Dương Đình Tuấn

LOGARIT QUA NHIỀU GÓC NHÌN

LUYỆN ĐỀ ĐH 2020

Hà Nội 2020

Lời nói đầu

Lâu rồi thì mình mới bắt tay vào viết một cái gì đó, cũng có dự định viết về logarit lâu lắm rồi nhưng mãi đến bây giờ mới có cơ hội để thử viết về nó. Hồi còn hoạt động mạnh trong nhóm Luyện đề ĐH 2019 (nay là luyện đề ĐH 2020) thì hầu như gặp bài logarit khó nào mình đều quyết tâm giải ra bằng được và không chỉ dừng lại ở việc giải ra mình còn cố tìm ra nhiều hướng giải nhất có thể. Và đến hôm nay, trong lúc nghỉ dịch mình quyết định sẽ viết một chút về logarit tặng các bạn 2k2 trong mua thi khó khăn này. Hy vọng nó sẽ giúp ích được cho các bạn. Có một điều trong cuốn tài liệu này đó là nó không phải là tổng hợp những bài toán logarit hay nhất mà nó bao gồm những bài toàn logarit mang đến những tư duy hay nhất. Vì vậy hãy đọc nó một cách khéo léo.

Lưu ý mình điều là mình không phải giáo viên nên mọi lời giản trong này ít nhiều có đôi chỗ không đúng với thuần tự luận hay những lí thuyết sgk vì vậy các bạn chỉ nên đọc tham khảo là chính.

Câu 1: Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng

A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{9}{8}$ **D.** 9

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

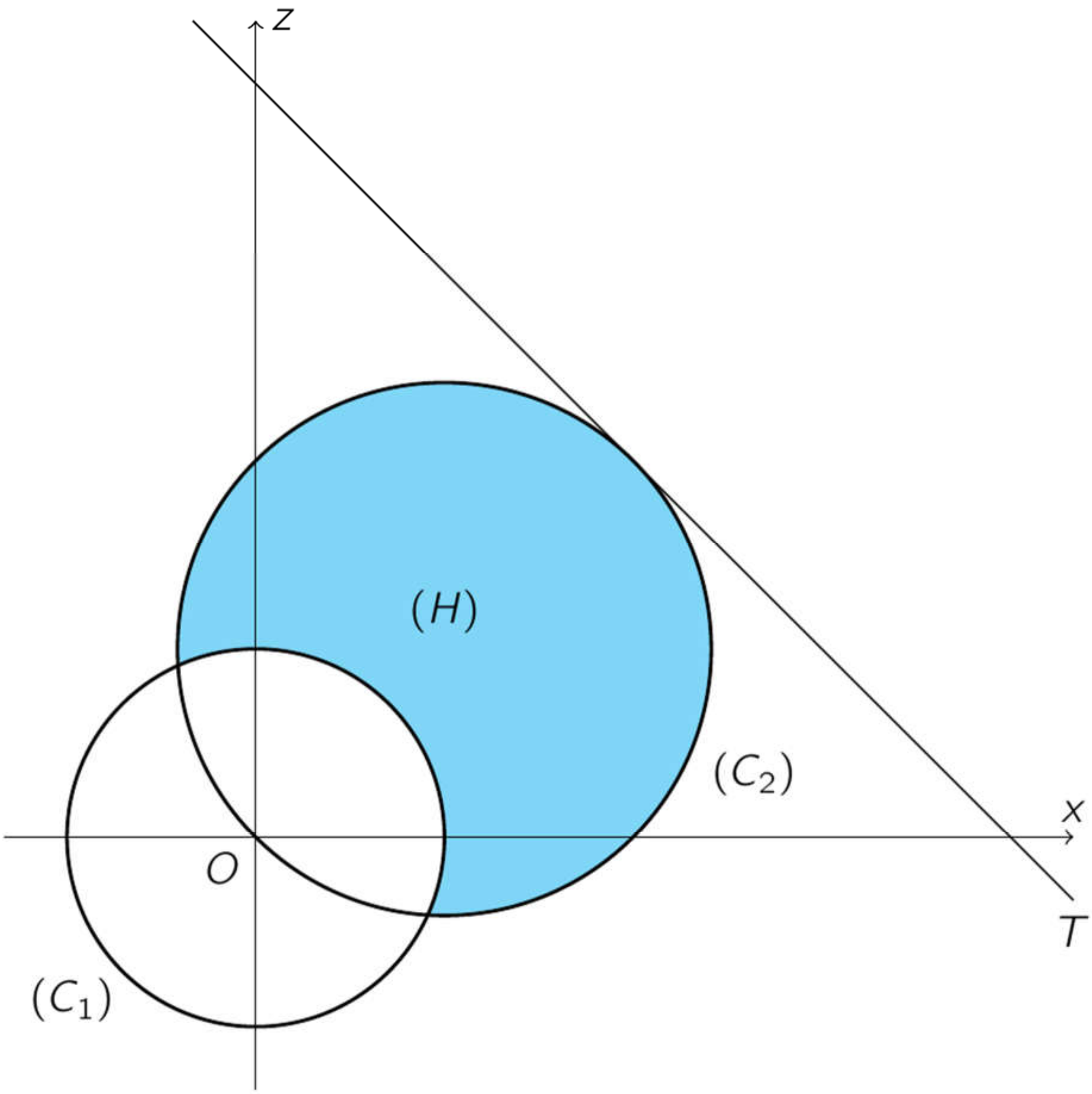
TH1: $x^2+2y^2>1$ Đặt $\sqrt{2}y=z\Rightarrow x^2+z^2>1(1)$

$\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1\Leftrightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2\Leftrightarrow 2x+\frac{z}{\sqrt{2}}\ge x^2=z^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\le\frac{9}{8}(2)$

Tập hợp các điểm $M(x;z)$ là miền (H) bao gồm miền ngoài của hình tròn $(C_1):x^2+z^2=1$ và miền trong của hình tròn $(C_2):(x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{8}$

Hệ $\begin{cases}T=2x+\frac{z}{2}\\(x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\le\frac{9}{8}\\x^2+z^2=1\end{cases}$ có nghiệm khi đường thẳng $d:2x+\frac{z}{\sqrt{2}}-T=0$ có điểm chung với miền (H)



Để T đạt Max thì $d: 2x+\frac{z}{\sqrt{2}}-T=0$ tiếp xúc với đường tròn (C_2)

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2+\frac{1}{4}-T\right|}{\sqrt{4+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|T-\frac{9}{4}\right|=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T=0(L) \\ T=\frac{9}{2} \end{array}\right.$$

TH2: $0<x^2+2y^2<1$

$\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow 2x+y\le x^2+2y^2 \Leftrightarrow T=2x+y<1(L)$

Vậy GTLN của $T=2x+y$ là $\frac{9}{2}$

Góc nhìn 2.

TH1: $x^2+2y^2<1\Rightarrow T\le x^2+2y^2<1$

TH2: $x^2+2y^2>1\Rightarrow T\ge x^2+2y^2$

$$\left(1+\frac{1}{8}\right)T\ge\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(x^2+2y^2\right)\ge^{BCS}\left(x+\frac{y}{2}\right)^2=\frac{T^2}{4}\Rightarrow T\le\frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=4y\\2x+y=\frac{9}{2}\end{cases}$

Góc nhìn 3.

BPT $\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2y^2>1\\2x+y\ge x^2+2y^2\end{cases}(I), \begin{cases}0<x^2+2y^2<1\\0<2x+y\le x^2+2y^2\end{cases}(II)$

Xét $T=2x+y$

TH1: $(x;y)$ thỏa mãn (II) khi đó $0<T=2x+y\le x^2+2y^2<1$

TH2: $(x;y)$ thỏa mãn (I) $x^2+2y^2\le 2x+y\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\le\frac{9}{8}$ khi đó

$$2x+y=2(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{9}{4}\le\sqrt{\left(2^2+\frac{1}{2}\right)\left[(x-1)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right]}+\frac{9}{4}\le\sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

Suy ra $\max T=\frac{9}{2}\Leftrightarrow (x;y)=\left(2;\frac{1}{2}\right)$

Góc nhìn 4.

TH1: $x^2+2y^2>1$

BPT $\Rightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2>1$

$\Leftrightarrow T\ge x^2+(T-2x)^2.2$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 8Tx + 2T^2 - T \le 0\,(1)$

BPT (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 16T^2 - 18T^2 + 9T \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2T^2 + 9T \ge 0 \\ T > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 < T \le \dfrac{9}{2}$

$\Rightarrow MaxT = \dfrac{9}{2}$ khi $(x;y) = \left(2;\dfrac{1}{2}\right)$

TH2: $0 < x^2 + 2y^2 < 1 \Rightarrow 0 < 2x + y \le x^2 + 2y^2 < 1$

Vậy $MaxT = \dfrac{9}{2}$

Góc nhìn 5.

TH1: $0 < x^2 + 2y^2 < 1 \Rightarrow 0 < 2x + y \le x^2 + 2y^2 < 1$

TH2: $x^2 + 2y^2 > 1 \Rightarrow 2x + y \ge x^2 + 2y^2$

Ta có $(2x+y)\left(2^2 + \dfrac{1}{2}\right) \ge \left[x^2 + \left(\sqrt{2}y\right)^2\right]\left[2^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \ge (2x+y)^2$

Suy ra $(2x+y)\left(2x + y - \dfrac{9}{2}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow 2x + y \le \dfrac{9}{2}$

Góc nhìn 6.

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (I)\begin{cases} 0 < x^2 + 2y^2 < 1 \\ 2x + y \le x^2 + 2y^2 \\ 2x + y > 0 \end{cases} \\ (II)\begin{cases} x^2 + 2y^2 > 1 \\ 2x + y \ge x^2 + 2y^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(I) \Rightarrow 0 < 2x + y < 1$

$$(II) \Rightarrow \begin{cases} 2x+y>0 \\ 2x+y \geq 1.x^2+2.y^2 \geq \dfrac{(2x+y)^2}{\dfrac{2^2}{1}+\dfrac{1^2}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x+y \leq \frac{9}{2}$$

Nhận xét: Đây là một bài mức VDC đòi hỏi tư duy khá nhiều, 6 cách trên đều dựa vào nhưng góc nhìn rất tinh tế mới có thể giải quyết được bài toán này.

Câu 2: Cho $a,b>0$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\log_5\sqrt{a^2+b^2}+\log_5\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $\dfrac{5}{2}$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Ta có $(2a+b)^2+(a-2b)^2 \geq (2a+b)^2$

$$\Rightarrow 5(a^2+b^2) \geq (2a+b)^2 \Rightarrow \log_5\sqrt{a^2+b^2} \geq \log_5(2a+b)-\frac{1}{2}$$

Ta lại có $\log_5\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\log_5\left(\dfrac{16}{2a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq \log_5\dfrac{25}{2a+b}=2-\log_5(2a+b)$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2b$

Góc nhìn 2:

$$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 5^2 \Rightarrow \frac{8}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{25}{2a+b}(1)$$

$$(4+1)(a^2+b^2) \geq (2a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{2a+b}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b$

Câu 3. Cho các số thực $a,b,c \neq 0$ thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c)$ bằng.

A. $-3-\log_5 3$ **B.** $-2-\log_5 3$ **C.** $-2-\sqrt{3}$ **D.** -4

Lời giải:

Chọn D

Góc nhìn 1.

$3^a = 5^b = 15^{-c} = T > 0$ và $T \neq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = T^{1/a} \\ 5 = T^{1/b} \\ 15 = T^{-1/c} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{-1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow bc + ac + ab = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2$$

$$P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c) = (a+b+c)^2 - 4(a+b+c) \geq -4$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -4

Góc nhìn 2.

Đặt $t = 3^a = 5^b = 15^{-c} \Rightarrow \begin{cases} a = \log_3 t \\ b = \log_5 t \quad (t > 0) \\ c = -\log_{15} t \end{cases}$

$$P = \log_3^2 t + \log_5^2 t + \log_{15}^2 t - 4(\log_3 t + \log_5 t - \log_{15} t)$$

$$= \log_3^2 t\left(1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3\right) - 4\log_3 t\left(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3\right)$$

$$= X^2\left(1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3\right) - 4X\left(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3\right)$$

$$P_{\min} = P\left(\frac{2(1 + \log_5 3 - \log_{15} 3)}{1 + \log_5^2 3 + \log_{15}^2 3}\right) = -4$$

Câu 4. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $5\log_2^2 a + 16\log_2^2 b + 27\log_2^2 c = 1$. Giá trị lớn nhất của $S = \sum \log_2 a.\log_2 b$ bằng.

A. $\frac{1}{16}$ **B.** $\frac{1}{12}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Đặt $x=\log_2 a; y=\log_2 b; z=\log_2 c$ ta có $5x^2+6y^2+27z^2=1$; $S=xy+yz+zx$

Ta tìm số k sao cho: $5x^2+16y^2+27z^2\ge 2k\left(xy+yz+zx\right)$

$\Leftrightarrow 5x^2+16y^2+7z^2+k\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge k\left(x^2+y^2+z^2\right)+2k\left(xy+yz+zx\right)$

$\Leftrightarrow \left(5+k\right)x^2+\left(16+k\right)y^2+\left(27+k\right)z^2\ge k\left(x+y+z\right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{k+5}}+\frac{y^2}{\frac{1}{16+k}}+\frac{z^2}{\frac{1}{k+27}}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\frac{1}{k}}$$

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz ta có:

$$\frac{1}{k+5}+\frac{1}{16+k}+\frac{1}{k+27}=\frac{1}{k}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{k+5}+\frac{1}{16+k}+\frac{1}{k+27}\right).k=1\Rightarrow k=6$$

Vậy $12\left(xy+yz+zx\right)\le 5x^2+16y^2+27z^2$

$$S\le\frac{1}{12}$$

Góc nhìn 2.

$5x^2+16y^2+27z^2\ge k\left(xy+yz+zx\right)$ $(1);(k>0)$

$\Leftrightarrow 5x^2-k\left(y+z\right)x+16y^2+27z^2-kyz\ge 0$

$\Leftrightarrow \Delta=k^2\left(y+z^2\right)-4.5.\left(16y^2+27z^2-kyz\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \left(k^2-320\right)y^2+2yz\left(k^2+10k\right)+\left(k^2-540\right)z^2\ge 0$ (*)

Cho $x=\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{5}};y=\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{4};z=\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow(1)\Leftrightarrow k\le 12{,}19\Rightarrow 320-k^2>0$

$$(*)\Leftrightarrow\left(320-k\right)^2.\left(\frac{y}{z}\right)^2-2.\frac{y}{z}.\left(k^2+10k\right)+\left(540-k^2\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow \Delta' = \left(k^2 + 10k\right)^2 - \left(320 - k^2\right)\left(100 - k^2\right) \le 0$

$\Rightarrow P \le \dfrac{1}{12}$

Nhận xét: Đây là một bài mức VDC khó cần vận dụng nhiều kiến thức về BĐT mà bạn có. Nó đơn thuần là một bài BĐT thôi nhưng được lòng vào loga cho thêm độ hấp dẫn. Góc nhìn 1 ta có thể thấy cách thêm bớt $k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ một cách tinh tế để đưa về dạng Cauchy Schwarz. Ở góc nhìn 2 thì đây còn gọi cách chày cối nó cũng là một cách để làm BĐT cũng có những cách nhìn để chọn x, z, y sao cho hợp lí nhất. Nói tóm lại câu này là một câu đòi hỏi bạn có kĩ năng xử lí BĐT tốt thì sẽ làm được.

Câu 5. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$. Tìm GTNN P của biểu thức $P = |x| - |y|$

A. $\min P = 4 - \sqrt{3}$ **B.** $\min P = 2\sqrt{3}$ **C.** $\min P = \sqrt{3}$ **D.** $\min P = 1 + \sqrt{3}$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Vì $x^2 - 4y^2 = 4$ nên $P = \sqrt{4(t^2+1)} - t$, trong đó $t = |y| \ge 0$.

Khi đó dùng BĐT Bunhiacopski ta được

$P \ge \left(t + \sqrt{3}\right) - t = \sqrt{3}.$

Dấu bằng xảy ra khi $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, x = \sqrt{4y^2 + 4}.$

Góc nhìn 2.

Điều kiện $\begin{cases} x + 2y > 0 \\ x - 2y > 0 \end{cases}$

Do giả thiết và biểu thức P vai trò của y và $-y$ là như nhau nên ta có thể giả sử $y \ge 0$

Ta có: $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{4 + 4y^2}$

Suy ra : $P = \sqrt{4 + 4y^2} - y$

Khảo sát hàm $P=\sqrt{4+4y^2}-y$ hoặc dùng TABLE với STAR: -10, END: 10; STEP: 1 ta được $\min P=\sqrt{3}$

Chú ý : $P'=\dfrac{4y}{\sqrt{4+4y^2}}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{4+4y^2}=4y\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow P=\sqrt{3}$

Góc nhìn 3.

$x^2-4y^2=4$; $|y|=|x|-P$

$\Rightarrow x^2-4\left(|x|-P\right)^2=1\Rightarrow x^2-4|x|^2+8P|x|-4P^2-4=0$

Yêu cầu có nghiệm dương $\Leftrightarrow 3|x|^2-8P|x|+4P^2+4=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P>0\\ 16P^2-3\left(4P^2+4\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P>0\\ 4P^2+12\ge 0\end{cases}\Rightarrow P^2\ge 3$$

$\min P=\sqrt{3}$

Câu 6. Cho a,b thỏa mãn $a>b>1$. Khi đó phương trình $(a-b)^x+(a+b)^x=2^x.a^x$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Nhiều hơn 2

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Vì câu này dưới dạng trắc nghiệm nên làm cách như thế này sẽ ổn nhất

Chọn $a=4;b=2$ ta viết lại phương trình $2^x+6^x=2^x.4^x$. Giải phương trình này thì biết được nó có duy nhất 1 nghiệm.

Góc nhìn 2.

