SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **PHÚ THỌ**	**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10** **TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG** **NĂM HỌC 2025-2026**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn: Toán** *Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.* *Đề thi có 01 trang.*

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{2x+y}{3}=\frac{2y+z}{4}=\frac{2z+x}{5}$. Chứng minh $x+y=z$.

b) Cho a, b là các số thực dương khác nhau thỏa mãn $a-b=\sqrt{2025-b^2}-\sqrt{2025-a^2}$. Tính giá trị biểu thức $A=a^2+b^2$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho p là một số nguyên tố; a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{p}{a}+\frac{p}{b}=1$ và $a+b$ chia hết cho p. Chứng minh $\frac{a+b}{p}=4$.

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n \geq 100$ sao cho $2^n+3^n+6^n-1$ chia hết cho 2026.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=\sqrt{9+2x}$.

b) Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^2-2(m-3)x+m^2-4m-6=0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $P=\frac{x_1^2+x_2^2-4}{x_1+x_2}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d cố định, d và (O) không có điểm chung. Điểm M di động trên d. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm), đoạn thẳng MO cắt AB tại H. Đường thẳng a đi qua M cắt (O) tại C, D $(MC<MD)$.

a) Chứng minh $MH.MO=MC.MD$.

b) Chứng minh điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M di động trên d.

c) Vẽ đường thẳng b (khác a) đi qua M, cắt (O) tại E, F $(ME<MF)$. Chứng minh rằng DE, CF, AB đồng quy.

Câu 5 (1,0 điểm). An có 10 hộp đựng bi, mỗi hộp có 3 viên bi. Các viên bi được tô bởi một trong 5 màu: xanh, đỏ, tím, vàng, nâu; sao cho các viên bi trong cùng hộp có màu khác nhau và không có 2 hộp nào có 3 màu bi tương ứng giống nhau.

An nói rằng mình muốn lấy ra từ mỗi hộp 1 viên bi. Bình nghe thấy thế khẳng định: Sau khi An lấy bi, chắc chắn sau đó sẽ có 2 hộp bi mà 2 viên bi còn lại trong mỗi hộp có màu tương ứng giống nhau. Theo em, Bình nói đúng hay sai? Em hãy giải thích khẳng định của mình.

......................................**Hết**......................................

Lời giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT
Tỉnh Phú Thọ 2025 – 2026
Môn Toán (CHUYÊN)

Lớp chuyên Toán khóa 41 - Trường THPT Chuyên Hùng Vương

Ngày 5 tháng 6 năm 2025

Phần ①. Đề bài

Câu 1.

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $\dfrac{2x+y}{3} = \dfrac{2y+z}{4} = \dfrac{2z+x}{5}$. Chứng minh $x + y = z$

b) Cho a, b là hai số thực dương khác nhau thỏa mãn $a - b = \sqrt{2025 - b^2} - \sqrt{2025 - a^2}$. Tính giá trị biểu thức $A = a^2 + b^2$

Câu 2.

a) Cho p là một số nguyên tố; a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{p}{a} + \dfrac{p}{b} = 1$ và $a + b$ chia hết cho p. Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{p} = 4$.

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n \geqslant 100$ sao cho $2^n + 3^n + 6^n - 1$ chia hết cho 2026.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{9+2x}$.

b) Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^2 - 2(m-3)x + m^2 - 4m - 6 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $P = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 - 4}{x_1 + x_2}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d cố định, d và (O) không có điểm chung. Điểm M di động trên d. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm), đoạn thẳng MO cắt AB tại H. Đường thẳng a đi qua M cắt (O) tại C, D ($MC < MD$).

a) Chứng minh $MH.MO = MC.MD$.

b) Chứng minh điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M di động trên d.

c) Vẽ đường thẳng b (khác a) đi qua M, cắt (O) tại E, F ($ME < MF$). Chứng minh rằng DE, CF, AB đồng quy.

