

Câu 11. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược theo nguyên tắc nếu thắng cược sẽ được nhà cái trả đúng bằng số tiền đặt cược, lần đầu du khách đặt 20000 đồng, mỗi lần tiếp theo đặt gấp đôi lần tiền cược trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp kể từ lần đầu tiên và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu tiền?

- A. Thua 40000 đồng B. Thua 20000 đồng C. Hoà vốn D. Thắng 20000 đồng

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của đoạn SG .

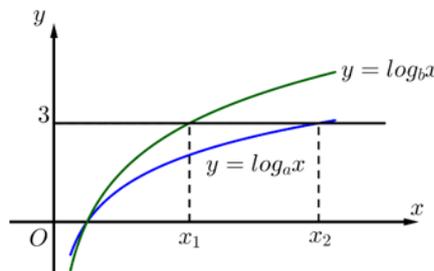
Biết $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{SB} + z\overrightarrow{SC}$. Tính $T = x + 2y + 6z$.

- A. $T = \frac{5}{2}$. B. $T = \frac{2}{3}$. C. $T = \frac{1}{3}$. D. $T = \frac{3}{2}$.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(1; 20)$ để bất phương trình $\log_m x > \log_x m$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$?

- A. 16. B. 17. C. 18. D. 19.

Câu 14. Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 . Biết rằng $x_2 = 2x_1$, giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

- A. $\sqrt[3]{2}$. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 15. Khảo sát về số giờ mượn sách thư viện của học sinh khối 11 trường Y ta được một mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Số giờ mượn	$[0; 4)$	$[4; 8)$	$[8; 12)$	$[12; 16)$	$[16; 20)$
Số học sinh	54	78	120	45	12

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 120. B. 8. C. 9. D. 12.

Câu 16. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 4} + x) = 4$. Giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(6; 12)$. B. $(-12; -6)$. C. $(0; 8)$. D. $(-8; 0)$.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2024; 2024]$ để phương trình

$$x^3 + 3x^2 + (m+2)x + m = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng?

- A. 2025 B. 2024 C. 4036 D. 4037

Câu 18. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^{18}$ ($x \neq 0$).

- A. $-3^6 C_{18}^6$. B. $-3^7 C_{18}^7$. C. $3^7 C_{18}^7$. D. $3^6 C_{18}^6$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 4n + 7}{n+1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên?

- A. 2. B. 6. C. 4. D. 3.

Câu 20. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ, đồng thời hai chữ số lẻ đứng liền nhau?

A. 936.

B. 1152.

C. 2736.

D. 576.

Phần II. Câu hỏi trắc nghiệm đúng hoặc sai (4,0 điểm)

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2;0;-3), B(-4;-4;1), C(-4;1;-1)$.

a) Tam giác ABC là tam giác tù.

b) Điểm $A'(2;0;-3)$ đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) .

c) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là $r = 1,12$.

d) Cho hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MN = 3$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là 6,17.

Câu 2. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ, khi tốc độ $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Khi tốc độ $v = 30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nhiên liệu trên 1km đường sông là 43000 đồng.

b) Khi tốc độ $v = 10$ (km/giờ) thì chi phí nhiên liệu cho phần thứ nhất trên 1km đường sông là 48000 đồng.

c) Hàm số xác định tổng chi phí nhiên liệu trên 1km đường sông với tốc độ v (km/giờ) là

$$f(v) = \frac{480}{v} + 0,03.v^3.$$

d) Tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu trên 1km đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (km/giờ).

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

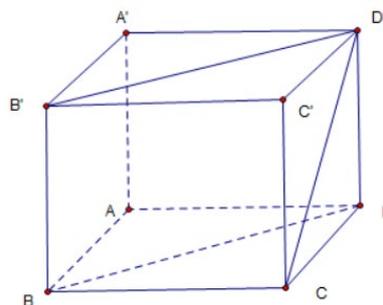
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

b) Vec tơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} cùng hướng.

c) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ với E là trung điểm MN .

d) Điểm I xác định bởi $P = 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + \overrightarrow{ID}^2$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là $2a^2$

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a (Hình vẽ)



a) Góc nhị diện $[(BCC'B'), BB', (BDD'B')]$ có số đo bằng 45° .

b) Thể tích khối tứ diện $AB'CD'$ bằng $\frac{a^3}{6}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng a .