Chia 2 vế cho $2^x.a^x$ được phương trình $t^x+(1-t)^x=1$ với $0<t<1/2$ VT nghịch biến suy ra có nghiệm duy nhất $x=1$

Câu 7. Cho $a\in\mathbb{R}$ sao cho phương trình $e^x-e^{-x}=2\cos(ax)$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $e^x+e^{-x}=2\cos(ax)+4$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 5 **B.** 6 **C.** 10 **D.** 11

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Đặt $f(x)=e^x-e^{-x},g(x)=2\cos(ax)$

PT $e^x+e^{-x}=2\cos(ax)+4\Leftrightarrow\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2=\left[g\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\frac{x}{2}\right)=g\left(\frac{x}{2}\right)\\ f\left(\frac{x}{2}\right)=-g\left(\frac{x}{2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\frac{x}{2}\right)=g\left(\frac{x}{2}\right)\\ f\left(-\frac{x}{2}\right)=g\left(-\frac{x}{2}\right)\end{array}\right.$$

Lưu ý: PT $f(t)=g(t)$ có 3 nghiệm phân biệt và không có nghiệm đối nhau (tức là nếu a là nghiệm của PT thì $-a$ không là nghiệm của PT). Do đó PT $f\left(\frac{x}{2}\right)=g\left(\frac{x}{2}\right)$ có 3 nghiệm phân biệt; và hai PT không có nghiệm chung. Do đó PT đang xét có 6 nghiệm phân biệt.

Góc nhìn 2.

$$e^x+e^{-x}=\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2+2=2\cos(ax)+4$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2=2\cos(ax)+2=4\cos^2\left(a.\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}=2\cos\left(a\frac{x}{2}\right)\ (1)\\ e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}=-2\cos\left(a\frac{x}{2}\right)\ (2)\end{array}\right.$$

Tới đây biện luận giống góc nhìn 1.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \le 2017 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0 \end{cases}$$

A. $m \ge -3$ **B.** $m > -3$ **C.** $m \ge -2$ **D.** $m \le -2$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Ở BPT thứ nhất xét hàm đồng biến $f(u) = 3^u + \dfrac{2017}{2}u$, ta có $-1 \le x \le 1$.

Tìm m để BPT thứ 2 có nghiệm trong $[-1;1]$. Điều đó tương đương BPT $m \ge \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ có nghiệm

$$m \ge \min_{x\in[-1,1]} \frac{x^2-2x+3}{x-2} = -2.$$

Góc nhìn 2.

Nếu $x \ge 1$ thì BPT ở trên sai

Nếu $-1 \le x \le 1$. thì BPT ở trên đúng nên tập nghiệm của BPT trên là $[-1;1]$. Bài toán quy về tìm m để BPT dưới có nghiệm thuộc $[-1;1]$. Làm tiếp như góc nhìn 1.

Câu 9. Tìm các số nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2} - \sqrt{3}\right)\left(3^x - 2m\right) < 0$ chứa không quá chính 9 số nguyên

A. 3281 **B.** 3283 **C.** 3280 **D.** 3279

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Đặt $t = 3^x > 0$ và m nguyên dương nên bất phương trình đã cho trở thành

$$\left(9t-\sqrt{3}\right)(t-2m) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{9} < t < 2m \Leftrightarrow \log_3\frac{\sqrt{3}}{9} < x < \log_3 2m \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \log_3 2m$$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\frac{3}{2};\log_3 2m\right)$. Do đó để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa không quá 9 số nguyên thì $\log_3 2m \le 8 \Leftrightarrow 2m \le 3^8 \Leftrightarrow m \le 6561/2$

Vậy có 3280 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Góc nhìn 2.

Do m nguyên dương nên $\log_3 2m \ge 0$

$$\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{x+2}-\sqrt{3}>0\\3^x-2m<0\end{cases}\\\begin{cases}3^{x+2}-\sqrt{3}<0\\3^x-2m>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-\frac{3}{2}\\x<\log_3 2m\end{cases}\\\begin{cases}x<-\frac{3}{2}\\x>\log_3 2m\end{cases}\end{array}\right. \quad \left(\text{do}\log_3 2m \ge 0\right)$$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của BPT là $S=\left(-\frac{3}{2};\log_3 2m\right)$

Do đó để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa không quá 9 số nguyên thì
$\log_3 2m \le 8 \Leftrightarrow 2m \le 3^8 \Leftrightarrow m \le 6561/2$

Vậy có 3280 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Câu 10. [HSG Tiên Du Bắc Ninh 2019-2020]. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+e^x-e^{-x}$.

Hỏi phương trình $f\left(3^x\right)+f\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực ?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$$f(-x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+e^{-x}-e^x=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+e^{-x}-e^x$$

$$=-\left[\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+e^x-e^{-x}\right]=-f(x)$$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ là hàm số lẻ

Đồng thời $f'\left(x\right)>0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $f\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=f\left[-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=-f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Vì vậy $f\left(3^x\right)+f\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=0\Leftrightarrow f\left(3^x\right)-f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=0\Leftrightarrow f\left(3^x\right)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$\Leftrightarrow 3^x=x+\sqrt{x^2+1}$ (do $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$)

Ta có $3^{-x}=\sqrt{x^2+1}-x$ do đó $3^x-3^{-x}=2x$.

Hàm $g\left(x\right)=3^x-3^{(-x)}-2x\ db;g\left(0\right)=0$

$\Rightarrow x=0$ là nghiệm duy nhất

Góc nhìn 2.

Ở góc nhìn 2 này thì mình chỉ cách làm trắc nghiệm thôi chứ nó cũng giống như cách làm 1. Nhiều bạn sẽ không biết cách chứng minh hàm lẻ, vì thế bằng phương pháp trắc nghiệm ta có thể chứng minh hàm này lẻ bằng cách TABLE hoặc bạn nào muốn nhanh thì thử 2 3 giá trị thì ra hàm lẻ thôi. À mà khi gặp những bài dạng thứ nhất là có $\sqrt{x^2+1}+x$ thứ 2 là có $e^{-x}+e^x$, thứ 3 là trong yêu cầu có hàm + hàm thì không nghĩ ra được cách làm nào thì chứng minh hàm lẻ ngay và luôn nhé.

Câu 11. Cho hai số thực a,b thỏa mãn $\log_{\sqrt[4]{3}}\left(a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\right)=2$. Giá trị của $a^4+b+\frac{1}{2a}$ bằng

A. 1 **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** 2 **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Giả thiết suy ra $a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}=\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2-2a.\frac{\sqrt{3}}{2a}+\frac{3}{4a^2}+b^2+\frac{b}{a}+\frac{1}{4a^2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ b+\dfrac{1}{2a}=0\end{cases}\Rightarrow a^4+b+\frac{1}{2a}=\frac{3}{4}$$

Góc nhìn 2.

Giả thiết suy ra $a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}=\sqrt{3}\Leftrightarrow b^2+\frac{b}{a}+a^2+\frac{1}{a^2}-\sqrt{3}=0$

Coi phương trình trên là phương trình bậc 2 ẩn b ta có

$$\Delta=\left(\frac{1}{a}\right)^2-4\left(\frac{1}{a^2}-\sqrt{3}\right)\le 0\ \Rightarrow a^2=\frac{2}{\sqrt{3}};b=\frac{-1}{2a}$$

$$\Rightarrow a^4+b+\frac{1}{2a}=\frac{3}{4}$$

Câu 12. [Đề thi HSG tỉnh Quảng Bình 2019-2020]. Cho các số thực $a_1>a_2>\ldots>a_n>1,(n\ge 2)$. Chứng minh rằng
$\log_{a_1}\left(\log_{a_1}a_2\right)+\log_{a_2}\left(\log_{a_2}a_3\right)+\ldots+\log_{a_{n-1}}\left(\log_{a_{n-1}}a_n\right)+\log_{a_n}\left(\log_{a_n}a_1\right)>0$

Lời giải.

Áp dụng $\log_a\left(\log_a b\right)>\log_b\left(\log_a b\right)$ ta có

$$\log_{a_1}\left(\log_{a_1}a_2\right)+\log_{a_2}\left(\log_{a_2}a_3\right)>\log_{a_2}\left(\log_{a_1}a_2\right)+\log_{a_2}\left(\log_{a_2}a_3\right)$$
$$\Leftrightarrow\log_{a_1}\left(\log_{a_1}a_2\right)+\log_{a_2}\left(\log_{a_2}a_3\right)>\log_{a_2}\left(\log_{a_1}a_2.\log_{a_2}a_3\right)=\log_{a_2}\left(\log_{a_1}a_3\right)$$

Lặp lại lần nữa

$$\log_{a_2}\left(\log_{a_1}a_3\right)+\log_{a_3}\left(\log_{a_3}a_4\right)>\log_{a_3}\left(\log_{a_1}a_3\right)+\log_{a_3}\left(\log_{a_1}a_4\right)$$
$$\Leftrightarrow\log_{a_2}\left(\log_{a_1}a_3\right)+\log_{a_3}\left(\log_{a_3}a_4\right)>\log_{a_3}\left(\log_{a_1}a_3\cdot\log_{a_3}a_4\right)=\log_{a_3}\left(\log_{a_1}a_4\right)$$

Cứ tiếp tục lặp lại như thế ta lần lượt thay được cơ số ngoài cùng của logarit và số lấy logarit trong cùng (chú ý mỗi lần thay thì cơ số a_1 không đổi), ký hiệu vế trái là P , cuối cùng ta có

$$P>\log_{a_n}\left(\log_{a_1}a_n\right)+\log_{a_n}\left(\log_{a_n}a_1\right)=\log_{a_n}\left(\log_{a_1}a_n\cdot\log_{a_n}a_1\right)=\log_{a_n}\left(\log_{a_1}a_1\right)=0(dpcm)$$

****Chỉ là tạt qua một bài HSG cho biết bất phương trình logarit nó như thế nào thôi :))***

Câu 13. Cho phương trình $2^x+\sqrt{\dfrac{9-m\cdot 4^x}{m}}+\sqrt{m\cdot 4^x\left(9-m\cdot 4^x\right)}=9$, với m là tham số thực. Biết $m=m_0$ là giá trị để phương trình trên có đúng một nghiệm thực x_0. Đặt $T=m_0+x_0$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $T\in\left[2;3\right)$ **B.** $T\in\left(0;1\right]$ **C.** $T\in\left(1;2\right)$ **D.** $T\geq 3$

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

Đặt $\begin{cases} a^2=m.4^x \\ b^2=-m.4^x \end{cases}\left(m>0\right)\Rightarrow a^2+b^2=9\left(1\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2^x=\dfrac{a}{\sqrt{m}} \\ \sqrt{\dfrac{9-m.4^x}{m}}=\dfrac{b}{\sqrt{m}} \end{cases}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{\sqrt{m}}+ab=9\left(2\right)$$

$$\left(1\right)\Rightarrow\left(a+b\right)^2-2ab=9\Rightarrow ab=\frac{\left(a+b\right)^2-9}{2}$$

$$(2)\Rightarrow\frac{a+b}{\sqrt{m}}+\frac{\left(a+b\right)^2-9}{2}=9$$

$$\Leftrightarrow(a+b)^2+\frac{2}{\sqrt{m}}\left(a+b\right)-27=0$$

Để phương trình có nghiệm duy nhất $\Rightarrow a=b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow m=\frac{8}{9}\Rightarrow x_0=\log_4\frac{81}{16}\Rightarrow T=m_0+x_0=2,05$$

Góc nhìn 2.

$$2^x+\sqrt{\frac{9-m\cdot 4^x}{m}}+\sqrt{m\cdot 4^x\left(9-m\cdot 4^x\right)}=9$$

ĐK: $m\left(9-m.4^x\right)>0\Rightarrow\begin{cases} m>0 \\ 9-m.4^x>0 \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow m.2^x+\sqrt{m\left(9-4^x.m\right)}+m.2^x.\sqrt{9-4^x.m}=9m$

Đặt $\begin{cases} a=m.2^x \\ b=\sqrt{m.\left(9-m.4^x\right)} \end{cases}(a,b>0)$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+b+ab=9m \\ a^2+b^2=9m \end{cases}(I)$$

PT có nghiệm duy nhất khi hệ (I) có nghiệm duy nhất

Xét (I): $\begin{cases} a+b+ab=9m \\ (a+b)^2-2ab=9m \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+b+ab=9m \\ (a+b)^2+2(a+b)-27m=0(*) \end{cases}$

Vì $a+b+ab=(a+b)^2-2ab\Rightarrow(a+b)^2-(a+b)=3ab$

Mặt khác $4ab\le(a+b)^2\Rightarrow 1<a+b\le 4$

$(*)$ có nghiệm duy nhất $a+b\in(1;4]\Leftrightarrow\frac{1}{9}<m\le\frac{8}{9}$

Khi $(*)$ có nghiệm duy nhất $a+b$ để (I) có nghiệm duy nhất $a+b$ thì $X^2-(a+b)X+ab=0$ phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow(a+b)^2=4ab$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+b+ab=9m \\ (a+b)^2-2ab=9m \\ (a+b)^2=4ab \end{cases}\Leftrightarrow\frac{81m^2}{4}=18m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0(loai) \\ m=\frac{8}{9} \end{array}\right.$$

Vậy $m_0=\frac{8}{9}\to m.2^{x_0}=\frac{9m}{4}\to x_0=\log_2\frac{9}{4}$

$$\Rightarrow m_0+x_0=\frac{8}{9}+\log_2\left(\frac{9}{4}\right)\in[2,3)$$

Câu 14. Cho phương trình $\sqrt{1-m+\log_2 x}+\sqrt{4m+2-\log_2 x}=m$, với m là tham số thực. Biết $m=m_0$ là giá trị để phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in[3;5]$ **B.** $m_0>0$ **C.** $m_0\in[6;9]$ **D.** $m_0\in(0;3)$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Từ PT $\Rightarrow m \geq 0$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{1-m+\log_2 x} \\ v = \sqrt{4m+2-\log_2 x} \end{cases} (u; v \geq 0)$

Ta có $\begin{cases} u+v=m & (1) \\ u^2 = v^2 = 3(m+1) & (2) \end{cases}$

PT có nghiệm tương đương với đường thẳng (1) tiếp xúc với đường tròn (2)

$$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{3(m+1)} \Leftrightarrow m^2 - 6m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3+\sqrt{15} \in [6;9] \\ m = 3-\sqrt{15}\,(loai) \end{array}\right.$$

Góc nhìn 2.

Đặt $t = \log_2 x$

PT theo t : $\sqrt{1-m+t} + \sqrt{4m+2-t} = m(1)$

ĐK: $\begin{cases} m \geq 0 \\ t \in [m-1; 4m+t] \end{cases}$

Xét $y = \sqrt{1-m+t} + \sqrt{4m+2-t}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-m+t}} - \frac{1}{\sqrt{4m+2-t}}, y' = 0 \Rightarrow \frac{5m+1}{2}$$

BBT

z	$m-1$		$\frac{5m+1}{12}$		$4m+2$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{3m+3}$	$\nearrow$	$\sqrt{6m+6}$	$\searrow$	$\sqrt{3m+3}$

PT có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow m=\sqrt{6m+6}\Leftrightarrow m=3+\sqrt{15}\in[6;9]$

Góc nhìn 3.

Ta có $\sqrt{1-m+t}+\sqrt{4m+2-t}\le\sqrt{2(3m+3)}$

Phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần $m=\sqrt{2(3m+3)}\Leftrightarrow m=3+\sqrt{15}$

Thử lại …

Câu 15. Phương trình $3^x+8^x=4^x+7^x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Gọi x_0 là một nghiệm của pt: $3^x+8^x=4^x+7^x$

Suy ra $3^{x_0}+8^{x_0}=4^{x_0}+7^{x_0}\Leftrightarrow 8^{x_0}-7^{x_0}=4^{x_0}-3^{x_0}\Leftrightarrow f(7)=f(3)$ với $f(t)=(t+1)^{x_0}-t^{x_0}$ là hàm số liên tục và có đạo hàm $f'(t)=x_0(t+1)^{x_0-1}-x_0t^{x_0-1}$ trên $[3;7]$ nên tồn tại một số $c\in[3;7]$ sao cho

$$f'(c)=\frac{f(7)-f(3)}{7-3}\Leftrightarrow f'(c)=0\Leftrightarrow x_0(c+1)^{x_0-1}-x_0c^{x_0-1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=1\end{array}\right.$$

Góc nhìn 2.

$8^x-7^x=4^x-3^x\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=(t+1)^x-t^x$ có $f'(t)=x(t+1)^{x-1}-xt^{x-1}$ với $t>0$

Ta có theo $(1): f(7)=f(3)$ và hàm số $f(t)$ liên tục có đạo hàm trên $[3;7]$ nên tồn tại $c\in[3;7]$ thảo mãn $f'(c)=0\Leftrightarrow x(c+1)^{x-1}-xc^{x-1}=0\Leftrightarrow\ldots$

Vậy $x=0;x=1$

Góc nhìn 3.

$3^x+8^x=4^x+7^x$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{8}{3}\right)^x-\left(\frac{7}{3}\right)^x-\left(\frac{4}{3}\right)^x+1=0$$

Đặt $\left(\frac{8}{3}\right)^x-\left(\frac{7}{3}\right)^x-\left(\frac{4}{3}\right)^x=f(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{8}{3}\right)^x\ln\frac{8}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^x\ln\frac{7}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^x\ln\frac{4}{3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln\frac{8}{3}-\left(\frac{7}{8}\right)^x\ln\frac{7}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^x.\ln\frac{4}{3}=0$$

Đặt $\ln\frac{8}{3}-\left(\frac{7}{8}\right)^x\ln\frac{7}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^x.\ln\frac{4}{3}=g(x)$

$$g'(x)=-\left(\frac{7}{8}\right)^x\ln\frac{7}{3}.\ln\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^x.\ln\frac{4}{3}.\ln\frac{1}{2}$$

Do $g'(x)>0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=0$ có không quá 1 nghiệm$\Rightarrow f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm

Thử trực tiếp $x=0;x=1$ là nghiệm …

Nhận xét: Thật ra thì cũng không tính đưa bài này vào tài liệu này đâu nhưng nó lại có nhiều cách tư duy khá hay nên đưa vào một thể vì bản chất đây là một bài tự luận cũ. Ở góc nhìn 1 mình sử dụng phương pháp Lagrang, góc nhìn 3 dùng đạo hàm thuần túy.

Câu 16. Cho số thực $1<a<e$. Số nghiệm của phương trình $a^x=x+\sqrt{1+x^2}$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

$$a^x=x+\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow x\ln a=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Xét hàm $f(x)=x\ln a-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow f'(x)=\ln a-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Ta có $0<\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le 1\Rightarrow f(x)$ đồng biến khi $a\ge e$ hoặc nghịch biến khi $0<a\le 1$

$f(0)=0\Rightarrow$ có nghiệm $x=0$

$1<a<e$ Thay $\ln a=\cos\alpha$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow x=\pm\tan\alpha$

Vậy khi $1<a<e$ thì phương trình có 3 nghiệm $x_1=0;x_2<-\tan\alpha;x_3>\tan\alpha \quad \alpha=\arccos(\ln a)$

Góc nhìn 2.

