**PHƯỜNG YÊN HÒA**

*Đề thi gồm **01 trang***

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9**

**NĂM HỌC 2025 – 2026**

**Môn thi: TOÁN**

*Thời gian làm bài **150 phút** (không kể thời gian giao đề)*

**Bài 1.**

1) Giải phương trình và hệ phương trình sau

a) $\dfrac{x+3}{11}+\dfrac{x-4}{13}+\dfrac{x-15}{15}=6.$

b) $\begin{cases} x+y-xy=-1 \\ x^2+y^2-x^2y^2=-23 \end{cases}.$

2) Với các số thực $a,b,c\neq 0$ thỏa mãn: $a+b+c=\dfrac{a+3b-c}{c}=\dfrac{b+3c-a}{a}=\dfrac{c+3a-b}{b}$.

Tính giá trị biểu thức: $P=\left(3+\dfrac{a}{b}\right)\left(3+\dfrac{b}{c}\right)\left(3+\dfrac{c}{a}\right)$.

**Bài 2.**

1) Với $n$ là số nguyên, chứng minh rằng $n^2+3n+6$ không chia hết cho $25$.

2) Tìm các số nguyên $x,y$ thỏa mãn $(y+2)x^2+(y^2+2y)x=y^2+3y-4$.

**Bài 3.**

1) Để gây quỹ từ thiện trong chương trình Trung thu của trường, lớp 6A1 của trường đã tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước ép táo và ngô chiên. Tập thể lớp thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 35 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước ép táo và một túi ngô chiên. Thực đơn 2 có giá 60 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước ép táo và hai túi ngô chiên. Biết rằng lớp chỉ làm được không quá 260 cốc nước ép táo và 160 túi ngô chiên. Số tiền lớn nhất mà lớp 6A1 có thể nhận được sau khi bán hết hàng là bao nhiêu nghìn đồng?

2) Cho các số thực dương $a,b,c$ thỏa mãn $a+8b+2c+8=abc$. Chứng minh rằng $9a+2b+2c\geq 40$.

**Bài 4.**

Cho tam giác $ABC$ nhọn, không cân $(AB<AC)$ có ba đường cao $AD, BE, CF$ cắt nhau tại $H$, các điểm $M, I$ lần lượt là trung điểm của $BC, AH$. Đường thẳng $IF$ cắt cạnh $AC$ và cắt đường thẳng $BC$ lần lượt tại $P, Q$. Lấy điểm $K$ trên tia đối của tia $FC$ sao cho $\widehat{FQK}=90^\circ-\widehat{BAC}$, lấy điểm $T$ nằm trong tam giác $ABC$ sao cho $TP$ song song với $AB$ và $TQ$ song song với $EF$, điểm $L$ thuộc đoạn $QF$ sao cho tam giác $TFL$ cân tại $T$.

1) Chứng minh $AE\cdot AC=AF\cdot AB$ và tam giác $HEF$ đồng dạng với tam giác $HCB$.

2) Chứng minh $\widehat{AFP}=\widehat{FCB}$ và $FKLT$ là hình thoi.

3) Gọi $G$ là giao điểm của $FT$, $CL$. Chứng minh $G, B, E$ thẳng hàng.

**Bài 5.**

1) Tìm tất cả các số nguyên dương $x,y$ sao cho $x^3+y^3$ là số chính phương và $x+y$ không có ước chính phương khác $1$.

2) Xét bảng ô vuông $7\times 7$. Hỏi cần tô màu ít nhất bao nhiêu ô vuông đơn vị của bảng sao cho mọi hình vuông cỡ $2\times 2$ trong bảng đều

a) Chứa ít nhất một ô được tô màu.

b) Chứa ít nhất hai ô được tô màu.

---------- **HẾT** ----------

## 2 Lời giải

**Bài 1:**

**1)** Giải phương trình và hệ phương trình sau

(a) $\dfrac{x+3}{11}+\dfrac{x-4}{13}+\dfrac{x-15}{15}=6$. (b) $\begin{cases} x+y-xy=-1 \\ x^2+y^2-x^2y^2=-23 \end{cases}$.

