SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN	KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM HỌC 2025 – 2026
Đề chính thức	**Môn thi: TOÁN**
(Đề thi gồm 02 trang)	*Thời gian: 150 phút, không kể thời gian phát đề*

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Biết rằng $(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)\ldots(n^2+1)$ chia hết cho 1297^2, với n là số nguyên dương. Chứng minh $n \geq 649$.

b) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn các điều kiện sau: $a-b$ là số nguyên tố, $a.b$ là số chính phương và $a+b-3$ chia hết cho 5.

Câu 2. *(7,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2+\dfrac{4x^2}{(x-2)^2}=5$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-9y=18x-5y^3 \\ x^2+4=5(y^2-1). \end{cases}$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Kết thúc năm học, thầy giáo chọn ngẫu nhiên bốn trong năm bạn lớp 9A gồm: An, Bình, Cường, Dũng, Thảo để dự hội nghị tuyên dương.

a) Tính xác suất để trong bốn bạn được chọn có bạn An.

b) Ban tổ chức chuẩn bị bốn phần quà khác nhau dành riêng cho mỗi bạn lớp 9A tham dự. Tại hội nghị, do quên ghi tên trên quà nên ban tổ chức đã phát ngẫu nhiên quà cho bốn bạn, mỗi bạn nhận một phần quà. Tính xác suất của biến cố "có ít nhất một bạn nhận đúng phần quà của mình".

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho ΔABC nhọn $(AB > AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H. Đường kính AK của đường tròn (O) cắt EF tại N.

a) Chứng minh tứ giác $BKNF$ nội tiếp và $\widehat{AKD}=\widehat{AHN}$.

b) Đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng BE tại M. Gọi Q là giao điểm của BC và HK, đường thẳng EF cắt QM tại P. Chứng minh ΔBPC vuông.

c) Giả sử A, C và đường tròn (O) cố định, $AC < R\sqrt{3}$, điểm B di động trên cung lớn AC. Xác định vị trí của điểm B để tổng chu vi của các tam giác ΔAEF, ΔBFD, ΔCED lớn nhất.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho hai số thực a và b thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $a < b \le 420$.

ii) Với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $a \le x \le b, a \le y \le b, a \le z \le b$, ta luôn có

$$(x+y+z-420)^2 \le \frac{1}{105}xyz.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = b - a$.

Câu 6. *(1,0 điểm)*

Trên bảng có dãy số 1; 2; 3; ...; 2025 ta thực hiện như sau: Nếu trên bảng có 4 số $a; b; c; d$ sao cho $d = a+b+c$ thì ta xóa 4 số đó và viết 3 số $a+b$; $b+c$; $c+a$ lên bảng. Giả sử tại một thời điểm trên bảng còn n số: $a_1; a_2; \ldots; a_n$. Chứng minh rằng $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \cdots + a_n^4 - 9$ chia hết cho 12 và $n \ge 1520$.

----------------- **Hết** -----------------

HƯỚNG DẪN GIẢI THAM KHẢO
ĐỀ TOÁN CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN (2025 - 2026)

Câu 1.

a. Giả sử a là số nguyên dương bé nhất khác 36 sao cho $1297 \mid a^2+1$

Ta có $1297 \mid (a^2+1)-1297 = a^2-36^2 = (a+36)(a-36)$.

Vì 1297 là số nguyên tố suy ra $\left[\begin{array}{l}1297 \mid a+36 \\ 1297 \mid a-36\end{array}\right.$.

Nếu $1297 \mid a+36$ thì a chia cho 1297 dư 1261 suy ra a bé nhất có thể là 1261.

Nếu $1297 \mid a-36$ thì a chia cho 1297 dư 36 suy ra a bé nhất có thể là 1333.

Như vậy $(1^2+1)(2^2+1)...(1261^2+1) \vdots 1297^2$.

Vậy $n \geq 649$.

b. Đặt $p = a-b$ và $d = (a,b)$, suy ra $d \mid a-b = p$.

Trường hợp 1: $d = p$ thì đặt $a = dx^2, b = dy^2$, với x, y nguyên dương và $(x,y)=1$.