$x=0$ là nghiệm

$x=0$, thì x_0 là nghiệm suy ra $-x_0$ cũng là nghiệm nên ta xét phương trình khi $x>0$

PT $\Leftrightarrow x\ln a-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=0, f(x)=x\ln a-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), x>0$

$f'(x)=\ln a-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, dễ thấy $f'(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Có $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\ln a-1>0; \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\ln a>0 \Rightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(0;+\infty)$

BBT

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x_1>x_0 \Rightarrow$ PT có 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$

****Nhận xét: Đây là một bài cover từ một bài tự luận nước ngoài khá khó nếu ai tinh ý thì có thể đưa phương trình trên về dạng $\frac{a^x-a^{-x}}{2}=x$ để giải quyết nó…***

Câu 17. Lấy đạo hàm cấp 2019 của hàm số $f(x)=x^2.e^x$ ta được hàm số $g(x)$, tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A. 2019.2018 **B.** -4038 **C.** -4083 **D.** 2019.2020

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Sử dụng CT Leibniz

$$g(x)=\left(x^2.e^x\right)^{(2019)}=\sum_{k=0}^{2019}C_{2019}^k.\left(x^2\right)^k.\left(e^x\right)^{(2019-k)}$$

$$=C_{2019}^0.x^2.e^x+C_{2019}^1.2x.e^x+C_{2019}^2.2.e^x+....$$

$$=x^2.e^x+2019.2x.e^x+C_{2019}^2.2.e^x$$

$$=e^x\left(x^2+2019.2x+C_{2019}^2.2\right)=0$$

Viet $\Rightarrow x_1+x_2=-2.2019=-4038$

Góc nhìn 2.

Sử dụng quy nạp

$$\left(f(x).e^x\right)'=\left(f(x)+f'(x)\right).e^x$$

$$\left(f(x).e^x\right)''=\left(f(x)+2f'(x)+f''(x)\right).e^x$$

$$\left(f(x).e^x\right)'''=\left(f(x)+3f'(x)+3f''(x)+f'''(x)\right).e^x$$

$$\left(f(x).e^x\right)^{(4)}=\left(f(x)+4f'(x)+6f''(x)+4f'''(x)+f^{(4)}(x)\right).e^x$$

Quy nạp $\Rightarrow\left[f(x).e^x\right]^{(n)}=\left[C_n^0.f(x)+C_n^1.f'(x)+...+C_n^n.f^{(n)}(x)\right].e^x$

$$\Rightarrow g(x)=\left[f(x).e^x\right]^{(2019)}=0$$

$$\Leftrightarrow e^x\left(x^2+2019.2x+C_{2019}^2.2\right)=0$$

Viet $\Rightarrow x_1+x_2=-2.2019=-4038$

****Nhận xét: Ở góc nhìn 1 ta có đụng tới CT Leibniz là công thức tính đạo hàm cấp cao của bậc đại học -_- , còn ở góc nhìn 2 thì nó có thể hoàn toàn làm bằng quy nạp theo chương trình THPT. Các bạn có thể tham khảo thêm về cách dùng CT Leibniz này ở hình dưới đây nhé.***

Áp dụng công thức Lepnit cho đạo hàm cấp cao

✪Công thức Lepnit :

Nếu $h(x), g(x)$ là các hàm khả vi n lần thì

$$[h(x).\, g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.\, h^{(k)}(x).\, g^{(n-k)}(x)$$

✪Các bước làm bài :

- **Bước 1 :**Xác định 2 hàm tích $h(x), g(x)$.
- **Bước 2 :**Lần lượt xác định đạo hàm cấp n của $h(x), g(x)$
- **Bước 3 :**Thế vào công thức để tính toán và kết luận

✪Ví dụ 1 :

Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số sau :

$$y = (x+1)\text{sinx}$$

(Bài 4-Đề 1-Giải tích I giữa kì BKHN-K58)

Bài làm:

- Đặt :
  $h(x) = x + 1$
  $g(x) = sinx$
  Suy ra: $y = h(x).\, g(x)$
- Ta có:

_ $\text{h(x)} = \text{x} + 1$
$\Rightarrow \text{h}'(\text{x}) = 1$
$\Rightarrow \text{h}^{(n)}(x) = 0$ Với $\forall n \geq 2$
_ $\text{g(x)} = \text{sinx}$
$\Rightarrow g'(x) = cos\text{x} = \sin(\text{x}+\frac{\pi}{2})$
$\Rightarrow g''(x) = -\sin x = \sin(\text{x} + 2.\frac{\pi}{2})$
$\Rightarrow g^{(n)}(x) = \sin(\text{x} + \text{n}.\frac{\pi}{2})$

- Với $y = h(x).\, g(x)$
  Khi đó:

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k.\, h^{(k)}(x).\, g^{(100-k)}(x) \\ &= C_{100}^0.\, h(x).\, g^{(100)}(x) + C_{100}^1.\, h'(x).\, g^{(99)}(x) \\ &= (x+1)\sin(x + 100.\tfrac{\pi}{2}) + 100.\sin(x + 99.\tfrac{\pi}{2}) \\ &= (x+1)\sin x - 100\cos x \end{aligned}$$

- Vậy $y^{(100)} = (x+1)\sin x - 100\cos x$

Câu 17. Cho a,b,c,d là các số nguyên dương, $a \neq 1, c \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{3}{2}; \log_c d = \frac{5}{4}$ và $a - c = 9$. Khi đó $b - d$ bằng?

A. 93 **B.** 9 **C.** 13 **D.** 21

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

$\log_a b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$

$\log_c d = \frac{5}{4} \Rightarrow d = c^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{c^5}$

$a - c = 9$

Chọn $c = 16 = 2^4 \Rightarrow d = 32$; $a = 25 = 5^2 \Rightarrow b = 125$

$\rightarrow b - d = 93$

Góc nhìn 2.

$\log_a b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$; $a = \sqrt[3]{b^2}$

$\log_c d = \frac{5}{4} \Rightarrow d = c^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{c^5}$; $c = \sqrt[5]{d^4}$

Do $a - c = 9 \Leftrightarrow \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[5]{b^4} = 9 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[5]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[5]{b^2}\right) = 9\,(*)$

Vì $a,b,c,d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[3]{b^2}, \sqrt[5]{d^4}$ nguyên dương

Từ $(*) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{b} - \sqrt[5]{d^2} = 1 \\ \sqrt[3]{b} + \sqrt[5]{d^2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{b} = 5 \\ \sqrt[5]{d^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 125 \\ d = 32 \end{cases}$

$\rightarrow b - d = 93$

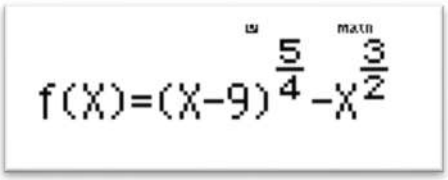
Góc nhìn 3.

$\log_a b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = a^{\frac{3}{2}}$

$\log_c d = \dfrac{5}{4} \Rightarrow d = c^{\frac{5}{4}}$

$d - b = c^{\frac{5}{4}} - a^{\frac{3}{2}} = (a-9)^{\frac{5}{4}} - a^{\frac{3}{2}}$

Đến đây các bạn dùng TABLE để giải tiếp nha



Câu 18. Tìm m để phương trình $4(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{2};4\right]$

A. $m \in \varnothing$ **B.** $-3 < m \le \dfrac{7}{3}$ **C.** $m \in \mathbb{R}$ **D.** $-3 \le m \le \dfrac{7}{3}$

Lời giải:

Chọn D

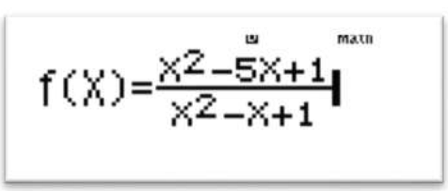
Góc nhìn 1.

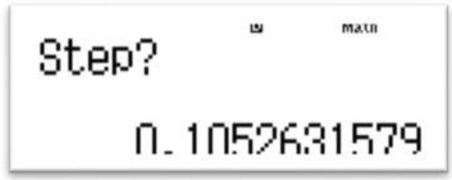
Phương trình $4(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{2};4\right]$

$\Leftrightarrow (m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0$ có nghiệm $t \in [-1;1]$ $\Leftrightarrow m \in \left[\min_{[-1;1]} f(t); \max_{[-1;1]} f(t)\right]$

Với $f(t) = \dfrac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$

Đến đây ai thích giải tự luận cũng được nha không thì bấm m





STEP là $\frac{2}{19}$ nha. Đáp án là $-3 \le m \le \frac{7}{3}$

Góc nhìn 2.

Nhận xét bằng Viet

$t_1.t_2 = 1 \text{ nên } |t_1| \le 1 \le \ |t_2|$

Theo điều kiện đề bài $-1 \le t \le 1$, như vậy chỉ có một nghiệm thảo điều kiện

Suy ra phương trình có đúng một nghiệm thuộc $[-1;1]$ tương đương điều kiện $f(1).f(-1) \ \le \ 0$

Suy ra $-3 \le m \le \frac{7}{3}$

Góc nhìn 3.

Ta casio thẳng .

$$\text{PT } \Leftrightarrow m\left[\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2)^2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2} + 1\right] = \log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2)^2 + 5\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2} + 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2)^2 + 5\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2} + 1}{\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2)^2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2} + 1}$$

Cô lập đc m rồi thì TABLE như trên thôi nha.

Câu 19. [Sở Quảng Nam 2019] Cho hai số dương x, y thỏa mãn $2^{y}+y=2x+\log_{2}\left(x+2^{y-1}\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y}$

A. $\dfrac{e+\ln 2}{2}$ **B.** $\dfrac{e-\ln 2}{2}$ **C.** $\dfrac{e\ln 2}{2}$ **D.** $\dfrac{e}{2\ln 2}$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

$2^{y}+y=2x+\log_{2}\left(x+2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2^{y}+2^{y}+y=2x+2^{y}+\log_{2}\left(x+2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2.2^{y}+\log_{2}2^{y}=2\left(x+2^{y-1}\right)+\log_{2}\left(x+2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2^{y}=x+2^{y-1}$

$\Leftrightarrow x=2^{y}-2^{y-1}$

$$P=\frac{x}{y}=\frac{2^{y}-2^{y-1}}{y}=f\left(y\right);f'\left(y\right)=\frac{\left(2^{y}\ln 2-2^{y-1}\ln 2\right)y-\left(2^{y}-2^{y-1}\right)}{y^{2}}=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{\ln 2}$$

$$P_{\min}=f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{e\ln 2}{2}$$

Góc nhìn 2.

Đặt $t=\log_{2}\left(x+2^{y-1}\right)\Rightarrow x+2^{y-1}=2^{t}\Leftrightarrow 2x=2^{t+1}-2^{y}$

Khi đó PT trở thành: $2^{y}+y=2^{t+1}-2^{y}+t$

$\Leftrightarrow 2^{y+1}+y=2^{t+1}+t\left(*\right)$

Xét hàm đặc trưng $f\left(u\right)=2^{u+1}+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $\left(*\right)\Leftrightarrow f\left(y\right)=f\left(t\right)\Leftrightarrow y=t\Leftrightarrow y=\log_{2}\left(x+2^{y-1}\right)$

…

****Nhận xét: Với những bài dạng hàm đặc trưng này thường thì người ta sẽ làm theo cách 2 cho đỡ lẫn lộn, nhưng không hiểu sao mình luôn máy móc làm theo cách 1 đôi khi nhiều bài nhìn ra cách thêm bớt sẽ nhanh hơn cách 2 nhiều. Vì thế nên quan sát kĩ một bài toán nào đó trước khi bắt tay vào làm nhé.***

Câu 20. Tìm m để bất phương trình $2^x+3^x+4^x+5^x\ge 4+mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

A. $\ln 120$ **B.** $\ln 10$ **C.** $\ln 30$ **D.** $\ln 14$

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

YCBT $\Leftrightarrow$ tìm m để GTNN của hàm $2^x+3^x+4^x+5^x-mx$ bằng 4

Dấu bằng đạt được tại $x=0$

Góc nhìn 2.

$m=f'(0)$ với $f(x)=2^x+3^x+4^x+5^x$ (Ý nghĩa tiếp tuyến)

Góc nhìn 3.

Vế trái, vế phải là hàm số luôn điểm $(0;4)$ nên YCBT kh đường thẳng tiếp xúc hàm số

Góc nhìn 4.

$f(x)=2^x+3^x+4^x+5^x-4-mx\ge 0$ với $\forall x$

Mà $f(0)=0\Rightarrow f(0)$ là cực tiểu, suy ra $f'(0)=0\Rightarrow m=\ln 120$

Đây trắc nghiệm thì nhận luôn $m=\ln 120$ còn tự luận phải thử lại nha.

Câu 21. Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\frac{6x-6y+23}{x^2+y^2}=9x^2+9y^2-6x+6y-21$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x+y)(50-9xy)-39x^2-6y^2$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b$

A. 188 **B.** 191 **C.** 202 **D.** 179

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

$$\log_3\frac{6x-6y+23}{x^2+y^2}=9x^2+9y^2-6x+6y-21$$

$$\Leftrightarrow \log_3 9(x^2+y^2)+9x^2+9y^2=\log_3(6x-6y+23)+6x-6y+23$$

Xét $f(t)=\log_3 t+t, t>0$

$f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0\ \forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà $f(9x^2+9y^2)=f(6x-6y+23)$

$\Leftrightarrow 9x^2+9y^2=6x-6y+23$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2+(3y-1)^2=25$

$\Rightarrow 0<x\le 2; 0<y\le \frac{4}{3}$

Lại có $9x^2+9y^2=6(x-y)+23$

$\Leftrightarrow -9xy(x+y)=9(x^3+y^3)-6(x^2-y^2)-23(x+y)$

$P=(x+y)(50-9xy)-39x^2-6y^2$

$=50(x+y)-9xy(x+y)-39x^2-6y^2$

$=50(x+y)+9(x^3+y^3)-6(x^2-y^2)-23(x+y)-39x^2-6y^2$

$=9x^3-45x^2+27x+9y^3+27y$

Đặt $9x^3-45x^2+27x=f(x); 9y^3+27y=f(y)$

$Max_{(0;2]}f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}$

$Max_{\left(0;\frac{4}{3}\right]}f(y)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{172}{3}$

$\Rightarrow MaxP=\frac{185}{3}$

Góc nhìn 2.

$9x^2+9y^2=6x-6y+23$

$\Rightarrow 9(x+y)^2=6x-6y+23+18xy$

$\Rightarrow -9xy=\frac{-9}{2}(x+y)^2+3x-3y+\frac{23}{2}$

Khi đó $P=(x+y)\left(50-\frac{9}{2}(x+y)^2+3x-3y+\frac{23}{2}\right)-39x^2-6y^2$

$=\underbrace{-\frac{9}{2}(x+y)^3+\frac{75}{2}(x+y)-(6x-2)^2}_{\le\frac{125}{3}}\underbrace{-(3y-4)^2+20}_{\le 20}$

$\Rightarrow P\le\frac{185}{3}$

Câu 22. Biết rằng a là số thực dương khác 1 để bất phương trình $\log_a x\le x-1$ được nghiệm đúng với mọi x dương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in(10;+\infty)$ **B.** $a\in\left(\frac{5}{2};3\right)$ **C.** $a\in\left(1;\frac{5}{2}\right)$ **D.** $a\in(3;10)$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Với $a<1$ không có nghiệm đúng với mọi x

Với $a>1$, tiếp tuyến của đồ thị $y=\log_a x$ tại $A(1;0)$ là: $y=\frac{1}{\ln a}(x-1)$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln a}=a$

$\Rightarrow a=e$

Góc nhìn 2.

Sử dụng điều kiện cần đủ, $f(x)$ có nghiệm $x=1$ suy ra $f'(x)$ cũng có nghiệm $x=1\Rightarrow a=e$. Thử lại $a=e$ BPT đúng với mọi $x>0$

Câu 23. [Chuyên Thái Bình lần 3 – 2019]. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-y}+(x^2-9).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$

A. 6 **B.** 3 **C.** 8 **D.** 4

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

Nếu $x^2-9\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9}\ge 1 \\ \left(x^2-9\right)5^{x+1}>0 \end{cases} \Rightarrow 3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right)5^{x+1}\ge 1$, bất phương trình đã cho vô nghiệm

Nếu $x^2-9<0 \Leftrightarrow -3<x<3$ thì $\begin{cases} 3^{x^2-9}<1 \\ \left(x^2-9\right)5^{x+1}<0 \end{cases} \Rightarrow 3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right)5^{x+1}<1$. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-3;3)$

Vậy $b-a=6$

Góc nhìn 2.

$f(x)=3^{x^2-y}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}-1<0$

Xét phương trình $f(x)=0$

Đặt $\underbrace{3^t+t.5^{x+1}-1}_{g(t)}=0$

$g'(t)=3^t\ln 3+5^{x+1}>0\,\forall t$

Nghiệm duy nhất $t=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$

BXD

		-3		3	
	+	0	-	0	+

Suy ra nghiệm BPT $-3<x<3$

Câu 24. Cho a,b,c là các số thực dương, $a>1$ và thỏa mãn

$\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\dfrac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}=0$. Số bộ (a,b,c) thỏa mãn điều kiện đã cho là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

$b^3c^3+\dfrac{bc}{4}\ge b^2c^2$

Suy ra $VT \geq \left[\log_a^2(bc)+4\log_a(bc)+4\right]+\sqrt{4-c^2} \geq \left[\log_a(bc)+2\right]^2 \geq 0 = VP$

Vậy $\begin{cases} bc=\dfrac{1}{2} \\ \log_a bc=-2 \\ 4-c^2=0 \\ a,b,c>0, a>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=\dfrac{1}{4} \\ c=2 \end{cases}$

Câu 25. Cho 2 số thực dương x,y sao cho $\log x+\log y+1 \geq \log(x+y)$. Tìm GTNN của $P=x+3y$

A. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\dfrac{2-\sqrt{3}}{5}$ **C.** 4 **D.** -4

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

$P=x+3y \Rightarrow x=P-3y$

$\log x+\log y+1 \geq \log(x+y) \Leftrightarrow 10xy \geq x+y$

$\Leftrightarrow 10(P-3y)y \geq P-3y+y$

$\Leftrightarrow 30y^2-(2+10P)y+P \leq 0$

BPT có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow (2+10P)^2-120P \geq 0$

$\Leftrightarrow 100P^2-80P+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P \geq \dfrac{2+\sqrt{3}}{5} \\ P \leq \dfrac{2-\sqrt{3}}{5} \end{array}\right. (1)$

$10xy \geq x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 5\sqrt{xy} \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{xy} \geq \dfrac{1}{5}$

$$P = x + 3y \ge 2\sqrt{x.3y} = 2\sqrt{3}.\sqrt{xy} \ge \frac{2\sqrt{3}}{5} (2)$$

Từ $(1);(2) \Rightarrow P \ge \frac{2+\sqrt{3}}{5}$

Góc nhìn 2.

