# CHUYÊN ĐỀ 11_CÁC MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP VÀ CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP HÌNH HỌC

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

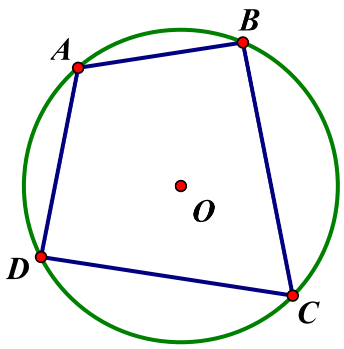
## I. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

### 1. Định nghĩa

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

### 2. Tính chất của tứ giác nội tiếp :

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng $180^0$




Trong hình vẽ, tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O)$ nên ta có:

$$\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$$

### 3. Chứng minh tứ giác nội tiếp

- Ta chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cách đều một điểm cho trước

  VD : Để chứng minh tứ giác ABCD (hình trên) nội tiếp $(O;R)$ ta cần chứng minh :

  $OA=OB=OC=OD=R$

## II. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Để chứng minh đẳng thức hình học ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1 :** Chứng minh tam giác đồng dạng
2. **Phương pháp 2 :** Dùng định lí Thales
3. **Phương pháp 3 :** Dùng tính chất đường phân giác trong tam giác
4. **Phương pháp 4 :** Sử dụng kết hợp các phương pháp trên.

## III. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

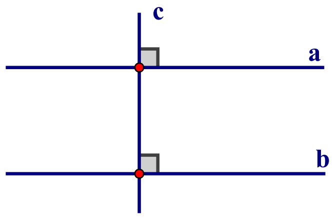
Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1 :** Sử dụng dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

- Chứng minh các góc so le trong bằng nhau
- Chứng minh các góc đồng vị bằng nhau

2. **Phương pháp 2 :** Sử dụng mối quan hệ từ vuông góc đến song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì chúng song song với nhau.




Trên hình vẽ, $a \perp c$; $\mathrm{b} \perp \mathrm{c}$ nên $a // b$

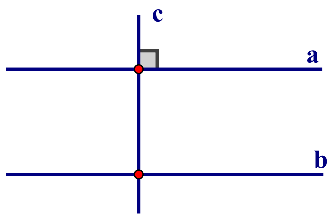
3. **Phương pháp 3 :** Sử dụng tính chất của các tứ giác đặc biệt.

   VD : Sử dụng tính chất về cạnh của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, …..

## IV. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

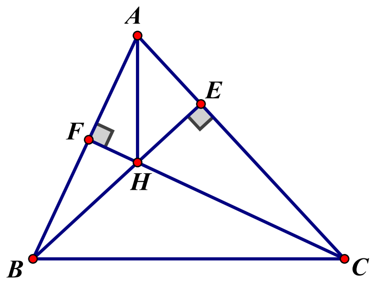
Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1 :** Sử dụng mỗi quan hệ từ vuông góc đến song song




Trong hình vẽ, $a \perp c$; $a // b$ nên $b \perp c$

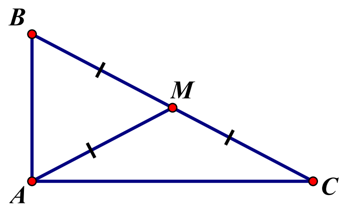
2. **Phương pháp 2** : Sử dụng tính chất ba đường cao trong tam giác




Trong hình vẽ, chứng minh được H là giao điểm của hai đường cao $BE; CF$ nên $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Do đó, $AH \perp BC$

3. **Phương pháp 3 :** Sử dụng tính chất đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông.

**Định lý :** Trong một tam giác, nếu đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác là tam giác vuông.




Trong hình vẽ, Xét tam giác $ABC$ có :

$$AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$$

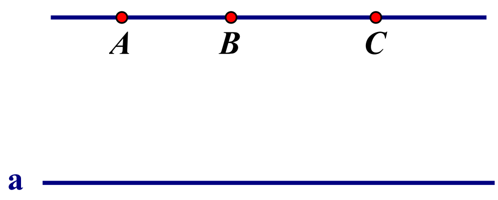
Thì tam giác $ABC$ vuông tại A.

4. Phương pháp 4 : Sử dụng tính chất về góc của các tứ giác đặc biệt như hình chữ nhật, hình vuông hoặc tính chất đường chéo của hình thoi, hình vuông.

**IV. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.**

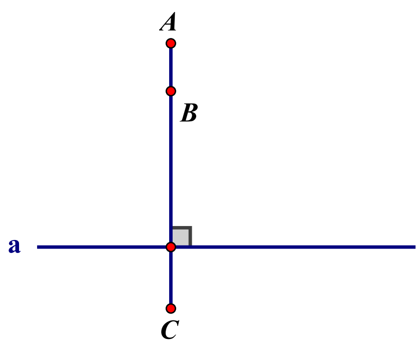
Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng các phương pháp như sau:

1. **Phương pháp 1** : Chứng minh dựa vào Tiên đề Ơcid : Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



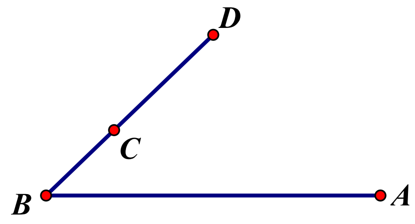

Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $AB//a; AC//a$. Từ đó, theo Tiên đề Ơclid thì đường thẳng $AB$ và $AC$ là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng.

2. **Phương pháp 2 :** Chứng minh dựa vào tính chất : Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho.



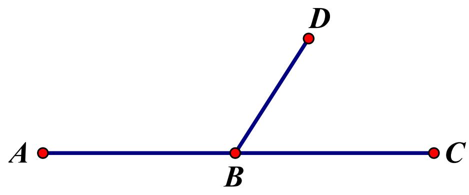

Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $AB \perp a; AC \perp a$. Từ đó, đường thẳng $AB$ và $AC$ là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng.

3. **Phương pháp 3 :** Chứng minh hai cạnh của góc trùng nhau



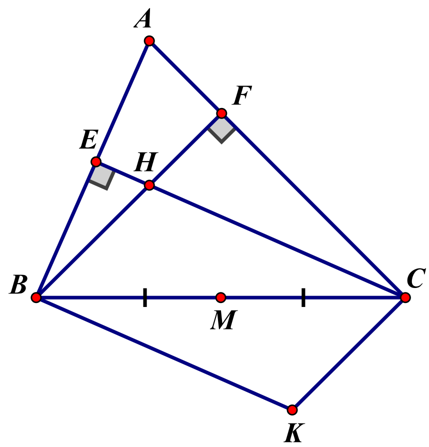

Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$. Từ đó, đường thẳng $BC$ và $B$D là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm $B, C, D$ thẳng hàng.

4. **Phương pháp 4 :** Sử dụng tính chất góc bẹt.




Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 180^0$. Từ đó, ta có $BA, BC$ là hai tia đối nhau. Do đó, ba điểm $B, C, A$ thẳng hàng.

5. **Phương pháp 5 :** Sử dụng tính đường chéo của các tứ giác đặc biệt.




Ví dụ : Trong bài toán trên, với dữ kiện $H$ là trực tâm tam giác $ABC$. Các đường thẳng $BK$ và $CK$ lần lượt vuông góc với $AB, AC$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh : Ba điểm $H, M, K$ thẳng hàng.

Để chứng minh bài toán trên, ta chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành nên hai đường chéo $BC, HK$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường mà $M$ là trung điểm của $BC$ nên $M$ là trung điểm của $HK$. Do đó, ba điểm $H, M, K$ thẳng hàng.

## V. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC.

Trong bài toán liên quan đến Bất đẳng thức và cực trị hình học ta thường sử dụng tính chất:

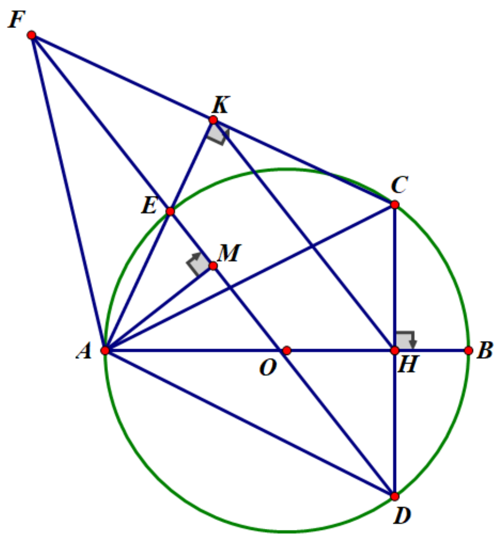
1. Với hai số dương $x, y$ ta có: $(x-y)^2 \geq 0$. Từ đó chứng minh được: $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi $x = y$

2. Bất đẳng thức Cauchy: Với hai số dương $a,b$ ta có: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi $x = y$

Ví dụ: Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính $AB$. Gọi $H$ là điểm nằm giữa $O$ và $B$. Kẻ dây $CD$ vuông góc với $AB$ tại $H$. Trên cung nhỏ $AC$ lấy điểm $E$ bất kì ($E$ khác $A$ và $C$). Kẻ $CK$ vuông góc với đường thẳng $AE$ tại $K$. Đường thẳng $DE$ cắt $CK$ tại $F$.

a) C/m: Tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
b) C/m: tam giác $ACF$ là tam giác cân.
c) Khi $CD$, $AB$ cố định. Tìm vị trí của điểm $E$ để diện tích tam giác $ADF$ lớn nhất

Giải:




a) C/m: Tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.

+) Có $CK \perp AK$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AKC} = 90°$

+) Có $CD \perp AB$ tại H (gt) $\Rightarrow \widehat{AHC} = 90°$

+) Xét tứ giác và c/m nội tiếp

b) C/m: tam giác $ACF$ là tam giác cân.

+) C/m: $KH \ // \ EF$

+) Vận dụng tính chất đường trung bình của tam giác $CDF$ c/m: $K$ là trung điểm của $EC$

+) Xét tam giác lập luận $AK$ là đường cao đồng thời là đường trung tuyến để suy ra tam giác cân

c) Khi $CD$, $AB$ cố định. Tìm vị trí của điểm $E$ để diện tích tam giác $ADF$ lớn nhất

+) $AB$ là đường trung trực của $CD$ nên $AC = AD$ mà $AC = AF$ do tam giác $ACF$ cân

Suy ra $AD = AF$. Từ đó, ta có $\Delta ADF$ cân tại $A$

+) Kẻ $AM$ vuông góc với $DF$ tại $M$

C/m: $\Delta AMF = \Delta AMD$ suy ra $S_{AFD} = 2S_{AMD}$ (1)

+) Áp dụng BĐT Cauchy cho $AM^2$ và $MD^2$ có:

$AM^2 + MD^2 \geq 2\sqrt{AM^2.MD^2}$

$AM.MD \leq \dfrac{AM^2 + MD^2}{2}$

Mà $AM^2 + MD^2 = AD^2$ (PTG $\Delta AMD$)

$\Rightarrow AM.MD \leq \dfrac{AD^2}{2}$ (2)

Dấu bằng xảy ra khi: $AM = MD$

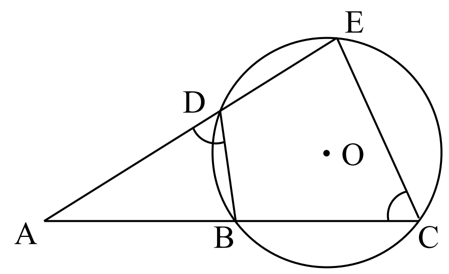
+) Từ (1), (2) $\Rightarrow S_{AFD}$ max khi $AM = MD$ hay tam giác $AMD$ cân tại $M$

$\Rightarrow \widehat{ADM} = 45^0$ hay $\widehat{ADE} = 45^0$

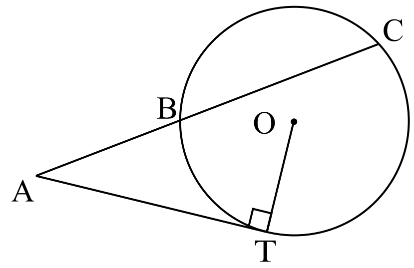
Vậy diện tích tam giác $AFD$ lớn nhất khi $E$ nằm trên cung $AC$ sao cho góc $\widehat{ADE} = 45^0$

## NHỮNG MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ TUYỂN SINH 9 LÊN 10

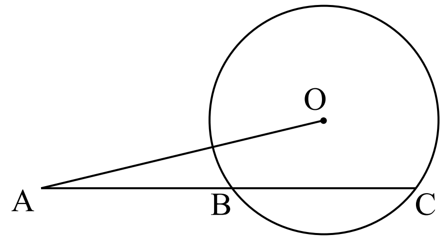
**Bài toán 1:** Biết $ABC$, $ADE$ là hai cát tuyến của $(O)$. Chứng minh: $AB.AC = AD.AE$



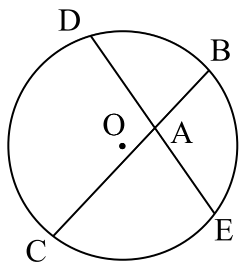

**Bài toán 2:** $ABC$ là cát tuyến của $(O)$, $AT$ là tiếp tuyến. Chứng minh: $AT^2 = AB.AC$



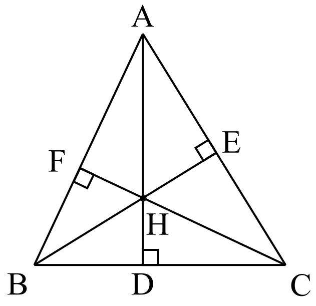

**Bài toán 3:** Cho $(O; R)$, $ABC$ là cát tuyến, $OA = d$. Chứng minh $AB.AC = d^2 - R^2$



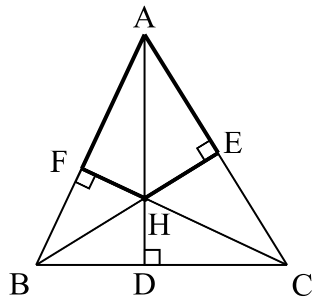
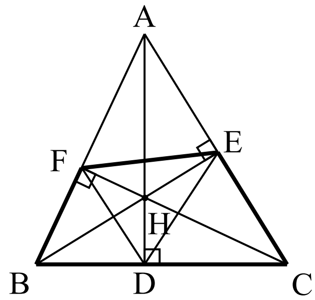

**Bài toán 4:** Biết $BC$, $DE$ là hai dây cung cắt nhau tại $A$. Chứng minh: $AB.AC = AD.AE$

| | |
|---|---|
| |  |

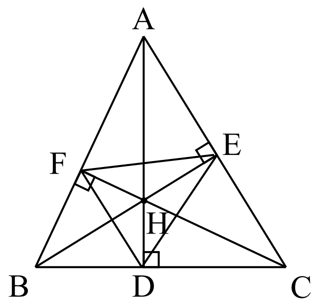
**Bài toán 5:** Cho $\Delta ABC$ nhọn; $AD$, $BE$, $CF$ là 3 đường cao cắt nhau tại $H$.

| | |
|---|---|
| 1) $DB.DC = DH.DA$<br>2) $HA.HD = HB.HE = HC.HF$<br>3) $AF.AB = AH.AD = AE.AC$ |  |

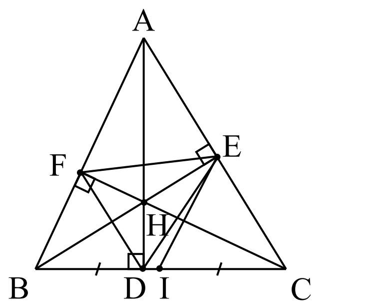
**Bài toán 6:** Cho $\Delta ABC$ nhọn; $AD$, $BE$, $CF$ là 3 đường cao cắt nhau tại $H$.

| | |
|---|---|
| 1) Chứng minh: $AEHF$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính. |  |
| 2) Chứng minh: $BCEF$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính. |  |

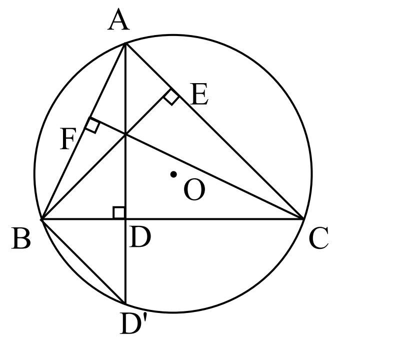
**Bài toán 7:** Cho ΔABC nhọn; $AD$, $BE$, $CF$ là 3 đường cao cắt nhau tại H, I là trung điểm BC.

| | |
|---|---|
| Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF |  |

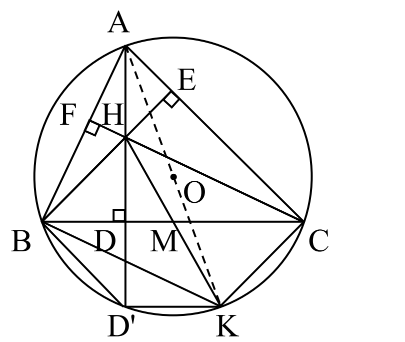
Chứng minh: D, F, E, I ∈ đường tròn



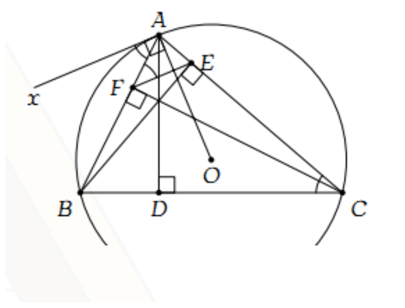

**Bài toán 8:** ΔABC nhọn nội tiếp (O); AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H, AH cắt (O) tại D′. Chứng minh: D′ đối xứng với H qua BC.



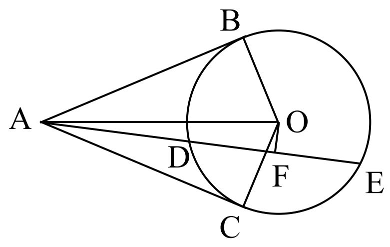

**Bài toán 9:** ΔABC nhọn nội tiếp (O); AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H. AH cắt (O) tại D′. Chứng minh: BD′KC là hình thang cân



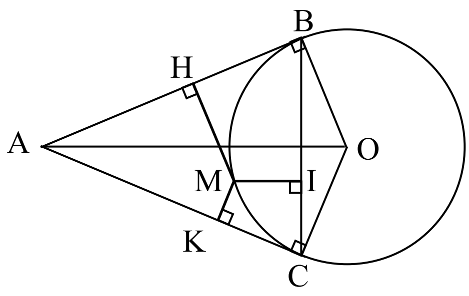

**Bài toán 10:** ΔABC nhọn nội tiếp (O); AD, BE, CF là 3 đường cao. Chứng minh: OA ⊥ EF



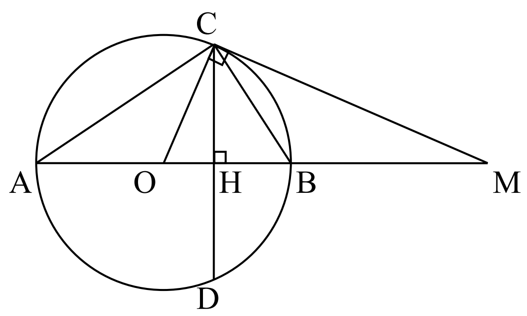

**Bài toán 11:** $AB$, $AC$ là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $A$, $ADE$ là cát tuyến. $F$ là trung điểm dây $DE$. Chứng minh: $A$, $B$, $O$, $C$, $F$ ∈ đường tròn.



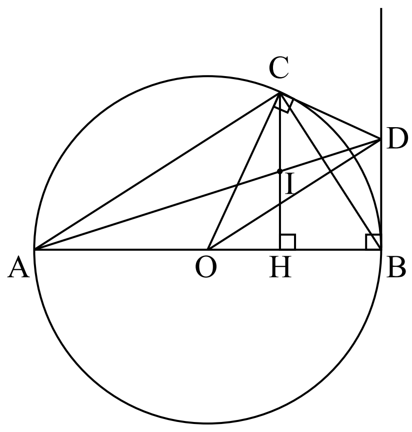

**Bài toán 12.** $AB, AC$ là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A. M $\in \overset{\frown}{BC}$ nhỏ. $H, I, K$ là hình chiếu của $M$ trên $AB, BC, CA$. Chứng minh: $MI^2 = MH.MK$




**Bài toán 13:** Cho (O), đường kính AB, dây CD ⊥ AB tại H. Tiếp tuyến tại C cắt AB tại M. Chứng minh: $BM.AH = BH.AM$




**Bài toán 14:** Cho (O; R), đường kính AB, C ∈ (O), CH ⊥ AB tại H. Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại D. Chứng minh: AD qua trung điểm I của CH.



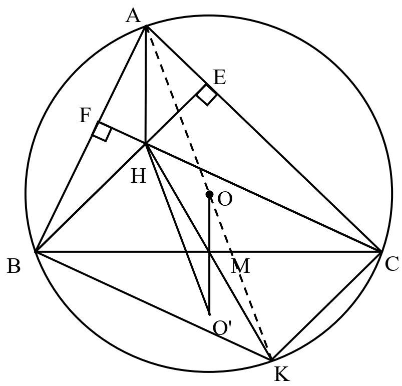

**Bài toán 15:** $\Delta ABC$ nhọn nội tiếp $(O)$; $AD, BE, CF$ là 3 đường cao cắt nhau tại $H$, gọi M là trung điểm BC. Vẽ đường kính $AK$.

a) Chứng minh: $BHCK$ là hình bình hành

b) M, H, K thẳng hàng. suy ra M là trung điểm Hk.

c) OM là đường trung bình của ΔAHK. suy ra AH = 2OM

d) Nếu O′ đối xứng với O qua BC thì AHO′O là hình bình hành ⇒ O′H=OA=R. Trong trường hợp khi $\left(\mathbf{BC = R\sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^0}\right)$ thì AHO′O là hình thoi




## B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Câu 1:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Hai đường cao $BE$ và $CF$ của tam giác $ABC$ cắt nhau tại điểm $H$. Gọi $K$ là trung điểm $BC$.

a) Chứng minh $\Delta AEF$ đồng dạng $\Delta ABC$.

b) Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng $EF$.

c) Đường phân giác góc $FHB$ cắt $AB$ và $AC$ lần lượt tại $M$ và $N$. Gọi $I$ là trung điểm của $MN$, $J$ là trung điểm của $AH$. Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm $I, J, K$ thẳng hàng.

**Câu 2:** Cho đường tròn $\left(O\right)$, dây $CD$ cố định. Gọi $B$ là điểm chính giữa cung nhỏ $CD$, kẻ đường kính $AB$ cắt $CD$ tại $I$. Lấy điểm $H$ bất kỳ trên cung lớn $CD$, $HB$ cắt $CD$ tại $E$. Đường thẳng $AH$ cắt đường thẳng $CD$ tại $P$.

a). Chứng minh: Tứ giác $PHIB$ nội tiếp.

b). Chứng minh: $AH.AP = AI.AB$.

c). Gọi $K$ là giao điểm của đường thẳng $AE$ và $BP$. Kẻ $KM \perp AB$ cắt $AB$ tại $M$, cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại $N$. Chứng minh $N, I, H$ thẳng hàng.

**Câu 3:** Cho đường tròn tâm $(O)$ và dây $BC$ cố định không đi qua $O$. Trên cung lớn $BC$ lấy điểm $A$ sao cho $AB < AC$. Kẻ đường kính $AK, E$ là hình chiếu của $C$ trên $AK$. $M$ là trung điểm của $BC$.

a) Chứng minh bốn $C, E, M, O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ $AD \perp BC$ tại $D$. Chứng minh $AD.AK = AB.AC$ và $\Delta MDE$ cân.

c) Gọi $F$ là hình chiếu của $B$ trên $AK$. Chứng minh khi $A$ di chuyển trên cung lớn $BC$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta DEF$ là 1 điểm cố định.

**Câu 4:** Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $O$ đường kính $AD.$ Hai đường chéo $AC, BD$ cắt nhau tại $E.$ Từ $E$ kẻ $EF$ vuông góc với $AD$ ( $F \in AD$). Đường thẳng $CF$ cắt đường tròn tại điểm thứ hai là $M.$ Giao điểm của $BD$ và $CF$ là $N.$ Chứng minh:

a) $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

b) $FA$ là tia phân giác của $\widehat{BFM}$.

c) $BE.DN = EN.BD$.

**Câu 5:** Trên nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính $BC$, lấy điểm $A$ sao cho $BA = R.$

a) Chứng minh tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và tính số đo các góc $B, C$ của tam giác vuông $ABC$

b) Qua $B$ kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn $(O)$, nó cắt tia $CA$ tại $D$. Qua $D$ kẻ tiếp tuyến $DE$ với nửa đường tròn $(O)$ ($E$ là tiếp điểm). Gọi $I$ là giao điểm của $OD$ và $BE$. Chứng minh rằng $OD \perp BE$ và $DI.DO = DA.DC$

c) Kẻ $EH$ vuông góc với $BC$ tại $H$. EH cắt $CD$ tại $G$. Chứng minh $IG$ song song với $BC.$

**Câu 6:** Cho đường tròn (O) cố định. Từ một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn ( M;N là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của dây BC.

a). Chứng minh rằng: AMON là tứ giác nội tiếp.

b). Gọi K là giao điểm của MN và $BC.$ Chứng minh rằng: $AK.AI = AB.AC$

c). Xác định vị trí của cát tuyến ABC để $IM = 2IN$.

**Câu 7:** Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính $AB$ vuông góc với dây $CD$ tại điểm $I$ ($I$ nằm giữa $A$ và $O$). Lấy điểm $E$ bất kì trên cung nhỏ $BC$ ($E$ khác $B$ và $C$). $AE$ cắt $CD$ tại $K$.

a) Chứng minh bốn điểm $K, E, B, I$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AK.AE = AI.AB$.

c) Gọi $P$ là giao điểm của tia $BE$ và tia $DC$, $Q$ là giao điểm của $AP$ và $BK$. Chứng minh $IK$ là phân giác của $\widehat{EIQ}$. Chứng minh $OQ$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQE$.

**Câu 8:** Cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$. Dây cung $MN$ vuông góc với $AB$, ($AM < BM$). Hai đường thẳng $BM$ và $NA$ cắt nhau tại $K$. Gọi $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ $K$ đến đường thẳng $AB$.

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB \,.\, HK = AN \,.\, HB$.

c) Chứng minh $HM$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.

**Câu 9:** Cho tam giác $ABC(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm $O$ đường kính $BC$, đường thẳng qua $O$ vuông góc với $BC$ cắt $AC$ tại $D$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.

b) Tiếp tuyến tại điểm $A$ với đường tròn $(O)$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $P$, sao cho $PB = BO = 2cm$. Tính độ dài đoạn $PA$ và số đo góc $APC$.

c) Chứng minh rằng $\frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

**Câu 10:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$ có hai đường cao $BD, CE$ cắt nhau ở điểm $H$.

a) Chứng minh: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tia $CE$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai là $G$. Chứng minh: $\Delta BHG$ cân ở $B$.

c) Hai điểm $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng $CH$ và $CG$. Đường thẳng $NO$ cắt cạnh $AC$ tại điểm $P$. Chứng minh: $CD.CP = CM.CG$ và $MB \perp MP$.

**Câu 11:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có đường cao $AD$ và đường phân giác trong $AO$ ($D, O$ thuộc cạnh $BC$). Kẻ $OM$ vuông góc với $AB$ tại $M$, $ON$ vuông góc với $AC$ tại $N$.

a) Chứng minh: Tứ giác $AMON$ nội tiếp

b) Chứng minh $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$

c) $\text{Sin}\frac{BAC}{2} \le \frac{BC}{AB + AC}$

**Câu 12:** Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm $M$ nằm ngoài đường tròn. Qua $M$ kẻ hai tiếp tuyến $MA$, $MB$ với đường tròn $(O;R)$( $A$, $B$ là các tiếp điểm). Đoạn thẳng $OM$ cắt đường thẳng $AB$ tại $H$ và cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm $I$.

a) Chứng minh bốn điểm $M$, $A$, $B$, $O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính $AD$ của $(O;R)$. Đoạn thẳng $MD$ cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm $C$ khác $D$ Chứng minh $MA^2 = MH.MO = MC.MD$.

c) Chứng minh $IH.IO = IM.OH$.

**Câu 13:** Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$. $AD$, $BE$, $CF$ là ba đường cao của tam giác $ABC$ cắt nhau tại $H$.

**a )** Chứng minh bốn điểm $A, F, H, E$ cùng thuộc một đường tròn.

**b )** Kẻ đường kính $AM$ của đường tròn $(O)$. Chứng minh $\text{AD.AM} = \text{AB.AC}$

**c )** Gọi $P$ là giao điểm của $AH$ và EF. $I$ là giao điểm của $AM$ và $BC$. $K$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh: $H, K, M$ thẳng hàng và $PI // HK$.

**Câu 14:** Cho đường tròn $(O, R)$ và dây $AB$ cố định (AB không là đường kính). Gọi $N$ là trung điểm của $AB$. Qua $N$, kẻ đường kính $CD$ của đường tròn $(O)$ ($C$ thuộc cung nhỏ $AB$). Lấy điểm $M$ bất kỳ trên cung lớn $AB$ $(M \neq A, M \neq B)$, $MC$ cắt $AB$ tại $F$. Hai đường thẳng $DM$ và $AB$ cắt nhau tại $E$.

a) Chứng minh bốn điểm $M, N, C, E$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Hai đường thẳng $DF$ và $CE$ cắt nhau tại $I$. Chứng minh $KI.KM = KC.KD$ và $NE$ là tia phân giác của $\widehat{MNI}$

c) Chứng minh rằng: $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{CN}{DN}$

**Câu 15:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn $(O)$, các đường cao $BE, CF$ cắt nhau ở $H$.

a) Chứng minh bốn điểm $B, F, E, C$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Tia $EF$ cắt tia $CB$ tại $M$. Chứng minh: $MF.ME = MB.MC$

c) Tia $AH$ cắt $BC$ tại $D$. Đường thẳng qua $B$ và song song với $AC$, cắt tia $AD$ tại $P$, cắt đoạn thẳng $AM$ tại $Q$. Chứng minh $FC$ là tia phân giác của góc $EFD$ và $BP = BQ$.

**Câu 16:** Cho tam giác ABC ba góc nhọn nội tiếp (O;R), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BFCE nội tiếp và $AO \perp EF$

b) Chứng minh: $\sin^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{BAC} = 1$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos \widehat{BAC}$

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC, chứng minh: $S = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin \widehat{BAC}$. Cho $AB = 6; AC = 8; BC = 2\sqrt{13}$ tính diện tích tam giác ABC

**Câu 17:** Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I; AF cắt tia DC tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác AHIF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $HA.HB = HI.HK$.

c) Đường tròn ngoại tiếp $\Delta$ KIF cắt AI tại E. Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định.

**Câu 18:** Cho đường tròn $(O)$ đường kính $BC$. Điểm $A$ thuộc đường tròn thỏa mãn $AB < AC$ ($A$ khác $B$, $A$ khác $C$). Lấy điểm $D$ trên cạnh $AC$ sao cho $AD = AB$. Vẽ hình vuông $BADE$. Tia $AE$ cắt $(O)$ tại $F$.

a) Tam giác $FBC$ là tam giác gì? Tại sao?

b) Chứng minh: $\widehat{FDC} = \widehat{FCD}$.

c) Vẽ tia $Bx$ là tiếp tuyến của $(O)$ tại $B$, $Bx$ cắt $CF$ tại $I$. Chứng minh ba điểm $D, E, I$ thẳng hàng.

**Câu 19:** Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB$. Kẻ tiếp tuyến $Ax$, lấy $P$ trên $Ax$ ( $AP > R$ ). Từ $P$ kẻ tiếp tuyến $PM$ với $(O)$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm $A, P, M, O$ cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM // OP$. Đường thẳng vuông góc với $AB$ tại $O$ cắt tia $BM$ tại $N$. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

c) Giả sử $AN$ cắt $OP$ tại $K$; $PM$ cắt $ON$ tại $I$; $PN$ cắt $OM$ tại $J$. Chứng minh $I, J, K$ thẳng hàng.

**Câu 20:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB$. Điểm M nằm trên nửa đường tròn (M ≠ A; B). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và $D$

a) Chứng minh rằng: tứ giác ACMO nội tiếp.

b) Gọi P là giao điểm CD và $AB$. Chứng minh: $PA.PO = PC.PM$

c) Gọi E là giao điểm của AM và BD; F là giao điểm của AC và BM. Chứng minh: Ba điểm E; F; P thẳng hàng.

**Câu 21:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ), nội tiếp đường tròn $(O)$. Tiếp tuyến tại điểm $A$ của đường tròn $(O)$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $S$. Gọi $I$ là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $O$ đến đường thẳng $BC$.

a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi $H$ và $D$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng $SO$ và $SC$. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

c) Vẽ đường cao $CE$ của tam giác $ABC$. Gọi $Q$ là trung điểm của đoạn thẳng $BE$. Đường thẳng $QD$ cắt đường thẳng $AH$ tại điểm $K$. Chứng minh $BQ.BA = BD.BI$

**Câu 22:** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $4\,\text{cm}$. Vẽ đường tròn tâm $O$ đường kính $AD$; kẻ $BM$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm $O$ ( $M$ là tiếp điểm, $M \neq A$), $BM$ cắt $CD$ tại $K$.

a) Chứng minh 4 điểm $A, B, M, O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OB \perp OK$ và $BM.MK = \dfrac{AB^2}{4}$.

c) Đường thẳng $AM$ cắt $CD$ tại $E$. Chứng minh $K$ là trung điểm của đoạn thẳng $ED$ và tính chu vi của tứ giác $ABKD$.

**Câu 23:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$, kẻ đường cao $BE$ của $\Delta ABC$. Gọi $H$ và $K$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ $E$ đến $AB$ và $BC$.

a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $BH.BA = BK.BC$.

c) Kẻ đường cao $CF$ của tam giác $ABC(F \in AB)$ và $I$ là trung điểm của $EF$. Chứng minh ba điểm $H, I, K$ thẳng hàng.

**Câu 24:** Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$, các đường cao $AD, BE, CF$ cắt nhau tại $H$. Kẻ đường kính $AQ$ của đường tròn $(O)$ cắt cạnh $BC$ tại $I$.

a) Chứng minh bốn điểm $A, F, H, E$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAQ}$.

c) Gọi $P$ là giao điểm của $AH$ và $EF$. Chứng minh $\Delta AEP$ đồng dạng với $\Delta ABI$ và $PI \,//\, HQ$.

**Câu 25:** Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MPQ (MP < MQ). Gọi I là trung điểm của dây PQ.

a. Chứng minh bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh: $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và AE //PQ.

c. Gọi K là trung điểm của $EA$. Chứng minh ba điểm O; I; K thẳng hàng.

**Câu 26:** Cho đường tròn tâm $(O)$, đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn $(O)$ lấy điểm $C$ bất kì ($C$ không trùng với $A$ và $B$). Tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ tại $A$ cắt tia $BC$ ở điểm $D$. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên đường thẳng $DO$. Tia $AH$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm $F$ (không trùng với $A$).

a) Chứng minh tứ giác $AHCD$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Chứng minh $\Delta CFH$ là tam giác vuông.

c) Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{BH.BC}{BF}$.

**Câu 27:** Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O)$, kẻ các tiếp tuyến $MA, MB$ với $(O)$ ($B, C$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính $AC$ của $(O)$. Đoạn thẳng $MC$ cắt $AB$ tại $K$ và cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai $D$. Gọi $I, H$ lần lượt là các giao điểm của $MO$ với $BD, AB$.

a) Chứng minh bốn điểm $M, A, O, B$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MO$ song song với $BC$ và $IM^2 = ID.IB$.

c) Gọi $L$ là giao điểm của $IK, HC$. Chứng minh ba điểm $M, B, L$ thẳng hàng.

