UBND XÃ BÌNH MINH
TRƯỜNG THCS MÃ THÀNH

ĐỀ THI THỬ HỌC SINH GIỎI LỚP 9 LẦN 1
NĂM HỌC 2025 - 2026
Môn thi: Toán
Thời gian: **120 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Đề ra

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Chứng minh rằng tổng bình phương hai số lẻ bất kì không phải là số chính phương.

b) Chứng minh rằng $A = 3^{2^{4n+1}} + 2$ là hợp số với n là số nguyên dương.

Câu 2 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình $(x^2+1)^2 + 3x(x^2+1) + 2x^2 = 0.$

b) Giải phương trình : $2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) - 12 = 0$

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 3y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Câu 3 (1,0 điểm). Cho đa thức $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}.$

Tính giá trị của $A = \mathrm{f}\left(\dfrac{1}{2025}\right) + \mathrm{f}\left(\dfrac{2}{2025}\right) + ... + \mathrm{f}\left(\dfrac{2023}{2025}\right) + \mathrm{f}\left(\dfrac{2024}{2025}\right).$

Câu 4 (3,0 điểm).

a) Ông A gửi một số tiền vào ngân hàng theo mức lãi suất tiết kiệm với kỳ hạn 1 năm là 6%. Tuy nhiên sau thời hạn một năm ông A không đến nhận tiền lãi mà để thêm một năm nữa mới nhận. Khi đó số tiền lãi có được sau năm đầu tiên sẽ được ngân hàng cộng dồn vào số tiền gửi ban đầu để thành số tiền gửi cho năm kế tiếp với mức lãi suất cũ. Sau 2 năm ông A nhận được số tiền là 112.360.000 đồng (kể cả gốc lẫn lãi). Hỏi ban đầu ông A đã gửi bao nhiêu tiền?

b) Trong túi đựng 48 viên bi cùng kích thước và khối lượng với hai màu đỏ và xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi. Biết rằng xác suất lấy được viên bi đỏ bằng 92% xác suất lấy được viên bi màu xanh. Hỏi trong túi có bao nhiêu viên bi màu đỏ, bao nhiêu viên bi màu xanh?

Câu 5 (7,5 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, gọi O là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng $S_{BFEC} = S_{AEF}.\cos^2 A$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{FED} = \widehat{FOD}.$

c) Chứng minh rằng $cot^2 A + cot^2 B + cot^2 C \geq 1.$

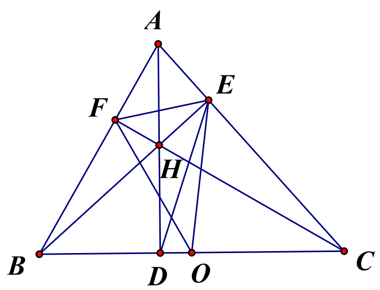
d) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì để $DH.DA + EH.EB + FH.FC = \dfrac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4}.$

Câu 6 (0,5 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3y^2 + x^2 + 2xy + 2x + 6y + 2025$

……………Hết……………

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM

CÂU		ĐIỂM
Câu 1a **1 điểm**	Chứng minh rằng tổng bình phương hai số lẻ bất kì không phải là số chính phương.	
	Đặt $A=(2k+1)^2+(2m+1)^2$	**0,25**
	$A=4(m^2+k^2+m+k)+2$	**0,25**
	Ta có A chia cho 4 dư 2 nên A không phải là số chính phương	**0,5**
Câu 1b **1 điểm**	Chứng minh rằng $A=3^{2^{4n+1}}+2$ là hợp số với n là số nguyên dương.	
	Ta có $2^{4n+1}=2.16^n\equiv 2(\bmod 5)\Rightarrow 2^{4n+1}=5k+2$	**0,25**
	$\Rightarrow A=3^{5k+2}+2=9.243^k+2\equiv 0(\bmod 11)$	**0,25**
	Ta có A chia hết cho 11 và $A>11\Rightarrow A$ là hợp số	**0.5**
Câu 2a **2,0 điểm**	Giải phương trình $(x^2+1)^2+3x(x^2+1)+2x^2=0.$	
	Đặt $y=x^2+1\Rightarrow y^2+3xy+2x^2=0\Rightarrow (y+x)(y+2x)=0$	**1,0**
	TH1: $y=-x\Rightarrow x^2+x+1=0\Rightarrow (x+0,5)^2+0,75=0$ (vô nghiệm)	**1,0**
	TH2: $y=-2x\Rightarrow x^2+2x+1=0\Rightarrow (x+1)^2=0\Rightarrow x=-1$. PT có nghiệm $x=-1$.	
Câu 2b **2,0 điểm**	Ta có: $2(6x+7)^2(3x+4)(x+1)-12=0$ $\Leftrightarrow 2(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=12$ $\Leftrightarrow (6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72$ Đặt $6x+7=t$, đẳng thức trên trở thành $t^2(t+1)(t-1)=72$ $\Leftrightarrow t^2(t^2-1)=72$ $\Leftrightarrow t^4-t^2-72=0$ $\Leftrightarrow (t^2+8)(t^2-9)=0$ $\Leftrightarrow t^2=9$ (Vì t^2+8 dương) $\Leftrightarrow t=3$ hoặc $t=-3$ Nếu $t=3$ suy ra $x=-\frac{2}{3}$ Nếu $t=-3$, suy ra $x=-\frac{5}{3}$ Vậy $x=-\frac{2}{3}$ hoặc $x=-\frac{5}{3}$	2,0
Câu 2c **2,0 điểm**	Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2-4x+3y+2=0\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$	
	Từ $2x^2-3xy+y^2-4x+3y+2=0\Rightarrow (x-y-1)(2x-y-2)=0$	**1,0**
	TH1: $y=x-1$ thay vào PT dưới $(x;y)=(0;-1),(1;0)$	**0,5**
	TH2: $y=2x-2$ thay vào PT dưới $(x;y)=(1;0);\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$	

