

Bài 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

- Rút gọn A .
- Tính giá trị của A khi $x = \frac{4}{9}$.
- Tìm giá trị của x để A có giá trị nguyên.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$ (với m là tham số).

- Giải hệ phương trình trên khi $m = 6$.
- Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn:

$$x + y - 2024 = \frac{-2025m^2 + 14m - 8102}{m^2 + 4}.$$

2. Giải phương trình: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Biết rằng a, b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a.b = 1$.

Chứng minh: $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$.

2. Cho ba số $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a + b + c = 2022^{2023}$.

Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

Bài 4: (2,0 điểm)

Nhà bạn An được ông nội cho một mảnh đất hình chữ nhật. Khi bạn Bình đến nhà bạn An chơi, An đố Bình tìm ra kích thước của mảnh đất khi cho biết: “Mảnh đất đó có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng. Nếu giảm chiều rộng đi $2m$, tăng chiều dài lên gấp đôi thì diện tích mảnh đất đó sẽ tăng thêm $20m^2$ ”. Các em hãy giúp Bình tìm ra chiều dài và chiều rộng của mảnh đất nhà bạn An.

Bài 5: (6,0 điểm)

1. Cho góc nhọn α biết $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

2. Cho đường tròn tâm O , bán kính R có đường kính AB cố định. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B). Kẻ CH vuông góc AB (H thuộc AB), I là trung điểm của AC . Đường thẳng OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ($O; R$) tại M , đường thẳng MB cắt đường thẳng CH tại K .

a. Chứng minh MC là tiếp tuyến của ($O; R$).

b. Chứng minh IK song song với AB .

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

I. Hướng dẫn chấm thi:

- Cán bộ chấm thi chấm 2 vòng độc lập.
- Cán bộ chấm thi không tự ý thay đổi thang điểm trong đáp án.

II. Đáp án và thang điểm:

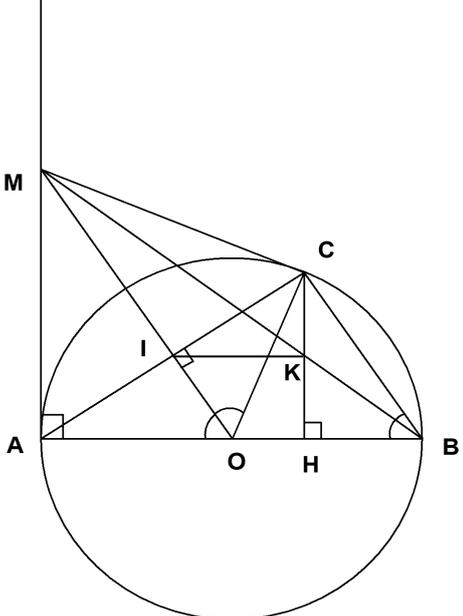
Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1: (4,0 điểm)	Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.	
	1. Rút gọn A .	
	2. Tính giá trị của A khi $x = \frac{4}{9}$.	
	3. Tìm giá trị của x để A có giá trị nguyên.	
	1. Rút gọn A .	
	$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$	0,5
	$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (2+5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,5
	$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,5
	$= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$	
	2. Tính giá trị của A khi $x = \frac{4}{9}$.	
	Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, tại $x = \frac{4}{9}$ (t/m đk)	0,25

	$A = \frac{3\sqrt{\frac{4}{9}}}{\sqrt{\frac{4}{9}} + 2} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 2}$ $= \frac{2}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{4}$	0,75
	<p>3. Tìm giá trị của x để A có giá trị nguyên.</p> <p>Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$; A nguyên khi $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ có giá trị nguyên.</p> <p>Mặt khác $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 3 - \frac{6}{\sqrt{x}+2} < 3$ (vì $\frac{6}{\sqrt{x}+2} > 0$)</p> <p>Suy ra $0 \leq A < 3$</p> <p>Vì A nguyên và $0 \leq A < 3$ nên $A = 0; 1; 2$</p> <p>$A = 0$ giải ra ta được $x = 0$ (T/m đk)</p> <p>$A = 1$ giải ra ta được $x = 1$ (T/m đk)</p> <p>$A = 2$ giải ra ta được $x = 16$ (T/m đk)</p> <p>Vậy $x = 0$; $x = 1$; $x = 16$ thì A có giá trị nguyên</p>	0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 2: (4,0 điểm)	<p>1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$ (với m là tham số).</p> <p>a. Giải hệ phương trình trên khi $m = 6$.</p> <p>b. Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn:</p> $x + y - 2024 = \frac{-2025m^2 + 14m - 8102}{m^2 + 4}.$ <p>2. Giải phương trình: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.</p>	
	<p>1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$ (với m là tham số).</p> <p>a. Thay $m = 6$ ta được hệ:</p> $\begin{cases} 6x - 2y = 2 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 18x - 6y = 6 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 20x = 11 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$	0,25

