ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

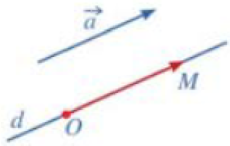
(THEO CT SGK MỚI)

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

I. KHÁI NIỆM VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Chú ý:
+ Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".
+ Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, ...$
- Các khái niệm có liên quan đến vectơ trong không gian như: giá của vectơ, độ dài của vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ-không, hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau, … được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.
- Chú ý: Cho điểm O và vectơ $\vec{a}$. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm M trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
Để xác định điểm M, ta làm như sau:
+ Qua O kẻ đường thẳng d song song hoặc trùng với giá của vectơ $\vec{a}$.
+ Lấy điểm M trên đường thẳng d sao cho hai vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}$ là cùng hướng và độ dài đoạn thẳng OM bằng độ dài vectơ $\vec{a}$.



II. CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.
- Chú ý:
+ Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ*.
+ Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, chẳng hạn: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, cộng với vectơ-không.
+ Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian, ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vectơ trong mặt phẳng.
- Đối với vectơ trong không gian, ta cũng có các quy tắc sau:
+ Với ba điểm A, B, C trong không gian, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm).
+ Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).
+ Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp).
- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.
- Đối với vectơ trong không gian, ta có quy tắc sau: Với ba điểm O, A, B trong không gian, ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (Quy tắc hiệu).

2. Tích của một số với một vectơ trong không gian

- Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:
+ Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $3\vec{a}$ nếu $k < 0$.
+ Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.
- Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$. Do đó, $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

- Chú ý:
+ Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là *phép nhân một số với một vectơ*.
+ Phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:
Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k ta có:

- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$; $k\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=k\vec{a}-k\vec{b}$;
- $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$;
- $h\left(k\vec{a}\right)=(hk)\vec{a}$;
- $1\vec{a}=\vec{a}$; $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

3. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O tùy ý và vẽ hai vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong không gian, kí hiệu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

- Chú ý: $0° \le \left(\vec{a},\vec{b}\right) \le 180°$.

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, ở đó $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

- Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ bằng 0.
- Chú ý:
+ Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian có các tính chất sau:
Với các vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k tùy ý, ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;
- $\vec{a}^2 \ge 0$, $\vec{a}^2=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

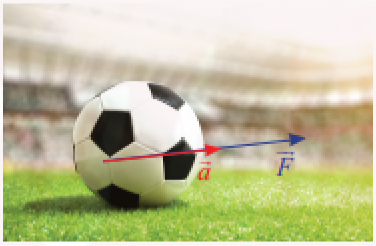
+ Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$.

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 1. **(NB)** Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

$\vec{F}=m\vec{a}$

trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(m/s^2\right)$, $\vec{F}$ là vectơ lực (N)



Hình 20

Hình 20 tác dụng lên vật, $m(\text{ kg})$ là khối lượng của vật.

Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5$ kg một gia tốc $50\text{ m}/\text{s}^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\vec{F}=m\vec{a}$, suy ra $\left|\vec{F}\right|=m\left|\vec{a}\right|=0,5.50=25(\text{ N})$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5\text{ kg}$ một gia tốc $50\text{ m}/\text{s}^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là 25 N.

Câu 2. **(NB)** Một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P}=m.\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g=9,8\,m/s^2$. Tính khối lượng của vật khi chịu tác dụng của lực hấp dẫn của Trái Đất là $P=4,9N$.

Lời giải:

Từ $\vec{P}=m.\vec{g}\Rightarrow m=\dfrac{P}{g}$.

Khối lượng của vật là $m=\dfrac{P}{g}=\dfrac{4,9}{9,8}=0,5(kg)=500(g)$.

Câu 3. **(NB)** Một vật có khối lượng $m(kg)$ khi chịu tác dụng của một lực $\vec{F}$ thì vật đó sẽ chuyển động với gia tốc $\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}$. Tính lực tác dụng lên vật có khối lượng $m=6(kg)$ khi vật đó chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang, nhẵn với gia tốc $a=3\,m/s^2$?

Lời giải

Từ $\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}$, suy ra $\vec{F}=m.\vec{a}$.

Lực tác dụng lên vật đó là $F=m.a=6.3=18(N)$.

Câu 4. **(NB)** Nếu vật chuyển động thẳng đều dưới tác dụng của một lực $\vec{F}$ thì vật đó đang chịu tác dụng của lực ma sát $\vec{F_{ms}}$ có độ lớn bằng lực tác dụng $\vec{F}$ và có hướng ngược với hướng của $\vec{F}$. Công thức tính lực ma sát $F_{ms}=\mu.\text{N}$, trong đó μ là hệ số ma sát, N là độ lớn của áp lực. Giả sử một thùng gỗ đang chuyển động thẳng đều trên mặt phẳng nằm ngang có trọng lượng $N=150(N)$, hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng là $\mu=0,25$. Tính lực tác dụng lên thùng gỗ để thùng chuyển động thẳng đều?

Lời giải

Lực ma sát mặt phẳng tác dụng lên vật là:

$F_{ms}=\mu.\text{N}=0,25.150=37,5(N)$.

Vật chuyển động thẳng đều nên lực tác dụng lên vật là $F=F_{ms}=37,5(N)$.

Câu 5. **(TH)** Theo định luật II Newton: Nếu $\vec{F}$ là véc tơ lực (N) tác dụng lên vật, $\vec{a}$ là véc tơ gia tốc của vật (m/s^2) và m (kg) là khối lượng của vật thì ta có $\vec{F}=m.\vec{a}$. Trong mỗi câu sau, ở mỗi ý **a), b), c), d)** học sinh chọn đúng hoặc sai.

a) Véc tơ $\vec{F}$ luôn cùng hướng với $\vec{a}$.

b) Độ lớn của lực tác dụng lên vật luôn tỷ lệ nghịch với độ lớn của gia tốc của vật.

c) Muốn một vật có khối lượng 1 (kg) chuyển động với gia tốc 20 (m/s^2) thì độ lớn lực cần tác dụng lên vật là 20 (N).

d) Trọng lực có độ lớn 50 (N) tác dụng lên một vật làm vật rơi với gia tốc tự do $10(\text{m/s}^2)$. Khi đó khối lượng của vật là $500(\text{g})$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	S	Đ	S

a) Ta có $m>0$ nên $\vec{F}$ và $\vec{a}$ cùng hướng. Vậy mệnh đề đã cho **đúng.**

b) Ta có $\vec{F}=m.\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{F}\right|=m.\left|\vec{a}\right|\Rightarrow$ $\left|\vec{F}\right|$ và $\left|\vec{a}\right|$ tỷ lệ thuận với nhau. Vậy mệnh đề đã cho **sai.**

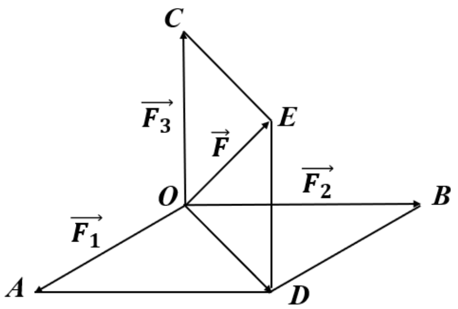
c) Ta có $m=1(\text{kg})$; $\left|\vec{a}\right|=20(\text{m/s}^2)\Rightarrow\left|\vec{F}\right|=m.\left|\vec{a}\right|=1.20=20$ (N). Vậy mệnh đề đã cho **đúng.**

d) Ta có $\left|\vec{F}\right|=m.\left|\vec{a}\right|\Rightarrow m=\dfrac{\left|\vec{F}\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{50}{10}=5$ (kg). Đổi đơn vị 5 (kg) $=5000$ (g). Vậy mệnh đề đã cho **sai.**

Câu 6. **(TH)** Ba lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và đều có độ lớn là 10 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực trên.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{5}$.

Lời giải



Vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{F_1}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{F_2}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{F_3}$.

Vẽ hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$.

Hình bình hành $OADB$ có $OA\perp OB$ và $OA=OB$ nên $OADB$ là hình vuông, do đó

$OD=\sqrt{OB^2+BD^2}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$.

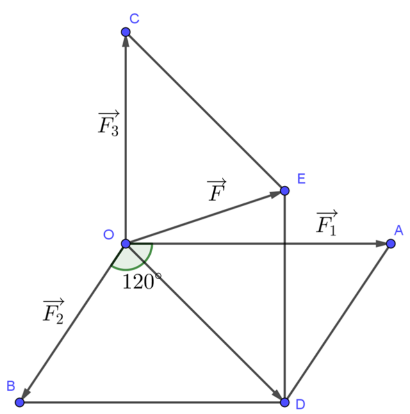
Vì $OC\perp(OADB)$ nên $OC\perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật. Khi đó

$OE=\sqrt{OD^2+DE^2}=\sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2+10^2}=10\sqrt{3}$.

Vậy độ lớn của hợp lực là $F=10\sqrt{3}$ N.

Câu 7. Có ba lực cùng tác dụng vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $120°$ và đều có độ lớn bằng $30N$. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn bằng $40N$. Tính hợp lực của ba lực trên.

Lời giải



Gọi $\vec{F_1};\vec{F_2};\vec{F_3}$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $30N;30N;40N$

Vẽ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{F_1};\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{F_2};\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{F_3}$

Dựng các hình bình hành $OADB$ và $ODEC$.

Hợp lực tác dụng vào vật là $\overrightarrow{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$.

Hình bình hành $OADB$ có $\widehat{AOB}=120°$ và $OA=OB$ nên ΔOBD đều, suy ra $OB=OD=30N$.

Vì $OC\perp(OAB)$ nên $OC\perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó, ΔODE vuông tại D.

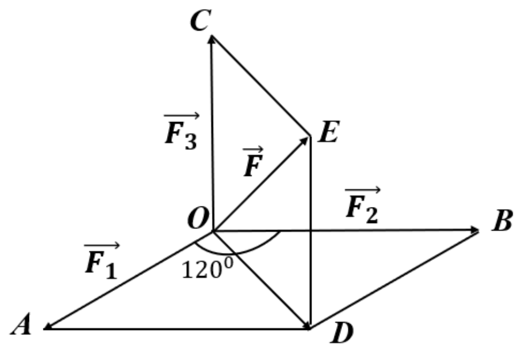
Ta có $OE^2=OC^2+OD^2=40^2+30^2=50^2$, suy ra $OE=50$.

Vậy hợp lực có độ lớn là $F=50N$.

Câu 8. **(VD)** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $120°$ và có độ lớn lần lượt là 20 N và 15 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 10 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực trên.

A. $5\sqrt{15}$. **B.** $5\sqrt{13}$. **C.** $5\sqrt{17}$. **D.** $5\sqrt{5}$.

Lời giải



Gọi $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ là ba lực cùng tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 20 N, 15 N và 10 N, trong đó $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=120°$.

Vẽ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{F_3}$.

Vẽ hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\overrightarrow{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$.

Hình bình hành $OADB$ có $\widehat{AOB}=120°$, $OA=20$, $OB=15$, do đó

$OD^2=OB^2+BD^2-2OB.BD.\cos\widehat{OBD}=20^2+15^2-2.20.15.\cos 60°=325$.

Vì $OC\perp(OADB)$ nên $OC\perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật. Khi đó

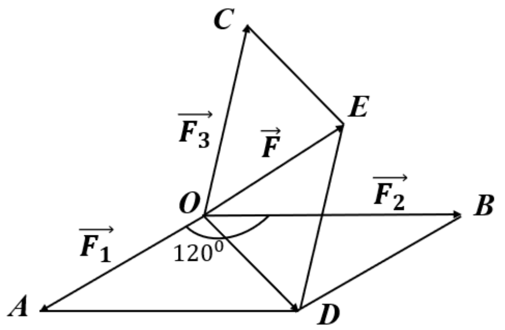
$OE=\sqrt{OD^2+DE^2}=\sqrt{325+10^2}=5\sqrt{17}$.

Vậy độ lớn của hợp lực là $F=5\sqrt{17}\text{ N}$.

Câu 9. **(VD)** Ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật. Biết ba lực đó đôi một tạo với nhau một góc $120°$ và có độ lớn lần lượt là 15 N, 7 N, 12 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực trên.

A. $\sqrt{132}$. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 12.

Lời giải



Vẽ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{F_3}$.

Vẽ hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$.

Hình bình hành $OADB$ có $\widehat{AOB}=120°$, $OA=15$, $OB=7$, do đó

$OD^2=OB^2+BD^2-2OB.BD.\cos\widehat{OBD}=7^2+15^2-2.7.15.\cos 60°=169$. Suy ra $OD=13$.

Ta có $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=-\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$

Hay $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CE}=-OC.OA.\cos\widehat{AOC}-OC.OB\cos\widehat{BOC}=-12.15.\cos 120°-12.7.\cos 120°=132$.

Khi đó $\cos\widehat{OCE}=\cos\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CE}\right)=\dfrac{\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CE}}{\left|\overrightarrow{CO}\right|.\left|\overrightarrow{CE}\right|}=\dfrac{132}{12.13}=\dfrac{11}{13}$.

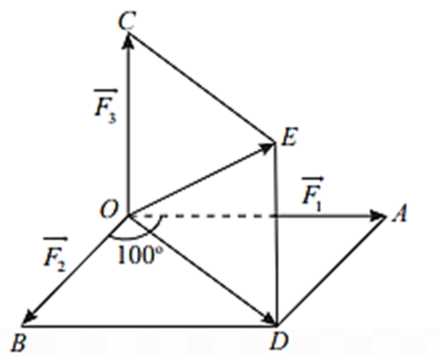
Hình bình hành $ODEC$ có $\cos\widehat{OCE}=\dfrac{11}{13}$, $OA=12$, $OD=13$. Khi đó

$OE^2=OC^2+CE^2-2OC.CE.\cos\widehat{OCE}=12^2+13^2-2.12.13.\dfrac{11}{13}=49$. Do đó $OE=7$.

Vậy độ lớn của hợp lực là $F=7$ N.

Câu 10. **(VD)** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Lời giải



Hình 12

Gọi $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 25 N, 12 N, 4 N.

Vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{F_1}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{F_2}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{F_3}$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là

$\vec{F}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có

$OD^2=BD^2+OB^2-2\cdot BD\cdot OB\cdot\cos\widehat{OBD}=OA^2+OB^2+2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos 100^\circ$.

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.
Do đó tam giác ODE vuông tại D.
Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ$.
Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ}$
$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26{,}092$.
Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26$ N.

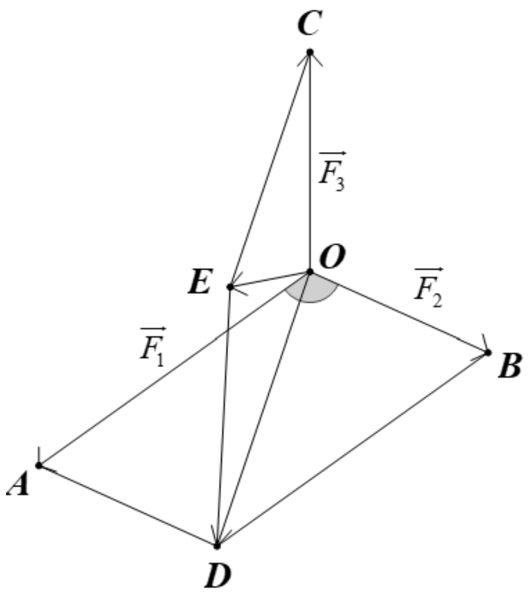
Câu 11. **(VD)** Có ba lực cùng tác động vào một vật tại một điểm. Trong đó hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là 9 N và 4 N, lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn 7 N. Độ lớn của hợp lực của ba lực trên là bao nhiêu newton (N)? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 11 N.

Cách 1:

Giả sử các lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ tác động vào vật đặt tại điểm O. Lấy các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{F_1}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_2}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{F_3}$. Dựng các hình bình hành $OADB$ và $OCED$ như hình vẽ.



Hợp lực của ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ là $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$
Áp dụng định lý cosin trong ΔOAD, ta có:
$OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2OA.AD.\cos\widehat{OAD} = 9^2 + 4^2 - 2.9.4.\cos 70^\circ = 97 - 72\cos 70^\circ$.
Vì $OC \perp OA$ và $OC \perp OB$ nên $OC \perp OD \Rightarrow ODEC$ là hình chữ nhật.
$\Rightarrow OE^2 = OC^2 + CE^2 = OC^2 + OD^2 = 7^2 + 97 - 72\cos 70^\circ = 146 - 72\cos 70^\circ$
$\Rightarrow OE = \sqrt{146 - 72\cos 70^\circ} \approx 11$
Vậy độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng 11 N.

Cách 2:

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$.

Ta có: $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} \Rightarrow \left(\vec{F}\right)^2 = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}\right)^2$

$\Rightarrow \left|\vec{F}\right|^2 = \left(\overrightarrow{F_1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{F_2}\right)^2 + \left(\overrightarrow{F_3}\right)^2 + 2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_2} + 2\overrightarrow{F_1}\overrightarrow{F_3} + 2\overrightarrow{F_2}\overrightarrow{F_3}$

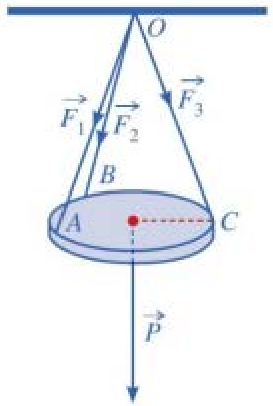
$\Rightarrow \left|\vec{F}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{F_3}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) + 2\left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_3}\right) + 2\left|\overrightarrow{F_2}\right|\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}\right)$

$\Rightarrow \left|\vec{F}\right|^2 = 9^2 + 4^2 + 7^2 + 2.9.4.\cos 110^\circ + 2.9.7.\cos 90^\circ + 2.4.7.\cos 90^\circ = 146 + 72\cos 110^\circ$.

$\Rightarrow \left|\vec{F}\right| = \sqrt{146 + 72\cos 110^\circ} \approx 11$.

Vậy độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng 11 N.

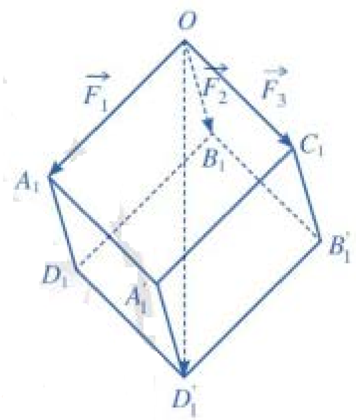
Câu 12. **(TH)** Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = \left|\vec{F_3}\right| = 10(N)$ (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.

A. $30\sqrt{3}$. **B.** 10. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{F_3}$.

Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp.

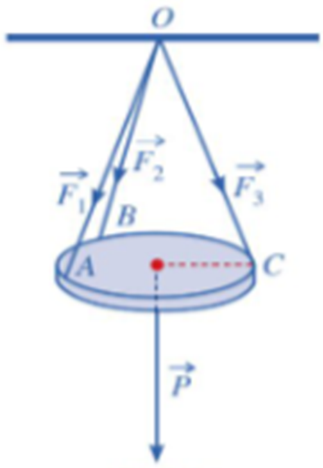
Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}$.

Do các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_2}\right| = \left|\vec{F_3}\right| = 10(N)$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 10, suy ra độ dài đường chéo bằng $10\sqrt{3}$.

Vì tấm gỗ tròn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$.

Suy ra trọng lượng của tấm gỗ tròn: $\left|\vec{P}\right| = \left|\overrightarrow{OD_1'}\right| = 10\sqrt{3}\,(N)$.

Câu 13. **(VD)** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đều có độ lớn bằng $60(N)$. Cho biết các đường thẳng OA,OB,OC cùng tạo với mặt phẳng ngang một góc bằng $30°$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



Lời giải

Theo giả thiết ta có $O.ABC$ là hình chóp đều với $OA=OB=OC=60$ và góc tạo bởi mỗi đường thẳng OA,OB,OC với (ABC) là $30°$.

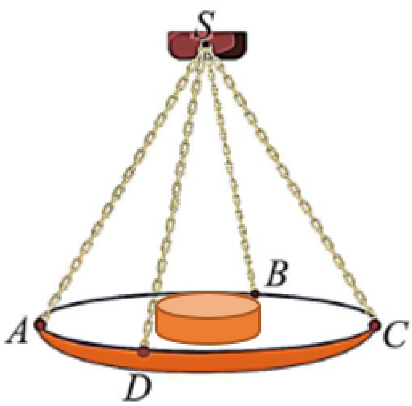
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $OG\perp(ABC)$ và $\widehat{OAG}=\widehat{OBG}=\widehat{OCG}=30°$.

Gọi T là trọng lượng của đèn tròn thì $T=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|3\overrightarrow{OG}\right|=3OG$.

Trong tam giác OAG vuông tại G, ta có: $OG=OA\sin\widehat{OAG}=60\sin 30°=30$.

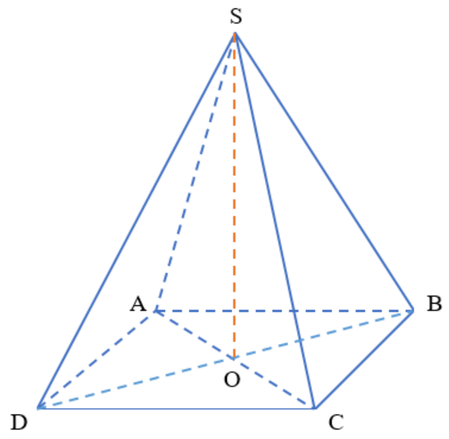
Vậy trọng lượng của đèn là $T=3.30=90(N)$.

Câu 14. **(VD)** Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m=3\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA,SB,SC,SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=90°$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g=10\,\text{m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 30.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=-4\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{SO} \Rightarrow \left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}\right|=\left|4\overrightarrow{SO}\right|=4SO$.

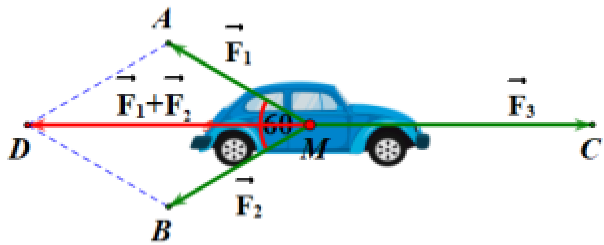
Trọng lượng của vật nặng là $P=mg=3.10=30\left(N\right)$. Suy ra $4\left|\overrightarrow{SO}\right|=P=30\left(N\right) \Rightarrow SO=\frac{15}{2}$.

Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO=SA.\sin\widehat{SAC} \Rightarrow SA=\frac{SO}{\sin\widehat{SAC}}=\frac{\frac{15}{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{15\sqrt{2}}{2}=\frac{30\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a=30.$$

Vậy $a=30$.

Câu 15. **(VD)** Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một ô tô tại điểm M và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB}=60^0$. Khi đó cường độ lực $\overrightarrow{F_3}$ là (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)



Lời giải

Đáp số: 43,3

- Ta có: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}$ (Với D là điểm sao cho $AMBD$ là hình bình hành).
- Ta có: $MA=\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{F_1}\right|=25N$

$MB=\left|\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=25N$

- Do $\widehat{AMB}=60^0$ nên ΔMAB là tam giác đều. Khi đó: $MD=2.\frac{25\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$
- Do ô tô đứng yên nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$

Suy ra: $\overrightarrow{F_3}=-(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}) \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_3}\right|=\left|-(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2})\right|=\left|\overrightarrow{DM}\right|=MD=25\sqrt{3}(N)$

Vậy cường độ của $\overrightarrow{F_3}$ là $25\sqrt{3}\approx 43,3\left(N\right)$.

Câu 16. **(VD)** Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học(hình ảnh 2.20).

Hình 2.20

Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{F_2}$ $(k\in\mathbb{R};k>0)$. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 900(km/h), máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có cùng hướng và $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{F_2}$ $(k>0)$.

