SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT**
THANH HÓA	**NĂM HỌC 2025 - 2026**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN**
	(Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán)
	***Thời gian làm bài: 150 phút** (không kể thời gian giao đề)*
	Ngày thi: 04/6/2025
	(Đề thi gồm 02 trang)

Câu 1 *(2,0 điểm).*

1) Cho hai số thực khác nhau a,b và $ab+1\neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}=\frac{2}{1+ab}$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{1}{a^{2025}+1}+\frac{1}{b^{2025}+1}$.

2) Cho $f(x)$ là đa thức bậc 4 có các hệ số nguyên. Biết rằng có bốn giá trị nguyên phân biệt của x để $f(x)$ nhận cùng một giá trị bằng 2025. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên x nào để $f(x)$ có giá trị bằng 2028.

Câu 2 *(1,0 điểm).*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3=2(x+y) \\ xy(x^2+y^2-2)-x^2-y^2+2=0 \end{cases}$.

Câu 3 *(1,0 điểm).* Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 và 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp M, tính xác suất chọn được số chia hết cho 3.

Câu 4 *(2,0 điểm).*

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2x^3+y^3+2x^2y+y^2x=2xy-5$.

2) Tìm tất cả các bộ số $(x;y;p)$ thỏa mãn $\frac{xy^3}{x+y}=p$, biết x,y,p là các số nguyên dương và p là số nguyên tố.

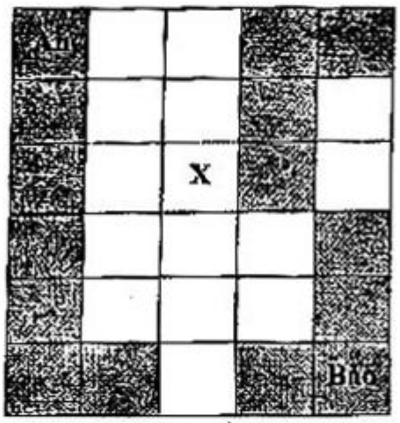
Câu 5 *(3,0 điểm).* Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Điểm A di động trên đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

1) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh H của tam giác BHC cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm M, N. Chứng minh tam giác AMN cân.

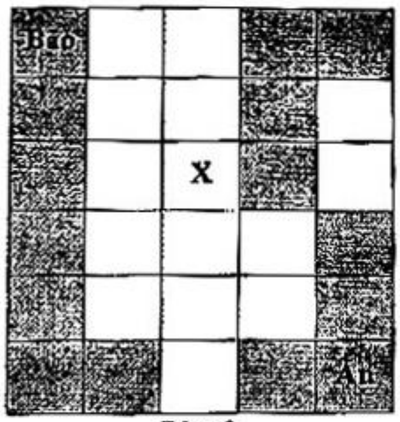
2) Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC. Gọi S là giao điểm thứ hai khác A của đường thẳng AH và đường tròn (O). Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai X (khác S). Chứng minh đường thẳng BX đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt tia phân giác của góc BAC tại K. Chứng minh điểm K thuộc một đường tròn cố định.

Câu 6 *(1,0 điểm)*. Trên sân trường có một bảng ô vuông kích thước $6m \times 5m$. Có 15 học sinh mặc áo màu xanh (trong đó chỉ có đúng một học sinh tên An và một học sinh tên Bảo) và 14 học sinh mặc áo màu trắng xếp hình thành chữ LS (viết tắt chữ Lam Sơn) sao cho mỗi học sinh đứng ở một ô vuông $1m \times 1m$, dư lại một ô vuông trống (đánh dấu X), hai học sinh mặc áo xanh tên An và Bảo đứng ở hai ô vuông góc đối diện như hình vẽ (bảng 1).



Bảng 1



Bảng 2

Cho phép đổi vị trí các học sinh trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, chọn một học sinh đứng ở ô vuông kề với ô vuông trống rồi chuyển học sinh đó sang ô vuông trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển học sinh theo quy tắc trên đối với bảng 1 ta có thể nhận được cách xếp sao cho An và Bảo đổi chỗ cho nhau còn các học sinh khác giữ nguyên vị trí như hình vẽ (bảng 2) hay không? Vì sao?

------------ **HẾT** ------------

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TỈNH THANH HOÁ
Năm học 2025 – 2026

Câu 1.