$10xy \ge x + y \Leftrightarrow y(10x-1) \ge x$

$\Rightarrow y \ge \frac{x}{10x-1}$

$P = x + 3y \ge x + \frac{3x}{10x-1} = f(x)$

Đến đây đi khảo sát hàm $f(x)$ nhé.

Góc nhìn 3.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow 10xy \ge x + y \Leftrightarrow x(10y-1) \ge y \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{10} \\ x \ge \frac{y}{10y-1} \end{cases}$$

$$P = x + 3y \ge \frac{y}{10y-1} + 3y = \frac{1}{10} + \frac{1}{10(10y-1)} + \frac{3}{10}(10y-1) + \frac{3}{10}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{10(10y-1)} + \frac{3}{10}(10y-1)$$

$$\ge \frac{2}{5} + 2\sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{2+\sqrt{3}}{5}$$

Câu 26. [Thi thử Đoàn Thượng – Hải Dương lần 1 – 2019]. Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a + 3b - 4$. Tìm GTNN của biểu thức $T = a^2 + b^2$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Lời giải:

Chọn D

Góc nhìn 1.

$$\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4\Leftrightarrow \log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)-1=a+3b-5$$

$$\Rightarrow \log_5\left(\frac{4a+2b+5}{5a+5b}\right)=(5a+5b)-(4a+2b+5)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)=\log_5(5a+5b)+5a+5b$$

$$\Leftrightarrow f(4a+2b+5)=f(5a+5b)\ (*)$$

Với $f(t)=\log_5 t+t\xrightarrow{t>0} f'(t)=\frac{1}{t\ln 5}+1>0$ nên $(*)\Rightarrow 4a+2b+5=5a+5b\Rightarrow a+3b=5$

$5^2\le(1^2+3^2)(a^2+b^2)\Rightarrow T\ge\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{1}=\frac{b}{3}\Rightarrow 3a=b$ hay

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Góc nhìn 2.

Đặt $\begin{cases} x=4a+2b\\ y=a+3b\end{cases}\Rightarrow x+y=5(a+b)\Rightarrow a+b=\frac{x+y}{5}$

PT $\Leftrightarrow \log_5\frac{5(x+y)}{x+y}=y-4\Leftrightarrow \log_5(x+5)+1=\log_5(x+y)+y-4$

$$\Leftrightarrow \log_5(x+5)+(x+5)=\log_5(x+y)+x+y$$

$\Leftrightarrow f(x+5)=f(x+y)$ với $f(t)=\log_5 t+t$

…

$$\Rightarrow x+5=x+y\Leftrightarrow a+3b=5$$

$5^2\le(1^2+3^2)(a^2+b^2)\Rightarrow T\ge\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{1}=\frac{b}{3}\Rightarrow 3a=b$ hay

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Góc nhìn 3.

Cũng giải được hàm đặc trưng như trên nhưng ở chỗ tìm Max có thể làm như sau

$$\begin{cases} a^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq a \\ b^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \geq 3b \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+\frac{5}{2} \geq a+3b=5 \Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{5}{2}$$

Câu 27. [Đề thi THTT số 3 tháng 2]. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để BPT $\left|\frac{3\ln^2 x+2\ln x+12}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right| \geq 2$ nghiệm đúng với mọi $x>0$?

A. 4 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Đặt $\ln x = t$ ta có $\left|\frac{3t^2+2t+12}{t^2-(m+1)t+4}\right| \geq 2 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

$t^2-(m+1)t+4<0 \forall t \in R \Leftrightarrow (m+1)^2-16<0 \Leftrightarrow -5<m<3(1)$

Khi đó $3t^2+2t+12 \geq 2t^2-2(m+1)t+8$

$\Leftrightarrow t^2+2(m+2)t+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2-4 \leq 0$

$\Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0(2)$

Từ $(1);(2) \Rightarrow -4 \leq m \leq 0 \Rightarrow 5$ giá trị

Góc nhìn 2.

Đặt $\ln x = t$ ta có $\left|\frac{3t^2+2t+12}{t^2-(m+1)t+4}\right| \geq 2 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

Với $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow t^2-(m+1)t+4 \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t^2-(m+1)t+4>0$
$\Leftrightarrow (m+1)^2-16<0$
$\Leftrightarrow -5<m<3$

Nhận xét $3t^2+2t+12>0\ \forall t\in\mathbb{R}$

Do đó PT $\Leftrightarrow \dfrac{3t^2+2t+12}{t^2-(m+1)t+4}\geq 2\ \forall t\in\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3t^2+2t+12\geq 2t^2-2(m+1)t+8$
$\Leftrightarrow t^2+2(m+2)t+4\geq 0$
$\Leftrightarrow (m+2)^2-4\leq 0$
$\Leftrightarrow -4\leq m\leq 0$

Vậy $\begin{cases} m\in\mathbb{Z}\\ -4\leq m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1;0\}$

Câu 28. **[Đề thi THTT số 3 tháng 2].** Cho các số thực x,y,z thỏa mãn

$$\sqrt{\log_2\frac{x}{4}}+\sqrt{\log_3\frac{y}{9}}+\sqrt{\log_5\frac{z}{25}}=3$$

Tìm GTNN của $S=\log_{2001}x.\log_{2018}y.\log_{2019}z$

A. $minS=27.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5$

B. $minS=44.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5$

C. $minS=8.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5$

D. $minS=\dfrac{289}{8}.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5$

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

Đặt $a=\sqrt{\log_2\frac{x}{4}},b=\sqrt{\log_3\frac{y}{9}},c=\sqrt{\log_5\frac{z}{25}}\Rightarrow a+b+c=3$

Bài toán quy về tìm GTNN của $P=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$.

Ta có : $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)=\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)+a^2+b^2+3\geq 3\left[\frac{1}{2}\left(a+b\right)^2+1]\right]$

$\Rightarrow \frac{P}{3}\geq\left[\frac{1}{4}\left(a+b\right)^2+\frac{1}{4}\left(a+b\right)^2+1\right]\left(c^2+1+1\right)$

$\Rightarrow \frac{P}{3}\geq\left(a+b+c\right)^2$

$\Rightarrow P\geq 3\left(a+b+c\right)^2$

$\Rightarrow P\geq 27$

Góc nhìn 2.

Đặt $a=\sqrt{\log_2\frac{x}{4}},b=\sqrt{\log_3\frac{y}{9}},c=\sqrt{\log_5\frac{z}{25}}\Rightarrow a+b+c=3$

$\log_2 x=a^2+2,\log_3 y=b^2+2,\log_5 z=c^2=2$ và $S=F.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5$

Với $F=\log_2 x.\log_3 y.\log_5 z=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$

Để giải bài toán ta phải tìm GTNN của biểu thức $F=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$, trong đó a,b,c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Ba số a^2-1,b^2-1,c^2-1 luôn có ít nhất hai số có tích không âm. Giả sử $\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\geq 0\Rightarrow c^2\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\geq 0$

Hay $a^2b^2c^2+c^2\geq c^2b^2+c^2a^2\left(1\right)$

Mặt khác, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left(a-b\right)^2-\left(bc-1\right)^2+\left(ca-1\right)^2\geq 0\\ \left(ab-1\right)^2+\left(bc-1\right)^2+\left(ca-1\right)^2\geq 0\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow a^2+b^2+8+2a^2b^2+3b^2c^2+3c^2a^2\geq 6\left(ab+bc+ca\right)\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có:

$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+8+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\geq 6\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow a^2b^2c^2+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\geq 3\left(a+b+c\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 3\left(a+b+c\right)^2$

Mà $a+b+c=3$ nên ta thu được

$F=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 27$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Do đó $S\geq 27.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5$, đẳng thức xảy ra khi $x=8, y-27, z=125$

Góc nhìn 3.

Vì là câu trắc nghiệm nên ta có thể chọn $a=b=c=1$ thay vào rồi giải

Câu 29. Biết phương trình $\log_5\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{x}\right)=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm $x=a+b\sqrt{2}\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$. Tìm $2a+b$

A. 3 **B.** 8 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn B

Góc nhìn 1.

ĐK: $x>1$

PT $\Rightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\log_3 2\sqrt{x}=\log_5 x+2\log_3\left(x+1\right)$

Xét $f\left(t\right)=\log_5\left(t+1\right)+2\log_3 t$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

$\Rightarrow 2\sqrt{x}=x-1 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x=3+2\sqrt{2}$

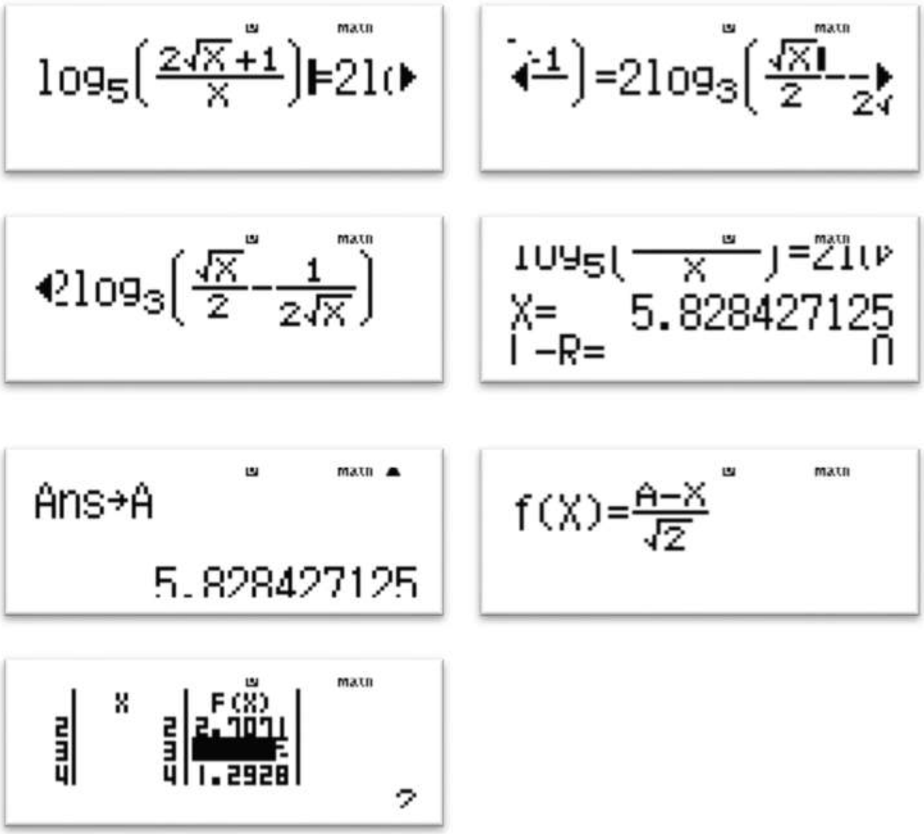
$\Rightarrow 2a+b=8$

Góc nhìn 2.

Sử dụng casio

Shift solve ra nghiệm gán vào A

Nhập TABLE $F\left(x\right)=\frac{A-x}{\sqrt{2}};\begin{cases}F\left(x\right)=b\\x=a\end{cases}$



Góc nhìn 3.

Đặt $VT+VP=t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(2\sqrt{x}+1\right)=x.5^t \\ x-1=2\sqrt{x}\sqrt{3}^t \end{cases}$$

Cộng 2 pt:

$$2\sqrt{x}+x=x.5^t+2\sqrt{x}.\sqrt{3}^t$$

$$\Rightarrow x\left(5^t-1\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{2019}^t-1\right)=0$$

$$\Rightarrow t=0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}+1=x$$

$$\Rightarrow x=3+2\sqrt{2}$$

Câu 30. Xét các số thực x, y thõa mãn $x^2+y^2=4$ và $\log_{x^2+y^2(4x-2y)}\geq 1$. GTLN của biểu thức $P=3x+4y-5$ là $a+b\sqrt{5}$ với a,b là các số nguyên. Tính $T=a^3+b^3$

A. $T=152$ **B.** $T=98$ **C.** $T=0$ **D.** $T=250$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

$\log_{x^2+y^2}(4x-2y)\geq 1 \Rightarrow 4x-2y\geq x^2+y^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2\leq 5$

$P=3x+4y-5=3(x-2)+4(y+1)-3\leq\sqrt{(3^2+4^2)\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right]}-3=5\sqrt{5}-3$

$\Rightarrow T=5^3+(-3)^3=98$

Góc nhìn 2.

$\log_{x^2+y^2}(4x-2y)\geq 1 \Rightarrow 4x-2y\geq x^2+y^2$

$\Rightarrow P+\dfrac{57}{4}\geq\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2$

Ta có $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2\geq\dfrac{\left[3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+4(y+3)^2\right]}{3^2+4^2}\Rightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2\geq\dfrac{\left(P+\dfrac{31}{2}\right)^2}{25}$

Suy ra $P+\dfrac{57}{4}\geq\dfrac{\left(P+\dfrac{31}{2}\right)^2}{25}\Rightarrow P\leq -3+5\sqrt{5}$

$\begin{cases} x^2+y^2\geq 4 \\ 4x-2y\geq x^2+y^2 \\ 3x+4y-5=-3+5\sqrt{5} \\ \dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{3}=\dfrac{y+3}{4} \end{cases}$ có nghiệm

$MaxP=-3+5\sqrt{5}\Rightarrow T=98$

Câu 31. Cho hai số thực a,b thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}\left(2a-8b\right)=1$. Tính $P=\dfrac{a}{b}$ khi biểu thức $S=4a+6b-5$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{8}{5}$ **B.** $\dfrac{-13}{2}$ **C.** $\dfrac{-13}{4}$ **D.** $\dfrac{17}{44}$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Giả thiết $(a-1)^2+4(b+1)^2=4$

$S=4a+6b-5=4(a-1)+6(b+1)-7$

$\left[4(a-1)+6(b+1)\right]^2\le(16+9)\left[(a-1)^2+4(b+1)^2\right]=25.4$

$\Rightarrow -10\le 4(a-1)+6(b+1)\le 10$

$$\Rightarrow S_{\max}=3\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{13}{5}\\ b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow P=\dfrac{-13}{2}$$

Góc nhìn 2.

Giả thiết $\Leftrightarrow (a-1)^2+(2b+2)^2=4(*)$

Đặt $x=a;y=2b\Rightarrow(*):(x-1)^2+(y+2)^2=4(C);S=4x+3y-5\Leftrightarrow 4x+3y-5-S=0(\Delta)$

Bài toán trở thành: Tìm các điểm thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;-2),R=2$ và đường thẳng (Δ) để S lớn nhất.

Vậy ta có điều kiện sau

$$d(I;\Delta)\le R\Leftrightarrow\frac{\left|4.1+3.(-2)-5-S\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}\le 2\Leftrightarrow\left|7+S\right|\le 10\Leftrightarrow S\le 3\Rightarrow S_{\max}=3$$

Khi đó phương trình $\Delta:4x+3y-8=0$ là tiếp tuyến của đường tròn (C). Vậy ta tìm tiếp điểm của (Δ) với (C): $\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=4\\ 4x+3y-8=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{13}{5};y=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow a=\dfrac{13}{5};b=\dfrac{-2}{5}\Rightarrow P=\dfrac{-13}{2}$

Câu 32. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y$. Tìm GTNN của biểu thức $T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$

A. $\min T = 4$ **B.** $\min T = 6$ **C.** $\min T = -6$ **D.** $\min T = -4$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

$\log_3(2x+y+1) + 2x+y+1 = \log_3(3x+3y) + 3x+3y$

$\Leftrightarrow 2x+y+1 = 3x+3y \Leftrightarrow x = 1-2y$

$P = \frac{1}{1-2y} + \frac{1}{\sqrt{y}} = f(y) \quad \left(y \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \right)$

$f'(y) = \frac{2}{(1-2y)^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{y^3}}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$

$\min f(y) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 6$

Góc nhìn 2.

Ta có $x+2y=1$

$\sqrt{4y.1} \le \frac{4y+1}{2} = 2y + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{4y}} \ge \frac{4}{2y+\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{4y}} \ge \frac{(1+2)^2}{x+2y+\frac{1}{2}} = \frac{9}{1+\frac{1}{2}} = 6$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2y = \frac{1}{2}$

Góc nhìn 3.

$\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{x} + \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{4}y}} \ge \frac{1}{x} + \frac{2}{y+\frac{1}{4}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y+\frac{1}{4}} + \frac{1}{y+\frac{1}{4}} \ge \frac{9}{x+2y+\frac{1}{2}} = 6$

Dấu bằng xảy ra khi $x=2y=\frac{1}{2}$

Góc nhìn 4.

…

Ta có $x=1-2y \Rightarrow y<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow P=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{y}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xy}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{(1-2y)y}}$

$P_{\min} \Leftrightarrow \frac{1}{(1-2y)y}\min \Leftrightarrow f(y)=(1-2y)y$ đạt GTLN trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Xét hàm $f(y)=(1-2y)y$ trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \underset{\left(0;\frac{1}{2}\right)}{Max} f(y)=\frac{1}{6} \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow P_{\min}=6$

Câu 33. Có tất cả bao nhiêu số vô tỉ a thỏa đẳng thức

$$\log_2 a+\log_3 a+\log_5 a=\log_2 a.\log_3 a.\log_5 a.$$

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải:

Chọn D

Góc nhìn 1.

