SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HƯNG YÊN** **ĐỀ CHÍNH THỨC**	KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2025 – 2026 Môn thi: TOÁN Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Toán *Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề*

Câu I *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $M=\left(\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{3\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}\right)\left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}}-2\right)$.

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M.

2) Đặt $N=M.\left(9x-2\sqrt{x}+4\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức N.

Câu II *(2,0 điểm)*

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=x+m$ và parabol $(P): y=2x^2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $\left(2x_1^2-x_2-m\right)^2+\left(2x_2^2-x_1-m\right)^2=4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+x^2-xy^2=2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3} \\ 56x^2+20\left(x^2-y^2\right)=\sqrt[3]{4x(8x+1)}-2 \end{cases}$.

Câu III *(2,0 điểm)*

1) Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình

$$\left(x^2+3\right)y^2-(x-2y)(x+2y+1)=25x+2y+169.$$

2) Một thùng có 40 quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có một số quả bóng màu đỏ, một số quả bóng màu xanh, còn lại là những quả bóng màu khác. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong thùng. Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ là $\dfrac{3}{10}$, xác suất để lấy được quả bóng màu xanh là $\dfrac{3}{8}$. Tìm số quả bóng có màu khác màu đỏ và màu xanh.

Câu IV *(1,0 điểm)*

Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB=9cm$, $BC=6cm$. Gọi K là trung điểm của AD. Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho $AH=2cm$. Tính $\cos\widehat{HCK}$.

Câu V *(2 điểm)*

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm I cố định nằm trên đường tròn $(O; R)$. Gọi A, B là các giao điểm của hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; R)$, P là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I; R)$. Đường thẳng qua P và vuông góc với IP cắt đường tròn $(O; R)$ tại M, N. Kẻ PH vuông góc với IM tại H, PK vuông góc với IN tại K.

1) Chứng minh rằng bốn điểm I, H, P, K cùng thuộc một đường tròn và HK vuông góc với OI.

2) Khi P thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I; R)$, tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IHK.

Câu VI *(1,0 điểm)*

Cho các số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{2x^2+2xy+y^2}}{x+2y}+\frac{\sqrt{2y^2+2yz+z^2}}{y+2z}+\frac{\sqrt{2z^2+2zx+x^2}}{z+2x}.$$

----------**HẾT**----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN
TỈNH HƯNG YÊN 2025

Câu I.

a. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-4\neq 0 \\ x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8\neq 0 \\ \sqrt{x}\neq 0, x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4 \\ (x-4)(\sqrt{x}-2)\neq 0 \\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0, x\neq 4.$

Ta có:

$$M=\left(\frac{1}{x-4}+\frac{3\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}\right)\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}}-2\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}+\frac{3\sqrt{x}+10}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}\right)\left(\frac{x-4\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}}\right)$$
$$=\frac{4\sqrt{x}+8}{(\sqrt{x}-2)^2(\sqrt{x}+2)}.\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{4\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $M=\frac{1}{\sqrt{x}}, x\neq 4, x>0.$

b. Ta có: $N=M.(9x-2\sqrt{x}+4)=\frac{9x-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}=9\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-2\geq\left(3\sqrt[4]{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+10\geq 10.$

Như vậy $\min N=10.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $3\sqrt[4]{x}=\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=\frac{4}{9}.$

Câu II.

a. Giả sử (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Khi đó phương trình hoành độ $2x^2=x+m$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2.$

Ta có: $2x^2-x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta=1+8m>0.$

Khi đó: $2x_1^2-x_1-m=0\Leftrightarrow 2x_1^2-x_2-m=x_1-x_2.$ Tương tự $2x_2^2-x_1-m=x_2-x_1.$

Theo định lý Viet thì $x_1+x_2=\frac{1}{2}, x_1x_2=-\frac{m}{2}.$

Như vậy $4=(2x_1^2-x_2-m)^2+(2x_2^2-x_1-m)^2=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_1)^2\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2=2.$

Hay là: $2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{1}{4}+2m\Leftrightarrow m=\frac{7}{8}.$ Thử lại ta thấy thoả mãn.

