,\quad \forall m\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(0;+\infty\right)$.

Suy ra $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(-1;1\right)$ với mọi $m\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(0;+\infty\right)$.

d) Đúng: $y=f\left(x\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=1>0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(m-1\right)x^3+2x+1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(m-1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]=-\infty$ do $m<1$.

Khi đó, tồn tại số $a>0$ sao cho $f\left(a\right)<0$.

Suy ra $f\left(0\right).f\left(a\right)<0$ nên phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(0;a\right)$.

Suy ra $m<1$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm dương.

Câu 22: Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $T\left(x\right)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$T\left(x\right)=\begin{cases} 50000,\ 0<x\le 2 \\ 120000,\ 2<x<4 \\ 35000x,\ x\ge 4 \end{cases}$$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $T\left(2\right)=50000$.

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} T\left(x\right)=120000$.

c) Hàm số $T\left(x\right)$ liên tục tại $x=4$.

d) Hàm số $T\left(x\right)$ liên tục trên $\left[4;+\infty\right)$.

Lời giải

a) Đúng: $T\left(2\right)=50000$

b) Sai: $\lim\limits_{x\to 4^+} T\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(35000x\right)=35000.4=140000$

c) Đúng: Vì $\lim\limits_{x\to 4^-} T(x)=120000\neq \lim\limits_{x\to 4^+} T(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 4} T(x)$ suy ra hàm số $T(x)$ không liên tục tại $x=4$.

d) Đúng: Khi $x>4$, $T(x)=35000x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(4;+\infty)$.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to 4^+} T(x)=T(4)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục trên $[4;+\infty)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m^2x & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=m^2$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$.

Câu 2: Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x>1\\ ax-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=a-\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax-\dfrac{1}{2}\right)=a-\dfrac{1}{2}$;

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)\Leftrightarrow a-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=1$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6} & \text{khi } x\neq 2\\ \dfrac{4mx-1}{3} & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số trên liên tục tại $x_0=2$

Lời giải

Ta có: $f(x_0)=f(2)=\dfrac{8m-1}{3}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6}=1$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow \dfrac{8m-1}{3} = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Câu 4: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2) = 3$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 3 = 3 + m \Leftrightarrow m = 0$

Câu 5: Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định của chúng.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 2$.

Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ (1)

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 2 + 1 = 3$; $f(2) = m$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 3 = m \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 6: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết thì ta có $3 + m = f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Suy ra $3 + m = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2) = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ m & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 - 3x - 4) = -6$; $\lim\limits_{x\to 1^-}(m) = m$; $f(1) = -6$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = -6$

Câu 8: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x>2 \\ a^2x-\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$.

Lời giải

Ta có: $f(2)=2a^2-\dfrac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right).\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right]}{(x-2).\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{(x-2).\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right]}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right]}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(a^2x-\frac{1}{4}\right)=2a^2-\frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2) \Leftrightarrow 2a^2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a=\pm\dfrac{1}{2}$.

Câu 9: Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$. Phương trình có đúng m nghiệm trên khoảng $(-1;1)$. Tìm m.

Lời giải

Xét $f(x)=4x^4+2x^2-x-3$ trên khoảng $[-1;1]$. Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

$f(-1)=4$, $f(0)=-3$, $f(1)=2 \Rightarrow f(-1).f(0)<0$, $f(1).f(0)<0$.

Như vậy phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

Mặt khác $f'(x)=6x^3+4x-1$. Ta có $f'(-1)=-11$, $f'(1)=9 \Rightarrow f'(-1).f'(1)<0$.

Do đó phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

$f''(x)=18x^2+4>0$ với $\forall x\in(-1;1)$ nên $f'(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1) \Rightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Do đó $f(x)=0$ có tối đa hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Vậy phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t)=\begin{cases} 10+a & \text{khi } 0\le t\le 5 \\ t^2-5t+10 & \text{khi } t>5 \end{cases}$, trong đó $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Tìm a để hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t=5$.

Lời giải

Ta có: $v(5)=10+a$ và $\lim\limits_{t\to 5^-}v(t)=\lim\limits_{t\to 5^-}(10+a)=10+a;\lim\limits_{t\to 5^+}v(t)=\lim\limits_{t\to 5^+}\left(t^2-5t+10\right)=10$.

Để hàm số $v(t)$ liên tục tại điểm $t=5$ khi và chỉ khi $10+a=10\Leftrightarrow a=0$.

Câu 11: Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như sau: $T(x)=\begin{cases}10000+a & \text{khi } 0<x\le 0,7\\ 11000+15100.(x-0,7) & \text{khi } 0,7<x\le 30\\ 453430+12000.(x-30) & \text{khi } x>30\end{cases}$. Tìm a để hàm số $T(x)$ liên tục tại $x=0,7$.