$PT \Leftrightarrow \log_2 a+\log_3 2.\log_2 a+\log_5 2.\log_2 a=\log_2 a.\log_3 5.\log_5 a.\log_5 a$

$\Leftrightarrow \log_2 a\left(1+\log_3 2+\log_5 2\right)=\log_2 a.\log_3 5.\log_5^2 a$

$\Leftrightarrow \log_2 a\left(1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 a\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 a=0\\ \log_2 a=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ \log_5 a=\pm\sqrt{\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}}\end{array}\right.$

Góc nhìn 2.

Bấm máy chày cối cũng ra nhé ☺

Câu 34. Trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ phương trình $\sin 2x-\cos x=1+\log_2(\sin x)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Do $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $0<\sin x;\cos x<1$

Nên phương trình $\Leftrightarrow \log_2\cos x+\sin 2x-\cos x=1+\log_2\sin x+\log_2\cos x$

$\Leftrightarrow \log_2\cos x-\cos x=\log_2\sin 2x-\sin 2x(*)$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log_2 t-t\ \ t\in(0;1]$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}-1>0\forall t\in(0;1)$

Vì $0<t\le 1\Leftrightarrow 0<t\ln 2\le \ln 2<\ln e=1\Rightarrow \frac{1}{t\ln 2}>1\Leftrightarrow \frac{1}{t\ln 2}-1>0$

Suy ra phương trình $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1]$, mà phương trình $(*)$ có dạng

$f(\cos x)=f(\sin 2x)$
$\Leftrightarrow \cos x=\sin 2x$
$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$

Góc nhìn 2.

Ta có $\sin 2x-\cos x=\log_2(2\sin x)=\log_2\frac{\sin 2x}{\cos x}=\log_2(\sin 2x)-\log_2\cos x$

$\Rightarrow \log_2(\sin 2x)-\sin 2x=\log_2(\cos x)-\cos x$

Xét $f(t)=\log_2 t-t\ \ t\in(0;1]$

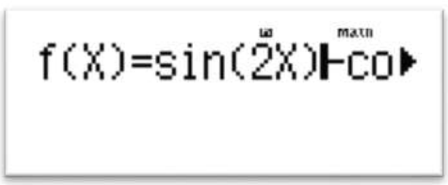
$$f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}-1>0\forall t\in(0;1)$$

$$f(\cos x)=f(\sin 2x)$$
$$\Leftrightarrow \cos x=\sin 2x$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

Góc nhìn 3.

Bài này hoàn toàn casio được nhé.

TABLE. Với STAR: 0 END: $\frac{\pi}{2}$ STEP: $\left(\frac{\pi}{2}-0\right):19$



Có thể thấy phương trình chỉ đổi dâu một lần trên đoạn $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên có thể đưa ra được đáp án ngay.

Câu 35. Có bao nhiêu bộ ba số thực (x,y,z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\begin{cases}3^{\sqrt[3]{x^2}}.9^{\sqrt[3]{y^2}}.27^{\sqrt[3]{z^2}}=3^6\\ xy^2z^3=1\end{cases}$$

A. 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Từ PT $3^{\sqrt[3]{x^2}}.9^{\sqrt[3]{y^2}}.27^{\sqrt[3]{z^2}}=3^6$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+3\sqrt[3]{z^2}=6$

Mà $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+3\sqrt[3]{z^2}\geq 6\sqrt[6]{\sqrt[3]{\left(xy^2z^3\right)^2}}=6$ (Cauchy cho bộ 6 số)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2=z^2 \\ x.y^2.z^3=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$

Vậy có 4 cặp số

Góc nhìn 2.

$3^{\sqrt[3]{x^2}}.9^{\sqrt[3]{y^2}}.27^{\sqrt[3]{z^2}}=3^6$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{x^2}}.3^{2\sqrt[3]{y^2}}.3^{3\sqrt[3]{z^2}}=3^6$ (logarit cơ số 3 hai vế)

$\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+3\sqrt[3]{z^2}=6$

$6=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}+\sqrt[3]{z^2}+\sqrt[3]{z^2}\geq 6\sqrt[6]{\left(xy^2z^3\right)^2}=6.1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2=z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=z \\ x=-z \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=z \\ x=y=-z \\ x=-y=z \\ x=-y=-z \end{array}\right.$

Vậy có 4 bộ số

Góc nhìn 3.

Đề bài $\Rightarrow \begin{cases} 6=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{y^2}+3\sqrt[3]{z^2}\geq 6\sqrt[6]{\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{y^4}.\sqrt[3]{z^6}}=6\sqrt[6]{\left(xy^2z^3\right)^2}=6 \\ xy^2z^3=1 \end{cases}$

$xy^2z^3=1$ suy ra x,z cùng dấu $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{z^2}=1 \\ xy^2z^3=1 \end{cases}$

Suy ra các bộ $(1;\pm1;1);(-1;\pm1;-1)$

Vậy có 4 bộ số

Góc nhìn 4.

Cách trắc nghiệm

Dự đoán $(\pm1;\pm1;\pm1)$. Mặt khác từ $xy^2z^3=1$ suy ra x,z cùng dấu

Nên:

Chọn dấu cho x có 2 cách

Chọn dấu cho y có 2 cách

Chọn dấu cho z có 1 cách

Vậy có 4 bộ số tất cả.

Câu 36. Cho $a\ge1;b\ge1;c\ge1$ thỏa mãn $\begin{cases}\log_{ac}(b^2+1)+\log_{2bc}a=\dfrac{2}{3}\\ \log_{2ab}c\le1\end{cases}$. Tính $S=a^2+b^2+c^2$

A. 6 **B.** 21 **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $\dfrac{21}{16}$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Đặt $x=\log_c a+1;y=\log_c(2b)+1;\quad x,y\ge1$

Ta có $\log_{2ab}c\le1\Leftrightarrow\log_c 2b+\log_c a\ge1\Leftrightarrow x+y\ge3(1)$

Ta có $\log_{ac}(b^2+1)+\log_{2bc}a=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{2}{3}\ge\log_{ac}(2b)+\log_{2bc}a=\dfrac{\log_c(2b)}{1+\log_c a}+\dfrac{\log_c a}{1+\log_c 2b}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\ge\dfrac{y-1}{x}+\dfrac{x-1}{y}$

$\Leftrightarrow(x-y)^2+2x^2+2y^2\le3x+3y(2)$

Ta có $3x+3y\le(x+y)^2\le2x^2+2y^2\,(3)$

Từ $(1);(2);(3)$ suy ra dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\dfrac{2}{3}$ và $b=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$$

$S=1^2+2^2+4^2=21$

Góc nhìn 2.

$\log_{2ab} c \le 1 \Rightarrow c \le 2ab$

$$\frac{2}{3}=\log_{ac}\left(b^2+1\right)+\log_{2bc} a \ge \log_{ac} 2b+\log_{2bc} a$$

$$=\frac{1}{\log_{2b} ac}+\frac{1}{\log_a 2bc} \ge \frac{1}{\log_{2b} 2a^2b}+\frac{1}{\log_a 4b^2a}$$

$$=\frac{1}{1+2\log_{2b} a}+\frac{1}{1+2\log_a 2b}=\frac{1}{1+2t}+\frac{t}{t+2}=f(t)$$

Với $t=\log_{2b} a>0$

$$f(t)=\frac{t+2+2t^2+t}{2t^2+5t+2}=\frac{2t^2+2t+2}{2t^2+5t+2}$$

$$f'(t)=\frac{(4t+2)\left(2t^2+5t+2\right)-(4t+5)\left(2t^2+2t+2\right)}{M^2}$$

$$=\frac{6t^2-6}{M^2}=0 \Leftrightarrow t=1$$

$\text{BBT} \Rightarrow f(t) \ge f(1)=\dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \ge f(t) \ge \frac{2}{3} \Rightarrow f(t)=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} \log_{2b} a=1 \\ b^2+1=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \\ c=4 \end{cases}$$

$S=1^2+2^2+4^2=21$

Góc nhìn 3.

$\log_{2ab} c \le 1 \Rightarrow c \le 2ab$

$\frac{2}{3} \ge \log_{ac} 2b + \log_{2bc} a$

$\ge \frac{1}{\log_{2b} ac} + \frac{1}{\log_a 2bc}$

$\ge \frac{1}{\log_{2b}\left(2a^2b\right)} + \frac{1}{\log_a\left(4b^2c\right)} \; \left(Do \; c \le 2ab\right)$

$\ge \frac{1}{1+2\log_{2b} a} + \frac{1}{1+2\log_a 2b}$

$\ge \frac{2}{1+\sqrt{4\log_{2b} a.\log_a 2b}} = \frac{2}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \log_a 2b = \log_{2b} a \\ b = 1 \\ c = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$

$S = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$

Góc nhìn 4.

Cách trắc nghiệm (mò là chính)

Thường thì ta sẽ mò từ BPT $\log_{2ab} c \le 1$ xem dấu bằng xảy ra như thế nào

Từ đây ta đoán được bộ $\left[\begin{array}{l} a = 1; b = 2; c = 4 \\ a = 2; b = 1; c = 4 \end{array}\right.$

Thử lại vào phương trình đầu thì ta thu được bộ $a = 2; b = 1; c = 4$ thảo mãn

$S = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$

Câu 37. [Chuyên ĐH Vinh HK1 2018]. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $b \ge a^{10} > 1, c > 1$ và $\log_a b + 2\log_b c + 5\log_c a = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a$

A. 25 **B.** $\frac{90}{12}$ **C.** 15 **D.** 21

Lời giải:

Chọn D

Góc nhìn 1.

Đặt $x=\log_a b; y=\log_b c; z=\log_c a$

ĐK: $x=\log_a b \ge \log_a a^{10}=10$

$y>0, z>0, xyz=1$

Và $x+2y+5z=12$

Ta có $P=\frac{10}{x}+\frac{5}{y}+\frac{2}{z}$

$=\frac{10}{x}+\frac{10}{2y}+\frac{10}{5z}$

$=\left(\frac{100}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{5z}\right)+\left(\frac{9}{2y}+\frac{9}{5z}+\frac{90}{x}\right)-\frac{100}{x}$

$\ge \frac{(10+1+1)^2}{x+2y+5z}+3\sqrt[3]{\frac{9.9.90}{10xyz}}-\frac{100}{x}$

$=\frac{12^2}{12}+3.9-\frac{180}{x}$

Vì $x>10 \Rightarrow \frac{1}{x}\le\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{-1}{x}\ge\frac{-1}{10}$

$\Rightarrow P\ge 12+27-\frac{180}{10}=21$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} xyz=1 \\ x+2y+5z=12 \\ \frac{10}{x}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{5z} \\ \frac{9}{2y}=\frac{9}{2z}=\frac{90}{x} \\ x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{5} \end{cases}$

Vậy $\min P=21$

Góc nhìn 2.

$$P=\frac{10}{x}+\frac{5}{z}+\frac{2}{z}=\frac{10}{x}+\frac{10}{2y}+\frac{10}{5z}$$

$$=\frac{1000}{x}+\frac{10}{2y}+\frac{10}{5z}-\frac{990}{x}$$

$$\geq\frac{\left(\sqrt{1000}+\sqrt{10}+\sqrt{10}\right)^2}{x+2y+5z}-\frac{990}{x}$$

$$\geq\frac{\left(12\sqrt{10}\right)^2}{12}-\frac{990}{12}=21$$

Góc nhìn 3.

$$b\geq a^{10}>1\Rightarrow \log_a b\geq \log_a a^{10}=10$$

$$P=2\log_a b.\log_b c+5\log_c b+10\log_b a$$

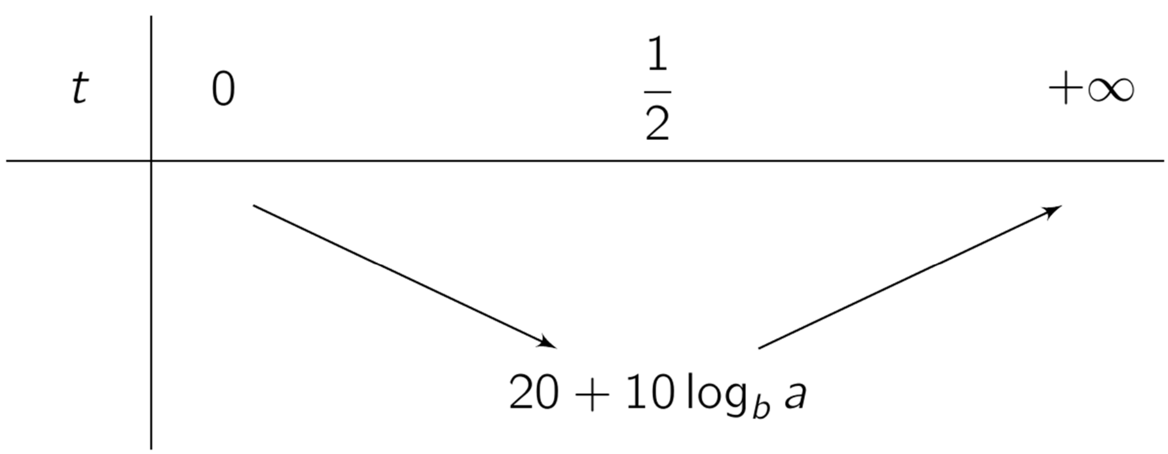
$$\geq 20\log_b c+5\log_c b+10\log_b a$$

Đặt $t=\log_b c>0$

$$P\geq 20t+\frac{5}{t}+10\log_b a=f\left(t\right)$$

$$f'\left(t\right)=20-\frac{5}{t^2}$$

BBT



$\Rightarrow P \ge 20 + 10\log_b a$

$\Rightarrow P_{\min} = 20 + 10\log_b a$ khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_b c = \frac{1}{2}$

Mặt khác $\log_a b + 2\log_b c + 5\log_c b.\log_b a = 12$

$\Rightarrow \log_a b + 1 + \frac{10}{\log_a b} = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a b = 1(loai)\\ \log_a b = 10\end{array}\right.$

$\Rightarrow P_{\min} = 20 + \frac{10}{\log_a b} = 21$

Câu 38. [THPT chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định]. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 2018 để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2(x+y) + \log_m(x-y) = 1$ và $x^2 - y^2 = m$

A. 2015 **B.** 1 **C.** 2016 **D.** 2017

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

$\log_2(x+y) + \log_m(x-y) = 1\ DK: 0 < m$

Đặt $t = \log_2(x+y) \Rightarrow x + y = 2^t$

Thay vào phương trình $\Rightarrow t + \log_m(x-y) = 1$

$\Rightarrow x - y = m^{1-t}$

Mà $x^2 - y^2 = m \Rightarrow 2^t.m^{1-t} = m$

$\Rightarrow 2^t = m^t$, có duy nhất cặp $(x;y)$

Suy ra có chỉ một và chỉ một giá trị của t

PT: $2^t = m^t$ suy ra

Nếu $m = 2$ có vô số t

Nếu $m \ne 2$ có một giá trị t

$m \ne 2, m < 2018 \Rightarrow m \in [3;2017]$

Góc nhìn 2.

Ta có $\begin{cases} \log_2(x+y)+\log_m(x-y)=1 \\ x^2-y^2=m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+y)+\log_m(x-y)=1 \\ \log_m(x+y)+\log_m(x-y)=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \log_m(x+y)=\log_2(x+y)$

Nếu $m=2$ có vô số nghiệm

Nếu $m\neq 2$ $\Rightarrow x+y=1$, lúc đó có hệ $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y^2=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{m+1}{2} \\ y=\dfrac{1-m}{2} \end{cases}$

Vậy $m\neq 2, m<2018 \Rightarrow m\in[3;2017]$

Câu 39. [GVDG cấp tỉnh-Bắc Ninh-2018-2019]. Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a\in(8;+\infty)$ **B.** $a\in(2;3]$ **C.** $a\in(-6;-5]$ **D.** $a\in(6;7]$

Lời giải:

Chọn D

Góc nhìn 1

Đặt $t=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$

Lúc đó bất phương trình trở thành $t+1+a\ln t\geq 0(1)$

Xét hàm số $f(t)=t+1+a\ln t, \forall t\in\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. Ta có $f'(t)=1+\dfrac{a}{t}$

Nếu $a>0$ thì ta có hàm số $f(t)$ đồng biến với mọi $t\in\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$

Suy ra $f(t)\geq f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{7}{4}+a\ln\dfrac{3}{4}$

Bất phương trình đã có đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f\left(t\right) \geq 0, \forall t \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4} + a\ln\frac{3}{4} \geq 0$

$\Leftrightarrow a \leq \frac{\frac{7}{4}}{\ln\frac{4}{3}} \approx 6,08$. Do a là số thực lớn nhất nên $a \in \left(6;7\right]$

Góc nhìn 2.

$a\ln\left(x^2 - x + 1\right) \geq -x^2 + x - 2 \geq \frac{-7}{8}$

* $a = 0$ thảo mãn

* $a > 0 \Rightarrow \ln\left(x^2 - x + 1\right) \geq \frac{-7}{8a}$

$\Leftrightarrow \min \ln\left(x^2 - x + 1\right) \geq \frac{-7}{8a}$

$\Leftrightarrow \ln\frac{3}{4} \geq \frac{-7}{8a}$

$\Leftrightarrow a \leq \frac{-7}{8\ln\frac{3}{4}} \approx 6,06$

Góc nhìn 3.

Đặt $t = x^2 + x + 1 \Rightarrow t \geq \frac{3}{4}$ BPT trở thành

$t + 1 + a\ln t \geq 0\left(1\right)$

Nếu $t \geq 1$ thì $\left(1\right)$ đúng với $\forall a \geq 0$

Nếu $\frac{3}{4} \leq t \leq 1 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow a \leq -\frac{t+1}{\ln t} = f\left(t\right)$

$f'\left(t\right) = -\frac{\ln t - 1 - \frac{1}{t}}{\left(\ln t\right)^2} > 0 \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến

BPT đúng với $\forall t \in \left[\frac{3}{4};1\right) \Leftrightarrow a \le f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{\frac{3}{4}+1}{\ln\frac{3}{4}} \approx 6,08$

Câu 40. Biết rằng a là số thực dương sao cho bất đẳng thức $3^x + a^x \ge 6^x + 9^x$ đúng với mọi số thực x . Mệnh đề nào dưới đây đúng.

A. $a \in [10;12]$ **B.** $a \in [12;14]$ **C.** $a \in [14;16]$ **D.** $a \in [16;18]$

Lời giải:

Chọn D

Góc nhìn 1.