	HPT có 3 nghiệm: $(x;y)=(0;-1),(1;0),\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$	**0,5**
Câu 3 **1,0 điểm**	Cho đa thức $\mathrm{f}(x)=\dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Tính giá trị của $A=\mathrm{f}\left(\dfrac{1}{2025}\right)+\mathrm{f}\left(\dfrac{2}{2025}\right)+\ldots+\mathrm{f}\left(\dfrac{2023}{2025}\right)+\mathrm{f}\left(\dfrac{2024}{2025}\right)$.	
	$x+y=1\Rightarrow f(x)+f(y)=1$. Ta có $f(x)=\dfrac{x^3}{x^3+(1-x)^3}\Rightarrow f(y)=f(1-x)=\dfrac{(1-x)^3}{x^3+(1-x)^3}$	**0,5**
	A=$\left(f\left(\dfrac{1}{2025}\right)+f\left(\dfrac{2024}{2025}\right)\right)+\ldots+\left(f\left(\dfrac{1012}{2025}\right)+f\left(\dfrac{1013}{2025}\right)\right)$ =1012	**0,5**
Câu 4a **1,5 điểm**	**c)** Gọi số tiền ông A gửi ban đầu là x (đồng, x>0) Số tiền lãi sau 1 năm ông A nhận được là 6%x =0.06 x (đồng) Số tiền có được sau 1 năm của ông A là x + 0,06x = 1,06% (đồng) Số tiền lãi năm thứ 2 ông A nhận được là 1,06x. 0,06-0,0636x (đồng) Do vậy số tiền tổng cộng sau 2 năm ông Sáu nhận được là: 1.06x+0.0636x=1.1236x(đồng) Sau 2 năm ông A nhận được cả gốc lẫn lãi số tiền là 112.360.000 đồng nên ta có phương trinh 1236x=112360000 suy ra x=100 000 000 Vậy ban đầu ông A đã gửi 100 triệu đồng.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 4b **1,5 điểm**	Trong túi đựng 48 viên bi cùng kích thước và khối lượng với hai màu đỏ và xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi. Biết rằng xác suất lấy được viên bi đỏ bằng 92% xác suất lấy được viên bi màu xanh. Hỏi trong túi có bao nhiêu viên bi màu đỏ, bao nhiêu viên bi màu xanh?	
	Gọi số viên bi màu đỏ là x. Số viên bi màu xanh 48 – x (ĐK: 0< x < 48) Xác suất lấy được viên bi màu đỏ là $\dfrac{x}{48}$, màu xanh là $\dfrac{48-x}{48}$ Theo đề bài ta có phương trình: $\dfrac{x}{48}=0,92.\dfrac{48-x}{48}$	0,5 **0,5**
	$\Rightarrow x=23$. Vậy số viên bi màu đỏ có trong túi là 23. Màu xanh là 25.	**0,5**
Câu 5a **2,5 điểm**	Chứng minh rằng $S_{BFEC}=S_{AEF}.sin^2A$	
		

	$\Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = \text{Cos}^2 A \Rightarrow S_{AEF} = S_{ABC}.\text{Cos}^2 A$	**1,5**
	$S_{BFEC} = S_{ABC} - S_{AEF} = S_{ABC} - S_{ABC}.cos^2 A = S_{ABC}.sin^2 A$	**1,0**
Câu 5b **2 điểm**	Chứng minh rằng $\widehat{FED} = \widehat{FOD}$.	
	$\Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$, tương tự $\widehat{CED} = \widehat{ABC}$ $\Rightarrow \widehat{FED} = 180^0 - 2\widehat{ABC} = 2(90^0 - \widehat{ABC})$	**1**
	Tam giác OFC cân $\Rightarrow \widehat{FOD} = 2\widehat{FCD} = 2(90^0 - \widehat{ABC}) \Rightarrow \widehat{FED} = \widehat{FOD}$.	**1**
Câu 5c **1,5 điểm**	Chứng minh rằng $cot^2 A + cot^2 B + cot^2 C \geq 1$.	
	Vì $\widehat{BFH} = \widehat{BAC} \Rightarrow cot\widehat{BHF}.cotB = \dfrac{FH}{BF}.\dfrac{BF}{FC} = \dfrac{FH}{FC} = \dfrac{FH.AB}{FC.AB} = \dfrac{2.S_{AHB}}{2.S_{ABC}} = \dfrac{S_{AHB}}{S_{ABC}}$ Tương tự: $cotB.cotC = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}; cotC.cotA = \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$ Từ đó ta có: $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}} = 1$	0,5 **0,5**
	$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq \cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cot A = \cot B = \cot C \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.	**0,5**
Câu 5d **1,5 điểm**	Tam giác ABC có thêm điều kiện gì để $DH.DA + EH.EB + FH.FC = \dfrac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4}$.	
	$\Delta DHC \sim \Delta DBA \Rightarrow DH.DA = DB.DC \leq \dfrac{(DB+DC)^2}{4} = \dfrac{BC^2}{4}$, tương tự ta có	**0,75**
	$\Rightarrow DH.DA + EH.EB + FH.FC \leq \dfrac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều	**0.75**
Câu 6 **0,5 điểm**	$A = 3y^2 + x^2 + 2xy + 2x + 6y + 2025$ $= (y + x + 1)^2 + 2(1+y)^2 + 2022$ Vậy GTNN của A = 2022 khi y = -1 và x =0	**0,5**