Câu 5. An có 10 hộp đựng bi, mỗi hộp có 3 viên bi. Các viên bi được tô bởi một trong năm màu: xanh, đỏ, tím, vàng, nâu; sao cho các viên bi trong cùng hộp có màu khác nhau và không có 2 hộp nào có 3 màu bi tương ứng khác nhau.
An nói rằng mình muốn lấy ra từ mỗ hộp 1 viên bi. Bình nghe thấy thế khẳng đinh: Sau khi An lấy bi. chắc chắn sẽ có 2 hộp bi mà 2 viên bi còn lại trong hộp có màu tương ứng giống nhau. Theo em, Bình nói đúng hay sau? Em hãy giải thích khẳng định của mình.

Phần ②. Lời giải

Câu 1.

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $\dfrac{2x+y}{3} = \dfrac{2y+z}{4} = \dfrac{2z+x}{5}$. Chứng minh $x+y=z$

b) Cho a, b là hai số thực dương khác nhau thỏa mãn $a-b = \sqrt{2025-b^2} - \sqrt{2025-a^2}$. Tính giá trị biểu thức $A = a^2+b^2$

✍ Lời giải.

a) Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} 8x+4y = 6y+3z \\ 10y+5z = 8z+4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-2y-3z=0 \\ -4x+10y-3z=0 \end{cases}$
Trừ 2 phương trình cho nhau, ta được $12x-12y=0 \Leftrightarrow x=y$
Thay lại vào hệ ta được $3z=6x \Leftrightarrow z=2x=x+y$
Vậy ta có $x+y=z$.

b) Ta có: $a-b = \sqrt{2025-b^2} - \sqrt{2025-a^2} \Leftrightarrow a+\sqrt{2025-a^2} = b+\sqrt{2025-b^2}$
$\Leftrightarrow a^2+2025-a^2+2a\sqrt{2025-a^2} = b^2+2025-b^2+2b\sqrt{2025-b^2}$
$\Leftrightarrow a\sqrt{2025-a^2} = b\sqrt{2025-b^2} \Leftrightarrow 2025a^2-a^4 = 2025b^2-b^4$
$\Leftrightarrow 2025(a^2-b^2)-(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2+b^2-2025)=0.$
Theo giả thiết ta có $a \neq b$ nên $a^2+b^2=2025$.
Vậy $a^2+b^2=2025$.

■

Câu 2.

a) Cho p là một số nguyên tố; a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{p}{a}+\dfrac{p}{b}=1$ và $a+b$ chia hết cho p. Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{p}=4$.

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n \geqslant 100$ sao cho $2^n+3^n+6^n-1$ chia hết cho 2026.

✍ Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{p}{a}+\dfrac{p}{b}=1 \Leftrightarrow p(a+b)=ab$ (1). $\Rightarrow ab \,\vdots\, p$

Dẫn tới a hoặc b chia hết cho p. Theo giả thiết có $a+b \vdots p$ nên $\begin{cases} a \,\vdots\, p \\ b \,\vdots\, p \end{cases}$

Đặt $\frac{a}{p} = x, \frac{b}{p} = y$ $(x, y \in \mathbb{N}^*)$

Từ (1), có: $xy = x + y \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Từ đó: $\frac{a+b}{p} = x + y = 4.$

b) Ta có: $2^n + 3^n + 6^n - 1 \,\vdots\, 2$ với mọi n nguyên dương. (1)
Với $n = 1011$; Theo định lí Fermat, ta có:
$6(2^{1011} + 3^{1011} + 6^{1011} - 1) = 3 \cdot 2^{1012} + 2 \cdot 3^{1012} + 6^{1012} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \ (mod\ 1013).$
Mà ta lại có $(6; 1013) = 1$ nên $2^{1011} + 3^{1011} + 6^{1011} - 1 \,\vdots\, 1013$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $2^{1011} + 3^{1011} + 6^{1011} - 1 \,\vdots\, 2026$.
Vậy tồn tại n thỏa mãn đề bài.

■

Câu 3.

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{9+2x}$.

b) Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^2 - 2(m-3)x + m^2 - 4m - 6 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $P = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 4}{x_1 + x_2}$ nhận giá trị nguyên.