Lời giải

Tại $x=0,7$ ta có: $T(0,7)=10000+a$; $\lim\limits_{x\to 0,7^-}T(x)=\lim\limits_{x\to 0,7^-}10000+a=10000+a$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0,7^+}T(x)=\lim\limits_{x\to 0,7^+}\left(11000+15100(x-0,7)\right)=11000$.

Hàm số liên tục tại $x=0,7$ thì $\lim\limits_{x\to 0,7^-}T(x)=\lim\limits_{x\to 0,7^+}T(x)=T(0,7)\Leftrightarrow a=1000$.

Câu 12: Giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x>3\\ 1-m^2x & \text{khi } x\le 3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$ viết dưới dạng $m=-\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, $(m>0,a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}^*)$. Hiệu của $a-b$ bằng?

Lời giải

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=f(3)$.

Ta có $\begin{cases}f(3)=1-3a^2\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{1-x}=-3.\\ \lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-a^2x\right)=1-3a^2.\end{cases}$

$\Rightarrow 1-3a^2=-3\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Hiệu số $a-b=-1$.

Câu 13: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2\right)=3$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 3=3+m \Leftrightarrow m=0$.

Câu 14: Xác định giá trị của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.(Kết quả chính xác đến hàng phần chục)

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{(ax+2a+1)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\dfrac{2}{2a+1}$; $f(0)=3$.

Để hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2a+1}=3 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{6}=0,2$.

Câu 15: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}a-b+c-1>0\\ 4a+2b+c+8<0\end{cases}$. Tìm số nghiệm của phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ và $f(-1)=a-b+c-1>0$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-\infty;-1)$.

$f(-1).f(2)=(a-b+c-1)(4a+2b+c+8)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1;2)$.

$f(2)=4a+2b+c+8<0$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(2;+\infty)$.

Mà phương trình là phương trình bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm. Vậy phương trình có 3 nghiệm.

Câu 16: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi tham số $m=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $2a+b$ bằng

Lời giải

Xét $x\in(4;+\infty)$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ là hàm phân thức nên hàm số liên tục.

Xét $x\in(-\infty;4)$ thì $f(x)=mx+1$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục.

Xét $x=4$. Ta có: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}(x+4)=8$ và

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(mx+1)=4m+1$; $f(4)=4m+1$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=4$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)\Leftrightarrow 4m+1=8\Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}$

Vậy $2a+b=2.7+4=18$.

Câu 17: Nhiệt độ sấy mít dẻo bằng máy sấy nhiệt được điều khiển tăng từ $30°C$ mỗi phút tăng $3°C$ trong 12 phút, sau đó giảm mỗi phút $1°C$ trong 6 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $°C$) trong máy sấy nhiệt theo thời gian t (tính theo phút) có dạng $T(t)=\begin{cases}30+3t & \text{khi } 0\le t\le 12\\ m-t & \text{khi } 12<t\le 18\end{cases}$ (m là hằng số). Biết rằng $T(t)$ là hàm số liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của m.

Lời giải

Với $0\le t<12$ thì $T(t)=30+3t$ nên hàm số liên tục trên $[0;12)$.

Với $12<t\le 18$ ta có: $y=m-t$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $(12;18]$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $t=12$.

$T(12)=30+3.12=66$.

Ta có $\lim\limits_{t\to 12^-} T(t)=\lim\limits_{t\to 12^-}(30+3t)=30+3.12=66$ và $\lim\limits_{t\to 12^+} T(t)=\lim\limits_{t\to 12^+}(m-t)=m-12$.

Hàm số liên tục tại $t=12$ nên $T(12)=\lim\limits_{t\to 12^-} T(t)=\lim\limits_{t\to 12^+} T(t)\Leftrightarrow 66=m-12\Leftrightarrow m=78$.

Vậy $m=78$ thì $T(t)$ là hàm số liên tục trên tập xác định.

Câu 18: Tính tổng các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x<1\\ 2 & \text{khi } x=1\\ m^2x+1 & \text{khi } x<1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(m^2x+1)=m^2+1$.

Hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m^2+1=2\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy $S=0$.

Câu 19: Số dân của một thị trấn sau x năm kể từ năm 1980 được tính bởi công thức $f(x)=\dfrac{6000x}{50+12x}$ ($f(x)$ được tính bằng nghìn người). Số dân của thị trấn đó không vượt quá bao nhiêu người.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6000x}{50+12x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6000}{\dfrac{50}{x}+12}=\dfrac{6000}{12}=500$.