**2)** Với các số thực $a, b, c \neq 0$ thoả mãn $a+b+c=\dfrac{a+3b-c}{c}=\dfrac{b+3c-a}{a}=\dfrac{c+3a-b}{b}$.

Tính giá trị biểu thức $P=\left(3+\dfrac{a}{b}\right)\left(3+\dfrac{b}{c}\right)\left(3+\dfrac{c}{a}\right)$.

**Lời giải:**

**1)** a) Ta có phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{11}-3+\frac{x-4}{13}-2+\frac{x-15}{15}-1&=0 \\ \frac{x-30}{11}+\frac{x-30}{13}+\frac{x-30}{15}&=0 \\ \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)(x-30)&=0 \\ x&=30. \end{aligned}$$

Vậy $x=30$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

(b) Từ phương trình đầu của hệ ta có

$$\begin{aligned} (x+y)^2&=(xy-1)^2 \\ x^2+y^2+2xy&=x^2y^2-2xy+1 \\ x^2+y^2-x^2y^2&=1-4xy. \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình thứ hai của hệ ta có $1-4xy=-23$ hay $xy=6$. Thay vào phương trình đầu ta có $x+y=5$ hay $y=5-x$.

Từ đó ta có $x(5-x)=6$ tương đương $x^2-5x+6=0$, hay $(x-2)(x-3)=0$. Do đó $x=2$, $y=3$ hoặc $x=3$, $y=2$.

Thử lại thoả mãn. Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=(2,3)$ và $(3,2)$.

**2)** Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a(a+b+c)=b+3c-a \\ b(a+b+c)=c+3a-b \\ c(a+b+c)=a+3b-c \end{cases}$, suy ra $(a+b+c)^2=3(a+b+c)$.

Do đó $a+b+c=0$ hoặc $a+b+c=3$.

**TH1.** $a+b+c=0$. Khi đó $a+3b-c=b+3c-a=c+3a-b=0$. Suy ra $(a+3b-c)+(b+3c-a)=4b-2c=0$, suy ra $b=2c$, tương tự ta có $c=2a$ và $a=2b$.

Suy ra $b=8b$, tương đương $b=0$ (mâu thuẫn).

**TH2.** $a+b+c=3$. Khi đó $\dfrac{a+3b}{c}=\dfrac{b+3c}{a}=\dfrac{c+3a}{b}=4$. Ta có

$$\begin{aligned} P&=28+3\left(\frac{3a}{b}+\frac{3b}{c}+\frac{3c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right) \\ &=3\left(\frac{a+3b}{c}+\frac{b+3c}{a}+\frac{c+3a}{b}\right)+28=3\cdot 4\cdot 3+28=64. \end{aligned}$$

Vậy $P = 64$.

**Bài 2:**

**1)** Với $n$ là số nguyên, chứng minh rằng $n^2 + 3n + 6$ không chia hết cho 25.

**2)** Tìm tất cả các số nguyên $x, y$ thoả mãn $(y+2)x^2 + (y^2+2y)x = y^2 + 3y - 4$.

**Lời giải:**

**1)** Giả sử phản chứng tồn tại $n$ để $n^2 + 3n + 6$ chia hết cho 25.

Ta có $n^2 + 3n + 6 = n^2 - 2n + 1 + 5n + 5 = (n-1)^2 + 5n + 5$ chia hết cho 25. Suy ra $(n-1)^2$ chia hết cho 5, suy ra $n - 1$ chia hết cho 5.