Ta có $p = a-b = d(x^2-y^2) = d(x-y)(x+y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=1$.

Từ đây tính được $x=1, y=0$. (vô lý)

Trường hợp 2: $d=1$ thì đặt $a = x^2, b = y^2$, với x, y nguyên dương và $(x,y)=1$.

Ta có $p = a-b = (x-y)(x+y)$ suy ra $x-y=1, x+y=p$.

Khi đó $x = \dfrac{p+1}{2}, y = \dfrac{p-1}{2}$. Do đó $a+b = x^2+y^2 = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2 = \dfrac{p^2+1}{2}$.

Mà $5 \mid a+b-3 = \dfrac{p^2+1}{2} - 3 = \dfrac{p^2-5}{2} \Rightarrow 5 \mid p^2-5$. Do vậy $p=5$.

Khi đó $x=3, y=2$ thì $a=9, b=4$.

Câu 2.

a. Với $x \neq 2$, ta có phương trình ban đầu tương đương:

$$x^2 + 4x.\frac{x}{x-2} + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 5 + \frac{4x^2}{x-2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{2x}{x-2}\right)^2 = 5 + \frac{4x^2}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{(x-2)^2} = 5 + \frac{4x^2}{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-2}+1\right)\left(\frac{x^2}{x-2}-5\right) = 0.$$

Trường hợp 1: $\dfrac{x^2}{x-2}+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x-2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \\ x=-2\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $\dfrac{x^2}{x-2}-5=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+10}{x-2}=0. (1)$

Do $x^2-5x+10>0$ nên (1) vô nghiệm.

Như vậy $x=1, x=-2$ là nghiệm của phương trình ban đầu.

b. Ta có: $\begin{cases} x^3-9y=18x-5y^3 (1) \\ x^2+4=5(y^2-1) \quad (2) \end{cases}$.

Từ (2) có $x^2=5y^2-9$.

Từ (1) ta có: $x^3-18x+5y^3-9y=0 \Leftrightarrow x^3-18x+x^2y=0 \Leftrightarrow x(x^2+xy-18)=0.$

Trường hợp 1: $x=0 \Rightarrow y^2=\frac{9}{5} \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Trường hợp 2: $x^2+xy=18$ suy ra $2(5y^2-x^2)=18=x^2+xy$

Hay $3x^2+xy-10y^2=0 \Leftrightarrow (x+2y)(3x-5y)=0.$

- Nếu $x=-2y \Rightarrow 9=5y^2-x^2=y^2$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} x=-6, y=3 \\ x=6, y=-3 \end{array}\right.$.

- Nếu $3x=5y \Rightarrow 9=5y^2-\frac{25}{9}y^2=\frac{20}{9}y^2 \Rightarrow y^2=\frac{81}{20}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\sqrt{5}}{2}, y=\frac{9\sqrt{5}}{10} \\ x=-\frac{3\sqrt{5}}{2}, y=-\frac{9\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là:

$$\left(0,\frac{3}{\sqrt{5}}\right),\left(0,-\frac{3}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{3\sqrt{5}}{2},\frac{9\sqrt{5}}{10}\right),\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2},-\frac{9\sqrt{5}}{10}\right),(-6,3),(6,-3).$$

Câu 3.

a. Để chọn 4 bạn mà trong đó có bạn An thì ta chọn An có 1 cách.
Ta chọn 3 bạn trong 4 bạn còn lại có 4 cách, bao gồm:

Dũng, Bình, Cường ; Dũng, Bình, Thảo; Bình, Cường, Thảo; Cường, Dũng, Thảo

Như vậy số trường hợp để chọn 4 bạn mà trong đó có bạn An là 4.