1) Ta có: $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}=\frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow (a^2+b^2+2)(1+ab)=2(a^2+1)(b^2+1)$

Suy ra

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+2)(1+ab)=2(a^2+1)(b^2+1)\\ &\Leftrightarrow ab(a^2+b^2+2)=2a^2b^2+a^2+b^2\\ &\Leftrightarrow (a^2+b^2)(ab-1)+2ab(1-ab)=0 \Leftrightarrow (ab-1)(a-b)^2=0.\end{aligned}$$

Do a,b là hai số thực khác nhau nên $ab=1 \Rightarrow a=\frac{1}{b}$. Khi đó:

$$M=\frac{1}{a^{2025}+1}+\frac{1}{b^{2025}+1}=\frac{1}{a^{2025}+1}+\frac{1}{\frac{1}{a^{2025}}+1}=\frac{1}{a^{2025}+1}+\frac{a^{2025}}{a^{2025}+1}=1.$$

2) Giả sử tồn tại bốn số nguyên *a, b, c, d* phân biệt sao cho

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=2025.$$

Do đó đa thức $Q(x)=f(x)-2025$ nhận *a, b, c, d* là nghiệm.

Khi đó $f(x)-2025=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Giả sử tồn tại số nguyên *t* sao cho $P(t)=2028$ thì

$$3=f(t)-2025=(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)$$

Mà 3 có tất cả 4 ước nguyên khi đó do $t-a,t-b,t-c,t-d$ phân biệt nên tồn tại hai trong bốn số đó chia hết cho 3. Khi đó $9\,|\,(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)$.

Suy ra điều vô lý. Như vậy không tồn tại giá trị nguyên *x* sao cho $f(x)$ bằng 2028.

Câu 2. Ta có: $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3=2(x+y)(1)\\ xy(x^2+y^2-2)-x^2-y^2+2=0(2)\end{cases}$. Từ (2) ta có: $(xy-1)(x^2+y^2-2)=0$.

Trường hợp 1: $xy=1$. Ta thấy *y* khác 0, khi đó (1) trở thành

$$\begin{aligned}&5x-4y+3y^3=2(x+y)\Leftrightarrow 3y^3-6y+3x=0\\ &\Leftrightarrow 3y^3-6y+\frac{3}{y}=0\Leftrightarrow \frac{3(y^2-1)^2}{y}=0.\end{aligned}$$

Suy ra $y^2=1$. Do đó $\left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=y=-1\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x^2+y^2=2$. Từ (1) ta có:

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)(x+y)=5x^2y-4xy^2+3y^3\Leftrightarrow x^3+y^3+xy^2+x^2y=5x^2y-4xy^2+3y^3\\ &\Leftrightarrow x^3-2y^3+5xy^2-4x^2y=0\Leftrightarrow (x-2y)(x-y)^2=0.\end{aligned}$$

- Nếu $x = y$ thì $x^2 = 1$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right.$.

- Nếu $x = 2y$ thì $2 = 5y^2 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}, y = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ x = -\dfrac{2\sqrt{10}}{5}, y = -\dfrac{\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(1,1), (-1,-1), \left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}, \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

Câu 3.

Số các số có 4 chữ số được lập thành từ 1,2,3,4,5,6, tức là số phần tử tập M là $6.6.6.6 = 6^4$.

Biến cố: "*Số chọn được là số chia hết cho 3*".

Giả sử số cần tìm là: $\overline{abcd}$. Đặt $M = a + b + c$.

Ta chọn bộ số (a,b,c) có $6.6.6 = 6^3$ cách.

Nếu $M \equiv 0 (\bmod 3)$ thì chọn $d \in \{3,6\}$.

Nếu $M \equiv 1 (\bmod 3)$ thì chọn $d \in \{2,5\}$.

Nếu $M \equiv 2 (\bmod 3)$ thì chọn $d \in \{1,4\}$.

Như vậy khi ta chọn bộ số (a,b,c) bất kỳ thì chỉ có 2 cách chọn d nên số cách chọn bộ số (a,b,c,d) để $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 là 2.6^3.

Vậy xác suất để chọn được một số trong tập M và chia hết cho 3 là $\dfrac{2.6^3}{6^4} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 4.

a. Ta có: $2x^3 + y^3 + 2x^2y + xy^2 = 2xy - 5$ hay $(2x^2 + y^2)(x + y) = 2xy - 5$.

Suy ra $2x^2 + y^2 \mid 2xy - 5$. Ta thấy $2xy - 5 \neq 0$.

Nếu $2xy - 5 > 0$ thì $2x^2 + y^2 \leq 2xy - 5 \Leftrightarrow x^2 + (x - y)^2 \leq -5$.

Nếu $2xy - 5 < 0$, khi đó $2x^2 + y^2 \mid 5 - 2xy$ thì $2x^2 + y^2 \leq 5 - 2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 + x^2 \leq 5$.

Suy ra $x^2 \leq 5 \Rightarrow x \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

Mặt khác $2x^3 + 2x^2y + xy^2 - 2xy = -y^3 - 5$.

Trường hợp 1: $x = -2 \Rightarrow y^3 - 2y^2 + 12y - 11 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 - y + 11) = 0$.