Câu 20: Tính tổng các giá trị tìm được của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 1\\ (2-m)x & \text{khi } x>1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Xét $x<1$ thì $f(x)=m^2x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên cũng liên tục trên $(-\infty;1)$.

Xét $x>1$ thì $f(x)=(2-m)x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên cũng liên tục trên $(1;+\infty)$.

Xét tính liên tục tại $x=1$

Ta có $f(1)=m^2 1^2=m^2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} m^2x^2=m^2$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-m)x=2-m$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1$.

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

$\Leftrightarrow m^2=2-m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các giá trị tìm được của tham số m là -1

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{3x+1}}{x-1}, & \text{khi } x\neq 1 \\ a^2+ax-\dfrac{8}{3}, & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{3x+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3(x-1)}{(x-1)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3}{2+\sqrt{3x+1}}=\dfrac{1}{12}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{2}{3}$; $f(1)=a^2+a-\dfrac{8}{3}$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow a^2+a-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow a^2+a-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-2 \end{array}\right.$.

Câu 22: Gọi S là tập các giá trị của tham số a để hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2-3x & \text{khi } x\neq 1 \\ a^2+a-8 & \text{khi } x\neq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính tích các phần tử của S.

Lời giải

Khi $x\neq 1$, $f(x)=x^2-3x$ là hàm số đa thức nên liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-3x\right)=a^2+a-8 \Leftrightarrow a^2+a-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-3 \end{array}\right.$

Vậy tích các phần tử của S là -6.

Câu 23: Một chuyển động thẳng biến đổi đều trong 5 giây đầu có phương trình đường đi là $s(t)=2t^2+10t$ và sau đó tiếp tục chuyển động theo phương trình $S(t)=at^2+3t$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tìm giá trị của a.

Lời giải

Ta có phương trình của chuyển động là $S(t)=\begin{cases}2t^2+10t & \text{khi } 0\le t\le 5\\ at^2+3t & \text{khi } t>5\end{cases}$.

Vì đây là phương trình của một chuyển động nên $S(t)$ là hàm số liên tục.

Hàm số $S(t)$ liên tục trên các khoảng $(0;5)$ và $(5;+\infty)$ để hàm số $S(t)$ liên tục thì nó phải liên tục tại $t=5$.

$\lim\limits_{t\to 5^-}S(t)=\lim\limits_{t\to 5^-}\left(2t^2+10t\right)=100, \lim\limits_{t\to 5^+}S(t)=\lim\limits_{t\to 5^+}\left(at^2+3t\right)=25a+15, S(5)=100$.

Hàm số liên tục tại $t=5$ khi $\lim\limits_{t\to 5^-}S(t)=\lim\limits_{t\to 5^+}S(t)=100 \Leftrightarrow 25a+15=100 \Leftrightarrow a=\frac{17}{5}=3,4$.

Vậy $a=3,4$.

Câu 24: Hàm số $v(t)=\begin{cases}-t^2+4t+12 & \text{khi } 0\le t\le 5\\ at-3 & \text{khi } 5<t\le 10\end{cases}$ mô tả vận tốc (m/s) của một vật tại thời điểm t (giây) trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên kể từ khi vật bắt đầu chuyển động. Biết rằng $v(t)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;10]$ và trong 10 giây đầu tiên đó, có hai lần vật đạt vận tốc 10 (m/s) là vào các thời điểm t_1 giây và t_2 giây. Tính t_1+t_2 (Kết quả làm tròn đến hàng phần 10)

Lời giải

Hàm số $v(t)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ nên hàm số liên tục tại $t=5$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 5^+}v(t)=\lim\limits_{x\to 5^-}v(t)=v(5) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 5^+}(at-3)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(-t^2+4t+12\right)=7$

$\Leftrightarrow 5a-3=-5^2+4.5+12 \Leftrightarrow a=2$.

Khi đó $v(t)=\begin{cases}-t^2+4t+12 & \text{khi } 0\le t\le 5\\ 2t-3 & \text{khi } 5<t\le 10\end{cases}$.

Vật đạt vận tốc 10 (m/s) nên ta có $v(t)=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-t^2+4t+12=10\ (0\le t\le 5)\\ 2t-3=10\ (5<t<10)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{6}\\ t=\dfrac{13}{2}\end{array}\right.$.

Như vậy ta có $t_1=2+\sqrt{6}$ và $t_2=\frac{13}{2}$ $t_1+t_2=2+\sqrt{6}+\frac{13}{2}\approx 10,9$.

-----------------HẾT-----------------