Xác suất chọn 4 bạn mà trong đó có bạn An là $\frac{4}{5}$.

b. *Cách 1:* Tính trực tiếp. Giả sử 4 bạn được trao giải lài A,B,C,D.
Ký hiệu các phần thưởng là số 1,2,3,4 tương ứng với 4 bạn A, B,C,D. Ta xét 3 trường hợp sau:
TH1: Chỉ có 1 bạn nhận đúng phần thưởng, chọn 1 bạn trong 4 bạn có 4 cách chọn.
Giả sử bạn đó là A, 3 bạn còn lại là B,C,D, chọn B để trao có 2 cách (nhận phần thưởng số 3 hoặc 4. Nếu B nhận số 3 thì D nhận số 2 và C nhận số 4. Nếu B nhận số 4 thì D nhận số 3, C nhận số 2). Như vậy TH này có 2x4=8 cách.
TH2: Có 2 bạn nhận đúng phần thưởng, có 6 cách chọn 2 trong 4 bạn, Giả sử hai bạn nhận đúng phần thưởng là A (nhận số 1) và B (nhận số 2), khi đó C,D chỉ có 1 cách trao phần thưởng (C nhận số 4, D nhận số 3).

TH3: Cả 4 bạn đều trao đúng phần thưởng (nếu 3 bạn trao đúng thì cả 4 bạn trao đúng) Như vậy có 8+6+1=15 cách.
Số cách để phát 4 phần quà tuỳ ý cho 4 bạn là 4.3.2.1 = 24.

Vậy xác suất để "có ít nhất một bạn nhận đúng quà của mình" là: $\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

Cách 2: Tính gián tiếp:
Ta đếm số trường hợp mà không ai trong bốn bạn nhận đúng quà của mình.
Giả sử có bốn bạn *A, B, C, D.* Trước tiên, nếu A lấy bất kì quà của ba bạn còn lại thì có 3 cách.
Giả sử A lấy của B. Khi đó ta có các trường hợp sau:

Bạn	**B**	**C**	**D**
Lấy	A	D	C
Lấy	C	D	A
Lấy	D	A	C

Như vậy có thể các 9 trường hợp.

Vậy để ít nhất một bạn nhận đúng quà của mình thì có tất cả là 15 trường hợp.

Số cách để phát 4 phần quà tuỳ ý cho 4 bạn là 4.3.2.1 = 24.

Vậy xác suất để "có ít nhất một bạn nhận đúng quà của mình" là: $\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

Câu 4.

a. Vì AK là đường kính nên $\angle ACK=\angle ABK=90^{\circ}$.
Ta chứng minh được: $\Delta AEF\sim\Delta ABC(c.g.c)\Rightarrow\angle AEF=\angle ABC$.

Suy ra $\angle OAC+\angle AEF=\frac{180^{\circ}-\angle AOC}{2}+\angle AEF=\frac{180^{\circ}-2\angle ABC}{2}+\angle ABC=90^{\circ}$.

Suy ra AK vuông góc với EF. Như vậy $\angle KNF=90^{\circ}=\angle ABK$.
Từ đó suy ra được tứ giác $BFNK$ nội tiếp.

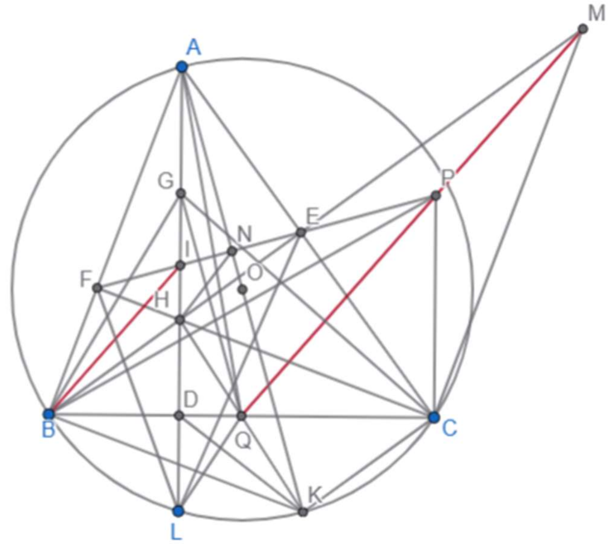
Khi đó chứng minh được $\Delta ANF\sim\Delta ABK(g.g)\Rightarrow\frac{AN}{AB}=\frac{AF}{AK}\Leftrightarrow AN.AK=AB.AF$.

