SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

(*Đề thi gồm 01 trang*)

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2025 - 2026
KHÓA NGÀY 06, 07 THÁNG 6 NĂM 2025
Môn thi chuyên: TOÁN
Ngày thi: 07 tháng 6 năm 2025

Thời gian làm bài: 150 phút *(Không tính thời gian phát đề)*

Bài 1. ($2,0$ *điểm*)

a) Với a,b là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)(a-b)=1.$ Tính giá trị của biểu thức

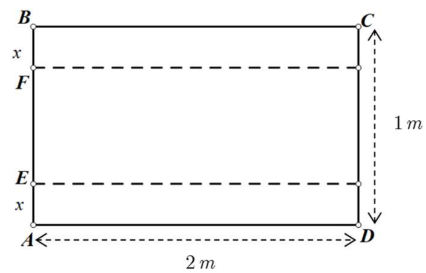
$$P=\sqrt{(4a+5)^2+(3b)^2}-\sqrt{(4a-5)^2+(3b)^2}.$$

b) Biết a,b là hai nghiệm thực của phương trình $x^2-4x+c=0$ và $-a$ là một nghiệm thực của phương trình $11x^2-x+2c=0$ với c là một số thực khác 0. Tính giá trị của biểu thức $a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}$.

Bài 2. ($2,0$ *điểm*)

a) Một ô tô và một xe tải chuyển động cùng tốc độ không đổi $a(km/h)$ dọc theo hai con đường giao nhau hướng đến giao lộ $(a>0)$. Biết rằng vào các thời điểm 14 giờ và 15 giờ cùng ngày, khoảng cách từ ô tô đến giao lộ đều gấp đôi khoảng cách từ xe tải đến giao lộ. Hỏi xe tải đến giao lộ lúc mấy giờ?

b) Anh Hà dự định làm một cái máng nước có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân từ một miếng tôn có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $2\ (m)$ và chiều rộng $1\ (m)$. Anh Hà thực hiện làm máng nước bằng cách gấp đều hai bên chiều rộng AB của miếng tôn, mỗi bên $x\,(m)$, lên một góc 60° như hình vẽ. Tìm x để hình thang cân $EFGH$ có diện tích lớn nhất?



Bài 3. ($3,0$ *điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có BE, CF là các đường cao. Gọi M,K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AM và EF. Kẻ ND vuông góc với BC tại D.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AKE}=\widehat{AMB}$ và ba điểm A,K,D thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại Q. Chứng minh rằng $QB.DC=QC.DB$.

Bài 4. ($1,5$ *điểm*)

Số nguyên dương n được gọi là số **đẹp** nếu tồn tại các số nguyên a,b sao cho $n=a^2+7b^2$.

a) Tìm hai số **đẹp** có hai chữ số và chia hết cho 11.

b) Chứng minh rằng nếu n là số **đẹp** và n chia hết cho 11 thì $\dfrac{n}{11}$ cũng là số **đẹp**.

Bài 5. ($1,5$ *điểm*)

a) Gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 100. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên a thuộc tập S. Tính xác suất sao cho số a được chọn thoả mãn các nghiệm của phương trình $x^2-ax+2a+10=0$ đều là số nguyên.

b) Cho tập hợp $A=\{1;2;3;\ldots;100\}$ và tập hợp B là tập hợp con chứa 11 phần tử của tập hợp A. Chứng minh rằng tập hợp B luôn chứa ba số a,b,c phân biệt sao cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

-HẾT-

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

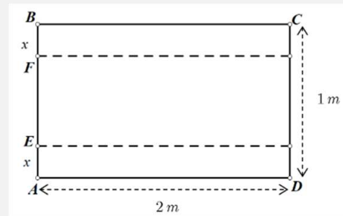
Họ và tên:.. *Số báo danh:*....................................