**Câu 28:** Cho nửa $(O)$ đường kính $AB = 2R$, $C$ là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho $C$ khác $A$ và $AC < CB$. Điểm $D$ thuộc cung nhỏ $BC$ sao cho: $\widehat{COD} = 90^0$. Gọi $E$ là giao điểm của $AD$ và $BC$, $F$ là giao điểm của $AC$ và $BD$, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $FC.FA = FD.FB$

c) Chứng minh $IC$ là tiếp tuyến của $(O)$

d) Hỏi khi $C$ thay đổi thỏa mãn điều kiện Câu toán, $E$ thuộc đường tròn cố định nào?

**Câu 29:** Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $MN$ cố định ($MN < 2R$). Kẻ đường kính $AB$ vuông góc với dây $MN$ tại $E$ (điểm $A$ thuộc cung nhỏ $MN$). Lấy điểm $C$ thuộc dây $MN$ ($C$ khác $M$, $N$, $E$). Đường thẳng $BC$ cắt $(O;R)$ tại điểm $K$ ($K$ khác $B$).

a. Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$.

c. Gọi $I$ là giao điểm của hai đường thẳng $AK$ và $MN$; $D$ là giao điểm của hai đường thẳng $AC$ và $BI$. Chứng minh điểm $C$ cách đều ba cạnh của $\Delta DEK$.

**Câu 30:** Cho nửa đường tròn tâm $O$, bán kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến $Ax$ cùng phía với nửa đường tròn đối với $AB$. Từ điểm $M$ trên $Ax$ kẻ tiếp tuyến thứ hai $MC$ với nửa đường tròn ($C$ là tiếp điểm). $AC$ cắt $OM$ tại E; $MB$ cắt nửa đường tròn (O) tại $D$ ($D \neq B$).

a) Chứng minh rằng bốn điểm $A, M, C, O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính diện tích hình quạt $OCB$ theo $R$, trong trường hợp $\widehat{AMC} = 60^\circ$ và chứng minh $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$.

c) Gọi $H$ là hình chiếu của $C$ trên $AB$. Chứng minh rằng $MB$ đi qua trung điểm của $CH$.

**Câu 31:** Từ điểm $M$ nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ các tiếp tuyến $MP$ và $MQ$ với đường tròn $(O;R)$, ($P$ và $Q$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính $PA$. Tiếp tuyến tại $A$ với đường tròn $(O;R)$ cắt $PQ$ tại $B$.

a) Chứng minh: $AQ$ song song với $OM$.

b) Chứng minh: $PQ.PB = 4R^2$.

c) Gọi $K$ là trung điểm của $MO$. Tia $PK$ cắt $AQ$ tại $I$. Chứng minh tứ giác $MIAO$ là hình bình hành.

**Câu 32:** Cho nửa đường tròn $(O)$, đường kính $AB$. Từ điểm $M$ bất kì trên tiếp tuyến $Ax$ của nửa đường tròn $(O)$ vẽ tiếp tuyến thứ hai $MC$ ($C$ là tiếp điểm). Gọi $I$ là giao điểm của $OM$ và $AC$.

a). Chứng minh bốn điểm $A$, $M$, $C$, $O$ cùng thuộc một đường tròn.

b). Chứng minh $OI.OM = OA^2$ và $OM // BC$.

c). Gọi $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ $C$ đến $AB$, $MB$ cắt đường tròn $(O)$ tại $D$ và cắt $CH$ tại $K$. Chứng minh $K$ là trung điểm của $CH$.

**Câu 33:** Cho tứ giác ABCD có AB nhỏ hơn AD; BC nhỏ hơn CD nội tiếp đường tròn đường kính BD, AB cắt DC tại E; CB cắt DA tại F, DB cắt EF tại G.

a. Chứng minh rằng $BD \perp EF$ tại G

b. Chứng minh bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn.

c. Chứng minh rằng $BA.BE = BC.BF = BD.BG$

d. Chứng minh rằng B là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ACG$

**Câu 34:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $DB.DC = DH.DA$.

c) Đường thẳng AO cắt đường tròn tâm O tại điểm K khác điểm $A$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK và $BC$. Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng $BC$.

d) Tính $\dfrac{AH}{AD}+\dfrac{BH}{BE}+\dfrac{CH}{CF}$.

**Câu 35:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc đều nhọn. Các đường cao $AK$, $BE$ và $CF$ cắt nhau tại $H$. Gọi $I$ là trung điểm của đoạn $AH$, $N$ là trung điểm của đoạn $BC$.

a) Chứng minh bốn điểm $A$, $E$, $H$, $F$ nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh $NE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $AH$.

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

**Câu 36:** Cho đường tròn $(O)$ và dây cung $AB$. Trên tia đối của tia $AB$ lấy điểm $C$. Từ điểm chính giữa $P$ của cung lớn $AB$ kẻ đường kính $PQ$ của đường tròn (O) cắt dây $AB$ tại $D$. Tia $CP$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm $I$ ( điểm $I$ khác điểm $P$ ). Các dây $AB$ và $QI$ cắt nhau tại $K$

a) Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $CI.CP = CK.CD$ và $IC$ là phân giác góc ngoài tại đỉnh $I$ của tam giác $AIB$.

c) Giả sử ba điểm $A;B;C$ cố định. Chứng minh khi đường tròn $(O)$ thay đổi nhưng vẫn đi qua hai điểm $A$ và $B$ thì đường thẳng $QI$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 37:** Cho đường tròn $(O)$, từ điểm $A$ ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến $AB$ và $AC$ ($B$, $C$ là các tiếp điểm), $OA$ cắt $BC$ tại E.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BC$ vuông góc với $OA$ và $BA.BE = AE.BO$.

c) Gọi $I$ thuộc đoạn thẳng $BE$, đường thẳng qua $I$ và vuông góc $OI$ cắt các tia $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $D$ và $F$. Chứng minh $F$ là trung điểm của $AC$.

**Câu 38:** Cho đường tròn $(O)$, từ điểm $A$ ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến $AB$ và $AC$ ($B$, $C$ là các tiếp điểm), $OA$ cắt $BC$ tại E.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BC$ vuông góc với $OA$ và $BA.BE = AE.BO$.

c) Gọi $I$ thuộc đoạn thẳng $BE$, đường thẳng qua $I$ và vuông góc $OI$ cắt các tia $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $D$ và $F$. Chứng minh $F$ là trung điểm của $AC$.

**Câu 39:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kính $R$ và $AH$ là đường cao của tam giác $ABC$. Gọi $M, N$ lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ $H$ đến $AB$ và $AC$.

a) Chứng minh bốn điểm $A, M, H, N$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{ANM}$ và $OA$ vuông góc với $MN$.

c) Cho biết $AH = R\sqrt{2}$. Chứng minh $M, O, N$ thẳng hàng.

**Câu 40:** Cho đường tròn $(\mathrm{O;R})$ và dây $\mathrm{BC}$ cố định không đi qua tâm. Gọi $\mathrm{A}$ là một điểm bất kì trên cung lớn $\mathrm{BC}$ sao cho tam giác $\mathrm{ABC}$ nhọn $(\mathrm{AB} < \mathrm{AC})$. Kẻ các đường cao $\mathrm{AD, BE}$ của tam giác $\mathrm{ABC}$.

a) Chứng minh: Bốn điểm $\mathrm{A, E, D, B}$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Kẻ đường kính $\mathrm{AK}$ của đường tròn tâm $\mathrm{O}$. Gọi F là hình chiếu của điểm $\mathrm{B}$ trên $\mathrm{AK}$. Chứng minh rằng: $\mathrm{AB.AC = AK.AD}$ và $\mathrm{DF \perp AC}$

c) Gọi $\mathrm{M}$ là trung điểm của $\mathrm{BC}$. Chứng minh: ba điểm $\mathrm{E;F;M}$ thẳng hàng.

**Câu 41:** Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính $AB$ và $CD$ vuông góc tại $O$. Gọi $I$ là trung điểm của $OB$. Tia $CI$ cắt đường tròn $(O)$ tại $E$. Gọi $H$ là giao điểm của $AE$ và $CD$.

a) Chứng minh bốn điểm $O, I, E, D$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AH.AE = 2R^2$ và $OA = 3 \cdot OH$.

c) Gọi $K$ là hình chiếu của $O$ trên $BD$, $Q$ là giao điểm của $AD$ và $BE$. Chứng minh: $Q, K, I$ thẳng hàng.

**Câu 42:** Cho $(O)$ đường kính $AB$. Kẻ đường kính $CD$ vuông góc với $AB$. Lấy $M$ thuộc cung nhỏ $BC$, $AM$ cắt $CD$ tại $E$. Qua $D$ kẻ tiếp tuyến với $(O)$ cắt đường thẳng $BM$ tại $N$. Gọi $P$ là hình chiếu vuông góc của $B$ lên $DN$

a) Chứng minh các điểm $M, N, D, E$ cùng thuộc một đường tròn.

b ) Chứng minh $EN // CB$.

c) Chứng minh $AM.BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm $M$ trên cung nhỏ $BC$ để diện tích tam giác $BNC$ đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 43:** Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn $(AB < AC)$. Ba đường cao $AD, BE, CF$ cắt nhau tại $H$

a) Chúng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Xác định tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

b) Gọi $I$ là trung điểm của $AH$. Chứng minh $IE$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$

c) Vẽ $CI$ cắt đường tròn $(O)$ tại $M$ ($M$ khác $C$), $EF$ cắt $AD$ tại $K$. Chứng minh ba điểm $B, K, M$ thẳng hàng.

**Câu 44:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Hai đường cao $BE$ và $CF$ của tam giác $ABC$ cắt nhau tại điểm $H$. Gọi $K$ là trung điểm $BC$.

a) Chứng minh $\Delta AEF$ đồng dạng $\Delta ABC$.

b) Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng $EF$.

c) Đường phân giác góc $FHB$ cắt $AB$ và $AC$ lần lượt tại $M$ và $N$. Gọi $I$ là trung điểm của $MN$, $J$ là trung điểm của $AH$. Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm $I, J, K$ thẳng hàng.

**Câu 45:** Cho $\Delta ABC$ có 3 góc nhọn và đường cao $BE$. Gọi $H, K$ lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $E$ đến $AB, AC$.

a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp;

b) Chứng minh: $BH.BA = BK.BC$;

c) Gọi $F$ là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $C$ đến đường thẳng $AB$, $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $EF$. Chứng minh rằng $H, I, K$ thẳng hàng.

**Câu 46:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có đường cao $AD$ và đường phân giác trong $AO$ ($D$, $O$ thuộc cạnh $BC$). Kẻ $OM \perp AB$ tại $M$, $ON \perp AC$ tại $N$.

a) Chứng minh bốn điểm $O, M$, $D$, $N$ cùng nằm trên một đường tròn. (dấu cách của dấu phảy, dấu chấm viết không đúng)

b) Chứng minh: $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$.

c) Qua $O$ kẻ đường thẳng vuông góc với $BC$ cắt $MN$ tại $I$, $AI$ cắt $BC$ tại $K$. Chứng minh $K$ là trung điểm của $BC$.

**Câu 47:** Cho $(O;R)$ đường kính $AB$. Bán kính $CO$ vuông góc với $AB$, $M$ là điểm bất kì trên cung nhỏ $AC$ ( $M$ khác $A$ và $C$), $MB$ cắt $AC$ tại $H$. Gọi $K$ là hình chiếu của $H$ trên $AB$.

a) Chứng minh bốn điểm $C$, $B$, $H$, $K$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $CA$ là phân giác $\widehat{MCK}$.

c) Kẻ $Ax$ là tiếp tuyến của nửa đường tròn tại $A$. Lấy $P \in Ax$ sao cho $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$.

Chứng minh $PB$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $HK$.

**Câu 48:** Từ điểm $A$ nằm ngoài $(O)$ vẽ hai tiếp tuyến $AB, AC$ với đường tròn ($B, C$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính $CD$ của $(O)$.

a) Chứng minh $BD//AO$.

b) $AD$ cắt $(O)$ tại $E$ ($A, E, D$ theo thứ tự). Chứng minh rằng $AB^2 = AE.AD$.

c) Vẽ $BH \perp DC$ tại $H$. Gọi $I$ là trung điểm của $BH$. Chứng minh ba điểm $A, I, D$ thẳng hàng.

**Câu 49:** Cho tam giác $ABC$ nhọn với $AB > AC$. Các đường cao $BM, CN$ cắt nhau tại $H$.

a/ Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b/ Gọi $D$ là giao điểm của $AH$ và $BC$. Chứng minh $DA$ phân giác của $\widehat{MDN}$

c/ Đường thẳng qua $D$ và song song với $MN$ cắt $AB, CN$ lần lượt tại $I, J$. Chứng minh $D$ là trung điểm $IJ$

**Câu 50:** Cho tam giác $ABC$ nhọn. Đường tròn $(O)$ đường kính $BC$ cắt $AB$, $AC$ lần lượt tại $E$ và $D$; $BD$ cắt $CE$ tại $H$, $AH$ cắt $BC$ tại $I$. Từ $A$ kẻ tiếp tuyến $AM$, $AN$ của đường tròn $(O)$ ($M$, $N$ là tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AB.BE = BI.BC$, từ đó suy ra $AB.BE + AC.CD = BC^2$

c) Chứng minh ba điểm $M$, $H$, $N$ thẳng hàng.

**CHUYÊN ĐỀ 11_CÁC MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP VÀ CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP HÌNH HỌC**

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

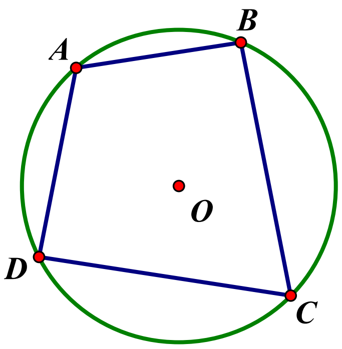
## I. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

### 1. Định nghĩa

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

### 2. Tính chất của tứ giác nội tiếp :

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng $180^0$




Trong hình vẽ, tứ giác $ABC\mathrm{D}$ nội tiếp $(O)$ nên ta có:

$$\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$$

### 3. Chứng minh tứ giác nội tiếp

- Ta chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cách đều một điểm cho trước

  VD : Để chứng minh tứ giác ABCD (hình trên) nội tiếp $(O;R)$ ta cần chứng minh :

  $OA=OB=OC=O\mathrm{D}=R$

## II. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Để chứng minh đẳng thức hình học ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1 :** Chứng minh tam giác đồng dạng
2. **Phương pháp 2 :** Dùng định lí Thales
3. **Phương pháp 3 :** Dùng tính chất đường phân giác trong tam giác
4. **Phương pháp 4 :** Sử dụng kết hợp các phương pháp trên.

## III. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

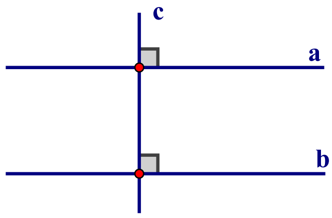
Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1 :** Sử dụng dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

- Chứng minh các góc so le trong bằng nhau
- Chứng minh các góc đồng vị bằng nhau

2. **Phương pháp 2 :** Sử dụng mối quan hệ từ vuông góc đến song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì chúng song song với nhau.




Trên hình vẽ, $a \perp c$; $\mathrm{b} \perp \mathrm{c}$ nên $a // b$

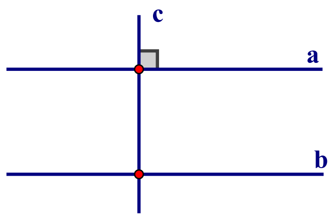
3. **Phương pháp 3 :** Sử dụng tính chất của các tứ giác đặc biệt.

   VD : Sử dụng tính chất về cạnh của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, …..

## IV. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

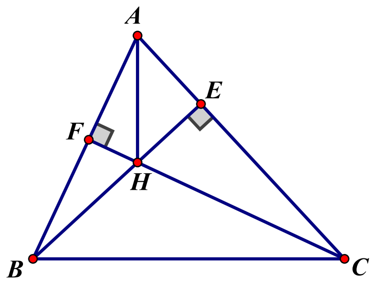
Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng các phương pháp như sau

1. **Phương pháp 1 :** Sử dụng mỗi quan hệ từ vuông góc đến song song




Trong hình vẽ, $a \perp c$; $a // b$ nên $b \perp c$

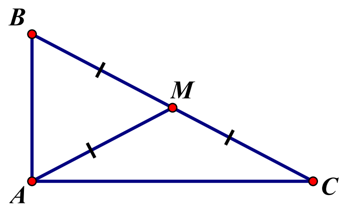
2. **Phương pháp 2** : Sử dụng tính chất ba đường cao trong tam giác




Trong hình vẽ, chứng minh được H là giao điểm của hai đường cao $BE;CF$ nên $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Do đó, $AH \perp BC$

3. **Phương pháp 3 :** Sử dụng tính chất đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông.

**Định lý :** Trong một tam giác, nếu đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác là tam giác vuông.




Trong hình vẽ, Xét tam giác $ABC$ có :

$$AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$$

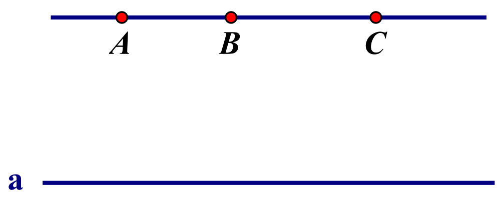
Thì tam giác $ABC$ vuông tại A.

4. Phương pháp 4 : Sử dụng tính chất về góc của các tứ giác đặc biệt như hình chữ nhật, hình vuông hoặc tính chất đường chéo của hình thoi, hình vuông.

**IV. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.**

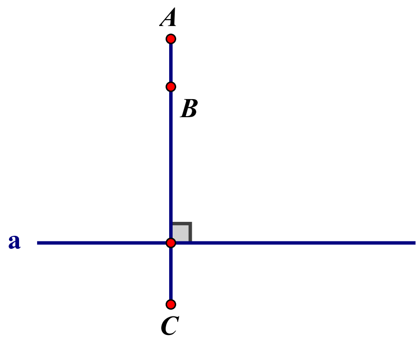
Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta có thể sử dụng các phương pháp như sau:

1. **Phương pháp 1** : Chứng minh dựa vào Tiên đề Ơcid : Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



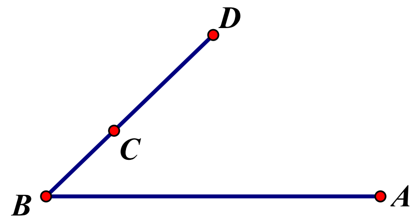

Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $AB//a; AC//a$. Từ đó, theo Tiên đề Ơclid thì đường thẳng $AB$ và $AC$ là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng.

2. **Phương pháp 2 :** Chứng minh dựa vào tính chất : Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho.



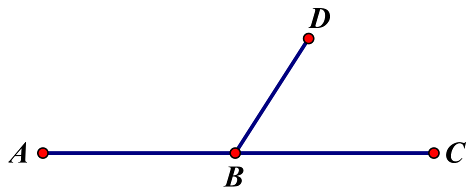

Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $AB \perp a; AC \perp a$. Từ đó, đường thẳng $AB$ và $AC$ là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng.

3. **Phương pháp 3 :** Chứng minh hai cạnh của góc trùng nhau



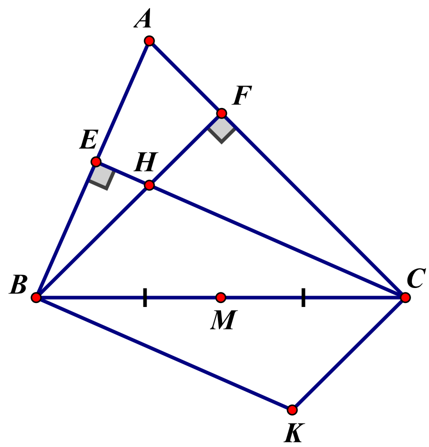

Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$. Từ đó, đường thẳng $BC$ và $B$D là hai đường thẳng trùng nhau. Do đó, ba điểm $B, C, D$ thẳng hàng.

4. **Phương pháp 4 :** Sử dụng tính chất góc bẹt.




Ví dụ : Trong hình vẽ, ta cần chứng minh : $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 180^0$. Từ đó, ta có $BA, BC$ là hai tia đối nhau. Do đó, ba điểm $B, C, A$ thẳng hàng.

5. **Phương pháp 5 :** Sử dụng tính đường chéo của các tứ giác đặc biệt.




Ví dụ : Trong bài toán trên, với dữ kiện $H$ là trực tâm tam giác $ABC$. Các đường thẳng $BK$ và $CK$ lần lượt vuông góc với $AB, AC$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh : Ba điểm $H, M, K$ thẳng hàng.

Để chứng minh bài toán trên, ta chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành nên hai đường chéo $BC, HK$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường mà $M$ là trung điểm của $BC$ nên $M$ là trung điểm của $HK$. Do đó, ba điểm $H, M, K$ thẳng hàng.

## V. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC.

Trong bài toán liên quan đến Bất đẳng thức và cực trị hình học ta thường sử dụng tính chất:

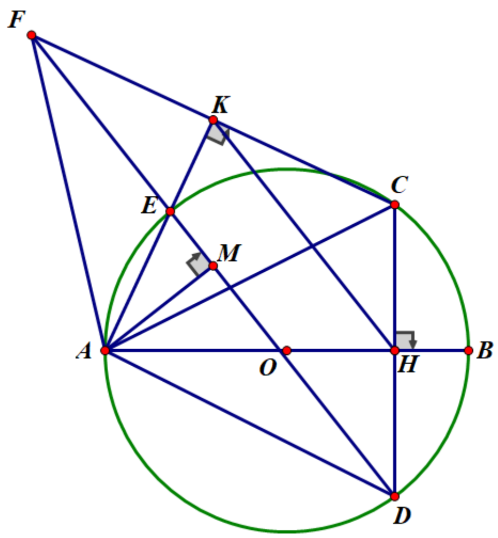
1. Với hai số dương $x, y$ ta có: $(x-y)^2 \geq 0$. Từ đó chứng minh được: $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi $x = y$

2. Bất đẳng thức Cauchy: Với hai số dương $a,b$ ta có: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ . Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi $x=y$

Ví dụ: Cho đường tròn $(O;\ R)$ đường kính $AB$ . Gọi $H$ là điểm nằm giữa $O$ và $B$ . Kẻ dây $CD$ vuông góc với $AB$ tại $H$ . Trên cung nhỏ $AC$ lấy điểm $E$ bất kì ( $E$ khác $A$ và $C$ ). Kẻ $CK$ vuông góc với đường thẳng $AE$ tại $K$ . Đường thẳng $DE$ cắt $CK$ tại $F$ .

a) C/m: Tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
b) C/m: tam giác $ACF$ là tam giác cân.
c) Khi $CD$, $AB$ cố định. Tìm vị trí của điểm $E$ để diện tích tam giác $ADF$ lớn nhất

Giải:




a) C/m: Tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.

+) Có $CK\perp AK$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AKC}=90^\circ$

+) Có $CD\perp AB$ tại H (gt) $\Rightarrow \widehat{AHC}=90^\circ$

+) Xét tứ giác và c/m nội tiếp

b) C/m: tam giác $ACF$ là tam giác cân.

+) C/m: $KH\ //\ EF$

+) Vận dụng tính chất đường trung bình của tam giác $CDF$ c/m: $K$ là trung điểm của $EC$

+) Xét tam giác lập luận $AK$ là đường cao đồng thời là đường trung tuyến để suy ra tam giác cân

c) Khi $CD$, $AB$ cố định. Tìm vị trí của điểm $E$ để diện tích tam giác $ADF$ lớn nhất

+) $AB$ là đường trung trực của $CD$ nên $AC = AD$ mà $AC = AF$ do tam giác $ACF$ cân

Suy ra $AD = AF$ . Từ đó, ta có $\Delta ADF$ cân tại $A$

+) Kẻ $AM$ vuông góc với $DF$ tại $M$

C/m: $\Delta AMF = \Delta AMD$ suy ra $S_{AFD} = 2S_{AMD}$ (1)

+) Áp dụng BĐT Cauchy cho $AM^2$ và $MD^2$ có:

$$AM^2 + MD^2 \geq 2\sqrt{AM^2 . MD^2}$$

$$AM.MD \leq \frac{AM^2 + MD^2}{2}$$

Mà $AM^2 + MD^2 = AD^2$ (PTG $\Delta AMD$)

$$\Rightarrow AM.MD \leq \frac{AD^2}{2} \quad (2)$$

Dấu bằng xảy ra khi: $AM = MD$

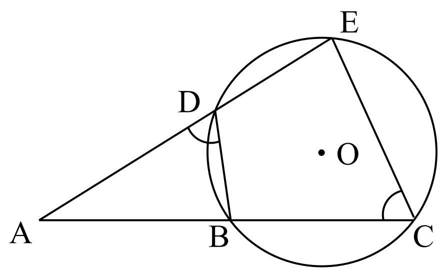
+) Từ (1), (2) $\Rightarrow S_{AFD}$ max khi $AM = MD$ hay tam giác $AMD$ cân tại $M$

$\Rightarrow \widehat{ADM} = 45^0$ hay $\widehat{ADE} = 45^0$

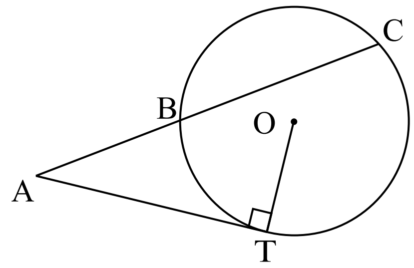
Vậy diện tích tam giác $AFD$ lớn nhất khi $E$ nằm trên cung $AC$ sao cho góc $\widehat{ADE} = 45^0$

## NHỮNG MÔ HÌNH THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ TUYỂN SINH 9 LÊN 10

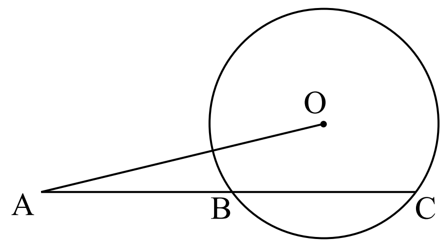
**Bài toán 1:** Biết $ABC$, $ADE$ là hai cát tuyến của $(O)$. Chứng minh: $AB.AC = AD.AE$



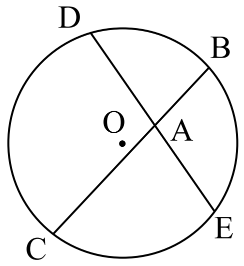

**Bài toán 2:** $ABC$ là cát tuyến của $(O)$, $AT$ là tiếp tuyến. Chứng minh: $AT^2 = AB.AC$



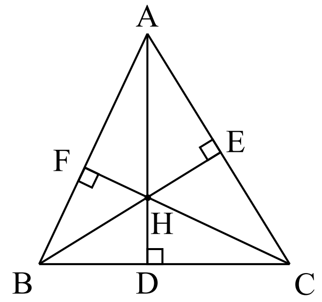

**Bài toán 3:** Cho $(O;\ R)$, $ABC$ là cát tuyến, $OA = d$. Chứng minh $AB.AC = d^2 - R^2$



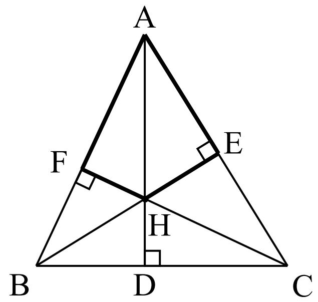
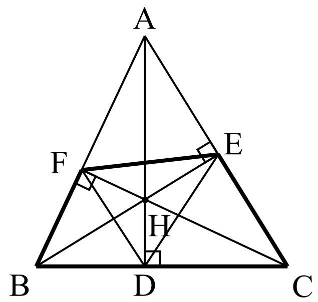

**Bài toán 4:** Biết $BC$, $DE$ là hai dây cung cắt nhau tại $A$. Chứng minh: $AB.AC = AD.AE$

| | |
|---|---|
| |  |

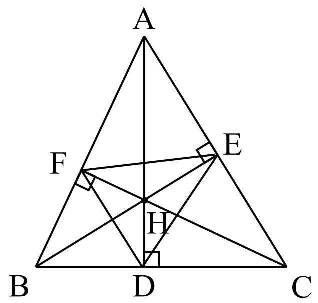
**Bài toán 5:** Cho $\Delta ABC$ nhọn; $AD$, $BE$, $CF$ là 3 đường cao cắt nhau tại $H$.

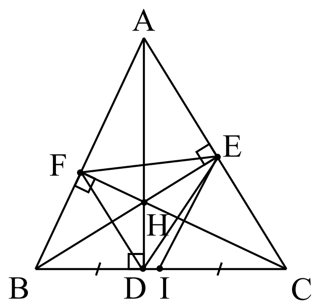
| | |
|---|---|
| 1) $DB.DC = DH.DA$<br>2) $HA.HD = HB.HE = HC.HF$<br>3) $AF.AB = AH.AD = AE.AC$ |  |

**Bài toán 6:** Cho $\Delta ABC$ nhọn; $AD$, $BE$, $CF$ là 3 đường cao cắt nhau tại $H$.

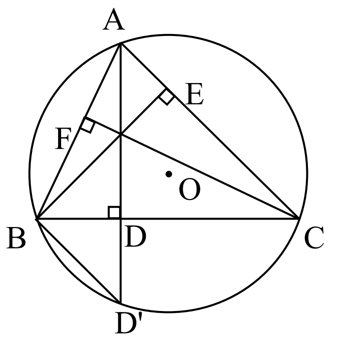
| | |
|---|---|
| 1) Chứng minh: $AEHF$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính. |  |
| 2) Chứng minh: $BCEF$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính. |  |

**Bài toán 7:** Cho ΔABC nhọn; $AD$, $BE$, $CF$ là 3 đường cao cắt nhau tại H, I là trung điểm BC.

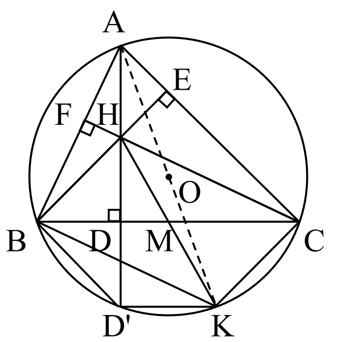
| | |
|---|---|
| Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF |  |

| | |
|---|---|
| Chứng minh: D, F, E, I $\in$ đường tròn |   |

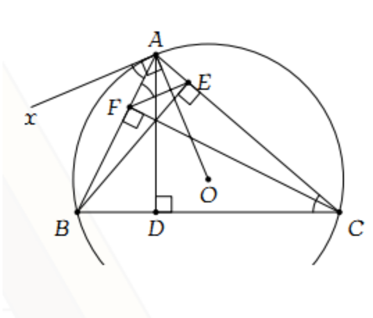
**Bài toán 8:** $\Delta$ABC nhọn nội tiếp (O); AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H, AH cắt (O) tại D′. Chứng minh: D′ đối xứng với H qua BC.

| | |
|---|---|
| |   |

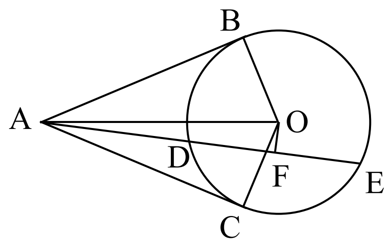
**Bài toán 9:** $\Delta$ABC nhọn nội tiếp (O); AD, BE, CF là 3 đường cao cắt nhau tại H. AH cắt (O) tại D′. Chứng minh: BD′KC là hình thang cân

| | |
|---|---|
| |   |

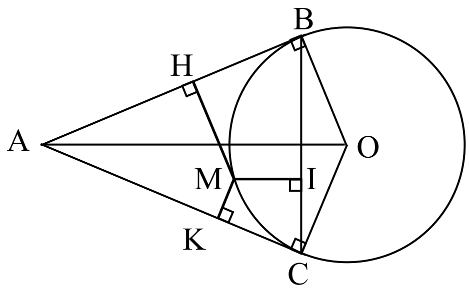
**Bài toán 10:** $\Delta$ABC nhọn nội tiếp (O); AD, BE, CF là 3 đường cao. Chứng minh: OA $\perp$ EF

| | |
|---|---|
| |   |

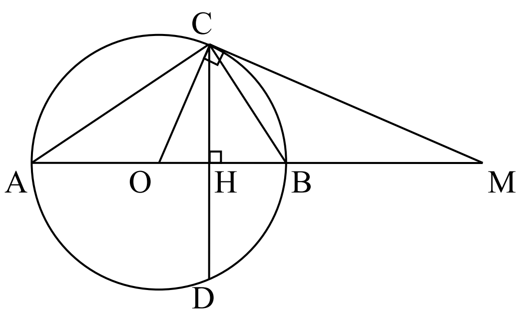
**Bài toán 11:** $AB$, $AC$ là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $A, ADE$ là cát tuyến. $F$ là trung điểm dây $DE$. Chứng minh: $A$, $B$, $O$, $C$, $F \in$ đường tròn.



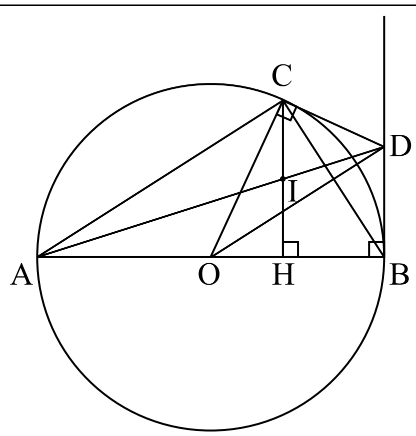

**Bài toán 12.** $AB$, $AC$ là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A. M $\in \overset{\frown}{BC}$ nhỏ. $H$, $I$, $K$ là hình chiếu của $M$ trên $AB$, $BC$, $CA$. Chứng minh: $MI^2 = MH.MK$




**Bài toán 13:** Cho (O), đường kính AB, dây CD $\perp$ AB tại H. Tiếp tuyến tại C cắt AB tại M. Chứng minh: $BM.AH = BH.AM$




**Bài toán 14:** Cho (O; R), đường kính AB, C $\in$ (O), CH $\perp$ AB tại H. Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại D. Chứng minh: AD qua trung điểm I của CH.