Phần III. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn (3,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{2x - 224}{x - m}$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tổng tất cả các giá trị m nguyên dương sao cho

diện tích tứ giác tạo bởi các trục tọa độ và hai đường tiệm cận của đồ thị (C_m) không vượt quá 224 (đvdt).

Câu 2. Một câu lạc bộ Toán học tổ chức trò chơi sử dụng đồng xu để xếp thành hình kim tự tháp. Nhóm có thể có tối đa 23520 đồng xu để xếp mô hình kim tự tháp. Biết rằng tầng dưới cùng có 3020 đồng xu và cứ lên thêm 1 tầng thì số đồng xu giảm đi 120 đồng. Hỏi mô hình kim tự tháp này có tối đa bao nhiêu tầng?

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x + 1 & (\text{khi } x \geq 1) \\ 2x^2 - bx + 2 & (\text{khi } x < 1) \end{cases}$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$

(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

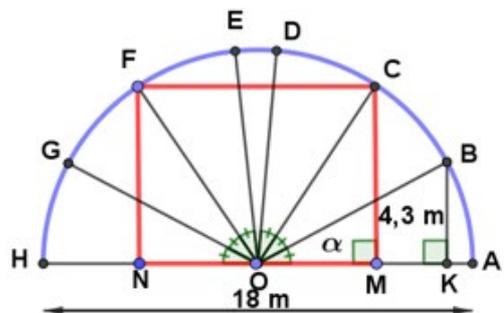
Câu 4. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô là bao nhiêu km/h?

Câu 5. Gọi S là tập tất cả các số nguyên a lớn hơn 4 để phương trình

$$\log \left[(\log_3 x)^{\log a} + 3 \right] = \log_a (\log_3 x - 3)$$

có nghiệm $x > 81$. Tính tổng giá trị các phần tử của tập S .

Câu 6. Đèo Hải Vân là ranh giới tự nhiên của thành phố Đà Nẵng và tỉnh Thừa Thiên-Huế. Hàm được khởi công ngày 27/8/2000 và khánh thành ngày 5/6/2005. Đây là hàm đường bộ dài nhất, hiện đại nhất Đông Nam Á và là một trong 30 đường hầm dài nhất trên thế giới. Trong kiến trúc, có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, công Đèo Hải Vân được ghép bởi sáu cung vật liệu tốt chịu lực tốt hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một cung vật liệu tốt chót ở đỉnh. Cho $AH = 18m$, $BK = 4,3m$. Biết rằng hình chữ nhật MNFC có MN là khoảng cách hai làn xe, CM là chiều cao cho phép của các xe lưu thông (Xem hình minh họa). Tính chiều cao CM cho phép của các xe lưu thông. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



B. PHẦN TỰ LUẬN (6,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3+x^2} + \sqrt{(3+x^2)^3}}$.

Câu 2 (3,0 điểm). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 2a, AD = a, AA' = 3a$. Gọi M, N là các điểm tương ứng thuộc các đoạn thẳng $AC', B'D'$.

1) Tính cosin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{B'D'}$.

2) Biết rằng MN song song với BA' . Tìm tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3}.$$

----- HẾT -----

Họ và tên:

Số báo danh:

Mã đề 102

Phần I. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (7,0 điểm)

Câu 1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ, đồng thời hai chữ số lẻ đứng liền nhau?

- A. 2736. B. 936. C. 1152. D. 576.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 4n + 7}{n + 1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên?

- A. 2. B. 6. C. 3. D. 4.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của đoạn SG .

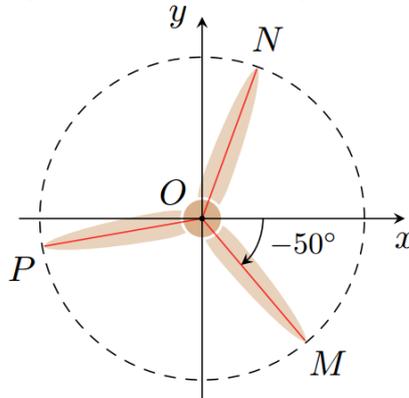
Biết $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{SB} + z\overrightarrow{SC}$. Tính $T = x + 2y + 6z$.

- A. $T = \frac{3}{2}$. B. $T = \frac{2}{3}$. C. $T = \frac{1}{3}$. D. $T = \frac{5}{2}$.

Câu 4. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm Hải Vân (Đà Nẵng) được cho bởi công thức $f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là tốc độ trung bình của các xe khi vào đường hầm. Giá trị lớn nhất của lưu lượng xe qua hầm gần với giá trị nào dưới đây nhất?