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1. ($2,0$ *điểm*)	
a) Với a,b là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)(a-b)=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{(4a+5)^2+(3b)^2}-\sqrt{(4a-5)^2+(3b)^2}$.	1,0 điểm
Ta có $(a+b)(a-b)=1 \Rightarrow b^2=a^2-1$	0,25 điểm
Do đó $P=\sqrt{(4a+5)^2+9(a^2-1)}-\sqrt{(4a-5)^2+9(a^2-1)}$	0,25 điểm
$=\sqrt{(5a+4)^2}-\sqrt{(5a-4)^2}$	0,25 điểm
$=\lvert 5a+4\rvert-\lvert 5a-4\rvert$ mà $b^2=a^2-1>0$ nên $a>1$, do đó $P=(5a+4)-(5a-4)=8$.	0,25 điểm
b) Biết a,b là hai nghiệm thực của phương trình $x^2-4x+c=0$ và $-a$ là một nghiệm của phương trình $11x^2-x+2c=0$ với c là một số thực khác 0. Tính giá trị của biểu thức $a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}$.	1,0 điểm
Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=c \end{cases}$	0,25 điểm
$-a$ là một nghiệm của phương trình $11x^2-x+2c=0$ nên $11a^2+a+2c=0$	0,25 điểm
Từ đó ta có được $11a^2+a+2ab=0 \Rightarrow 11a^2+a+2a(4-a)=0 \Rightarrow a=0 \vee a=-1$	0,25 điểm
Với $a=0$ thì $b=4; c=0$ (loại) Với $a=-1$ thì $b=5; c=-5$ (nhận) Vậy $a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}=-1$.	0,25 điểm
Bài 2. ($2,0$ *điểm*)	
a) Một ô tô và một xe tải đang chuyển động cùng tốc độ không đổi $a\,(km/h)$ dọc theo hai con đường giao nhau hướng đến giao lộ $(a>0)$. Biết rằng vào các thời điểm 14 giờ và 15 giờ cùng ngày, khoảng cách từ ô tô đến giao lộ đều gấp đôi khoảng cách từ xe tải đến giao lộ. Hỏi xe tải đến giao lộ lúc mấy giờ?	1,0 điểm
Gọi $x\,(km)$ là khoảng cách từ xe tải đến giao lộ lúc 14 giờ $(x>0)$, $2x\,(km)$ là khoảng cách từ xe ô tô đến giao lộ lúc 14 giờ	0,25 điểm
Ta có $\lvert 2x-a\rvert=2\lvert x-a\rvert$	0,25 điểm
$\Rightarrow 4x^2-4ax+a^2=4(x^2-2ax+a^2) \Rightarrow 4ax-3a^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\,(l) \\ x=\dfrac{3a}{4}\,(n) \end{array}\right.$	0,25 điểm
Suy ra thời gian để xe tải đi từ lúc 14 giờ đến giao lộ là $\dfrac{x}{a}=\dfrac{3}{4}$ (giờ) Vậy xe tải đến giao lộ lúc 14 giờ 45 phút.	0,25 điểm

<table>
<tr>
<td>

b) Anh Hà dự định làm một cái máng nước có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân từ một miếng tôn có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $2\ m$ và chiều rộng $1\ m$. Anh Hà thực hiện làm máng nước bằng cách gấp đều hai bên chiều rộng AB của miếng tôn, mỗi bên $x(m)$, lên một góc $60°$ như hình vẽ. Tìm x để hình thang cân $EFGH$ có diện tích lớn nhất?



</td>
<td>1,0 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>

Ta có $EF = 1 - 2x\,; GH = 1 - x$

Khoảng cách từ H xuống AB là $h = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

</td>
<td>0,25 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>

Diện tích hình thang $S_{EFGH} = \dfrac{GH + EF}{2}h = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x(2 - 3x)$

</td>
<td>0,25 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>

$= \dfrac{\sqrt{3}}{12} \cdot 3x(2 - 3x) \le \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{3x + 2 - 3x}{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

</td>
<td>0,25 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>

Vậy diện tích hình thang lớn nhất khi $3x = 2 - 3x \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}(m)$.