Và $\Delta AFH\sim\Delta ADB(g.g)\Rightarrow\frac{AF}{AD}=\frac{AH}{AB}\Leftrightarrow AD.AH=AB.AF=AN.AK$

Suy ra $\frac{AN}{AD}=\frac{AH}{AK},\angle DAK$ chung suy ra $\Delta AHN\sim\Delta AKD(c.g.c)\Rightarrow\angle AHN=\angle AKD$.

b. Gọi *G* là trung điểm của *AH.*

Ta chú ý *BHCK* là hình bình hành nên *BC, HK* cắt nhau tại trung điểm, tức là *Q* là trung điểm *BC.* Gọi *I* là giao của *AH* và *EF.*



Ta chú ý hai tam giác $\Delta MBC \sim \Delta CAH$ do các cặp cạnh tương ứng vuông góc với nhau. (1)

Gọi L là giao của AD với (O). Ta có tứ giác $NILK$ nội tiếp. Và chứng minh được

$$AB.AF = AN.AK = AI.AL \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{AL}{AF}$$

Kết hợp với góc BAL chung suy ra $\Delta BIA \sim \Delta LFA \Rightarrow \angle ABI = \angle ALF.$ (2)

Mà DQ song song LK do cùng vuông với AL nên D là trung điểm của HL. Ta có:

$$HF.HC = HA.HD = 2HG.HD = HG.HL$$

$$\Rightarrow \frac{HF}{HL} = \frac{HG}{HC}, \angle FHL = \angle GHC$$

Suy ra $\Delta FHL \sim \Delta GHC (c.g.c) \Rightarrow \angle FLH = \angle GCH.$

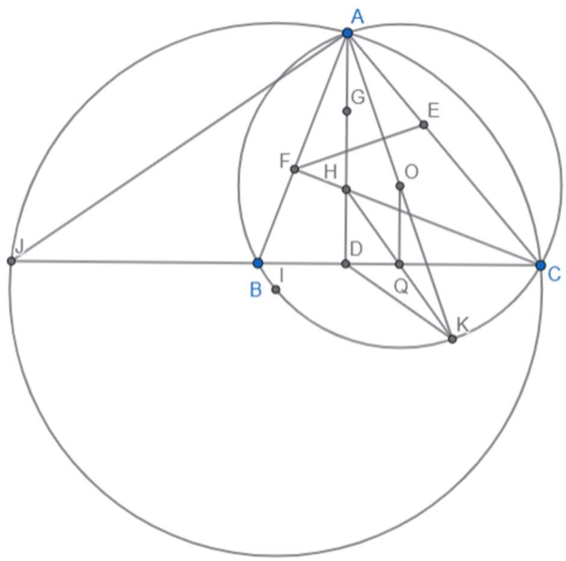
Kết hợp với (2) thì $\angle ABI = \angle FLH = \angle GCH.$ Ta có biến đổi góc sau:

$$\angle IBE = \angle ABE - \angle ABI = \angle ACH - \angle GCH = \angle ACG = \angle BMQ. \text{ (do (1))}$$

Do đó BI song song với $MP.$ Theo định lý Thales ta có

$$\frac{EI}{EP} = \frac{EB}{EM} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow AI \parallel CP \Rightarrow \angle PCB = 90^{\circ}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.



Ta có tổng chu vi của 3 tam giác *AEF, BDF, CDE* là

$$T = AF + AE + EF + BF + DF + BD + CE + CD + DE$$
$$= AB + AC + BC + DE + DF + EF.$$

Ta thấy *OQ là* đường trung bình của tam giác *AHK*. Suy ra *AH = 2OQ*. Ta có:

$\angle EGF = 2\angle BAC = \angle BOC \Rightarrow \Delta EGF \sim \Delta BOC$

$\Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{GE}{OC} = \dfrac{GH}{R} = \dfrac{OQ}{R} \Rightarrow EF = BC.\dfrac{OQ}{R} = \dfrac{2S_{OBC}}{R}.$

Do đó chứng minh tương tự ta có: $EF + DE + DF = 2.\dfrac{S_{OBC} + S_{OAB} + S_{OAC}}{R} = \dfrac{2S_{ABC}}{R}.$

Như vậy $T = AB + BC + CA + 2.\dfrac{S_{ABC}}{R}.$

Do A, C cố định nên AC có độ dài không đổi.