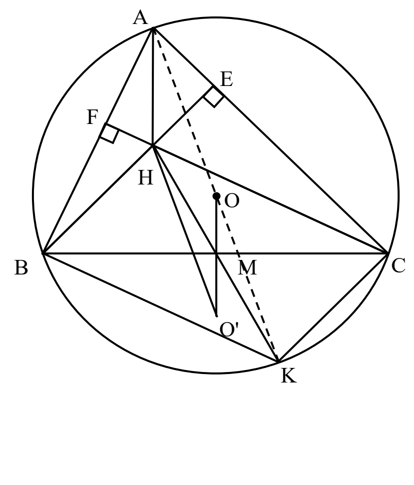

**Bài toán 15:** $\Delta ABC$ nhọn nội tiếp $(O)$; $AD$, $BE$, $CF$ là 3 đường cao cắt nhau tại $H$, gọi M là trung điểm BC. Vẽ đường kính $AK$.

a) Chứng minh: $BHCK$ là hình bình hành

b) M, H, K thẳng hàng. suy ra M là trung điểm Hk.

c) OM là đường trung bình của ΔAHK. suy ra AH = 2OM

d) Nếu O′ đối xứng với O qua BC thì AHO′O là hình bình hành ⇒ O′H=OA=R. Trong trường hợp khi $\left(\mathbf{BC = R\sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^0}\right)$ thì AHO′O là hình thoi




## B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

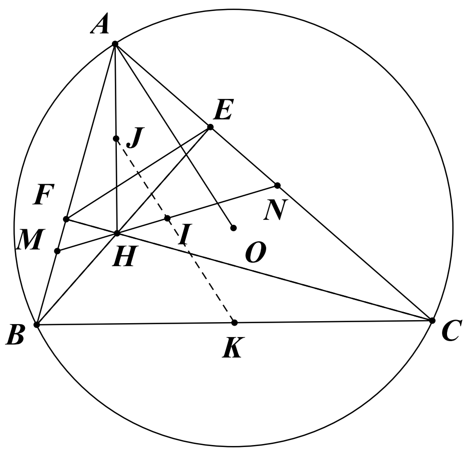
**Câu 1:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Hai đường cao $BE$ và $CF$ của tam giác $ABC$ cắt nhau tại điểm $H$. Gọi $K$ là trung điểm $BC$.

a) Chứng minh $\Delta AEF$ đồng dạng $\Delta ABC$.

b) Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng $EF$.

c) Đường phân giác góc $FHB$ cắt $AB$ và $AC$ lần lượt tại $M$ và $N$. Gọi $I$ là trung điểm của $MN$, $J$ là trung điểm của $AH$. Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm $I, J, K$ thẳng hàng.

**Lời giải**




***a) Vẽ đúng hình đến ý 1)***

$BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0$

$CF \perp AB \Rightarrow \widehat{CFB} = 90^0$

⇒ Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

⇒ $\Delta AEF$ đồng dạng $\Delta ABC$.

b) ***Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng***

Tứ giác BCEF nội tiếp ⇒ $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

$\Delta OAC$ cân tại O ⇒ $\widehat{EAO} = \dfrac{180^0 - \widehat{AOC}}{2}$

$$\widehat{ABC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}\Rightarrow\frac{180^0-\widehat{AOC}}{2}=90^0-\widehat{ABC}$$

$\Rightarrow\ \widehat{AEF}+\widehat{EAO}=90^0\Rightarrow\ AO\perp EF$

c) ***Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và $I, J, K$ thẳng hàng.***

Chứng minh $\Delta AMN$ cân tại $A$ vì $\widehat{AMN}=\widehat{MBH}+\widehat{MHB}=\widehat{NCH}+\widehat{NHC}=\widehat{ANM}\ \Rightarrow\ AI\perp MN$

$\widehat{AFH}=\widehat{AIH}=90^0\ \Rightarrow$ Tứ giác $AFHI$ là tứ giác nội tiếp.

Có $\widehat{MAH}=\widehat{NAO}\Rightarrow\widehat{IAH}=\widehat{IAO}\Rightarrow IJ\parallel AO$ suy ra $IJ$ trung trực $EF$

Có $JE=JF, KE=KF\Rightarrow\ KI$ trung trực $EF\ \Rightarrow I,J,K$ thẳng hàng.

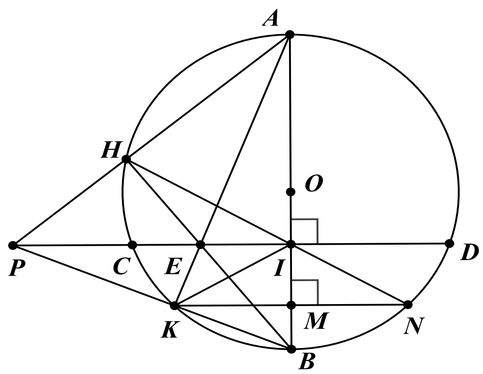
**Câu 2:** Cho đường tròn $(O)$, dây $CD$ cố định. Gọi $B$ là điểm chính giữa cung nhỏ $CD$, kẻ đường kính $AB$ cắt $CD$ tại $I$. Lấy điểm $H$ bất kỳ trên cung lớn $CD$, $HB$ cắt $CD$ tại $E$. Đường thẳng $AH$ cắt đường thẳng $CD$ tại $P$.

a). Chứng minh: Tứ giác $PHIB$ nội tiếp.

b). Chứng minh: $AH.AP=AI.AB$.

c). Gọi $K$ là giao điểm của đường thẳng $AE$ và $BP$. Kẻ $KM\perp AB$ cắt $AB$ tại $M$, cắt đường tròn $(O)$ tại $N$. Chứng minh $N,I,H$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a). Chứng minh: Tứ giác $PHIB$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{AHB}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow\widehat{PHB}=90°$ (kề bù với $\widehat{AHB}=90°$); $\widehat{PIB}=90°$ (GT) $\Rightarrow H,I$ cùng thuộc đường tròn đường kính $PB\Rightarrow$ tứ giác $PHIB$ nội tiếp đường tròn đường kính $PB$.

b). Chứng minh: $AH.AP=AI.AB$.

Xét $\Delta AHI$ và $\Delta ABP$ có:

$\widehat{HAI}$ chung;

$\widehat{AHI}=\widehat{ABP}$ (cùng bù với $\widehat{PHI}$ do tứ giác $PHIB$ nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta AHI \# \Delta ABP(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AB}{AP} \Leftrightarrow AH.AP = AI.AB$.

c). Gọi $K$ là giao điểm của đường thẳng $AE$ và $BP$. Kẻ $KM \perp AB$ cắt $AB$ tại $M$, cắt đường tròn $(O)$ tại $N$. Chứng minh $N, I, H$ thẳng hàng.

Tứ giác $PHIB$ nội tiếp nên $\widehat{HIP} = \widehat{HBP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HP}$) (1);

Tam giác $ABP$ có hai đường cao $PI, BH$ cắt nhau tại $E \Rightarrow E$ là trực tâm của $\Delta ABP \Rightarrow AE \perp BP$ hay $AK \perp BP \Rightarrow \widehat{EKB} = 90°$, mà $\widehat{EIB} = 90°$ (GT)$\Rightarrow$ tứ giác $BKEI$ nội tiếp đường tròn đường kính $BE$ $\Rightarrow \widehat{EIK} = \widehat{HBP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EK}$) (2);

Mà $\widehat{EKB} = 90° \Rightarrow K \in (O)$, lại có $AB \perp KN$ tại $M$ $\Rightarrow MK = MN$ (quan hệ vuông góc đường kính và dây) $\Rightarrow \Delta IMK = \Delta IMN(c.g.c)$ $\Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{MIN} \Rightarrow 90° - \widehat{MIK} = 90° - \widehat{MIN}$

$\Rightarrow \widehat{EIK} = \widehat{DIN}$ (3);

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{HIP} = \widehat{DIN}\left(= \widehat{HBP} = \widehat{EIK}\right) \Rightarrow \widehat{HIP} + \widehat{PIN} = \widehat{DIN} + \widehat{PIN} = \widehat{PID} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{HIN} = 180° \Rightarrow H, I, N$ thẳng hàng.

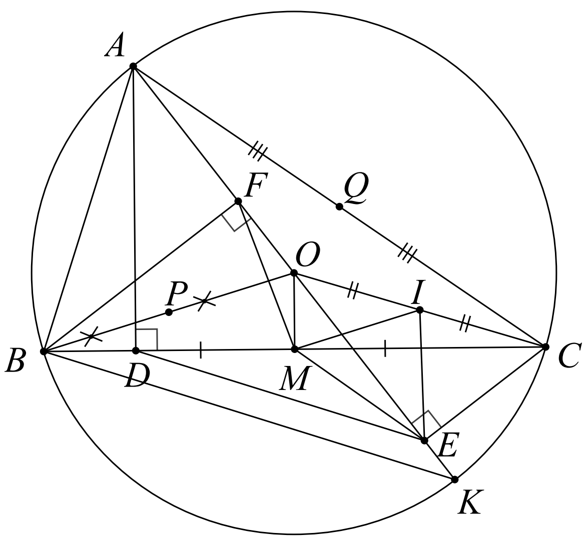
**Câu 3:** Cho đường tròn tâm $(O)$ và dây $BC$ cố định không đi qua $O$. Trên cung lớn $BC$ lấy điểm $A$ sao cho $AB < AC$. Kẻ đường kính $AK, E$ là hình chiếu của $C$ trên $AK$. $M$ là trung điểm của $BC$.

a) Chứng minh bốn $C, E, M, O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ $AD \perp BC$ tại $D$. Chứng minh $AD.AK = AB.AC$ và $\Delta MDE$ cân.

c) Gọi $F$ là hình chiếu của $B$ trên $AK$. Chứng minh khi $A$ di chuyển trên cung lớn $BC$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta DEF$ là 1 điểm cố định.

**Lời giải**




a) Chứng minh bốn $C, E, M, O$ cùng thuộc một đường tròn.

$\Delta OBC$ cân tại $O$, $M$ là trung điểm của $BC$ nên $OM$ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao. Suy ra $OM \perp BC \Rightarrow \widehat{OMC} = 90°$

Theo Câu ra, $E$ là hình chiếu của $C$ trên $AK$ nên $CE \perp AK$ $\Rightarrow CE \perp EO \Rightarrow \widehat{OEC} = 90^o$.
Gọi $I$ là trung điểm của $OC$
Dễ dàng chứng minh $IO = IE = IM = IC$
Do đó $C$, $E$, $M$, $O$ cùng thuộc một đường tròn $(I)$.

b) ***Chứng minh** $AD.AK = AB.AC$
Xét $\Delta DBA$ và $\Delta CKA$ có

+) $\widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90^\circ$

+) $\widehat{ABD} = \widehat{AKC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung $AC$)
Nên $\Delta DBA \backsim \Delta CKA$

Do đó ta có: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AK}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)
Hay $AD.AK = AB.AC$ (đpcm).
***Chứng minh** $\Delta MDE$ cân.

Theo Câu ra $\begin{cases} AD \perp BC \\ AE \perp EC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ADC} = 90^\circ \\ \widehat{AEC} = 90^\circ \end{cases}$

Gọi $Q$ là trung điểm của $AC$
Dễ dàng chứng minh $QA = QC = QD = QE$
Suy ra bốn điểm $A, C, D, E$ cùng thuộc đường tròn $(Q)$

Suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung $CE$) $(1)$

Xét $(O)$ ta có: $\widehat{CBK} = \widehat{CAE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung $CK$ ) $(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBK} = \widehat{CDE}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị (3)
Suy ra $DE // BK$

Xét đường tròn $(I)$ có: $\widehat{EMC} = \widehat{EOC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$). (4)

Xét đường tròn $(O)$ có: $\widehat{KBC} = \dfrac{1}{2}\widehat{KOC}$ (Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{KC}$). (5)

Từ (3); (4) và (5) suy ra: $\widehat{EMC} = 2\widehat{CDE}$.

$\Delta MDE$ có $\widehat{EMC} = \widehat{MDE} + \widehat{MED}$ (góc ngoài của tam giác) mà $\widehat{EMC} = 2\widehat{MDE}$

Nên $\widehat{MDE} = \widehat{MED}$. Do đó, $\Delta MDE$ cân tại $M$.
c) Chứng minh khi $A$ di chuyển trên cung lớn $BC$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta DEF$ là 1 điểm cố định.
Gọi $P$ là trung điểm của $BO$
Dễ dàng chứng minh được $PB = PO = PF = PM$
Suy ra bốn điểm $O, M, B, F$ cùng thuộc đường tròn $(P)$

Nên $\widehat{OBM} = \widehat{MFO}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MO}$).

Xét đường tròn $(I)$ có: $\widehat{MEO} = \widehat{MCO}$ $CK$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MO}$).

Mà $\widehat{OBM} = \widehat{OCM}$ ($\Delta OCB$ cân tại $O$.

Do đó $\widehat{MFO} = \widehat{MEO}$ $\Rightarrow \Delta EMF$ cân tại $M \Rightarrow ME = MF$

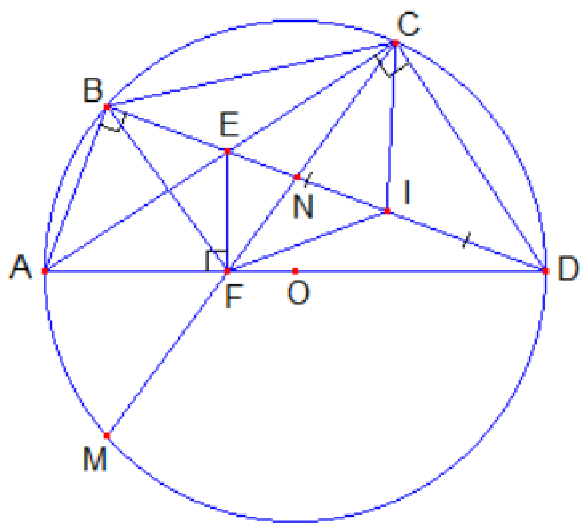
Mà $ME = MD$ (Tam giác $MDE$ cân tại $M$ ).
Suy ra: $MD = ME = ME$.
Suy ra $M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEF$ .
Mà $M$ là trung điểm của $BC$ nên $M$ là điểm cố định.
Vậy khi $A$ di chuyển trên cung lớn $BC$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEF$ là một điểm cố định.

**Câu 4:** Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $O$ đường kính $AD.$ Hai đường chéo $AC, BD$ cắt nhau tại $E.$ Từ $E$ kẻ $EF$ vuông góc với $AD$ ( $F \in AD$). Đường thẳng $CF$ cắt đường tròn tại điểm thứ hai là $M.$ Giao điểm của $BD$ và $CF$ là $N.$ Chứng minh:
a) $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

b) $FA$ là tia phân giác của $\widehat{BFM}$ .

c) $BE.DN = EN.BD$ .

**Lời giải**




a) $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ ( góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
Nên $\triangle ECD$ vuông tại $C$
Gọi $I$ là trung điểm của $ED$
Ta có $CI$ là đường trung tuyến hạ xuống cạnh huyền $ED$

Nên $CI = IE = ID = \dfrac{1}{2}ED$ (1)

Tương tự trong tam giác $EFD$ vuông tại $F$ , ta có

$FI = IE = ID = \dfrac{1}{2}ED$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CI = FI = IE = ID$
Hay tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm $I$ đường kính $ED$
b) $FA$ là tia phân giác của $\widehat{BFM}$

Ta có $CEFD$ nội tiếp=> $\widehat{CED} = \widehat{CFD}$ ( hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$ )

Chứng minh tương tự câu a) ta có $ABEF$ là tứ giác nội tiếp

=> $\widehat{BEA} = \widehat{BFA}$ ( hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{AB}$ )

Mà $\widehat{BEA} = \widehat{CED}$ ( đối đỉnh)

$\widehat{AFM} = \widehat{CFD}$ ( đối đỉnh)

Do đó $\widehat{BFA} = \widehat{AFM}$

Hay $FA$ là tia phân giác $\widehat{BFM}$

c) $BE.DN = EN.BD$.

Ta có $\widehat{EFC} = \widehat{EDC}$ ( hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{EC}$ )

$\widehat{EFB} = \widehat{BAE}$ ( hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{EB}$ )

Mà $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \widehat{EDC}$ ( hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{BC}$ )

Suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{EFB}$ hay $FE$ là tia phân giác của $\widehat{BFC}$

Trong $\triangle BFN$ có $FE$ là phân giác trong tại đỉnh $F$ $\Rightarrow \dfrac{BE}{EN} = \dfrac{FB}{FN}$

Mà $EF \perp FD$ $\Rightarrow FD$ là phân giác ngoài tại đỉnh $F \Rightarrow \dfrac{BD}{DN} = \dfrac{FB}{FN}$

Suy ra $\dfrac{BE}{EN} = \dfrac{BD}{DN} \Rightarrow BE.DN = EN.BD$

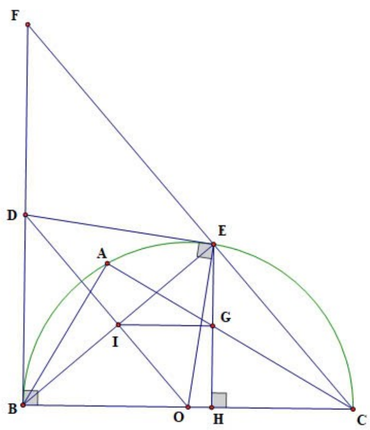
**Câu 5:** Trên nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính $BC$, lấy điểm $A$ sao cho $BA = R$.

a) Chứng minh tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và tính số đo các góc $B, C$ của tam giác vuông $ABC$

b) Qua $B$ kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn $(O)$, nó cắt tia $CA$ tại $D$. Qua $D$ kẻ tiếp tuyến $DE$ với nửa đường tròn $(O)$ ($E$ là tiếp điểm). Gọi $I$ là giao điểm của $OD$ và $BE$. Chứng minh rằng $OD \perp BE$ và $DI.DO = DA.DC$

c) Kẻ $EH$ vuông góc với $BC$ tại $H$. EH cắt $CD$ tại $G$. Chứng minh $IG$ song song với $BC$.

**Lời giải**



a) Ta có OA = R, BC = 2R

$\Rightarrow OA = OB = OC = \dfrac{BC}{2} = R$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Ta có $\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 30^0$

$\widehat{B} = 90^0 - 30^0 = 60^0$

b) Vì DB, DE là 2 tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow DB = DE$ và $DI$ là phân giác $\widehat{BDE}$

$\Rightarrow \Delta BDI = \Delta EDI \Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DIE}$ mà 2 góc này ở vị trí kề bù

$\Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DIE} = 90^0$

OD là đường trung trực BE $\Rightarrow OD \perp BE$

$\Delta DBO$ vuông tại B, BI là đường cao

$\sin \widehat{DBI} = \dfrac{DI}{BD}$; $\sin \widehat{DOB} = \dfrac{DB}{OD}$ mà $\widehat{DBI} = \widehat{DOB}$ (cùng cộng $\widehat{IBO}$ 1 góc $90^0$)

$\Rightarrow DI.DO = DB^2$ (1)

$\Delta DBC$ vuông tại B, BA là đường cao. CMTT ta có

$DB^2 = DA.DC$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow DI.DO = DA.DC$

c) Kéo dài CE cắt BD tại F. Vì $\widehat{BEC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BEF} = 90^0$ (tính chất kề bù)

mà DB = DE (chứng minh trên)

suy ra ED là đường trung tuyến $\Delta FEB$ vuông tại E $\Rightarrow BD = DF$

Vì $GH // BD$ (cùng $\perp BC$) $\Rightarrow \dfrac{GH}{BD} = \dfrac{GC}{DC} (Ta-let)(3)$

Vì GE // DF (cùng $\perp BC$) $\Rightarrow \dfrac{GE}{DF} = \dfrac{GC}{DC}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{GH}{BD} = \dfrac{GE}{DF}$ $do\, BD = DF\,(cmt) \Rightarrow GH = GE$

Mà IB = IC (OD trung trực BE)

Do đó IG là đường trung bình tam giác EHB

$\Rightarrow IG // BH \Rightarrow IG // BC\,(dpcm)$

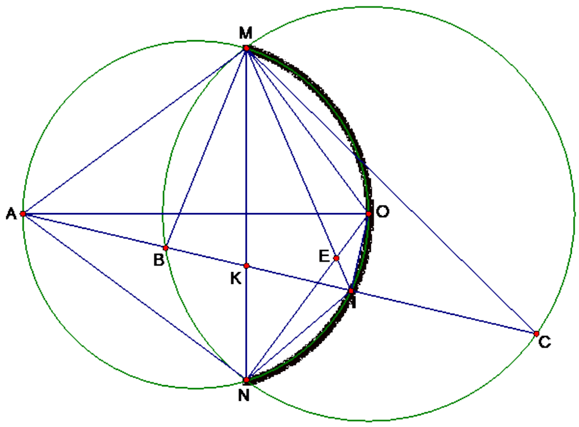
**Câu 6:** Cho đường tròn (O) cố định. Từ một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn ( M;N là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của dây B**C.**

a). Chứng minh rằng: AMON là tứ giác nội tiếp.

b). Gọi K là giao điểm của MN và $BC$. Chứng minh rằng: $AK.AI = AB.AC$

c). Xác định vị trí của cát tuyến ABC để $IM = 2IN$.

**Lời giải**




a) Tứ giác AMON nội tiếp

Vì AM là tiếp tuyến nên AM ⊥ MO

Do đó $\Delta AMO$ vuông tại M nên nội tiếp trong đường tròn đường kính AO

Chứng minh tương tự ta được $\Delta ANO$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AO

Do đó 4 điểm A, O, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO

Vậy tứ giác AMON nội tiếp

b) Chứng minh I thuộc đường tròn đường kính AO

Chứng minh $\Delta \mathrm{AKM} \backsim \Delta \mathrm{AMI}(gg) \Rightarrow \dfrac{AK}{AM} = \dfrac{AM}{AI} \Rightarrow AK.AI = AM^2$ $(1)$

Chứng minh $\Delta \mathrm{ABM} \backsim \Delta \mathrm{AMC}(gg) \Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow AB.AC = AM^2$ $(2)$

Từ (1) và (2) suy ra AK.AI = AB.AC

c) Chứng minh $\Delta \mathrm{KIN} \backsim \Delta \mathrm{KMA}(gg) \Rightarrow \dfrac{IN}{MA} = \dfrac{KN}{KA} \Rightarrow IN = \dfrac{KN.MA}{KA}$

Chứng minh $\Delta \mathrm{KIM} \backsim \Delta \mathrm{KNA}(gg) \Rightarrow \dfrac{IM}{NA} = \dfrac{KM}{KA} \Rightarrow IM = \dfrac{KM.NA}{KA} = \dfrac{KM.MA}{KA}$ (vì NA=MA)

Do đó $IM = 2IN \Leftrightarrow \dfrac{IN}{IM} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{KN.MA}{KA}}{\dfrac{KM.MA}{KA}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{KN}{KM} = \dfrac{1}{2}$

Vậy IM=2.IN khi cát tuyến ABC cắt MN tại K với $\dfrac{KN}{KM} = \dfrac{1}{2}$

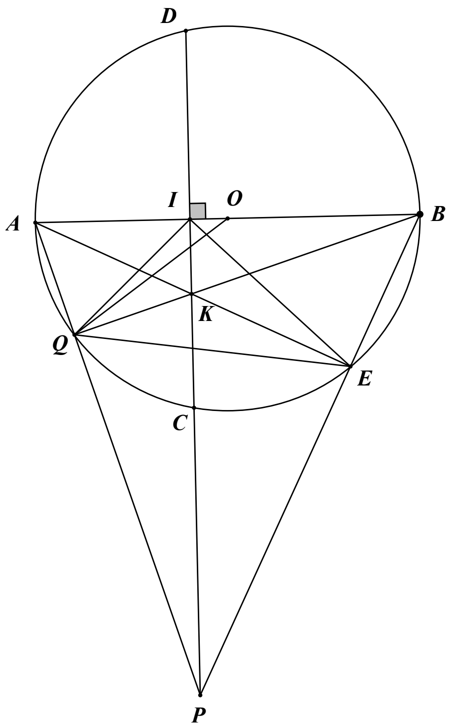
**Câu 7:** Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính $AB$ vuông góc với dây $CD$ tại điểm $I$ ($I$ nằm giữa $A$ và $O$). Lấy điểm $E$ bất kì trên cung nhỏ $BC$ ($E$ khác $B$ và $C$). $AE$ cắt $CD$ tại $K$.

a) Chứng minh bốn điểm $K, E, B, I$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AK.AE = AI.AB$.

c) Gọi $P$ là giao điểm của tia $BE$ và tia $DC$, $Q$ là giao điểm của $AP$ và $BK$. Chứng minh $IK$ là phân giác của $\widehat{EIQ}$. Chứng minh $OQ$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQE$.

**Lời giải**




**a) Chứng minh bốn điểm $K, E, B, I$ cùng thuộc một đường tròn.**

Xét $(O;R)$ có: $\widehat{AEB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{KEB} = 90°$

đường kính $AB$ vuông góc với dây $CD$ tại điểm $I \Rightarrow \widehat{KIB} = 90°$

Xét $\Delta KEB$ vuông tại $E$ có cạnh huyền $KB$ suy ra $K, E, B$ thuộc đường tròn đường kính $KB$ (1)

Xét $\Delta KIB$ vuông tại $I$ có cạnh huyền $KB$ suy ra $K, I, B$ thuộc đường tròn đường kính $KB$ (2)

Hay bốn điểm $K, E, B, I$ cùng thuộc một đường tròn.

**b) Chứng minh $AK.AE = AI.AB$.**

Xét $\Delta AKI$ và $\Delta ABE$, ta có: $\widehat{A}$ là góc chung và $\widehat{AIK} = \widehat{AEB} = 90° \Rightarrow \Delta AKI \backsim \Delta ABE$ $(g-g)$

$$\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AI}{AE} \Rightarrow AK.AE = AI.AB$$ (đpcm)

**c) Gọi $P$ là giao điểm của tia $BE$ và tia $DC$, $Q$ là giao điểm của $AP$ và $BK$. Chứng minh $IK$ là phân giác của $\widehat{EIQ}$. Chứng minh $OQ$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQE$.**

*** Chứng minh $IK$ là phân giác của $\widehat{EIQ}$.**

Xét $\Delta APB$ có: $PI \perp AB\left(I \in AB\right)$; $AE \perp PB\left(E \in PB\right)$; $PI \cap AE \equiv \left\{K\right\}$

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của $\Delta APB \Rightarrow PQ \perp AP\left(Q \in AP\right) \Rightarrow \widehat{AQB} = 90°$ hay $\widehat{AQK} = 90°$

Đường kính $AB$ vuông góc với dây $CD$ tại điểm $I \Rightarrow \widehat{AIK} = 90°$

Chứng minh được bốn điểm $A, I, Q, K$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AK$ suy ra $AIKQ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QAK} = \widehat{QIK}$ (hai góc nt cùng chắn $\overset{\frown}{QK}$)

Ta có: $KEBI$ là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{KBE}$ (hai góc nt cùng chắn $\overset{\frown}{EK}$)

Lại có: $\widehat{QAK} = \widehat{KBE}$ (hai góc nt cùng chắn cung $\overset{\frown}{QE}$)

$\Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{KIQ}$ hay $IK$ là phân giác của $\widehat{EIQ}$ (đpcm)

***Chứng minh $OQ$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQE$.**

Ta có: $\widehat{AQB} = 90° \Rightarrow Q \in \left(O; R\right)$

Xét $\Delta OQB$, ta có:

$OQ = OB = R$

$\Rightarrow \Delta OQB$ là tam giác cân tại $O$

$\Rightarrow \widehat{OQB} = \widehat{OBQ}$ hay $\widehat{OQK} = \widehat{OBQ}$ $\left(1\right)$

Xét $\Delta IBK$ và $\Delta QPK$, ta có:

$\widehat{IKB} = \widehat{QKP}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{KQP} = \widehat{KIB} = 90°$

$\Rightarrow \Delta IBK \backsim \Delta QPK$ (g-g)

$\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{QPK}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{OBK} = \widehat{QPK}$ $\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra: $\widehat{OQK} = \widehat{QPK}$ $\left(*\right)$

Ta có: $\widehat{BQE} = \widehat{BAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$) hay $\widehat{KQE} = \widehat{IAK}$ $\left(3\right)$

Xét $\Delta IAK$ và $\Delta EPK$, ta có:

$\widehat{IKA} = \widehat{EKP}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{KEP} = \widehat{KIA} = 90°$

$\Rightarrow \Delta IAK$ ” $\Delta EPK$ (g-g)

$\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{EPK}$ (hai góc tương ứng) $(4)$

Từ $(3)$ và $(4)$ suy ra: $\widehat{KQE} = \widehat{EPK}$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có: $\widehat{OQK} + \widehat{KQE} = \widehat{QPK} + \widehat{EPK} \Rightarrow \widehat{OQE} = \widehat{QPE}$

Lại có: $\Delta QEP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QPE} = \dfrac{1}{2} sd\overset{\frown}{QE}$ (tc góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{OQE} = \dfrac{1}{2} sd\overset{\frown}{QE}$

$\Rightarrow OQ$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQE$ (đpcm).

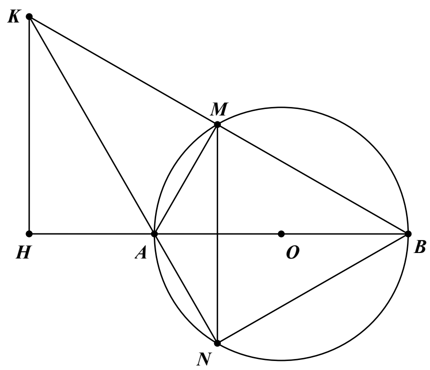
**Câu 8:** Cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$. Dây cung $MN$ vuông góc với $AB$, ($AM < BM$). Hai đường thẳng $BM$ và $NA$ cắt nhau tại $K$. Gọi $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ $K$ đến đường thẳng $AB$.

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB \, . \, HK = AN \, . \, HB$.

c) Chứng minh $HM$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.

**Lời giải**




a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

+) Có: $\widehat{AHK} = 90^\circ$ (vì $KH \perp AB$)

$\Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại $H \Rightarrow$ 3 điểm $A;H;K$ nằm trên đường tròn đường kính $AK$

+)Xét $(O)$ có:

$\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB}$)

$\Rightarrow \Delta AMK$ vuông tại $M \Rightarrow$ 3 điểm $A;M;K$ nằm trên đường tròn đường kính $AK$

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn đường kính $AK$.

b) Chứng minh rằng: $NB\,.\,HK = AN\,.\,HB$.

Xét $\Delta ANB$ và $\Delta KHB$ có:

+) $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{KHB} = 90^\circ$;

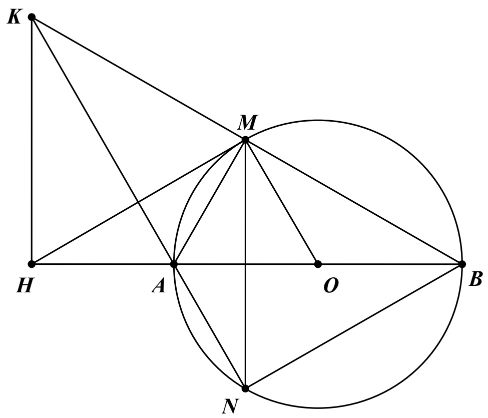
+) Xét $\Delta OMN$ cân tại O, có OA là đường cao => OA là đường phân giác của góc MON.

$\Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{NOA} \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{KBH}$ (Góc nội tiếp bằng ½ góc ở tâm)

Suy ra $\Delta ANB \backsim \Delta KHB\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{NB} = \dfrac{KH}{HB} \Rightarrow NB\,.\,HK = AN\,.\,HB$.

c) Chứng minh $HM$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.




+) Ta có $HM$ giao với đường tròn $(O)$ tại $M$, ta phải chứng minh $HM \perp OM$. Thật vậy:

Tứ giác $AHKM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HK}$);

$\widehat{HAK} = \widehat{NAB}$ (hai góc đối đỉnh);

+) Theo phần b) $\Delta OMN$ cân tại O, có OA là đường cao => OA là đường trung trực của MN => AB là trung trực của MN => MB = NM => $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{NB}$ => $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$

+) $\widehat{MAB} = \widehat{OMA}$ ($\Delta OAM$ cân tại $O$);

$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{OMA}\left(= \widehat{HAK} = \widehat{NAB} = \widehat{MAB}\right) \Rightarrow \widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{OMA} + \widehat{HMA}$;

Mà $\widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\Rightarrow \widehat{OMA} + \widehat{HMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HMO} = 90^\circ \Rightarrow HM \perp OM$ tại $M \in (O)$

$\Rightarrow HM$ là tiếp tuyến của $(O)$.

**Câu 9:** Cho tam giác $ABC\left(AB<AC\right)$ nội tiếp trong đường tròn tâm $O$ đường kính $BC$, đường thẳng qua $O$ vuông góc với $BC$ cắt $AC$ tại $D$.

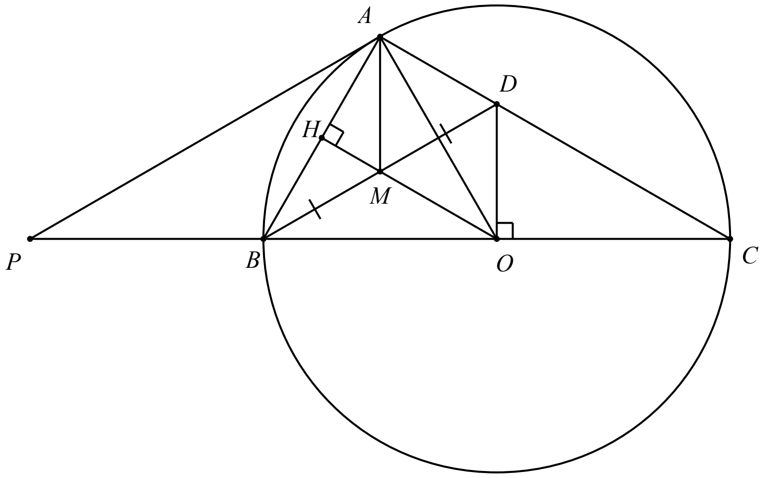
a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.

b) Tiếp tuyến tại điểm $A$ với đường tròn $\left(O\right)$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $P$, sao cho $PB=BO=2cm$. Tính độ dài đoạn $PA$ và số đo góc $APC$.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

**Lời giải**

**a)** Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.




Xét đường tròn $\left(O\right)$ có $BC$ là đường kính (gt)

Suy ra $\widehat{BAC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Gọi $M$ là trung điểm của $BD$.

Xét $\Delta ABD$ vuông tại $A$ có $AM$ là đường trung tuyến

Suy ra $AM=\dfrac{1}{2}BD$.(1)

Xét $\Delta OBD$ vuông tại $O\left(OD\perp BC\right)$ có $OM$ là đường trung tuyến

Suy ra $OM=\dfrac{1}{2}BD$.(2)

Từ (1), (2) suy ra $MA=MO=MB=MD=\dfrac{1}{2}BD$

Do đó tứ giác $ABOD$ nội tiếp đường tròn đường kính $BD$.

**b)** Tiếp tuyến tại điểm $A$ với đường tròn $\left(O\right)$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $P$, sao cho $PB=BO=2\,\text{cm}$. Tính độ dài đoạn $PA$ và số đo góc $APC$.

Ta có: $OA=OB=BP=2\,\text{cm}$ suy ra $OP=4\,\text{cm}$.

Ta có: $\Delta PAO$ vuông tại $A$ ($PA$ là tiếp tuyến)

Suy ra $PA^2+OA^2=OP^2$ (định lý Pythagore)

Do đó $PA^2+2^2=4^2$ hay $PA^2=12$ hay $PA=2\sqrt{3}\left(\text{cm}\right)$.

Ta có: $\sin\widehat{APO}=\dfrac{OA}{OP}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\widehat{APO}=30^\circ$ hay $\widehat{APC}=30^\circ$.

**c)** Chứng minh rằng $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Kẻ $OH\perp AB\left(H\in AB\right)$.

Xét $\Delta OAB$ cân tại $O$ $\left(OA=OB\right)$ có $OH$ là đường cao

Suy ra $OH$ đồng thời là đường phân giác

Do đó $\widehat{AOH}=\widehat{BOH}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Ta lại có: $\widehat{PAB}+\widehat{BAO}=90°$ ( $PA$ là tiếp tuyến)

mà $\widehat{AOH}+\widehat{BAO}=90°$ ( $\Delta OHA$ vuông tại $H$ )

Suy ra $\widehat{PAB}=\widehat{AOH}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$

Mặt khác, $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{PAB}=\widehat{ACB}$ hay $\widehat{PAB}=\widehat{PCA}$.