Vậy $m=\dfrac{7}{8}$ là giá trị cần tìm thoả mãn yêu cầu bài toán.

b. Điều kiện: $x-y^2>0.$ Ta có:

Đặt $a=\sqrt{x-y^2}>0$. Từ (1) khi đó

$$x^3+x(x-y^2)-2\sqrt{(x-y^2)^3}=0 \Leftrightarrow x^3+ax^2-2a^3=0 \Leftrightarrow (x-a)(x^2+2ax+2a^2)=0.$$

Mà $x^2+2ax+2a^2=(x+a)^2+a^2>0.$ Suy ra $x=a \Leftrightarrow x=\sqrt{x-y^2}, x>0.$ (*)

Ta bình phương hai vế (*) lên ta có: $y^2=x-x^2.$ Thay vào (2) thì

$$56x^2+20(x^2-x+x^2)=\sqrt[3]{4x(8x+1)}-2 \Leftrightarrow 96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}.$$

Ta có: $6\sqrt[3]{4x(8x+1)} \le 3\sqrt[3]{2.16x.(8x+1)} \le 24x+3.$

Và $6.(96x^2-20x+2)=(576x^2-144x+9)+24x+3=(24x-3)^2+24x+3 \ge 24x+3.$

Như vậy $96x^2-20x+2 \ge \sqrt[3]{4x(8x+1)}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2=16x=8x+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}.\text{(tm)}$$

Suy ra $y^2=x-x^2=\dfrac{7}{64} \Rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{8}.$ Thử lại các cặp $\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{\sqrt{7}}{8}\right),\left(\dfrac{1}{8},-\dfrac{\sqrt{7}}{8}\right)$ đều thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là: $\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{\sqrt{7}}{8}\right),\left(\dfrac{1}{8},-\dfrac{\sqrt{7}}{8}\right).$

Câu III.

1. Giả sử phương trình $(x^2+3)y^2-(x-2y)(x+2y+1)=25x+2y+169(*)$ có nghiệm nguyên. Ta có phương trình (*) tương đương

$$x^2y^2+7y^2-x^2-x+2y=25x+2y+169 \Leftrightarrow (x^2+7)y^2=x^2+26x+169=(x+13)^2.$$

Như vậy x^2+7 là số chính phương. Đặt $x^2+7=z^2, z$ là số nguyên dương.

Khi đó $7=(z-x)(z+x).$ Do $z-x+z+x=2z>0.$ Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} z-x=1 \\ z+x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ z=4 \end{cases}$. Suy ra $y^2=16 \Leftrightarrow y=\pm 4.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} z-x=7 \\ z+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ z=4 \end{cases}$. Suy ra $y^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow y=\pm\frac{5}{2}$. (loại)

Như vậy phương trình (*) có các nghiệm (*x, y*) thoả mãn là $(3,4),(3,-4)$.

2. Gọi số quả bóng có màu đỏ, màu xanh trong thùng lần lượt là: x, y.

Số cách lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong thùng là 40 (cách).

Số cách để lấy được một quả bóng màu đỏ là: *x* (cách).

Vì xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ là $\frac{3}{10}$. Như vậy $\frac{x}{40}=\frac{3}{10} \Leftrightarrow x=12.$

Số cách để lấy được một quả bóng màu xanh là: *y* (cách).

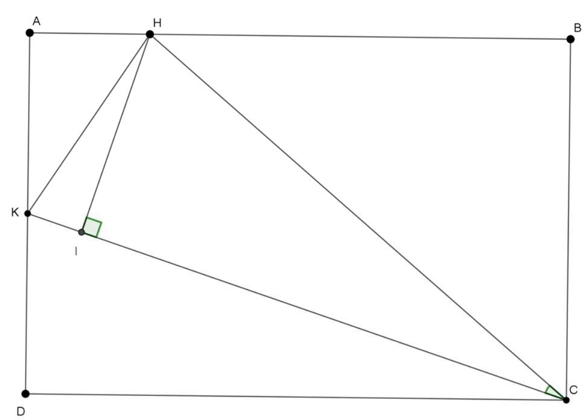
Vì xác suất để lấy được quả bóng màu xanh là $\frac{3}{8}$. Như vậy $\frac{y}{40}=\frac{3}{8} \Leftrightarrow x=15.$

Do đó số quả bóng có màu khác trong thùng là 40 - 12 - 15 = 13.

Vậy số quả bóng có màu khác xanh và đỏ là 13 (quả).

Câu IV.

Kẻ đường cao *HI* của tam giác *HKC*. Do *K* là trung điểm *AD* nên *AK* = *KD* = 3 (*cm*). Ta có: $BH = AB - AH = 9-2=7(cm)$.



Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông *KAH, BHC, KDC* thì

$$KH^2 = AH^2 + AK^2 = 13, KC^2 = KD^2 + DC^2 = 90, HC^2 = HB^2 + BC^2 = 85.$$

Suy ra $KH=\sqrt{13}, KC=3\sqrt{10}, HC=\sqrt{85}(cm)$.

Ta có: $KH^2=HI^2+KI^2=HC^2-IC^2+(KC-IC)^2=HC^2+KC^2-2KC.IC$.

Mà tam giác HIC vuông tại I nên $\cos\angle HCK=\dfrac{IC}{HC}\Leftrightarrow IC=HC.\cos\angle HCK$.