$3+6+9=18 \to 16:9=2 \& 6:3=2$

Do đó $a^x + 3^x \ge 6^x + 9^x$

$\Leftrightarrow a^x \ge 6^x + 9^x - 3^x$

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \ge 6^x - 3^x + 9^x - 18^x$

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \ge 3^x\left(2^x-1\right) + 9^x\left(2^x-1\right)$

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \ge \underbrace{\left(2^x-1\right)\left(3^x-9^x\right)}_{T}(*)$

Do đó $(*)$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^x - 18^x \ge 0$ vì $T \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{18}\right)^x \ge 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{18} = 1 \Leftrightarrow a = 18$

Góc nhìn 2.

Đặt $f(x) = 3^x + a^x - 6^x - 9^x; x \in (-\infty;+\infty)$

Giả sử: $3^x + a^x \ge 6^x + 9^x \ \forall x \in (-\infty;+\infty)$

$\Rightarrow f(x) \ge 0 \ \forall x \in (-\infty;+\infty)$

Lại có $f(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

Suy ra $a = 18$

Câu 41. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ với x, y nguyên dương thỏa mãn $12^x + 1 = 13^y$.

A. 1 **B.** Vô số **C.** 4 **D.** 12

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

$12^x = 1 = 13^y \ (*)$

$(*)\ x = 1 \Rightarrow y = 1 (t/m)$

$(*)\ x \geq 2, (*) \Leftrightarrow 12^x = 12\left(13^{y-1} + ... + 1\right)$

$\Leftrightarrow 12^{x-1} = 13^{y-1} + ... + 1 (1)$

$$\begin{cases} VT(1) \vdots 12 \\ VP(1) \equiv \underbrace{1+1+1+...+1}_{y \text{ so} 1} = y (\text{mod } 12) \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 6z, z \geq 2$

$(*) \Leftrightarrow 12^x = 13^{6z} - 1 = \left(13^{3z} - 1\right)\left(13^{3z} + 1\right)$ và $x \geq 12$

$\Leftrightarrow 2^{2x}.3^x = \left(13^{3z} - 1\right)\left(13^{3z} + 1\right)$

$$\Leftrightarrow 2^{2x-2}.3^x = \frac{\left(13^{3z} - 1\right)}{2}.\frac{\left(13^{3z} + 1\right)}{2}$$

Do $\begin{cases} \dfrac{13^{3z} - 1}{2} > 1 \\ \dfrac{13^{3z} + 1}{2} > 1 \\ \left(\dfrac{13^{3z} - 1}{2}; \dfrac{13^{3z} + 1}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{13^{3z} - 1}{2} = 2^{2x-2} = 4^{x-1} \\ \dfrac{13^{3z} + 1}{2} = 3^x \end{cases}$

$\Rightarrow 3^x - 4^{x-1} = 1$

$$\Rightarrow 3^x > 4^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{1}{4} > \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$\Rightarrow x < 6$ (mâu thuẫn)

Vậy $x = y = 1$

Góc nhìn 2.

- $y = 1 \Rightarrow x = 1$
- $y \geq 2 \Rightarrow x > 1$ có $13^y = (12+1)^y = C_y^0.12^y + ... + C_y^{y-2}.12^2 + C_y^{y-1}.12 + 1$

Nên $(*) \Leftrightarrow \underbrace{C_y^0.12^y + ... + C_y^{y-2}.12^2}_{\vdots 12^2} + 12y = \underbrace{12^x}_{\vdots 12^2}(x > 1)$

$\Rightarrow y \vdots 12$. Đặt $y = 12k, k \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow 12^x = 13^{12k} - 1 = (13^3)^{4k} - 1 \vdots (13^3 - 1) \vdots 61$

$\Rightarrow 12^x \vdots 61$ (nguyên tốt) vô lý, vì 12 chỉ có các ước nguyên tố là $2,3$

Vậy $(x,y) = (1,1)$

Góc nhìn 3.

Dễ thấy $x = 2m + 1 (m \in N)$ (vì nếu x chẵn $VT \equiv 2(\text{mod} 13)$)

+ Nếu $x = 1 \Rightarrow y = 1$

+ Nếu $x > 1 \Rightarrow m \geq 1$ và $y > 1$

$VT = 12^{2m+1} + 1 = 13(12^{2m} - 12^{2m-1} + ... + 1)$ không chia hết cho 13^y

(vì $y > 1, 12^{2m} - 12^{2m-1} + ... + 1 \equiv 1 - 1 + 1 - ... + 1 \equiv 1(\text{mod } 13)$)

Suy ra phương trình có nghiệm $(x,y) = (1,1)$

Câu 42. Cho các số thực x, y, z t/m $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y} - z}$. Gọi $S = xy + yz + zx$. Khẳng định nào đúng?

A. $S \in (1;2016)$ **B.** $S \in (0;2017)$ **C.** $S \in (0;2018)$ **D.** $S \in (0;2015)$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Trắc nghiệm

Chọn $x=1\Rightarrow\begin{cases} y=\log_5 3 \\ z=\dfrac{2017}{1+\log_5 3}-\log_{15} 3 \end{cases}$

$\Rightarrow S=2017$

Góc nhìn 2.

Đặt $3^x=5^y=15^{\frac{2017}{x+y}-z}=t$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\log_3 t=\dfrac{1}{\log_t 3} \\ y=\log_5 t=\dfrac{1}{\log_5 t} \\ z=\dfrac{2017}{x+y}-\log_{15} t \end{cases}$$

$$S=\frac{1}{\log_t 3}.\frac{1}{\log_t 5}+\left(\frac{1}{\log_t 5}+\frac{1}{\log_t 3}\right)\left(\frac{2017}{\log_3 t+\log_5 t}-\frac{\log_3 t.\log_5 t}{\log_3 t+\log_5 t}\right)$$

$$=\log_3 t.\log_5 t+\left(\log_5 t+\log_3 t\right).\frac{2017-\log_3 t.\log_5 t}{\log_3 t+\log_5 t}$$

$$=2017$$

Góc nhìn 3.

Đặt $3^x=5^y=15^{\frac{2017}{x+y}-z}=t$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\log_3 t \\ y=\log_5 t \\ \dfrac{2017}{x+y}-z=\log_{15} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2017}{x+y}-z=\log_{15} t=\frac{1}{\log_t 15}=\frac{1}{\log_t 3+\log_t 5}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y}$$

$$\Rightarrow\frac{2017}{x+y}=\frac{xy+\left(x+y\right)z}{x+y}\Leftrightarrow 2017=xy+yz+zx=S$$

Câu 43. Số thực a nhỏ nhất để bất đẳng thức $\ln(1+x) \geq x - ax^2$ luôn đúng với mọi số thực dương x là $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tổng $2m+3n$ bằng.

A. 5 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 11

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Từ đk ta có $a \geq \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}, \forall x > 0$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ có $f'(x) = \dfrac{2\ln(1+x) - x - \dfrac{x}{1+x}}{x^3}$

Xét $g(x) = 2\ln(1+x) - x - \dfrac{x}{1+x}$ có $g'(x) = \dfrac{-x^2}{(1+x)^2} < 1$

Do đó $g(x) < g(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3} < 0$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó $a \geq \lim_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 2m + 3n = 8$

Góc nhìn 2.

$1 > 1 - x^2 \; \forall x > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} > 1 - x \; \forall x > 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{x+1} > \int_0^t (1-x)\,dx, t > 0$

$\Rightarrow \ln|x+1| \Big|_0^t > \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^t$

$\Rightarrow \ln(t+1) > t - \dfrac{t^2}{2}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2m + 3n = 8$

Nhận xét: Đây là một bài toán khá hay, để tư duy được cách 2 thì đòi hỏi kiến thức phải khá rộng.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\log_3\left(x^2 + 2mx\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(2x - m - 1\right) = 0$ có nghiệm duy nhất.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

$PT \Leftrightarrow \log_3\left(x^2 + 2mx\right) = \log_3\left(2x - m - 1\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2mx = 2x - m - 1 \\ 2x > m + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x\left(m - 1\right) + m + 1 = 0 \\ 2x > m + 1 \end{cases} \left(I\right)$

$\Delta' = \left(m - 1\right)^2 - m - 1 = m^2 - 3m$

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$

$m = 0 \ \left(I\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\left(N\right) \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

$m = 3 \ \left(I\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\left(L\right) \\ x > 2 \end{cases}$

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 0 \end{array}\right.$

- TH có nghiệm $x = \frac{m + 1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{4}+m^2-1+m+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

Thử lại $m=-1,\ (I)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$

$m=-\frac{1}{5}\ (I)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\frac{12}{5}x+\frac{4}{5}=0 \\ x>\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

- TH: $m\neq -1; m\neq \frac{-1}{5}$

  YCBT $\Leftrightarrow PT$ có 2 nghiệm $x_1<\frac{m+1}{2}<x_2$

  $\Leftrightarrow \left(\frac{m+1}{2}\right)^2+m^2-1+m+1<0$

  $\Leftrightarrow -1<m<-\frac{1}{5}$

  Vậy $\left[\begin{array}{l} -1<m<-\frac{1}{5} \\ m=0 \end{array}\right.$

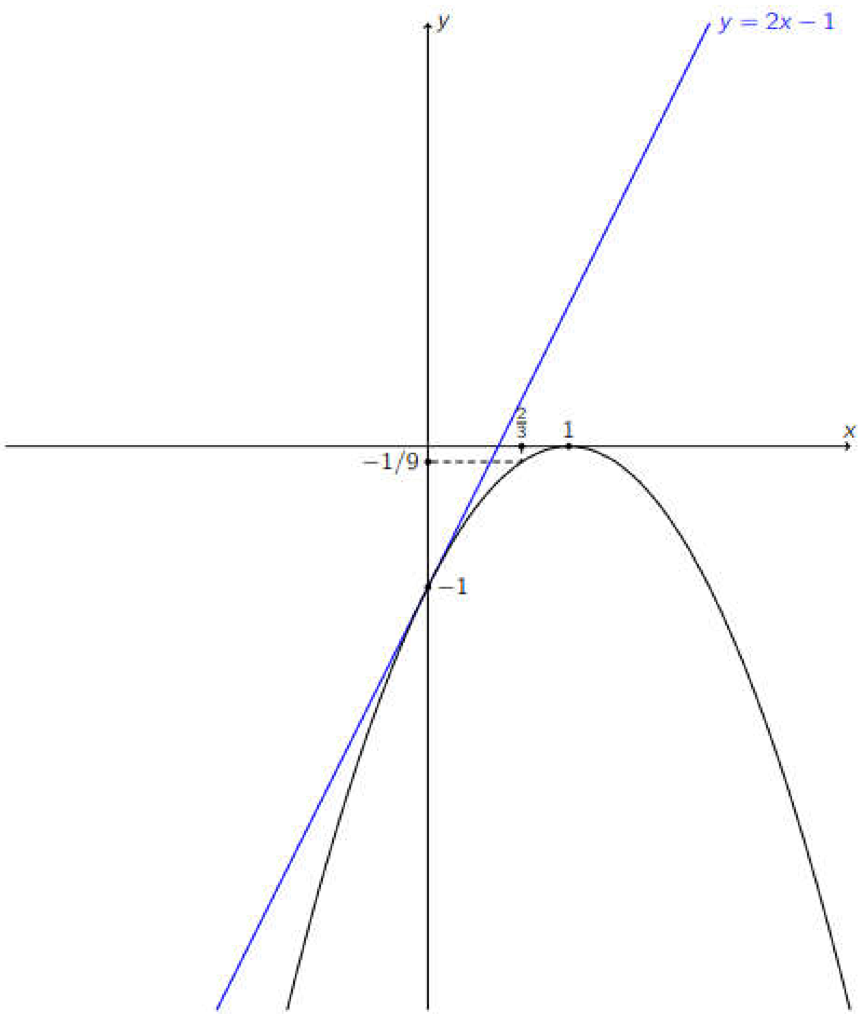
Góc nhìn 2.

$PT \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-m-1>0 \\ x^2+2mx=2x-m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2x-1 \\ m=\dfrac{-x^2+2x-1}{2x+1} \end{cases}$

Xét $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-1}{2x+1}$

BBT

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



$\Rightarrow PT$ có nghiệm duy nhất tương đương đường thẳng $y=m$ cắt (C) tại đúng một điểm thuộc thần đồ thị (C) nằm dưới đường thẳng $y=2x-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ \dfrac{-1}{5} \le m \le 1 \end{array}\right.$

Câu 44. Phương trình $2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thuộc $(0;2018)$?

A. 321 **B.** 322 **C.** 642 **D.** 643

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

$\log_3(\cot^2 x) = \log_2 \cos x$

$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \log_2 \cos x$

Đặt $t = \log_2 \cos x \Rightarrow \cos x = 2^t$

$\Rightarrow \log_3 \dfrac{4^t}{1-4^t} = t$

$\Leftrightarrow 4^t = 3^t(1-4^t)$

$\Leftrightarrow 4^t + 12^t = 3^t$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)^t + \left(\dfrac{12}{3}\right)^t = 1$

VT: hàm đồng biến, VP: hàm hằng

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $t = -1$

$\Rightarrow \log_2 \cos x = -1$

$\Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

$\cot x > 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

$0 < \dfrac{\pi}{3} + k2\pi < 2018$

$\Rightarrow 0 < k < 321$

Vậy có 322 giá trị

Góc nhìn 2.

Casio

Mode 7 nhập $F(x)=2\log_3\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)-\log_2(\cos x)$

STAR: 0; END: 360; STEP: 15

Ta được nghiệm $x=60^o=\dfrac{\pi}{3}(rad)$

STAR: 360; END: 720; STEP: 15

Ta được nghiệm $x=420^o=60^o+360^o=\dfrac{\pi}{3}+2\pi(rad)$

Vậy phương trình có một họ nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

Câu 45. Giả sử x,y,z là các số thực thỏa mãn

$$\log_2\left[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)\right]=\log_3\left[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)\right]=\log_5\left[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)\right]=p>1$$

Mệnh đề nào đúng ?

A. $z<x<y$ **B.** $x<y<z$ **C.** $y<z<x$ **D.** $z<y<x$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

$$GT\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)=2^p\\ \log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)=3^p\\ \log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)=5^p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x=2^{-2^p}\\ \log_3 y=3^{-3^p}\\ \log_5 z=5^{-5^p}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2^{2^{-2^p}}\\ y=3^{3^{-3^p}}\\ z=5^{5^{-5^p}}\end{cases}$$

Với $x\ge 2, p>1$ xét hàm số $y=x^{x^{-x^p}}\Rightarrow\ln y=x^{-x^p}\ln x\Rightarrow\ln[\ln y]=\ln(\ln x)-x^p\ln x$

Lấy đạo hàm 2 vế ra được

$$\frac{\frac{y'}{y}}{\ln y}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}-x^{p-1}-px^{p-1}\ln x=\frac{1}{x\ln x}-x^{p-1}(1+p\ln x)$$

$$< \frac{1}{x\ln x} - 1 - \ln x = \frac{1 - x\ln x - x(\ln x)^2}{x\ln x} < 0; \forall x > 2; p > 1$$

$\Rightarrow y' < 0, \forall x > 2, p > 1$

Do đó $y(2) > y(3) > y(5) \Rightarrow x > y > z$

Góc nhìn 2.

Cho $p = 2 \Rightarrow \begin{cases} x \approx 1,04 \\ y \approx 1,00151 \Rightarrow x > y > z \\ x \approx 1 \end{cases}$

****Nhận xét: Có thể thầy là bài này chỉ hay khi nó là bài tự luận, trắc nghiệm thì một dòng như cách nhìn trên.***

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10;10]$ thỏa mãn $2^x \geq mx + 1$ với $\forall x > 0$?

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

+Với $\forall x \in (0;1)$. Theo BĐT Becnuli $(1+m)^x < 1 + mx$

Mà $2^x \leq (1+m)^x$ với $m \geq 1$

$\Rightarrow 2^x < 1 + mx$ với $m \geq 1$ nên $m \geq 1$ không thỏa mãn YCBT

+Với $m \leq 0 \Rightarrow 2^x - mx \geq 2^x > 2^0, \forall x > 0$

$\Rightarrow 2^x - mx > 1 \ \forall x > 0$

$\Rightarrow 2^x > 1 + mx \ \forall x > 0$

Nên $m \in [-10;10] \Rightarrow$ có 11 giá trị

Góc nhìn 2.

$\forall x \in (0;1)$

Xét $f(x) = 2^x$ và $y = 1 + x$

$2^x < 1 + x$

$\forall m \geq 1$ thì $1 + x \leq mx + 1$

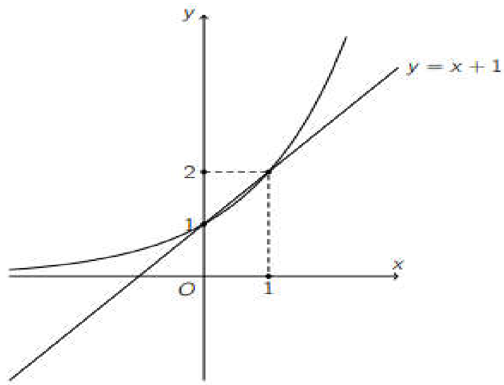
Nên $2^x < mx + 1 \quad \forall m \geq 1$

+Với $m \leq 0 \Rightarrow 2^x - mx \geq 2^x > 2^0, \forall x > 0$

$\Rightarrow 2^x - mx > 1 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow 2^x > 1 + mx \quad \forall x > 0$

Nên $m \in [-10;10] \Rightarrow$ có 11 giá trị



Góc nhìn 3.