Mà $n^2 + 3n + 6 = (n-1)^2 + 5(n-1) + 10$ chia hết cho 25 nên 10 chia hết cho 25. (Vô lý)

Vậy với $n$ là số nguyên thì $n^2 + 3n + 6$ không chia hết cho 25

**2)** Ta có phương trình đã cho tương đương

$$(y+2)x^2 + y(y+2)x = (y+2)(y+1) - 6$$
$$(y+2)(x^2 + xy - y - 1) = -6.$$

Ta có bảng sau

| $y+2$ | $-6$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+xy-y-1$ | $1$ | $2$ | $3$ | $6$ | $-6$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ |
| $y$ | $-8$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $4$ |
| $x$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $4, 0$ | $4, -1$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $0, -1$ | $\varnothing$ |

Vậy phương trình có tất cả nghiệm nguyên $(x, y)$ là $(4, -4), (0, -4), (4, -3), (-1, -3), (0, 1)$ và $(-1, 1)$.

**Bài 3:**

**(a)** Để gây quỹ từ thiện trong chương trình Trung thu của trường, lớp 6A1 của trường đã tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước ép táo và ngô chiên. Tập thể lớp thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 35 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước ép táo và một túi ngô chiên. Thực đơn 2 có giá 60 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước ép táo và hai túi ngô chiên. Biết rằng lớp chỉ làm được không quá 260 cốc nước ép táo và 160 túi ngô chiên. Số tiền lớn nhất mà lớp 6A1 có thể nhận được sau khi bán hết hàng là bao nhiêu nghìn đồng?

**(b)** Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + 8b + 2c + 8 = abc$. Chứng minh $9a + 2b + 2c \geq 40$.

**Lời giải:**

**(a)** Gọi $x$ là số lượng **Thực đơn 1** bán được ($x \in \mathbb{N}$).
Gọi $y$ là số lượng **Thực đơn 2** bán được ($y \in \mathbb{N}$).

Tổng số cốc nước ép táo: $2x + 3y \leq 260$. (1)

Tổng số túi ngô chiên: $x + 2y \leq 160$. (2)

Đặt $T = 35x + 60y$ là số tiền nhận được.

Ta có $35x + 60y = 10(2x + 3y) + 15(x + 2y) \leq 10 \cdot 260 + 15 \cdot 160 = 5000$ (nghìn đồng).

**Đáp số:** 5.000.000 đồng.

**(b)** **Cách 1:** Từ giả thiết, chia hai vế cho $a$ (với $a, b, c > 0$), ta dễ dàng chứng minh được $bc > 1$. Biến đổi giả thiết:

$$a(bc - 1) = 8b + 2c + 8 \implies a = \frac{8b + 2c + 8}{bc - 1}$$

Đặt $P = 9a + 2b + 2c$. Ta có

$$\begin{aligned} P - 40 &= 9\left(\frac{8b + 2c + 8}{bc - 1}\right) + 2b + 2c - 40 \\ &= \frac{72b + 18c + 72 + (2b + 2c - 40)(bc - 1)}{bc - 1} \\ &= \frac{2b^2c + 2bc^2 - 40bc + 70b + 16c + 112}{bc - 1} \end{aligned}$$

Đặt tử số là $T$. Ta cần chứng minh $T \geq 0$.

$$T = 2c(b - 4)^2 + 2b(c - 7)^2 + 4(b - 4)(c - 7)$$

Đặt $X = b - 4$ và $Y = c - 7$, biểu thức trở thành:

$$T = 2c \cdot X^2 + 4Y \cdot X + 2b \cdot Y^2$$

Coi đây là tam thức bậc hai theo biến $X$. Ta tính biệt thức $\Delta'$:

$$\begin{aligned} \Delta'_X &= (2Y)^2 - (2c)(2bY^2) \\ &= 4Y^2 - 4bcY^2 \\ &= 4Y^2(1 - bc) \end{aligned}$$

Do $bc > 1$ nên $1 - bc < 0$, suy ra $\Delta'_X \leq 0$. Tam thức bậc hai có hệ số cao nhất $2c > 0$ và $\Delta' \leq 0$ nên luôn không âm với mọi giá trị của biến.

$$\Rightarrow T \geq 0 \Rightarrow P - 40 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $X = 0, Y = 0 \Leftrightarrow b = 4, c = 7 \Rightarrow a = 2$.

Vậy $9a + 2b + 2c \geq 40$.