Xét $\Delta PAB$ và $\Delta PCA$ có:

$\widehat{P}$ là góc chung

$\widehat{PAB}=\widehat{PCA}$ (cmt)

Suy ra $\Delta PAB\sim\Delta PCA\left(g.g\right)$

Do đó $\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PA}=\frac{AB}{AC}$

Suy ra $PA^2=PB\,.\,PC$ và $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{PA^2}{PC^2}$

Từ đó $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{PB\,.\,PC}{PC^2}=\frac{PB}{PC}$.

**Câu 10:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $\left(AB<AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ có hai đường cao $BD,CE$ cắt nhau ở điểm $H$.

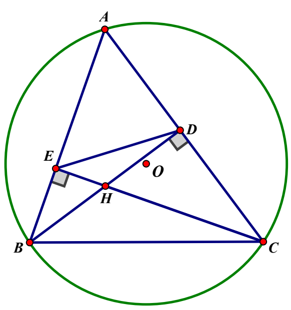
a) Chứng minh: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tia $CE$ cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là $G$. Chứng minh: $\Delta BHG$ cân ở $B$.

c) Hai điểm $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng $CH$ và $CG$. Đường thẳng $NO$ cắt cạnh $AC$ tại điểm $P$. Chứng minh: $CD.CP=CM.CG$ và $MB\perp MP$.

**Lời giải**

***a) Chứng minh: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.***

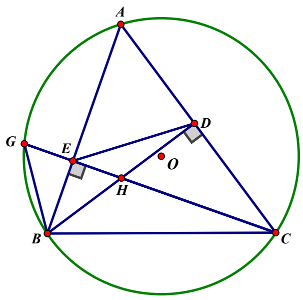


Chứng minh: $\widehat{BEC} = 90^0$

Chứng minh: $\widehat{BDC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BDC}$

Suy ra: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

***b) Chứng minh:*** $\Delta BHG$ ***cân ở*** $B$ **.**



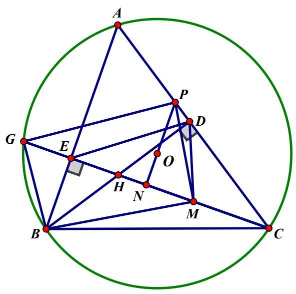

Chứng minh: $\widehat{EBD} = \widehat{ECD}$ (do $BCDE$ là tứ giác nội tiếp).

Chứng minh: $\widehat{GBE} = \widehat{ECD}$ (góc nội tiếp $(O)$ chắn cung $AG$ )

Suy ra: $\widehat{EBD} = \widehat{GBE}$ nên $BE$ là phân giác góc $GBH$

Mà $BE$ là đường cao của $\Delta BGH$ nên $\Delta BGH$ cân ở $B$

***c) Chứng minh:*** $CD.CP = CM.CG$ ***và*** $MB \perp MP$**.**




Chứng minh: $PN \perp GC$

Suy ra: $\Delta CDH$ và $\Delta CNP$ đồng dạng (g – g) nên $\dfrac{CD}{CN} = \dfrac{CH}{CP}$

Suy ra: $CD.CP = CN.CH = \dfrac{1}{2}CG.2CM = CM.CG$

$\Delta CDM$ và $\Delta CGP$ đồng dạng (c–g–c)

Suy ra: $GPDM$ là tứ giác nội tiếp (1)

Do $\widehat{PGM} = \widehat{MDC} = \widehat{MCD}$ nên chứng minh được $\widehat{BGP} = 90^0$

Suy ra: $GPDB$ là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GPMB$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\widehat{BMP}=90^0$ nên $MB\perp MP$

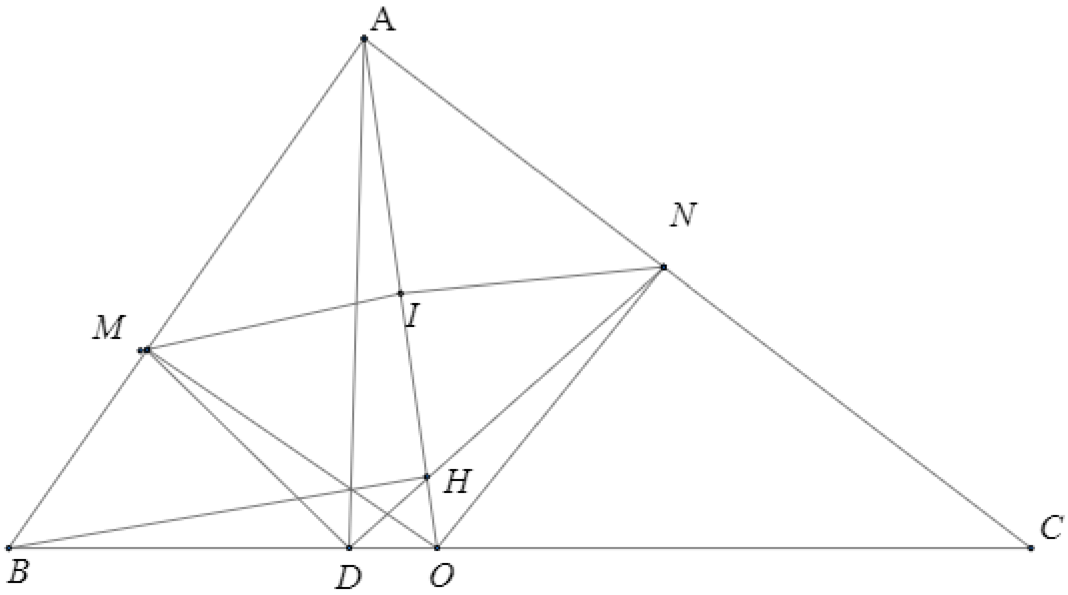
**Câu 11:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $\left(AB<AC\right)$ có đường cao $AD$ và đường phân giác trong $AO$ ($D,O$ thuộc cạnh $BC$). Kẻ $OM$ vuông góc với $AB$ tại $M$, $ON$ vuông góc với $AC$ tại $N$.

a) Chứng minh: Tứ giác $AMON$ nội tiếp

b) Chứng minh $\widehat{BDM}=\widehat{ODN}$

c) $\text{Sin}\dfrac{BAC}{2}\le\dfrac{BC}{AB+AC}$

**Lời giải**




2. a. $\Delta AOM$ vuông tại $M$

Gọi $I$ là trung điểm của $AO$

Suy ra $MI$ là trung tuyến
Nên $MI=IA=IO$
Xét $\Delta AON$ vuông tại $N$
Có $I$ là trung điểm của $AO$

Nên $NI$ là trung tuyến
Do đó $NI=IA=IO$
Suy ra $MI=IA=IO=IN$ nên tứ giác $AMON$ nội tiếp

b. Xét $\Delta BMO$ và $\Delta BDA$ có

$\widehat{B}$ chung

$\widehat{BMO}=\widehat{BDA}=90^0$ ($AD\perp BC$ tại $D$; $OM\perp AB$ tại $M$)

Suy ra $\Delta BMO\backsim\Delta BDA$ (g – g)

Nên $\dfrac{BM}{BD}=\dfrac{BO}{BA}$ (tỉ số đồng dạng)

Do đó $\frac{BM}{BO} = \frac{BD}{BA}$ (tính chất tỉ lệ thức)

Xét $\Delta BMD$ và $\Delta BOA$ có

$\widehat{B}$ chung

$\frac{BM}{BO} = \frac{BD}{BA}$ (c/mt)

Suy ra $\Delta BMD \backsim \Delta BOA$ (c – g – c)

Nên $\widehat{BDM} = \widehat{BAO}$ (hai góc tương ứng)

Chứng minh tương tự $\Delta CNO \backsim \Delta CDA$ (g – g)

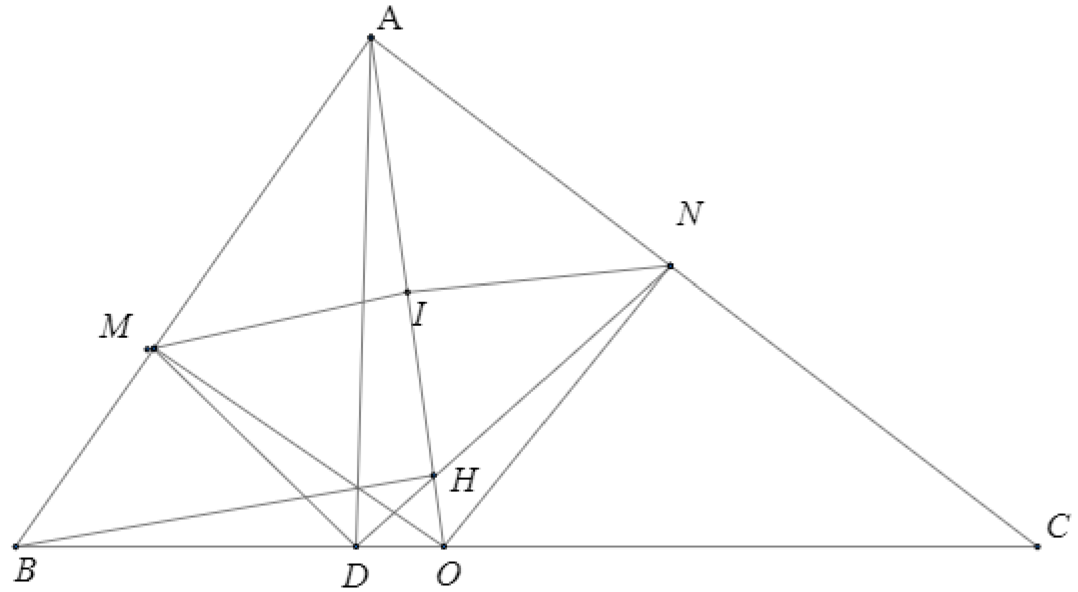
suy ra $\frac{CN}{CD} = \frac{CO}{CA}$ nên $\frac{CN}{CO} = \frac{CD}{CA}$

Suy ra $\Delta CND \backsim \Delta COA$ (c – g – c)

Nên $\widehat{CDN} = \widehat{CAO}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{BDM} = \widehat{BAO}$ (c/mt) và $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ (vì $AO$ là tia phân giác $\widehat{BAC}$ )

Suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$ (đpcm)




c. $\text{Sin}\frac{BAC}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$

Từ $B$ kẻ $BH$ vuông góc $AO$ tại $H$

Xét $\Delta BAH$ vuông tại $H$ có

$\sin BAH = \frac{BH}{AB}$ (tỉ số lượng giác)

Mà $\widehat{BAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (Vì $AO$ là tia phân giác $\widehat{BAC}$ )

Nên $\sin BAH = \sin\dfrac{BAC}{2}$. Do đó $\sin\dfrac{BAC}{2} = \dfrac{HB}{AB}$

Mà $BH \le BO$ (quan hệ đường vuông góc và đường xiên) nên $\dfrac{HB}{AB} \le \dfrac{BO}{AB}$

Suy ra $\sin\dfrac{BAC}{2} \le \dfrac{BO}{AB}$ $(1)$

Xét $\Delta BAC$ có $AO$ là tia phân giác $\widehat{BAC}$ nên

Suy ra $\dfrac{BO}{BA} = \dfrac{CO}{CA}$ (Tính chất tia phân giác)

Nên $\dfrac{BO}{BA} = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{BO+OC}{BA+CA} = \dfrac{BC}{AB+AC}$ (Tính chất tỉ lệ thức) $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ có $\sin\dfrac{BAC}{2} \le \dfrac{BC}{AB+AC}$ (đpcm)

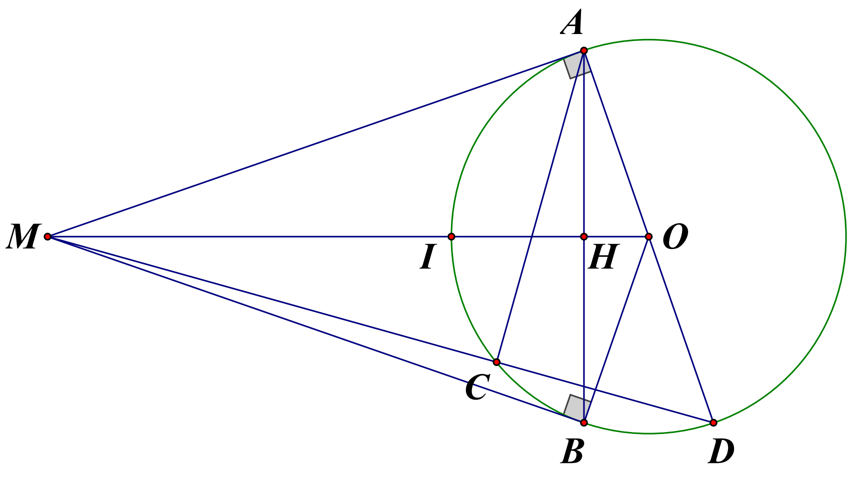
**Câu 12:** Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm $M$ nằm ngoài đường tròn. Qua $M$ kẻ hai tiếp tuyến $MA$, $MB$ với đường tròn $(O;R)$( $A$, $B$ là các tiếp điểm). Đoạn thẳng $OM$ cắt đường thẳng $AB$ tại $H$ và cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm $I$.

a) Chứng minh bốn điểm $M$, $A$, $B$, $O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính $AD$ của $(O;R)$. Đoạn thẳng $MD$ cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm $C$ khác $D$ Chứng minh $MA^2 = MH.MO = MC.MD$.

c) Chứng minh $IH.IO = IM.OH$.

**Lời giải**




a) Vì $MA$ là tiếp tuyến của $(O;R)$ tại $A$ nên $\widehat{MAO} = 90°$

$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính $OM$ $(1)$

Vì $MB$ là tiếp tuyến của $(O;R)$ tại $B$ nên $\widehat{MBO} = 90°$

$\Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính $OM$ $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra bốn điểm $M$ ; $A$ ; $O$; $B$ cùng thuộc đường tròn đường kính $OM$ .

b) Vì $MA$ ; $MB$ là tiếp tuyến của $(O)$ tại $A$, $B$ nên $MA = MB$

Mà $OA = OB = R$

Nên $OM$ là đường trung trực của $AB$ .

$\Rightarrow OM \perp AB$ tại $H$

$\Rightarrow \widehat{AHM} = 90°$

Xét $\triangle MAH$ và $\triangle MOA$ có :

$\widehat{OAM} = \widehat{AHM} = 90°$

$\widehat{AMO}$ chung

$\Rightarrow \triangle MAH \backsim \triangle MOA$ ( g-g )

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MO} = \dfrac{MH}{MA}$ ( tính chất tam giác đồng dạng)

$\Leftrightarrow MA^2 = MO.MH$ $(3)$

Vì $AD$ là đường kính của $(O)$ nên $\widehat{ACD} = 90°$

Xét $\triangle MAD$ và $\triangle MCA$ có :

$\widehat{DAM} = \widehat{ACD} = 90°$

$\widehat{AMD}$ chung

$\Rightarrow \triangle MAD \backsim \triangle MCA$ ( g-g )

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA}$ ( tính chất tam giác đồng dạng)

$\Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$ $(4)$

Từ $(3)$ và $(4)$ suy ra $MA^2 = MH.MO = MC.MD$ .

c) Xét $\triangle OAH$ và $\triangle OMA$ có :

$\widehat{OAM} = \widehat{AHO} = 90°$

$\widehat{AOM}$ chung

$\Rightarrow \triangle OAH \backsim \triangle OMA$ ( g-g )

$\Rightarrow \dfrac{OA}{MO} = \dfrac{OH}{OA}$ ( tính chất tam giác đồng dạng)

$\Leftrightarrow OA^2 = MO.OH$

$\Leftrightarrow OI^2 = OM.OH$ ( do $OA = OI = R$ )

$\Leftrightarrow OI.OH + OI^2 = OM.OH + OI.OH$

$\Leftrightarrow OI.(OH + OI) = OH(OM + OI)$

$\Leftrightarrow OI.IH = OH.MI$ (đpcm).

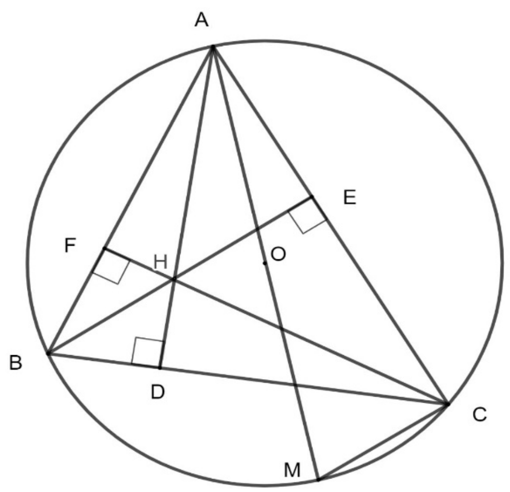
**Câu 13:** Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$. $AD$, $BE$, $CF$ là ba đường cao của tam giác $ABC$ cắt nhau tại $H$.

**a )** Chứng minh bốn điểm $A, F, H, E$ cùng thuộc một đường tròn.

**b )** Kẻ đường kính $AM$ của đường tròn $(O)$. Chứng minh $AD.AM = AB.AC$

**c )** Gọi $P$ là giao điểm của $AH$ và EF. $I$ là giao điểm của $AM$ và $BC$. $K$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh: $H, K, M$ thẳng hàng và $PI // HK$.

**Lời giải**




**a) Chứng minh bốn điểm $A, F, H, E$ cùng thuộc một đường tròn.**

$\widehat{AFH} = 90^o$ ( Vì $CF$ là đường cao $\Delta ABC$ ) $\Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính $AH$

$\widehat{AEH} = 90^o$ ( Vì $BE$ là đường cao $\Delta ABC$ ) $\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính $AH$

$\Rightarrow$ 4 điểm $A, F, H, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$

b) **Chứng minh** $AD.AM = AB.AC$ ?

Ta có $\widehat{ACM} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ADB} = 90^o$ ( Vì $AD$ là đường cao $\Delta ABC$ )

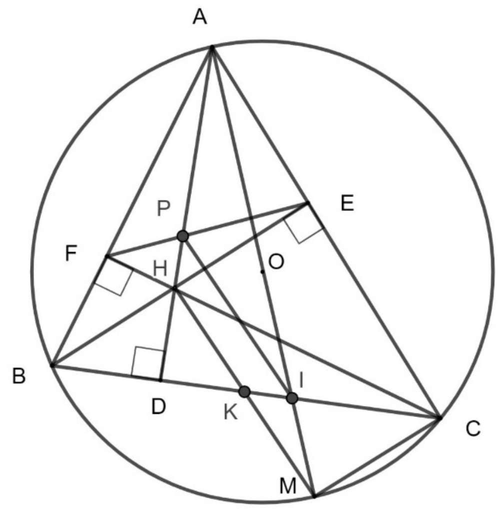
$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AMC} = 90^o$

$\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{AMC}}$ ( 2 góc nội tiếp cùng chắn cung $AC$ của $(O)$ )

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACM\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AM} \Rightarrow AD.AM = AB.AC$

**c) Chứng minh: $H, K, M$ thẳng hàng và $PI\,//\,HK$ .**




**Chứng minh**: $CM\,//\,BH$ , $BM\,//\,CH$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.

$\Rightarrow$ Hai đường chéo $HK$ và $BC$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
=> $K$ là trung điểm của $HM$ $\Rightarrow$ $H, K, M$ thẳng hàng

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACM \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAI}$

Chứng minh $\widehat{AEF} = \widehat{ABI}$

Chứng minh $\Delta APE \backsim \Delta AIB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AE}{AB}$

Chứng minh $\Delta AHE \backsim \Delta AMB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AE}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow \dfrac{AP}{AH} = \dfrac{AI}{AM}$ $\Rightarrow$ PI // HM (Định lý Thalès đảo).

Vậy $PI\,//\,HK$

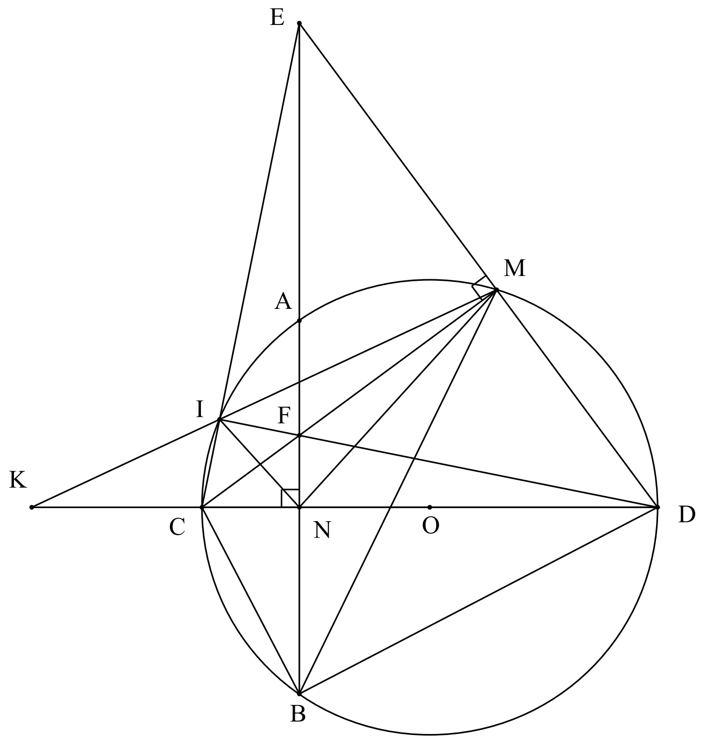
**Câu 14:** Cho đường tròn $(O,R)$ và dây $AB$ cố định (AB không là đường kính). Gọi $N$ là trung điểm của $AB$. Qua $N$, kẻ đường kính $CD$ của đường tròn $(O)$ ($C$ thuộc cung nhỏ $AB$). Lấy điểm $M$ bất kỳ trên cung lớn $AB$ $(M \neq A, M \neq B)$, $MC$ cắt $AB$ tại $F$. Hai đường thẳng $DM$ và $AB$ cắt nhau tại $E$.

a) Chứng minh bốn điểm $M, N, C, E$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Hai đường thẳng $DF$ và $CE$ cắt nhau tại $I$. Chứng minh $KI.KM = KC.KD$ và $NE$ là tia phân giác của $\widehat{MNI}$

c) Chứng minh rằng: $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{CN}{DN}$

**Lời giải**




**a) Chứng minh bốn điểm $M, N, C, E$ cùng thuộc một đường tròn**

Lập luận $\widehat{ENC} = 90°$

Lập luận $\widehat{EMC} = 90°$

Suy ra $\widehat{ENC} = \widehat{EMC} = 90°$

Suy ra M; N cùng thuộc đường tròn đường kính CE hay 4 điểm M: N; C; E cùng thuộc một đường tròn đường kính CE.

**b) Chứng minh $KI.KM = KC.KD$ và $NE$ là tia phân giác của góc $MNI$.**

**Có** $\widehat{KIC} = 180^0 - \widehat{CIM} = \widehat{CDM}$ ( vì tổng các góc đối nhau của tứ giác nội tiếp CIMD bằng $180^0$)

Xét $\Delta KIC$ và $\Delta KDM$ có:

$\widehat{K}$ chung; $\widehat{KIC} = \widehat{KDM}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta KIC \backsim \Delta KDM (g.g) \Rightarrow \dfrac{KI}{KD} = \dfrac{KC}{KM} \Rightarrow KI.KM = KC.KD$

**Chứng minh**: $NE$ **là tia phân giác của** $\widehat{MNI}$ **.**

Xét $\Delta CDE$ có: $CM \perp DE; EN \perp CD$ và $CM$ giao $EN$ tại $F$

$\Rightarrow F$ là trực tâm $\Delta CDE$

$\Rightarrow DF \perp CE$ tại $I$ ($DF$ cắt $CE$ tại $I$ ) hay $DI \perp CE$ tại $I$.

$\Rightarrow \widehat{DIC} = 90^\circ$

$\Rightarrow I$ thuộc đường tròn tâm $O$, đường kính $CD$

Xét tứ giác $CIFN$ có:

$\widehat{CIF} + \widehat{CNF} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc đối nhau trong tứ giác

Nên tứ giác $CIFN$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{INF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IF}$ )

Chứng minh được tứ giác $FMDN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FNM} = \widehat{FDM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FM}$ )

Mà $\widehat{ICM} = \widehat{IDM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IM}$ của đường tròn $(O)$)

Hay $\widehat{ICF} = \widehat{FDM}$

$\Rightarrow \widehat{INF} = \widehat{FNM}$

$\Rightarrow NF$ là tia phân giác của $\widehat{MNI} \Rightarrow NE$ là tia phân giác của $\widehat{MNI}$

**c) Chứng minh rằng:** $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{CN}{DN}$

Chứng minh được $\Rightarrow \Delta KMC \backsim \Delta KDI (g.g) \Rightarrow \dfrac{KM}{KD} = \dfrac{CM}{DI}$

Mà $\dfrac{KC}{KM} = \dfrac{CI}{DM}$ ( Vì $\Rightarrow \Delta KIC \backsim \Delta KDM$ )

nên $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{KC}{KM}.\dfrac{KM}{KD} = \dfrac{CI}{DM}.\dfrac{CM}{DI}$ **(1)**

Tương tự, $\dfrac{CN}{CE} = \dfrac{CI}{CD}$ **và** $\dfrac{DN}{DE} = \dfrac{DM}{CD}$

Do đó, $\dfrac{CN}{DN} = \dfrac{CI}{DM} \cdot \dfrac{CE}{DE}$ **(2)**

Chứng minh được $\dfrac{EC}{ED} = \dfrac{CM}{DI}$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{CN}{DN}$

**Câu 15:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn $(O)$, các đường cao $BE, CF$ cắt nhau ở $H$.

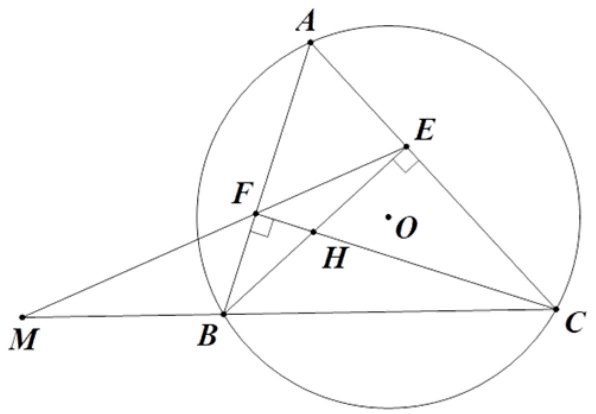
a) Chứng minh bốn điểm $B, F, E, C$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Tia $EF$ cắt tia $CB$ tại $M$. Chứng minh: $MF.ME = MB.MC$

c) Tia $AH$ cắt $BC$ tại $D$. Đường thẳng qua $B$ và song song với $AC$, cắt tia $AD$ tại $P$, cắt đoạn thẳng $AM$ tại $Q$. Chứng minh $FC$ là tia phân giác của góc $EFD$ và $BP = BQ$.

**Lời giải**

**a)**




Vẽ hình đúng đến ý 1

Chứng minh được $\widehat{BEC} = 90^0$

suy ra B, E, C thuộc đường tròn đường kính $BC$

Chứng minh được $\widehat{BFC} = 90^0$

Suy ra $B, F, C$ thuộc đường tròn đường kính $BC$

Vậy bốn điểm $B, F, E, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính $BC$

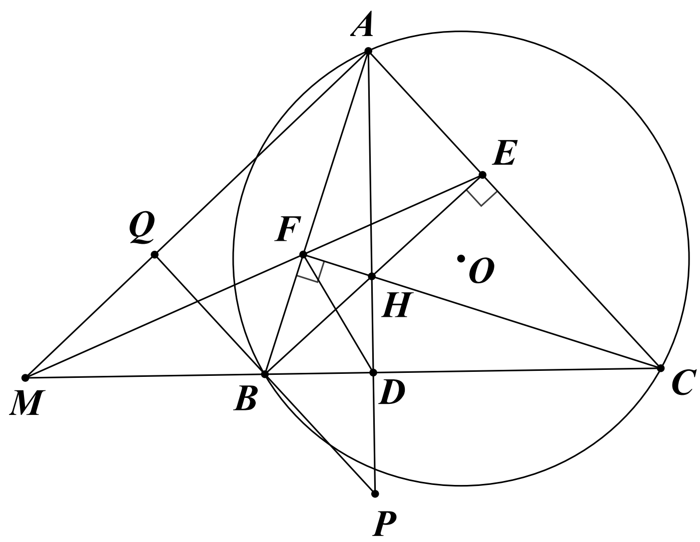
**b) Chứng minh** $MF.ME = MB.MC$

Xét đường tròn đường kính BC ta có $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ ( hai góc nội tiếp cùng chắn cung $FB$)

Từ đó suy ra $\Delta MBE$ đồng dạng $\Delta MCF$ ( g – g)

Từ đó suy ra $MF.ME = MB.MC$

**c) Chứng minh FC là tia phân giác của góc EFD.**




Chứng minh được H là trực tâm $\Delta ABC$

Từ đó suy ra bốn điểm $B, F, D, H$ cùng thuộc đường tròn đường kính BH

Suy ra $\widehat{HFD} = \widehat{HBD}$ ( hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

Xét đường tròn đường kính BC có $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$ ( Hai góc nội tiếp cùng chắn cung $EC$)

Suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{CFD}$ khi đó $FC$ là tia phân giác $\widehat{EFD}$ (đpcm)

**Chứng minh BP=BQ.**

Chứng minh được $FB$ là phân giác trong tại đỉnh F của tam giác $FMD$

Mà $FC$ là phân giác ngoài tại đỉnh $F$ tam giác $FMD$

$$\text{Suy ra } \frac{CD}{CM} = \frac{BD}{BM}\left(=\frac{FD}{FM}\right)$$

Từ đó suy ra $\frac{AC}{QB} = \frac{CM}{BM} = \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BP}$ Suy ra $BP = BQ$

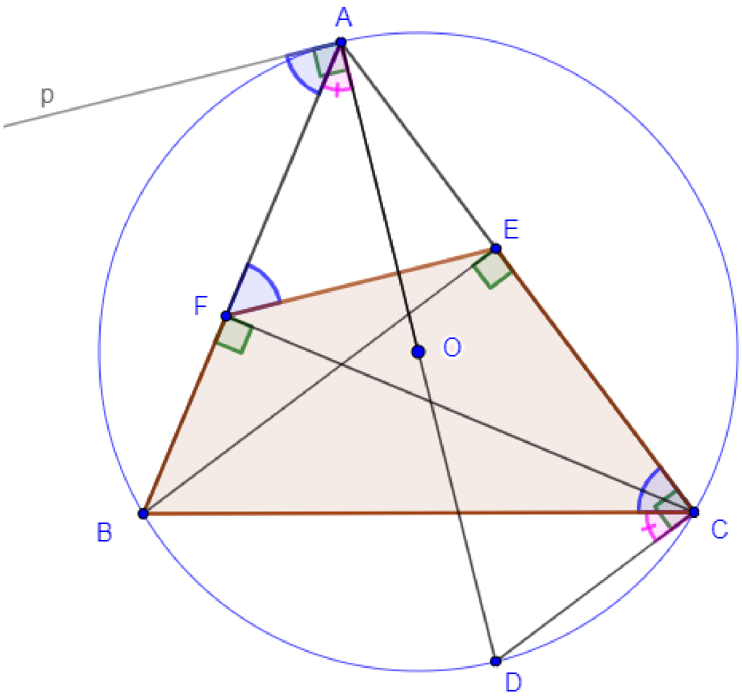
**Câu 16:** Cho tam giác ABC ba góc nhọn nội tiếp (O;R), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BFCE nội tiếp và $AO \perp EF$

b) Chứng minh: $\sin^2\widehat{BAC} + cos^2\widehat{BAC} = 1$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.cos\widehat{BAC}$

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC, chứng minh: $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$. Cho $AB = 6; AC = 8; BC = 2\sqrt{13}$ tính diện tích tam giác ABC

**Lời giải**




a) Chứng minh tứ giác BFCE nội tiếp

Xét tam giác BEC ta có:

$BE \perp AC$ ( BE là đường cao trong tam giác ABC)

Nên tam giác BEC vuông tại E. Do đó B,E,C cùng thuộc đường tròn đường kính BC (1)

Xét tam giác CFB ta có:

$CF \perp AB$ ( CF là đường cao trong tam giác ABC)

Nên tam giác CFB vuông tại F. Do đó C,F,B cùng thuộc đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra B,F,E,C cùng thuộc đường tròn đường kính B**C.**

Hay tứ giác BFEC nội tiếp.

**Chứng minh:** $AO \perp EF$

Kẻ tiếp tuyến tại A của (O), suy ra $\widehat{pAO} = 90^o$

Kẻ tia AO cắt (O) tại D, khi đó AD là đường kính, suy ra $\widehat{ACD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: $\widehat{pAB} + \widehat{BAD} = \widehat{pAO} = 90^o$

$\widehat{ACB} + \widehat{BCD} = \widehat{ACD} = 90^o$

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$ trong (O))

Do đó: $\widehat{pAB} = \widehat{ACB}$ (3)

Ta lại có: $\widehat{ACB} + \widehat{BFE} = 180^o$ ( tứ giác BFEC nội tiếp)

Và $\widehat{AFE} + \widehat{BFE} = 180^o$ (hai góc kề bù)

Nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (4)

Từ (3),(4) suy ra $\widehat{pAB} = \widehat{AFE}$

Mà $\widehat{pAB}; \widehat{AFE}$ ở vị trí so le trong nên Ap //EF

Kết hợp $AO \perp Ap$ ( vì Ap là tiếp tuyến).