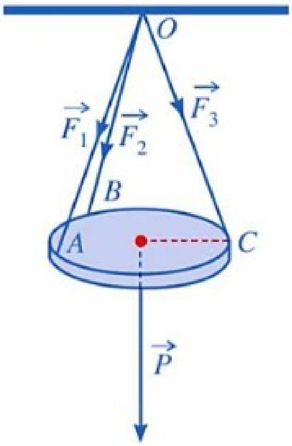
Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của chiếc máy bay khi đạt 900(km/h) và 920(km/h).

Suy ra $v_1=900\,(\text{km/h})$, $v_2=920\,(\text{km/h})$.

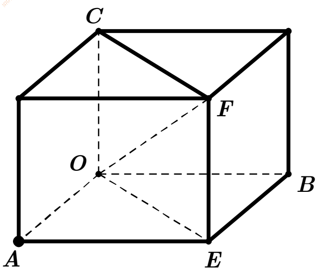
Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên $\left|\dfrac{\overrightarrow{F_1}}{\overrightarrow{F_2}}\right|=\dfrac{v_1^2}{v_2^2}=\dfrac{900^2}{920^2}=\dfrac{2025}{2116}\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\dfrac{2025}{2116}\left|\overrightarrow{F_2}\right|\Rightarrow\overrightarrow{F_1}=\dfrac{2025}{2116}\overrightarrow{F_2}$.

Từ đó suy ra: $k=\dfrac{2025}{2116}\simeq 0,96$.

Câu 17. **(VD)** Một chiếc đèn trang trí hình tròn được treo song song với mặt phẳng trần nhà nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn OA,OB,OC đôi một vuông góc (như hình vẽ dưới đây). Biết lực căng dây tương ứng trên mỗi dây OA,OB,OC lần lượt là $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=16\,(\text{N})$. Tính trọng lượng (đơn vị: N) của chiếc đèn đó. (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Lời giải



ĐS: $27,7$

Ta có: $P=\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$.

Vẽ hình vuông $OAEB$, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$. (Quy tắc hình bình hành)

Vẽ hình chữ nhật $OCFE$, ta có $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}$. (Quy tắc hình bình hành)

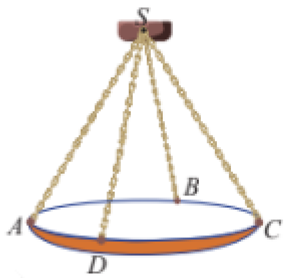
Suy ra: $P=\left|\overrightarrow{OF}\right|=OF$.

Xét hình vuông $OAEB$, cạnh 16, có đường chéo $OE=16\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông OEF, vuông tại E, có $OF=\sqrt{OE^2+EF^2}=\sqrt{\left(16\sqrt{2}\right)^2+16^2}=16\sqrt{3}\approx 27,7$

Vậy $P\approx 27,7$ (N).

Câu 18. **(VD)** Một chiếc đèn chùm có khối lượng $m=10\left(kg\right)$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA,SB,SC,SD cùng chất liệu và không đàn hồi sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều (xem hình vẽ). Biết rằng gia tốc rơi tự do là $g=10\left(m/s^2\right)$



Tìm độ lớn của lực căng (đơn vị $\left(N\right)$) của mỗi sợi dây cáp.

Lời giải

Ta có độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là $\left|\vec{P}\right|=m.g=100N$.

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Theo bài toán thì là hình chóp $S.ABCD$ có đường cao là SO

Gọi $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ lần lượt là lực căng trên các dây SA,SB,SC,SD

Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=2\overrightarrow{SO}$

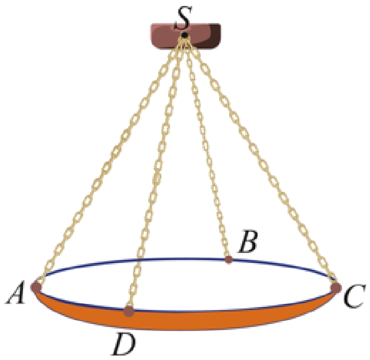
$\Rightarrow \overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=4\overrightarrow{SO}$

Vì chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=4\overrightarrow{SO}$

Độ lớn của lực căng trên mỗi dây bằng nhau và bằng $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\dfrac{\left|\vec{P}\right|}{4}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\dfrac{\left|\vec{P}\right|}{4}=25N$

Câu 19. **(TH)** Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m=5\,kg$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA,SB,SC,SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=60^\circ$ (Hình).



Biết $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $10\,m/s^2$, $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn bị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Cho các kết luận dưới đây.

a) $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$ là 4 vec tơ đồng phẳng.

b) $\left|\overrightarrow{SA}\right| = \left|\overrightarrow{SB}\right| = \left|\overrightarrow{SC}\right| = \left|\overrightarrow{SD}\right|$.

c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng $50\,N$.

d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{6}N$.

Số kết luận **ĐÚNG** là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

c) Độ lớn trọng lực tác động lên đèn chùm là: $P = mg = 5.10 = 50\,N$

d) Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $=> SA = SB = SC = SD$

Mà $\widehat{ASC} = 60^\circ$ => Tam giác SAC đều

Gọi O là trung điểm AC.

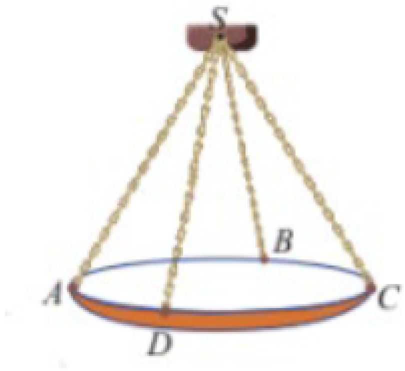
Ta có: Hợp lực của 4 sợi xích là: $\vec{F} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} + 2\overrightarrow{SO} = 4\overrightarrow{SO}$

Để đèn chùm đứng yên thì hợp lực của các sợi xích phải cân bằng với trọng lực hay $4\overrightarrow{SO} = \vec{P}$ hay $4SO = P \Leftrightarrow SO = 12,5$

Xét tam giác đều $SAC: SA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}SO = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

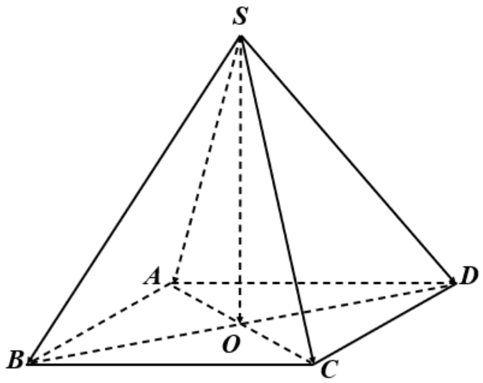
Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}N$.

Câu 20. **(VD)** Một chiếc đèn chùm được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn cáp SA, SB, SC, SD sao cho $SA = SB = SC = SD$ và $ABCD$ là hình vuông, đồng thời các cạnh SA, SB, SC, SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Biết độ lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp là $5(\mathrm{N})$. Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.



A. $20\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{2}$.

Lời giải



Lực căng của bốn sợi dây lần lượt là $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$.

Vì $SA = SB = SC = SD$ và $ABCD$ là hình vuông nên $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}\right) + \left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right) = 4\overrightarrow{SO}$.

Ta có góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{SAO} = 45^\circ$.

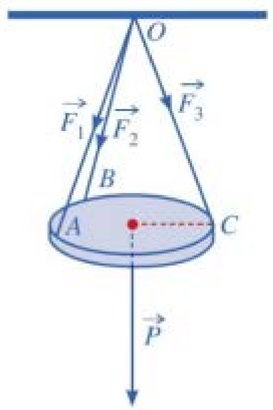
Xét tam giác vuông SAO, ta có $\sin 45^\circ = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = SA \sin 45^\circ = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vì chiếc đèn chùm ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{P}\right| = 4\left|\overrightarrow{SO}\right| = 10\sqrt{2}$.

Vậy độ lớn của trọng lực $\overrightarrow{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là $10\sqrt{2}$ N.

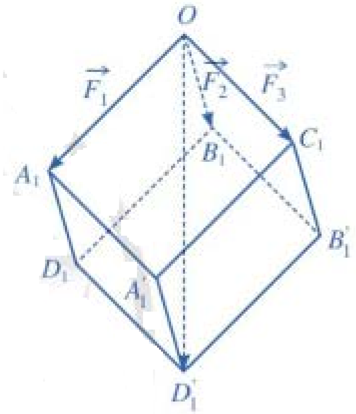
Câu 21. **(VD)** Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 10(N)$ (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.

Lời giải

Đáp số: $10\sqrt{3}\ (N)$.



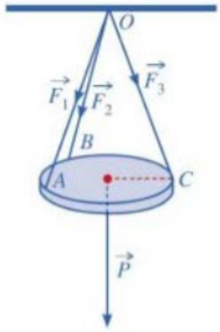
Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{F_3}$

Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp.

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}$

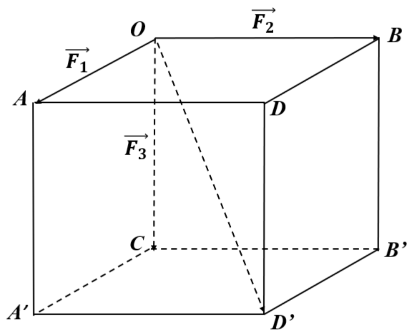
Do các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}| = 10(N)$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 10, suy ra độ dài đường chéo bằng $10\sqrt{3}$

Câu 22. **(VD)** Một tấm sắt tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}|$. Biết trọng lượng P của tấm sắt tròn đó bằng $2025\sqrt{3}\,(\text{N})$. Tính lực căng của dây treo tấm sắt tròn đó.



A. $2025\sqrt{3}$. **B.** $\frac{2025}{3}$. **C.** 2025. **D.** $\frac{2025\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{F_3}$.

Lấy các điểm D, A', B', D' sao cho $OADB.CA'D'B'$ là hình hộp.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD'}$.

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn bằng nhau $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$ nên hình hộp $OADB.CA'D'B'$ có ba cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Hay $OADB.CA'D'B'$ là hình lập phương.

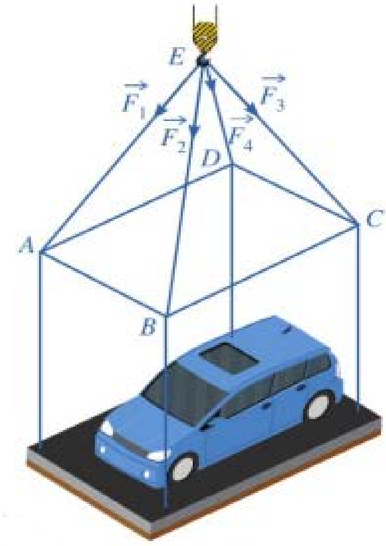
Vì tấm sắt tròn ở vị trí cân bằng nên $\vec{P}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$.

Suy ra $\left|\vec{P}\right|=\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=\left|\overrightarrow{OD'}\right|$, tức $OD'=2025\sqrt{3}$.

Vì $OADB.CA'D'B'$ là hình lập phương nên $OA=\frac{OD'}{\sqrt{3}}=2025$.

Vậy lực căng của dây treo tấm sắt tròn là 2025 N.

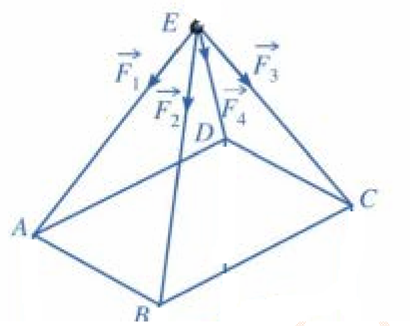
Câu 23. **(VD)** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt là $2000(N)$. Trọng lượng của chiếc xe ô tô gần nhất số nào sau đây?



A. $15321(N)$.		**B.** $6660(N)$.		**C.** $5000(N)$.		**D.** $10000(N)$.

Lời giải

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$, Theo bài toán thì là hình chóp $E.ABCD$ có đường cao là EO



Theo quy tắc hình bình hành: $\vec{F_1}+\vec{F_3}=2\vec{EO}$; $\vec{F_2}+\vec{F_4}=2\vec{EO}$.

$\Rightarrow \vec{F_1}+\vec{F_3}+\vec{F_2}+\vec{F_4}=4\vec{EO}$.

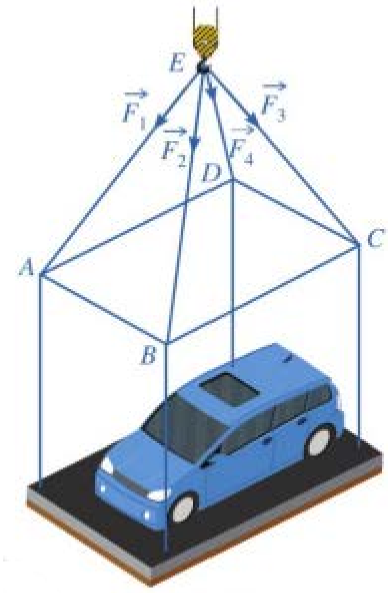
dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$ nên:

$\Rightarrow EO = EA.\sin 60° = 5000.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2500\sqrt{3}$.

Vì chiếc xe ô tô ở vị trí cân bằng nên: $\vec{P}+\vec{P_1}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}=4\vec{EO}$.

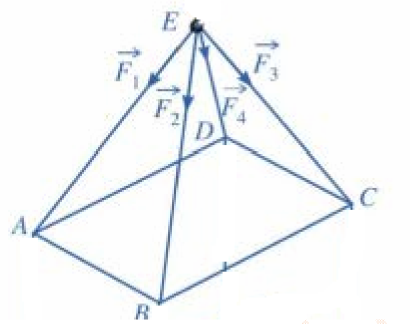
Suy ra trọng lượng của chiếc xe ô tô: $|\vec{P}|+2000=4|\vec{EO}| \Rightarrow |\vec{P}|=4.2500\sqrt{3}-2000\approx 15321(N)$.

Câu 24. **(VD)** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^0 (như hình vẽ). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}$ đều có cường độ $500(N)$ và trọng lượng khung sắt là $200(N)$. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (đơn vị (N)), kết quả làm tròn đến hàng đơn vị?



Lời giải

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$, Theo bài toán thì là hình chóp $E.ABCD$ có đường cao là EO



Theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=2\overrightarrow{EO};\ \overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=2\overrightarrow{EO}$

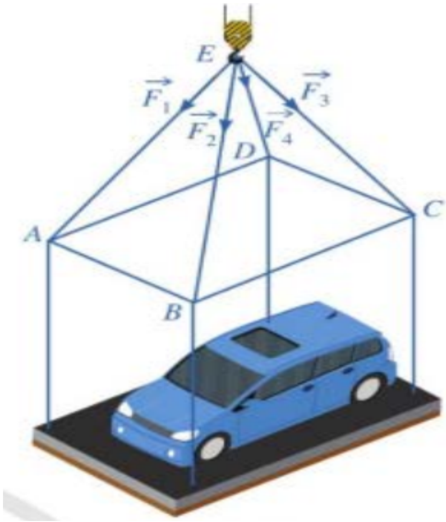
$\Rightarrow \overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=4\overrightarrow{EO}$

Dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$ nên suy ra $EO=EA.\sin 60°=500.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=250\sqrt{3}$

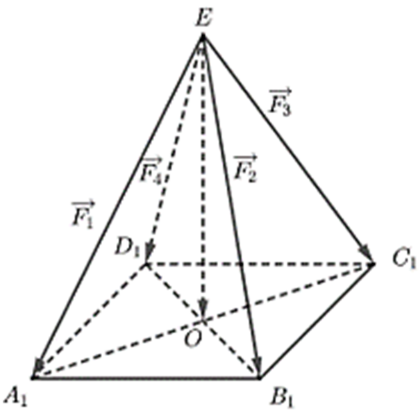
Ta có $\left|\overrightarrow{P}\right|+200=4\left|\overrightarrow{EO}\right|\Rightarrow\left|\overrightarrow{P}\right|=4.250\sqrt{3}-200\approx 1532(N)$

Vậy trọng lượng xe ô tô là $1532(N)$.

Câu 25. **(VD)** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật ABCD, mặt phẳng (ABCD) song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc bằng 45^0. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết trọng lượng chiếc xe ô tô là $4000\,N$ và trọng lượng khung sắt là $2000N$; cường độ các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ là bằng nhau. Tính cường độ lực căng $\overrightarrow{F_1}$



Lời giải



Ta đơn giản hoá mô hình bài toán thông qua hình vẽ sau ($\overrightarrow{EO}$ cùng hướng với véctơ trọng lực của ô tô và khung sắt).

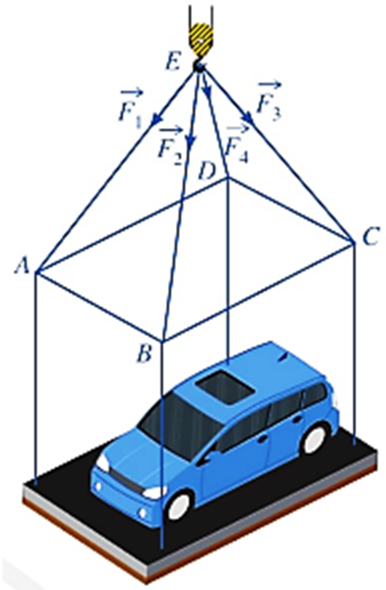
Theo giả thiết ta có $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2},+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right|=6000$. Mặt khác: $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right|=\left|4\overrightarrow{EO}\right|=4EO$.

Suy ra $EO=1500$.

Ta có $\left(ED,(ABCD)\right)=\widehat{EDO}=45^0$. Như vậy $ED=\dfrac{EO}{\sin 45^0}=1500\sqrt{2}$.

Cường độ lực căng $\overrightarrow{F_1}$ là $1500\sqrt{2}N$.

Câu 26. **(VD)** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC và ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ một góc bằng $60°$ (*hình minh họa*). Chiếc cần cẩu đang kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



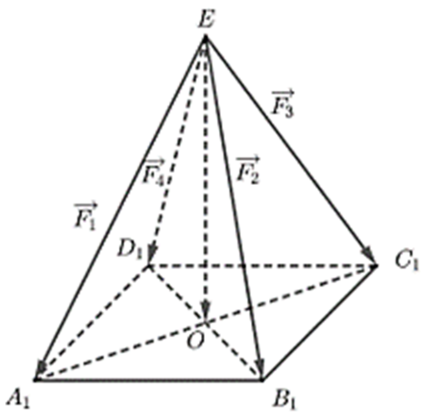
Biết rằng các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}$ đều có cường độ là $4,7\text{ kN}$ và trọng lượng của khung sắt là 3 kN. Tính trọng lượng lớn nhất của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải

Đáp số: $13,3\text{ kN}$.

Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các điểm sao cho

$\overrightarrow{EA_1} = \vec{F_1}, \overrightarrow{EB_1} = \vec{F_2}, \overrightarrow{EC_1} = \vec{F_3}, \overrightarrow{ED_1} = \vec{F_4}$



Vì EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng ($ABCD$) một góc bằng 60° nên EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ một góc bằng 60°.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình chữ nhật.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$.

Ta suy ra $EO \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Do đó, góc giữa đường thẳng EA_1 và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng góc EA_1O.

Suy ra $\widehat{EA_1O} = 60^\circ$.

Ta có $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}| = |\vec{F_4}| = 4700(\text{ N})$ nên $EA_1 = EB_1 = EC_1 = ED_1 = 4,7$.

Tam giác EA_1O vuông tại O nên $EO = EA_1 \sin \widehat{EA_1O} = 4,7 \sin 60^\circ = 2,35\sqrt{3}$.

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{EA_1} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{EB_1} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{EC_1} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{ED_1} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD_1}$

Vì O là trung điểm của A_1C_1 và B_1D_1 nên $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{EB_1}+\overrightarrow{EC_1}+\overrightarrow{ED_1}=4\overrightarrow{EO}$.

Do đó, $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=4\overrightarrow{EO}$.

Gọi P là trọng lực của khung sắt có chứa chiếc ô tô.

Vì chiếc khung sắt chứa xe ô tô đang được kéo lên. Suy ra trọng lượng của khung sắt chứa chiếc xe ô tô là $\left|\vec{P}\right|\le 4\left|\overrightarrow{EO}\right|=4.2,35\sqrt{3}=9,4\sqrt{3}\left(\text{ kN}\right)$.

Vì trọng lượng của khung sắt là 3 kN nên trọng lượng của chiếc xe ô tô là: $9,4\sqrt{3}-3\approx 13,3\left(\text{ kN}\right)$.

Câu 27. **(VD)** Một em nhỏ cân nặng $20kg$ trượt trên cầu trượt dài 3m. Biết rằng cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30°. Cho biết công A(J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A=\vec{F}.\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt biết gia tốc rơi tự do $g=9,8\,m/s^2$.

Lời giải

Ta có: $\left|\vec{P}\right|=P=m.g=20.9,8=196(N)$.

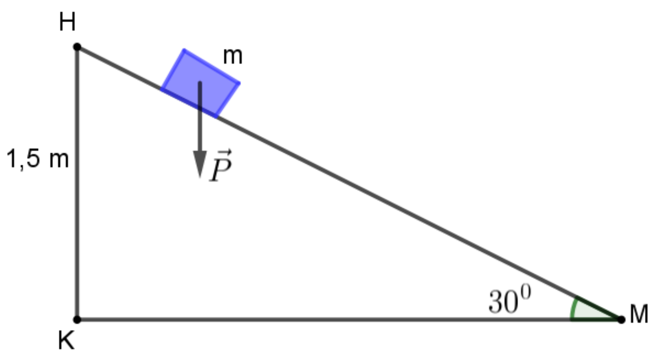
$\left|\vec{d}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=3(m)$.

Cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là $\widehat{ACB}=30^\circ$ nên $(\vec{P},\vec{d})=\widehat{CAB}=60^\circ$

Công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt $3\,m$ là:

$A=\vec{P}.\vec{d}=\left|\vec{P}\right|.\left|\vec{d}\right|\cos(\vec{P},\vec{d})=196.3.\cos 60^\circ=294(J)$.