**Cách 2:** Biến đổi giả thiết: Chia cả hai vế cho $abc$, ta được:

$$\frac{1}{bc} + \frac{8}{ac} + \frac{2}{ab} + \frac{8}{abc} = 1 \quad (*)$$

Dự đoán điểm rơi xảy ra tại $a = 2, b = 4, c = 7$. Ta sử dụng phương pháp chọn điểm rơi để tìm các hệ số cho Bất đẳng thức Cô-si (AM-GM).

Ta thiết lập BĐT dạng: $\frac{1}{bc} + x_1 b + y_1 c \geq 3\sqrt[3]{\dots}$. Để dấu "=" xảy ra tại $a = 2, b = 4, c = 7$, các số hạng phải bằng nhau:

$$\frac{1}{bc} = x_1 b = y_1 c \Rightarrow \frac{1}{4 \cdot 7} = 4x_1 = 7y_1 \Rightarrow \frac{1}{28} = 4x_1 = 7y_1$$

Suy ra: $x_1 = \frac{1}{112}, y_1 = \frac{1}{196}$. Ta có đánh giá (1):

$$\frac{1}{bc} + \frac{b}{112} + \frac{c}{196} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{bc} \cdot \frac{b}{112} \cdot \frac{c}{196}} = \frac{3}{28} \quad (1)$$

Thiết lập dạng: $\frac{8}{ac} + x_2 a + y_2 c \geq 3\sqrt[3]{\dots}$. Tại điểm rơi: $\frac{8}{ac} = x_2 a = y_2 c \Rightarrow \frac{8}{2 \cdot 7} = 2x_2 = 7y_2 \Rightarrow \frac{4}{7} = 2x_2 = 7y_2$. Suy ra: $x_2 = \frac{2}{7}, y_2 = \frac{4}{49}$. Ta có đánh giá (2):

$$\frac{8}{ac} + \frac{2a}{7} + \frac{4c}{49} \geq \frac{12}{7} \quad (2)$$

Thiết lập dạng: $\frac{2}{ab} + x_3a + y_3b \geq 3\sqrt[3]{\ldots}$. Tại điểm rơi: $\frac{2}{ab} = x_3a = y_3b \Rightarrow \frac{2}{2\cdot 4} = 2x_3 = 4y_3 \Rightarrow \frac{1}{4} = 2x_3 = 4y_3$. Suy ra: $x_3 = \frac{1}{8}, y_3 = \frac{1}{16}$. Ta có đánh giá (3):

$$\frac{2}{ab} + \frac{a}{8} + \frac{b}{16} \geq \frac{3}{4} \quad (3)$$

Thiết lập dạng: $\frac{8}{abc} + x_4a + y_4b + z_4c \geq 4\sqrt[4]{\ldots}$. Tại điểm rơi: $\frac{8}{abc} = x_4a = y_4b = z_4c \Rightarrow \frac{8}{56} = 2x_4 = 4y_4 = 7z_4$. Suy ra: $x_4 = \frac{1}{14}, y_4 = \frac{1}{28}, z_4 = \frac{1}{49}$. Ta có đánh giá (4):

$$\frac{8}{abc} + \frac{a}{14} + \frac{b}{28} + \frac{c}{49} \geq \frac{4}{7} \quad (4)$$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3), (4):

$$\underbrace{\left(\frac{1}{bc} + \frac{8}{ac} + \frac{2}{ab} + \frac{8}{abc}\right)}_{1} + a\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14}\right) + b\left(\frac{1}{112} + \frac{1}{16} + \frac{1}{28}\right) + c\left(\frac{1}{196} + \frac{4}{49} + \frac{1}{49}\right) \geq \frac{88}{28}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{27}{56}a + \frac{3}{28}b + \frac{3}{28}c \geq \frac{22}{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{56}(9a + 2b + 2c) \geq \frac{15}{7}$$
$$\Leftrightarrow 9a + 2b + 2c \geq \frac{15}{7} \cdot \frac{56}{3} = 40$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 2, b = 4, c = 7$