Vậy $AO \perp EF$

**b) Chứng minh:** $\sin^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{BAC} = 1$

Xét tam giác AEB vuông tại E, ta có:

$\sin\widehat{BAE} = \dfrac{BE}{AB}$ suy ra $\sin^2\widehat{BAE} = \dfrac{BE^2}{AB^2}$

$\cos\widehat{BAE} = \dfrac{AE}{AB}$ suy ra $\cos^2\widehat{BAE} = \dfrac{AE^2}{AB^2}$

Nên $\sin^2\widehat{BAE} + cos^2\widehat{BAE} = \dfrac{BE^2}{AB^2} + \dfrac{AE^2}{AB^2} = \dfrac{BE^2 + AE^2}{AB^2}$

Mà $BE^2 + AE^2 = AB^2$ (Định lý Pythagore trong tam giác ABE vuông tại E)

Do đó: $\sin^2\widehat{BAE} + cos^2\widehat{BAE} = \dfrac{BE^2}{AB^2} + \dfrac{AE^2}{AB^2} = \dfrac{BE^2 + AE^2}{AB^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2} = 1$

Hay $\sin^2\widehat{BAC} + cos^2\widehat{BAC} = 1$ (góc $\widehat{BAE}$ cũng là $\widehat{BAC}$ )

**Chứng minh:** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.cos\widehat{BAC}$

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác BEC vuông tại E ta có:

$BC^2 = BE^2 + CE^2$

Mà $CE^2 = (AC - AE)^2 = AC^2 - 2.AC.AE + AE^2$

Nên $BC^2 = BE^2 + AC^2 - 2.AC.AE + AE^2$

Ta lại có:

$BE^2 + AE^2 = AB^2$ (cmt)

$\cos\widehat{BAE} = \dfrac{AE}{AB}$ (cmt) suy ra AE = AB.$\cos\widehat{BAE}$ = AB.$\cos\widehat{BAC}$

Vậy: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.cos\widehat{BAC}$

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC, chứng minh: $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$. Cho $AB = 6; AC = 8; BC = 2\sqrt{13}$ tính diện tích tam giác ABC

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}BE.AC$

Mà $BE = AB.\sin\overline{BAC}$ ( hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác ABE vuông tại E)

Vậy: $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.cos\widehat{BAC}$ (cmt)

$(2\sqrt{13})^2 = 6^2 + 8^2 - 2.6.8.cos\widehat{BAC}$ suy ra $.cos\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}$

Mà $\sin^2\widehat{BAC} + cos^2\widehat{BAC} = 1$ (cmt) suy ra $\sin\widehat{BAC} = \sqrt{1 - cos^2\widehat{BAC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\overline{BAC} = \dfrac{1}{2}.6.8.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

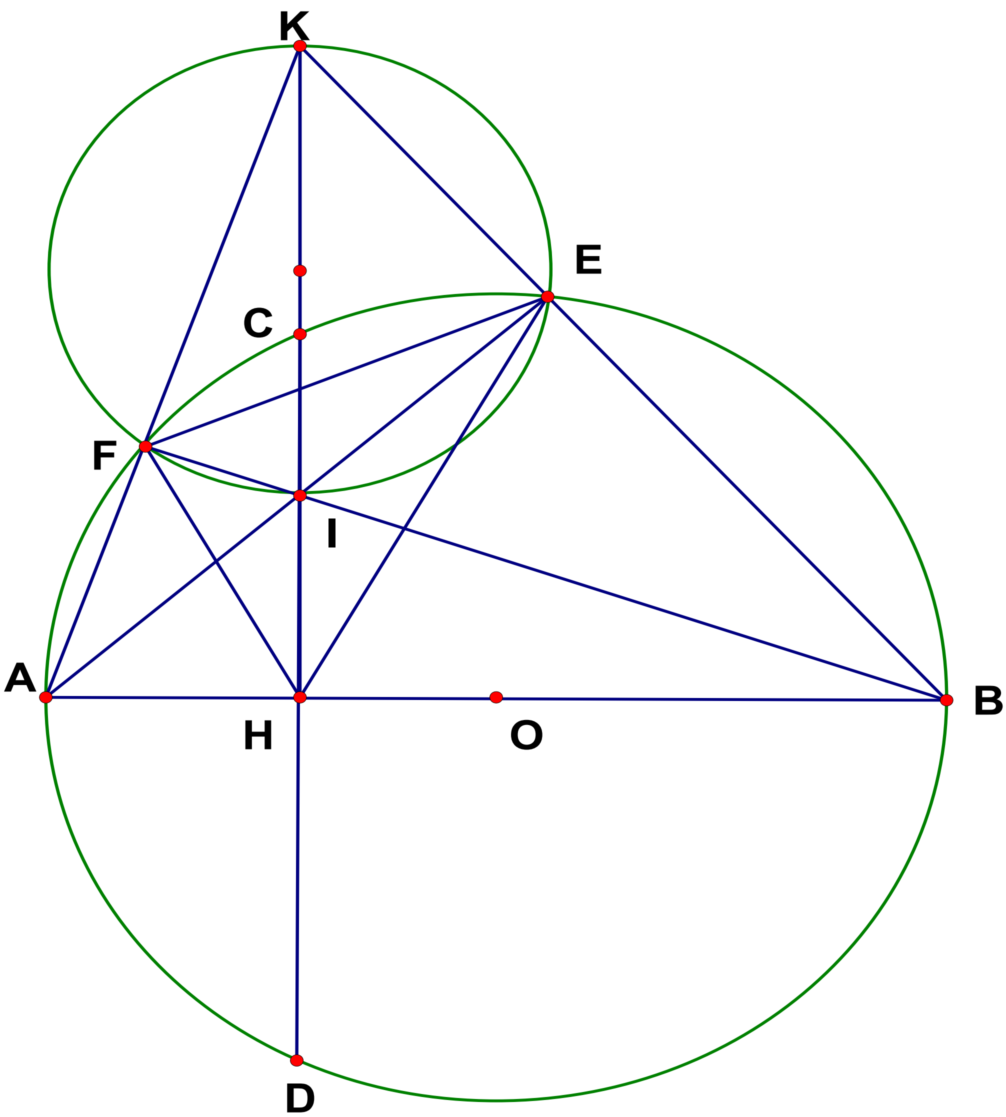
**Câu 17:** Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I; AF cắt tia DC tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác AHIF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $HA.HB = HI.HK$.

c) Đường tròn ngoại tiếp $\Delta KIF$ cắt AI tại E. Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định.

**Lời giải**




A

**a) Chứng minh tứ giác AHIF nội tiếp.**

Ta có: $\widehat{AFI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

$CD \perp AH$ tại H (giả thiết) và $I \in CD \Rightarrow \widehat{AHI} = 90^\circ$.

Xét tam giác AFI có $\widehat{AFI} = 90^\circ$ nên đường tròn đường kính AI ngoại tiếp tam giác AFI hay 3 điểm A,F,I cùng thuộc 1 đường tròn đường kính AI (1)

Xét tam giác AHI có $\widehat{AHI} = 90^\circ$ nên đường tròn đường kính AI ngoại tiếp tam giác AHI hay 3 điểm A, H, I cùng thuộc 1 đường tròn đường kính AI(2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm A, F, I, H cùng thuộc đường tròn đường kính AI

Hay tứ giác AHIF nội tiếp.

**b) Chứng minh rằng: HA.HB = HI.HK.**

Tứ giác AHIF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{FAH}+\widehat{FIH}=180^{\circ}$ (Định lý)

Mà $\widehat{BIH}+\widehat{FIH}=180^{\circ}$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{FAH}=\widehat{BIH}$ hay $\widehat{KAH}=\widehat{BIH}$.

Xét $\Delta HAK$ và $\Delta HIB$ có

$\widehat{AHK}=\widehat{IHB}$ (cùng bằng 90°)

$\widehat{KAH}=\widehat{BIH}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta HAK \sim \Delta HIB (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{HA}{HI}=\dfrac{HK}{HB} \Rightarrow HA.HB=HI.HK$ (đpcm)

**c) Chứng minh E luôn thuộc đường tròn cố định:**

Ta có: $\widehat{AFB}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow AF\perp BF \Rightarrow AK\perp BF$ tại F

$KH\perp AB$ tại H (vì $CD\perp AH$ tại H)

KH cắt BF tại I.

$\Rightarrow$ I là trực tâm của $\Delta AKB$ $\Rightarrow AI\perp KB$ (1)

$\Delta KIF$ vuông tại F, nên đường tròn ngoại tiếp $\Delta KIF$ có đường kính là KI.

$\Rightarrow$ $\widehat{AEK}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính KI).

$\Rightarrow AI\perp KE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ K, E, B thẳng hàng, khi đó $AI\perp KB$ tại E

$\Rightarrow \widehat{IEB}=90^{\circ}$ hoặc $\widehat{AEB}=90^{\circ}$

$\Rightarrow$ E luôn thuộc đường tròn $\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$ (đpcm)

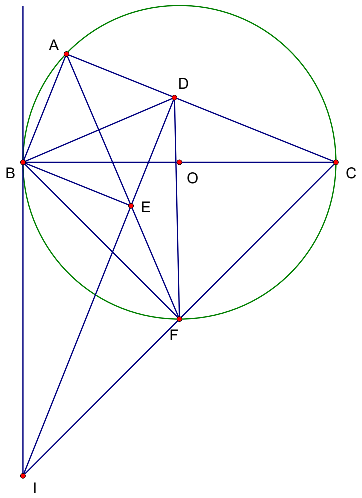
**Câu 18:** Cho đường tròn $(O)$ đường kính $BC$. Điểm $A$ thuộc đường tròn thỏa mãn $AB<AC$ ($A$ khác $B$, $A$ khác $C$). Lấy điểm $D$ trên cạnh $AC$ sao cho $AD=AB$. Vẽ hình vuông $BADE$. Tia $AE$ cắt $(O)$ tại $F$.

a) Tam giác $FBC$ là tam giác gì? Tại sao?

b) Chứng minh: $\widehat{FDC}=\widehat{FCD}$.

c) Vẽ tia $Bx$ là tiếp tuyến của $(O)$ tại $B$, $Bx$ cắt $CF$ tại $I$. Chứng minh ba điểm $D, E, I$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) Ta thấy *AF* chính là phân giác của $\widehat{A}$ nên $\widehat{FBC}=\widehat{FAC}=45^0$.

Mặt khác $\widehat{BFC}=90^0$. Vậy tam giác *BFC* vuông cân tại *F*.

b) Vì tam giác *BFC* cân tại *F* nên *FC* = *FB*.

Ta có *AF* là đường trung trực của *BD* nên $FD=FB$ mà $FC=FB$ nên $FD=FC$.

do đó $\widehat{FDC}=\widehat{FCD}$ (đpcm).

c) Tam giác *BCI* vuông tại *B* có $\widehat{BCI}=45^0$ nên tam giác *BCI* cân tại *B*, có *BF* là đường cao nên *F* là trung điểm *CI*.

Nối *I* với *D*, tam giác *IDC* có *DF* là trung tuyến và bằng nửa cạnh *IC* nên tam giác *DIC* vuông tại **D.** Mặt khác $ED\perp AC$ nên *I, E, D* thẳng hàng.

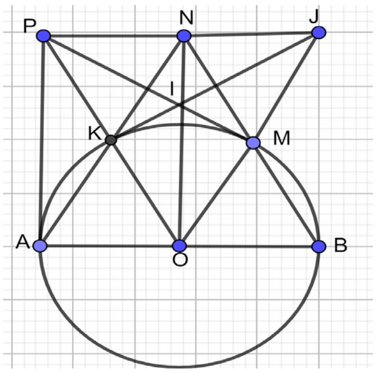
**Câu 19:** Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB$. Kẻ tiếp tuyến $Ax$, lấy $P$ trên $Ax$ ($AP>R$). Từ $P$ kẻ tiếp tuyến $PM$ với $(O)$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm $A,P,M,O$ cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM//OP$. Đường thẳng vuông góc với $AB$ tại $O$ cắt tia $BM$ tại $N$. Chứng minh tứ giác $OBNP$ là hình bình hành.

c) Giả sử $AN$ cắt $OP$ tại $K; PM$ cắt $ON$ tại $I; PN$ cắt $OM$ tại $J$. Chứng minh $I,J,K$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) $A,P,M,O$ cùng nằm trên đường tròn đường kính $PO$

b) Ta có: $OP\perp AM; BM\perp AM \Rightarrow BM//OP$

c) $\Delta AOP=\Delta OBN \Rightarrow OP=BN$, ta lại có $BN//OP$ nên $OPNB$ là hình bình hành

d) Ta có: $ON \perp PJ; PM \perp OJ$ , mà $PM \perp ON = I \Rightarrow I$ là trực tâm $\Delta POJ \Rightarrow IJ \perp OP$ (1)

Chứng minh được $PAON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow K$ là trung điểm $OP$

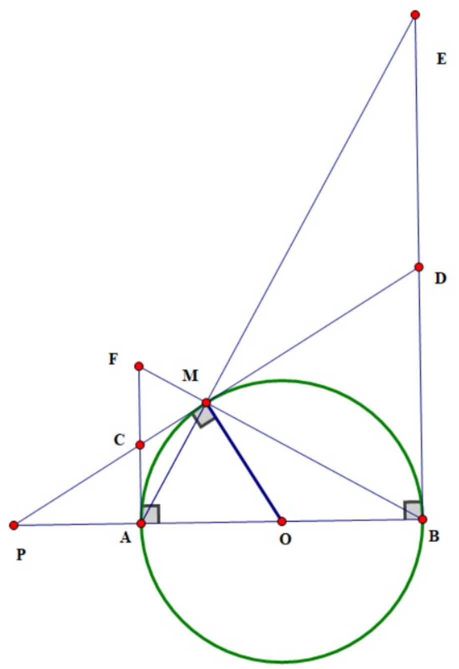
Lại có: $APO = OPI = IOP \Rightarrow AIPO$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp OP$ (2)

Từ (1)(2)$\Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

**Câu 20:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB$. Điểm M nằm trên nửa đường tròn (M ≠ A; B). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và $D$
a) Chứng minh rằng: tứ giác ACMO nội tiếp.

b) Gọi P là giao điểm CD và $AB$. Chứng minh: $PA.PO = PC.PM$
c) Gọi E là giao điểm của AM và BD; F là giao điểm của AC và BM. Chứng minh: Ba điểm E; F; P thẳng hàng.

**Lời giải**




a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng CO. Xét tam giác CMO vuông tại M và tam giác CAO vuông tại A, ta có: HC = HO =HM và HC = HO =HA
Do đó HC =HO =HA =HM. Vậy bốn điểm O, A, C, M cùng thuộc một đường tròn
Hay tứ giác OACM nội tiếp.

b) Xét tam giác PAC và tam giác PMO, có: $\widehat{MPO}$ chung và $\widehat{PAC} = \widehat{PMO} = 90^0$
Nên $\Delta PAC$ và $\Delta PMO$ đồng dạng

Nên $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PM}{PO}$ Suy ra PA.PO=PC.PM

c) Chứng minh được CA = CM = CF; DB = DM = DE
Gọi G là giao điểm của PF và BD, cần chứng minh G trùng E.

Dựa vào AC//BD chứng minh được $\dfrac{\mathrm{FC}}{\mathrm{DG}} = \dfrac{PC}{PD}; \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{AC}{BD}; \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{CF}{DE}$

Suy ra DE = DG mà G và E đều thuộc tia đối của tia DB

Do đó G trùng với E.

Vậy ba điểm E; F; P thẳng hàng.

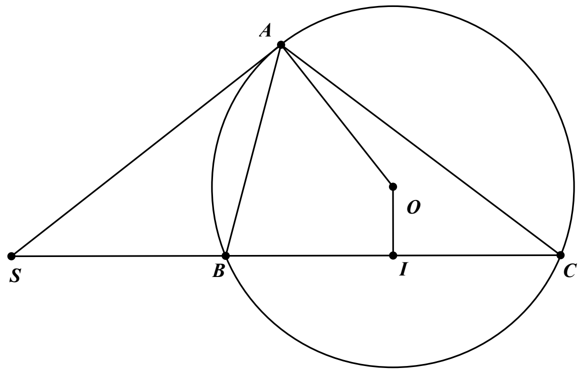
**Câu 21:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ), nội tiếp đường tròn $(O)$. Tiếp tuyến tại điểm $A$ của đường tròn $(O)$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $S$. Gọi $I$ là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $O$ đến đường thẳng $BC$.

a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi $H$ và $D$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng $SO$ và $SC$. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

c) Vẽ đường cao $CE$ của tam giác $ABC$. Gọi $Q$ là trung điểm của đoạn thẳng $BE$. Đường thẳng $QD$ cắt đường thẳng $AH$ tại điểm $K$. Chứng minh $BQ.BA = BD.BI$

**Lời giải**




**a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.**

Gọi $M$ là trung điểm của $SO$, suy ra $SM = MO = \dfrac{SO}{2}$ $(1)$

Xét $\Delta SAO$ vuông tại $A$ có M là trung điểm của $SO$

$\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $SO$

$\Rightarrow AM = \dfrac{1}{2}SO$ .$(2)$

Xét $SIO$ vuông tại $I$ có $M$ là trung điểm $SO$

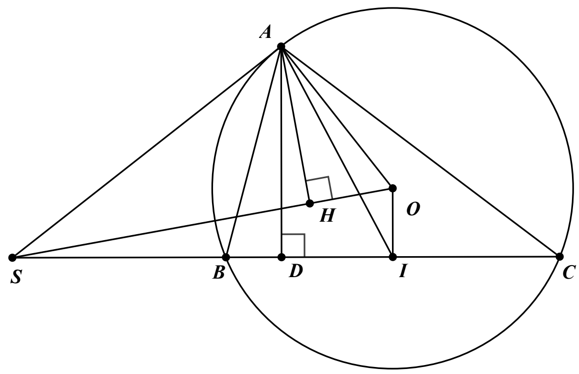
$\Rightarrow IM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $SO$

$IM = \dfrac{1}{2}SO$ $(3)$

Từ (1), (2) và $(3)$ ta có: $AM = IM = SM = MO = \dfrac{SO}{2}$

Suy ra bốn điểm S, A, O, I cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác $SAOI$ nội tiếp đường tròn đường kính $SO$.

**b) Gọi $H$ và $D$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng $SO$ và $SC$. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.**



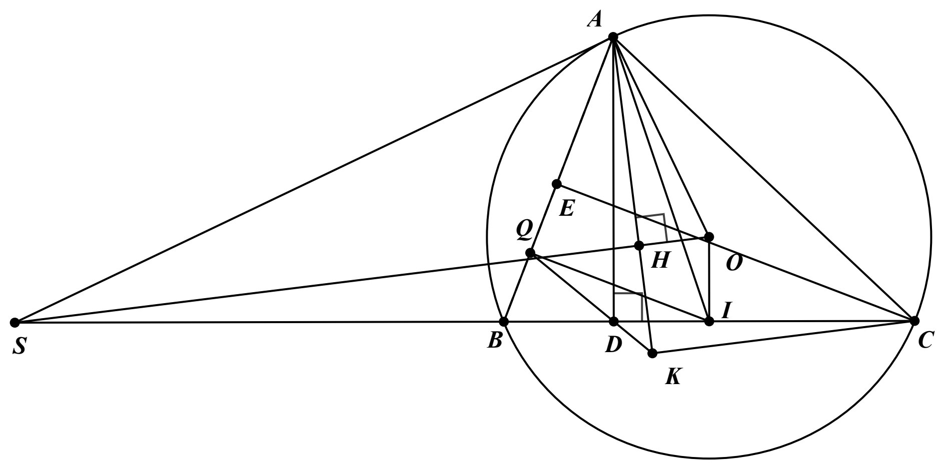

Theo ý a), ta có: Tứ giác $SAOI$ nội tiếp nên $\widehat{SOA}=\widehat{SIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{SA}$);

$\Rightarrow 90^\circ-\widehat{SOA}=90^\circ-\widehat{SIA}$;

Mà $90^\circ-\widehat{SOA}=\widehat{OAH}$ ($\Delta AHO$ vuông tại $H$); $90^\circ-\widehat{SIA}=\widehat{IAD}$ ($\Delta ADI$ vuông tại $D$)

$\Rightarrow \widehat{OAH}=\widehat{IAD}$.

**c) Vẽ đường cao $CE$ của tam giác $ABC$. Gọi $Q$ là trung điểm của đoạn thẳng $BE$. Đường thẳng $QD$ cắt đường thẳng $AH$ tại điểm $K$. Chứng minh $BQ.BA=BD.BI$.**




Xét $\Delta BOC$ cân tại $O$ có: $OI\perp BC$

$\Rightarrow OI$ là đường cao

$\Rightarrow OI$ cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $BC$.

Mà $Q$ là ttrung điểm của $BE$

$\Rightarrow IQ$ là đường trung bình của $\Delta BEC$

$\Rightarrow IQ \,//\, CE$ mà $CE\perp AB$

$\Rightarrow IQ\perp AB$, lại có $\widehat{IDA}=90^\circ\left(AD\perp SC\right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AQDI$ nội tiếp đường tròn đường kính $AI$

$\Rightarrow \widehat{QAI}+\widehat{QDI}=180^\circ$ mà $\widehat{BDQ}+\widehat{QDI}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BDQ}=\widehat{QAI}\left(=180^\circ-\widehat{QDI}\right)$.

Xét $\Delta BDQ$ và $\Delta BAI$ có:

$\widehat{B}$ chung; $\widehat{BDQ}=\widehat{BAI}$ (chứng minh trên);

$\Rightarrow \Delta BDQ \backsim \Delta BAI\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BQ}=\dfrac{BA}{BI}\Rightarrow BQ.BA=BD.BI$.

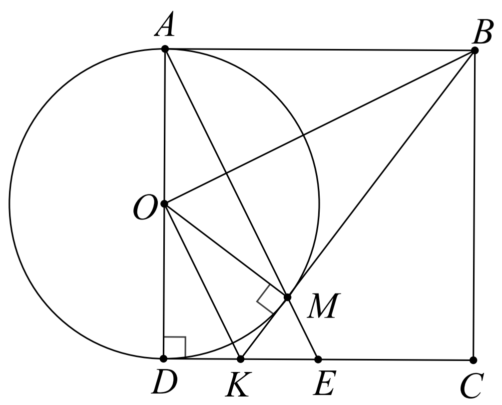
**Câu 22:** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $4\,\text{cm}$. Vẽ đường tròn tâm $O$ đường kính $AD$; kẻ $BM$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm $O$ ($M$ là tiếp điểm, $M\neq A$), $BM$ cắt $CD$ tại $K$.

a) Chứng minh 4 điểm $A, B, M, O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OB\perp OK$ và $BM\,.\,MK=\dfrac{AB^2}{4}$.

c) Đường thẳng $AM$ cắt $CD$ tại $E$. Chứng minh $K$ là trung điểm của đoạn thẳng $ED$ và tính chu vi của tứ giác $ABKD$.

**Lời giải**




a) Ta có $\Delta ABO$ vuông tại $A$, do đó $A$ thuộc đường tròn đường kính $BO$.

Ta có $BM$ là tiếp tuyến tại $M$ của đường tròn $(O)$, suy ra $BM\perp OM$ nên ta có $\Delta MBO$ vuông tại $M$, do đó $M$ thuộc đường tròn đường kính $BO$.

Suy ra 4 điểm $A, B, M, O$ cùng thuộc một đường tròn đường kính $BO$.

b) Ta có $BA\perp OA$ ($A$ thuộc đường tròn tâm $O$)

nên $BA$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$

Tương tự ta có $KD$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$

Ta có $BA$ và $BM$ là hai tiếp tuyến cắt nhau

Suy ra $OB$ là đường phân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Ta có $KD$ và $KM$ là hai tiếp tuyến cắt nhau

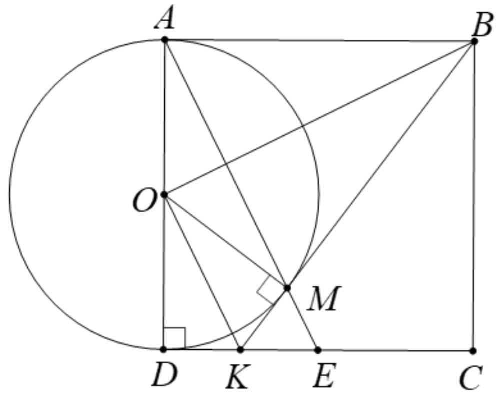
Suy ra $OK$ là đường phân giác của $\widehat{DOM}$ ( tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó $OB$ và $OK$ là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\widehat{AOM}$ và $\widehat{DOM}$.

Suy ra $OB \perp OK$ hay $\widehat{BOK} = 90°$

Xét $\Delta OBK$ vuông tại $O, OM \perp BK$, dễ dàng chứng minh được $\Delta MBO \backsim \Delta MOK$ (g.g) nên suy ra $\frac{BM}{MO} = \frac{MO}{MK}$ (cạnh tương ứng).

suy ra $BM \,.\, KM = OM^2 = OA^2 = \frac{AB^2}{4}$




c) Ta có $\Delta BAM$ cân tại $B\left(BA = BM\right)$

nên $\widehat{BAM} = \widehat{BMA}$

Lại có $\widehat{KEM} = \widehat{BAM}$ (hai góc so le trong)

$\widehat{BMA} = \widehat{KME}$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{KEM} = \widehat{KME}$

Nên $\Delta KEM$ cân tại $K$

Do đó $KE = KM$

Mặt khác $KD = KM$

Do đó $KE = KD$ hay $K$ là trung điểm của $ED$.

Ta có $BM \,.\, KM = OA^2 = OM^2 = 2^2 = 4(\text{cm})$

$KM = \frac{4}{BM} = \frac{4}{4} = 1\,(\text{cm})$

$KD = 1\,(\text{cm})$

Ta có chu vi tứ giác $ABKD$ là

$P_{ABKD} = AB + AD + KB + KD$

$= AB + AD + \left(AB + KD\right) + KD$

$= 3AB + 2KD = 3\ .\ 4\ +\ 2\ .1 = 14\,(\text{cm})$

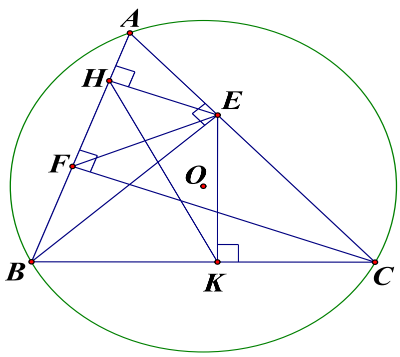
**Câu 23:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$, kẻ đường cao $BE$ của $\Delta ABC$. Gọi $H$ và $K$ lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ $E$ đến $AB$ và $BC$.

a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $BH.BA = BK.BC$.

c) Kẻ đường cao $CF$ của tam giác $ABC\left(F \in AB\right)$ và $I$ là trung điểm của $EF$. Chứng minh ba điểm $H, I, K$ thẳng hàng.

**Lời giải**




*a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp*

Xét tứ giác $BHEK$, có: $\widehat{BHE} = 90°\left(EH \perp AB\right)$ và $\widehat{EKB} = 90°\left(EK \perp BC\right)$

nên $\widehat{BHE} + \widehat{EKB} = 180°$ mà $\widehat{BHE}$ và $\widehat{EKB}$ là hai góc đối

Do đó tứ giác $BHEK$ nội tiếp

*b) Chứng minh $BH.BA = BK.BC$*

Xét $\Delta BEC$ và $\Delta BKE$ có: $\widehat{BEC} = \widehat{BKE} = 90°$; $\widehat{EBC}$: góc chung

Do đó $\Delta BEC \backsim \Delta BKE$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{BE}{BK} = \dfrac{BC}{BE} \Rightarrow BE^2 = BK.BC\ \ (1)$

Chứng minh tương tự ta được $BE^2 = BH.BA\ \ (2)$

Từ $(1)$ và $(2)$, suy ra: $BH.BA = BK.BC$.

*c) Kẻ đường cao $CF$ của tam giác $ABC\left(F \in AB\right)$ và $I$ là trung điểm của $EF$. Chứng minh ba điểm $H, I, K$ thẳng hàng.*

Theo câu a) ta có tứ giác $BHEK$ nội tiếp nên $\widehat{BHK} = \widehat{BEK}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$) $(3)$

Xét $\Delta BEC$ vuông tại $E$ có $EK \perp BC$ nên $\widehat{BEK} = \widehat{ECB}$ (cùng phụ $\widehat{KEC}$) $(4)$

Xét $\Delta BFC$ có $\widehat{BFC} = 90^\circ\left(CF \perp AB\right)$ nên $B, F, C$ thuộc đường tròn đường kính $BC$

Lại có $\Delta BEC$ có $\widehat{BEC} = 90^\circ\left(BE \perp AC\right)$ nên $B, E, C$ thuộc đường tròn đường kính $BC$

Suy ra bốn điểm $B, F, E, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính $BC$

hay tứ giác $BFEC$ nội tiếp

Do đó $\widehat{ECB} = \widehat{HFE}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$) $(5)$

Xét $\Delta FHE$ vuông tại $H$ $(EH \perp AB)$ có $HI$ là đường trung tuyến ứng với cạnh $EF$ ($I$ là trung điểm của $EF$) nên $HI = IF = \dfrac{EF}{2}$

hay $\Delta HIF$ cân tại $I$ do đó $\widehat{IFH} = \widehat{FHI}$ $(6)$

Từ $(3)$, $(4)$, $(5)$ và $(6)$ suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{FHI}$

Do đó $H, I, K$ thẳng hàng.

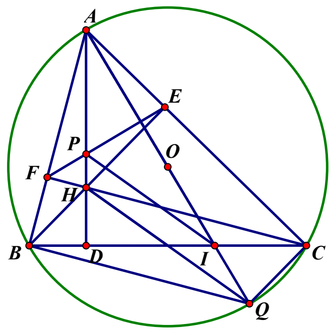
**Câu 24:** Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$, các đường cao $AD, BE, CF$ cắt nhau tại $H$. Kẻ đường kính $AQ$ của đường tròn $(O)$ cắt cạnh $BC$ tại $I$.

a) Chứng minh bốn điểm $A, F, H, E$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAQ}$.

c) Gọi $P$ là giao điểm của $AH$ và $EF$. Chứng minh $\Delta AEP$ đồng dạng với $\Delta ABI$ và $PI \ // HQ$.

**Lời giải**




**a)** Ta có: $BE \perp AC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEH} = 90^0$ nên $\Delta AEH$ vuông tại $E$, cạnh huyền $AH$

Suy ra $A, H, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$ (1)

Ta có: $CF \perp AB$ (gt) $\Rightarrow \widehat{HFA} = 90^0$ nên $\Delta AFH$ vuông tại $F$, cạnh huyền $AH$

Suy ra $A, H, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$ .(2)

Từ (1), (2) suy ra bốn điểm $A, H, E, F$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$

**b)** Xét đường tròn $(O)$ có:

$\widehat{ABC} = \widehat{AQC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $AC$)

$\widehat{ACQ} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\Delta ADB$ và $\Delta ACQ$ có: $\widehat{ABC} = \widehat{AQC}$

$\widehat{ADB} = \widehat{ACQ} = 90^0$

Suy ra $\Delta ADB \sim \Delta ACQ$ suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAQ}$.

**c)** Vì $\widehat{BAD} = \widehat{CAQ} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{DAQ} = \widehat{DAQ} + \widehat{QAC}$

$$Suy\ ra\ \widehat{BAI} = \widehat{PAE}$$

Hoặc chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{AEP}$

Chứng minh $\Delta AEP$ đồng dạng với $\Delta ABI$ (gg)

Vì $\Delta AEP$ đồng dạng với $\Delta ABI \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AP}{AI}$ (1)

Chứng minh $\Delta AEH$ đồng dạng với $\Delta ABQ \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AQ}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AQ} \Rightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AQ}$

$PI // HQ$ ( định lý Talet đảo)

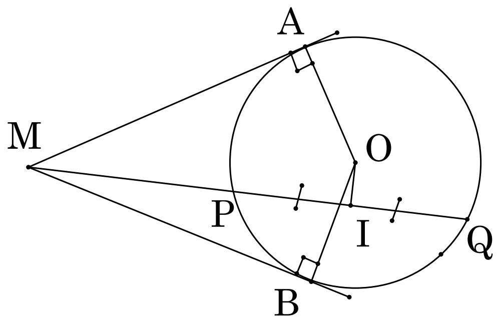
**Câu 25:** Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MPQ (MP < MQ). Gọi I là trung điểm của dây PQ.

a. Chứng minh bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh: $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE // PQ$.

c. Gọi K là trung điểm của $EA$. Chứng minh ba điểm O; I; K thẳng hàng.

**Lời giải**

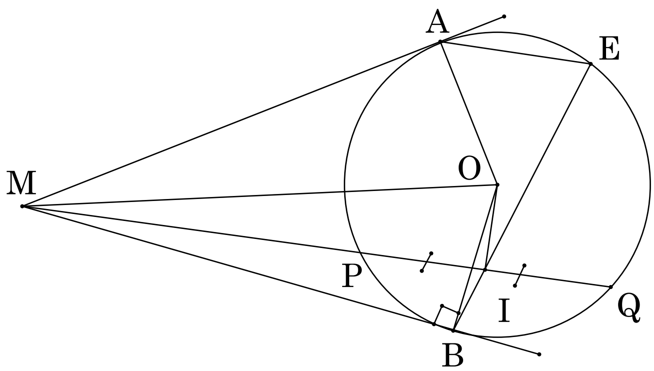



+) Có MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MB \perp OB$ tại B suy ra B thuộc đường tròn đường kính MO (1)

+) Có I là trung điểm của dây PQ của đường tròn (O) nên $OI \perp PQ$ tại I suy ra $OI \perp MI$ tại I, suy ra I thuộc đường tròn đường kính MO (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MO.
Vậy bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh: $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE // PQ$.



+) Xét (O) có các tiếp tuyến MA, MB suy ra tia OM là phân giác của $\widehat{AOB}$

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2}\widehat{BOA}$

Lại có $\widehat{BEA} = \frac{1}{2}\widehat{BOA}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ (3)

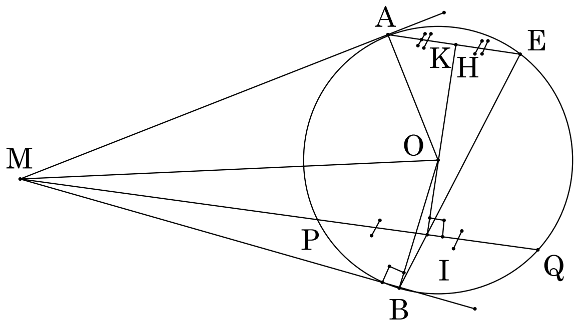
+) Có bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MO (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{BIM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung MB) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BEA} = \widehat{BIM}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AE // IM$ hay $AE // PQ$.

Vậy $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE // PQ$.

c. Gọi K là trung điểm của E**A.** Chứng minh ba điểm O; I; K thẳng hàng.




Kéo dài IO cắt AE tại H. Do $OI \perp PQ$ và $AE // PQ$ (cmt) nên $OI \perp AE$ tại H hay $OH \perp AE$ tại H, suy ra H là trung điểm của AE.
Mà K là trung điểm của AE nên K và H trùng nhau. Suy ra K thuộc đường thẳng OI.
Vậy ba điểm O; I; K thẳng hàng.

**Câu 26:** Cho đường tròn tâm $(O)$, đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn $(O)$ lấy điểm $C$ bất kì ($C$ không trùng với $A$ và $B$). Tiếp tuyến của đường tròn $(O)$ tại $A$ cắt tia $BC$ ở điểm $D$. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên đường thẳng $DO$. Tia $AH$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm $F$ (không trùng với $A$).

a) Chứng minh tứ giác $AHCD$ nội tiếp được một đường tròn.
b) Chứng minh $\Delta CFH$ là tam giác vuông.
c) Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{BH.BC}{BF}$.

**Lời giải**

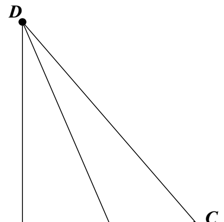
a) Do $AH \perp DH$ $\Rightarrow \widehat{AHD} = 90^0$ nên $A, H, D$ thuộc đường tròn đường kính $AD$ (1)

Lại có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đưởng tròn).

Suy ra $\widehat{ACD} = 90^0$ nên $A, C, D$ thuộc đường tròn đường kính $AD$ (1)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $A, H, C, D$ thuộc đường tròn đường kính $AD$

hay tứ giác $AHCD$ nội tiếp được một đường tròn.



b) Tứ giác $AHCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HCB}=\widehat{DAH}$

Ta có $\widehat{BCF};\widehat{BAF}$ nội tiếp (O) cùng chắn $\overset\frown{BF}$ $\Rightarrow \widehat{BCF}=\widehat{BAF}$

$\Rightarrow \widehat{HCF}=\widehat{HCB}+\widehat{BCF}=\widehat{DAH}+\widehat{BAF}=\widehat{DAB}=90^0$

Vậy $\Delta CFH$ là tam giác vuông tại ***C.***

c) Ta có: $\widehat{FCB}=\widehat{HAB}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{FB}$).