Câu 28. **(VD)** Một vật khối lượng $m=10\,(\text{kg})$ trượt trên mặt phẳng nghiêng so với mặt đất một góc 30° từ độ cao HK=1,5 (m). Giả sử mặt phẳng nghiêng không có ma sát và vật chỉ bị tác dụng bởi trọng lực $\vec{P}=m.\vec{g}$ với $\vec{g}$ là véc tơ gia tốc rơi tự do của vật có độ lớn được lấy bằng $10(\text{m/s}^2)$.



a) Hướng chuyển động của vật là hướng từ H xuống K.

b) Chiều dài quãng đường HM là 3 (m).

c) Độ lớn của trọng lực $\overrightarrow{P}$ là $100\,(\mathrm{N})$.

d) Công của trọng lực $\overrightarrow{P}$ làm vật ở trên trượt từ vị trí H đến mặt đất bằng $150\sqrt{3}\,(\mathrm{J})$ (Cho biết công $\mathrm{A}\,(\mathrm{J})$ sinh bởi lực $\overrightarrow{F}$ (N) làm vật dịch chuyển một đoạn thẳng từ C đến D có độ dài tính bằng mét, được tính theo công thức $\mathrm{A}=\overrightarrow{F}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}$)

Lời giải

a)	b)	c)	d)
S	Đ	Đ	S

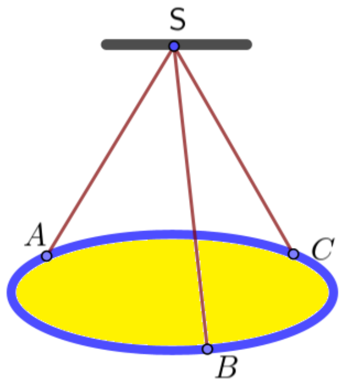
a) Hướng chuyển động của vật là hướng từ H đến M do vật trượt trên mặt phẳng nghiêng. Vậy mệnh đề đã cho **sai.**

b) Trong tam giác vuông HKM ta có: $\dfrac{\mathrm{HK}}{\mathrm{HM}}=\sin 30^\circ \Rightarrow \mathrm{HM}=2\mathrm{HK}=3\ (\mathrm{m})$. Vậy mệnh đề đã cho **đúng.**

c) Ta có $\left|\overrightarrow{P}\right|=m.\left|\overrightarrow{g}\right|=10.10=100\ (\mathrm{N})$. Vậy mệnh đề đã cho **đúng.**

d) Công của trọng lực làm vật dịch chuyển từ vị trí H đến vị trí M là $\mathrm{A}=\overrightarrow{P}.\overrightarrow{\mathrm{HM}}=\left|\overrightarrow{P}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{HM}}\right|\cos\left(\overrightarrow{P},\overrightarrow{\mathrm{HM}}\right)=100.3.\cos 60^\circ=150\ (\mathrm{J})$. Vậy mệnh đề đã cho **sai.**

Câu 29. **(VD)** Một chiếc đĩa kim loại khối lượng $4,5\ (\mathrm{kg})$ được treo bởi ba sợi dây không dãn SA, SB, SC sao cho $S.ABC$ là hình chóp đều có $\widehat{ASB}=60^\circ$ (hình vẽ). Khối lượng dây không đáng kể ; lực căng của mỗi sợi dây SA, SB, SC đặt tại điểm S tương ứng là $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn bằng nhau. Lấy độ lớn của gia tốc trọng trường $\left|\overrightarrow{g}\right|=9,8\,(\mathrm{m/s^2})$.



a) Trọng lực $\overrightarrow{P}$ của hệ vật có độ lớn bằng $34,3$ (N).

b) $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$.

c) $\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}\neq\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_3}$.

d) Độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ bằng $14,7\ (\mathrm{N})$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
S	Đ	S	S

a) Ta có $\overrightarrow{P}=m.\overrightarrow{g}\Rightarrow\left|\overrightarrow{P}\right|=4,5.9,8=44,1\ (\mathrm{N})$. Vậy mệnh đề đã cho **sai.**

b) Trọng lực $\overrightarrow{P}$ của hệ vật đặt tại điểm S được phân tích thành ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ nên $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$. Vậy mệnh đề đã cho **đúng.**

c) Ta có hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều và có $\widehat{ASB}=60^{\circ}$ nên $\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=60^{\circ}$. Lại có véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ cùng hướng với véc tơ $\overrightarrow{SA}$, véc tơ $\overrightarrow{F_2}$ cùng hướng với véc tơ $\overrightarrow{SB}$, véc tơ $\overrightarrow{F_3}$ cùng hướng với véc tơ $\overrightarrow{SC}$ nên $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}\right)=\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}\right)=60^{\circ}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}=\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_2}\right|$; $\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_3}=\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_3}\right|$.

Mà $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$ nên $\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_3}$. Vậy mệnh đề đã cho **sai.**

d) Ta có $\vec{P}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\Rightarrow\left(\vec{P}\right)^2=\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)^2$

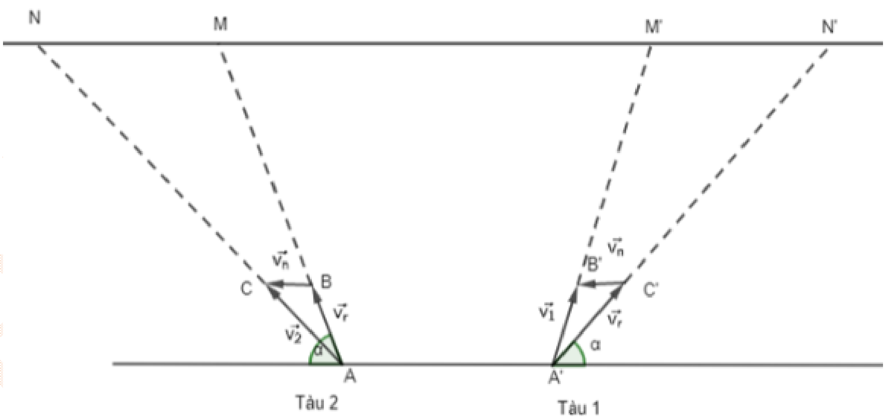
$=\left(\overrightarrow{F_1}\right)^2+\left(\overrightarrow{F_2}\right)^2+\left(\overrightarrow{F_3}\right)^2+2\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}+2\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_3}+2\overrightarrow{F_2}.\overrightarrow{F_3}=\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_3}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_2}\right|+\left|\overrightarrow{F_1}\right|\left|\overrightarrow{F_3}\right|+\left|\overrightarrow{F_2}\right|\left|\overrightarrow{F_3}\right|$

$=6\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{P}\right|^2=6\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6}\left|\vec{P}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6}.44,1\approx 18$ (N). Vậy mệnh đề đã cho **sai.**

Câu 30. **(VD)** Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn giữ được lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?(*Học sinh ghi số 1 hoặc số 2 vào ô đáp án*)

Lời giải

Đáp số: 2



Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2.

Giả sử tàu 1 xuất phát từ $A'\in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ một góc α. Gọi $\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_n}$ lần lượt là vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi B', C' là các điểm sao cho $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{v_n}=\overrightarrow{C'B'}$. Khi đó tàu chuyển động với vectơ vận tốc thực tế là

$\vec{v_1}=\overrightarrow{v_r}+\overrightarrow{v_n}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{A'B'}$.

Xét $\Delta A'B'C'$, có $\widehat{A'C'B'}=\alpha$ (hai góc so le trong)

$\left|\vec{v}_1\right|^2=\left|\overrightarrow{v_r}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_n}\right|^2-2\left|\overrightarrow{v_r}\right|.\left|\overrightarrow{v_n}\right|.cos\alpha$

Giả sử tàu 2 xuất phát từ $A\in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ một góc α. Gọi $\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_n}$ lần lượt là vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi B, C là các điểm sao cho $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB},\overrightarrow{v_n}=\overrightarrow{BC}$.

Khi đó tàu chuyển động với véctơ vận tốc thực tế là

$\vec{v}_2=\overrightarrow{v_r}+\overrightarrow{v_n}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Xét ΔABC, có: $\widehat{ABC}=180^0-\alpha$

$$\left|\vec{v}_2\right|^2=\left|\overrightarrow{v_r}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_n}\right|^2-2\left|\overrightarrow{v_r}\right|.\left|\overrightarrow{v_n}\right|.cos(180^0-\alpha)=\left|\overrightarrow{v_r}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_n}\right|^2+2\left|\overrightarrow{v_r}\right|.\left|\overrightarrow{v_n}\right|.cos\alpha.$$

Vì $0<\alpha<90^0$ nên $\cos\alpha>0$. Do đó

$\left|\vec{v}_2\right|^2=\left|\overrightarrow{v_r}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_n}\right|^2+2\left|\overrightarrow{v_r}\right|.\left|\overrightarrow{v_n}\right|.cos\alpha>\left|\vec{v}_1\right|^2=\left|\overrightarrow{v_e}\right|^2+\left|\overrightarrow{v_n}\right|^2-2\left|\overrightarrow{v_r}\right|.\left|\overrightarrow{v_n}\right|.cos\alpha$

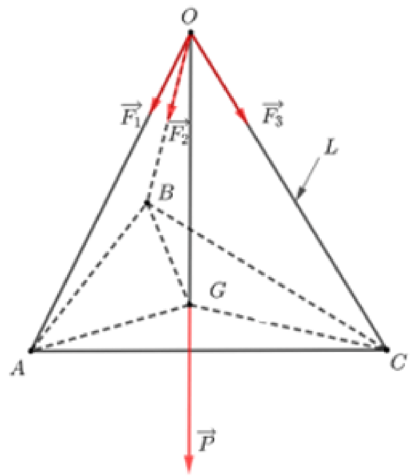
Vì độ dài hai quãng đường AN và $A'M'$ của tàu 2 và tàu 1 chênh nhau không đáng kể và vận tốc tàu 2 lớn hơn tàu 1 nên tàu 2 là tàu đi qua bờ bên kia trước.

Câu 31. **(VD)** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA,OB,OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là $27N$ và bán kính của chiếc đèn là $0,5m$.

Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là $12N$. (Chiều dài tính theo đơn vị cm và làm tròn đến 1 số sau phần thập phân)

Lời giải

Đáp số: 75,6



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.
Vì tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Do đó, $GA = GB = GC = 0,5m$.

Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L.

Theo bài ra ta có $OA = OB = OC = L$ nên $OG \perp (ABC)$ và $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = L$

Do đó, $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}|$

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho: $\overrightarrow{F_1} = c\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = c\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{F_3} = c\overrightarrow{OC}$. Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = c\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Theo quy tắc ba điểm ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
Do đó: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = 3c\overrightarrow{OG}$.
Mặt khác ta lại có $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}$, với $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

Mà trọng lượng tác dụng lên chiếc đèn là 20N nên $|\overrightarrow{P}| = 27 \Leftrightarrow 3c|\overrightarrow{OG}| = 27N \Leftrightarrow c = \dfrac{9}{OG}$.

Tam giác OAG vuông tại G (do $OG \perp (ABC)$) nên ta suy ra $OG = \sqrt{OA^2 - GA^2} = \sqrt{L^2 - 0,5^2}\ (m)$ với $L > 0,5$.

Do đó $|\overrightarrow{OG}| = \sqrt{L^2 - 0,5^2} \Rightarrow c = \dfrac{9}{\sqrt{L^2 - 0,5^2}}$.

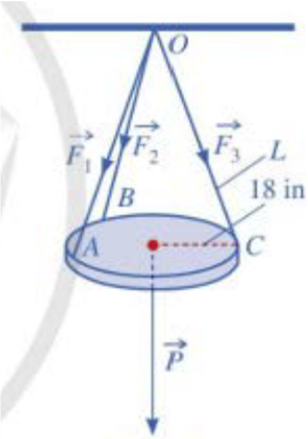
Khi đó $|\overrightarrow{F}| = |\overrightarrow{F_1}| = c|\overrightarrow{OA}| = \dfrac{9L}{\sqrt{L^2 - 0,5^2}}$ (với $L > 0,5$)

Ta có lực căng tối đa của mỗi sợi dây là 12 N $\Rightarrow F(L) \leq 12 \Leftrightarrow \dfrac{9L}{\sqrt{L^2 - 0,5^2}} \leq 12 \Leftrightarrow 3L \leq 4\sqrt{L^2 - 0,5^2}$

$\Leftrightarrow 9L^2 \leq 16L^2 - 4 \Leftrightarrow 7L^2 \geq 4 \Rightarrow L \geq \dfrac{2}{\sqrt{7}} \approx 0,756$ (m).

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $L = 0,756m = 75,6cm$.

Câu 32. **(VD)** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào 3 điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình 38). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là $24N$ và bán kính của chiếc đèn là $18\,\text{in}$ ($1\,\text{inch} = 2{,}54\,\text{cm}$). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm với biến số L.



Hình 38

a) Xác định công thức tính hàm số $F = F(L)$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$

c) Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là $10N$

Lời giải

a) Gọi I là tâm của đèn tròn, suy ra I là trọng tâm của tam giác ABC

Do độ dài các đoạn dây OA, OB, OC bằng L và tam giác ABC đều nên ta có $OI \perp (ABC)$ và

$OI = \sqrt{L^2 - 18^2} = \sqrt{L^2 - 324}, L > 18$

Do $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = F$ nên tồn tại hằng số $m\,(m > 0)$ sao cho $\overrightarrow{F_1} = m\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{F_2} = m\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{F_3} = m\overrightarrow{OC}$

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = m\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 3m\overrightarrow{OI}$

Mặt khác, do đèn cân bằng nên ta lại có $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}$, với $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng vào đèn.

Do đèn có trọng lượng là $24N$ nên $\left|\overrightarrow{P}\right| = 24N \Rightarrow \left|3m\overrightarrow{OI}\right| = 24 \Rightarrow mOI = 8 \Rightarrow m = \dfrac{8}{\sqrt{L^2 - 324}}$

$\Rightarrow F = \left|\overrightarrow{F_1}\right| = mOA = mL = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 324}}$. Vậy $F = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 324}}, L > 18$

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$

Tập xác định: $D = (18; +\infty)$

$$F' = \frac{8\sqrt{L^2 - 324} - \dfrac{8L^2}{\sqrt{L^2 - 324}}}{L^2 - 324} = \frac{-2592}{\left(\sqrt{L^2 - 324}\right)^3} \Rightarrow F' < 0, \forall L \in (18; +\infty)$$

Giới hạn, tiệm cận:

$\lim\limits_{L \to 18^+} f(L) = \lim\limits_{L \to 18^+} \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 324}} = +\infty \Rightarrow L = 18$ là đường TCĐ

$\lim\limits_{L \to +\infty} f(L) = \lim\limits_{L \to +\infty} \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 324}} = 8 \Rightarrow F = 8$ là đường TCN

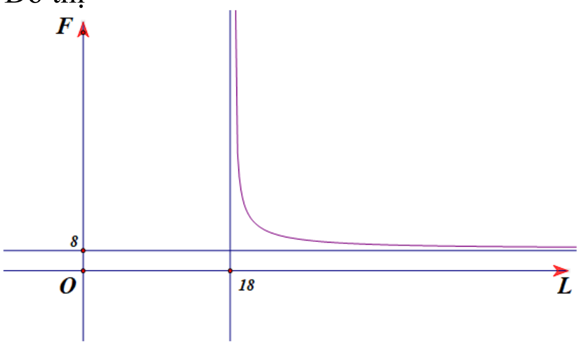
Bảng biến thiên

L	$18 \quad +\infty$

F'	$-$
$F(L)$	$\Vert$ $+\infty$ ↘ 8

Hàm số nghịch biến trên $(18;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Đồ thị



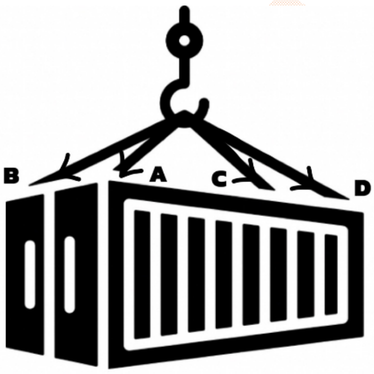
c) Mỗi sợi dây chịu được lực căng tối đa là $10N \Rightarrow F \le 10 \Leftrightarrow \dfrac{8L}{\sqrt{L^2-324}} \le 10 \Leftrightarrow 4L \le 5\sqrt{L^2-324}$

$\Leftrightarrow 9L^2 \ge 8100 \Leftrightarrow L \ge 30$

Vậy để mỗi sợi dây chịu được lực căng tối đa là $10N$ thì mỗi sợi dây dài tối thiểu là 30 in (bằng $76,2$cm)

Câu 33. **(VD)** Một thùng chứa hàng hình hộp chữ nhật được cẩu song song với mặt phẳng nằm ngang bởi bốn

sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên móc cần cẩu lần lượt buộc vào 4 điểm A,B,C,D trên thùng hàng. Biết rằng tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có $AD=3,2m$, $AB=2,4m$ (Hình minh họa). Độ dài của bốn đoạn dây OA,OB,OC,OD đều bằng L. Khối lượng của thùng hàng là $1,6$ tấn. Khi thùng hàng đứng yên, gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F=F(L)$ là một hàm với biến số L. Lấy gia tốc trọng trường là $10\,m/s^2$.

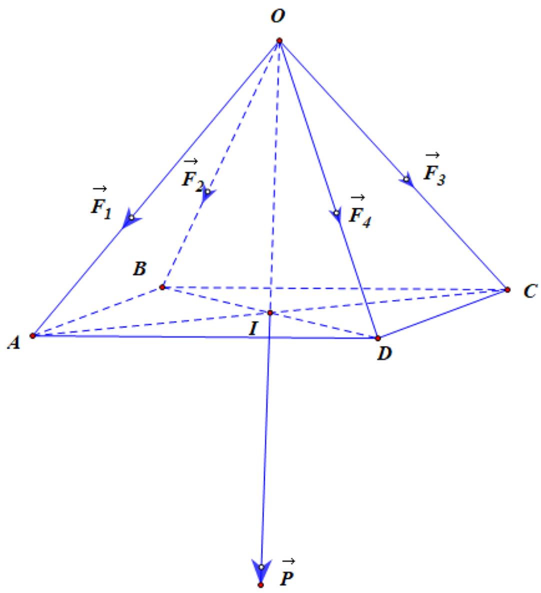


a) Xác định công thức tính hàm số $F=F(L)$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F=F(L)$

c) Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là $8000N$

Lời giải



a) Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, suy ra I là giao điểm của AC và BD

Do độ dài các đoạn dây OA, OB, OC, OD bằng L và tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $OI \perp (ABCD)$, $IA = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = 2$, $OI = \sqrt{L^2 - (2)^2} = \sqrt{L^2 - 4}, L > 2$

Do $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_4}\right| = F$ nên tồn tại hằng số $m\,(m > 0)$ sao cho: $\overrightarrow{F_1} = m\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{F_2} = m\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{F_3} = m\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{F_4} = m\overrightarrow{OD}$

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = m\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = 4m\overrightarrow{OI}$

Mặt khác, do thùng hàng đứng yên nên ta lại có $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{P}$, với $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng vào thùng hàng. Do thùng hàng có khối lượng là $1600kg$ nên có trọng lượng là $16000N$ Suy ra $\left|\overrightarrow{P}\right| = 16000 \Rightarrow \left|4m\overrightarrow{OI}\right| = 16000 \Rightarrow mOI = 4000 \Rightarrow m = \frac{4000}{\sqrt{L^2 - 4}}$

$\Rightarrow F = \left|\overrightarrow{F_1}\right| = mOA = mL = \frac{4000L}{\sqrt{L^2 - 4}}$. Vậy $F = \frac{4000L}{\sqrt{L^2 - 4}}, L > 2$

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$

Tập xác định: $D = (2; +\infty)$

$$F' = \frac{4000\sqrt{L^2 - 4} - \frac{4000L^2}{\sqrt{L^2 - 4}}}{L^2 - 4} = \frac{-16000}{\left(\sqrt{L^2 - 4}\right)^3} \Rightarrow F' < 0, \forall L \in (2; +\infty)$$

Giới hạn, tiệm cận:

$\lim\limits_{L \to 2^+} f(L) = \lim\limits_{L \to 2^+} \frac{4000L}{\sqrt{L^2 - 4}} = +\infty \Rightarrow L = 2$ là đường TCĐ

$\lim\limits_{L \to +\infty} f(L) = \lim\limits_{L \to +\infty} \frac{4000L}{\sqrt{L^2 - 4}} = 4000 \Rightarrow F = 4000$ là đường TCN

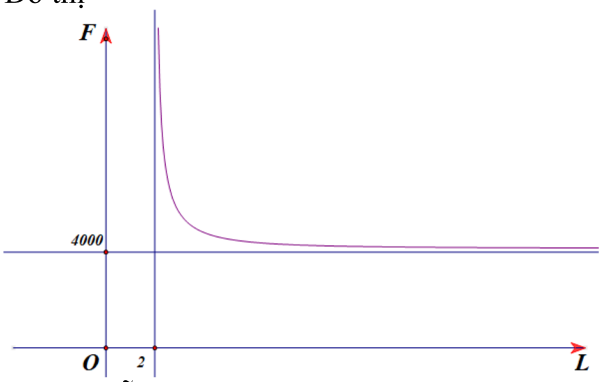
Bảng biến thiên

L	2 $+\infty$
F'	$-$
$F(L)$	‖ $+\infty$

	4000

Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Đồ thị



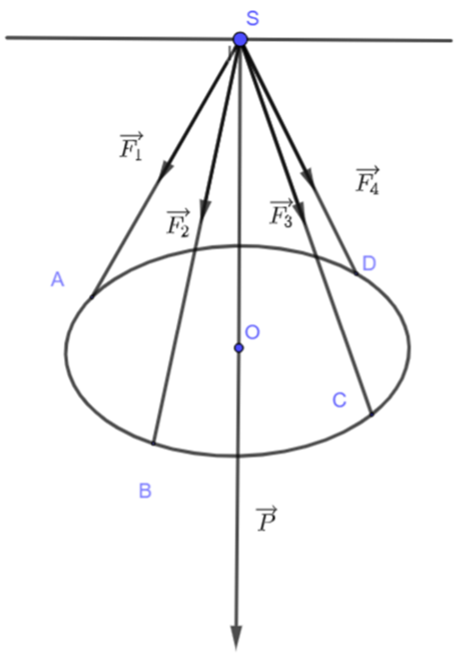
c) Mỗi sợi dây chịu được lực căng tối đa là $8000N$

$\Rightarrow F \le 8000 \Leftrightarrow \dfrac{4000L}{\sqrt{L^2-4}} \le 8000 \Leftrightarrow L \le 2\sqrt{L^2-4}$

$\Leftrightarrow 3L^2 \ge 16 \Leftrightarrow L \ge 2,3m$

Vậy để mỗi sợi dây chịu được lực căng tối đa là $8000N$ thì mỗi sợi dây dài tối thiểu là $2,3m$

Câu 34. **(VD)** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi bốn dây không dãn xuất
phát từ điểm S trên trần nhà lần lượt buộc vào bốn điểm $A;B;C;D$ trên nền tròn sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Độ dài của bốn đoạn dây SA,SB,SC,SD đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là $32N$ và bán kính của chiếc đèn là $60cm$. Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F=F(L)$ là một hàm số với biến số là L.

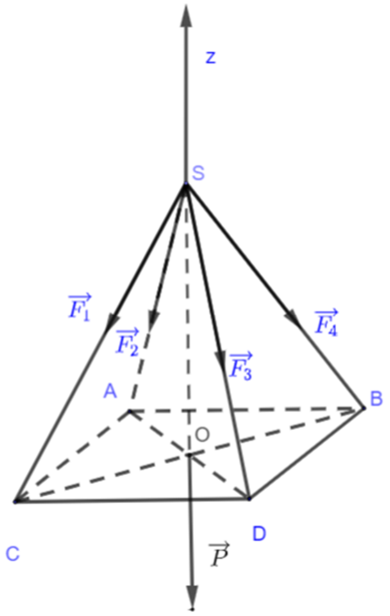


a) Xác định công thức hàm số tính hàm số $F=F(L)$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F=F(L)$.

c) Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế chịu được lực căng tối đa là $12N$.

Lời giải



Gọi tâm chiếc đèn là O.

a) Xét theo phương Oz, vì đèn cân bằng theo phương thẳng đứng nên ta có:

$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}=\vec{P}$

Chiếu lên Oz:

$F_1\sin\widehat{SAO}+F_2\sin\widehat{SBO}+F_3\sin\widehat{SCO}+F_4\sin\widehat{SDO}=32$ (1)

Xét tam giác vuông SOA vuông tại O: $\cos\widehat{SAO}=\frac{r}{L}=\frac{60}{L}$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông và $SA=SB=SC=SD=L$ suy ra $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

$\Rightarrow \widehat{SAO}=\widehat{SBO}=\widehat{SCO}=\widehat{SDO}$.

Từ (1) ta có: $4F.\sin\widehat{SAO}=32\Rightarrow F=\frac{8}{\sin\widehat{SAO}}=\frac{8}{\sqrt{1-\cos^2\widehat{SAO}}}=\frac{8}{\sqrt{1-(\frac{60}{L})^2}}=\frac{8L}{\sqrt{L^2-3600}}$.

Vậy $F=F(L)=\frac{8L}{\sqrt{L^2-3600}}$.