**Bài 4:** Cho tam giác $ABC$ nhọn, không cân ($AB < AC$) có ba đường cao $AD$, $BE$, $CF$ cắt nhau tại $H$, các điểm $M$, $I$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $AH$. Đường thẳng $IF$ cắt cạnh $AC$ và cắt đường thẳng $BC$ lần lượt tại $P$, $Q$. Lấy điểm $K$ trên tia đối của tia $FC$ sao cho $\angle FQK = 90^\circ - \angle BAC$, lấy điểm $T$ nằm trong tam giác $ABC$ sao cho $TP$ song song với $AB$ và $TQ$ song song với $EF$, điểm $L$ thuộc đoạn $QF$ sao cho tam giác $TFL$ cân tại $T$.

**(a)** Chứng minh $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và tam giác $HEF$ đồng dạng với tam giác $HCB$.

**(b)** Chứng minh $\angle AFP = \angle FCB$ và $FKLT$ là hình thoi.

**(c)** Gọi $G$ là giao điểm của $FT$, $CL$. Chứng minh $G$, $B$, $E$ thẳng hàng.

**Lời giải:**
Trước khi đi vào bài toán, ta phát biểu không chứng minh bổ đề sau:
**Bổ đề:** Cho tứ giác $ABCD$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

(i) $\angle BAC = \angle BDC$.

(ii) $\angle CAD = \angle CBD$.

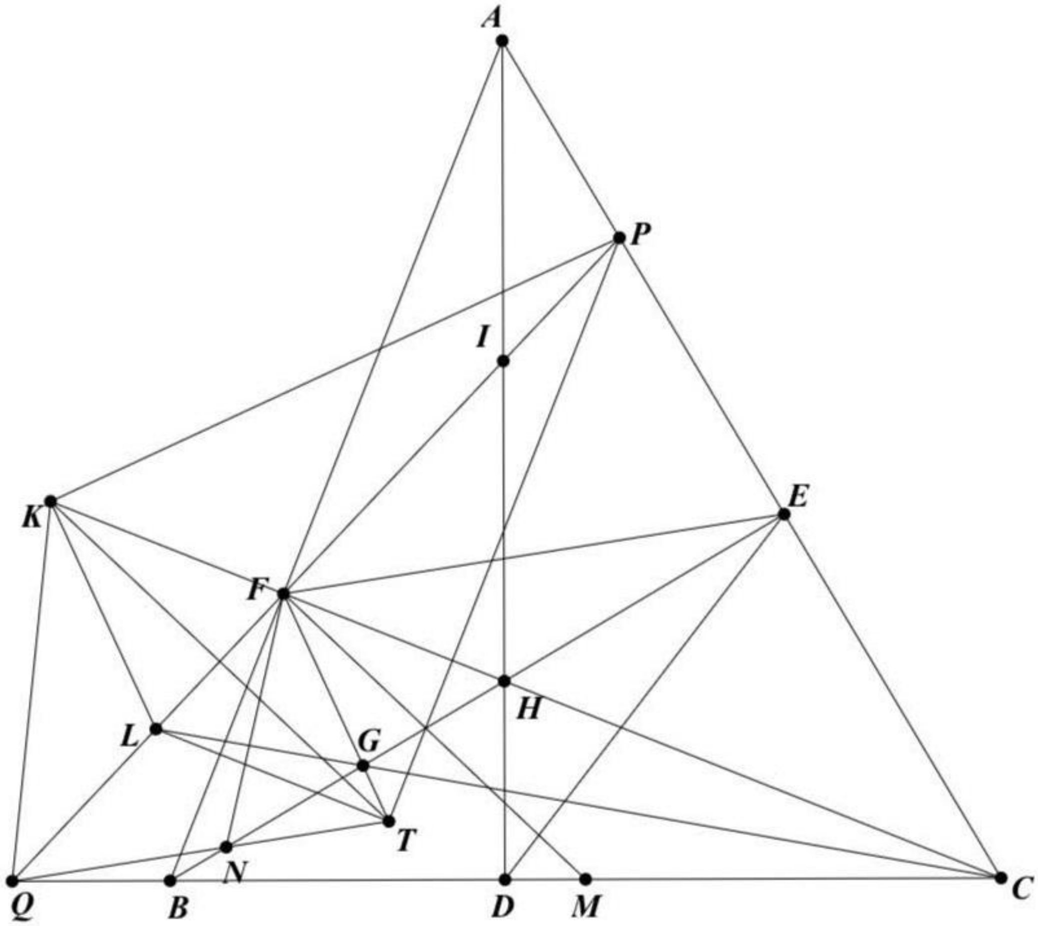
(iii) $\angle ABD = \angle ACD$.