Tam giác $OAD$ vuông tại ***A.*** Khi đó $OA^2=OH.OD$

Mà $OA=OB$ nên $OB^2=OH.OD\Rightarrow \dfrac{OH}{OB}=\dfrac{OB}{OD}$

Suy ra hai tam giác $OHB$ và $OBD$ đồng dạng

Suy ra $\widehat{OBH}=\widehat{ODB}$ (4)

Ta lại có tứ giác $AHCD$ nội tiếp nên $\widehat{ODB}=\widehat{CAH}$ (5)

Tứ giác $ABFC$ nội tiếp nên $\widehat{CAH}=\widehat{CBF}$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $\widehat{OBH}=\widehat{CBF}$ (7)

Từ (3) và (7) suy ra hai tam giác $HAB$ và $FCB$ đồng dạng

Khi đó, ta có: $\dfrac{BC}{BA}=\dfrac{BF}{BH}\Rightarrow \dfrac{BC.BH}{BF}=BA\Rightarrow \dfrac{BC.BH}{BF}=2R$.

Vậy $S=\dfrac{BC.BH}{BF}=2R$.

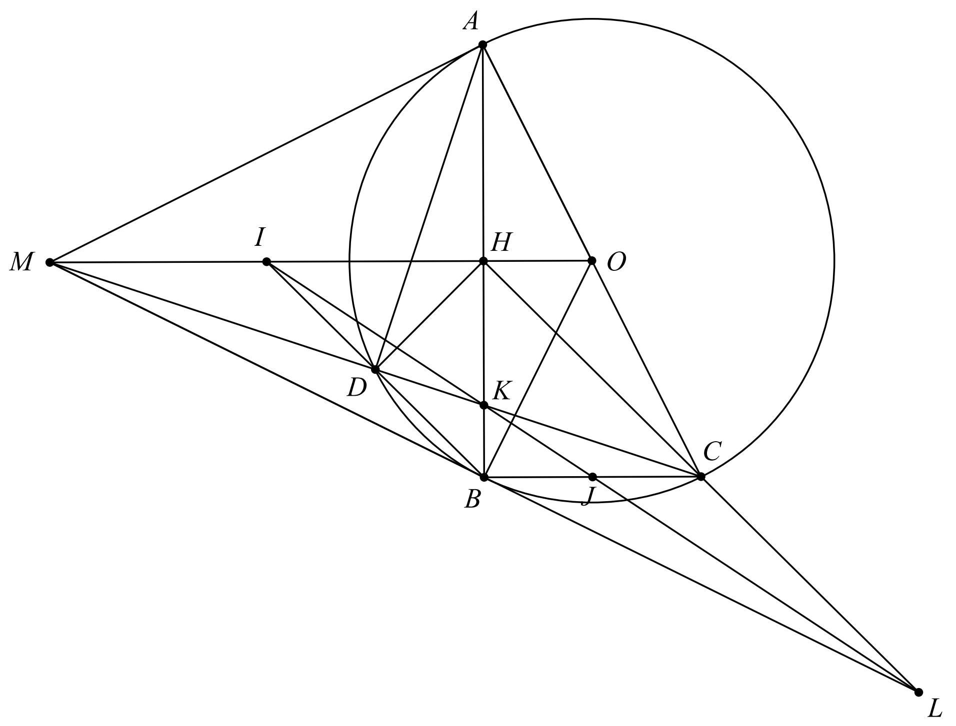
**Câu 27:** Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O)$, kẻ các tiếp tuyến $MA,\ MB$ với $(O)$ ($B,\ C$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính $AC$ của $(O)$. Đoạn thẳng $MC$ cắt $AB$ tại $K$ và cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai $D$. Gọi $I,\ H$ lần lượt là các giao điểm của $MO$ với $BD,\ AB$.

a) Chứng minh bốn điểm $M,\ A,\ O,\ B$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MO$ song song với $BC$ và $IM^2=ID.IB$.

c) Gọi $L$ là giao điểm của $IK,\ HC$. Chứng minh ba điểm $M,\ B,\ L$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) $MA, MB$ là hai tiếp tuyến của $(O)$ nên : $MA \perp OA; MB \perp OB$

- Xét $\Delta MAO$ có $\widehat{MAO} = 90°$ nên 3 điểm $A, M, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính $OM$

- Xét $\Delta MBO$ có $\widehat{MBO} = 90°$ nên 3 điểm $B, M, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính $OM$

Vậy bốn điểm $M$, $A$, $O$, $B$ cùng thuộc một đường tròn. (ĐPCM)

b) Ta có: $MA = MB$ ($MA, MB$ là hai tiếp tuyến của $(O)$)

$OA = OB = R$

Nên $OM$ là trung trực của $AB$ hay $OM \perp AB$ tại $H$

Mà $B$ thuộc đường tròn đường kính $AC$ nên $\widehat{ABC} = 90°$ hay $BC \perp AB$

Suy ra: $MO // BC$

$\widehat{IMD} = \widehat{BCD}$ (2 góc so le trong)

Lại có: $\widehat{MBI} = \widehat{BCD}$ nên $\widehat{IMD} = \widehat{IBM} = \widehat{BCD}$

Xét $\Delta IMD$ và $\Delta IBM$ có :

$\widehat{MIB}$ chung

$\widehat{IMD} = \widehat{IBM}$

Nên: $\Delta IMD \sim \Delta IBM$ (g.g)

Suy ra: $\dfrac{IM}{IB}=\dfrac{ID}{IM}$ hay $IM^2=IB.ID$ (ĐPCM)

c) Ta có $\widehat{ADC}=90^\circ$ nên $\widehat{ADM}=90^\circ$

Suy ra 3 điểm $A,D,M$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AM$ .

Mà $\widehat{AHM}=90^\circ$ nên 3 điểm $A,H,M$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AM$

Suy ra bốn điểm $A,D,H,M$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AM$ .

Hay $AMDH$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IHD}=\widehat{MAD}$

Mà $\widehat{MAD}=\widehat{ABD}$ nên $\widehat{IBH}=\widehat{IHD}$

Xét $\Delta IHD$ và $\Delta IBH$ có:

$\widehat{IHD}=\widehat{IBH}$ (cmt)

$\widehat{HIB}$ chung

Nên: $\Delta IHD\sim\Delta IBH$ , suy ra $IH^2=IB.ID$

Mà $IM^2=IB.ID$ nên $IM=IH$

Gọi $J$ là giao điểm của $IL$ và $BC$

Xét $\Delta MKI$ có $IM//CJ$ nên $\dfrac{JC}{IM}=\dfrac{KJ}{KI}$

Xét $\Delta IKH$ có $BJ//IH$ nên $\dfrac{BJ}{IH}=\dfrac{KJ}{KI}$

Suy ra: $JC=JB$

Hay $J$ là trung điểm của $BC$

Xét $\Delta ILH$ có $CJ//LH$ nên $\dfrac{LC}{LH}=\dfrac{CJ}{HI}=\dfrac{2CI}{2HJ}=\dfrac{CB}{MH}$

Lại có $\widehat{MHL}=\widehat{BCL}$ (đồng vị)

Suy ra $\Delta MHL\sim\Delta BCL$ (c.g.c)

Từ đó ta có: $\widehat{HLB}=\widehat{HLM}$

Vậy $M,B,L$ thẳng hàng.

**Câu 28:** Cho nửa $(O)$ đường kính $AB = 2R$, $C$ là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho $C$ khác $A$ và $AC < CB$. Điểm $D$ thuộc cung nhỏ $BC$ sao cho: $\widehat{COD} = 90^0$. Gọi $E$ là giao điểm của $AD$ và $BC$, $F$ là giao điểm của $AC$ và $BD$, I là trung điểm của EF.

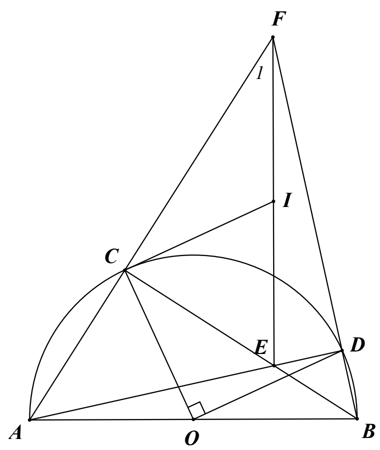
a) Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $FC.FA = FD.FB$

c) Chứng minh $IC$ là tiếp tuyến của $(O)$

d) Hỏi khi $C$ thay đổi thỏa mãn điều kiện Câu toán, $E$ thuộc đường tròn cố định nào?

**Lời giải**




a) Giả sử I là trung điểm của EF

Xét (O) có:

$\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $BC \perp AF$

Nên $\Delta BCF$ hay $\Delta ECF$ vuông tại C, có CI là đường trung tuyến nên $CI = IE = IF = \dfrac{EF}{2}$

$\widehat{ADB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AD \perp BF$

Nên $\Delta ADF$ hay $\Delta EDF$ vuông tại C, có DI là đường trung tuyến nên $DI = IE = IF = \dfrac{EF}{2}$

Khi đó $CI = DI = IE = IF$ suy ra tứ giác FCED nội tiếp đường tròn tâm I đường kính EF

b) Tam giác vuông FDA đồng dạng với tam giác vuông FCB (gg)

$\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{FD}{FC}$ (2 cặp cạnh tương ứng)

nên $FC.FA = FD.FB$ (đpcm)

c) Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCED nên $CI = IF$

khi đó $\Delta ICF$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{FCI}$ (1)

Xét $\Delta OAC$ cân tại $O$ nên $\widehat{CAO} = \widehat{OCA}$ (2)

Xét $\Delta ABF$ có $BC, AD$ là hai đường cao cắt nhau tại $E$.

Nên $E$ là trực tâm của $\Delta ABF$

Nên $EF \perp AB \Rightarrow \widehat{F_1} + \widehat{CAO} = 90^0$ (3)

Từ (1); (2); (3) nên $\widehat{ICF} + \widehat{OCA} = 90^0$

Do đó $\widehat{OCI} = 90° \ hay \ OC \perp CI$

Vậy CI là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Ta có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 180° \\ \widehat{O_2} = 90° \end{array}\right\} nên \ \widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 90°$$

Xét (O) ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{DAB} = \dfrac{1}{2}\widehat{O_1} \\ \widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\widehat{O_3} \end{array}\right\} nên \ \widehat{DAB} + \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$$

Xét $\Delta AEB$ ta có $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 45°$ $nên \ \widehat{AEB} = 135°$

Qua A kẻ $Ax \perp AE$.

Qua B kẻ $By \perp \mathrm{BE}$. By ∩ Ax = K

Xét tứ giác $EAKB$ ta có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{KAE} = 90°\left(Ax \perp AE\right) \\ \widehat{KBE} = 90°\left(By \perp \mathrm{BE}\right) \end{array}\right\} nên \ \widehat{KAE} + \widehat{KBE} = 180°$$

Mà hai góc nằm tại hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $EAKB$ nội tiếp.

$\widehat{AKB} + \widehat{AEB} = 180° \, nên \ \widehat{AKB} = 45°$

Gọi *H* là trung điểm của *EK*.

$nên \ H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác

Xét (H): $\widehat{AKB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AHB} \Rightarrow \widehat{AHB} = 90°$.

Xét $\triangle AHB(\widehat{AHB} = 90°)$ có: HA = HB (bán kính đường tròn tâm H)

$nên \ \Delta AHB$ vuông cân tại H. Mà AB không đổi nên H cố định.

Áp dụng định lí Pytago vào $\triangle AHB$ ta có:

$$\begin{array}{l} HA^2 + HB^2 = AB^2 \\ nên \ 2HA^2 = 4R^2 \\ \qquad HA^2 = 2R^2 \\ \qquad HA = \sqrt{2}R \end{array}.$$

Vậy khi C thay đổi E chạy trên đường tròn (H; $\sqrt{2}R$) cố định.

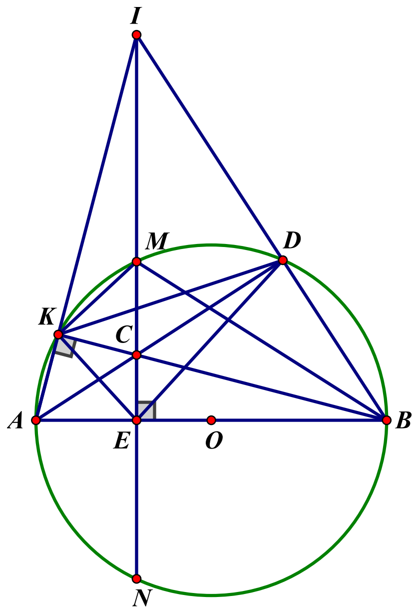
**Câu 29:** Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $MN$ cố định ($MN < 2R$). Kẻ đường kính $AB$ vuông góc với dây $MN$ tại $E$ (điểm $A$ thuộc cung nhỏ $MN$). Lấy điểm $C$ thuộc dây $MN$ ($C$ khác $M$, $N$, $E$). Đường thẳng $BC$ cắt $(O;R)$ tại điểm $K$ ($K$ khác $B$).

a. Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$.

c. Gọi $I$ là giao điểm của hai đường thẳng $AK$ và $MN$; $D$ là giao điểm của hai đường thẳng $AC$ và $BI$. Chứng minh điểm $C$ cách đều ba cạnh của $\Delta DEK$.

**Lời giải**




a. Ta có: $\widehat{AKB} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $(O)$)

nên $\Delta AKC$ vuông tại $K$

Do đó, ba điểm $A, K, C$ thuộc đường tròn đường kính $AC$ (1)

+) Ta có $\widehat{AEC} = 90^0$ (vì đường kính $AB$ vuông góc với dây $MN$ tại $E$ theo giả thiết)

Nên $\Delta AEC$ vuông tại $E$

Do đó, ba điểm $A, E, C$ thuộc đường tròn đường kính $AC$ (2)

Từ (1) và (2), ta có bốn điểm $A, K, E, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AC$

Vậy tứ giác $AKCE$ nội tiếp.

b. + Ta có tứ giác AKCE nội tiếp (cmt)

nên $\widehat{KAE} + \widehat{KCE} = 180^0$ (tính chất)

Do đó, $\widehat{KCE} = 180^0 - \widehat{KAE}$ (1)

+) Ta có bốn điểm AKMB thuộc đường tròn (O) nên tứ giác AKMB nội tiếp

Do đó, $\widehat{KAB}+\widehat{KMB}=180^0$. Suy ra $\widehat{KMB}=180^0-\widehat{KAB}$ (2)

+) Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{KCE}=\widehat{KMB}$ mà $\widehat{KCE}=\widehat{MCB}$ (đối đỉnh)

Nên $\widehat{MCB}=\widehat{KMB}$

+) Xét $\Delta BMC$ và $\Delta BKM$ có:

$\widehat{MBK}$ chung; $\widehat{MCB}=\widehat{KMB}$ (cmt)

Nên $\Delta BMC \backsim \Delta BKM$ (góc-góc)

Do đó $\dfrac{BM}{BK}=\dfrac{BC}{BM}$. Suy ra $BM^2=BK\cdot BC$.

c. Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AECK*, ta có:

$\widehat{EKC}=\widehat{EAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $EC$) (3)

+) Xét tam giác *BAI có BK, IE* là hai đường cao, mà chúng cắt nhau tại ***C.***

Suy ra $C$ trực tâm tam giác $BAI$ nên $\widehat{ADB}=90°$. Suy ra $D$ thuộc đường tròn (O)

+) Ta có $\widehat{CKD}=\widehat{EAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $BD$ của đường tròn (O). (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{EKC}=\widehat{CKD}$

Do đó, $KC$ là tia phân giác của góc $EKD$

+) Chứng minh tương tự câu a ta được tứ giác $BECD$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{CDE}=\widehat{CBE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $CE$)

Mặt khác $\widehat{KDC}=\widehat{CBE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $AK$ của $(O)$)

Suy ra $\widehat{CDE}=\widehat{KDC}$, suy ra $DC$ là tia phân giác của góc $KDE$

Tam giác $KDE$ có $C$ là giao điểm của hai đường phân giác góc $K$ và $D$

Suy ra $C$ cách đều 3 cạnh của tam giác $KDE$

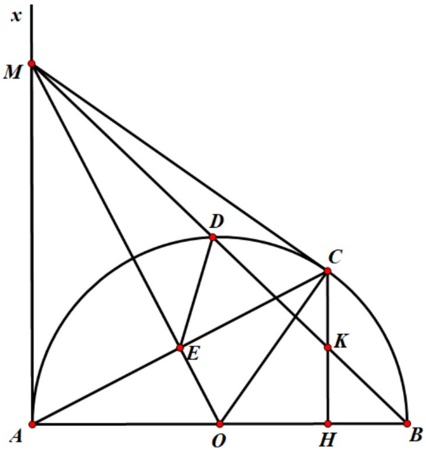
**Câu 30:** Cho nửa đường tròn tâm $O$, bán kính $AB=2R$ và tia tiếp tuyến $Ax$ cùng phía với nửa đường tròn đối với $AB$. Từ điểm $M$ trên $Ax$ kẻ tiếp tuyến thứ hai $MC$ với nửa đường tròn ( $C$ là tiếp điểm). $AC$ cắt $OM$ tại E ; $MB$ cắt nửa đường tròn (O) tại $D$ ($D\neq B$).

a) Chứng minh rằng bốn điểm $A,M,C,O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Tính diện tích hình quạt $OCB$ theo $R$, trong trường hợp $\widehat{AMC}=60^\circ$ và chứng minh $\widehat{ADE}=\widehat{ACO}$.

c) Gọi $H$ là hình chiếu của $C$ trên $AB$. Chứng minh rằng $MB$ đi qua trung điểm của $CH$.

**Lời giải**




a) Do $MA, MB$ là tiếp tuyến của nửa đương tròn (O) nên ta có $\widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^\circ$

Suy ra $\triangle MAO$ là tam giác vuông tại $A$ và $\triangle MCO$ là tam giác vuông tại $C$

Suy ra $M, A, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính $MO$ và $M, C, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính $MO$

Do đó bốn điểm $A, M, C, O$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có $\widehat{AMC} = \widehat{COB} = 60^\circ$ ( hai góc cùng bù với $\widehat{AOC}$)

Diện tích hình quạt $COB$ là $\dfrac{60}{360}\pi \cdot R^2 = \dfrac{\pi R^2}{6}$

Do $MA, MC$ là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) nên $MA = MC$ và $OA = OC$

Từ đó suy ra $M$ thuộc đường trung trực của $AC, O$ thuộc đường trung trực của $AC$

Nên $MO$ vuông góc $AC$ tại trung điểm $E$ của $AC$, suy ra $\widehat{AEM} = 90^\circ$

Suy ra $\triangle AEM$ vuông tại $E$, nên $\triangle AEM$ nội đường tròn đường kính $MA$

Có $\widehat{ADM} = 180 - \widehat{ADB} = 90^\circ$ ( do $\widehat{ADB}$ chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$ ).

Suy ra $\Delta ADM$ vuông tại $D$, nên $\Delta ADM$ nội đường tròn đường kính $MA$

Do đó tứ giác $AMDE$ nội tiếp đường tròn đường kính $MA$.

Xét tứ giác $AMDE$ nội tiếp có : $\widehat{ADE} = \widehat{AMO}$ (cùng chắn $\overparen{AE}$)

Xét tứ giác $AMCO$ nội tiếp có : $\widehat{AMO} = \widehat{ACO}$ (cùng chắn $\overparen{AO}$)

Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ACO}$.

c) Gọi $K$ là giao điểm của $MB$ và $CH$.

Do $CH // AM$ nên theo định lí Thales thì $\dfrac{HK}{AM} = \dfrac{HB}{AB} = \dfrac{HB}{2R} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{HB}{R}$

Ta có $OM // BC$ ( cùng vuông góc với $AC$) suy ra $\widehat{MOA} = \widehat{CBH}$ ( hai góc đồng vị)

Xét $\Delta HCB$ và $\Delta AMO$ có $\widehat{MAO} = \widehat{CHB} = 90^\circ$ ; $\widehat{MOA} = \widehat{CBH}$

Suy ra $\Delta HCB \sim \Delta AMO$, nên $\dfrac{HB}{OA} = \dfrac{CH}{AM} = \dfrac{HB}{R}$

Do đó $\dfrac{HK}{AM} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{CH}{AM}$ hay $HK = \dfrac{1}{2} CH$

Suy ra $MB$ đi qua trung điểm của $CH$ (đpcm).

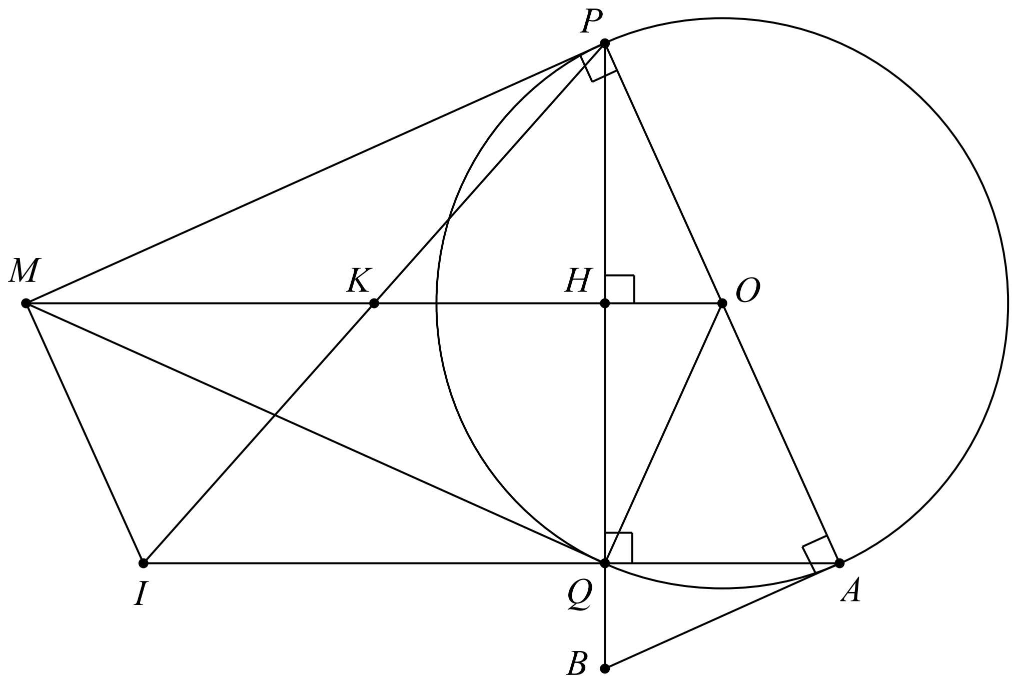
**Câu 31:** Từ điểm $M$ nằm ngoài đường tròn $(O ; R)$ kẻ các tiếp tuyến $MP$ và $MQ$ với đường tròn $(O; R)$, ($P$ và $Q$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính $PA$. Tiếp tuyến tại $A$ với đường tròn $(O; R)$ cắt $PQ$ tại $B$.

a) Chứng minh: $AQ$ song song với $OM$ .

b) Chứng minh: $PQ.PB = 4R^2$.

c) Gọi $K$ là trung điểm của $MO$. Tia $PK$ cắt $AQ$ tại $I$. Chứng minh tứ giác $MIAO$ là hình bình hành.

**Lời giải**




a) Chứng minh: $AQ$ song song với $OM$ .

Xét $(O)$ ta có: $\widehat{AQP} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $AQ \perp PQ$. (1)

Mặt khác, $MP$ và $MQ$ là hai tiếp tuyến của $(O)$, cắt nhau tại $M$. Theo chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $MP = MQ$ và $MO$ là phân giác của $\widehat{POQ}$.

Suy ra: $\Delta MPQ$ cân tại $M$, đường phân giác $MO$ đồng thời là đường cao, hay $OM \perp PQ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AQ // OM$ .

b) Chứng minh: $PQ.PB = 4R^2$.

Vì $AB$ là tiếp tuyến của $(O)$ tại $A$ nên $AB \perp OA$.

Xét $\Delta AQP$ và $\Delta BAP$ có: $\widehat{AQP} = \widehat{BAP}$ (góc vuông), $\widehat{BPA}$ chung.

Suy ra $\Delta AQP \backsim \Delta BAP$ (g-g).

Suy ra: $\frac{PQ}{PA} = \frac{PA}{PB}$. Suy ra: $PQ.PB = PA^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

c) Gọi $K$ là trung điểm của $MO$. Tia $PK$ cắt $AQ$ tại $I$. Chứng minh tứ giác $MOAI$ là hình bình hành.

Xét $\Delta AIP$ có:

+ $O$ là trung điểm của $AP$ (vì $O$ là tâm đường tròn đường kính $AP$)

+ $OK // AI$ (vì $AQ // OM$ - chứng minh trên).

Suy ra $K$ là trung điểm của $IP$ (định lý).

Suy ra $OK$ là đường trung bình của $\Delta AIP$.

Suy ra: $OK = \frac{1}{2}AI$ (tính chất đường trung bình của tam giác).

Lại có: $OK = \frac{1}{2}OM$ (vì $K$ là trung điểm của $OM$) nên $AI = OM$.

Xét tứ giác $MIAO$ có: $AI // OM$ và $AI = OM$ (chứng minh trên).

Suy ra $MIAO$ là hình bình hành.

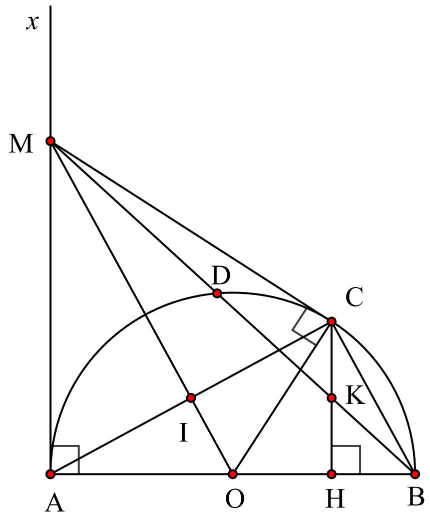
**Câu 32:** Cho nửa đường tròn $(O)$, đường kính $AB$. Từ điểm $M$ bất kì trên tiếp tuyến $Ax$ của nửa đường tròn $(O)$ vẽ tiếp tuyến thứ hai $MC$ ($C$ là tiếp điểm). Gọi $I$ là giao điểm của $OM$ và $AC$.

a). Chứng minh bốn điểm $A$, $M$, $C$, $O$ cùng thuộc một đường tròn.

b). Chứng minh $OI.OM = OA^2$ và $OM // BC$.

c). Gọi $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ $C$ đến $AB$, $MB$ cắt đường tròn $(O)$ tại $D$ và cắt $CH$ tại $K$. Chứng minh $K$ là trung điểm của $CH$.

**Lời giải**




**a) Chứng minh bốn điểm $A$, $M$, $C$, $O$ cùng thuộc một đường tròn.**

Xét đường tròn $(O)$,

+ Do $AM$ là tiếp tuyến của $(O)$:

$MA \perp OA$

$\widehat{MAO} = 90^0$

Suy ra $A$ thuộc đường tròn đường kính $MO$ (1)

+ Do $MC$ là tiếp tuyến của $(O)$:

$MC \perp OC$

$\widehat{MCO} = 90^0$

Suy ra $C$ thuộc đường tròn đường kính $MO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm $A$, $M$, $C$, $O$ cùng thuộc một đường tròn (đpcm)

**b) Chứng minh $OI.OM = OA^2$ và $OM // BC$.**

Xét đường tròn $(O)$

Có hai tiếp tuyến $MA$, $MC$ cắt nhau tại $M$ suy ra $MA = MC$

Mà $OA = OC = R$

Suy ra $OM$ là đường trung trực của $AC$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow OM \perp AC(3) \\ I \in AC \end{array}\right\} \Rightarrow AI \perp OM$$

Xét $\Delta OIA$ và $\Delta OAM$ có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{OIA} = \widehat{OAM} = 90^0 \\ \widehat{AOM}\ chung \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAI \backsim \Delta OAM$$

$$\frac{OI}{OA} = \frac{OA}{OM}$$

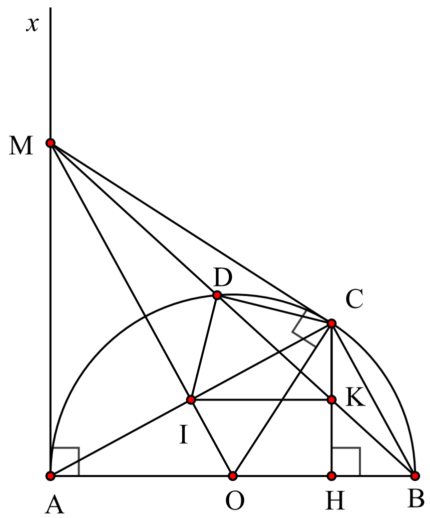
$OI.OM = OA^2$ (đpcm)

Ta có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AC \perp BC$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow OM // BC$ (đpcm)

**c) Chứng minh K là trung điểm của CH.**




Do $CH // AM$ (cùng vuông góc với $AB$)

$\widehat{HCA} = \widehat{CAM}$ (So le trong)(5)

Mà $MA = MC$ (cmt) => $\Delta MAC$ cân tại $M$

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA}$ (t/c tam giác cân) (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{\text{HCA}}$

$\Rightarrow$ $AC$ là tia phân giác $\widehat{MCH}$

Mà $AC \perp CB(cmt)$

$\Rightarrow$ $CB$ là phân giác ngoài tại $C$ của $\Delta KCM$ $\Rightarrow \dfrac{BK}{BM} = \dfrac{CK}{CM}(7)$

Xét $\Delta ABM$ có

$KH \mathbin{//} AM$ (cùng vuông góc với $AB$)

$\Rightarrow \dfrac{BK}{BM} = \dfrac{KH}{AM}(8)$

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \dfrac{CK}{CM} = \dfrac{KH}{AM}$

Mà $CM = AM(cmt)$

$\Rightarrow CK = KH$

Vậy $K$ là trung điểm của $CH$ (đpcm)

**Câu 33:** Cho tứ giác ABCD có AB nhỏ hơn AD; BC nhỏ hơn CD nội tiếp đường tròn đường kính BD, AB cắt DC tại E; CB cắt DA tại F, DB cắt EF tại G.

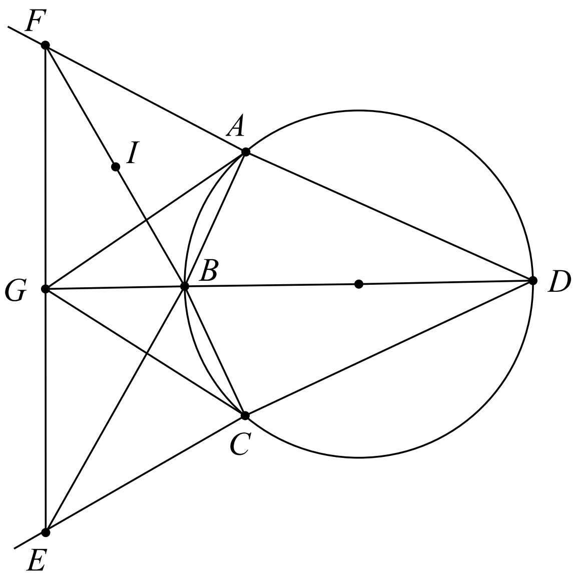
a. Chứng minh rằng $BD \perp \text{EF}$ tại G

b. Chứng minh bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn.

c. Chứng minh rằng $BA.BE = BC.BF = BD.BG$

d. Chứng minh rằng B là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ACG$

**Lời giải**




a.Chứng minh rằng $BD \perp \text{EF}$ tại G

Có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^0$ ( góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BD)

Suy ra $AE \perp DF$ và $FC \perp DE$

Mà AE cắt FC tại B

Suy ra B là trực tâm của $\Delta DEF$

Suy ra $BD \perp EF$ tại G

b. Chứng minh bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn.

Gọi I là trung điểm của FB

Ta có $BD \perp EF$ tại G (cmt)

Suy ra $\Delta FGB$ vuông tại G suy ra $GI = IF = IB$ (1)

$AE \perp DF$ (cmt) suy ra $\rightarrow \Delta FBA$ vuông tại A suy ra $AI = IF = IB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GI = AI = IF = IB$

Suy ra bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn. (đpcm)

c. Chứng minh rằng $BA.BE = BC.BF = BD.BG$

+ c/m $\Delta BFA \backsim \Delta BEC$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BF}{BE}$ suy ra $BA.BE = BF.BC$ (1)

+ c/m $\Delta BGF \backsim \Delta BCD$ (g.g) suy ra $\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{BG}{BC}$ suy ra $BF.BC = BD.BG$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BA.BE = BC.BF = BD.BG$ (đpcm)

d. Chứng minh rằng B là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ACG$

+ Xét tứ giác ABGF có bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn đường kính BF ( theo câu b) suy ra tứ giác ABGF nội tiếp đường tròn đường kính BF.

+ Do $\widehat{BCE} = \widehat{BGE} = 90^0$ nên Tứ giác DCEG nội tiếp đường tròn đường kính BE.

+Do $\widehat{EAF} = \widehat{ECF} = 90^0$ nên Tứ giác ACEF nội tiếp đường tròn đường kính EF.

Do đó $\widehat{GAB} = \widehat{GFB}$ ( $= \dfrac{1}{2}$ sđ cung BG)

$\widehat{CAE} = \widehat{EFA}$ ( $= \dfrac{1}{2}$ sđ cung CE)

Suy ra $\widehat{BAG} = \widehat{CAE} \left( = \widehat{EFC} \right)$ suy ra $AB$ là đường phân giác của $\Delta ACG$ (1)

Do đó $\widehat{FCA} = \widehat{FEA}$ ( $= \dfrac{1}{2}$ sđ cung AF )

$\widehat{GCF} = \widehat{GEB}$ ( $= \frac{1}{2}$ sđ cung $BG$ )

Suy ra $\widehat{FCA} = \widehat{GCF}\left(= \widehat{FAE}\right)$ suy ra $CB$ là đường phân giác của $\Delta ACG$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra B là giao hai đường phân giác của $\Delta ACG$

Suy ra B là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ACG$ (đpcm)

**Câu 34:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

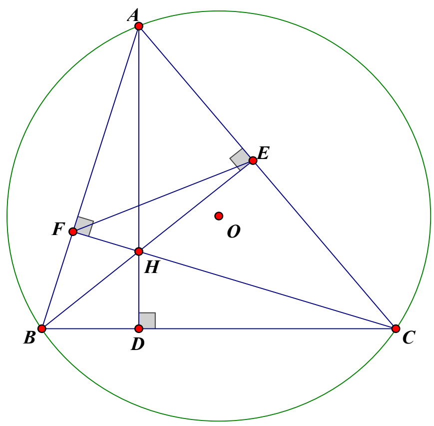
a) Chứng minh bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $DB.DC = DH.DA$ .

c) Đường thẳng AO cắt đường tròn tâm O tại điểm K khác điểm $A.$ Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK và $BC.$ Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng $BC.$

d) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$ .

## Lời giải




a) ***(0,75 điểm)***

Ta có: $\widehat{ADB} = 90^0$ ( vì $AD \perp BC$

$\widehat{AEB} = 90^0$ (vì $BE \perp AC$ )

Xét tứ giác ABDF có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^0$

mà D và F là 2 đỉnh kề nhau cùng cạnh AB dưới 1 góc vuông

Nên 4 điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) ***(0,75 điểm)*** Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABDF có

$\widehat{EBD}$ là góc nội tiếp chắn cung DE

$\widehat{EAD}$ là góc nội tiếp chắn cung DE

Nên $\widehat{EBD} = \widehat{EAD}$ (Hệ quả góc nội tiếp) hay

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD}$

Xét ΔBHD và ΔACD có $\widehat{HDB} = \widehat{CDA} = 90^0$

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD}$ (cmt)

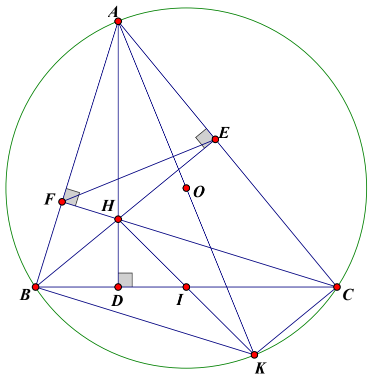
Do đó $\Delta BHD$ đồng dạng với $\Delta ACD$ (g-g)

Suy ra $\frac{DB}{AD} = \frac{DH}{DC}$ => D**B.**DC = DH.DA

*c) **(0,75 điểm)** Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng B**C.***

Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{ABK}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $KB\perp AB$.