	$\begin{cases} x = \frac{11}{20} \\ 2 \cdot \frac{11}{20} + 6y = 5 \end{cases}$	0,25
	$\begin{cases} x = \frac{11}{20} \\ y = \frac{13}{20} \end{cases}$	0,25
	<p>Vậy với $m = 6$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x; y) = \left(\frac{11}{20}; \frac{13}{20}\right)$</p>	0,25
	<p>b. $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$</p>	
	$\begin{cases} y = \frac{mx - 2}{2} \\ 2x + my = 5 \end{cases}$	
	$\begin{cases} y = \frac{mx - 2}{2} \\ 2x + m \frac{mx - 2}{2} = 5 \end{cases}$	0,25
	$\begin{cases} y = \frac{mx - 2}{2} \\ (m^2 + 4)x = 2m + 10 \end{cases}$	
	$\begin{cases} x = \frac{2m + 10}{m^2 + 4} \\ y = \frac{5m - 4}{m^2 + 4} \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}$	
	<p>Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là:</p>	0,25
	$\begin{cases} x = \frac{2m + 10}{m^2 + 4} \\ y = \frac{5m - 4}{m^2 + 4} \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}$	
	<p>Thay $x = \frac{2m + 10}{m^2 + 4}$ và $y = \frac{5m - 4}{m^2 + 4}$ vào hệ thức:</p>	
	$x + y - 2024 = \frac{-2025m^2 + 14m - 8102}{m^2 + 4}$	
	<p>Ta được: $\frac{-2024m^2 + 7m - 8090}{m^2 + 4} = \frac{-2025m^2 + 14m - 8102}{m^2 + 4}$</p>	
	$-2024m^2 + 7m - 8090 = -2025m^2 + 14m - 8102$	

	$m^2 - 7m + 12 = 0$ $(m-3)(m-4) = 0$ $\begin{cases} m = 3 \\ m = 4 \end{cases}$ <p>Vậy để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức: $x + y - 2024 = \frac{-2025m^2 + 14m - 8102}{m^2 + 4}$ thì $m = 3$ hoặc $m = 4$.</p>	0,25
	<p>2. Giải phương trình: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ (1)</p> <p>Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1) nên chia hai vế cho x^2 ta được</p> $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0 \quad (2)$ <p>Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ ta được $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ điều kiện: $t > \sqrt{2}$</p> <p>Phương trình (2) trở thành $t^2 - 5t + 6 = 0$</p> <p>Giải phương trình ta được $t_1 = 2, t_2 = 3$ (thỏa điều kiện)</p> <p>Với $t_1 = 2$ ta có $x + \frac{1}{x} = 2$</p> $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1$ <p>Với $t_2 = 3$ ta có $x + \frac{1}{x} = 3$</p> $x^2 - 3x + 1 = 0$ $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ và } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ <p>Vậy phương có 3 nghiệm $x = 1; x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$</p>	0,25
Bài 3: (4,0 điểm)	<p>1. Biết rằng a, b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a.b = 1$.</p> <p>Chứng minh: $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$.</p> <p>2. Cho ba số $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a + b + c = 2022^{2023}$.</p> <p>Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.</p>	
	<p>1. Vì $a.b = 1$ nên</p> $\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b}$ $= \frac{(a - b)^2 + 2}{a - b} = (a - b) + \frac{2}{a - b}$	0,5
		0,5