- A. 9. B. 8,9. C. 8,7. D. 8,8.

Câu 5. Trong hình vẽ dưới đây, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau.



Số đo của góc lượng giác (Ox, ON) bằng

- A. $70^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $120^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $50^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $-70^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

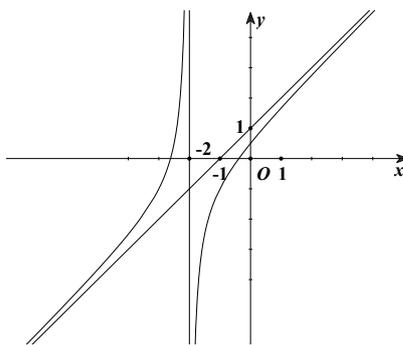
Câu 6. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^{18}$ ($x \neq 0$).

- A. $3^6 C_{18}^6$. B. $-3^7 C_{18}^7$. C. $3^7 C_{18}^7$. D. $-3^6 C_{18}^6$.

Câu 7. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại đúng hai cặp số $(x; y)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$ và $y = \log_3\left(\frac{x+7-m}{2m}\right)$. Tổng các phần tử của tập S bằng

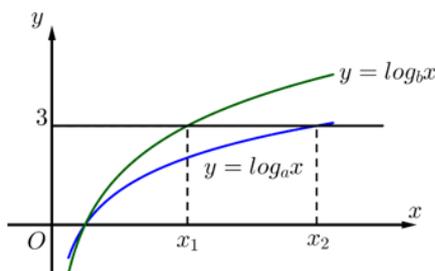
- A. 10. B. 18. C. 12. D. 6.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + 2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị biểu thức $T = 2a + 3b - c$



- A. 11. B. 9. C. 10. D. 8.

Câu 15. Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 . Biết rằng $x_2 = 2x_1$, giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. 2. C. $\sqrt[3]{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 16. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 4} + x) = 4$. Giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (6;12). B. (-8;0). C. (0;8). D. (-12;-6).

Câu 17. Khảo sát về số giờ mượn sách thư viện của học sinh khối 11 trường Y ta được một mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Số giờ mượn	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)
Số học sinh	54	78	120	45	12

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 8. B. 120. C. 12. D. 9.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa SC và mặt đáy ($ABCD$), tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{4}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{4}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Câu 19. Cho tam giác ABC vuông tại A có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q . Tìm q ?

- A. $q = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$. B. $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C. $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D. $q = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2024; 2024]$ để phương trình

$$x^3 + 3x^2 + (m+2)x + m = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng?

- A. 4037 B. 2025 C. 2024 D. 4036

Phần II. Câu hỏi trắc nghiệm đúng hoặc sai (4,0 điểm)

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4 Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ, khi tốc độ $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Hàm số xác định tổng chi phí nhiên liệu trên 1km đường sông với tốc độ v (km/giờ) là

$$f(v) = \frac{480}{v} + 0,03.v^3.$$

b) Khi tốc độ $v = 10$ (km/giờ) thì chi phí nhiên liệu cho phần thứ nhất trên 1km đường sông là 48000 đồng.

c) Khi tốc độ $v = 30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nhiên liệu trên 1km đường sông là 43000 đồng.

d) Tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu trên 1km đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (km/giờ).

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2;0;-3), B(-4;-4;1), C(-4;1;-1)$.

a) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là $r = 1,12$.

b) Điểm $A'(2;0;-3)$ đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) .

c) Tam giác ABC là tam giác tù.

d) Cho hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MN = 3$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là 6,17.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

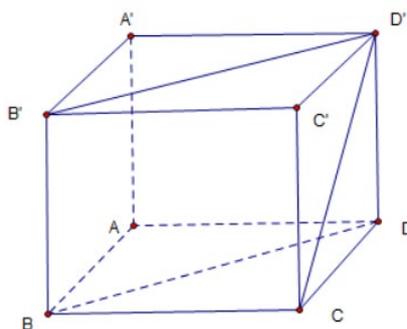
a) Vec tơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} cùng hướng.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ với E là trung điểm MN .

d) Điểm I xác định bởi $P = 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + \overrightarrow{ID}^2$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là $2a^2$

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a (Hình vẽ)



a) Thể tích khối tứ diện $AB'CD'$ bằng $\frac{a^3}{6}$.