(iv) $\angle ACB = \angle ADB$.

(v) $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

(vi) $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

**Quay trở lại bài toán.**




**(a)** Ta có $\triangle ABE \backsim \triangle ACF$ dẫn tới $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF}$ hay $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

Ta có $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$ nên dùng bổ đề cho tứ giác $BFEC$ ta được $\angle HEF = \angle HCB$ và $\angle HFE = \angle HBC$. Khi đó $\triangle HEF \backsim \triangle HBC$.

**(b)** Ta có tam giác $AFH$ vuông tại $F$ và $I$ là trung điểm $AH$ nên $IF = IA$ hay tam giác $AFI$ cân tại $I$. Suy ra $\angle AFI = \angle FAI = 90^\circ - \angle ABC$ (do $AD \perp BC$) $= \angle FCB$ (do $CF \perp AB$).

Ta có $\angle KQF = 90^\circ - \angle BAC = \angle PCF$ (do $CF \perp AB$) nên theo bổ đề suy ra $\angle KPF = \angle FCB$.

Mà $PT \parallel AB$ nên $\angle FPT = \angle AFP = \angle FCB$. Do đó $\angle KPT = \angle TPF$.

Mặt khác, $QT \parallel EF$ nên $\angle FQT = \angle PFE = \angle AFE - \angle AFI = \angle ACB - \angle FCB = \angle ACF = \angle KQF$. Từ đây suy ra $\triangle PKQ = \triangle PTQ$ dẫn tới $PK = PT$ và $QK = QT$ hay $PQ$ là trung trực của $KT$. Suy ra $FK = FT$ và $LT = LK$.

Ta có tam giác $FTL$ cân tại $T$ nên $FT = TL$. Do đó $LT = LT = KF = FT$ nên tứ giác $KFTL$ là hình thoi.

**(c)** Gọi $BE$ cắt $QT$ tại $N$. Ta có $\angle FQN = \angle FQT = \angle ACF = \angle ABE = \angle FBN$ nên theo bổ đề suy ra $\angle FNQ = \angle FBQ$ dẫn tới $\angle FNT = \angle ABC$.

Lại có $KFTL$ là hình thoi nên $LT \parallel KC$ suy ra $\angle FLT = \angle PFC = 90^\circ - \angle AFI = 90^\circ - \angle FCB = \angle ABC$. Vì vậy $\angle FNT = \angle FLT = \angle QFT$ nên $\triangle FTN \backsim \triangle QTF$ suy ra $\dfrac{FT}{QT} = \dfrac{TN}{TF}$.

Ta sẽ đi chứng minh $\dfrac{TN}{EF}=\dfrac{LT}{FC}=\dfrac{FT}{FC}\iff\dfrac{TN}{TF}=\dfrac{EF}{FC}\iff\dfrac{FT}{QT}=\dfrac{EF}{FC}$.

Ta có $\triangle FTQ=\triangle FKQ$ và $\triangle FKQ\backsim\triangle FPC$ nên $\triangle FTQ\backsim\triangle FPC$ suy ra $\dfrac{FT}{FP}=\dfrac{QT}{PC}$ hay $\dfrac{FT}{QT}=\dfrac{FP}{PC}$. Khi đó ta cần chứng minh $\dfrac{FP}{PC}=\dfrac{EF}{FC}$.