$m \leq \dfrac{2^x - 1}{x}$

Xét $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{x}(x > 0) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2^x(x\ln 2 - 1) + 1}{x^2}$

Xét $g(x) = 2^x(x\ln 2 - 1) + 1; g'(x) = 2^x \ln^2 2x > 0$

$\Rightarrow g$ tăng $\Rightarrow g(x) > \lim_{x \to 0+} > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow m \leq 0,69...$

$\Rightarrow m \in [-10;0] \Rightarrow 11$ số

Câu 47. [Thi thử chuyên Quốc Học Huế - L1 – 2019]. Cho x, y là các số lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y} \geq x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Ta có:

$$y^x\left(e^x\right)^{e^y} \geq x^y\left(e^y\right)^{e^x} \Leftrightarrow \ln\left(y^x\left(e^x\right)^{e^y}\right) \geq \ln\left(x^y\left(e^y\right)^{e^x}\right) \Leftrightarrow x\ln y + xe^y \geq y\ln x + ye^x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x + e^x} \geq \frac{y}{\ln y + e^y} (*)$$

(Vì $y=e^x+\ln x$ có $y'=e^x+\dfrac{1}{x}>0;\forall x>1$ nên $y\ge y(1)=e>0$)

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{t}{\ln t+e^t}$ trên $(1;+\infty)$ ta có $f'(t)=\dfrac{\ln t+e^t-1-te^t}{\left(\ln t+e^t\right)^2}$. Với hàm số

$g(t)=\ln t+e^t-1-te^t$ có $g'(t)=\dfrac{1}{t}-te^t<0,\forall t>1$

Nên $g(t)<g(1)=-1\Rightarrow f'(t)<0;\forall t>1$

$\Rightarrow y=f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên với $(*)\, f(x)\ge f(y)\Rightarrow y\ge x>1$

Khi đó $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}\ge\dfrac{1}{2}+2\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_x y.\dfrac{1}{\log_x y}}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{1}{2}\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow\left(\log_x y\right)^2=2\Leftrightarrow y=x^{\sqrt{2}}$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Góc nhìn 2.

Với $x,y>1$ thì $\log_x y;\log_y x$ là các số dương, ta có:

$P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}\ge\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{1}{2}\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow\left(\log_x y\right)^2=2\Leftrightarrow y=x^{\sqrt{2}}$

Thay $\begin{cases} y=x^{\sqrt{2}} \\ x>1\end{cases}$ vào điều kiện ban đầu thấy thỏa mãn

Vậy $P_{\min}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Câu 48. [THPT Trần Hưng Đạo – TPHCM năm 2017-2018]. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $2018^{2\left(x^2-y+1\right)}=\dfrac{2x+y}{(x+1)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2y-3x$

A. $P_{\min}=\dfrac{1}{2}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{7}{8}$ **C.** $P_{\min}=\dfrac{3}{4}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{5}{6}$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Ta có $2018^{2\left(x^2-y+1\right)}=\dfrac{2x+y}{\left(x+1\right)^2}\Leftrightarrow 2\left(x^2-y+1\right)=\log_{2018}\dfrac{2x+y}{\left(x+1\right)^2}$

$\Leftrightarrow 2\left(x+1\right)^2-2\left(2x+y\right)=\log_{2018}\left(2x+y\right)-\log_{2018}\left(x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\left(x+1\right)^2+\log_{2018}\left(x+1\right)^2=\log_{2018}\left(2x+y\right)+2\left(2x+y\right)$

Có dạng $f\left[\left(x+1\right)^2\right]=f\left(2x+y\right)$ với $f\left(t\right)=2t+\log_{2018}t,\left(\forall t>0\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=2t+\log_{2018}t,\left(\forall t>0\right)$, ta có $f'\left(t\right)=2+\dfrac{1}{t.\ln 2018}>0\left(\forall t>0\right)$ nên hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Khi

$f\left[\left(x+1\right)^2\right]=f\left(2x+y\right)\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2=2x+y\Leftrightarrow y=x^2+1$

Ta có $P=2y-3x=2\left(x^2+1\right)-3x=2x^2-3x+2$

BBT

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
P	$+\infty$ ↘	$\frac{7}{8}$	↗ $+\infty$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{7}{8}$ khi $x=\dfrac{3}{4}$

Góc nhìn 2.

Ta có $2018^{2\left(x^2-y+1\right)}=\dfrac{2x+y}{\left(x+1\right)^2}\Leftrightarrow 2018^{2\left(x^2+2x+1-2x-y\right)}=\dfrac{2x+y}{\left(x+1\right)^2}\Leftrightarrow\dfrac{2018^{2\left(x^2+2x+1\right)}}{2018^{2\left(2x+y\right)}}=\dfrac{2x+y}{\left(x+1\right)^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2018^{2\left(x+1\right)^2}}{2018^{2\left(2x+y\right)}}=\dfrac{2x+y}{\left(x+1\right)^2}$

Đặt $u=(x+1)^2, v=2x+y; (u,v>0)$. Phương trình trên có dạng $\dfrac{2018^{2u}}{2018^{2v}}=\dfrac{v}{u}$

$\Leftrightarrow u.2018^{2u}=v.2018^{2v} (1)\ (u,v>0)$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t.2018^t$ có $f'(t)=2018^t+t.2018^t\ln 2018>0\ \forall t>0$, Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó phương trình (1) có dạng $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=2x+y\Leftrightarrow y=x^2+1$. Khi đó $P=2y-3x=2(x^2+1)-3x=2x^2-3x+2$ có đồ thị là một đường cong Parabol, đỉnh là điểm thấp nhất có tạo độ $I\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{7}{8}\right)$. Do vậy $P_{\min}=\dfrac{7}{8}$ khi $x=\dfrac{3}{4}$

Câu 49. [THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018]. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$

A. 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Ta có:

$\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}3(x+y)+3(x+y)=\log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$

Xét hàm số $f(t)=\log_{\sqrt{3}}t+t, t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln\sqrt{3}}+1>0, t>0$. Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$

Do đó $f(3(x+y))=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow 3(x+y)=x^2+y^2+xy+2 (1)$

Từ $(1)\Leftrightarrow xy=(x+y)^2-3(x+y)+2$

Ta có $x=x+xy-xy=x(y+1)-xy\le\left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2-xy$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y+1$

Do đó từ (1) suy ra $x \le \dfrac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2$

Đặt $t = x+y, t > 0$

Suy ra $P = \dfrac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \le \dfrac{2t+1+\dfrac{(t+1)^2}{4} - t^2 + 3t - 2}{t+6} = \dfrac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t)$

Ta có $f'(t) = \dfrac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3(nhan)$

BBT

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào BTT, ta có $\max P = \max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=3 \\ x=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Góc nhìn 2.

Trắc nghiệm

Ta có $P = 2 + \dfrac{x-11}{x+y+6}$

Trong (1) coi y là ẩn, x là tham số. Ta có $y^2 + (x-3)y + x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm khi

$$\Delta = (x-3)^2 - 4(x^2-3x+2) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \le x \le \frac{3+2\sqrt{3}}{3} < 3$$

Nên $x - 11 < 0$

Vậy $P < 2$ nên trong 4 phương án thì $P_{\max} = 1$ khi đó $x = 2; y = 1$

Góc nhìn 3.

Trắc nghiệm

Ta có $P=3-\dfrac{y+17}{x+y+6}<0$ với $x,y>0$

Nếu $P=2$ thì $\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}=2\Leftrightarrow x=11$ thay vào (1) ta được $y^2+3y+90=0$ (vô lí)

Nếu $P=1$ thì $\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}=1\Leftrightarrow 2x+y=5\Leftrightarrow y=5-2x$ thay vào (1) ta được

$3(x+5-2x)=x^2+(5-2x)^2+x(5-2x)+2\Leftrightarrow 3x^2-12x+12=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=1$

Vậy $P_{\max}=1$

Câu 50. [CHUYÊN THÁI BÌNH]. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\log_3\left(1-x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+m-4\right)=0$.

A. $\dfrac{-1}{4}<m<0$ **B.** $5\le m\le\dfrac{21}{4}$. **C.** $5<m<\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{-1}{4}\le m\le 2$

Lời giải:

Chọn C.

$$\log_3\left(1-x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+m-4\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2>0\\ \log_3\left(1-x^2\right)=\log_3\left(x+m-4\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-1;1)\\ 1-x^2=x+m-4\end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)=x^2+x+m-5=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\in(-1;1)$

Góc nhìn 1.

Dùng định lí về dấu tam thức bậc hai.

Để thỏa yêu cầu bài toán ta phải có phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm thỏa: $-1<x_1<x_2<1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a.f(-1)>0\\ a.f(1)>0\\ \Delta>0\\ -1<\dfrac{S}{2}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-5>0\\ m-3>0\\ 21-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow 5<m<\frac{21}{4}$$

.

Góc nhìn 2.

Với điều kiện có nghiệm, tìm các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ rồi so sánh trực tiếp các nghiệm với 1 và -1.

Góc nhìn 3.

Dùng đồ thị

Đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $\in(-1;1)$.

Góc nhìn 4.

Dùng đạo hàm

Xét hàm số $f(x)=x^2+x-5 \Rightarrow f'(x)=2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Có $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{21}{4}; f(1)=-3; f(-1)=-5$

Ta có bảng biến thiên

x	-1		$-\dfrac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	$\searrow$	$-\dfrac{21}{4}$	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên, để có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi

$$-\frac{21}{4}<-m<-5 \Rightarrow \frac{21}{4}>m>5.$$

Góc nhìn 5.

Casio

Sau khi đưa về phương trình $x^2+x+m-5=0$, ta nhập phương trình vào máy tính.

* Giải khi $m=-0,2$: không thỏa $\Rightarrow$ loại A, D.

* Giải khi $m=5$: không thỏa $\Rightarrow$ loại B.

Câu 51. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4)+b(b-6)+c(c-4)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c}$.

A. $\frac{12+\sqrt{30}}{3}$ **B.** $\frac{3+\sqrt{30}}{3}$ **C.** $\frac{8+\sqrt{30}}{3}$ **D.** $\frac{6+\sqrt{30}}{3}$

Lời giải:

Chọn D

Góc nhìn 1

Từ điều kiện ta có:

$$\log_2(a+b+c) - \log_2(a^2+b^2+c^2+2) = a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4(a+b+c)) + 4(a+b+c) = \log_2(a^2+b^2+c^2+2) + a^2+b^2+c^2+2$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c) = a^2+b^2+c^2+2 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2 = 10$$

Và biến đổi:

$$P(a+b+c) = a+2b+3c \Leftrightarrow (P-1)a+(P-2)b+(P-2)c = 0$$

$$\Leftrightarrow (P-1)(a-2)+(P-2)(b-2)+(P-2)(c-2) = -6P+12$$

Sử dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

$$(-6P+12)^2 \le \left((P-1)^2+(P-2)^2+(P-3)^2\right)\left((a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (-6P+12)^2 \le 10\left((P-1)^2+(P-2)^2+(P-3)^2\right) \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{3} \le P \le \frac{6+\sqrt{30}}{3}$$

Góc nhìn 2.

Điều kiện để mặt phẳng $(P-1)a+(P-2)b+(P-3)c = 0$ và mặt cầu $(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2 = 10$ có điểm chung là

$$d(I,(\alpha)) \le R \Leftrightarrow \frac{|2(P-1)+2(P-2)+2(P-3)|}{\sqrt{(P-1)^2+(P-2)^2+(P-3)^2}} \le \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{3} \le P \le \frac{6+\sqrt{30}}{3}$$

Câu 52. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $5^x + 25^y + 125^z = 2018$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$.

A. $\frac{1}{6}\log_5 2016$ **B.** $\log_5 2016$ **C.** $\frac{1}{2}\log_5 2017$ **D.** $\frac{1}{3}\log_5 2018$

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

Đặt $a = 5^x; b = 5^{2y}; c = 5^{3z}$

Ta có $5^{6S} = 5^{x+2y+3z} = a.b.c$

$5^x + 25^y + 125^z = 2018 \Leftrightarrow 5^x + 5^{2y} + 5^{3z} = 2018 \Rightarrow a + b + c = 2018$

Ta có $S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \Leftrightarrow 6S = x + 2y + 3z$ min $\Leftrightarrow 5^{6S}$ min $\Leftrightarrow (a.b.c)$min

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $(a.b.c)$

Vì các số thực x, y, z không âm nên
$a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1 \rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0$
$\Leftrightarrow ab \geq a + b - 1 \Rightarrow abc \geq ac + bc - c \geq (a + c - 1) + (b + c - 1) - c = a + b + c - 2$

$\Rightarrow abc \geq 2016$

Khi đó ta có $(a.b.c)\text{min} = 2016 \Leftrightarrow 5^{6S} \geq 2016 \Leftrightarrow 6S \geq \log_5 2016 \Rightarrow S \geq \frac{1}{6}\log_5 2016$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 2016$

Vậy $\min S = \frac{1}{5}\log_5 2016$

Góc nhìn 2.

Đặt $a = 5^x; b = 5^{2y}; c = 5^{3z}$

Ta có $5^{6S} = 5^{x+2y+3z} = a.b.c$

$5^x + 25^y + 125^z = 2018 \Leftrightarrow 5^x + 5^{2y} + 5^{3z} = 2018 \Rightarrow a + b + c = 2018$

Ta có $S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \Leftrightarrow 6S = x + 2y + 3z$ min $\Leftrightarrow 5^{6S}$ min $\Leftrightarrow (a.b.c)$min

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $(a.b.c)$

$abc=\left[(a-1)+1\right]\left[(b-1)+1\right]\left[(c-1)+1\right]$

Ta có

$=(a-1)(b-1)(c-1)+(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(a-1)(c-1)+(a-1)+(b-1)+(c-1)+1$
$\geq a+b+c-2=2016$

Ta có $(a-1)(b-1)(c-1)+(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(a-1)(c-1)\geq 0$

$(a.b.c)\min=2016\Leftrightarrow 5^{6S}\geq 2016\Leftrightarrow 6S\geq \log_5 2016\Rightarrow S\geq \frac{1}{6}\log_5 2016$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=2016$

Vậy $\min S=\frac{1}{5}\log_5 2016$

Câu 53. [THTT lần 1 – tháng 12]. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $(m-1)\log^2_{\frac{1}{3}}(x-3)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x-3}+4(m-1)=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{10}{3};6\right]$?

A. 5 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

$(m-1)\log^2_{\frac{1}{3}}(x-3)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x-3}+4(m-1)=0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log^2_{\frac{1}{3}}(x-3)-4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+4(m-1)=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log^2_{\frac{1}{3}}(x-3)-(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+(m-1)=0$

Đặt $t=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$ $\left(t\in[-1;1]\right)$, phương trình trở thành $(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0$

Bài toán trở thành tìm giá trị nguyên của m để phương trình $(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0(*)$ có nghiệm $t\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow PT: m=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ có nghiệm $t\in[-1;1] \Leftrightarrow \min_{[-1;1]} g(t)\le m\le \max_{[-1;1]} g(t)$

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$. Ta có $g'(t)=\dfrac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}\le 0 \forall t\in[-1;1]$

Suy ra hàm số $g(t)=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ nên $\min_{[-1;1]} g(t)=g(1)=-3$;

$\max_{[-1;1]} g(t)=g(-1)=\dfrac{7}{3}$

Vậy $-3\le m\le \dfrac{7}{3}, m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$

Góc nhìn 2.

Sử dụng tam thức bậc 2

+ TH1: $m=1$ PT$(*)$ có dạng $4t=0 \Leftrightarrow t=0\in[-1;1]$

+ TH2: $m\ne 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=-3m^2-2m+21\ge 0\\ (m-1)(m+3)\le 0\\ (m-1)(3m-7)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\le m\le \dfrac{7}{3}\\ -3\le m\le 1\\ 1\le m\le \dfrac{7}{3}\end{cases} \Leftrightarrow -3\le m\le \dfrac{7}{3}$

Câu 54. [THPT Chuyên Hùng Vương – Bình Phước lần 2 năm 2017-2018]. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2-x)(2+4^x)=6$. Khi đó số phần tử của tập S là bao nhiêu.

A. $|S|=2$ **B.** $|S|=3$ **C.** $|S|=4$ **D.** $|S|=5$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Định lí Rolle: Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và $f(a)=f(b)$ thì tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=0$.

Hệ quả: Nếu $f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$ và $f'(x)$ có nhiều nhất n nghiệm (n là số nguyên dương) trên $(a;b)$ thì $f(x)$ có nhiều nhất $n+1$ nghiệm trên $(a;b)$

$(2-x)(2+4^x)=6 \Leftrightarrow (2-x)(2+4^x)-6=0$. Xét hàm số $f(x)=(2-x)(2+4^x)-6$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$. Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Theo đinh lí Rolle:

Trên đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ ta có $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ nên $\exists c_1 \in \left(0;\frac{1}{2}\right): f'(c_1)=0$

Trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ta có $f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ nên $\exists c_2 \in \left(\frac{1}{2};1\right): f'(c_2)=0$

Do đó $f'(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt $c_1;c_2$

Mặt khác ta xét $f'(x)=-(2+4^x)+4^x\ln 4(2-x)$

$f''(x)=-4^x\ln 4+4^x\ln^2 4(2-x)-4^x\ln 4=4^x\left(-2\ln 4+2\ln^2 4-x\ln^2 4\right)=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{2-2\ln 4}{\ln 4}$

Vậy $f''(x)=0$ có nghiệm duy nhất suy ra $f'(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm suy ra $f(x)=0$ có nhiều nhất là ba nghiệm nên $|S|=3$

Góc nhìn 2.

$(2-x)(2+4^x)=6 \Leftrightarrow 4^x=\dfrac{2x+2}{2-x}(x\neq 2)$

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y=4^x$ và $y=\dfrac{2x+2}{2-x}$ trên cùng một hệ trục Oxy và xác định được số giao điểm là 3 nên $|S|=3$

Câu 55. [Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – Học kì 1 – 2018]. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2};+\infty)$.

A. $m\in(0;+\infty)$ **B.** $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$ **C.** $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$ **D.** $m\in(-\infty;0)$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Điều kiện $x>0$

$\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$

$\Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0(1)$

Đặt $t=\log_2 x$. Vì $x>\sqrt{2}$ nên $\log_2 x>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$. Do đó $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

(1) trở thành $(1+t)^2-2(m+1)t-2<0\Leftrightarrow t^2-2mt-1<0(2)$

YCBT tương đương tìm m để BPT (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta'=m^2=1>0,\forall m\in\mathbb{R}$

$f(t)=t^2-2mt-1=0$ có $ac<0$ nên (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $t_1<0<t_2$

Khi đó cần $\frac{1}{2}<t_2\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2+1}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$

Góc nhìn 2.

$t^2-2mt-1<0\Leftrightarrow f(t)=\frac{t^2-1}{2t}<m\left(t>\frac{1}{2}\right)$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0;+\infty)$ ta được $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Câu 56. [Chuyên Lam Sơn – KSCL lần 2 2018-2019]. Cho a là số thực dương, $a\neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x\leq x-1$ nghiệm đúng với mọi $x>0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(2;3)$ **B.** $(8;+\infty)$ **C.** $(7;8)$ **D.** $(3;5]$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Từ các khoảng cho ở đáp án ta chỉ cần xét $a>2$

Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ nên

$\lim_{x\to 1}\frac{\log_a x}{x-1}=\frac{1}{\ln a}.\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{1}{\ln a}.\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left[(x-1)+1\right]}{x-1}=\frac{1}{\ln a}$

Trường hợp 1. Xét $x=1$, thay vào $2\log_a x \le x-1$ thấy luôn thỏa mãn.