Như vậy $KH^2=HC^2+KC^2-2KC.HC.\cos\angle HCK$.

Do đó: $\cos\angle HCK=\dfrac{HC^2+KC^2-KH^2}{2KC.HC}=\dfrac{85+90-13}{2\sqrt{85}.3\sqrt{10}}=\dfrac{27\sqrt{34}}{170}$.

Vậy $\cos\angle HCK=\dfrac{27\sqrt{34}}{170}$.

Câu V.

1) Gọi *C* là giao điểm của *OI* và *HK*, và *D* là trung điểm của *IP*.

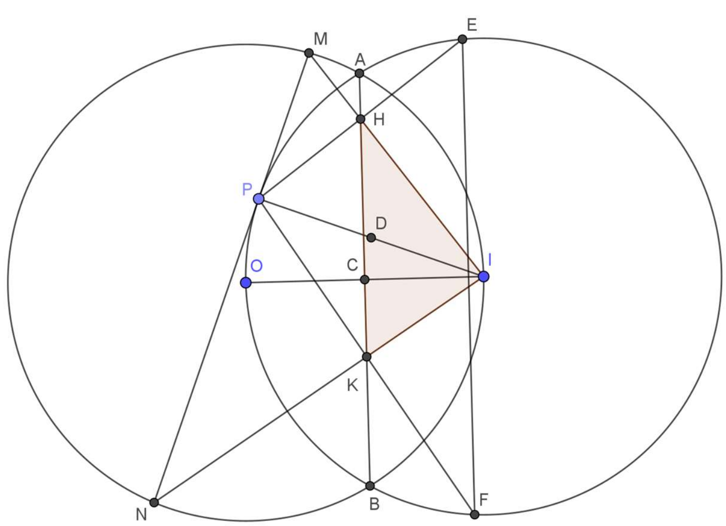
Do tam giác *IPK* vuông tại *K* và tam giác *IPH* vuông tại *H* nên *DK* = *DP* = *DI* = *DH*.

Như vậy bốn điểm *P, K, I, H* thuộc cùng một đường tròn.

Ta có: $\angle IKH=\dfrac{1}{2}\angle IDH=\angle HPI=\angle PMI=\dfrac{1}{2}\angle NOI$.

Suy ra $\angle CIH+\angle IKH=\dfrac{180°-\angle NOI}{2}+\dfrac{1}{2}\angle NOI=90°$.

Vậy *HK* vuông góc *OI* tại *C*.



2) Ta gọi giao của PH, PK với (I,R) lần lượt là E, F.

Do tam giác IPE cân tại I có IH vuông góc EP nên H là trung điểm PE.

Giả sử AH cắt (O,R) tại B' thì $HA.HB' = HM.HI = HP^2 = HP.HE$.

Như vậy tứ giác $APB'E$ nội tiếp. Hay B' thuộc (I,R) nên B' trùng B.

Do đó H thuộc AB, tương tự thì K cũng thuộc AB.

Như vậy A,H,K,B thẳng hàng.

Ta có $AO = AI$, $BO = BI$ nên AB là đường trung trực của OI nên C là trung điểm OI.

Ta có: $S_{HIK} = \frac{1}{2}IC.HK = \frac{1}{4}.IO.HK \le \frac{R}{4}.IP = \frac{R^2}{4}$ (do IP là đường kính của đường tròn (D, DI))

Dấu bằng xảy ra khi và chi khi $R = IP = HK = \frac{1}{2}EF$. Tức là EF là đường kính của (I,R). Hay P trùng với O.

Vậy GTLN của S_{HIK} là $\frac{R^2}{4}$ khi P trùng với O.

Câu VI.

Ta có: $5(2x^2+2xy+y^2) = (2^2+1^2)\left[(x+y)^2+x^2\right] \overset{C-S}{\ge} \left(2(x+y)+x\right)^2 = (3x+2y)^2$.

Suy ra $(x+y)^2+x^2 \ge \frac{(3x+2y)^2}{5}$ hay $\frac{\sqrt{2x^2+2xy+y^2}}{x+2y} \ge \frac{3x+2y}{\sqrt{5}(x+2y)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{2x}{x+2y}\right)$.

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\frac{\sqrt{2y^2+2yz+z^2}}{y+2z} \ge \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{2y}{y+2z}\right), \frac{\sqrt{2z^2+2zx+x^2}}{z+2x} \ge \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{2z}{z+2x}\right).$$

Khi đó ta cộng vế theo vế và áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu thì

$$P \ge \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}\right) = \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{x^2}{x^2+2xy}+\frac{y^2}{y^2+2yz}+\frac{z^2}{z^2+2zx}\right)$$
$$\ge \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} = \frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Vậy $\min P = \sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chi khi $x = y = z$.