Vì $y^2 - y + 11 > 0$ nên $y = 1$.

Trường hợp 2: $x = 2 \Rightarrow y^3 + 2y^2 + 4y + 21 = 0 \Leftrightarrow (y + 3)(y^2 - y + 7) = 0$.

Vì $y^2 - y + 7 > 0$ nên $y = -3$.

Trường hợp 3: $x=-1\Rightarrow y^3-y^2+4y+3=0$.

Ta thấy $-3=y^3-y^2+4y=y^2(y-1)+4y \vdots 2$ (vô lý)

Vậy phương trình này không có nghiệm nguyên.

Trường hợp 4: $x=1\Rightarrow y^3+y^2+7=0$. Ta thấy $-7=y^3+y^2=y^2(y+1)\vdots 2$. (vô lý)

Vậy phương trình này không có nghiệm nguyên.

Trường hợp 5: $x=0\Rightarrow y^3=-5$. (vô lý do - 5 không là lập phương của số nguyên)

Vậy (-2,1) và (2,-3) là các nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

b. Đặt $d=(x,y)$ khi đó tồn tại a,b nguyên dương sao cho $x=da, y=db$ với $(a,b)=1$.

Khi đó $p=\dfrac{d^3ab^3}{a+b}$. Giả sử $(ab^3,a+b)>1$ và gọi q là ước nguyên tố của $(ab^3,a+b)$.

Nếu $q\,|\,b^3$ thì $q\,|\,a+b, q\,|\,b\Rightarrow q\,|\,a$,suy ra $p\,|\,(a,b)$, vô lý do $(a,b)=1$.

Tương tự nếu thì suy ra $q\,|\,a$ được điều vô lý. Như vậy $(ab^3,a+b)=1$.

Suy ra $a+b\,|\,d^3$. Ta có: $p=\dfrac{d^3}{a+b}.ab^3$.

Ta thấy khi $b^3>1$ thì $b^3=p$ vô lý. Như vậy $b^3=1\Leftrightarrow b=1$. Khi đó $p=\dfrac{d^3}{a+1}.a$.

- Nếu $a=1$ thì $p=\dfrac{d^3}{2}\Leftrightarrow d^3=2p$. Ta có $2\,|\,d^3$ hay $8\,|\,d^3\Rightarrow 4\,|\,2p\Rightarrow p=2$.

Như vậy $d^3=4$, vô lý.

- Nếu $d^3=a+1$ và $p=a$ thì $d^3=p+1\Leftrightarrow p=(d-1)(d^2+d+1)$.

Do đó $\begin{cases} d-1=1 \\ d^2+d+1=p \end{cases}\Leftrightarrow d=2, p=7.$

Suy ra $a=7, b=1, d=2, p=7$ .Hay $x=14, y=2, p=7$.

Thử lại ta thấy thoả mãn. Như vậy bộ (14, 2, 7) thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5.

**** Lưu ý:*** *Các kiến thức về tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180 độ thì tứ giác nội tiếp, ...(không có trong SGK mới) học sinh tự bổ sung phần chứng minh trong nội dung bài thi.*

a. Ta có $\angle ACH=\angle ABH$ do cùng phụ với góc BAC. Và có $\angle CHN=\angle BHM$

Khi đó $\angle ANM=\angle ACH+\angle CHN=\angle ABH+\angle BHM=\angle AMN$.

Suy ra tam giác AMN cân tại A.

b. Gọi AD là đường cao của tam giác ABC.

Ta có $\angle HCB=\angle BAH=\angle SCB$ suy ra tam giác HCS cân tại C.

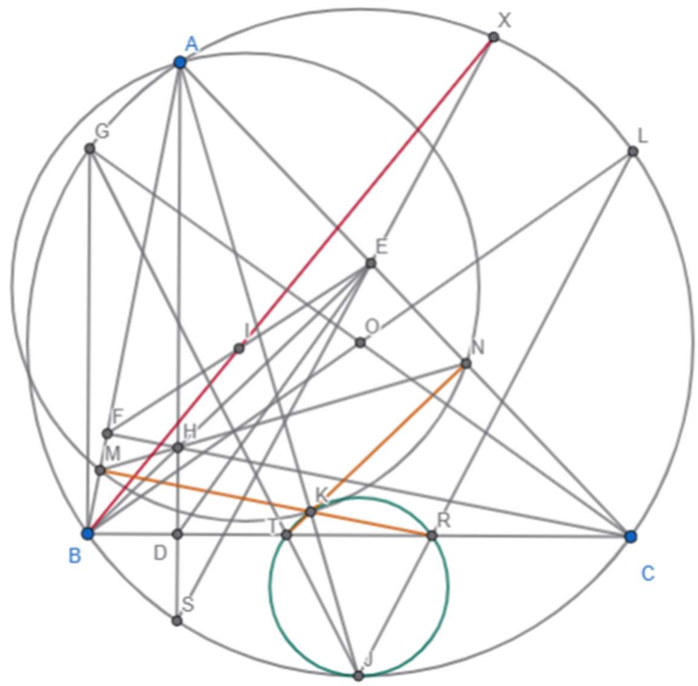
Hay D là trung điểm của HS.