Ta thấy diện tích của tam giác *ABC* đạt GTLN khi *B* là điểm chính giữa cung lớn *AC.*

Ta lấy trên tia đối *BC* điểm *J* sao cho *BA = BJ,* ta có $\angle ABC = \dfrac{\angle AOC}{2}$ suy ra góc ABC không đổi. Mà $\angle ABC = 2\angle AJC$. Gọi *I* là trung điểm cung lớn *AC.*

Suy ra $\angle AIC = 2\angle AJC$ nên *J* thuộc (*I,IA*) cố định.

Như vậy *BC + BA = BC + BJ = JC* đạt max khi *JC* là đường kính. Hay *B* trùng với *I.*

Do đó tổng *BC + BA* đạt GTLN khi *B* là điểm chính giữa cung lớn *AC.*

Như vậy tổng chu vi của 3 tam giác *AEF, BDF, CDE* đạt GTLN khi *B* là điểm chính giữa cung lớn *AC.*

Câu 5.

Đặt $x=105x_1, y=105y_1, z=105z_1$, với $a_1 \le x_1, y_1, z_1 \le b_1$ trong đó $a=105a_1, b=105b_1$.

Khi đó $a_1b_1 \le 4$ và $(x_1+y_1+z_1-4)^2 \le x_1y_1z_1$.(1)

Đặt $x_1=2+x_2, y_1=2+y_2, z_1=2+z_2$. Khi đó (1) trở thành

$$(x_2+y_2+z_2+2)^2 \le (x_2+2)(y_2+2)(z_2+2)$$
$$\Leftrightarrow x_2^2+y_2^2+z_2^2 \le x_2y_2z_2+4.(2)$$

Với $m=a_1-2 \le x_2, y_2, z_2 \le b_1-2=n$.

Ta chọn $x_2=y_2=z_2=m$ thay vào (2) thì

$$3m^2 \le m^3+4 \Leftrightarrow (m+1)(m-2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -1.$$

Ta chọn $x_2=y_2=n, z_2=m$ thay vào (2) và chú ý $2-m \ge 0$ thì có

$$2n^2+m^2 \le mn^2+4 \Leftrightarrow (n^2-m-2)(m-2) \ge 0 \Rightarrow n^2 \le m+2.$$

- Nếu $n \ge 1$, thì $n \le n^2 \Rightarrow b_1-a_1=n-m \le n^2-m \le 2.$

- Nếu $n \le 1$, và có $m \ge -1$ suy ra $b_1-a_1=n-m \le 2.$

Vậy $\max(b_1-a_1)=2 \Leftrightarrow m=-1, n=1.$ Hay $\max(b-a)=210.$

Khi $m=-1, n=1$ thì $a=105a_1=105(m+2)=105, b=105b_1=105(n+2)=315.$

Vậy $\max T=210$ và dấu bằng xảy ra khi $a=105, b=315.$

Câu 6.

Ta có nhận xét về bất biến như sau:

- Tổng của ba số mới là $(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)=a+b+c+d.$

- Tổng bình phương của ba số mới là:

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+d^2.$

Như vậy ta có:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=1+2+\ldots+2025=\frac{2025.2026}{2}.$$

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1^2+2^2+\ldots+2025^2=\frac{2025.2026.(2.2025+1)}{6}=675.1013.5051.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức **Cauchy - Schwars** thì

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \le n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)$$
$$\Rightarrow n \ge \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} \ge 1520.$$

Ta thấy $a_1^4 - a_1^2 = a_1^2(a_1 - 1)(a_1 + 1) \vdots 3$. Như vậy a_1^4, a_1^2 cùng số dư khi chia cho 3.

Như vậy $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2, a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4$ cùng số dư khi chia cho 3.

Mà $3 | a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$. Do đó $3 | a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4 - 9$. (1)

Ta thấy $a_1^4 - a_1^2 = a_1^2(a_1 - 1)(a_1 + 1) \vdots 4$. Như vậy a_1^4, a_1^2 cùng số dư khi chia cho 4.

Như vậy $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2, a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4$ cùng số dư khi chia cho 4.

Mà $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ chia 4 dư 1. $4 | a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4 - 9$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.