</td>
<td>0,25 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Bài 3. ($3,0$ *điểm*)

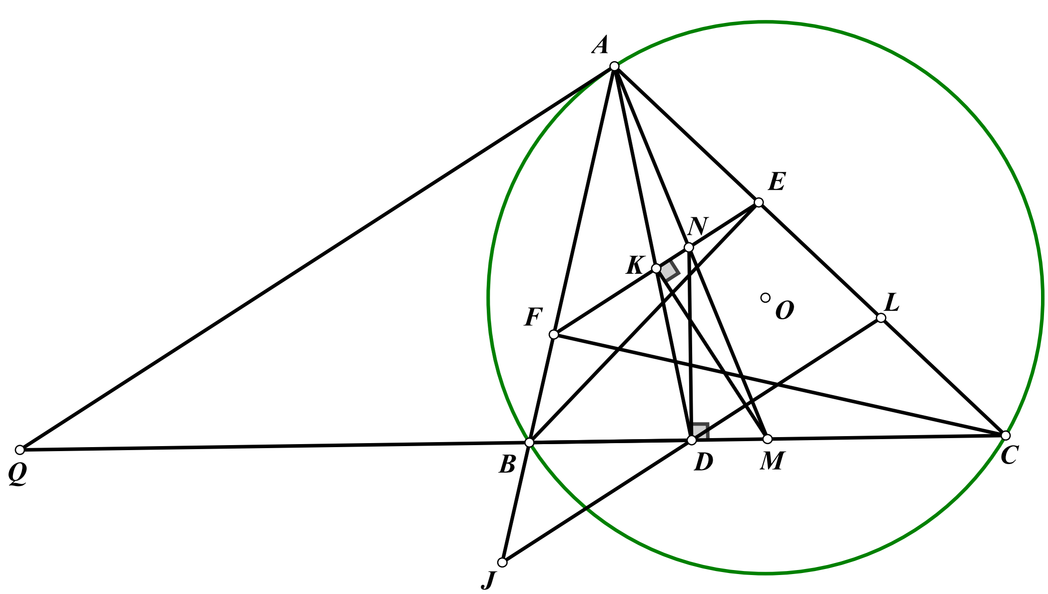
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có BE, CF là các đường cao. Gọi M, K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AM và EF. Kẻ ND vuông góc với BC tại D.

a) Chứng minh $\widehat{AKE} = \widehat{AMB}$ và ba điểm A, K, D thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại Q. Chứng minh rằng $QB.DC = QC.DB$.

</td>
<td>3,0 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td></td>
</tr>
</table>

a) Chứng minh được tứ giác $BCEF$ nội tiếp suy ra $\widehat{ABC}=\widehat{AEF}$ (1)	0,25 điểm
suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$ $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{2EK}{2BM}=\dfrac{EK}{BM}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta AEK \backsim \Delta ABM \Rightarrow \widehat{AKE}=\widehat{AMB}$	0,25 điểm
Ta có $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm M mà K là trung điểm EF nên $MK\perp EF$ $\widehat{MKN}=\widehat{MDN}=90^\circ \Rightarrow MDKN$ nội tiếp	0,25 điểm
$\Rightarrow \widehat{DKN}+\widehat{DMN}=180^\circ \Rightarrow \widehat{DKN}+\widehat{AKN}=180^\circ$ Vậy ba điểm A,K,D thẳng hàng.	0,25 điểm
b) **Cách 1.** $\Delta QAB \backsim \Delta QCA$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{QB}{QA}=\dfrac{QA}{QC}=\dfrac{AB}{AC}$ Do đó $\dfrac{QB}{QC}=\dfrac{QB}{QA}\dfrac{QA}{QC}=\dfrac{AB}{AC}\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$ (3)	0,25 điểm
$\dfrac{S_{AKF}}{S_{ADB}}=\dfrac{S_{AKF}}{S_{ADF}}\dfrac{S_{ADF}}{S_{ADB}}=\dfrac{AK}{AD}\dfrac{AF}{AB};\ \dfrac{S_{AKE}}{S_{ADC}}=\dfrac{S_{AKE}}{S_{ADE}}\dfrac{S_{ADE}}{S_{ADC}}=\dfrac{AK}{AD}\dfrac{AE}{AC}$	0,25 điểm
mà $S_{AKE}=S_{AKF}$ $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{S_{ADB}}{S_{ADC}}=\dfrac{S_{ADB}}{S_{AKF}}\dfrac{S_{AKE}}{S_{ADC}}=\dfrac{AD}{AK}\dfrac{AB}{AF}\dfrac{AK}{AD}\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AE}{AF}\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$ (4)	0,25 điểm
Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{QB}{QC}=\dfrac{DB}{DC}\Rightarrow QB.DC=QC.DB$	0,25 điểm
Cách 2. Từ D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB,AC lần lượt tại J,L Vì K là trung điểm EF nên D là trung điểm JL $\widehat{ACB}=\widehat{AFE}=\widehat{QAB}\Rightarrow EF\ //\ AQ\Rightarrow JL\ //\ AQ$ Ta có $JL//AQ\Rightarrow \dfrac{QB}{DB}=\dfrac{QA}{DJ}=\dfrac{QA}{DL}=\dfrac{QC}{CD}\ \Rightarrow QB.DC=QC.DB$	1,0 điểm
Bài 4. (1,5 *điểm*)	
Số nguyên dương n được gọi là số **đẹp** nếu tồn tại các số nguyên a,b sao cho $n=a^2+7b^2$. a) Tìm hai số **đẹp** có hai chữ số và chia hết cho 11. b) Chứng minh rằng nếu n là số **đẹp** và n chia hết cho 11 thì $\dfrac{n}{11}$ cũng là số **đẹp**.	1,5 điểm
a) Tìm được hai số trong các số 11; 44; 77; 88; 99.	0,5 điểm
b) Ta có $n=a^2+7b^2=a^2+11b^2-4b^2\,\vdots\,11\Rightarrow a^2-4b^2\,\vdots\,11\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a-2b\,\vdots\,11\\a+2b\,\vdots\,11\end{array}\right.$	0,25 điểm
Vì $n=a^2+7b^2=a^2+7(-b)^2$ nên ta chỉ cần xét một trường hợp $a-2b\,\vdots\,11$	
$\dfrac{n}{11}=\dfrac{11(a^2+7b^2)}{121}=\dfrac{(2a+7b)^2+7(a-2b)^2}{121}$	0,5 điểm
Mà $2a+7b=2(a-2b)+11b$ và $a-2b\,\vdots\,11$ Nên $\dfrac{n}{11}=x^2+7y^2$ với $x=\dfrac{2a+7b}{11}$ và $y=\dfrac{a-2b}{11}$ là các số nguyên. Vậy $\dfrac{n}{11}$ là số **đẹp.**	0,25 điểm