Ta có tứ giác $AEDB$ nội tiếp suy ra $\angle FBE = \angle HDE$ (1)

Và các tứ giác $AEHF$, $HECD$ nội tiếp thì $\angle FEB = \angle BAH = \angle BCH = \angle DEH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BFE \sim \Delta DHE \Rightarrow \frac{BF}{DH} = \frac{EF}{HE} \Leftrightarrow \frac{BF}{2DH} = \frac{EF}{2HE} \Leftrightarrow \frac{BF}{SH} = \frac{FI}{HE}$.

Suy ra $\Delta BFI \sim \Delta SHE(c.g.c) \Rightarrow \angle FBI = \angle HSE = \angle ABX$. Suy ra B,I,X thẳng hàng.



c. Gọi J là giao của AK với (O). Kẻ hai đường kính CG, BL của (O).

Gọi T,R là giao của JG, JL với BC. Ta có:

$$\Delta BGC \sim \Delta EHC(g.g) \Rightarrow \frac{TB}{TC} = \frac{BG}{GC} = \frac{EH}{HC} = \frac{NE}{NC} \Rightarrow TN \parallel BE.$$

Do tam giác AMN cân và K là điểm chính giữa cung nhỏ MN của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN nên AK là đường kính, khi đó $\angle ANK = 90^\circ$.

Hay $TN \parallel BE \parallel KN$. Nên T, K, N thẳng hàng.

Do G, J cố định suy ra T cố định.

Tương tự R cố đinh.

Ta có $\angle TJR + \angle TKR = \frac{\angle GOL}{2} + \angle MKN = \frac{\angle BOC}{2} + \angle MKN = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $KRJT$ nội tiếp.

Mặt khác do T, R, J cố định nên đường tròn ngoại tiếp tam giác TJR cố định.

Suy ra K luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 6.

Tại thời điểm ban đầu ta gán cho 29 học sinh đứng trên sân trường các số 1, 2, 3, …, 29 như trong bảng sau:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	X	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

Xét dãy $S = \left(a_1, a_2, ..., a_{28}, a_{29}\right)$ gồm các số được gán cho 29 học sinh trên sân trường theo thứ tự từ trái sang phải và từ trên xuống dưới. Tại thời điểm đầu dãy S là 1, 2, 3, …, 28, 29 với $a_1 = 1;\ a_2 = 2; ....; a_{28} = 28;\ a_{29} = 29$.

Nếu sau một số phép chuyển mà An và Bảo đổi chỗ cho nhau thì ta có dãy S là 29, 2, 3, …, 28, 1. Khi đó $a_1 = 29;\ a_2 = 2; ....; a_{28} = 28;\ a_{29} = 1$.

Xét n là số các cặp $(i; j)$ trong đó $1 \le i < j \le 29$ nhưng $a_i > a_j$.

Tại thời điểm đầu ta có n = 0.

Tại thời điểm cuối cùng với dãy S là 29, 2, 3, …, 28, 1 thì ta có 55 cặp $(i; j)$ như trên là (1; 2), (1; 3), …,(1; 28), (1; 29), (2;29), (3; 29) , …., (28; 29). Do đó $n = 55$.

Chú ý rằng với mỗi phép chuyển học sinh sang ô vuông trống thì chỉ có 2 khả năng xảy ra:

- Nếu học sinh di chuyển sang trái hoặc phải trên cùng 1 hàng của bảng thì dãy S không thay đổi, nên *n* không thay đổi.
- Nếu học sinh di chuyển lên hàng trên hoặc xuống hàng dưới thì số được gán cho học sinh đó đã tiến 4 vị trí hoặc lùi 4 vị trí trong dãy S. Khi đó *n* tăng 4 hoặc giảm 4.

Ví dụ khi học sinh gán số 8 chuyển sang ô X thì dãy S mới là 1, 2, …,7, 9, 10, 11, 12, 8, 13, 14, …, 28, 29 ta thấy có thêm 4 cặp $(i; j)$ trong đó $1 \le i < j \le 29$ nhưng $a_i > a_j$ là (8; 12), (9; 12); (10; 12), (11; 12).

Vậy lúc đầu $n = 0$ thì sau một số hữu hạn phép chuyển không thể nhận được $n = 55$.

Do đó không thể nhận được cách xếp sao cho An và Bảo đổi chỗ cho nhau còn các học sinh khác giữ nguyên vị trí.