✍ Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $-1 \leqslant x \leqslant 4$
Bình phương 2 vế của giả thiết, có: $x + 1 + 4 - x + 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 9 + 2x$
$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 3x + 4} = 2 + x \Rightarrow -x^2 + 3x + 4 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0$
$\Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$
Thử lại ta thấy cả 2 nghiệm trên đều thỏa mãn
Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$

b) Xét phương trình $x^2 - 2(m-3)x + m^2 - 4m - 6 = 0$, (1)
Ta có $\Delta' = (m-3)^2 - (m^2 - 4m - 6) = -2m + 15$.
Để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta' \geqslant 0 \Rightarrow m \leqslant \frac{15}{2}$.
Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-3) \\ x_1 x_2 = m^2 - 4m - 6 \end{cases}$
Để biểu thức $P = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 4}{x_1 + x_2}$ có nghĩa thì $x_1 + x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.
Ta có $P = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 4}{x_1 + x_2} = \frac{4(m-3)^2 - 2(m^2 - 4m - 6) - 4}{2(m-3)} = \frac{m^2 - 8m + 22}{m-3}$.
Do $\begin{cases} P \in Z \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $m^2 - 8m + 22 \,\vdots\, m - 3 \Rightarrow m^2 - 9 - 8(m-3) + 7 \,\vdots\, m - 3$
$\Rightarrow 7 \,\vdots\, m - 3 \Rightarrow m - 3 \in \{1; -1; 7; -7\} \Rightarrow m \in \{4; 2; 10; -4\}$.
Do $m \leqslant \frac{15}{2}$ nên $m \in \{4; 2; -4\}$ (thử lại thỏa mãn).
Vậy tất cả các giá trị của m thỏa mãn đề bài là $\{4; 2; -4\}$

Câu 4.

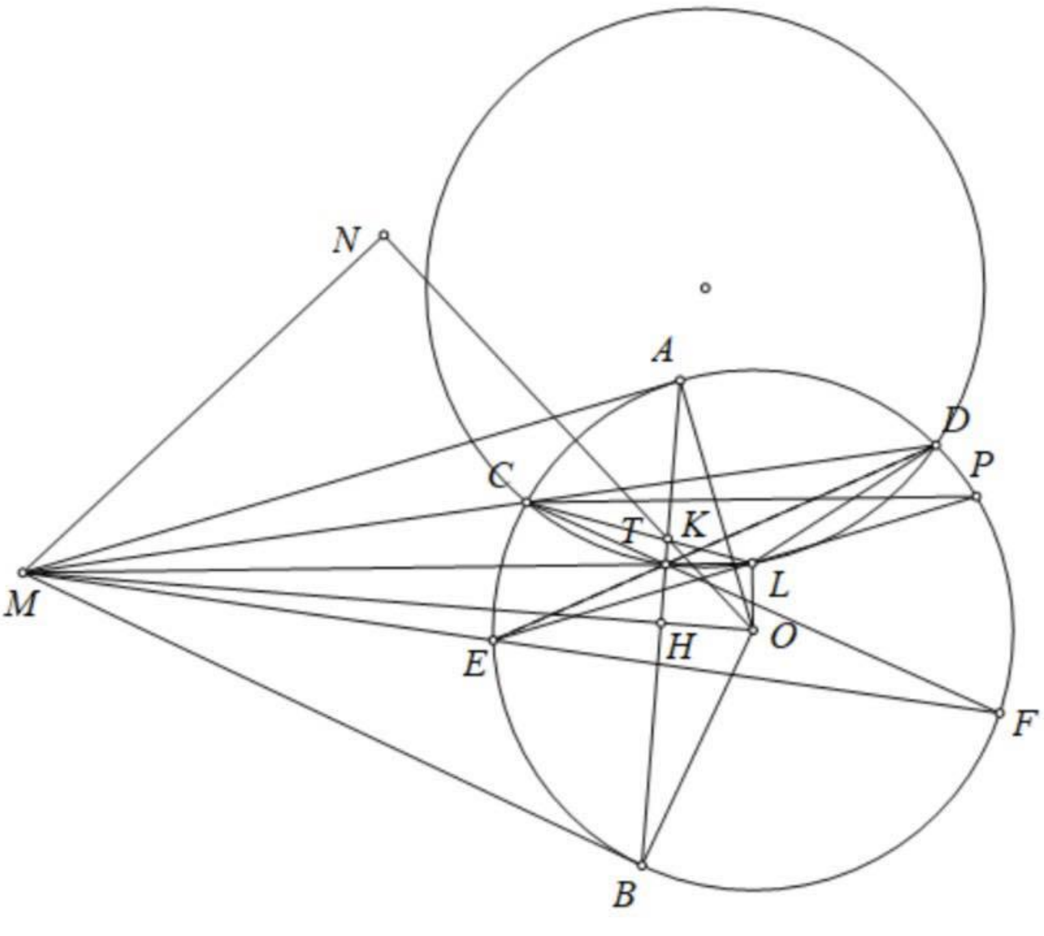
Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d cố định, d và (O) không có điểm chung. Điểm M di động trên d. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm), đoạn thẳng MO cắt AB tại H. Đường thẳng a đi qua M cắt (O) tại C, D ($MC < MD$).