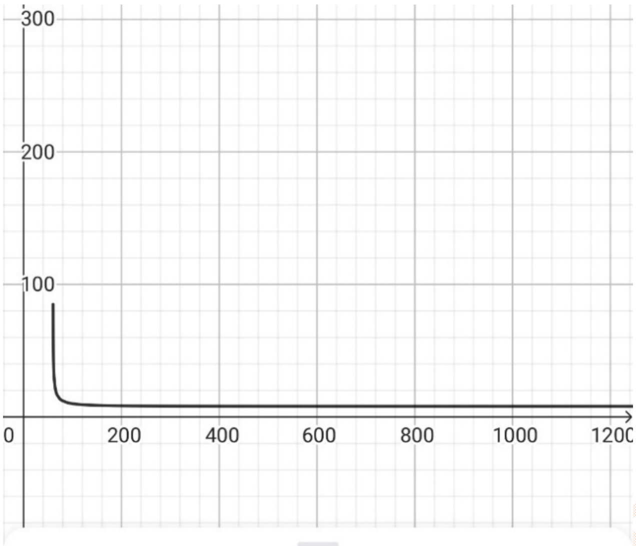
b) Xét $F=F(L)=\frac{8L}{\sqrt{L^2-3600}}$

Tập xác định: $D=(60;+\infty)$

$$F'=F'(L)=\left(\frac{8L}{\sqrt{L^2-3600}}\right)'=\frac{8\sqrt{L^2-3600}-8L\frac{L}{\sqrt{L^2-3600}}}{L^2-3600}=\frac{-28800}{\sqrt[3]{L^2-3600}}.$$

Ta có $F'(L) < 0; \forall L \in D$ nên hàm số $F(L)$ luôn nghịch biến trên D

L	60	$+\infty$
$F'(L)$	$-$	
$F(L)$	$+\infty$	8



a) $F = F(L) = \dfrac{8L}{\sqrt{L^2 - 3600}} \le 12 \Leftrightarrow L \ge 80,5cm$.

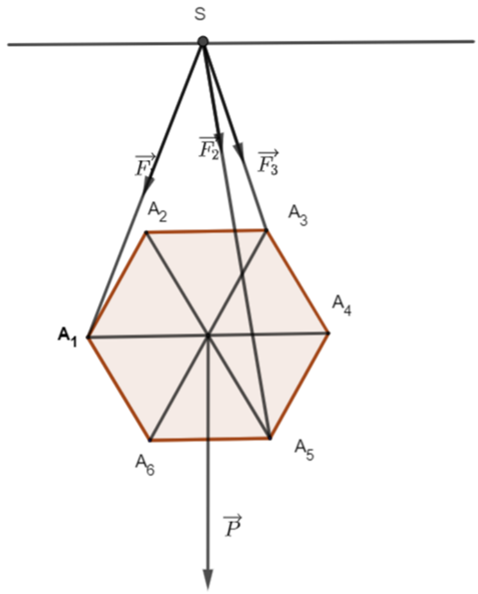
Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $80,5cm$.

Câu 35. **(VD)** Một chậu hoa hình lục giác đều được treo song song với mặt đất bởi ba dây không dãn xuất phát
từ điểm S trên trần nhà lần lượt buộc vào ba đỉnh A_1, A_3, A_5 như hình vẽ. Độ dài của ba đoạn dây SA_1, SA_3, SA_5 đều bằng L. Trọng lượng của chiếc đèn là $42N$ và độ dài đoạn $A_1A_4 = 60cm$. Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L.

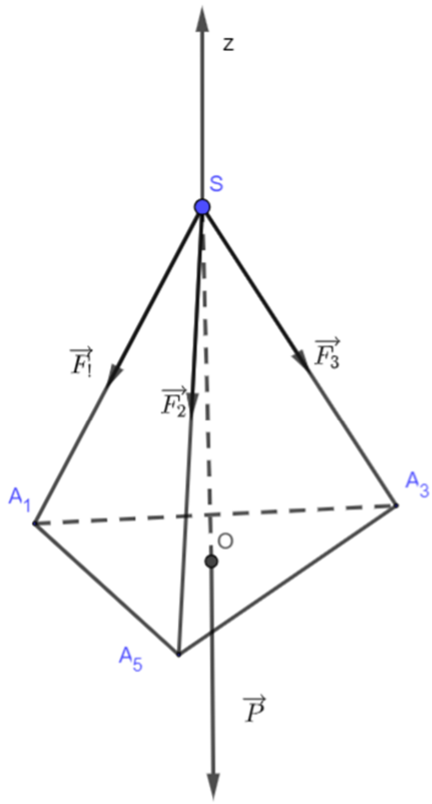
a) Xác định công thức hàm số tính hàm số $F = F(L)$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$.

c) Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế chịu được lực căng tối đa là $30N$.



Lời giải



a) Gọi tâm chậu hoa O.

Xét theo phương Oz, vì đèn cân bằng theo phương thẳng đứng nên ta có:

$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{P}$

Chiếu lên Oz:

$F_1 \sin \widehat{SA_1O}+F_2 \sin \widehat{SA_2O}+F_3 \sin \widehat{SA_3O}=42 \ (1)$

Xét tam giác vuông SOA_1 vuông tại O: $\cos \widehat{SA_1O}=\dfrac{\frac{1}{2}A_1A_6}{L}=\dfrac{30}{L}$.

Ta có $A_1A_3A_5$ là tam giác đều và $SA_1 = SA_3 = SA_5 = L$ suy ra $S.A_1A_3A_5$ là hình chóp tam giác đều.

$\Rightarrow \widehat{SA_1O} = \widehat{SA_3O} = \widehat{SA_5O}$.

Từ (1) ta có: $3F.\sin\widehat{SA_1O} = 42 \Rightarrow F = \dfrac{14}{\sin\widehat{SA_1O}} = \dfrac{14}{\sqrt{1-\cos^2\widehat{SA_1O}}} = \dfrac{14}{\sqrt{1-(\frac{30}{L})^2}} = \dfrac{14L}{\sqrt{L^2-900}}$.

Vậy $F = F(L) = \dfrac{14L}{\sqrt{L^2-900}}$.

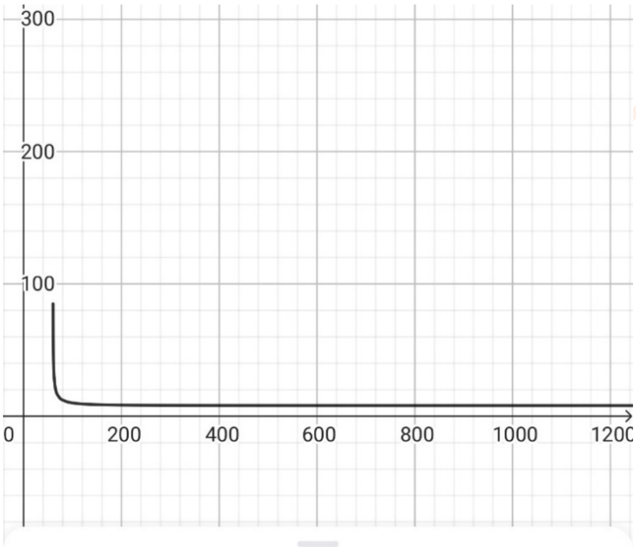
b) Xét $F = F(L) = \dfrac{14L}{\sqrt{L^2-900}}$

Tập xác định: $D = (30;+\infty)$

$$F' = F'(L) = \left(\frac{14L}{\sqrt{L^2-900}}\right)' = \frac{14\sqrt{L^2-900} - 14L\dfrac{L}{\sqrt{L^2-900}}}{L^2-900} = \frac{-12600}{\sqrt[3]{L^2-900}}.$$

Ta có $F'(L) < 0; \forall L \in D$ nên hàm số $F(L)$ luôn nghịch biến trên D

L	30		$+\infty$
$F'(L)$		$-$	
$F(L)$	$+\infty$	$\searrow$	14



c)

$F = F(L) = \dfrac{14L}{\sqrt{L^2-900}} \le 30 \Leftrightarrow L \ge 33,9cm$.

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $33,9cm$.

HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

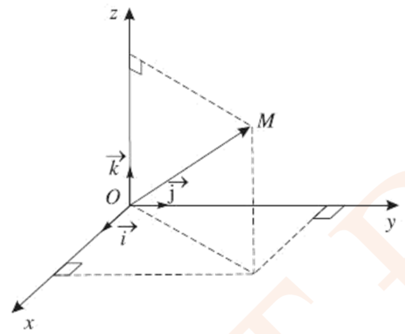
1. Hệ tọa độ trong không gian

- Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là *hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz* trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ tọa độ *Oxyz*.

- ***Chú ý:*** Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các *vectơ đơn vị* trên các trục Ox, Oy, Oz. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, ta gọi:

- Điểm O là gốc tọa độ;
- Ox là trục hoành, Oy là trục tung, Oz là trục cao;
- Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ là các mặt phẳng tọa độ.

- Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là *không gian* $Oxyz$.



2. Tọa độ của một điểm

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M.

- Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng (Oxy). Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), tìm hoành độ a, tung độ b của điểm M_1.
- Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.

Bộ số $(a;b;c)$ là *tọa độ* của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a;b;c)$.

Chú ý

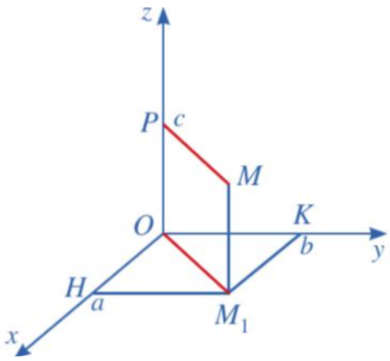
- Tọa độ của một điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ luôn tồn tại và duy nhất.
- Người ta còn có thể xác định tọa độ điểm M theo cách sau:

+ Xác định hình chiếu H của điểm M trên trục hoành Ox, điểm H ứng với số a trên trục Ox. Số a là hoành độ của điểm M.

+ Xác định hình chiếu K của điểm M trên trục tung Oy, điểm K ứng với số b trên trục Oy. Số b là tung độ của điểm M.

+ Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.

Khi đó, bộ số $(a;b;c)$ là *tọa độ* của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.



3. Tọa độ của một vectơ

- Tọa độ của điểm M được gọi là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM}=(a;b;c)\Leftrightarrow M(a;b;c)$$

- Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ của một vectơ $\vec{u}$ là tọa độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có tọa độ $(a;b;c)$ thì ta viết $\vec{u}=(a;b;c)$, trong đó a gọi là hoành độ, b gọi là tung độ và c được gọi là cao độ của $\vec{u}$.

- Với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox,Oy,Oz. Ta có:

$$\vec{u}=(a;b;c)\Leftrightarrow \vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$$

Chú ý: Với $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)$, ta có: $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\\ z_1=z_2\end{cases}$.

- Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

4. Biểu thức tọa độ của phép toán vectơ

Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1);\vec{v}=(x_2;y_2;z_2);m\in\mathbb{R}$ thì

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_1;y_1+y_2;z_1+z_2)$

$\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_1;y_1-y_2;z_1-z_2)$

$m\vec{u}=(mx_1;my_1;mz_1)$

5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ được xác định theo công thức

$$\vec{a}.\vec{b}=x.x'+y.y'+z.z'$$

Nhận xét :

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu $x.x'+y.y'+z.z'=0$

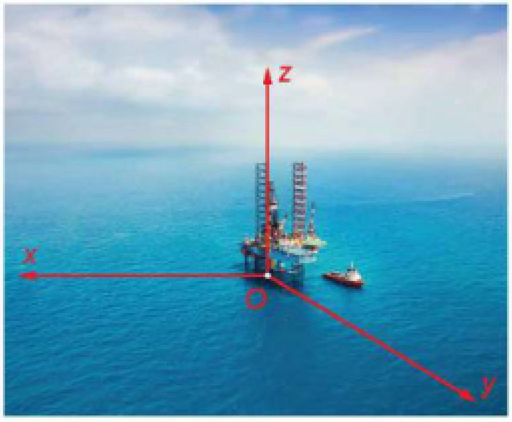
- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{x.x'+y.y'+z.z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 1. **(TH)** Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.52). Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan và một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(30;25;-15)$. Khoảng cách theo đơn vị kilômét từ chiếc ra đa và một chiếc tàu thám hiểm. (Kết quả làm tròn lấy một chữ số thập phân)



Hình 2.52

A. $41,8km$. **B.** $31,8km$. **C.** $41,9km$. **D.** $31,9km$.

Lời giải

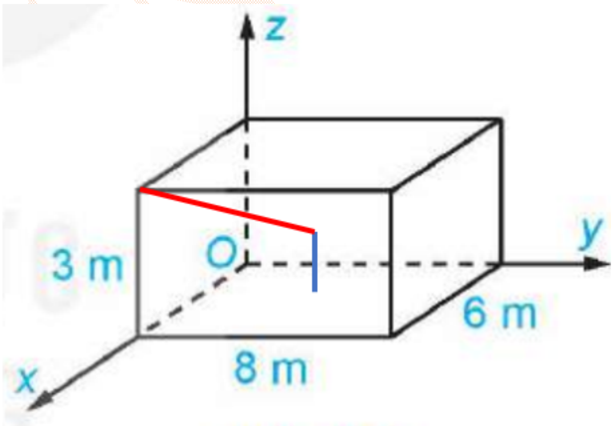
Theo đề bài ta có tọa độ của ra đa là $(0;0;0)$, tọa độ của tàu thám hiểm là $(30;25;-15)$.

Khi đó khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là:

$d=\sqrt{(30-0)^2+(25-0)^2+(-15-0)^2}=5\sqrt{70}\approx 41,8$.

Vậy khoảng khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là $41,8$km.

Câu 2. **(TH)** Trong một phòng học được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật, với chiều dài $8m$, chiều rộng $6m$ và chiều cao $3m$. Hai bạn An và Bình làm nhiệm vụ trực nhật, mạng nhện cần quét ở góc ngoài cùng trên trần nhà, An bảo không nên đứng ngay vị trí đó ở nền nhà quét vì sẽ bụi rơi xuống người mình, An lại đố bạn Bình 'nếu mình đứng ở giữa nhà quét thì mình phải kéo chổi quét nhà dài ra mấy mét (làm tròn đến hàng phần trăm) để quét được vị trí mạng nhên, biết An cầm chổi cao $1,5m$'. Bình trả lời đứng vị trí đó chổi dài $5m$ cũng không tới. Hỏi Bình đã tính được bao nhiêu?



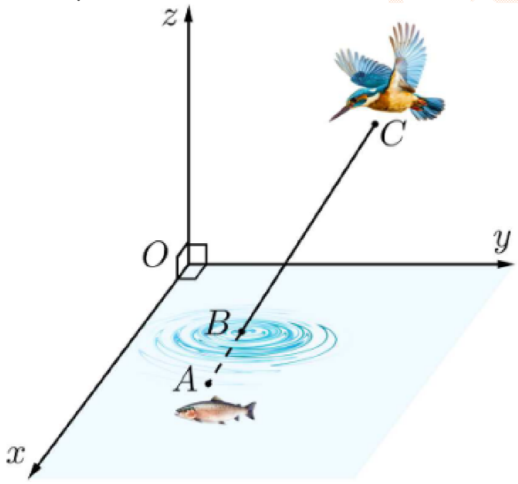
Lời giải

Đáp án: $5.22(m)$

Xét hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, ta có vị trí mạng nhện ở $A(6;0;3)$ vị trí cầm chổi $B(3;4;\frac{3}{2})$, Vậy chổi phải có độ dài $AB=\sqrt{(3-6)^2+(4-0)^2+(\frac{3}{2}-3)^2}=\frac{\sqrt{109}}{2}\approx 5.22(m)$

Câu 3. **(TH)** Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước $2m$, cách mặt phẳng $(Oxz),(Oyz)$ lần lượt là $3m$ và $1m$ phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá cách mặt nước $50cm$, cách mặt phẳng $(Oxz),(Oyz)$ lần lượt là $1m$ và $1,5m$

Tìm tọa độ điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước.



Lời giải

Đáp án : $B\left(\frac{7}{5};\frac{7}{5};0\right)$.

Ta có: $A(1,5;1;-0,5)$ và $C(1;3;2)$

$\overrightarrow{AC}(-0,5;2;2,5)$

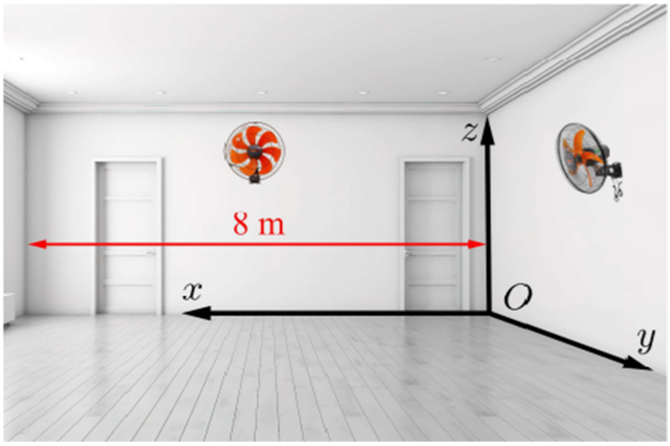
Khi đó phương trình đường thẳng AC là $\begin{cases}x=-0,5t+1\\y=2t+3\\z=2,5t+2\end{cases}$ suy ra $2,5t+2=0\Rightarrow t=-\frac{4}{5}$.

Khi đó $\begin{cases}x=\frac{7}{5}\\y=\frac{7}{5}\\z=0\end{cases}$ hay $B\left(\frac{7}{5};\frac{7}{5};0\right)$

Câu 4. **(TH)** Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $8m$, rộng $6m$ và cao $4m$ có hai chiếc quạt treo tường. Chiếc quạt A treo chính giữa bức tường $8m$ và cách trần $1m$, chiếc quạt B treo chính giữa bức tường $6m$ và cách trần $1,5m$. Hỏi khoảng cách giữa hai chiếc quạt AB cách nhau bao nhiêu m (làm tròn đến hàng phần nghìn)

Lời giải

Đáp án: $AB=5,025$.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có điểm $A(4;0;3)$ và điểm $B\left(0;3;\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-4;3;-\frac{1}{2}\right)$. Do đó độ dài đoạn thẳng $AB = 5,025$.

Câu 5. **(TH)** Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một drone giao hàng đang ở toạ độ $A(1;0;1)$ di chuyển đến địa điểm nhận hàng là $B(4;4;6)$. Mỗi đơn vị trên phần mềm bằng $1km$ ngoài thực tế. Biết tốc độ của drone là $80km/h$; giả sử rằng từ vị trí giao hàng và nhận hàng không gặp chướng ngại vật, sức cản gió không đáng kể để drone bay theo đường thẳng. Thời gian drone bay từ vị trí ban đầu đến địa điểm giao hàng mất bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng thập phân)?

Lời giải

Đáp án: $5,3$.

Tính được $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2 + (6-1)^2} = 5\sqrt{2}$ (đơn vị trên phần mềm) khoảng cách ngoài thực tế sẽ là $5\sqrt{2}\,km$.

Thời gian bay của drone là $\frac{5\sqrt{2}}{80}$ giờ, đổi sang bằng $\frac{5\sqrt{2}}{80}.60 = \frac{15\sqrt{2}}{4} \approx 5,3$ phút.

Câu 6. **(TH)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, (đơn vị đo: km), ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu Su-35 của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(300;150;7)$ đến điểm $N(800;550;13)$ trong 20 phút. Tính tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo nếu máy bay giữ nguyên vận tốc và hướng bay.

Lời giải

Đáp án: $\left(925;650;\frac{29}{2}\right)$.

Ta có : $\overrightarrow{MN} = (500;400;6)$.

Giả sử sau 5 phút, vị trí máy bay ở điểm P thì $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MN} = \left(125;100;\frac{3}{2}\right)$.

Do đó, tọa độ điểm P là $\left(925;650;\frac{29}{2}\right)$.

Câu 7. **(TH)** Hình 2.53 minh họa một chiếc đèn được treo cách trần nhà $0,5m$, cách hai tường lần lượt là $1,2m$ và $1,6m$. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới cách trần nhà là $0,4m$, cách hai tường đều là $1,5m$.

a) Lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ phù hợp và xác định tọa độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.

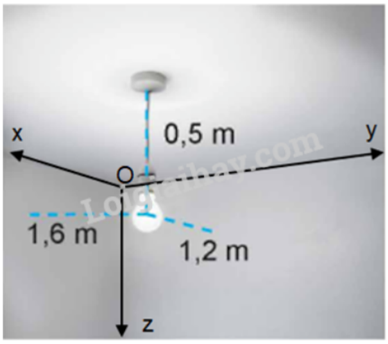
b) Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hình 2.53

Lời giải

a) Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho: Gốc O trùng với một góc của phòng. Mặt phẳng (Oxy) trùng với trần nhà, mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng (Oyz) trùng với hai bức tường (như hình vẽ).

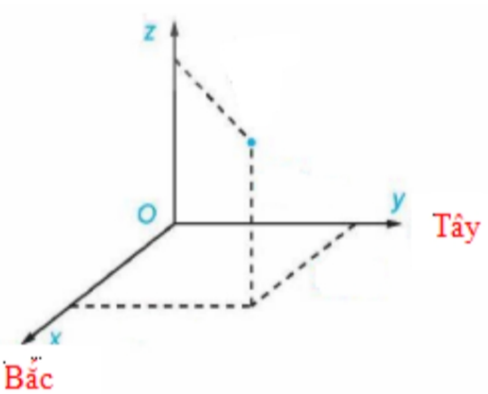
Tọa độ của bóng đèn lúc đầu là $A(1,6;1,2;0,5)$. Tọa độ bóng đèn sau khi di chuyển là $B(1,5;1,5;0,4)$.



b) Ta có: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{0,1^2+0,3^2+0,1^2}\approx 0,3\,(m)$.

Vậy vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là $0,3$ mét.

Câu 8. **(TH)** Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại một điểm. Sau một thời gian chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $30(km)$ và phía Tây $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $1,5(km)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilomet (xem hình vẽ). Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát gần nhất với giá trị nào dưới đây (đơn vị km)?



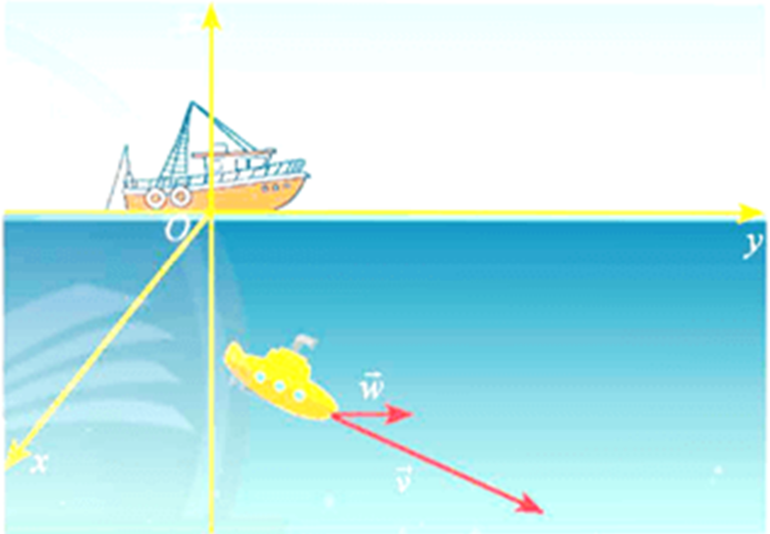
A. 50. **B.** 48. **C.** 49. **D.** 52.

Lời giải

Chọn A

Với cách chọn hệ trục tọa độ như trên ta có khoảng cách so với vị trí xuất phát của máy bay là $\sqrt{40^2+30^2+1,5^2}=50,02$. Chọn đáp án A

Câu 9. **(TH)** Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vectơ vận tốc của thiết bị khi biển đứng yên là $\vec{v}=(11;7;-4)$ (đơn vị: km/h). Cho biết vectơ vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w}=(4;2;0)$ (đơn vị: km/h). Tính tốc độ của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu, các yếu tố khác không đáng kể (*đơn vị km/h, làm tròn đến hàng phần chục*).



Lời giải

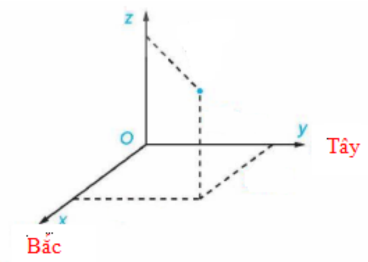
Đáp án: 17,9

Ta có $\vec{v}+\vec{w}=(11+4;7+2;-4+0)=(15;9;-4)$ là vectơ vận tốc của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu. Khi đó tốc độ của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu là $|\vec{v}+\vec{w}|=\sqrt{15^2+9^2+(-4)^2}=\sqrt{322}\approx 17,9$ (km/h).