Điều này đúng do $\triangle FPE\backsim\triangle CPF$. Vậy $\dfrac{TN}{EF}=\dfrac{LT}{FC}$.

Do $LT\parallel FC$ nên $\dfrac{GT}{GF}=\dfrac{LT}{FC}=\dfrac{TN}{EF}$. Và do $TN\parallel EF$ nên theo định lí Talet đảo suy ra $N$, $G$, $E$ thẳng hàng hay $B$, $G$, $E$ thẳng hàng, đpcm.

**Bài 5:**

1. Tìm tất cả các số nguyên dương $x$, $y$ sao cho $x^3+y^3$ là số chính phương và $x+y$ không có ước chính phương khác 1.
2. Xét bảng ô vuông $7\times 7$. Hỏi cần tô màu ít nhất bao nhiêu ô vuông đơn vị để mọi hình vuông cỡ $2\times 2$ trong bảng đều
   (a) chứa ít nhất một ô được tô màu.
   (b) chứa ít nhất hai ô được tô màu.

**Lời giải:**

1. Đặt $A^2=x^3+y^3$ với $A\in\mathbb{Z}^+$. Ta có $(x+y)(x^2-xy+y^2)=A^2$.

   Do $x+y$ không có ước chính phương khác 1 và $x+y>1$ nên nếu gọi $p_1$, $p_2,\cdots,p_k$ là tất cả các ước nguyên tố phân biệt của $x+y$ thì $x+y=p_1p_2\cdots p_k$.

   Khi đó với mỗi $i=1,2,\cdots,k$, $A^2\,\vdots\,p_i\implies A\,\vdots\,p_i\implies A^2\,\vdots\,p_i^2$ dẫn tới $x^2-xy+y^2\,\vdots\,p_i$. Mà các $p_i$ là các số nguyên tố phân biệt nên $x^2-xy+y^2\,\vdots\,p_1p_2\cdots p_k=x+y$.

   Đặt $d=(x;y)$ và viết $x=dx_1$, $y=dy_1$ trong đó $x_1$, $y_1\in\mathbb{Z}^+$, $(x_1;y_1)=1$.

   Khi đó $d(x_1+y_1)=p_1p_2\cdots p_k$. Nếu tồn tại $p$ là ước nguyên tố chung của $d$ và $x_1+y_1$ thì $p_1p_2\cdots p_k\,\vdots\,p^2$, vô lí. Vậy $(d;x_1+y_1)=1$.

   Từ $x^2-xy+y^2\,\vdots\,x+y$ suy ra $d(x_1^2-x_1y_1+y_1^2)\,\vdots\,x_1+y_1$. Mà $(d;x_1+y_1)=1$ nên $x_1^2-x_1y_1+y_1^2\,\vdots\,x_1+y_1$.

   Suy ra $(x_1+y_1)^2-3x_1y_1\,\vdots\,x_1+y_1\implies 3x_1y_1\,\vdots\,x_1+y_1\implies 3x_1^2\,\vdots\,x_1+y_1$.

   Do $x+y\,\vdots\,x_1+y_1$ nên $x_1+y_1$ không có ước chính phương khác 1. Gọi $q_1,\cdots,q_l$ là tất cả các ước nguyên tố phân biệt của $x_1+y_1$ thì $x_1+y_1=q_1\cdots q_l$.

   Nếu $x_1+y_1$ không chia hết cho 3 thì $q_i\neq 3$ với mọi $i$ dẫn tới $x_1^2\,\vdots\,x_1+y_1\implies x_1^2\,\vdots\,q_i\implies x_1\,\vdots\,q_i$ với mọi $i$ do đó $x_1\,\vdots\,q_1\cdots q_l=x_1+y_1$, vô lí.