Mặt khác: $CH\perp AB$ (giả thiết)

Suy ra: $KB // CH$ (quan hệ vuông góc song song) (1)

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ACK}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $KC\perp AC$.

Mặt khác: $BH\perp AC$ (giả thiết)

Suy ra: $KC // BH$ (quan hệ vuông góc song song) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết), suy ra hai đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (tính chất).

Mà I là giao điểm của BC và HK nên I là trung điểm của B**C.**

d) ***(0,75 điểm)*** *Tính* $\dfrac{AH}{AD}+\dfrac{BH}{BE}+\dfrac{CH}{CF}$.

Đặt $P=\dfrac{AH}{AD}+\dfrac{BH}{BE}+\dfrac{CH}{CF}$

Khi đó

$$P=\frac{AD-HD}{AD}+\frac{BE-HE}{BE}+\frac{CF-HF}{CF}$$

$$P=1-\frac{HD}{AD}+1-\frac{HE}{BE}+1-\frac{HF}{CF}$$

$$P=3-\left(\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}\right)$$

Ta có: $\dfrac{HD}{AD}=\dfrac{\frac{1}{2}HD\cdot BC}{\frac{1}{2}AD\cdot BC}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{HE}{BE}=\frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}};\ \frac{HF}{CF}=\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=\frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{AABC}}=\frac{S_{\Delta HBC}+S_{\Delta HAC}+S_{\Delta HAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{\Delta BC}}=1$$

Vậy $P=\dfrac{AH}{AD}+\dfrac{BH}{BE}+\dfrac{CH}{CF}=3-1=2$

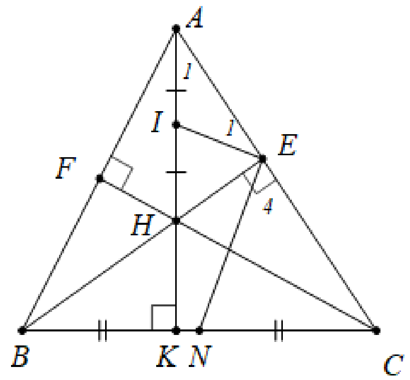
**Câu 35:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc đều nhọn. Các đường cao $AK$, $BE$ và $CF$ cắt nhau tại $H$. Gọi $I$ là trung điểm của đoạn $AH$, $N$ là trung điểm của đoạn $BC$.

a) Chứng minh bốn điểm $A$, $E$, $H$, $F$ nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh $NE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $AH$.

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

**Lời giải**




a) Chứng minh bốn điểm $A$, $E$, $H$, $F$ nằm trên cùng một đường tròn.

Ta có $\widehat{AEB} = 90°$ (do $BE$ là đường cao của $\Delta ABC$) hay $\widehat{AEH} = 90°$

$\widehat{AFC} = 90°$ (do $CF$ là đường cao của $\Delta ABC$) hay $\widehat{AFH} = 90°$

Suy ra bốn điểm $A, E, H, F$ cùng nằm trên một đường tròn đường kính $AH$ (đpcm)

b) Chứng minh $NE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $AH$;

Vì $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AH$ nên $I$ là tâm đường tròn đường kính $AH$

Suy ra $IA = IE$

Vì $\Delta IAE$ cân tại $I$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (1)

$\Delta EBC$ vuông tại $E$ có $EN$ là đường trung trrung tuyến ứng với cạnh huyền $BC$

Nên $EN = NC$ $\left(= \dfrac{BC}{2}\right)$

Suy ra $\Delta ENC$ cân tại $N$ nên $\widehat{NCE} = \widehat{E_4}$ (2)

Xét $\Delta AKC$ vuông tại $K$ có $\widehat{KCA} + \widehat{A_1} = 90°$ hay $\widehat{NCE} + \widehat{A_1} = 90°$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{E_1} + \widehat{E_4} = 90°$

Lại có $\widehat{E_1} + \widehat{E_4} + \widehat{IEN} = 180°$ (do $A$; $E$; $C$ thẳng hàng)

Suy ra $90° + \widehat{IEN} = 180°$ hay $\widehat{IEN} = 90°$

Suy ra $EN \perp EI$ tại $E$

Do đó $NE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $AH$ (đpcm)

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK\,.\,CB$.

Áp dụng định lí Py – Ta – Go $\Delta CIK$ vuông tại $K$, ta có: $CI^2 = CK^2 + IK^2$

Lại có $IA = IE = IH$ (cùng bán kính đường tròn tâm I)

Suy ra $CI^2 - IE^2 = CK^2 + IK^2 - IE^2$

$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IE)$

$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IH) \ = CK^2 + AK\,.\,KH \ \ (4)$

Ta lại có $CK.CB = CK(CK + KB) \ = CK^2 + CK\,.\,KB \ \ (5)$

Xét $\Delta KBH$ và $\Delta KAC$ có

$\widehat{KBH} = \widehat{KAC} \ \ (= 90° - \widehat{ACB}); \ \widehat{BKH} = \widehat{AKC} = 90°$

Do đó $\Delta AHK \backsim \Delta ACB \ (g - g)$

Nên $\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KH}{KC}$ suy ra $KA\,.\,KH = KB\,.\,KC$ hay $AK\,.\,KH = CK\,.\,KB \ \ (6)$

Từ $(4),(5)$ và $(6)$ suy ra $CI^2 - IE^2 = CK\,.\,CB$ (đpcm)

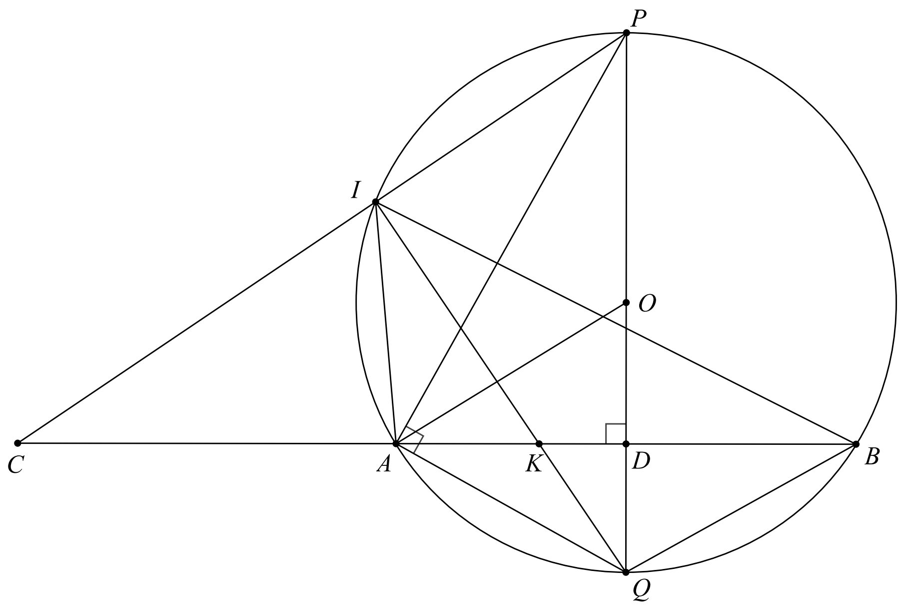
**Câu 36:** Cho đường tròn $(O)$ và dây cung $AB$. Trên tia đối của tia $AB$ lấy điểm $C$. Từ điểm chính giữa $P$ của cung lớn $AB$ kẻ đường kính $PQ$ của đường tròn (O) cắt dây $AB$ tại $D$. Tia $CP$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm $I$ ( điểm $I$ khác điểm $P$ ). Các dây $AB$ và $QI$ cắt nhau tại $K$

a) Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $CI.CP = CK.CD$ và $IC$ là phân giác góc ngoài tại đỉnh $I$ của tam giác $AIB$.

c) Giả sử ba điểm $A; B; C$ cố định. Chứng minh khi đường tròn $(O)$ thay đổi nhưng vẫn đi qua hai điểm $A$ và $B$ thì đường thẳng $QI$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải**




a) Chứng minh: Tứ giác $PDKI$ nội tiếp

Ta có $PQ$ là đường kính của đường tròn (O). Suy ra $\widehat{PIQ} = 90°$ suy ra $CI.CP = CD.CK$

Do P là điểm chính giữa của cung lớn A**B.** Suy ra PA = PB

Mà OA = OB (cùng là bán kính của (O))

Suy ra PO là đường trung trực của AB suy ra $OP \perp AB$ tại D

Suy ra $PQ \perp AB$

$\widehat{PDK} = 90°$

Nên $\widehat{PDK} + \widehat{PIK} = 90° + 90° = 180°$

Tứ giác PDKI nội tiếp (hai góc đối bù nhau )

b) Xét tam giác $CIK$ và tam giác $CDP$ ta có:

$\widehat{C}$ chung

$\widehat{CIK} = \widehat{CDP} = 90°$

$\Delta CIK \square \Delta CDP(g.g)$

$\frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CP}$ suy ra $CI.CP = CD.CK$

$CI.CP = CD.CK$

Ta có PO là đường trung trực của AB, hay PQ là đường trung trực của AB

$\mathrm{QA} = \mathrm{QB}$ hay điểm $Q$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ nên $\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BQ}$

Do đó $\widehat{AIQ} = \widehat{BIQ}$ ( hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau )

Hay $IK$ là đường phân giác trong của tam giác $AIB$ ; và lại có $IK \perp IC$ ( $\widehat{PIQ} = 90°$)

nên $IC$ là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh $I$ của tam giác $AIB$

c) Ta đi chứng minh $K$ là điểm cố định

Ta có điểm $D$ là trung điểm $AB$( $\mathrm{OD} \perp \mathrm{AB}$)

Do $ABPI$ là tứ giác nội tiếp

$\widehat{CAI} = \widehat{CPB}$

$\Delta CAI \square \Delta CPB(g.g)$

$\frac{CA}{CP} = \frac{CI}{CB}$

$CA.CB = CI.CP$

Vậy nên $CA.CB = CK.CD\left(= CI.CP\right)$

$CK.CD = \left(CD - DA\right)\left(CD + DB\right)$

$CK.CD=\left(CD-\dfrac{AB}{2}\right)\left(CD+\dfrac{AB}{2}\right)$

$CK.CD=CD^2-\dfrac{AB^2}{4}$

$CD^2-CK.CD=\dfrac{AB^2}{4}$

$CD.KD=\dfrac{AB^2}{4}$

$KD=\dfrac{AB^2}{4CD}$

Vì $A;\ B;\ C;\ D$ là bốn điểm cố định nên $K$ điểm cố định.

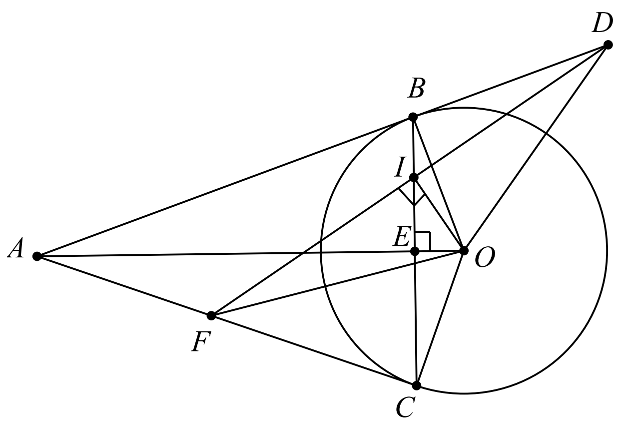
**Câu 37:** Cho đường tròn $(O)$, từ điểm $A$ ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến $AB$ và $AC$ ($B$, $C$ là các tiếp điểm), $OA$ cắt $BC$ tại E.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BC$ vuông góc với $OA$ và $BA.BE=AE.BO$.

c) Gọi $I$ thuộc đoạn thẳng $BE$, đường thẳng qua $I$ và vuông góc $OI$ cắt các tia $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $D$ và $F$. Chứng minh $F$ là trung điểm của $AC$.

**Lời giải**




a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Xét $(O)$ có: $AB$ là tiếp tuyến tại $B$ (GT) nên $AB\perp OB\Rightarrow \widehat{ABO}=90^0$

$\Rightarrow \Delta ABO$ vuông tại $B$ nên điểm $B$ thuộc đường tròn đường kính $AO$ (1)

Mặt khác: $AC$ là tiếp tuyến tại $C$ (GT) nên $AC\perp OC\Rightarrow \widehat{ACO}=90^0$

$\Rightarrow \Delta ACO$ vuông tại $C$ nên điểm $C$ thuộc đường tròn đường kính $AO$ (2)

Từ (1) và (2) sy ra: 4 điểm $A,B,O,C$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AO$

Do đó, tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính $AO$

b) Chứng minh $BC$ vuông góc với $OA$ và $BA.BE = AE.BO$.

* Chứng minh $BC$ vuông góc với $OA$

Xét $(O)$ có: $AB$ và $AC$ là hai tiếp tuyến cắt nhau ở $A$ (GT)

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OB = OC$ ($B, C$ thuộc đường tròn $(O)$)

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của $BC$ nên $BC \perp OA$

* Chứng minh $BA.BE = AE.BO$

Xét $\Delta ABO$ và $\Delta AEB$ có:

$\widehat{ABO} = \widehat{AEB} = 90^0 (cmt)$

$\widehat{BAO}$: góc chung

Suy ra: $\Delta ABO \sim \Delta AEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BO}{EB} \Rightarrow AB.EB = AE.BO$

c) Gọi $I$ là điểm thộc đoạn thẳng $BE$, đường thẳng qua $I$ và vuông góc $OI$ cắt các tia $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $D$ và $F$. Chứng minh $F$ là trung điểm của $AC$.

Vì $AB \perp OB \Rightarrow \widehat{DBO} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta DBO$ vuông tại $B$ nên điểm $B$ thuộc đường tròn đường kính $DO$ (1)

Vì $OI \perp DF \Rightarrow \widehat{DIO} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta DIO$ vuông tại $I$ nên điểm $I$ thuộc đường tròn đường kính $DO$ (2)

Từ (1) và (2) sy ra: 4 điểm $D, B, I, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính $DO$

Do đó, tứ giác $DBIO$ nội tiếp đường tròn đường kính $DO$

$\Rightarrow \widehat{IDO} = \widehat{IBO}$ ( 2 góc nội tiếp cùng chắn cung $IO$)

CMTT ta có: $\widehat{IFO} = \widehat{ICO}$

Mặt khác: $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân ở $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ hay $\widehat{IBO} = \widehat{ICO}$

Do đó: $\widehat{IDO} = \widehat{IFO} \Rightarrow \Delta ODF$ cân ở $O$ mà $OI \perp DF$ (GT)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $DF$

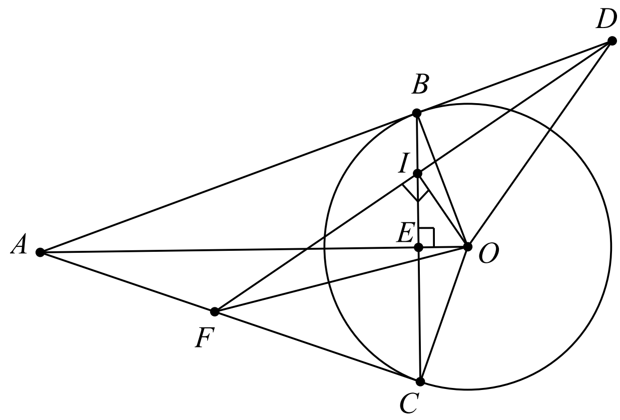
**Câu 38:** Cho đường tròn $(O)$, từ điểm $A$ ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến $AB$ và $AC$ ($B$, $C$ là các tiếp điểm), $OA$ cắt $BC$ tại E.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BC$ vuông góc với $OA$ và $BA.BE = AE.BO$.

c) Gọi $I$ thuộc đoạn thẳng $BE$, đường thẳng qua $I$ và vuông góc $OI$ cắt các tia $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $D$ và $F$. Chứng minh $F$ là trung điểm của $AC$.

**Lời giải**




a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Xét $(O)$ có: $AB$ là tiếp tuyến tại $B$ (GT) nên $AB \perp OB \Rightarrow \widehat{ABO} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ABO$ vuông tại $B$ nên điểm $B$ thuộc đường tròn đường kính $AO$ (1)

Mặt khác: $AC$ là tiếp tuyến tại $C$ (GT) nên $AC \perp OC \Rightarrow \widehat{ACO} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ACO$ vuông tại $C$ nên điểm $C$ thuộc đường tròn đường kính $AO$ (2)

Từ (1) và (2) sy ra: 4 điểm $A, B, O, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AO$

Do đó, tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính $AO$

b) Chứng minh $BC$ vuông góc với $OA$ và $BA.BE = AE.BO$.

* Chứng minh $BC$ vuông góc với $OA$

Xét $(O)$ có: $AB$ và $AC$ là hai tiếp tuyến cắt nhau ở $A$ (GT)

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OB = OC$ ($B$, $C$ thuộc đường tròn $(O)$)

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của $BC$ nên $BC \perp OA$

* Chứng minh $BA.BE = AE.BO$

Xét $\Delta ABO$ và $\Delta AEB$ có:

$\widehat{ABO} = \widehat{AEB} = 90^0 (cmt)$

$\widehat{BAO}$ : góc chung

Suy ra: $\Delta ABO \sim \Delta AEB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BO}{EB} \Rightarrow AB.EB = AE.BO$

c) Gọi $I$ là điểm thộc đoạn thẳng $BE$, đường thẳng qua $I$ và vuông góc $OI$ cắt các tia $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $D$ và $F$. Chứng minh $F$ là trung điểm của $AC$.

Vì $AB \perp OB \Rightarrow \widehat{DBO} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta DBO$ vuông tại $B$ nên điểm $B$ thuộc đường tròn đường kính $DO$ (1)

Vì $OI \perp DF \Rightarrow \widehat{DIO} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta DIO$ vuông tại $I$ nên điểm $I$ thuộc đường tròn đường kính $DO$ (2)

Từ (1) và (2) sy ra: 4 điểm $D, B, I, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính $DO$

Do đó, tứ giác $DBIO$ nội tiếp đường tròn đường kính $DO$

$\Rightarrow \widehat{IDO} = \widehat{IBO}$ ( 2 góc nội tiếp cùng chắn cung $IO$)

CMTT ta có: $\widehat{IFO} = \widehat{ICO}$

Mặt khác: $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân ở $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ hay $\widehat{IBO} = \widehat{ICO}$

Do đó: $\widehat{IDO} = \widehat{IFO} \Rightarrow \Delta ODF$ cân ở $O$ mà $OI \perp DF$ (GT)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $DF$

**Câu 39:** Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kính $R$ và $AH$ là đường cao của tam giác $ABC$. Gọi $M, N$ lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ $H$ đến $AB$ và $AC$.

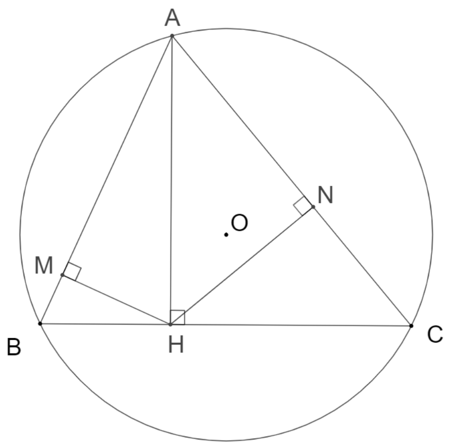
a) Chứng minh bốn điểm $A, M, H, N$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{ANM}$ và $OA$ vuông góc với $MN$.

c) Cho biết $AH = R\sqrt{2}$. Chứng minh $M, O, N$ thẳng hàng.

**Lời giải**

a)

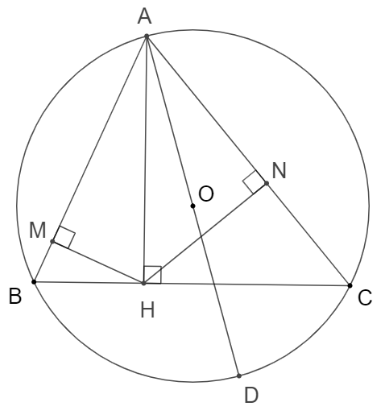



Ta có $HM \perp AB$ tại $M$ nên $\Delta AMH$ vuông tại $M$, suy ra $A, M, H$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$.

Ta có $HN \perp AC$ tại $N$ nên $\Delta ANH$ vuông tại $N$, suy ra $A, N, H$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$.

Do đó 4 điểm $A, M, H, N$ cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

b)




Xét $\Delta AMH$ và $\Delta AHB$ có $\widehat{AMH} = \widehat{AHB} = 90°$, $\widehat{A}$ chung

$\Rightarrow \Delta AMH \backsim \Delta AHB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AH} = \dfrac{AH}{AB}$

$\Rightarrow AH^2 = AM.AB(1)$

Chứng minh tương tự có $AH^2 = AN.AC(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AM.AB = AN.AC \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$

Xét $\Delta AMN$ và $\Delta ACB$ : $\begin{cases} \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB} \\ \widehat{A} chung \end{cases}$

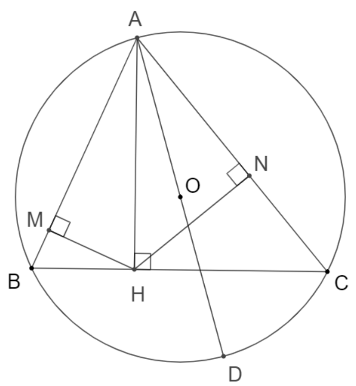
$\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ACB(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ABC}$ (hai góc tương ứng) (3)

Kẻ đường kính $AD$ ta có $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $DC$ ) (4)

Từ $(3);(4)$ suy ra $\widehat{ANM} + \widehat{DAC} = \widehat{ABC} + \widehat{DBC} = \widehat{ABD} = 90°$

$\Rightarrow AO \perp MN$

c)




Theo chứng minh trên có $AN.AC = AH^2 = 2R^2 = AO.AD$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AO}{AC}$

Xét $\Delta$ANO và $\Delta$ADC: $\begin{cases} \dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AO}{AC} \\ \hat{A} chung \end{cases}$

$\Rightarrow\ \Delta ANO \backsim \Delta ADC (c.g.c)$

$\Rightarrow\ \widehat{AON} = \widehat{ACD} = 90°$

Chứng minh tương tự $\widehat{AOM} = \widehat{ABD} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{AON} = 90° + 90° = 180°$

Hay $\widehat{AMN} = 180° \Rightarrow A, M, N$ thẳng hàng.

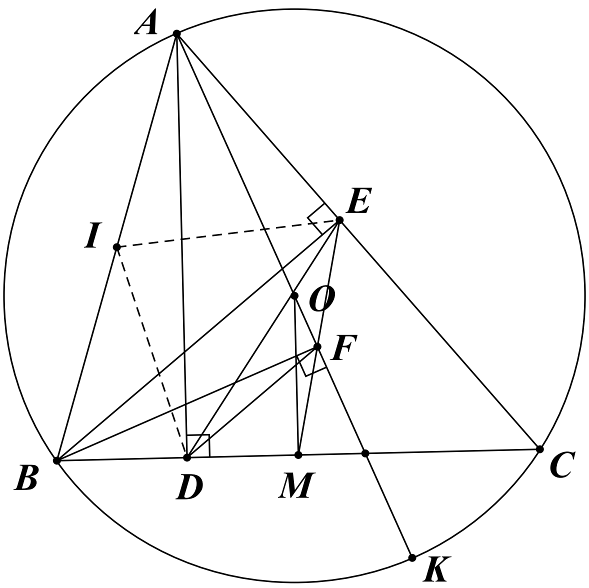
**Câu 40:** Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $BC$ cố định không đi qua tâm. Gọi $A$ là một điểm bất kì trên cung lớn $BC$ sao cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$. Kẻ các đường cao $AD, BE$ của tam giác $ABC$.

a) Chứng minh: Bốn điểm $A, E, D, B$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Kẻ đường kính $AK$ của đường tròn tâm $O$. Gọi F là hình chiếu của điểm $B$ trên $AK$. Chứng minh rằng: $AB.AC = AK.AD$ và $DF \perp AC$

c) Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh: ba điểm $E; F; M$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a)

+ Có $AD$ là đường cao của tam giác $ABC$

nên $AD \perp BC\ \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^0$

+ Có $BE$ là đường cao của tam giác $ABC$

nên $BE \perp AC\ \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^0$

+ Gọi $I$ là trung điểm của $AB$

$\Delta ABD$ vuông tại $D \Rightarrow IA = IB = ID = \dfrac{AB}{2}$ (1)

$\Delta ABE$ vuông tại $E \Rightarrow IA = IB = IE = \dfrac{AB}{2}$ (2)

Từ $(1);(2)$ suy ra $IA = IB = IE = ID\left(=\dfrac{AB}{2}\right)$

Nên bốn điểm $A, B, E, D$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh: $\widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90^0$

+ Chỉ ra: $\widehat{ABD} = \widehat{AKC}$

Chứng minh $\Delta$ ABD đồng dạng $\Delta$ AKC (g.g)

và A**B.**AC = AK.AD

+ Chứng minh tứ giác AFDB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BAD}$ (1)

+ Vì $\Delta$ ABD đồng dạng $\Delta$ AKC

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{KAC}$ (2)

+ Chứng minh tứ giác AEFB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{EBF}$

Hay $\widehat{CAK} = \widehat{EBF}$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra: $\widehat{EBF} = \widehat{BFD}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên BE // DF

Lại có BE $\perp$ AC (GT)

Vậy DF $\perp$ AC

c) Gọi M là trung điểm của BC

Suy ra M cố định và OM vuông góc BC (quan hệ giữa đường kính và dây)

+ Chứng minh tứ giác OMBF nội tiếp

Suy ra $\widehat{OFM} = \widehat{OBM}$

+ Chứng minh $\widehat{OBM} = \dfrac{180^0 - \widehat{BOC}}{2} = 90^0 - \widehat{BAC} = \widehat{ABE}$

Mà $\widehat{ABE} = \widehat{AFE}$

nên $\widehat{AFE} = \widehat{OFM}$

Từ đó chứng minh $\widehat{EFM}=180^0$. Suy ra ba điểm E, F, M thẳng hàng

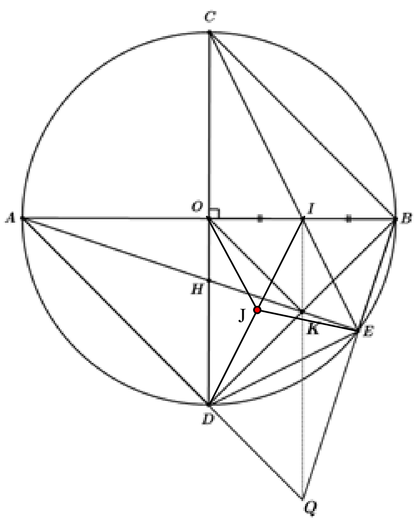
**Câu 41:** Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính $AB$ và $CD$ vuông góc tại $O$. Gọi $I$ là trung điểm của $OB$. Tia $CI$ cắt đường tròn $(O)$ tại $E$. Gọi $H$ là giao điểm của $AE$ và $CD$.

a) Chứng minh bốn điểm $O$, $I$, $E$, $D$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AH.AE=2R^2$ và $OA=3\cdot OH$.

c) Gọi $K$ là hình chiếu của $O$ trên $BD$, $Q$ là giao điểm của $AD$ và $BE$. Chứng minh: $Q,K,I$ thẳng hàng.

**Lời giải**




Gọi $J$ là trung điểm của $ID$

+) $AB\perp CD$ tại $O$, mà $I\in OB$

Suy ra $\widehat{IOD}=90^0 \Rightarrow \Delta IOD$ vuông tại $O$, từ đó suy ra $JO=JI=JD$ (1)

+) Chứng minh: $\widehat{IED}=90^0 \Rightarrow \Delta IED$ vuông tại $E$,

từ đó suy ra $JI=JE=JD$ (2)

+) Từ (1) và (2) suy ra $O, I, E, D$ cùng thuộc một đường tròn

b) +) Chứng minh: $\Delta AHO \# \Delta ABE$ (g.g)

+) Suy ra: $AH\cdot AE=AO\cdot AB=R\cdot 2R=2R^2$

+) Suy ra: $\dfrac{OA}{OH}=\dfrac{AE}{BE}$

+) Mà $EI$ là tia phân giác của góc $AEB$ nên suy ra:

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AI}{IB}=\frac{\frac{3}{2}R}{\frac{1}{2}R}=3$$

+) Suy ra: $\frac{OA}{OH}=3$, do đó $OA=3.OH$

c) +) Chứng minh được: $OD=3.OH$ suy ra $HD=\frac{2}{3}OD$

+) Suy ra: $H$ là trọng tâm $\Delta ABD$

+) Chứng minh $K$ là trung điểm của $BD$

Suy ra: $A,H,K,E$ thẳng hàng

+) Suy ra: $K$ là trực tâm của $\Delta ABQ$

+) Suy ra: $KQ$ vuông góc $AB$

+) Chứng minh được: $KI$ vuông góc $AB$

+) Suy ra: $Q,K,I$ thẳng hàng

**Câu 42:** Cho $(O)$ đường kính $AB$. Kẻ đường kính $CD$ vuông góc với $AB$. Lấy $M$ thuộc cung nhỏ $BC$, $AM$ cắt $CD$ tại $E$. Qua $D$ kẻ tiếp tuyến với $(O)$ cắt đường thẳng $BM$ tại $N$. Gọi $P$ là hình chiếu vuông góc của $B$ lên $DN$

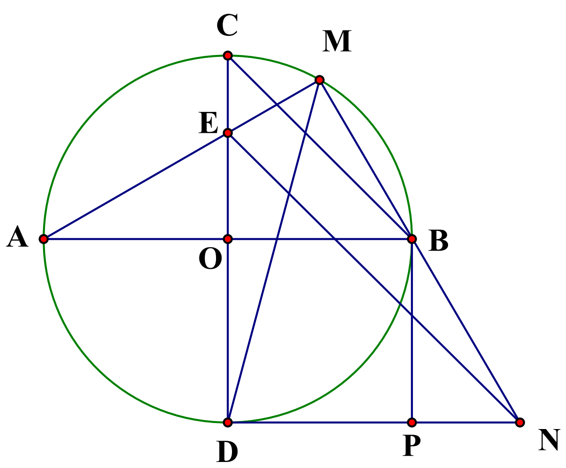
a) Chứng minh các điểm $M,N,D,E$ cùng thuộc một đường tròn.

b ) Chứng minh $EN // CB$.

c) Chứng minh $AM.BN=2R^2$ và tìm vị trí điểm $M$ trên cung nhỏ $BC$ để diện tích tam giác $BNC$ đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

1) Chứng minh các điểm $M,N,D,E$ cùng thuộc một đường tròn.




Xét tứ giác $MNDE$ :

Có $DN\perp CD$ ( vì $DN$ là tiếp tuyến của $(O)$ )

$\Rightarrow \widehat{CDN}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{EDN}=90°$

$\Delta EDN$ vuông tại $D$

Suy ra $3$ điểm $E, D, N$ thuộc đường tròn đường kính $EN$ $(1)$

Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{EMN} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta EMN$ vuông tại $M$

Suy ra $3$ điểm $E, M, N$ thuộc đường tròn đường kính $EN$ $(2)$

Từ (1) và (2) Suy ra các điểm $M, N, D, E$ cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $EN // CB$.

Xét $(O)$ có $\widehat{CDM} = \widehat{CBM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $CM$ )

$\Rightarrow \widehat{EDM} = \widehat{CBM}$

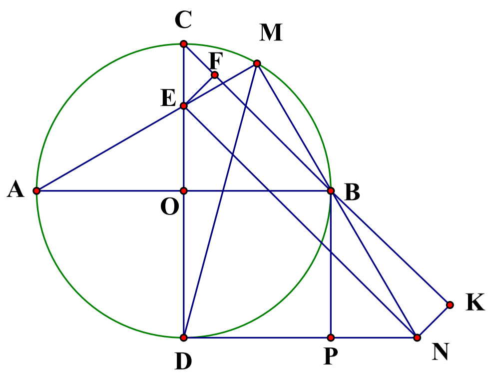
Vì tứ giác $MNDE$ nội tiếp ( cmt )

$\Rightarrow \widehat{EDM} = \widehat{ENM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $EM$ )

Suy ra $\widehat{CBM} = \widehat{ENM} \left( = \widehat{EDM} \right)$ mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow EN // CB$.

3) Chứng minh $AM.BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm $M$ trên cung nhỏ $BC$ để diện tích tam giác $BNC$ đạt giá trị lớn nhất.




Xét $\Delta AMB$ và $\Delta BPN$ :

Có $BP \perp DN \Rightarrow \widehat{BPN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BPN} = 90^0$ (1)

Có $DN \perp CD$ ( $DN$ kẻ tiếp tuyến với $(O)$

$\Rightarrow BA // DN$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{DNB}$ (hai góc đồng vị) (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Delta AMB \backsim \Delta BPN$ (g - g)

Xét tứ giác $OBPD$ có :

$\widehat{DOB}=\widehat{BPD}=\widehat{ODP}=90^0$

$OD=OB=R$

$\Rightarrow OBPD$ là hình vuông (DHNB) nên $OD=OB=BP=R$

Có $\Delta AMB \backsim \Delta BPN$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{AM}{BP}=\dfrac{AB}{BN}$

$\Rightarrow AM.BN=BP.AB=R.2R=2R^2$

* Kẻ $EF\perp BC, NK\perp BC$

$S_{NBC}=\dfrac{1}{2}NK.BC$. Do $BC$ không đổi nên $S_{NBC}$ max khi và chỉ khi $NK$ max .

Do $EF\perp BC, NK\perp BC \Rightarrow EF // NK$ .

Có tứ giác $EFKN$ là hình bình hành (DHNB)

Có $EF\perp BC \Rightarrow \widehat{EFK}=90^0$ nên tứ giác $EFKN$ là hình chữ nhật (DHNB)

$\Rightarrow EF=NK$ .

Ta có $NK$ max khi $EF$ max

khi $E\equiv O$ khi $M\equiv B$

**Câu 43:** Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn $(AB<AC)$. Ba đường cao $AD, BE, CF$ cắt nhau tại $H$

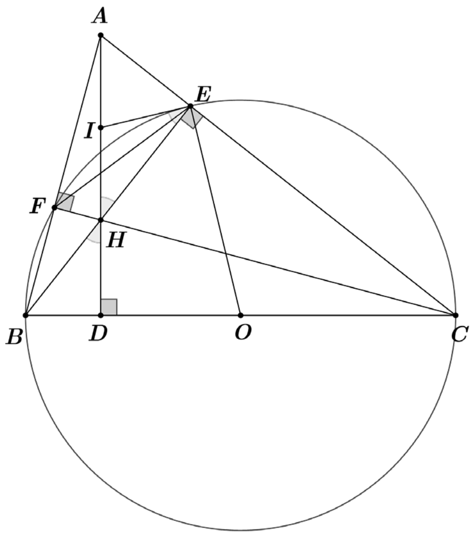
a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Xác định tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ .

b) Gọi $I$ là trung điểm của $AH$. Chứng minh $IE$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$

c) Vẽ $CI$ cắt đường tròn $(O)$ tại $M$ ($M$ khác $C$ ), $EF$ cắt $AD$ tại $K$. Chứng minh ba điểm $B, K, M$ thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Xác định tâm $O$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$




Vì $CF \perp AB$ nên $\widehat{CFB} = 90^\circ$ suy ra tam giác *BFC* vuông tại *F*

Vì $BE \perp AC$ nên $\widehat{BEC} = 90^\circ$ suy ra tam giác *BEC* vuông tại *E*

Gọi *O'* là trung điểm đoạn $BC$.