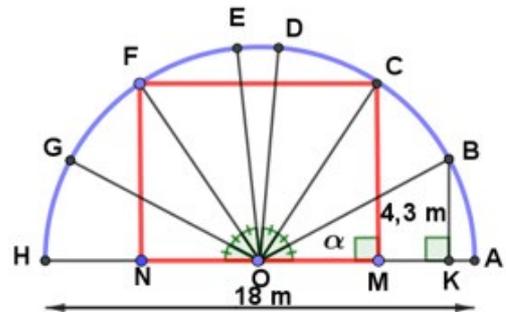
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng a .

c) Góc nhị diện $[(BCC'B'), BB', (BDD'B')]$ có số đo bằng 45° .

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Phần III. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn (3,0 điểm)

Câu 1. Đèo Hải Vân là ranh giới tự nhiên của thành phố Đà Nẵng và tỉnh Thừa Thiên-Huế. Hàm được khởi công ngày 27/8/2000 và khánh thành ngày 5/6/2005. Đây là hầm đường bộ dài nhất, hiện đại nhất Đông Nam Á và là một trong 30 đường hầm dài nhất trên thế giới. Trong kiến trúc, có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, cổng Đèo Hải Vân được ghép bởi sáu cung vật liệu tốt chịu lực tốt hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một cung vật liệu tốt chốt ở đỉnh. Cho $AH = 18m$, $BK = 4,3m$. Biết rằng hình chữ nhật MNFC có MN là khoảng cách hai làn xe, CM là chiều cao cho phép của các xe lưu thông (Xem hình minh họa). Tính chiều cao CM cho phép của các xe lưu thông. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{2x - 224}{x - m}$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tổng tất cả các giá trị m nguyên dương sao cho diện tích tứ giác tạo bởi các trục tọa độ và hai đường tiệm cận của đồ thị (C_m) không vượt quá 224 (đvdt).

Câu 3. Một câu lạc bộ Toán học tổ chức trò chơi sử dụng đồng xu để xếp thành hình kim tự tháp. Nhóm có thể có tối đa 23520 đồng xu để xếp mô hình kim tự tháp. Biết rằng tầng dưới cùng có 3020 đồng xu và cứ lên thêm 1 tầng thì số đồng xu giảm đi 120 đồng. Hỏi mô hình kim tự tháp này có tối đa bao nhiêu tầng?

Câu 4. Gọi S là tập tất cả các số nguyên a lớn hơn 4 để phương trình

$$\log \left[(\log_3 x)^{\log a} + 3 \right] = \log_a (\log_3 x - 3)$$

có nghiệm $x > 81$. Tính tổng giá trị các phần tử của tập S .

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x + 1 & (\text{khi } x \geq 1) \\ 2x^2 - bx + 2 & (\text{khi } x < 1) \end{cases}$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$

(kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 6. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô là bao nhiêu km/h?

B. PHẦN TỰ LUẬN (6,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3+x^2} + \sqrt{(3+x^2)^3}}$.

Câu 2 (3,0 điểm). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 2a, AD = a, AA' = 3a$. Gọi M, N là các điểm tương ứng thuộc các đoạn thẳng $AC', B'D'$.

1) Tính cosin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{B'D'}$.

2) Biết rằng MN song song với BA' . Tìm tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3}.$$

----- **HẾT** -----

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM

I. Trắc nghiệm 4 phương án trả lời

Đề\câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
101	D	D	B	B	B	C	B	D	B	A	D	D	B	A	C	B	A	D	A	A
102	B	A	A	B	A	A	C	D	A	A	A	D	C	C	C	D	D	A	A	B

II. Trắc nghiệm đúng – sai

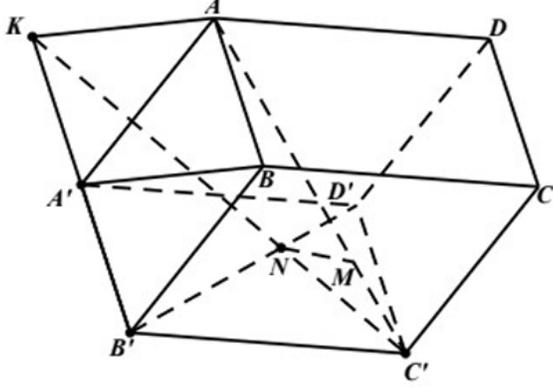
Đề\câu	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	4d
101	S	D	D	S	D	D	S	D	D	S	D	D	D	S	D	D
102	S	D	D	D	D	D	S	S	S	D	D	D	S	D	D	D