	<p>- Do $a > b > 0$ nên áp dụng BĐT Cô Si cho 2 số dương</p> <p>Ta có : $(a-b) + \frac{2}{a-b} \geq 2\sqrt{(a-b) \cdot \frac{2}{a-b}}$</p> <p>Vậy $\frac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$</p>	0,5 0,5
	<p>2.</p> <p>Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (a + b + c)$</p> <p>Mà $a^3 - a = (a-1)a(a+1) : 6$ (tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6).</p> <p>Tương tự $(b^3 - b) : 6, (c^3 - c) : 6$</p> <p>và $a + b + c = 2022^{2023} : 6$ (vì $2022 : 6$)</p> <p>Vậy $(a^3 + b^3 + c^3) : 6$</p>	0,5 0,75 0,5 0,25
Bài 4: (2,0 điểm)	<p>Nhà bạn An được ông nội cho một mảnh đất hình chữ nhật. Khi bạn Bình đến nhà bạn An chơi, An đố Bình tìm ra kích thước của mảnh đất khi cho biết: “Mảnh đất đó có chiều dài gấp bốn lần chiều rộng. Nếu giảm chiều rộng đi $2m$, tăng chiều dài lên gấp đôi thì diện tích mảnh đất đó sẽ tăng thêm $20m^2$”. Các em hãy giúp Bình tìm ra chiều dài và chiều rộng của mảnh đất nhà bạn An.</p>	
	<p>Gọi chiều rộng của mảnh đất là $x(m)$ ($x > 2$)</p> <p>Vậy chiều dài là: $4x(m)$</p> <p>Diện tích mảnh đất là: $4x^2(m^2)$</p> <p>Diện tích mảnh đất sau khi giảm chiều rộng $2m$ và tăng chiều dài lên gấp đôi là: $8x(x-2)(m^2)$</p> <p>Theo bài ra ta có phương trình: $8x(x-2) - 4x^2 = 20$</p> <p>Giải phương trình ta được $x = 5$ (nhận) $x = -1$ (loại)</p> <p>Vậy chiều rộng của mảnh đất là $5(m)$; chiều dài của mảnh đất là $20(m)$</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
	<p>1. Cho góc nhọn α biết $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.</p>	

<p>Bài 5: (6,0 điểm)</p>	<p>2. Cho đường tròn tâm O, bán kính R có đường kính AB cố định. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B). Kẻ CH vuông góc AB (H thuộc AB), I là trung điểm của AC. Đường thẳng OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ($O; R$) tại M, đường thẳng MB cắt đường thẳng CH tại K.</p> <p>a. Chứng minh MC là tiếp tuyến của ($O; R$).</p> <p>b. Chứng minh IK song song với AB.</p>	
	<p>1. Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ $\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$ $\sin^2 \alpha = \frac{144}{169}$ $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>2.</p>		<p>0,5</p>
	<p>a. Chứng minh MC là tiếp tuyến của của ($O; R$)</p> <p>Tam giác OAC cân tại O, có OI là đường trung tuyến nên OI là đường trung trực</p> <p>Mà $M \in OI \Rightarrow MA = MC$</p>	<p>0,5</p>

	<p>Xét ΔOAM và ΔOCM có $\begin{cases} OA = OC \\ OM \text{ chung} \\ MA = MC \end{cases}$</p> <p>Vậy $\Delta OAM = \Delta OCM (c.c.c)$</p> <p>Nên $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^\circ$</p> <p>$\Rightarrow MC \perp CO$ tại C, mà $C \in (O)$</p> <p>Vậy MC là tiếp tuyến của $(O; R)$</p>	<p>1,0</p> <p>0,5</p>
	<p>b. Chứng minh IK song song với AB.</p> <p>Ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ MA \perp AB \end{cases} \Rightarrow KH // MA \Rightarrow \frac{KH}{MA} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{2R} \quad (1)$</p> <p>Do $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AC \Rightarrow BC // OM$</p> <p>Xét hai tam giác BCH và OMA có $\begin{cases} \widehat{BHC} = \widehat{OAM} \\ \widehat{CBH} = \widehat{MOA} \end{cases}$</p> <p>Suy ra $\Delta BCH \sim \Delta OMA$</p> <p>Suy ra $\frac{CH}{MA} = \frac{BH}{OA} = \frac{BH}{R} \quad (2)$</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra $CH = 2KH \Rightarrow K$ là trung điểm của CH</p> <p>ΔCAH có: $\begin{cases} IC = IA \\ KC = KH \end{cases} \Rightarrow IK$ là đường trung bình của ΔCAH</p> <p>$\Rightarrow IK // AH \Rightarrow IK // AB$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

Chú ý:

- Học sinh làm cách khác đúng đều ghi nhận và cho điểm tương ứng theo từng phần.
- Học sinh không vẽ hình bài 5 câu 2 thì không chấm điểm.

----- HẾT -----