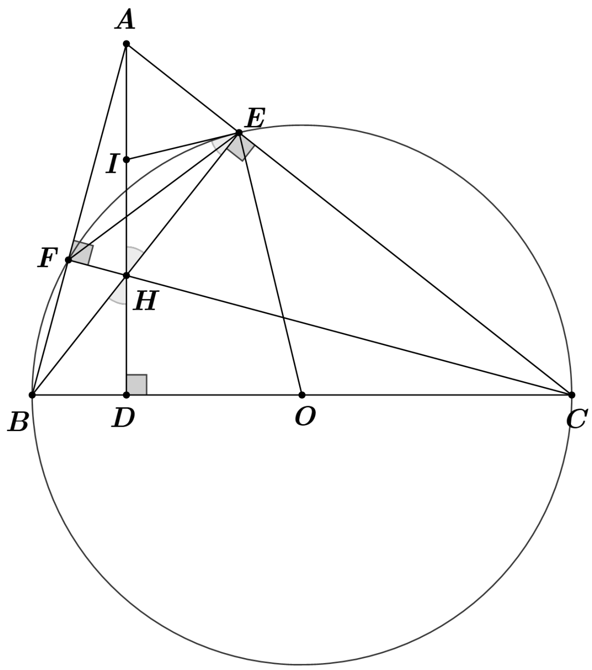
Xét tam giác *BEC* vuông tại *E, O'* là trung điểm đoạn $BC$.. Suy ra $O'E = O'B = O'C$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.) (1)

Xét tam giác *BFC* vuông tại *F, O'* là trung điểm đoạn $BC$.. Suy ra $O'F = O'B = O'C$ ( tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O'E = O'B = O'C = O'F$ mà *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$, suy ra $O$ trùng *O'*

Suy ra $O$ là trung điểm đoạn $BC$..

b) Gọi $I$ là trung điểm của $AH$. Chứng minh $IE$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.




Xét $\Delta AEH$ vuông tại $H$, có $EI$ là đường trung tuyến ứng với cạnh $AH$ nên

$EI = \dfrac{1}{2}AH = IH$

Suy ra: $\Delta IEH$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IHE}$

Mà $\widehat{IHE} = \widehat{BHD}$ (Hai góc đối đỉnh)

Suy ra: $\widehat{IEH} = \widehat{BHD}$ (1)

Ta lại có: $OB = OE = R \Rightarrow \Delta OEB$ cân tại $O$

$\Rightarrow \widehat{OBE} = \widehat{OEB}$ (2)

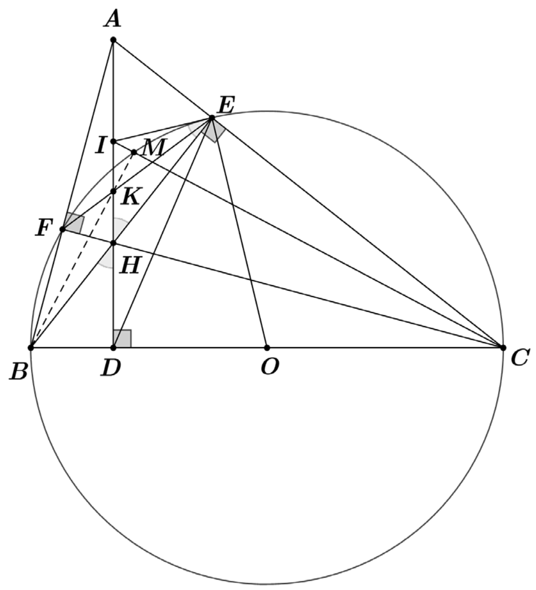
Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{IEH} + \widehat{OEB} = \widehat{BHD} + \widehat{OBE}$

Mặt khác: $\widehat{BHD} + \widehat{OBE} = 90^\circ$ (vì $\Delta BHD$ vuông tại $D$)

Suy ra: $\widehat{IEH} + \widehat{OEB} = \widehat{BHD} + \widehat{OBE} = 90^\circ$ hay $\widehat{OEI} = 90^\circ$

$\Rightarrow OE \perp EI$ và $E \in (O)$ Do đó: $IE$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.

c) Vẽ $CI$ cắt đường tròn $(O)$ tại $M$ ($M$ khác $C$), $EF$ cắt $AD$ tại $K$. Chứng minh ba điểm $B, K, M$ thẳng hàng.




Ta có: góc BMC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên góc BMC = 90 độ

$\Rightarrow BM \perp IC$

Xét $\Delta IEK$ và $\Delta IDE$ có:

$\widehat{EIK}$ là góc chung

$\widehat{IDE} = \widehat{IEK} (= \widehat{ECF})$

Do đó: $\Delta IEK \backsim \Delta IDE$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{IK}{IE} \Rightarrow ID.IK = IE^2$

Mặt khác: $IM.IC = IE^2$ (Bạn đọc tự chứng minh)

$\Rightarrow ID.IK = IM.IC$

$\Rightarrow \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IK}{IC}$

Xét tam giác IMK và tam giác IDC có:

Góc MIK là góc chung

$\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IK}{IC}$

$\Rightarrow \Delta IMK \backsim \Delta IDC$

$\Rightarrow \widehat{KMI} = \widehat{CDI} = 90°$

$\Rightarrow KM \perp IC$

$\left.\begin{array}{l} BM \perp IC \\ KM \perp IC \end{array}\right\} \Rightarrow B, M, K$ thẳng hàng

**Câu 44:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Hai đường cao $BE$ và $CF$ của tam giác $ABC$ cắt nhau tại điểm $H$. Gọi $K$ là trung điểm $BC$.

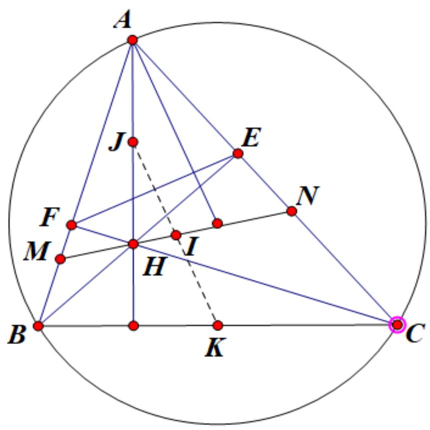
a) Chứng minh $\Delta AEF$ đồng dạng $\Delta ABC$.

b) Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng $EF$.

c) Đường phân giác góc $FHB$ cắt $AB$ và $AC$ lần lượt tại $M$ và $N$. Gọi $I$ là trung điểm của $MN, J$ là trung điểm của $AH$. Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm $I, J, K$ thẳng hàng.

**Lời giải**

***a) Chứng minh $\Delta AEF$ đồng dạng $\Delta ABC$.***




Vẽ đúng hình đến ý 1)

$BE \perp AC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0$ (TGV)

$CF \perp AB \Rightarrow \widehat{CFB} = 90^0$ (TGV)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ $\Delta AEF$ đồng dạng $\Delta ABC$.

***b) Chứng minh đường thẳng $OA$ vuông góc với đường thẳng***

Tứ giác BCEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{ABC}$

$\Delta OAC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{EAO}=\dfrac{180^0-\widehat{AOC}}{2}$

$\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}\widehat{ABC}\Rightarrow \dfrac{180^0-\widehat{AOC}}{2}=90^0-\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{AEF}+\widehat{EAO}=90^0\Rightarrow AO\perp EF$

***c) Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và $I,J,K$ thẳng hàng.***

Chứng minh $\Delta AMN$ cân tại $A$ vì $\widehat{AMN}=\widehat{MBH}+\widehat{MHB}=\widehat{NCH}+\widehat{NHC}=\widehat{ANM}$ $\Rightarrow AI\perp MN$

$\widehat{AFH}=\widehat{AIH}=90^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác $AFHI$ là tứ giác nội tiếp.

Có $\widehat{MAH}=\widehat{NAO}\Rightarrow \widehat{IAH}=\widehat{IAO}\Rightarrow IJ\parallel AO$ suy ra $IJ$ trung trực $EF$

Có $JE=JF, KE=KF\Rightarrow$ $KI$ trung trực $EF$ $\Rightarrow I,J,K$ thẳng hàng.

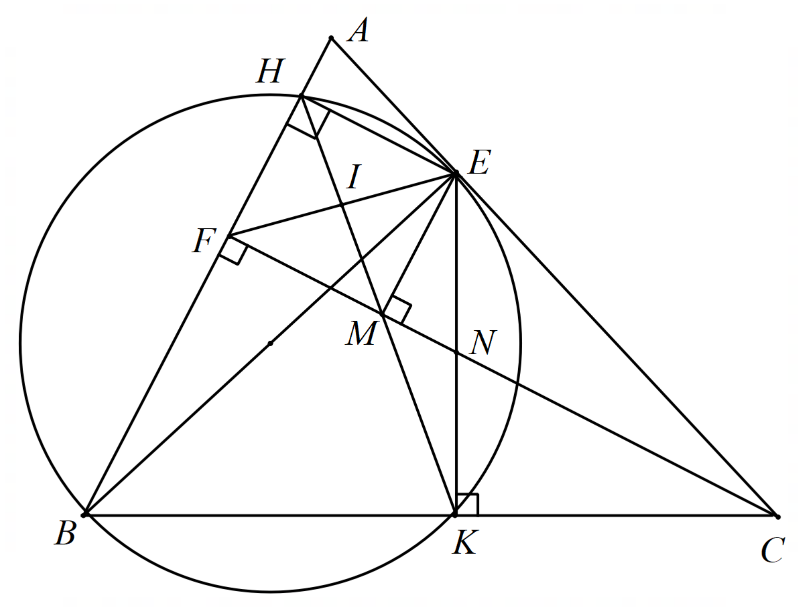
**Câu 45:** Cho $\Delta ABC$ có 3 góc nhọn và đường cao $BE$. Gọi $H,K$ lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $E$ đến $AB,AC$.

a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp;

b) Chứng minh: $BH.BA=BK.BC$;

c) Gọi $F$ là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $C$ đến đường thẳng $AB$, $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $EF$. Chứng minh rằng $H,I,K$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) Ta có $\widehat{BHE}=90°$ nên 3 điểm $B$, $H$, $E$ nằm trên đường tròn đường kính $BE$

$\widehat{BKE}=90°$ nên 3 điểm $B$,K, $E$ nằm trên đường tròn đường kính $BE$

Nên 4 điểm $B$, $H$, $K$, $E$ nằm trên đường tròn đường kính $BE$

Suy ra $BHEK$ là tứ giác nội tiếp

b) Vì $BHEK$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BHK}=\widehat{BEK}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$ ) mà $\widehat{BEK} = \widehat{BCE}$ (cùng phụ $\widehat{KEC}$ )

$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{BCE}$

+) Xét $\Delta BHK$ và $\Delta BCA$ có $\widehat{B}$ chung; $\widehat{BHK} = \widehat{BCA}$

$\Delta BHK$ đồng dạng $\Delta BCA(g.g) \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BK}{BA} \Rightarrow BH.BA = BK.BC;$

c) Giả sử $HK$ cắt $CF$ tại $M$ . Ta chỉ việc chứng minh $HM$ đi qua trung điểm $I$ của $EF$

- Vì $BHEK$ nội tiếp $\widehat{HBE} = \widehat{HKE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$ )

- $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ (cùng phụ với $\widehat{A}$ ) $\Rightarrow \widehat{MKE} = \widehat{MCE}$

Giả sử $CM$ cắt $KE$ tại $N$

Ta có $\Delta MNK$ đồng dạng $\Delta ENC$ (g-g) suy ra $\dfrac{NM}{NC} = \dfrac{NK}{NE}$

Xét $\Delta MNE$ và $\Delta KNC$ có

$\dfrac{NM}{NC} = \dfrac{NK}{NE}$; $\widehat{MNE} = \widehat{KNC}$ (đối đỉnh)

Suy $\widehat{ENC} = \widehat{EKC}$ mà $\widehat{EKC} = 90° \Rightarrow \widehat{EMC} = 90°$

Hay $\widehat{EHF} = \widehat{HFM} = \widehat{FME} = 90°$

$\Rightarrow EHFM$ là hình chữ nhật mà $I$ là trung điểm của đường chéo $EF \Rightarrow I$ là trung điểm của $HM$

$\Rightarrow H, I, M, K$ thẳng hàng.

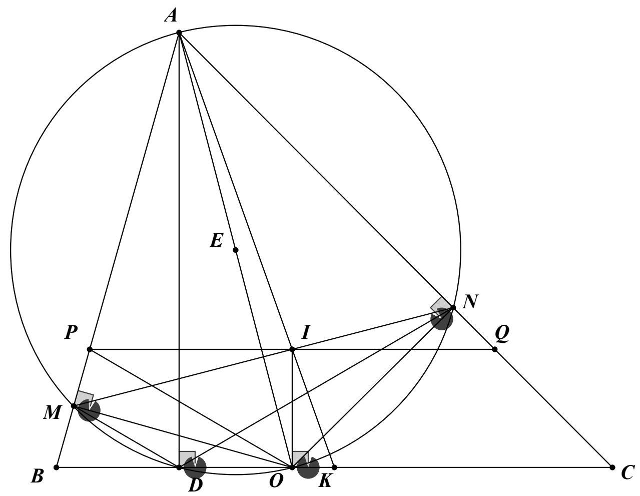
**Câu 46:** Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB < AC)$ có đường cao $AD$ và đường phân giác trong $AO$ ( $D$, $O$ thuộc cạnh $BC$ ). Kẻ $OM \perp AB$ tại $M$ , $ON \perp AC$ tại $N$ .

a) Chứng minh bốn điểm $O, M$ , $D$, $N$ cùng nằm trên một đường tròn. (dấu cách của dấu phảy, dấu chấm viết không đúng)

b) Chứng minh: $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$ .

c) Qua $O$ kẻ đường thẳng vuông góc với $BC$ cắt $MN$ tại $I$ , $AI$ cắt $BC$ tại $K$ . Chứng minh $K$ là trung điểm của $BC$ .

**Lời giải**




a) Gọi $E$ là trung điểm $AO$.
Vì $\Delta AMO$ vuông tại $M$ (gt)
$\Rightarrow EA = EM = EO = \frac{1}{2}AO$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông) $(1)$

Chứng minh tương tự, ta có: $EO = EA = ED = \frac{1}{2}AO$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông $ADO$) $(2)$

Chứng minh tương tự, ta có: $EA = EO = EN = \frac{1}{2}AO$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông $ANO$) $(3)$

Từ $(1)$, $(2)$, $(3)$ $\Rightarrow OE = DE = ME = AE = NE = \frac{1}{2}AO$

Suy ra $O$, $M$, $A$, $D$, $N$ thuộc đường tròn tâm $E$ đường kính $AO$
Suy ra $O$, $M$, $D$, $N$ thuộc đường tròn tâm $E$ đường kính $AO$.
b) Chứng minh $\Delta AON = \Delta AOM$ (cạnh huyền – góc nhọn)
Suy ra $\widehat{AON} = \widehat{AOM}$ (hai góc tương ứng)
Ta có: $\widehat{BDM} + \widehat{MDA} = 90^\circ$ (do $AD \perp BC$ tại $D$)
$\widehat{ODN} + \widehat{ADN} = 90^\circ$ (do $AD \perp BC$ tại $D$)
$\widehat{ADM} = \widehat{AOM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$ của $\left(E, \frac{AO}{2}\right)$)

$\widehat{ADN} = \widehat{AON}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$ của $\left(E, \frac{AO}{2}\right)$)

Suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$
c) Qua $I$ kẻ đường thẳng song song với $BC$ cắt $AB$, $AC$ tại $P$, $Q$.
Chứng minh $P$, $I$, $O$, $M$ cùng thuộc đường tròn đường kính $PO$
Suy ra $\widehat{POI} = \widehat{PMI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IP}$.
Chứng minh tứ giác $INQO$ nội tiếp
Suy ra $\widehat{IOQ} = \widehat{INA}$ (cùng bù với $\widehat{INQ}$)
Ta có $\widehat{PMI} = \widehat{INA}$ (cùng bằng $\widehat{AON}$, $\widehat{AOM}$)
Suy ra $\widehat{POI} = \widehat{QOI}$

Suy ra $OI$ là phân giác của $\widehat{POQ}$

Ta có: $OI \perp PQ$ (do $OI \perp BC$ và $PQ//BC$)

Suy ra $\Delta POQ$ cân tại $O$

Suy ra $OI$ là đường trung tuyến của $\Delta OPQ$

Suy ra $IP = IQ$

Vì $PQ//BC$

Suy ra $\Delta API \backsim \Delta ABK$ (g - g)

Suy ra $\dfrac{PI}{BK} = \dfrac{AI}{AK}$

Tương tự, $\Delta AIN \backsim \Delta AKC$ (g - g)

Suy ra $\dfrac{IQ}{KC} = \dfrac{AI}{AK}$

$\dfrac{PI}{BK} = \dfrac{IQ}{KC}$

mà $PI = IQ$ (cmt)

suy ra $KB = KC$

Vậy $K$ là trung điểm $BC$.

**Câu 47:** Cho $(O;R)$ đường kính $AB$. Bán kính $CO$ vuông góc với $AB$, $M$ là điểm bất kì trên cung nhỏ $AC$ ( $M$ khác $A$ và $C$), $MB$ cắt $AC$ tại $H$. Gọi $K$ là hình chiếu của $H$ trên $AB$.

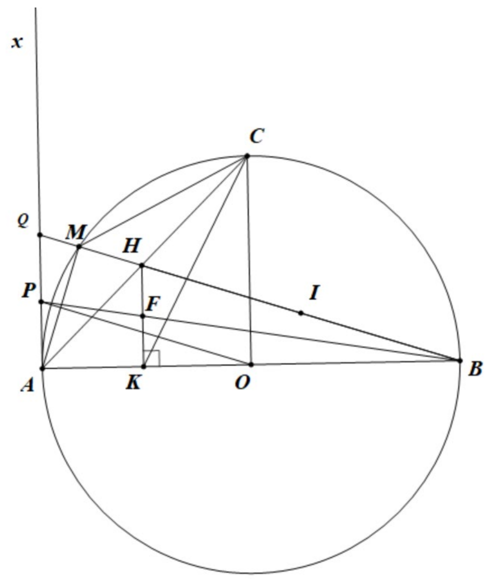
a) Chứng minh bốn điểm $C, B, H, K$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $CA$ là phân giác $\widehat{MCK}$.

c) Kẻ $Ax$ là tiếp tuyến của nửa đường tròn tại $A$. Lấy $P \in Ax$ sao cho $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$.

Chứng minh $PB$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $HK$.

**Lời giải**




a) Gọi $I$ là trung điểm của $HB \Rightarrow HI = IB = \dfrac{HB}{2}$

Xét nửa đường tròn $(O)$, đường kính $AB$ có: $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\Delta CHB$ vuông, mà $CI$ là đường trung tuyến

Từ đó có $IC = IH = IB = \dfrac{HB}{2}$ (1)

Xét nửa đường tròn $(O)$, đường kính $AB$ có: $\widehat{HKB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\Delta KHB$ vuông, mà $KI$ là đường trung tuyến.

Từ đó $IK = IH = IB = \dfrac{HB}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $IC = IK = IH = IB$

Do đó bốn điểm $C$, $B$, $H$, $K$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Có $\widehat{MCA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$); $\widehat{ACK} = \widehat{MBA}$ (tứ giác $CHKB$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{ACK}$

Do đó $CA$ là phân giác $\widehat{MCK}$.

c) Theo giả thiết: $\dfrac{AP.MB}{MA} = R \Rightarrow \dfrac{AP}{MA} = \dfrac{OA}{MB}$

Xét $\Delta PAO$ và $\Delta AMB$ có: $\dfrac{AP}{MA} = \dfrac{OA}{MB}$; $\widehat{PAO} = \widehat{AMB} = 90°$

Do đó $\Delta PAO \backsim \Delta AMB$ (c-g-c)

Suy ra $\widehat{POA} = \widehat{MBA}$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $OP$ // B$Q$

Xét $\Delta ABQ$ có: $OP$ // B$Q$, $O$ là trung điểm của AB nên $P$ là trung điểm của $AQ$.

Gọi $F$ là giao điểm của $BP$ và $HK$.

Xét $\Delta ABP$ có $FK$ // $AP$ nên $\dfrac{FK}{AP} = \dfrac{BF}{BP}$

Xét $\Delta QBP$ có $FH$ // $QP$ nên $\dfrac{FH}{QP} = \dfrac{BF}{BP}$

Từ đó $HF = FK$ suy ra $PB$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $HK$.

**Câu 48:** Từ điểm $A$ nằm ngoài $(O)$ vẽ hai tiếp tuyến $AB, AC$ với đường tròn ($B, C$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính $CD$ của $(O)$.

a) Chứng minh $BD//AO$.

b) $AD$ cắt $(O)$ tại $E$ ($A, E, D$ theo thứ tự). Chứng minh rằng $AB^2 = AE.AD$.

c) Vẽ $BH \perp DC$ tại $H$. Gọi $I$ là trung điểm của $BH$. Chứng minh ba điểm $A, I, D$ thẳng hàng.

**Lời giải**

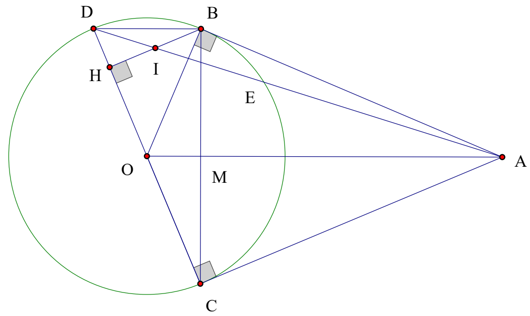
Từ điểm $A$ nằm ngoài $(O)$ vẽ hai tiếp tuyến $AB, AC$ với đường tròn ($B, C$ là các tiếp điểm). Kẻ đường kính $CD$ của $(O)$.

a) Chứng minh $BD // AO$.

b) $AD$ cắt $(O)$ tại $E$ ($A, E, D$ theo thứ tự). Chứng minh rằng $AB^2 = AE.AD$.

c) Vẽ $BH \perp DC$ tại $H$. Gọi $I$ là trung điểm của $BH$. Chứng minh ba điểm $A, I, D$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) Ta có $B$ thuộc $(O)$ và có $CD$ là đường kính của $(O)$

Suy ra $\Delta BCD$ nội tiếp $\left(O;\dfrac{CD}{2}\right)$

Suy ra $\Delta BCD$ vuông tại $B$

Suy ra $\widehat{\mathrm{CBD}} = 90°$

Suy ra $BD \perp BC$

Vì $AB, AC$ là hai tiếp tuyến của $(O)$ nên $AB = AC$ (tính chất)

Suy ra $\Delta ABC$ cân tại $A$

Lại có $AO$ là tia phân giác của $\widehat{\mathrm{BAC}}$

Suy ra $AO$ là đường cao của $\Delta ABC$

Suy ra $AO \perp BC$

Ta có $BD \perp BC$, $AO \perp BC$. Suy ra $BD // AO$

b) Ta có $E$ thuộc $(O)$ và có $CD$ là đường kính của $(O)$

Suy ra $\Delta CDE$ nội tiếp $\left(O;\dfrac{CD}{2}\right)$

Suy ra $\Delta CDE$ vuông tại $E$

Suy ra $\widehat{\mathrm{CED}} = 90°$

Suy ra $CE \perp AD$

Xét hai tam giác $\Delta AEC$ và $\Delta ACD$ có:

$\widehat{\mathrm{AEC}} = \widehat{\mathrm{ACD}} = 90°$

$\widehat{\mathrm{A}}$ chung

Vậy $\Delta AEC \square \Delta ACD$

Suy ra $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, suy ra $AC^2 = AE.AD$

Mà $AB = AC$

Suy ra $AB^2 = AE.AD$

c)Xét hai tam giác $\Delta HDB$ và $\Delta COA$ có:

$\widehat{DHB} = \widehat{OCA} = 90°$

$\widehat{HDB} = \widehat{COA}$ (đồng vị và $BD//AO$)

Vậy $\Delta HDB \backsim \Delta COA$

Suy ra $\dfrac{HD}{OC} = \dfrac{BH}{AC}$ suy ra $\dfrac{HD}{2OC} = \dfrac{BH}{2AC}$

Mà $CD = 2OC, BH = 2HI$ (vì $O, I$ lần lượt là trung điểm của $CD, BH$)

Suy ra $\dfrac{HD}{CD} = \dfrac{HI}{AC}$

Xét hai tam giác $\Delta HDI$ và $\Delta CDA$ có:

$\widehat{DHI} = \widehat{DCA} = 90°$

$\dfrac{HD}{CD} = \dfrac{HI}{AC}$

Vậy $\Delta HDI \backsim \Delta CDA\left(c.g.c\right)$

Suy ra $\widehat{HDI} = \widehat{CDA}$

Suy ra hai tia $DI, DA$ trùng nhau

Vậy ba điểm $A, I, D$ thẳng hàng

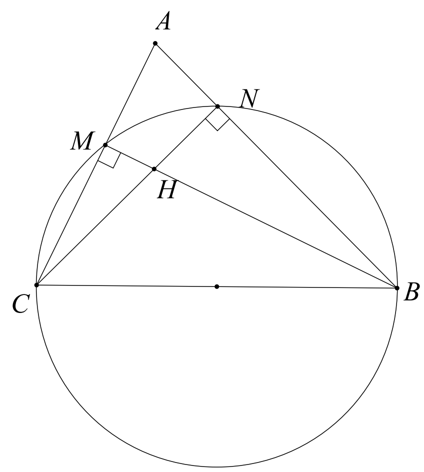
**Câu 49:** Cho tam giác $ABC$ nhọn với $AB > AC$. Các đường cao $BM$, $CN$ cắt nhau tại $H$.

a/ Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b/ Gọi $D$ là giao điểm của $AH$ và $BC$. Chứng minh $DA$ phân giác của $\widehat{MDN}$

c/ Đường thẳng qua $D$ và song song với $MN$ cắt $AB, CN$ lần lượt tại $I, J$. Chứng minh $D$ là trung điểm $IJ$

**Lời giải**




**a/ Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp**

Các đường cao $BM$, $CN$ cắt nhau tại $H$ nên ta có $\Delta ANH, \Delta AMH$ vuông tại $N, M$

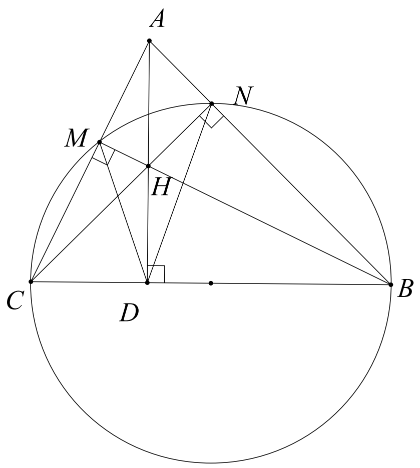
Xét $\Delta ANH$ có $\widehat{ANH} = 90°$ nên ba điểm $A, N, H$ nằm trên đường tròn đường kính $AH$

Xét $\Delta AMH$ có $\widehat{AMH} = 90°$ nên ba điểm $A, M, H$ nằm trên đường tròn đường kính $AH$

Khi đó bốn điểm $A, M, H, N$ nằm trên đường tròn đường kính $AH$

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH$ .

**b/ Gọi $D$ là giao điểm của $AH$ và $BC$ . Chứng minh $DA$ phân giác của $\widehat{MDN}$**




Có $\widehat{HMC} = \widehat{HDC} = 90°$

Xét $\Delta HMC$ có $\widehat{HMC} = 90°$ nên ba điểm $C, M, H$ nằm trên đường tròn đường kính $CH$

Xét $\Delta CDH$ có $\widehat{HDC} = 90°$ nên ba điểm $C, D, H$ nằm trên đường tròn đường kính $CH$

Khi đó bốn điểm $D, C, M, H$ nằm trên đường tròn đường kính $CH$

Suy ra tứ giác $HDCM$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{HDM} = \widehat{HCM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $HM$ )

Có $\widehat{HDB} = \widehat{HNB} = 90°$

Xét $\Delta HDB$ có $\widehat{HDB} = 90°$ nên ba điểm $B, D, H$ nằm trên đường tròn đường kính $BH$

Xét $\Delta HNB$ có $\widehat{HNB} = 90°$ nên ba điểm $B, N, H$ nằm trên đường tròn đường kính $BH$

Khi đó bốn điểm $D, B, N, H$ nằm trên đường tròn đường kính $BH$

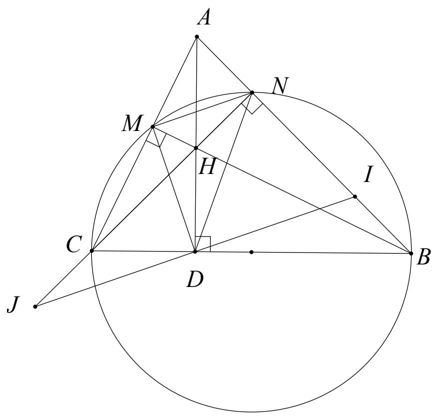
Suy ra tứ giác $HDBN$ nội tiếp

$\widehat{NDH} = \widehat{NBH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $HN$ )

Mà $\widehat{HCM} = \widehat{NBH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$ )

Suy ra $\widehat{HDM} = \widehat{HDN}$ Suy ra $AD$ là phân giác của góc $\widehat{MDN}$ (đpcm).

**c/ Đường thẳng qua $D$ và song song với $MN$ cắt $AB, CN$ lần lượt tại $I, J$ . Chứng minh $D$ là trung điểm $IJ$ .**




Có $\widehat{BMC}=\widehat{CNB}=90°$

Xét $\Delta MCB$ có $\widehat{BMC}=90°$ nên ba điểm $B,\ M,\ C$ nằm trên đường tròn đường kính $BC$

Xét $\Delta BNC$ có $\widehat{BNC}=90°$ nên ba điểm $B,\ N,\ C$ nằm trên đường tròn đường kính $BC$

Khi đó bốn điểm $C,\ B,\ N,\ M$ nằm trên đường tròn đường kính $BC$

Suy ra tứ giác $BCMN$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{HNM}=\widehat{HBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung $CM$ )

Tứ giác $HDBN$ nội tiếp nên $\widehat{HBD}=\widehat{HND}$ ( hai góc nội tiếp cùng chắn một cung $HD$ )

Suy ra $\widehat{HNM}=\widehat{HND}$

Ta có $IJ\,//\,MN\ (gt)$ Suy ra $\widehat{HNM}=\widehat{HJI}=\widehat{HJD}$ (Hai góc so le trong bằng nhau)

Suy ra $\widehat{HND}=\widehat{HJD}$

Nên tam giác $DNJ$ cân tại $D$ (tam giác có 2 góc ở đáy bằng nhau)

Suy ra $DN=DJ$ (tính chất tam giác cân) (1)

Vì $\widehat{HND}=\widehat{HJD}$ (chứng minh trên)

Mà $\widehat{HND}+\widehat{DNI}=\widehat{HNI}=90°$ và $\widehat{HJD}+\widehat{NID}=90°$ ( do $\Delta JNI$ vuông tại $N$ )

Suy ra $\widehat{DNI}=\widehat{NID}$

Tam giác $\Delta NID$ cân tại $D$ (tam giác có 2 góc ở đáy bằng nhau)

Suy ra $DN=DI$ (tính chất tam giác cân) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DI=DJ=DN$

Vậy $D$ là trung điểm $IJ$

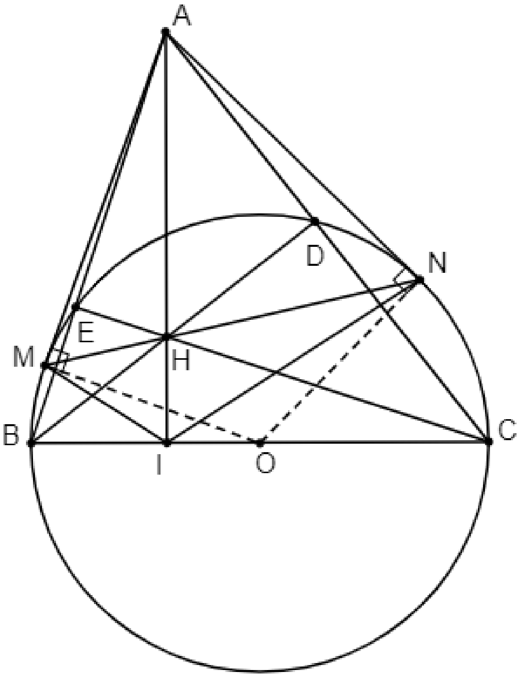
**Câu 50:** Cho tam giác $ABC$ nhọn. Đường tròn $(O)$ đường kính $BC$ cắt $AB$, $AC$ lần lượt tại $E$ và $D$; $BD$ cắt $CE$ tại $H$, $AH$ cắt $BC$ tại $I$. Từ $A$ kẻ tiếp tuyến $AM$, $AN$ của đường tròn $(O)$ ($M$, $N$ là tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AB.BE=BI.BC$, từ đó suy ra $AB.BE+AC.CD=BC^2$

c) Chứng minh ba điểm $M$, $H$, $N$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) Vì $\widehat{BEC}$ và $\widehat{BDC}$ là hai góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $(O)$ nên: $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90°$ , suy ra $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90°$

Suy ra hai điểm $E$ và $D$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$

Do đó bốn điểm $A$, $E$, $H$, $D$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH$

Vậy tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH$

b) Chứng minh $H$ là trực tâm của $\Delta ABC$ suy ra $AI \perp BC$

Chứng minh được $\Delta ABI \backsim \Delta CBE$ (g.g)

Suy ra: $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BI}{BE}$ hay $AB.BE = AI.BC$ (1)

Tương tự: $AC.CD = AI.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB.BE + AC.CD = BI.BC + CI.BC = (BI + CI).BC = BC^2$

Vậy $AB.BE + AC.CD = BC^2$

c) Chứng minh 5 điểm $A, M, I, O, N$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AO$, suy ra tứ giác $AMIN$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AMI} + \widehat{ANI} = 180°$ (*)

Chứng minh $\Delta AEH \backsim \Delta AIB$ (g.g), suy ra $\dfrac{AE}{AI} = \dfrac{AH}{AB}$ hay $AE.AB = AI.AH$ (3)

Chứng minh $\Delta AME \backsim \Delta ABM$ (g.g), suy ra $\dfrac{AE}{AM} = \dfrac{AM}{AB}$ hay $AB.AE = AM^2$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra hay $\dfrac{AM}{AI} = \dfrac{AH}{AM}$

Chứng minh $\Delta AMI \backsim \Delta AHM$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{AHM}$ (**)

Tương tự: $\widehat{ANI} = \widehat{AHN}$ (***)

Từ (*), (**) và (***) suy ra $\widehat{AHM} + \widehat{AHN} = 180^\circ$

Vậy ba điểm $M$, $H$, $N$ thẳng hàng. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com