Câu 10. **(TH)** Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20;10;0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30;-25;1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $\sqrt{(20+30)^2+(10+25)^2+(0,7-1)^2} \approx 61(km)$

Câu 11. **(VD)** Một gia đình định lắp thang máy trong nhà ở, cabin của thang máy có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông như hình vẽ. Biết rằng công ty cung cấp thang máy cho biết thể tích khoang cabin là $5,4\,m^3$ và diện tích toàn phần của nó là $18,9\,m^2$.

Gia đình định lắp 1 chiếc camera ở vị trí trên trần cabin (điểm P), gần 1 góc vuông sao cho nó cách 2 vách đứng của khoang cabin đều là $10\,cm$ (hình vẽ). Chọn hệ trục như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là $10\,cm$. Hãy tìm tọa độ của điểm P, biết rằng cạnh của đáy cabin không tới $2\,m$

A. $(1;14;24)$. **B.** $(14;14;24)$. **C.** $(1;1;24)$. **D.** $(14;1;24)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi cạnh đáy và chiều cao của khoang cabin lần lượt là x,h $(x,h>0;m)$

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} V = x^2.h = 5,4 & (1) \\ S_{tp} = 2x^2+4xh = 18,9 & (2) \end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow xh = \dfrac{5,4}{x}$. Thay vào (2) ta được:

$2x^2+4.\dfrac{5,4}{x} = 18,9 \Leftrightarrow 2x^3-18,9x+21,6=0 \Rightarrow x=1,5$ (m) (vì $x<2$)

Thay vào (1) ta được: $h=2,4\,(m)$

Vậy khoang cabin thang máy có cạnh đáy và chiều cao là: $x=1,5\,m=150\,cm$; $h=2,4\,m=240\,cm$

Trong hệ tọa độ đã chọn, $x=15$ đơn vị và $h=24$ đơn vị.

Từ giả thiết suy ra P có 3 tọa độ đều dương và:

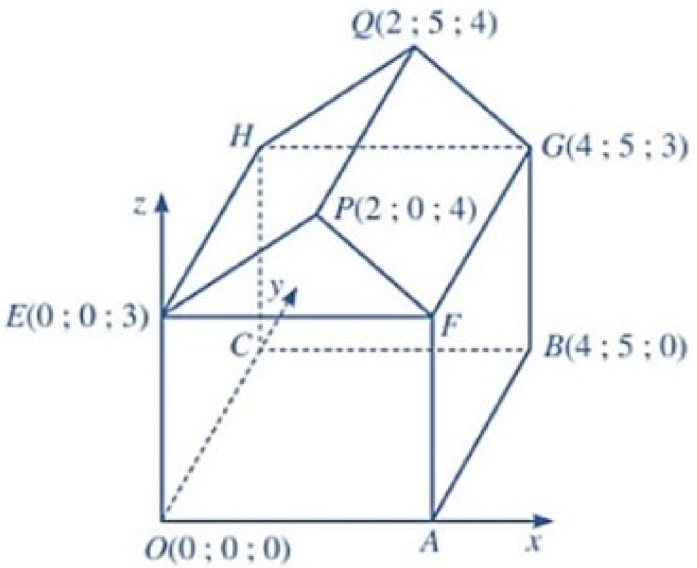
P cách mặt phẳng (Oxy) 1 đoạn bằng 24 nên $z=24$

P cách mặt phẳng (Oyz) 1 đoạn bằng 1 nên $x=1$

P cách mặt phẳng (Oxz) 1 đoạn bằng 14 nên $y=14$

Vậy tọa độ của $P(1;14;24)$.

Câu 12. **(TH-VD)** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

a) Toạ độ điểm $F(4;0;3)$.

b) Toạ độ vectơ $\overrightarrow{AH}=(4;5;3)$.

c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AF}=3$.

d) Góc đốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6°$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

a) Đ; b) S; c) S; d) Đ.

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên $OACB$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A=x_B=4$, $y_C=y_B=5$.

Do điểm A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm $A(4;0;0)$; điểm C nằm trên trục Oy nên tọa độ điểm $C(0;5;0)$.

Tường nhà là hình chữ nhật nên $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H=y_c=5$, $z_H=z_E=3$.

Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm $H(0;5;3)$.

Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F=x_A=4$, $z_F=z_E=3$

Do H nằm trên mặt phẳng (Oxz) nên tọa độ điểm $F(4;0;3)$.

b) Ta có toạ độ vectơ $\overrightarrow{AH}=(-4;5;3)$.

c) Ta có $\overrightarrow{AF}=(0;0;3)$. Suy ra $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AF}=0+0+9=9$.

d) Để tính góc đốc của mái nhà, ta tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$.

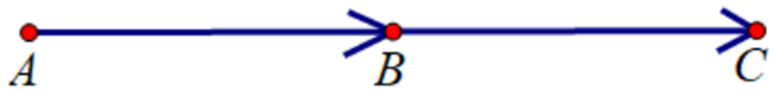
Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên $\widehat{PFE}$ là góc phẳng nhị diện cần tìm.

Ta có $\overrightarrow{FP}=(-2;0;1)$, $\overrightarrow{FE}=(-4;0;0)$ suy ra $\cos\widehat{PFE}=\cos(\overrightarrow{FP},\overrightarrow{FE})=\dfrac{\overrightarrow{FP}.\overrightarrow{FE}}{\left|\overrightarrow{FP}\right|.\left|\overrightarrow{FE}\right|}=\dfrac{(-2)(-4)+0.0+1.0}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}.\sqrt{(-4)^2+0^2+0^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Do đó, $\widehat{PFE}\approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

Câu 13. **(TH)** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(100;50;5)$ đến điểm $B(200;100;10)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi $C(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$\overrightarrow{AB}=(100;50;5)$.

$\overrightarrow{BC}=(x-200;y-100;z-10)$.

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $A\to B$ bằng thời gian bay từ $B\to C$ nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}100=x-200\\50=y-100\\5=z-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=300\\y=150\\z=15\end{cases}\Rightarrow C(300;150;15)$.

Tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(300;150;15)$.

Câu 14. **(TH)** Trong không gian với hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(750;450;7)$ đến điểm $B(950;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?

Lời giải

Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến C nên $AB=BC$.

Do đó $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}=(950-750;550-450;9-7)=(200;100;2)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC}=(x-950;y-550;z-9)$ nên $\begin{cases}x-950=200\\y-550=100\\z-9=2\end{cases}$

Từ đó: $\begin{cases}x=1150\\y=650\\z=11\end{cases}$. Vậy $C(1150;650;11)$

Vậy toạ độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(1150;650;11)$.

Câu 15. **(TH)** Trong không gian với hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(700;450;7)$ đến điểm

$B(900;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau bao nhiêu phút, máy bay bay từ điểm A đến điểm $C(1000;600;10)$?

Lời giải:

Sau 15 phút.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(900-700;550-450;9-7)=(200;100;2)$.

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC}=(1000-900;600-550;10-9)=(100;50;1)$ nên $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Do vận tốc của máy bay không đổi nên thời gian bay từ B đến C bằng một nửa thời gian bay từ A đến **B.**

sau 5 phút máy bay bay từ B đến điểm $C(1000;600;10)$.

Vậy sau 15 phút máy bay từ A đến **C.**

Câu 16. **(TH)** Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(400;\ 50;8)$ đến điểm $B(100;\ 450;10)$ trong 10 phút. Sau đúng 5 phút tính từ lúc máy bay ở vị trí A thì máy bay ở vị trí có tổng hoành độ tung độ và cao độ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $T(x;y;z)$ là vị trí của máy bay tại thời điểm 5 phút sau khi xuất phát từ A

Ta có $\overrightarrow{AT}=(x-400;y-50;z-8)$; $\overrightarrow{AB}=(-300;400;2)$

Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ A đến T nên $AT=\frac{1}{2}AB$

$$\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(x-400;y-50;z-8)=\frac{1}{2}(-300;400;2)\Leftrightarrow\begin{cases}x-400=-150\\y-50=200\\z-8=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=250\\y=250\\z=9\end{cases}$$

Suy ra $x+y+z=509$

Câu 17. **(TH)** Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm A(800; 500; 7) đến điểm B trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(1010;575;10)$. Xác định tọa độ vị trí điểm B

Lời giải

Gọi B(x; *y, z)*

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến C gấp ba thời gian bay từ B đến C nên $AC=3BC$

Do đó $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}=(1010-x;575-y;10-z)$

Mặt khác $\overrightarrow{AC}=(210;75;3)$

Suy ra $\begin{cases}3(1010-x)=210\\3(575-y)=75\\3(10-z)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=940\\y=550\\z=11\end{cases}$

Vậy điểm $B(940;550;11)$

Câu 18. **(TH)** Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Tính $x+y+z$.

Lời giải

Đáp số: 1954.
Vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$.

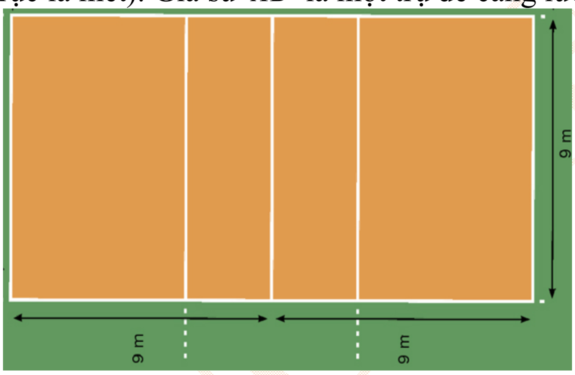
Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.
Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB=2BC$.

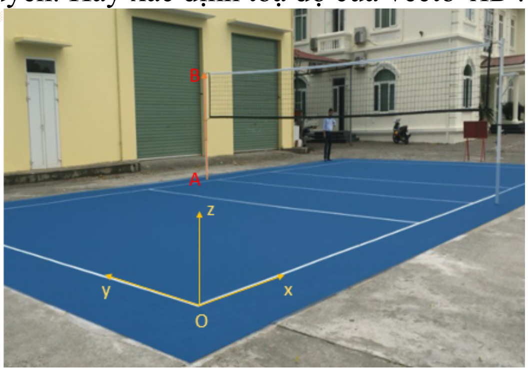
Do đó $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{940-800}{2};\dfrac{550-500}{2};\dfrac{9-7}{2}\right)=(70;25;1)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC}=(x-940;y-550;z-8)$ nên $\begin{cases}x-940=70\\y-550=25\\z-8=1\end{cases}$

Từ đó $\begin{cases}x=1010\\y=575\\z=9\end{cases}\Rightarrow x+y+z=1594$.

Câu 19. **(TH)** Theo quy định của liên đoàn bóng chuyền quốc tế (FIVB), sân bóng chuyền có hình dạng chữ nhật. Kích thước tiêu chuẩn của sân bóng chuyền là $9\,m\times 18\,m$. Chiều cao của lưới bóng chuyền là $2,24m$ đối với nữ. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình vẽ thứ hai (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ để căng lưới bóng chuyền. Hãy xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.





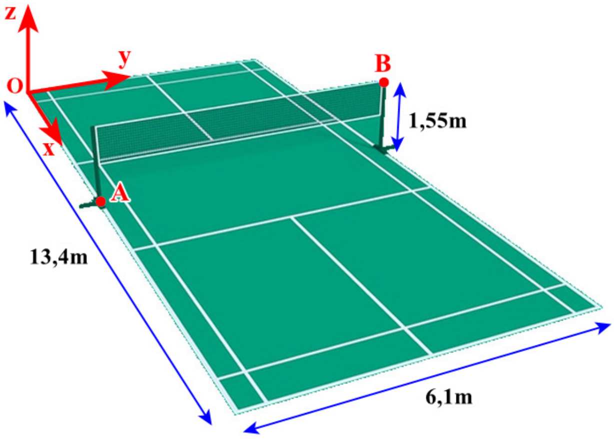
Lời giải

Gọi toạ độ điểm $A(x_A;y_A;z_A)$. Vì một nửa chiều dài của sân là $9m$ nên $x_A=9$. Do chiều rộng của sân là $9m$ nên $y_B=9$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A=0$. Do đó toạ độ điểm A là $A(9;9;0)$.

Độ dài đoạn thẳng $AB=2,24\,m$ nên toạ độ điểm B là $B(9;9;2,24)$.

Vậy ta có $\overrightarrow{AB}=(9-9;9-9;2,24-0)$, tức là $\overrightarrow{AB}=(0;0;2,24)$.

Câu 20. **(TH)** Hình dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thức theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai điểm A,B như hình. Xác định tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

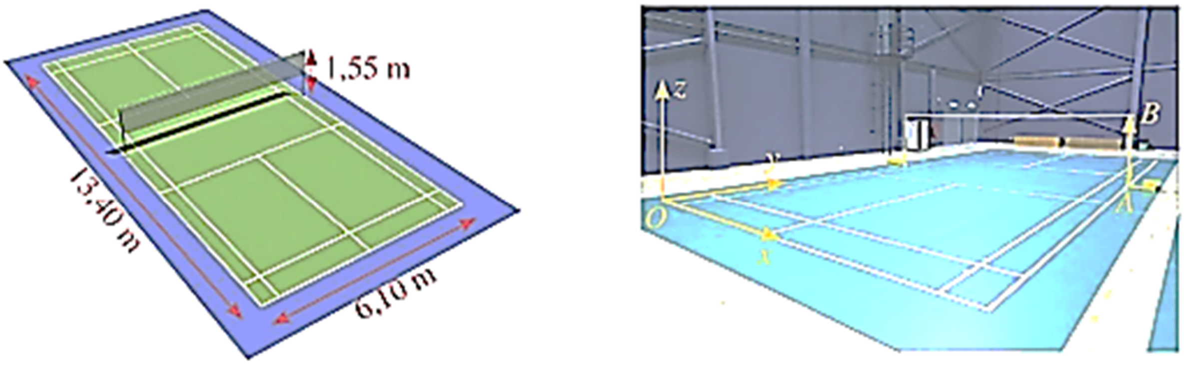


Lời giải

Ta có $A(6,7\,;0\,;0), B(6,7\,;6,1\,;1,55)$. Vậy tọa độ $\overrightarrow{AB}$ là:

$\overrightarrow{AB} = (6,7-6,7\,;6,1-0\,;1,55-0) = (0\,;6,1\,;1,55)$.

Câu 21. **(TH)** Hình vẽ mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như ở Hình 33b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



a) b)

Lời giải

Gọi toạ độ điểm A là $(x_A; y_A; z_A)$. Vì chiều rộng của sân là 6,1 m nên $x_A = 6,1$. Do một nửa chiều dài của sân là 6,7 m nên $y_A = 6,7$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A = 0$. Vì vậy, điểm A có tọa độ là $(6,1;6,7;0)$.

Độ dài đoạn thẳng AB là 1,55 m nên điểm B có toạ độ là $(6,1;6,7;1,55)$.

Vậy ta có: $\overrightarrow{AB} = (6,1-6,1;6,7-6,7;1,55-0)$, tức là $\overrightarrow{AB} = (0;0;1,55)$.

Câu 22. **(VD)** Một công ty viễn thông đang lên kế hoạch xây dựng một tháp viễn thông tại một thành phố để cung cấp dịch dụ tốt hơn. Công ty cần xác định vị trí của tháp sao cho có thể phủ sóng hiệu quả đến ba toà nhà quan trọng trong thành phố. Giả sử các toà nhà này được đặt tại các vị trí có toạ độ như sau:

Toà nhà $A(0;0;0)$

Toà nhà $B(6;0;0)$

Toà nhà $C(3;\sqrt{3};2\sqrt{6})$

Tháp viễn thông phải đặt ở vị trí sao cho tổng khoảng cách từ tháp đến 3 toà nhà là nhỏ nhất. Khi đó tổng khoảng cách từ vị trí của tháp đến ba toà nhà bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: $\dfrac{3\sqrt{47}}{2}$.

Gọi vị trí tháp là $T(x;y;z)$. Vì $AB = AC = BC = 6$ nên tam giác ABC đều. Khi đó vị trí của tháp là trọng tâm của tam giác ABC.

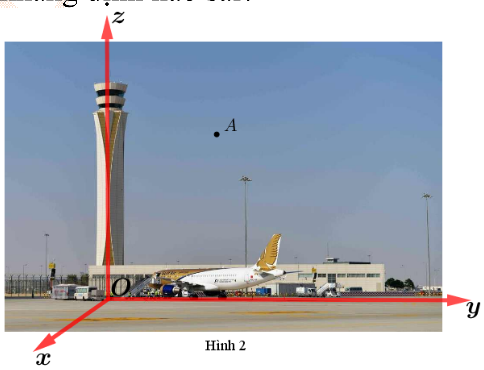
Ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{0+6+3}{3} = \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{0+0+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \\ z = \dfrac{0+0+2\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow T\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{6};\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

Khi đó khoảng cách từ tháp đến các toà nhà là:

$TA = TB = TC = \dfrac{\sqrt{47}}{2}$.

Vậy tổng khoảng cách cần tìm là: $S = TA + TB + TC = \dfrac{3\sqrt{47}}{2} \approx 10,28$

Câu 23. **(TH)** Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng ra đa có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (Hình 2) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?



Hình 2

a) Ra đa ở vị trí có toạ độ $(0;0;0)$.

b) Vị trí A có toạ độ $(300;200;10)$.

c) Khoảng cách từ máy bay đến ra đa là khoảng $360,69$ km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d) Ra đa của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A.

Lời giải

a) Theo giả thiết, ra đa ở vị trí có tọa độ $(0;0;0,08)$. Vậy a) **sai.**

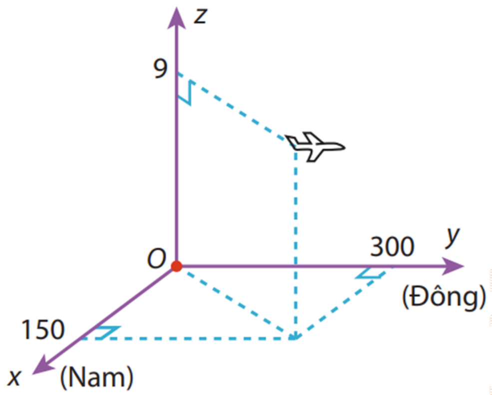
b) Điểm $A(-300;-200;10)$. Vậy b) **sai.**

c) Khoảng cách từ máy bay đến ra đa là:

$\sqrt{(-300-0)^2+(-200-0)^2+(10-0,08)^2} \approx 360,69(\text{ km})$. Vậy c) **đúng.**

d) Vì $360,69<500$ nên ra đa của trung tâm kiểm soát không lưu có phát hiện được máy bay tại vị trí A.Vậy d) **sai.**

Câu 24. **(TH)** Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?



a) Máy bay đang ở độ cao $9km$.

b) Tọa độ của máy bay $(300;150;9)$.

c) Phi công để máy bay ở chế độ tự động với vận tốc theo hướng đông là $750km/h$, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc $10m/s$. Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì lúc 10h30phút máy bay ở tọa độ $(150;1086;9)$.

d) Sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại với vận tốc $800km/h$ với độ cao không đổi, biết lúc đó trời lặng gió thì lúc 11h máy bay ở tọa độ $(686;150;9)$.

Lời giải

a) Dựa vào hình vẽ ta thấy máy bay đang ở độ cao $9km$. Vậy a) **đúng.**

b) Máy bay ở tọa độ $(150;300;9)$. Vậy b) **sai.**

c) Vận tốc gió $10m/s=36km/h$

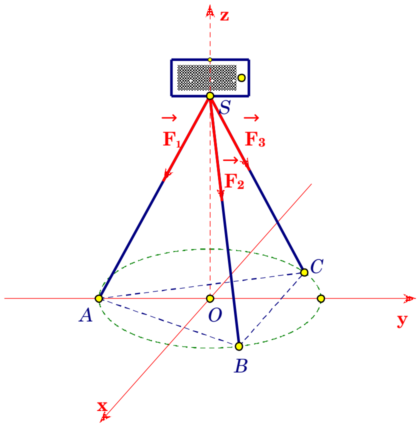
Quãng đường máy bay bay được là: $750+36=786km$

Do đó tọa độ của máy bay là: $(150;1086;9)$. Vậy c) **đúng.**

d) Quãng đường máy bay bay được là: $800.\frac{1}{2}=400km$. Do đó tọa độ máy bay là $(150;686;9)$.

Vậy d) **sai.**

Câu 25. **(TH)** Một chiếc điện thoại iphone được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là $A(0;-6;0), B(3\sqrt{3};3;0)$, $C(-3\sqrt{3};3;0)$ (đơn vị cm). Cho biết điện thoại có trọng lượng là 2 N và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn bằng nhau. Biết tọa độ của lực $\overrightarrow{F_1}=(a;b;c)$, khi đó $T=2a+5b+6c$ bằng?

Lời giải

Đáp số: $\boxed{T=-5}$.

Theo giả thiết, ta có các điểm $S(0;0;20)$, $A(0;-6;0)$, $B\left(3\sqrt{3};3;0\right)$, $C\left(-3\sqrt{3};3;0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SA}=(0;-6;-20);\overrightarrow{SB}=\left(3\sqrt{3};3;-20\right);\overrightarrow{SC}=\left(-3\sqrt{3};3;-20\right)$.

Suy ra $SA=SB=SC=\sqrt{436}$ mà $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|\Rightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases}\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{SA}=(0;-6k;-20k)\\ \overrightarrow{F_2}=k\overrightarrow{SB}=\left(3\sqrt{3}k;3k;-20k\right)\\ \overrightarrow{F_3}=k\overrightarrow{SC}=\left(-3\sqrt{3}k;3k;-20k\right)\end{cases}$$

Suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=(0;0;-60k)$. Gọi $\vec{F}$ là trọng lực tác dụng lên điện thoại $\Rightarrow \vec{F}=(0;0;-2)$

Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{F}$ suy ra $-60k=-2\Rightarrow k=\dfrac{1}{30}$.

Vậy $\vec{F_1}=\left(0;-\dfrac{1}{5};-\dfrac{2}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-\dfrac{1}{5}\\ c=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow \boxed{T=2a+5b+6c=0-1-4=-5}$.

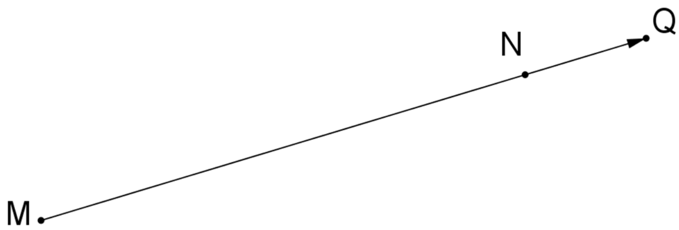
Câu 26. **(VD)** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu X di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$

đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$, tính $S=a+b+2c$.

Lời giải

Đáp án: $N(1300;750;15,5)$, suy ra $S=2081$.

Giải thích



Gọi $N(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 30 phút. $\overrightarrow{MQ}=(400;200;2)$

$\overrightarrow{NQ}=(1400-x;800-y;16-z)$

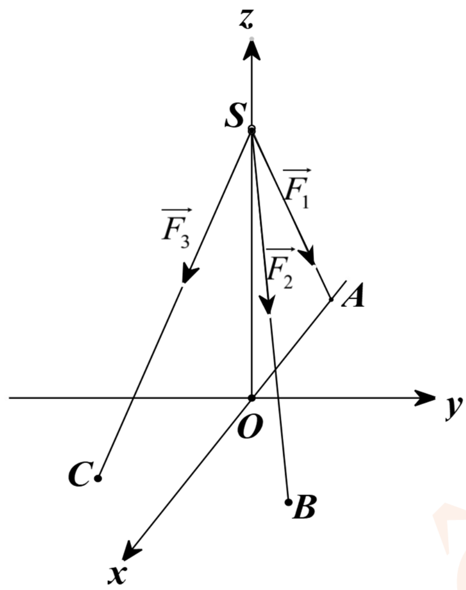
Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N\to Q$ nên $MQ=4NQ$

Suy ra $\overrightarrow{MQ}=4\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}400=4(1400-x)\\200=4(800-y)\\2=4(16-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1300\\y=750\\z=15,5\end{cases}\Rightarrow N(1300;750;15,5)$

Tọa độ vị trí điểm N là $(1300;750;15,5)$

Câu 27. **(VD)** Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A(-2;0;0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(1;-\sqrt{3};0)$. Biết rằng trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là $30\,N$ và được phân bố thành ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn bằng nhau như hình dưới. Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}$.