III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Đề\câu	1	2	3	4	5	6
101	6216	9	25,8	108	35	7,55
102	7,55	6216	9	35	25,8	108

B. PHẦN TỰ LUẬN

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3+x^2} + \sqrt{(3+x^2)^3}}$	2,0
	$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} dx$ $I = \int_0^1 \frac{x}{(1+\sqrt{3+x^2})^{\frac{1}{2}}} dx$	0,5
	$= \int_0^1 (1+\sqrt{3+x^2})^{-\frac{1}{2}} d(1+\sqrt{3+x^2})$	0,5
	$= 2\sqrt{1+\sqrt{3+x^2}} \Big _0^1$	0,5
	$= 2(\sqrt{3} - \sqrt{1+\sqrt{3}})$. Kết luận (Thiếu kết luận trừ 0,25 điểm)	0,5

Câu 2:	Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = 2a, AD = a, AA' = 3a$. Gọi M, N là các điểm tương ứng thuộc các đoạn thẳng $AC', B'D'$. 1) Tính cosin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{B'D'}$. 2) Biết rằng MN song song với BA' . Tìm tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.	3,0
	 <p>Vẽ sai nét đứt nét liền trừ 0,25 điểm/nét Không vẽ hình thì được 0 điểm</p>	
Ý 1)	Tính cosin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{B'D'}$.	1,5
	Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AA'}$. Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{B'D'} = -\vec{a} + \vec{b}$.	0,25 0,25
	Từ đó suy ra $AC' = a\sqrt{14}, B'D' = \sqrt{5}a$	0,5
	$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = -3a^2.$ <p>Từ đó ta có: $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'D'}) = \frac{-3}{\sqrt{70}}$. Kết luận</p> <p>Lưu ý: Nếu HS làm theo cách khác, chẳng hạn như gắn hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz vẫn được điểm tối đa. Thang điểm chia theo các bước tương ứng</p> <ul style="list-style-type: none"> - Trình bày cách gắn hệ trục, tìm được tọa độ các điểm liên quan - Tính độ dài $AC', B'D'$ - Tính tích vô hướng - Tính cosin, kết luận 	0,25 0,25

ý 2)	Biết rằng MN song song với BA' . Tìm tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.	1,5
	Dựng điểm K sao cho $ABA'K$ là hình bình hành.	0,25
	Do A, M, C' thẳng hàng và $AK // MN$ nên K, N, C' thẳng hàng.	0,25
	Do $KB' // C'D'$ và $KB' = 2C'D'$	0,25
	Theo định lý Thales ta có $\frac{NK}{NC'} = \frac{KB'}{C'D'} = 2$ từ đó suy ra $NK = 2NC'$.	0,25
	Xét tam giác AKC' có $AK // MN$	0,25
	Sử dụng định lý Thales ta được $\frac{MA}{MC'} = \frac{NK}{NC'} = 2$. Kết luận.	0,25
Câu 3:	Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3}.$	1,0
	Ta có $P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{4c^3}{3(c+a)^3} = \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2} + \frac{4}{3\left(1+\frac{a}{c}\right)^3}.$	0,25
	Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}; x, y, z > 0; xyz = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{4}{3(1+z)^3}.$	0,25
	Ta đi chứng minh bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}.$ Từ đó $(1+x)^2 = \left(1 + \sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 \leq (1+xy)\left(1 + \frac{x}{y}\right) = (1+xy)\left(\frac{x+y}{y}\right).$ Hay $\frac{1}{(1+x)^2} \geq \frac{y}{(1+xy)(x+y)}.$ Tương tự $\frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{x}{(1+xy)(x+y)}.$ Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1.$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức trên ta có: $P \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{3z(1+z)^2 + 4}{3(1+z)^3}.$ Ta đi chứng minh $P \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3z(1+z)^2 + 4}{3(1+z)^3} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow (z-1)^2(z+2) \geq 0$ luôn đúng.	0,25

Trên đây là hướng dẫn chấm đề thi HSG cụm TP Bắc Giang năm học 2024 -2025. Học sinh nếu làm cách giải khác mà đúng vẫn được điểm tối đa. Thang điểm chia theo tỉ lệ tương ứng với mức điểm 0,25 điểm/bước.

.....**HẾT**.....

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>