Trường hợp 2. Xét $x<1$ khi đó $2\log_a x \le x-1 \Leftrightarrow 2.\dfrac{\log_a x}{x-1} \ge 1$, chuyển qua giới hạn bên trái của 1 ta thu được $\dfrac{2}{\ln a} \ge 1 \Leftrightarrow 2 \ge \ln a \Leftrightarrow a \le e^2\,(1)$

Trường hợp 3. Xet $x>1$, khi đó $2\log_a x \le x-1 \Leftrightarrow 2.\dfrac{\log_a x}{x-1} \le 1$, chuyển qua giới hạn bên phải của 1 ta thu được $\dfrac{2}{\ln a} \ge 1 \Leftrightarrow \ln a \ge 2 \Leftrightarrow a \ge e^2\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=e^2 \in (7;8)$

Góc nhìn 2.

Ta giả sử $0<a<1$, khi đó bất phương trình đã cho, ta chọn $x=\dfrac{1}{2}$

Ta được : $\begin{cases} \log_a \dfrac{1}{2} > \log_a 1 = 0 \\ \dfrac{1}{2}-1<0 \end{cases}$ là điều mâu thuẫn.

Vì vậy ta chỉ xét trường hợp $a>1$

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương $2\ln x \le (x-1)\ln a \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\ln x}{x-1} \le \ln a; x>1 \\ \dfrac{2\ln x}{x-1} \ge \ln a, x\in(0;1) \end{cases} \quad (I)$

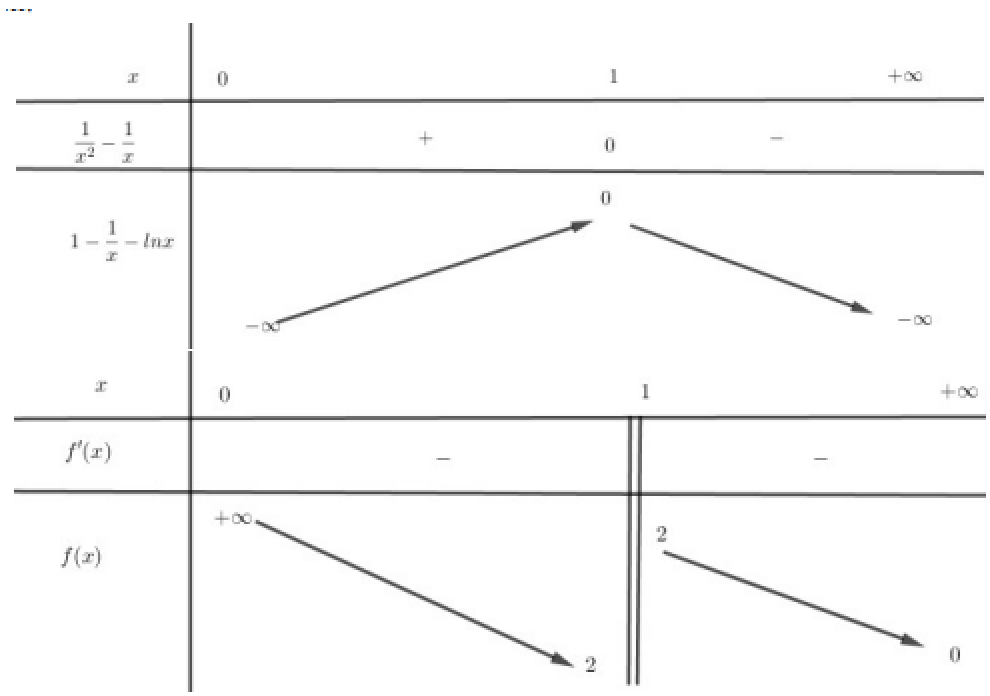
Để ý rằng $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ và $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = +\infty$

Ta xét hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$ trên tập $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2},$$

$$\left(1-\frac{1}{x}-\ln x\right)'=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$$

BBT:



Theo (1) thì

$$\begin{cases} \ln a \le \min_{(0;1)} f(x) \\ \ln a \ge \max_{(1;+\infty)} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln a \le 2 \\ \ln a \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \ln a = 2 \Leftrightarrow a = e^2$$

Câu 57. Biết rằng a là tham số thực dương khác 1 để bất phương trình $\log_a x \le x - 1$ được nghiệm đúng với mọi x dương. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$ **B.** $a \in \left(\frac{5}{2}; 3\right)$ **C.** $a \in (3;10)$ **D.** $a \in (10; +\infty)$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Có $\log_a x \le x - 1, \forall x > 0 \Leftrightarrow \log_a x - x + 1 \le 0, \forall x > 0$

Xét hàm số $y = f(x) = \log_a x - x + 1$, tập xác định $D = (0; +\infty)$

+ Trường hợp 1: Xét $\frac{1}{\ln a} < 0 \Leftrightarrow \ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Có $f'(x) = \frac{1 - x\ln a}{x\ln a} < 0 \left(do \ \ln a < 0\right)$, Suy ra $y = f(x)$ nghịch biến trong $(0; +\infty)$

BBT:

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Có $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

Suy ra $f(x) = \log_a x - x + 1 \le 0, \forall x > 0$, không thỏa mãn

Suy ra $0 < a < 1$ không thỏa mãn

$+$ Trường hợp 2: Xét $\dfrac{1}{\ln a} > 0 \Leftrightarrow \ln a > 0 \Leftrightarrow 1 < a$

BBT:

x	0		$\dfrac{1}{\ln a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào BBT có $\log_a x - x + 1 \le 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{\ln a}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow \log_a\left(\dfrac{1}{\ln a}\right) - \dfrac{1}{\ln a} + 1 \le 0 \Leftrightarrow -\log_a(\ln a) - \dfrac{1}{\ln a} + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\ln(\ln a)}{\ln a} - \dfrac{1}{\ln a} + 1 \le 0 \Leftrightarrow -\ln(\ln a) + \ln a - 1 \le 0 \, (2)$, đặt $t = \ln a, t > 0$

(2) trở thành $\ln t - t + 1 \ge 0$

Xét hàm số $y = g(t) = \ln t - t + 1,\ t > 0$

Có $g'(t) = \dfrac{1}{t} - 1 = \dfrac{1-t}{t}, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

BBT

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

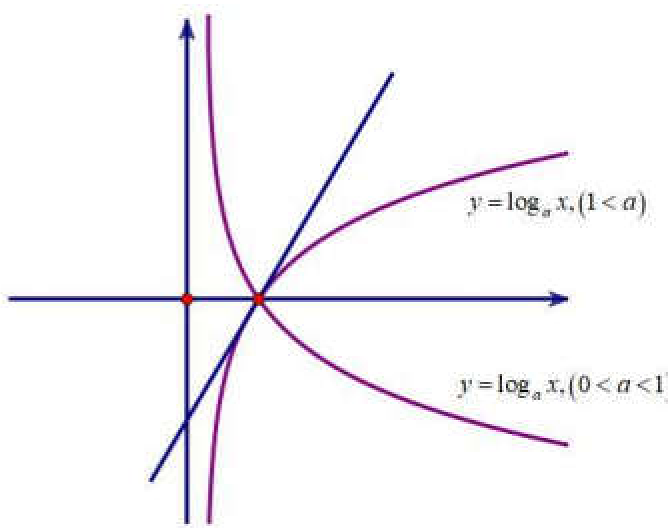
Dựa vào BBT $g(t) = \ln t - t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e \in \left(\frac{5}{2};3\right)$

Vậy $a \in \left(\frac{5}{2};3\right)$

Góc nhìn 2.

Xét $(C)\, y = \log_a x,\ x > 0;\ (d)\, y = x - 1$

Nhận xét đồ thị của $(C)\, y = \log_a x(1 < a), (C")\, y = \log_a x, (0 < a < 1)$



Dựa vào đồ thị có $\log_a x \leq x - 1, \forall x > 0$. Suy ra $a > 1$

Xét $(C)\, y = \log_a x,\ x > 0; (d)\, y = x - 1$ luôn đi qua $A(1;0)$

Có $\log_a x \leq x - 1, \forall x > 0$. Suy ra $(d)\, y = x - 1$ tiếp xúc (C) tại $A(0;1)$

+ Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) với $(C_1)\, y=\log_a x\,(1<a)$ tại $A(0;1)$

Có $(C_1)\, y=f(x)=\log_a x\,(1<a)$, xét $x>0$

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a} \Leftrightarrow f'(1)=\dfrac{1}{\ln a}$

Phương trình $(\Delta)\equiv(d) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln a}-1 \Leftrightarrow a=e$

Góc nhìn 3.

Có $\log_a x \le x-1, \forall x>0$

Xét $y=f(x)=\log_a x-x+1$, với $x\in(0;+\infty)$

Có $f(x)=\log_a x-x+1$ có đạo hàm liên tục trong $(0;+\infty)$ và
$f(x)=\log_a x-x+1\le 0=f(1), \forall x\in(0;+\infty)$

Suy ra $Max_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$. Suy ra $M(1;0)$ là điểm cực đại của đồ thị
$(C)\, f(x)=\log_a x-x+1$

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}-1, f'(1)=0 \Leftrightarrow \ln a=1 \Leftrightarrow a=e$

Thử lại $a=e$ có $f(x)=\ln x-x+1$ với $x\in(0;+\infty)$

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

BBT

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào BBT có khi $a=e$ thì $\log_a x-x+1\le 0, \forall x\in(0;+\infty)$. Suy ra $a=e$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 58. Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm nguyên phân biệt :

$$\sqrt{2e^{2t}+2}=\frac{e^t+1}{e^t-1}$$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải:

Chọn A

Góc nhìn 1.

Đặt $x=e^t>0$

$$\Rightarrow \sqrt{2\left(x^2+1\right)}=\frac{x+1}{x-\ln x}\Leftrightarrow x-\ln x-\frac{x+1}{\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}=0\left(1\right)$$

Có $\sqrt{2\left(x^2+1\right)}\ge\sqrt{\left(x+1\right)^2}=x+1$

$$\Rightarrow VT\left(1\right)=x-\ln x-\frac{x+1}{\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}\ge x-1-\ln x$$

$$g\left(x\right)=x-1-\ln x\Rightarrow g'\left(x\right)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}=0$$

$\Leftrightarrow x=1$

BBT:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\Rightarrow g\left(x\right)\ge 0\ \forall x>0\Rightarrow VT\left(1\right)\ge 0\ \ \forall x>0$

$\Rightarrow x=1\Rightarrow t=0$ là nghiệm

Góc nhìn 2.

ĐK: $e^t - t > 0$

$\sqrt{2.e^{2t}+2} \geq e^t + 1$

$\rightarrow \dfrac{e^t+1}{e^t-t} \geq e^t + 1 \rightarrow e^t - t \leq 1 \rightarrow e^t - t - 1 \leq 0$

$e^t - t - 1 \geq 0 \forall t$

$\rightarrow t = 0$

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} 3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$

A. $m \geq -3$ **B.** $m > -3$ **C.** $m \geq -2$ **D.** $m \leq -2$

Lời giải:

Chọn C

Góc nhìn 1.

Điều kiện $x \geq -1$

Xét $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017 \Leftrightarrow 3^{2x}.3^{\sqrt{x+1}} - 3^2.3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017 - 2017x$

$\Leftrightarrow \left(9^x - 9\right)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$. Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm

Nếu $x > 1$ thì $VT = \left(9^x - 9\right)3^{\sqrt{x+1}} > 0, VP = 2017(1-x) < 0$

Suy ra $\left(9^x - 9\right)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$ vô nghiệm

Nếu $-1 \leq x \leq 1$ thì $VT = \left(9^x - 9\right)3^{\sqrt{x+1}} < 0, VP = 2017(1-x) > 0$

Suy ra $\left(9^x - 9\right)3^{\sqrt{x+1}} \leq 2017(1-x)$ có nghiệm với $-1 \leq x \leq 1$

Vậy bpt $3^{2x+\sqrt{x+1}} - 3^{2+\sqrt{x+1}} + 2017x \leq 2017$ có nghiệm với $-1 \leq x \leq 1$

Xét $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0$. Ta có $\Delta = m^2 - 4m - 8$ để bpt có nghiệm $-1 \leq x \leq 1$ thì

$TH1: \Delta \leq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} + 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} + 2$, bpt có nghiệm $-1 \leq x \leq 1 (1)$

$TH2: \Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2\sqrt{3} + 2 \\ m < -2\sqrt{3} + 2 \end{array}\right.$, nghiệm của bpt là $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

Ta có $\left(-1;1\right)\subset\left(x_1;x_2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(-1\right)<0\\f\left(1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m+6<0\\m+2<0\end{cases}\Leftrightarrow m<-2$

Do đó BPT có nghiệm $-1\le x\le 1$ khi $m\ge -2$

Kết hợp với điều kiện ta được $m>2\sqrt{3}+2$ và $-2\le m<-2\sqrt{3}+2\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra hệ đã cho có nghiệm khi $m\ge -2$

Góc nhìn 2.

Xét $3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2017x\le 2017\Leftrightarrow 3^{2x}.3^{\sqrt{x+1}}-3^2.3^{\sqrt{x+1}}\le 2017-2017x$

$\Leftrightarrow\left(9^x-9\right)3^{\sqrt{x+1}}\le 2017\left(1-x\right)$. Dễ thấy $x=1$ là một nghiệm

Nếu $x>1$ thì $VT=\left(9^x-9\right)3^{\sqrt{x+1}}>0,VP=2017\left(1-x\right)<0$

Suy ra $\left(9^x-9\right)3^{\sqrt{x+1}}\le 2017\left(1-x\right)$ vô nghiệm

Nếu $-1\le x\le 1$ thì $VT=\left(9^x-9\right)3^{\sqrt{x+1}}<0,VP=2017\left(1-x\right)>0$

Suy ra $\left(9^x-9\right)3^{\sqrt{x+1}}\le 2017\left(1-x\right)$ có nghiệm với $-1\le x\le 1$

Vậy bpt $3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2017x\le 2017$ có nghiệm với $-1\le x\le 1$

Bài toán trở thành tìm m để bpt $x^2-\left(m+2\right)x+2m+3\ge 0$ có nghiệm $-1\le x\le 1$

BPT $\Leftrightarrow m\left(x-2\right)\le x^2-2x+3\Leftrightarrow m\ge\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}=f\left(x\right)\left(*\right)\left(do -1\le x\le 1\right)$

$f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x+1}{\left(x-2\right)^2}$. Xét $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2-\sqrt{3}\in\left[-1;1\right]$

Để bpt $\left(*\right)$ có nghiệm thì $m\ge\min_{x\in[-1;1]}f\left(x\right)$. Lập bảng biến thiên hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left[-1;1\right]$ ta có $m\ge f\left(1\right)=f\left(-1\right)=-2$.

Vậy $m\ge -2$

Câu 60. Cho $0 \le x; y \le 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{136}{3}$ **B.** $\dfrac{391}{16}$ **C.** $\dfrac{383}{16}$ **D.** $\dfrac{25}{2}$

Lời giải:

Chọn B

Góc nhìn 1.

Ta có $2017^{1-x-y} = \dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019} \Leftrightarrow \dfrac{2017^{1-y}}{2017^x} = \dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$

$\Leftrightarrow 2017^{1-y}\left[(1-y)^2+2018\right] = 2017^x\left(x^2+2018\right)$

Xét hàm số $f(t) = 2017^t\left(t^2+2018\right)$, với $0 \le t \le 1$

$\Rightarrow f'(t) = \left(t^2+2018\right).2017^t.\ln 2017 + 2t.2017^t = 2017^t\left[\left(t^2+2018\right).\ln 2017 + 2t\right] > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $0 \le t \le 1$

$\Rightarrow 1-y = x \Leftrightarrow y = 1-x$

Theo giả thiết $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$

$= \left[4x^2+3(1-x)\right]\left[4(1-x)^2+3x\right]+25x(1-x)$

$= (4x^2-3x+3)(4x^2-5x+4)+25x(1-x)$

$= 16x^4-20x^3+16x^2-12x^3+15x^2-12x+12x^2-15x+12+25x-25x^2$

$= 16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$

Xét hàm số $S(x) = 16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$, với $0 \le x \le 1$

$\Rightarrow S'(x) = 64x^3-96x^2+36x-2$. Cho $S'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pm\sqrt{3}}{4} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

BBT:

x	0		$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	12	$\searrow$	$\frac{191}{16}$	$\nearrow$	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	$\frac{191}{16}$	$\nearrow$	12

Từ BTT ta có $\begin{cases} M = \max_{[0;1]} S(x) = \dfrac{25}{2} \\ m = \min_{[0;1]} S(x) = \dfrac{196}{16} \end{cases}$

Vậy $M + m = \dfrac{391}{16}$

Góc nhìn 2.

Ta có $2017^{1-x-y} = \dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019} \Leftrightarrow \dfrac{2017^{1-y}}{2017^x} = \dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$

$\Leftrightarrow 2017^{1-y}\left[(1-y)^2+2018\right] = 2017^x\left(x^2+2018\right)$

Xét hàm số $f(t) = 2017^t\left(t^2+2018\right)$, với $0 \le t \le 1$

$\Rightarrow f'(t) = \left(t^2+2018\right).2017^t.\ln 2017 + 2t.2017^t = 2017^t\left[\left(t^2+2018\right).\ln 2017 + 2t\right] > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $0 \le t \le 1$

$\Rightarrow 1 - y = x \Leftrightarrow y = 1 - x$

Từ $0 \le x; y \le 1$ và $x + y = 1$ suy ra $0 \le xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Viết lại $S = 16x^2y^2 + 12\left(x^3+y^3\right) + 34xy$

$S = 16x^2y^2 + 12\left[(x+y)^3 - 3xy(x+y)\right] + 34xy$

$S = 16x^2y^2 - 2xy + 12$

Đặt $t = xy; t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ thì $S = f(t) = 16t^2 - 2t + 12$

Khảo sát hàm số $f(t)$ ta được $\min\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{191}{16}; \max\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{12}$

Vậy $M + m = \frac{391}{16}$