Lời giải

Đáp án: $\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}=\dfrac{175}{2}$.

Giải thích

Ta có: $\overrightarrow{SA}=(-2;0;-4);\overrightarrow{SB}=\left(1;\sqrt{3};-4\right);\overrightarrow{SC}=\left(1;-\sqrt{3};-4\right)\Rightarrow SA=SB=SC=\sqrt{20}$.

Lại có $\overrightarrow{AB}=(3;\sqrt{3};0);\overrightarrow{AC}=\left(3;-\sqrt{3};0\right);\overrightarrow{BC}=\left(0;-2\sqrt{3};0\right)\Rightarrow AB=AC=BC=\sqrt{12}$. Dẫn đến hình chóp $S.ABC$ đều có đường cao là $SO=4$, với $O\left(0;0;0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Mặt khác,

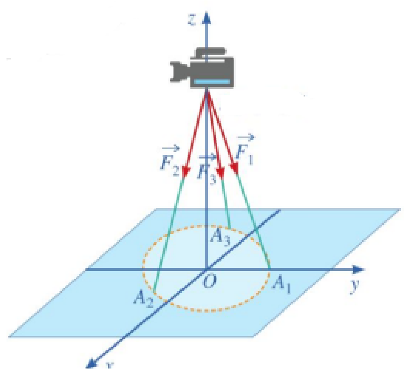
$\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{SA}=(-2k;0;-4k)$, $\overrightarrow{F_2}=k\overrightarrow{SB}=\left(k;\sqrt{3}k;-4k\right)$,

$\overrightarrow{F_3}=k\overrightarrow{SC}=\left(k;-\sqrt{3}k;-4k\right)\Rightarrow\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=(0;0;-12k)$

Mà $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{P}=(0;0;-30)$ nên $-12k=-30\Leftrightarrow k=\dfrac{5}{2}$.

Suy ra $\overrightarrow{F_1}=(-5;0;-10)$, $\overrightarrow{F_2}=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5\sqrt{3}}{2};-10\right)$. Vậy, $\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}=\dfrac{175}{2}$.

Câu 28. **(VD)** Một chiếc máy ảnh được đặt trên giá đỡ ba chân với điểm đặt $E\left(0;0;8\right)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1\left(0;1;0\right)$, $A_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1}{2};0\right)$, $A_3\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1}{2};0\right)$.



Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 240N. Tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F_1}$ là:

A. $\overrightarrow{F_1}=(0;10;-80)$. **B.** $\overrightarrow{F_1}=(0;10;80)$.

C. $\overrightarrow{F_1}=(0;-10;-80)$. **D.** $\overrightarrow{F_1}=(10;0;-80)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{EA_1}=(0;1;-8), \overrightarrow{EA_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2};-8\right)$, $\overrightarrow{EA_3}=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2};-8\right)$ Nên $EA_1=EA_2=EA_3=\sqrt{65}$

Mặt khác, $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$ vì đèn cân bằng và trọng lực của đèn tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ

Do đó: $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{EA_1}=(0;k;-8k), \overrightarrow{F_2}=k\overrightarrow{EA_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k;\frac{-1}{2}k;-8k\right), \overrightarrow{F_3}=k\overrightarrow{EA_3}=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}k;\frac{-1}{2}k;-8k\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=(0;0;-24k)$

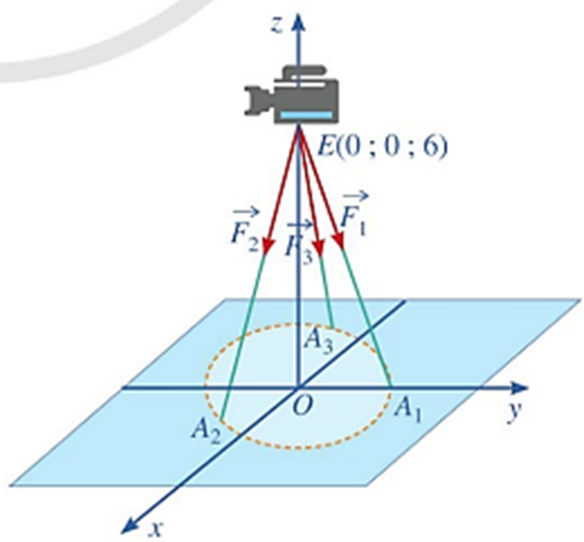
Mà $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{P}=(0;0;-240)\Rightarrow -24k=-240\Rightarrow k=10$

Vậy $\overrightarrow{F_1}=(0;10;-80)$

Câu 29. **(VD)** Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ (Hình 40).

Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là $300\ N$. Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$

.



Lời giải

Theo giả thiết, ta có các điểm $E(0;0;6)$, $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$.

Suy ra

$\overrightarrow{EA_1}=(0;1;-6)\Rightarrow\left|\overrightarrow{EA_1}\right|=\sqrt{37}$

$\overrightarrow{EA_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{EA_2}\right|=\sqrt{37}$

$\overrightarrow{EA_2}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{EA_2}\right|=\sqrt{37}$

Do đó $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Vì vậy tồn tại hằng số c sao cho

$\overrightarrow{F_1} = c\overrightarrow{EA_1} = (0;c;-6c)$

$\overrightarrow{F_2} = c\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c;-\frac{1}{2}c;-6c\right)$

$\overrightarrow{F_3} = c\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c;-\frac{1}{2}c;-6c\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3} = (0;0;-18c)$. Mặt khác ta có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F}$, trong đó $\overrightarrow{F} = (0;0;-300)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay. Suy ra $-18c = -300$, tức là $c = \frac{50}{3}$.

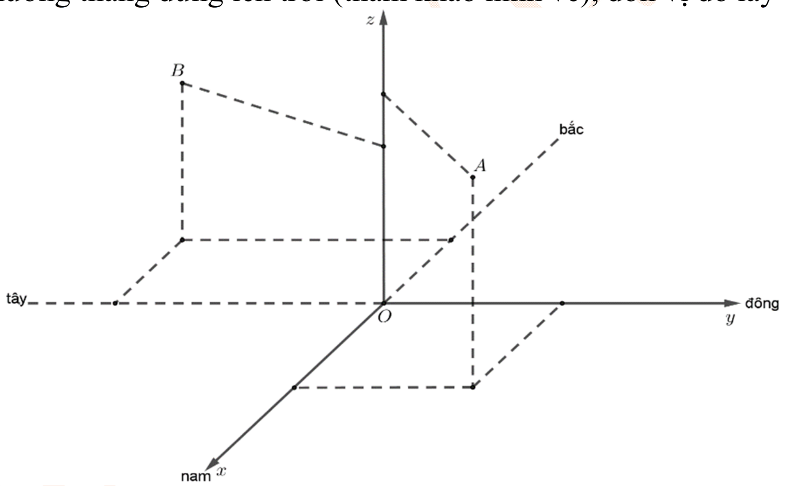
Vậy $\overrightarrow{F_1} = \left(0;\frac{50}{3};-100\right), \overrightarrow{F_2} = \left(\frac{25\sqrt{3}}{3};-\frac{25}{3};-100\right), \overrightarrow{F_3} = \left(-\frac{25\sqrt{3}}{3};-\frac{25}{3};-100\right)$.

Câu 30. **(VD)** Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát $2,5$ km về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,8$ km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát $1,5$ km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,6$ km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là a km theo hướng nam và b km theo hướng tây. Tính tổng $2a+3b$.

Lời giải

Đáp số: 3

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ), đơn vị đo lấy theo kilômét.



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai ở vị trí A, B. Ta có $A\left(\frac{5}{2};2;\frac{4}{5}\right), B\left(-\frac{3}{2};-3;\frac{3}{5}\right)$.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy), $C\left(\frac{5}{2};2;-\frac{4}{5}\right)$. Khi đó $I = BC \cap (Oxy)$.

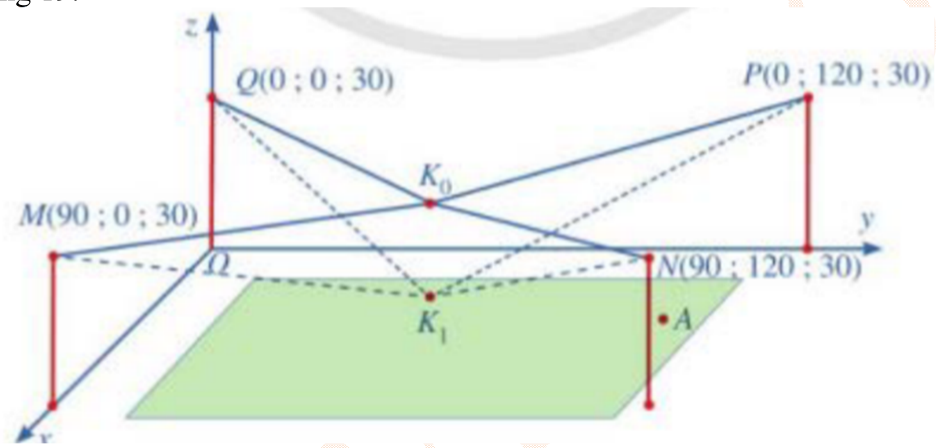
$\overrightarrow{BC} = \left(4;5;-\frac{7}{5}\right)$. $I \in (Oxy) \Rightarrow I(x;y;0) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \left(x+\frac{3}{2};y+3;-\frac{3}{5}\right)$

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}$ cùng phương nên $\dfrac{x+\frac{3}{2}}{4} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{14} \\ y = -\dfrac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{14} \\ b = \dfrac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 3$.

Câu 31. **(VD)** Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30), P(0;120;30), Q(0;0;30)$.

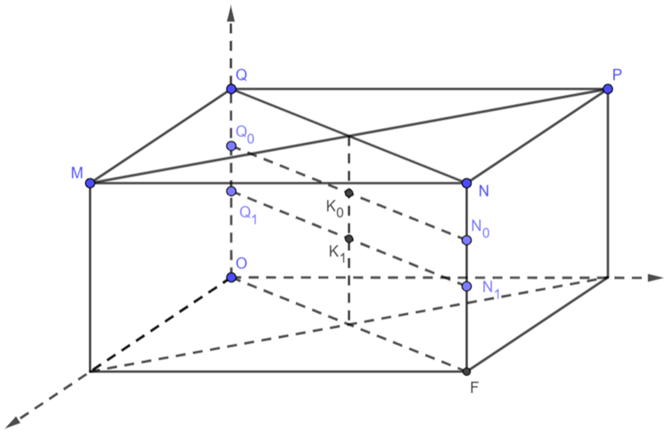
Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19.



Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1} = (a;b;c)$ với a,b,c là các số thực. Tính $P = a + b - c$?

Lời giải

Trả lời: 6



Trong mặt phẳng $OQNF$:

Qua điểm K_0 kẻ đường thẳng song song với NQ, đường thẳng này cắt OQ, NF lần lượt tại $Q_0; N_0$. Khi đó: $Q_0(0;0;25); N_0(90;120;25)$.

Trung điểm K_0 của Q_0N_0 có tọa độ: $K_0(45;60;25)$.

Qua điểm K_1 kẻ đường thẳng song song với NQ, đường thẳng này cắt OQ, NF lần lượt tại $Q_1; N_1$. Khi đó: $Q_1(0;0;19); N_1(90;120;19)$.

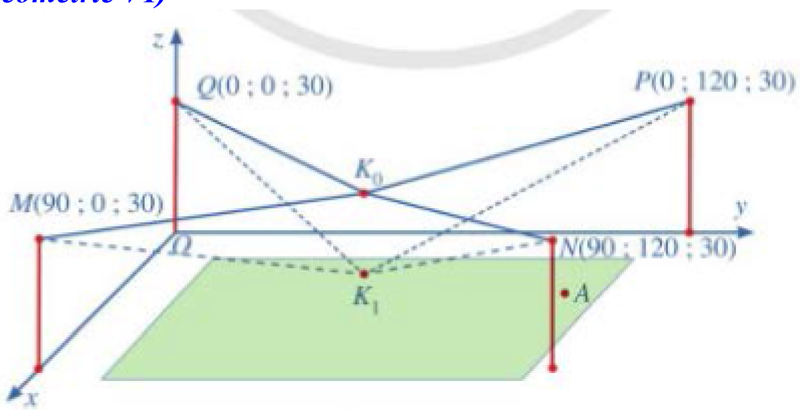
Trung điểm K_1 của Q_1N_1 có tọa độ: $K_1(45;60;19)$.

Khi đó: $\overrightarrow{K_0K_1}=(0;0;-6)\Rightarrow P=a+b-c=6$.

Câu 32. **(VD)** Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kí sư dự định trồng bốn chiếc cột cao $30m$ và sử dụng hệ thống cáp gắn và bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí như mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là $1m$), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34).

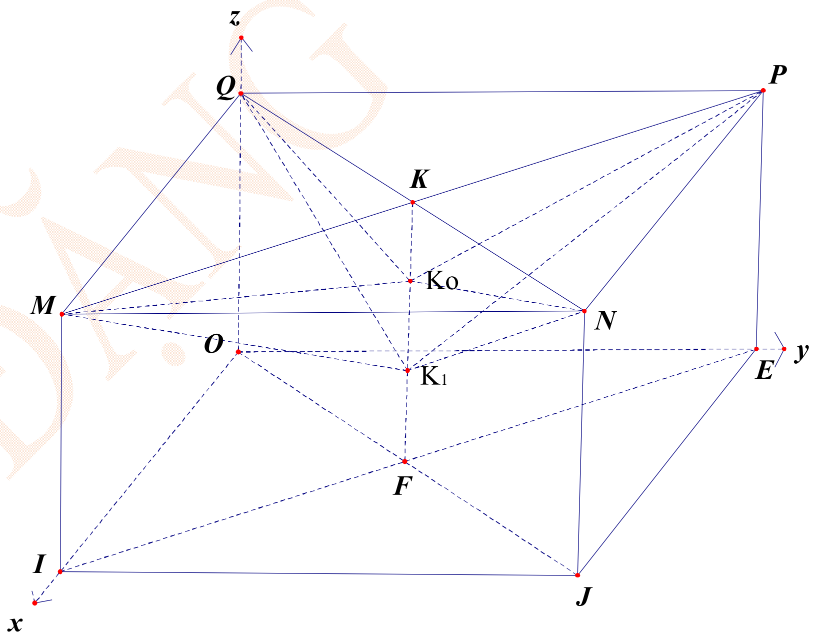
Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có độ cao bằng $25m$ và $K_0M=K_0N=K_0P=K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19(*Nguồn:**https://www.abiturloesung.de;Abitur bayern 2016 Geometrie VI)***



Hình 34

Tìm tọa độ của các điểm K_0, K_1 và của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$

Lời giải



Gọi I,J,E thứ tự là hình chiếu M,N,P trên sân.

Có O là hình chiếu Q trên sân.

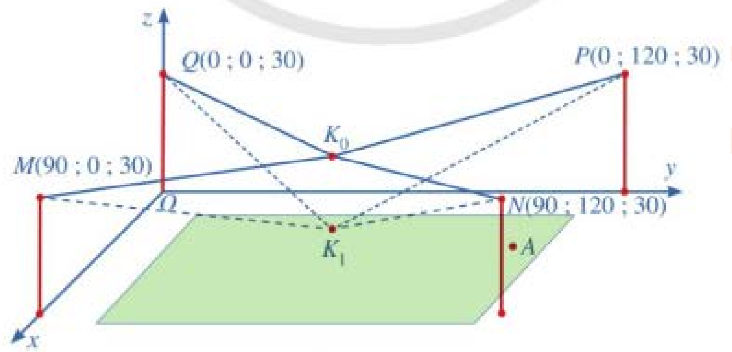
Từ giả thiết bài toán ta có hình hộp chữ nhật $MNPQ.IJEO$.

Gọi $K;F$ thứ tự là tâm hình chữ nhật $MNPQ$ và $IJEO \Rightarrow K(45;60;30);F(45;60;0)$

Vì K_0 là vị trí ban đầu của camera có độ cao bằng $25m$ và $K_0M=K_0N=K_0P=K_0Q$, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19 nên $K_0;K_1 \in KF$

$\Rightarrow K_0(45;60;25);K_1(45;60;19) \Rightarrow \overrightarrow{K_0K_1}(0;0;-6)$

Câu 33. **(VD)** Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M=K_0N=K_0P=K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A, camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 (Nguồn: *https://www.abiturloesumg.de; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI*).

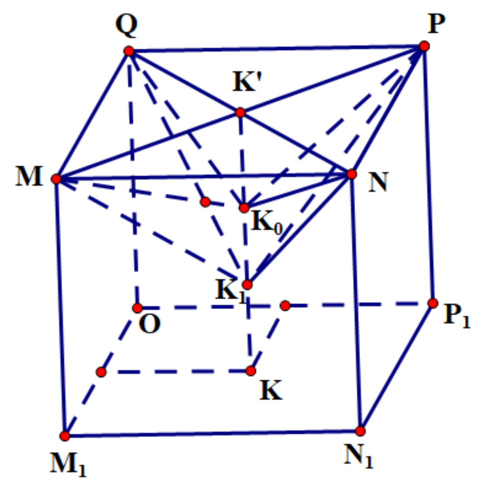


Hình 34

Biết rằng vecto $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a;b;c);a,b,c\in\mathbb{R}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 6.	**B.** -4.	**C.** -6.	**D.** 4.

Lời giải



Gọi M_1, N_1, P_1, K lần lượt là hình chiếu của M, N, P, K_0 lên mặt phẳng (Oxy).

Ta thấy $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật. Gọi K' là giao hai đường chéo MP và NQ.

Khi đó $K'Q=K'P=K'N=K'M$. Vì $K_0M=K_0N=K_0P=K_0Q$ và camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng từ điểm K_0 xuống điểm K_1 nên các điểm K', K_0, K_1, K thẳng hàng.

Khi đó, các điểm K', K_0, K_1, K có hoành độ và tung độ bằng nhau.

Theo bài ra, cao độ của K_0 và K_1 lần lượt là 25 và 19. Giả sử $K_0(x;y;25)$ và $K_1(x;y;19)$.

Ta có $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật nên $K'K = OQ$, suy ra cao độ của K' bằng 30.

Do đó, $K'(x;y;30)$.

Ta có $\overrightarrow{K'Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OK'} = 30\vec{k} - \left(x\vec{i} + y\vec{j} + 30\vec{k}\right) = -x\vec{i} - y\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{K'Q} = (-x;-y;0)$.

$\overrightarrow{NK'} = \overrightarrow{OK'} - \overrightarrow{ON} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + 30\vec{k}\right) - \left(90\vec{i} + 120\vec{j} + 30\vec{k}\right) = (x-90)\vec{i} + (y-120)\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NK'} = (x-90; y-120; 0)$.

Vì K' là giao hai đường chéo của hình chữ nhật $MNPQ$ nên K' là trung điểm của NQ.

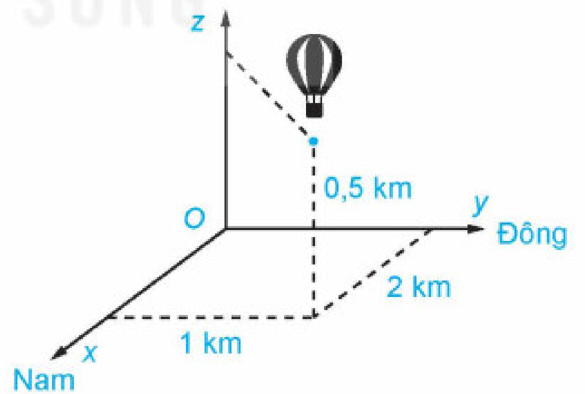
Suy ra $\overrightarrow{K'Q} = \overrightarrow{NK'} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x - 90 \\ -y = y - 120 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 60 \end{cases}$.

Do vậy, $K_0(45;\ 60;\ 25); K_1(45;\ 60;\ 19)$ nên ta có $\overrightarrow{K_0K_1} = \overrightarrow{OK_1} - \overrightarrow{OK_0} = \left(45\vec{i} + 60\vec{j} + 19\vec{k}\right) - \left(45\vec{i} + 60\vec{j} + 25\vec{k}\right) = -6\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{K_0K_1} = (0;0;-6)$.

Do đó, $a + b + c = -6$.

Câu 34. **(TH)** Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát $2\ km$ về phía nam và $1\ km$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\ m$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát $1\ km$ về phía bắc và $1,5\ km$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\ km$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, Oy hướng về phía đông, Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu.

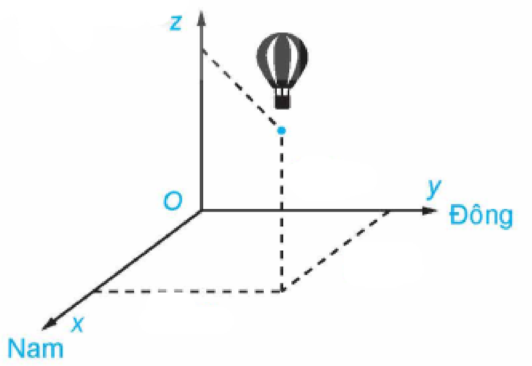
Lời giải



Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát $2\ km$ về phía nam và $1\ km$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\ m$ nên có tọa độ là $(2;1;0,5)$.

Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát $1\ km$ về phía bắc và $1,5\ km$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\ km$ nên có tọa độ là $(-1;-1,5;0,8)$.

Câu 35. **(TH)** Một chiếc khinh khí cầu bay lên từ địa điểm cho trước. Sau khoảng thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách địa điểm xuất phát $2,5km$ về hướng nam và $1,7km$ về hướng đông, đồng thời cách mặt đất là $0,6km$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilomet.



Tính khoảng cách từ địa điểm xuất phát đến địa điểm hiện tại của khinh khí cầu (đơn vị lấy theo kilomet và làm tròn đến 2 chữ số sau phần thập phân)

Lời giải

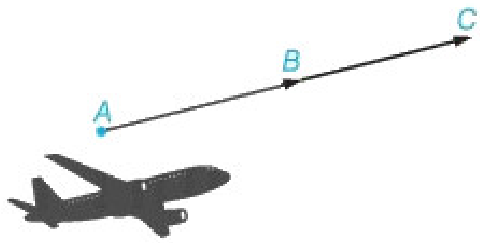
Đáp số: 3,08

Với hệ trục toạ độ đã chọn thì vị trí hiện tại của khinh khí cầu là $A(2,5;1,7;0,6)$.

Khi đó khoảng cách từ địa điểm xuất phát đến địa điểm hiện tại của khinh khí cầu là: $OA=\sqrt{2,5^2+1,7^2+0,6^2}\approx 3,08(km)$

Câu 36. **(TH)** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800\,;500\,;7)$ đến điểm $B(940\,;550\,;8)$ trong vòng 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?

Lời giải



Gọi $C(x\,;y\,;z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ là cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian từ B đến Cnên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(940-800\,;550-500\,;8-7)=(140\,;50\,;1)$. $\overrightarrow{BC}=(x-940\,;y-550\,;z-8)$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}140=x-940\\50=y-550\\1=z-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1080\\y=600\\z=9\end{cases}.\text{ Vậy } C=(1080\,;600\,;9).$$

Câu 37. **(TH)** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(600;400;20)$ đến điểm $N(800;500;30)$ trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 15 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?