   Do đó $x_1+y_1\,\vdots\,3$. Giả sử $q_1=3$. Nếu $x_1+y_1=3$ thì $x_1=1$, $y_1=2$ hoặc $x_1=2$, $y_1=1$. Khi đó $A^2=9d^3$ nên $d^3$ là số chính phương, vì vậy $d$ là số chính phương. Mà $x+y=3d$ không có ước chính phương nào khác 1 nên $d=1$. Trong trường hợp này $(x;y)=(1;2)$ hoặc $(2;1)$.

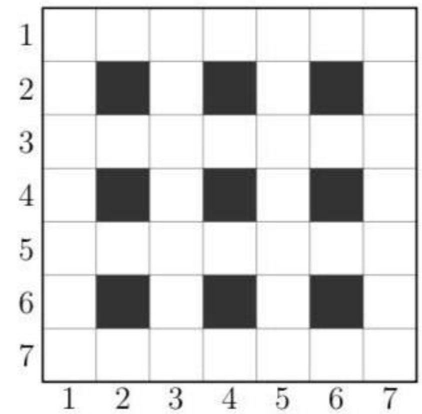
   Nếu $x_1+y_1>3$ thì $l\geq 2$ do đó $x_1^2\,\vdots\,q_2\cdots q_l$ dẫn tới $x_1\,\vdots\,q_2\cdots q_l$ suy ra $3x_1\,\vdots\,q_1\cdots q_l=x_1+y_1$.

Từ đó $3y_1 \vdots x_1 + y_1$. Không mất tổng quát giả sử $x_1 \geq y_1$, khi đó $x_1 + y_1 \geq 2y_1$ mà $3y_1 \vdots x_1 + y_1$ nên ta có điều vô lí.

Vậy $(x; y) = (1; 2)$ hoặc $(2; 1)$.

2. (a) Bảng $7 \times 7$ chứa 9 ô $2 \times 2$ rời nhau. Vậy cần tô ít nhất 9 ô.

**Minh họa cách tô:**




**Kết luận:** Số ô vuông ít nhất cần tô là 9 ô.

(b) Ta đánh số cho ô được tô màu là 1 và ô không được tô màu là -1.

Xét hình vuông $3 \times 3$ bất kỳ:

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

Tổng $S$ của các ô vuông trong hình vuông $3 \times 3$ này là:

$$S = a + b + c + d + e + f + g + h + i$$

Ta có thể viết lại tổng $S$ như sau:

$$S = (b + c + e + f) + (d + e + g + h) + a + i - e$$

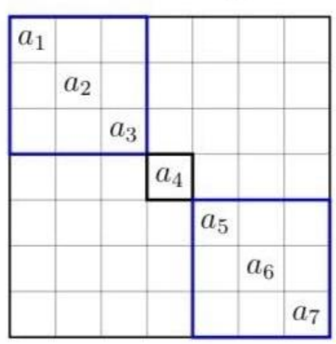
Theo giả thiết, mỗi hình vuông $2 \times 2$ có tổng các số $\geq 0$. Do đó:

- Tổng của hình vuông con góc trên phải: $b + c + e + f \geq 0$
- Tổng của hình vuông con góc dưới trái: $d + e + g + h \geq 0$

Suy ra:

$$S \geq 0 + 0 + a + i - e = a + i - e$$

Trở lại bảng $7 \times 7$, ta chia bảng theo hình dưới đây:



Dễ thấy các bảng $4 \times 4$ chia thành các hình vuông $2 \times 2$ nên tổng các số trên hai bảng $4 \times 4$ sẽ lớn hơn hoặc bằng $a_4$.

Gọi $A$ là tổng tất cả các số trên bảng, $a$ là số các ô được tô màu, $b$ là số các ô không được tô màu. Khi đó

$$A \geq a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$$

$$A \geq a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_7 \geq (-1) - 1 + (-1) - \cdots + (-1) = -7$$

Mà $A = a - b$ dẫn tới $a - b \geq -7 \implies b \leq a + 7$. Mà $a + b = 49$ nên $a \geq 21$.

Một cách đánh số với $A = -7$ (tương ứng với 21 ô) là:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |

**Kết luận:** Cần tô ít nhất 21 ô.