Bài 5. (1,5 *điểm*)	
a) Gọi S là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 100. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên a thuộc tập S. Tính xác suất sao cho số a được chọn thỏa mãn các nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 2a + 10 = 0$ đều là số nguyên.	1,0 điểm
Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = 201$.	0,25 điểm
$\Delta = a^2 - 8a - 40 \geq 0$ Gọi m, n là hai nghiệm nguyên của phương trình $\left(m \geq n\right)$. Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} m + n = a \\ mn = 2a + 10 \end{cases}$	0,25 điểm
$mn = 2(m+n) + 10 \Rightarrow (m-2)(n-2) = 14$.	0,5 điểm
TH1: $\begin{cases} m - 2 = 14 \\ n - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 16 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 19$ (nhận)	
TH2: $\begin{cases} m - 2 = 7 \\ n - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 13$ (nhận)	
TH3: $\begin{cases} m - 2 = -2 \\ n - 2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -5$ (nhận)	
TH4: $\begin{cases} m - 2 = -1 \\ n - 2 = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -11$ (nhận)	
Suy ra số kết quả thuận lợi của biến cố là 4	
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{4}{201}$.	
b) Cho tập hợp $A = \{1;2;3;...;100\}$ và tập hợp B là tập hợp con chứa 11 phần tử của tập hợp A. Chứng minh rằng tập hợp B luôn chứa ba số a, b, c phân biệt sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.	0,5 điểm
Gọi $a_i, i = \overline{1,11}$ với $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{11}$ là các phần tử của tập hợp B Giả sử các phần tử của tập B đều không có bộ 3 số nào là độ dài ba cạnh của một tam giác	0,25 điểm
Do $a_1 \geq 1$ nên $a_2 \geq 2$ và $a_3 \geq a_1 + a_2 = 3$ $a_4 \geq a_2 + a_3 = 5$,..., $a_{11} \geq a_{10} + a_9 = 89 + 55 = 144$ (vô lý)	0,25 điểm
Vậy B luôn chứa ba số a, b, c phân biệt sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.	

-HẾT-