A. $(700;500;30)$. **B.** $(900;650;55)$. **C.** $(900;550;35)$. **D.** $(800;540;30)$.

Lời giải

Gọi $Q(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 15 phút tiếp theo.

$\overrightarrow{MN}=(200;100;10)$

$\overrightarrow{NQ}=(x-800;y-500;z-30)$

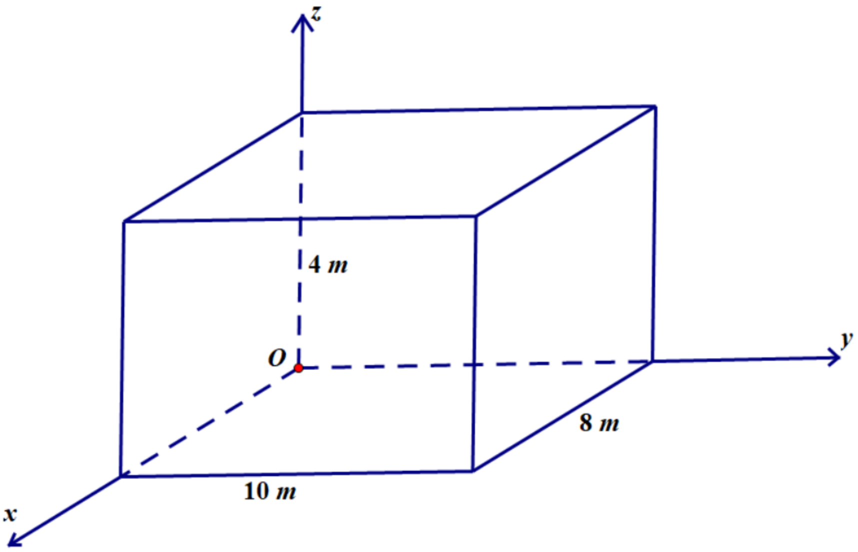
Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to N$ gấp 2 lần thời gian bay từ $N\to Q$ nên $MN=2NQ$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}200=2(x-800)\\100=2(y-500)\\10=2(z-30)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=900\\y=550\\z=35\end{cases}\Rightarrow Q(900;550;35)$

Tọa độ của máy bay sau 15 phút tiếp theo là $(900;550;35)$

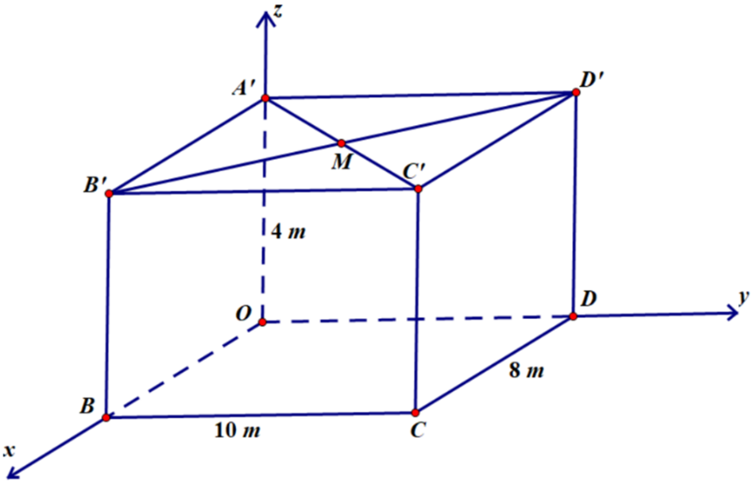
Câu 38. **(TH)** Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 8 m và chiều cao là 4 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình vẽ).



Tính khoảng cách từ điểm treo bóng đèn đến góc phòng học (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét.



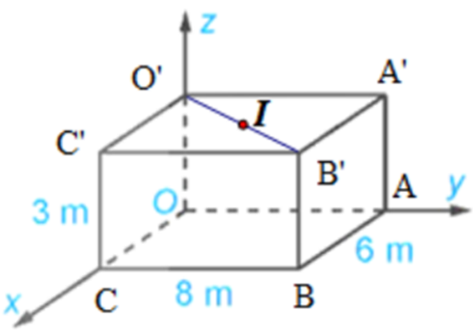
Phòng học thiết kế dạng hình hộp chữ nhật $OBCD.A'B'C'D'$ với $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo $A'C'$ và $B'D'$ nên M là trung điểm của $A'C'$ với $A'(0;0;4)$, $C'(8;10;4)$.

Vì đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học nên điểm treo bóng đèn trùng với điểm M.

Có $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_{A'} + x_{C'}}{2} = 4 \\ y_M = \dfrac{y_{A'} + y_{C'}}{2} = 5 \\ z_M = \dfrac{z_{A'} + z_{C'}}{2} = 4 \end{cases}$ nên $M(4;5;4)$, khoảng cách từ điểm treo bóng đèn đến góc phòng học là $OM = \sqrt{4^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{57} \approx 7,55$.

Câu 39. **(TH)** Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là $8\,m$, chiều rộng là $6\,m$ và chiều cao là $3\,m$. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.

Lời giải.



Giả sử căn phòng hình hộp chữ nhật được mô phỏng như hình vẽ.

Khi đó ta có $B'(6;8;3)$ và $O'(0;0;3)$.

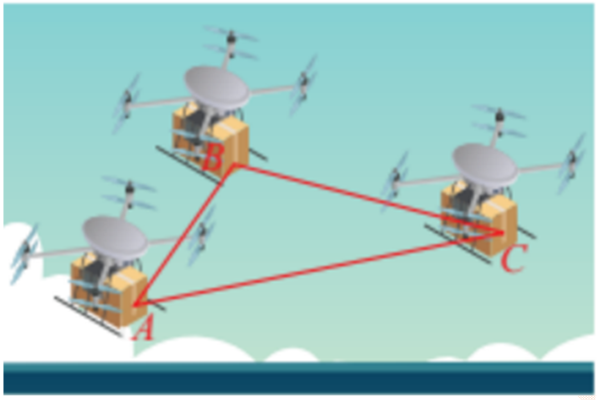
Gọi $I(x;y;z)$ là điểm chính giữa trần nhà của phòng học.

Vì $O'A'B'C'$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{O'I} = \overrightarrow{IB'}$.

Ta có $\overrightarrow{O'I} = (x-0;y-0;z-3)$, $\overrightarrow{IB'} = (6-x;8-y;3-z)$ nên:

$\overrightarrow{O'I} = \overrightarrow{IB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-0=6-x \\ y-0=8-y \\ z-3=3-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$. Vậy tọa độ điểm treo đèn là $I(3;4;3)$.

Câu 40. **(VD)** Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1;-3;2)$, $B(m;m-2;6)$, $C(m-2;m;5)$, trong đó m là tham số, đơn vị đo độ dài tính bằng kilomet.. Biết kho hàng đang ở tại điểm $I(1;1;0)$. Vì lý do nhiên liệu nên các drone không được di chuyển quá xa kho hàng, cụ thể là các drone không được cách kho hành quá 100 km.Xác định giá trị của tham số m để các drone cách kho hàng không quá 100km.



Lời giải

Ta có $IA = 2\sqrt{5} < 100$

$IB = \sqrt{(m-1)^2 + (m-3)^2 + 36}$

$IC = \sqrt{(m-3)^2 + (m-1)^2 + 25}$

Rõ rang $IC < IB$ với mọi m, do vậy ta chỉ cần tìm m để done B không xa kho hàng quá 100km. Tức là

$\Leftrightarrow (m-1)^2 + (m-3)^2 + 36 < 10000 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m - 9954 < 0$

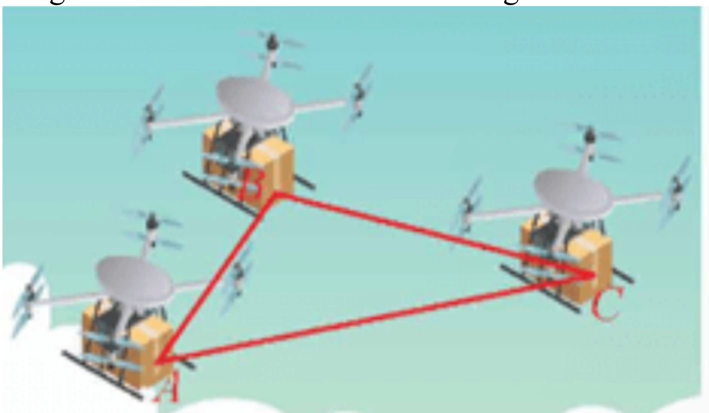
$\Leftrightarrow -68,6 < m < 72,6$

Câu 41. **(TH)** Tính công(đơn vị N) sinh bởi lực $\vec{F}(6;8;-10)$ tạo bởi một drone giao hàng khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d}(100;200;200)$.

Lời giải

$A = |\vec{F}|.|\vec{d}|.\cos(\vec{F},\vec{d}) = |\vec{F}|.|\vec{d}|.\dfrac{\vec{F}.\vec{d}}{|\vec{F}|.|\vec{d}|} = \vec{F}.\vec{d} = 6.100 + 8.200 + (-10).200 = 200$ ***(N)***

Câu 42. **(TH)** Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, có ba drone giao hàng A,B,C như hình vẽ, đang có tọa độ là $A(1;2;1), B(5;8;9), C(9;12;10)$. Điểm giao hàng của drone là điểm D thỏa mãn tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Tìm tọa độ của điểm D.



Lời giải

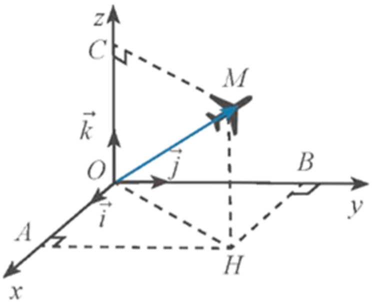
Giả sử $D(x;y;z)$.

$\overrightarrow{AD}=(x-1;y-2;z-1)$, $\overrightarrow{BC}=(4;4;1)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4 \\ y-2=4 \\ z-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \\ z=2 \end{cases}$.

Vậy $D(5;6;2)$.

Câu 43. **(VD)** Ở một sân bay, vị trí của một máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ.



Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M xuống mặt phẳng (Oxy). Biết $OM=60$, $\left(\vec{i},\overrightarrow{OH}\right)=60°$, $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM}\right)=45°$ và $M(a;b;c)$. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 3006. **B.** 3600. **C.** 3060. **D.** 6300.

Lời giải

Ta có $\left(\vec{i},\overrightarrow{OH}\right)=60° \Rightarrow \widehat{AOH}=60°$, $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM}\right)=45° \Rightarrow \widehat{MOH}=45°$.

Tam giác MOH vuông tại H có $\widehat{MOH}=45°$ nên ΔMOH vuông cân tại H $\Rightarrow OH=MH=\dfrac{OM}{\sqrt{2}}=\dfrac{60}{\sqrt{2}}=30\sqrt{2}$.

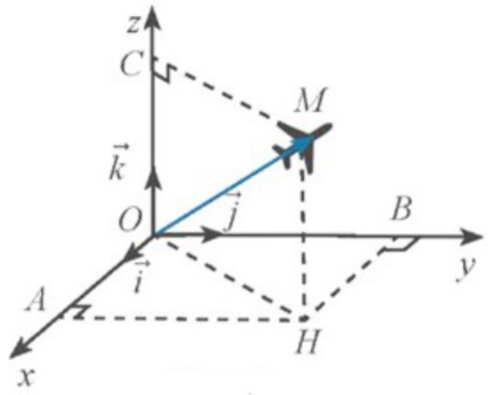
$OC=MH \Rightarrow OC=30\sqrt{2}$.

Tam giác OAH vuông tại A có $OA=OH.\cos\widehat{AOH}=30\sqrt{2}.\cos 60°=15\sqrt{2}$.

Ta lại có $OB=AH=OH.\sin\widehat{AOH}=30\sqrt{2}.\sin 60°=15\sqrt{6}$.

Từ đó ta có $M\left(15\sqrt{2};15\sqrt{6};30\sqrt{2}\right) \Rightarrow a=15\sqrt{2}, b=15\sqrt{6}, c=30\sqrt{2} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=3600$.

Câu 44. **(VD)** Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Biết $OM = 79; \left(\vec{i}, \overrightarrow{OH}\right) = 68°; \left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}\right) = 50°$. Gọi toạ độ điểm $M\left(a;b;c\right)$. Giá trị của $a+b+c$ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

$OC = MH = OM \sin HOM = 79\sin 68°$

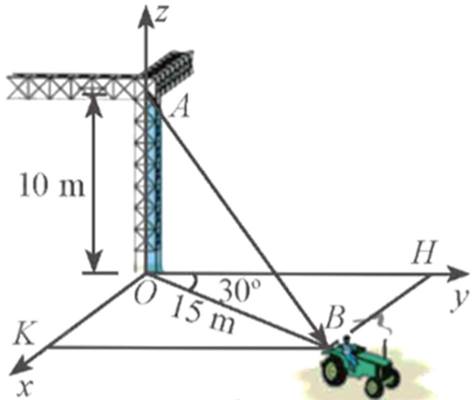
$OH = OM \cos HOM = 79\cos 68°$

$OA = OH \cos AOH = 79\cos 68°.\cos 50°$

$OB = AH = OH \sin AOH = 79\cos 68° \sin 50°$

Ta có: $\begin{cases} a = 79\cos 68°.\cos 50° \\ b = 79\sin 68° \\ c = 79\cos 68° \sin 50° \end{cases} \Rightarrow a+b+c \approx 114{,}9$

Câu 45. **(VD)** Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ như Hình 16 với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Hình 16

Lời giải

Do $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 10$ nên $\overrightarrow{OA} = 10.\vec{k}$.

Xét ΔOBH vuông tại H, ta có:

$OH = \cos 30°.OB = \cos 30°.15 = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$.

$BH = \sin 30°.OB = \sin 30°.15 = \dfrac{15}{2}$.

Do $\overrightarrow{OH}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $\left|\overrightarrow{OH}\right| = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ nên $\overrightarrow{OH} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}.\vec{j}$.

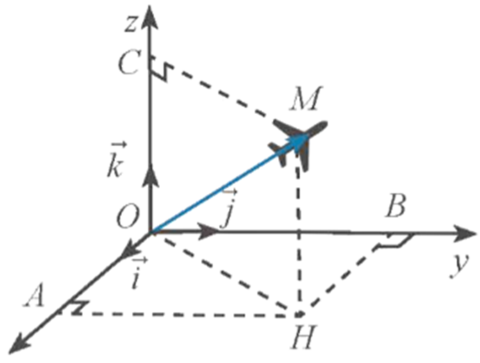
Do $\overrightarrow{OK}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $\left|\overrightarrow{OK}\right|=\frac{15}{2}$ nên $\overrightarrow{OK}=\frac{15}{2}\vec{i}$.

Trong hình bình hành $OKBH$, ta có $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OH}=\frac{15}{2}.\vec{i}+\frac{15\sqrt{3}}{2}.\vec{j}$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\frac{15}{2}.\vec{i}+\frac{15\sqrt{3}}{2}.\vec{j}-10\vec{k}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{15}{2};\frac{15\sqrt{3}}{2};-10\right)$.

Câu 46. **(VD)** Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình 17. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Cho biết $OM=50$, $\left(\vec{i},\overrightarrow{OH}\right)=64°$, $\left(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OM}\right)=48°$. Tìm tọa độ của điểm M.

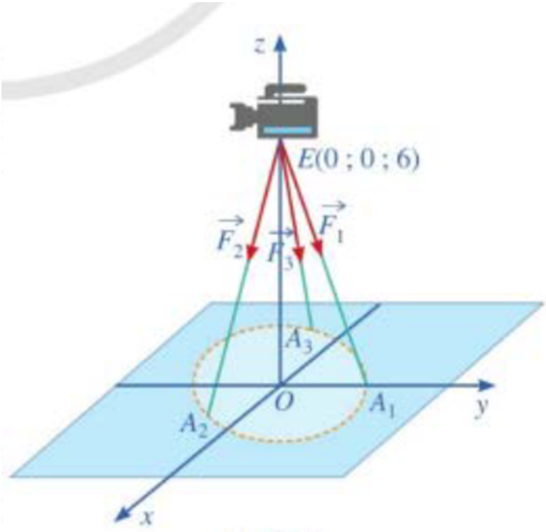


Hình 17

Lời giải

Xét ΔMHO vuông tại H, ta có:
$OH=OM.\cos 48°=50.\cos 48°\approx 33,46$.
$MH=OM.\sin 48°=50.\sin 48°\approx 37,16$.
Xét ΔOAH vuông tại A, ta có: $BH=OA=OH.\cos 64°=33,46.\cos 64°\approx 14,67$.
Xét ΔOBH vuông tại B, ta có: $OB=\sqrt{OH^2-BH^2}=\sqrt{33,46^2-14,67^2}\approx 30,07$.
Do $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right|=14,67$ nên $\overrightarrow{OA}=14,67\vec{i}$.
Do $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $\left|\overrightarrow{OB}\right|=30,07$ nên $\overrightarrow{OB}=30,07.\vec{j}$.
Do $\overrightarrow{OC}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $\left|\overrightarrow{OC}\right|=37,16$ nên $\overrightarrow{OC}=37,16.\vec{k}$.
Trong hình bình hành $OAHB$, ta có $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.
Trong hình bình hành $OCMH$, ta có $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=14,67\vec{i}+30,07\vec{j}+37,16\vec{k}$
Vậy $M(14,67;30,07;37,16)$.

Câu 47. **(VD)** Trong không gian $Oxyz$, một chiếc máy quay được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ như hình vẽ, các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;2;0), A_2(\sqrt{3};-1;0), A_3(-\sqrt{3};-1;0)$. Biết trọng lực của máy là $360N$. Tìm tọa độ các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ tác dụng lên các chân giá đỡ.



Lời giải

Có $\overrightarrow{EA_1}(0;2;-6)$; $\overrightarrow{EA_2}(\sqrt{3};-1;-6)$; $\overrightarrow{EA_3}(-\sqrt{3};-1;-6)$

Suy ra $EA_1 = EA_2 = EA_3 = \sqrt{40}$. Lại có $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right|$ (vì máy quay ở trạng thái cân bằng)

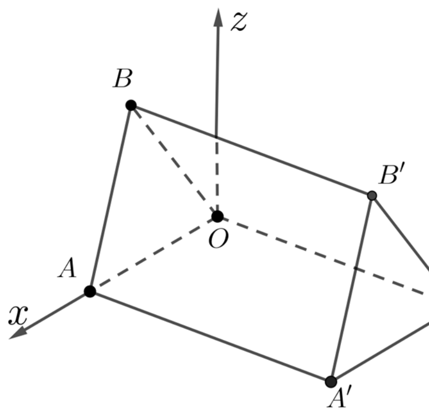
nên $\overrightarrow{F_1} = k.\overrightarrow{EA_1} = (0;2k;-6k)$, $\overrightarrow{F_2} = k.\overrightarrow{EA_2} = (k\sqrt{3};-k;-6k)$, $\overrightarrow{F_3} = k.\overrightarrow{EA_3} = (-k\sqrt{3};-k;-6k)$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = (0;0;-18k)$ mà $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P} = (0;0;-360) \Rightarrow -18k = -360 \Rightarrow k = 20$

Vậy $\overrightarrow{F_1} = (0;40;-120)$, $\overrightarrow{F_2} = (20\sqrt{3};-20;-120)$, $\overrightarrow{F_3} = (-20\sqrt{3};-20;-120)$.

Câu 48. **(VD)** Những căn lều gỗ trong Hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240;450;0)$ và $(120;450;300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm , chiều rộng là $b$cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm . Tính $a+b+c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).

Hình 1



Hình 2

Lời giải

Vì điểm A' có toạ độ là $(240;450;0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là 450cm và 240cm. Suy ra $A'A = 450$cm và $A'O' = 240$cm. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (-120;0;300)$, do đó $A'B' = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{cm})$.

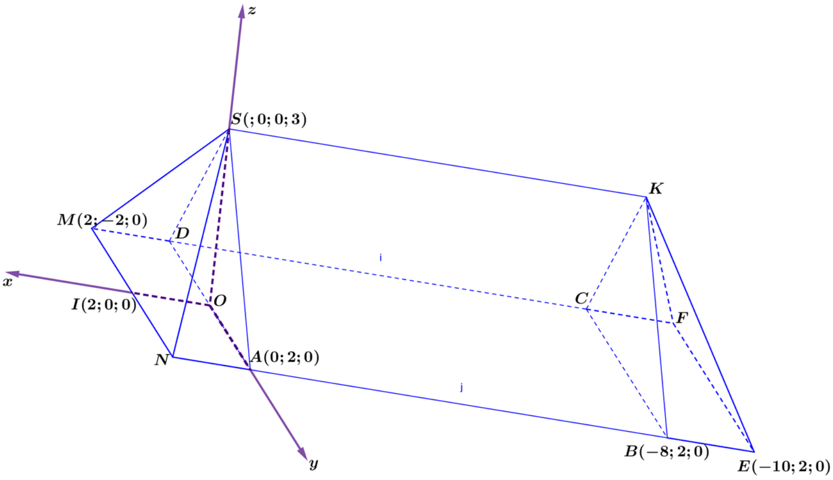
Vì $O'O = A'A = 450$cm và O' nằm trên trục Oy nên toạ độ của điểm O' là $(0;450;0)$.

Do đó $\overrightarrow{O'B'} = (120;0;300)$ và $O'B' = \left|\overrightarrow{O'B'}\right| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323$ (cm).

Vậy mỗi căn lều gỗ có chiều dài là 450cm, chiều rộng là 240cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.

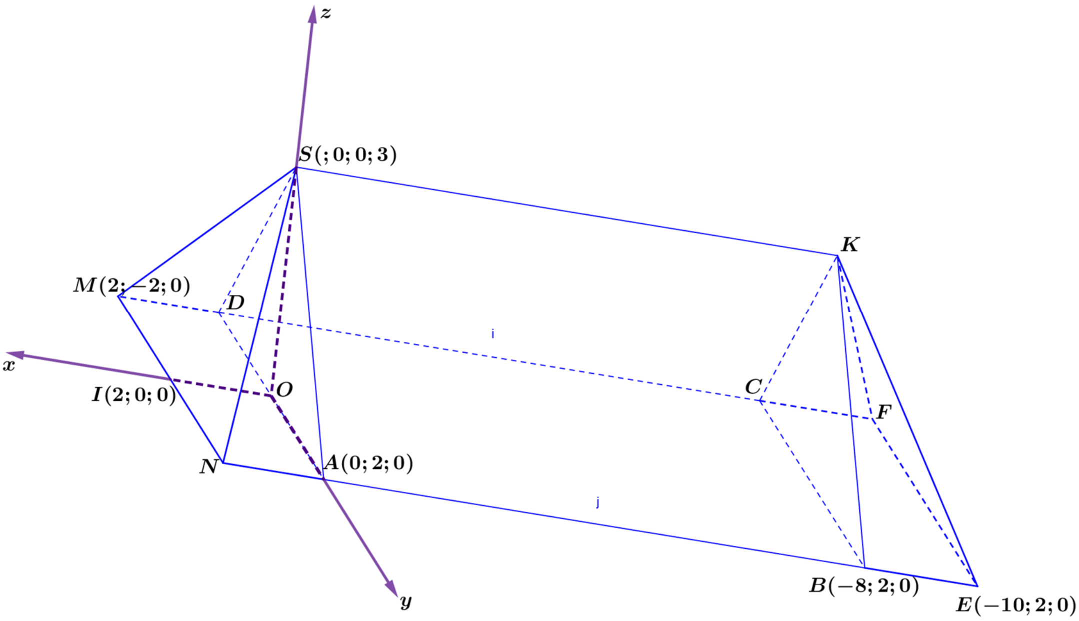
$\Rightarrow a+b+c=1013$.

Câu 49. **(VD)** Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện được mô tả và gắn trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tính thể tích khối đa diện của mái nhà.