a) Chứng minh $MH.MO = MC.MD$.

b) Chứng minh điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M di động trên d.

c) Vẽ đường thẳng b (khác a) đi qua M, cắt (O) tại E, F ($ME < MF$). Chứng minh rằng DE, CF, AB đồng quy.

✍ Lời giải.



a) Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$: Chung $\angle M$

$\angle MAC = \angle MDA$

$\Rightarrow \triangle MAC$ và $\triangle MDA$ đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA}$

$\Rightarrow MC \cdot MD = MA^2$

Mặt khác, $MA^2 = MO \cdot MH$ (hệ thức lượng)

Do đó: $MO \cdot MH = MC \cdot MD$.

b) Gọi N là hình chiếu của O lên d
Lấy K trên tia ON sao cho $OK.ON = R^2$
$\Rightarrow N, K$ cố định
Ta có: $OK \cdot ON = OH \cdot OM \Rightarrow$ tứ giác $MNKH$ nội tiếp
$\Rightarrow H$ nằm trên (OK) cố định.

c) Gọi CF giao DE tại I, MT giao (CTD) tại L và EL giao (O) tại P
Ta có: $MT \cdot ML = MC \cdot MD = ME \cdot MF$; $(ETLF)$ nội tiếp
Vì vậy: $\angle PCL = \angle PCF = \angle FCL = \angle LEF - \angle TDL = \angle CDT = \angle CPL$
$\Rightarrow LC = LP$
$\Rightarrow OL \perp CP$ (1)
Ta có: $\angle CLM = \angle CDE = \angle FLMF$
$\Rightarrow ML//LP$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $OL \perp ML$
Mà $MH \cdot MO = MT \cdot ML \Rightarrow TH \perp MO$. Từ đó suy ra T, A, B thẳng hàng.
Vậy CF, DE, AB đồng quy tại T.

■

Câu 5.

An có 10 hộp đựng bi, mỗi hộp có 3 viên bi. Các viên bi được tô bởi một trong năm màu: xanh, đỏ, tím, vàng, nâu; sao cho các viên bi trong cùng hộp có màu khác nhau và không có 2 hộp nào có 3 màu bi tương ứng khác nhau.
An nói rằng mình muốn lấy ra từ mỗ hộp 1 viên bi. Bình nghe thấy thế khẳng đinh: Sau khi An lấy bi. chắc chắn sẽ có 2 hộp bi mà 2 viên bi còn lại trong hộp có màu tương ứng giống nhau. Theo em, Bình nói đúng hay sau? Em hãy giải thích khẳng định của mình.

✍ Lời giải.
Từ 5 loại bi, có $C_5^3 = 10$ cách chọn ra 3 viên bi khác màu.
Trong 10 hộp bi ban đầu thì không có 2 hộp nào có 3 màu tương ứng khác nhau nên 10 hộp đó có tất cả 10 cách chọn ra 3 viên bi khác màu.
Từ 5 loại bi, có $C_5^2 = 10$ cách chọn ra 2 viên bi khác màu.
Do đó, An có thể ngầm tương ứng 10 hộp bi, mỗi hộp có 3 viên khác màu và không có 2 hộp nào có màu bi trùng nhau với 10 hộp bi, mỗi hộp có 2 viên khác màu và không có 2 hộp nào có màu bi trùng nhau. Và khi bốc, An chỉ cần bốc theo tương ứng đó là được.
Vậy Bình nói sai.

■