Lời giải

Đáp án: $V=64$



Khối đa diện tạo ra mái nhà được tách thành 3 khối là 2 khối chóp có đáy là hình chữ nhật và khối lăng trụ đứng tam giác nên

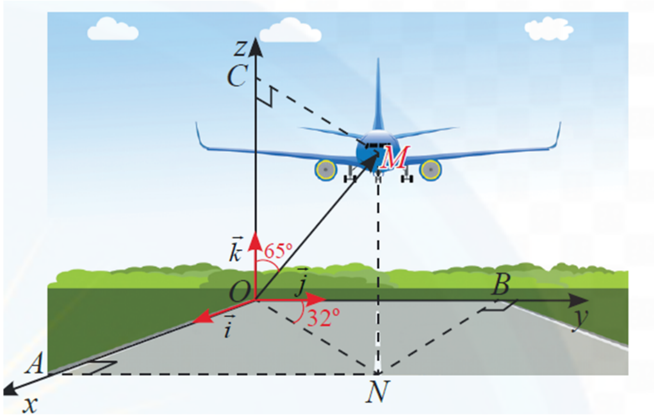
$V=V_{S.ADMN}+V_{SAD.KBC}+V_{K.BCFE}$

Mà $V_{S.ADMN}=V_{K.BCFE}$

Theo hình vẽ hệ trục có $N(2;2;0)$ suy ra $\begin{cases} MN=4 \\ AN=2 \\ AB=8 \end{cases}$

Khi đó, $V=2V_{S.ADMN}+V_{SAD.KBC}=2.\dfrac{1}{3}.4.2.3+\dfrac{1}{2}.4.3.8=64$ (đvtt).

Câu 50. **(VD)** Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM=14$, $\widehat{NOB}=32°$, $\widehat{MOC}=65°$. Tìm tọa độ điểm M.



Lời giải

Tam giác OCM vuông tại C có

$OC = OM.\cos 65° = 14.\cos 65° \approx 5,9$ và $CM = OM.\sin 65° = 14.\sin 65° \approx 12,7$.

$ON = CM$, $AN = OB$.

Có $\widehat{AON} = 90° - \widehat{BON} = 58°$

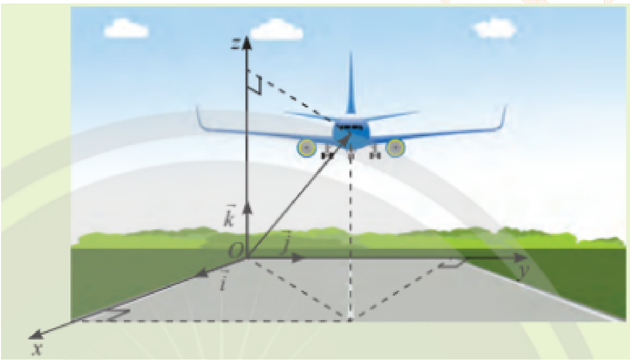
Tam giác OAN vuông tại A có

$OA = ON.\cos 58° = 12,7.\cos 58° \approx 6,7$ và $AN = ON.\sin 58° = 12,7.\sin 58° \approx 10,8$.

$\overrightarrow{OM} = OA.\vec{i} + OB.\vec{j} + OC.\vec{k} = 6,7\vec{i} + 10,8.\vec{j} + 5,9.\vec{k}$.

Vậy $M(6,7;10,8;5,9)$.

Câu 51. **(TH-VD)** Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ Oxyz được gắn như hình vẽ, trong đó gốc O là vị trí của trạm kiểm soát không lưu và $M(x;y;z)$ (km) biểu thị vị trí máy bay trên không trung. Tại thời điểm 8h máy bay đang ở vị trí $(50;120;4)$ và chuyển động với vận tốc $\vec{v} = (300;400;3)$ (km/h)



a) Tại thời điểm 8h, khoảng cách giữa máy bay và trạm kiểm soát không lưu nói trên xấp xỉ 130 km (sai số không quá 1km).

b) Tại thời điểm 9h độ cao của máy bay so với mặt đất là 8km.

c) Tại thời điểm 10h, khoảng cách giữa máy bay và một tháp truyền hình F có tọa độ $(1250;1020;0)$ xấp xỉ 700km (sai số không quá 10km).

d) Khi đạt độ cao 10km, máy bay đổi vận tốc mới là $\overrightarrow{v_2} = (400;300;-5)$ để hướng đến sân bay B. Tọa độ của máy bay khi vừa đáp xuống sân bay B là $(1450;1520;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đúng	Sai	Sai	Đúng

a) $\overrightarrow{OM} = (50;120;4) \Rightarrow OM = \sqrt{50^2 + 120^2 + 4^2} \approx 130,06$

Vậy khoảng cách giữa máy bay và trạm không lưu tại thời điểm 8h xấp xỉ 130km.

b) Ta có $\overrightarrow{OM}+\vec{v}=(350;520;7)$

Tại thời điểm 9h, tọa độ của máy bay là $M_1(350;520;7)$

Vậy độ cao của máy bay so với mặt đất là 7km.

c) Ta có $\overrightarrow{OM}+2\vec{v}=(650;920;10)$.

Vậy tại thời điểm 10h, tọa độ của máy bay là $M_2(650;920;10)$

Ta có: $\overrightarrow{M_2F}=(600;100;10)\Rightarrow M_2F=\sqrt{600^2+100^2+10^2}\approx 608,36$

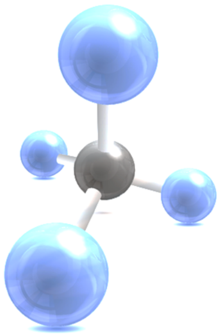
Vậy khoảng cách giữa máy bay và tháp truyền hình F xấp xỉ 600km.

d) Từ độ cao 10km, với tốc độ hạ độ cao là 5km/h thì máy bay cần 2h để đáp xuống đất.

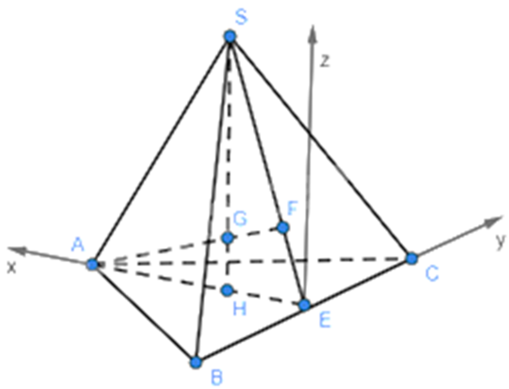
Ta có: $\overrightarrow{OM_2}+2\overrightarrow{v_2}=(1450;1520;0)$.

Vậy tọa độ của máy bay khi đáp xuống là $M_3(1450;1520;0)$

Câu 52. **(VD)** Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó.Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện.Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H-C-H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này.



Lời giải



Từ hình vẽ ta thấy góc liên kết là góc $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GS})$

Ta có: $AE\perp BC, SH\perp(ABC)\Rightarrow\begin{cases}SH\perp AE\\SH\perp BC\end{cases}$ nên ta có hệ trục tọa độ như hình với với E trùng với gốc tọa độ O

Giả sử các cạnh của tứ diện có độ dài là a

Ta có: $SE=AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

$HE=\frac{AE}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow H\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right)$

$SH=\sqrt{SE^2-HE^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$

Lại có: $\frac{FE}{SE}=\frac{HE}{AE}=\frac{1}{3}\Rightarrow FH//SA$ và AF cắt SH tại G nên $\frac{GH}{GS}=\frac{GF}{GE}=\frac{FH}{SA}=\frac{HE}{AE}=\frac{1}{3}$

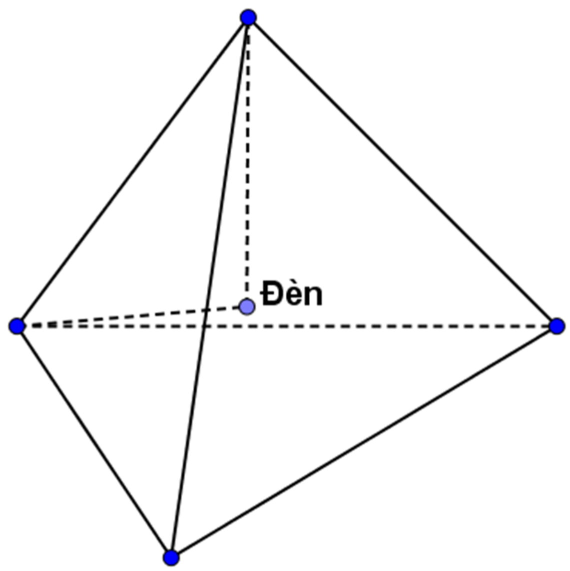
$\Rightarrow GH=\frac{1}{4}SH=\frac{1}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{12}\Rightarrow G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$

Do đó: $\overrightarrow{GA}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;-\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)\Rightarrow GA=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

$\overrightarrow{GS}=\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)\Rightarrow GS=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

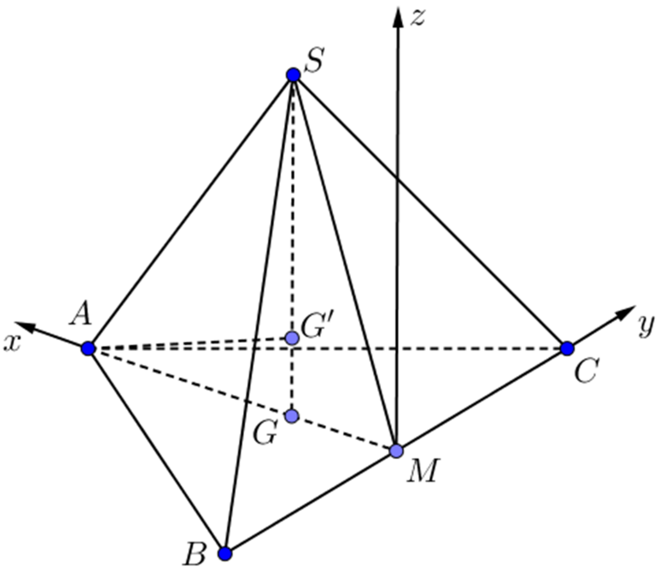
Ta có: $\cos(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GS})=\frac{-\frac{a\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{4}}=-\frac{1}{3}\Rightarrow(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GS})\approx 109,5^\circ$

Câu 53. **(VD)** Một đồ chơi có dạng hình tứ diện đều làm bằng thủy tinh có cạnh bằng $10cm$. Bên trong đặt một đèn nhỏ. Đèn đặt trên đường nối từ đỉnh của tứ diện xuống tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và cách đỉnh một khoảng là $\frac{5\sqrt{6}}{2}cm$. Đèn được nối bởi hai dây qua hai đỉnh của tứ diện như hình vẽ. Cường độ lực tổng hợp của hai dây tác dụng lên đèn là bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: $\left|\overrightarrow{F}\right|=5\sqrt{2}$.



Gọi tứ diện là $S.ABC$ và M,G,G' lần lượt là trung điểm của BC, trọng tâm của ΔABC và vị trí đặt đèn.

$S.ABC$ là tứ diện đều $\Rightarrow \Delta ABC$ đều nên G là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

$\Rightarrow S,G',G$ thẳng hàng và $SG'=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $M(0;0;0)$

Có: $AM=5\sqrt{3}$, $MG=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$,

$AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$, $SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó: $S\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3};0;\dfrac{10\sqrt{6}}{3}\right)$, $A\left(5\sqrt{3};0;0\right)$, $B(0;-5;0)$, $C(0;5;0)$

G là trọng tâm của ΔABC $\Rightarrow G\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3};0;0\right)$

$\Rightarrow SG'=\dfrac{3}{4}SG \Rightarrow \overrightarrow{SG'}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{SG}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{G'}-x_S=\dfrac{3}{4}(x_G-x_S) \\ y_{G'}-y_S=\dfrac{3}{4}(y_G-y_S) \\ z_{G'}-z_S=\dfrac{3}{4}(z_G-z_S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{G'}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3} \\ y_{G'}=0 \\ x_{G'}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6} \end{cases} \Rightarrow G'\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3};0;\dfrac{5\sqrt{6}}{6}\right).$$

$\Rightarrow G'A=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

$\cos\left(\overrightarrow{AG'},\overrightarrow{SG'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{SG'}.\overrightarrow{AG'}}{\left|\overrightarrow{SG'}\right|.\left|\overrightarrow{AG'}\right|}=-\dfrac{1}{3}$.

Gọi $\vec{F},\vec{F_1},\vec{F_2}$ lần lượt là lực tổng hợp và lực của hai dây tác dụng lên đèn

Có $\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}=\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{SG'}$

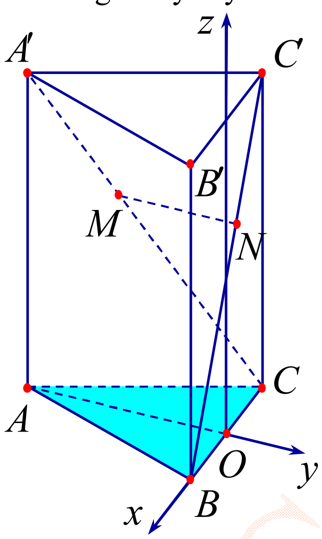
$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{SG'}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F}\right|=\sqrt{SG'^2+AG'^2+2\overrightarrow{AG'}.\overrightarrow{SG'}}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F}\right|=\sqrt{SG'^2+AG'^2+2AG'.SG'.\cos\left(\overrightarrow{AG'},\overrightarrow{SG'}\right)}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F}\right|=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2+2.\frac{5\sqrt{6}}{2}.\frac{5\sqrt{6}}{2}.\left(-\frac{1}{3}\right)}=5\sqrt{2}.$$

Câu 54. **(VD)** Một kiến trúc sư muốn xây dựng 1 tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 300 mét (tham khảo hình vẽ). Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu MN bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C$, điểm cuối thuộc cạnh BC') và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 5 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất (Gợi ý: đoạn thẳng nối hai đường ngắn nhất chính là đường vuông góc chung). Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tiền?



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (O là trung điểm của BC). Ta có: $A'\left(0;-150\sqrt{3};300\right)$, $B(150;0;0)$, $C(-150;0;0)$, $C'(-150;0;300)$, $\overrightarrow{CA'}=\left(150;-150\sqrt{3};300\right)$, $\overrightarrow{BC'}=(-300;0;300)$

Gọi m,n thỏa mãn $\begin{cases}\overrightarrow{CM}=m\overrightarrow{CA'}\\ \overrightarrow{BN}=n\overrightarrow{BC'}\end{cases}$ ta có $M\left(-150+150m;-150\sqrt{3}m;300m\right)$, $N(150-300n;0;300n)$

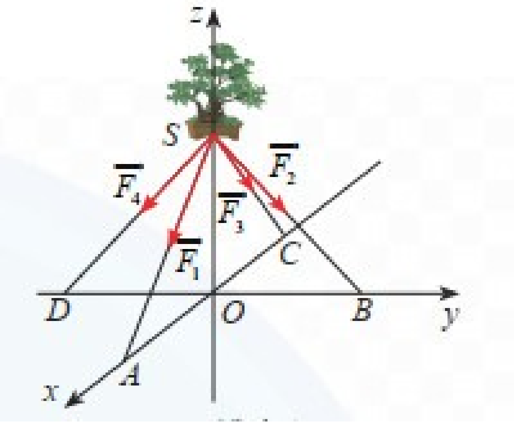
$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(-150m-300n+300;150\sqrt{3}m;300n-300m\right)$.

Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên:

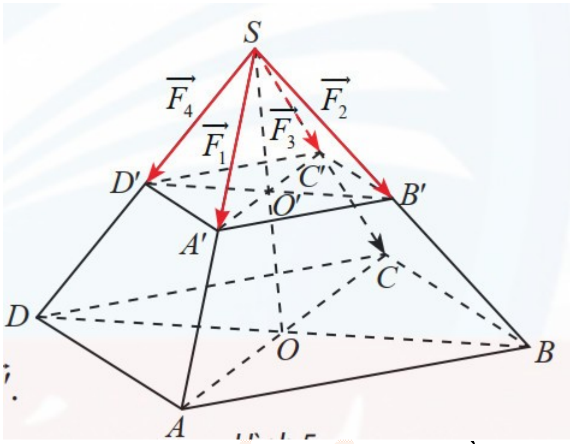
$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CA'}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4m+n=-1\\ -m+4n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{2}{5}\\ n=\dfrac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(60;60\sqrt{3};60\right)\Rightarrow MN=60\sqrt{5}$$

Số tiền xây cầu là: $T=60\sqrt{5}.5\approx 671$ tỷ đồng.

Câu 55. **(VD)** Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;30)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(30;0;0), B(0;20;0), C(-20;0;0), D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn $60N$ và được phân bố thành bốn lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như hình vẽ. Tính $\left|\overrightarrow{F_1}+2\overrightarrow{F_2}+3\overrightarrow{F_3}+4\overrightarrow{F_4}\right|$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải



Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=(30;0;-30), \overrightarrow{SB}=(0;20;-20), \overrightarrow{SC}=(-20;0;-20), \overrightarrow{SD}=(0;-20;-20)$

$\Rightarrow SA = SB = SC = SD = 30\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các vecto $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D'.

Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi $\overrightarrow{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có:

$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{SA'}+\overrightarrow{SB'}+\overrightarrow{SC'}+\overrightarrow{SD'}=4\overrightarrow{SO'}$

Ta có: $\left|\overrightarrow{F}\right|=60 \Rightarrow \left|\overrightarrow{SO'}\right|=SO=15$.

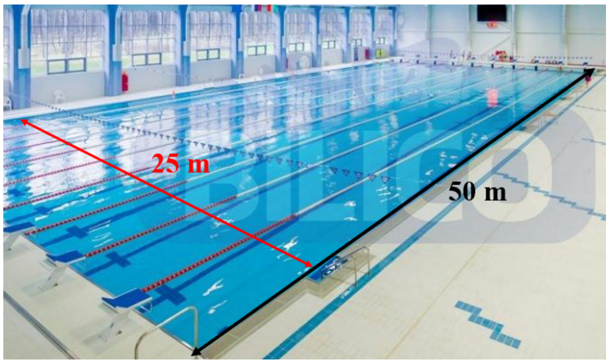
Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA'=SO'\sqrt{2}=15\sqrt{2}=\frac{1}{2}SA \Rightarrow \overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}=(15;0;-15)$

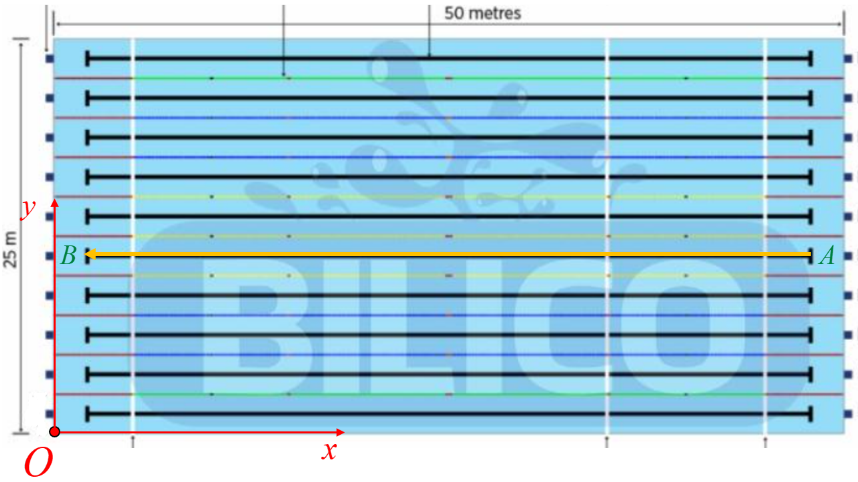
Chứng minh tương tự ta cũng có:

$\overrightarrow{F_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}=(0;15;-15), \overrightarrow{F_3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=(-15;0;-15), \overrightarrow{F_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}=(0;-15;-15)$

Suy ra: $\overrightarrow{F_1}+2\overrightarrow{F_2}+3\overrightarrow{F_3}+4\overrightarrow{F_4}=(-30;-30;-150) \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_1}+2\overrightarrow{F_2}+3\overrightarrow{F_3}+4\overrightarrow{F_4}\right|=90\sqrt{3}\approx 156$.

Câu 56. **(VD)** Hình bên dưới mô tả một hồ bơi theo tiêu chuẩn với kích thước như hình vẽ và biết chiều sâu của hồ bơi là 2 m. Biết hồ bơi này có 10 làn bơi với độ rộng như nhau và mỗi làn bơi được ngăn cách bằng phao ngăn phân làn nổi trên mặt nước. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình bên dưới sao cho gốc tọa độ O nằm ở dưới đáy của hồ và chiều của vectơ $\vec{k}$ hướng dọc thẳng đứng lên từ đáy bể lên miệng bể. Gọi AB là là phao ngăn phân làn như hình vẽ và có độ dài là 40 m. Biết hai điểm A và B cách đều hai bên thành hồ ứng với chiều rộng của hồ. Hãy xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.





Lời giải

Đáp số: $\overrightarrow{AB} = (0; -40; 0)$.

Gọi tọa độ điểm A và B lần lượt là $(x_A; y_A; z_A)$ và $(x_B; y_B; z_B)$. Do hồ bơi này có chiều rộng là 25 m và có 10 làn bơi với độ rộng như nhau nên độ rộng mỗi làn bơi là: $25:10 = 2,5$ m.

Do phao ngăn phân làn AB nằm giữa làn thứ 5 trong hình tính từ dưới lên trên.

Suy ra: AB cách thành hồ là giá của vectơ $\vec{i}$ ứng với trục Ox là $2,5.4 + 2,5:2 = 11,25$ m.

Do AB song song với giá của vectơ Ox nên: $y_A = y_B = 11,25$.

Ta lại có hai điểm A và B đều cách đều hai bên thành hồ ứng với chiều rộng của hồ và $AB = 40$ m .

Suy ra: điểm B cách thành hồ là giá của vectơ $\vec{j}$ ứng với trục Oy là: $(50-40):2 = 5$ m.

Suy ra: $x_B = 5$ và $x_A = 45$.

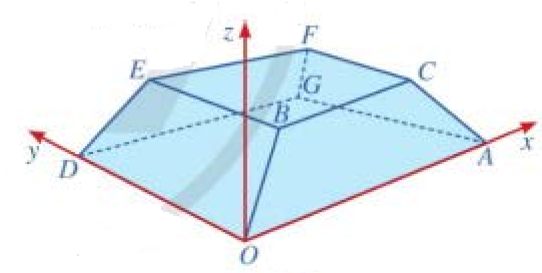
Do phao ngăn phân làn nổi trên mặt hồ và cách đáy hồ 2 m nên: $z_B = z_A = 2$.

Suy ra: $A(11,25;\ 45;\ 2)$ và $B(11,25;\ 5;\ 2)$.

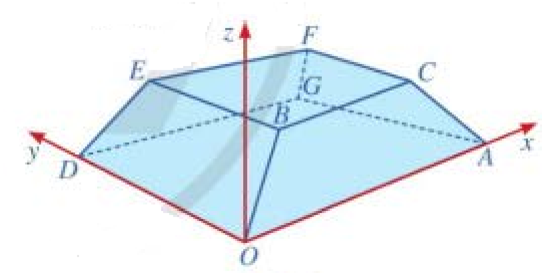
Vậy tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{AB} = (11,25 - 11,25;\ 5 - 45;\ 2 - 2) = (0; -40; 0)$.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Câu 57. **(VD)** Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100m$, chiều rộng $OD = 60m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$. Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$.



Lời giải



Ta có: $A(100;0;0); D(0;60;0 \Rightarrow G(100;60;0)) \overrightarrow{OD} = (0;60;0)$;

Điểm $B(10;10;8) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (10;10;8)$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right] = (480;0;-600) = 120(4;0;-5)$

Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4;0;-5)$ là:

$4x - 5z = 0$

Kkhoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là:

$$d(G,(OBED)) = \frac{|4.100 - 5.0|}{\sqrt{16+25}} = \frac{400\sqrt{41}}{41} \approx 62,5m$$