

Bài I (5 điểm) .

1) Cho $A = \frac{x+1}{x^2+3}$ và $B = \frac{1}{32x+8} + \frac{9}{32x-8} - \frac{4x^2}{1-16x^2}$ với $x \neq -1$; $x \neq \pm \frac{1}{4}$

Tìm giá trị lớn nhất của $M = A : B$

2) Giải phương trình : $x^4 - 4x^2 + 16 = x(x^2 + 4)$

Bài II (3 điểm).

1) Gieo hai con xúc xắc cùng một lúc. Tính tổng số chấm trong mỗi lần gieo. Gọi A là biến cố “ Tổng chia 5 dư 2”. Tìm xác suất của A.

2) Tìm x là số nguyên sao cho $x^2 + 13x + 32$ là số chính phương

Bài III(4 điểm) .

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2025^2} < \frac{5}{3}$

2) Một sợi dây đồng dài 100 cm. Người ta cắt nó thành hai đoạn rồi mỗi đoạn gấp thành một hình vuông. Hỏi phải cắt như thế nào để tổng diện tích hai hình vuông gấp được có diện tích nhỏ nhất?

Bài IV(6 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Gọi E trung điểm của cạnh AC. Gọi hình chiếu vuông góc của E trên BC là H. Đường thẳng EH cắt đường thẳng AB tại M. Đường thẳng BE cắt CM tại K. Vẽ D đối xứng với E qua A. Kẻ DQ vuông góc với CM. Gọi AC cắt HK tại J

a) Chứng minh rằng: $\widehat{CKH} = \widehat{CBA}$ và HK song song với AQ

b) Chứng minh $\cos \widehat{BCM} = \cos \widehat{CBM} \cdot \cos \widehat{CMB}$ và $EJ.AC = AE.JC$

c) Kẻ AN vuông góc với BK, CN cắt KH tại F. Gọi O trung điểm AK. Chứng minh CO đi qua trung điểm của KF.

Bài V (2 điểm).

1) Cho đa thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số nguyên và $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi x nguyên. Chứng minh rằng: $ab - bc + ac$ chia hết cho 49.

2) Chứng minh rằng trong 16 số tự nhiên khác nhau tùy ý nhỏ hơn 50 có thể chọn ra hai số mà ước chung lớn nhất của chúng khác 1.

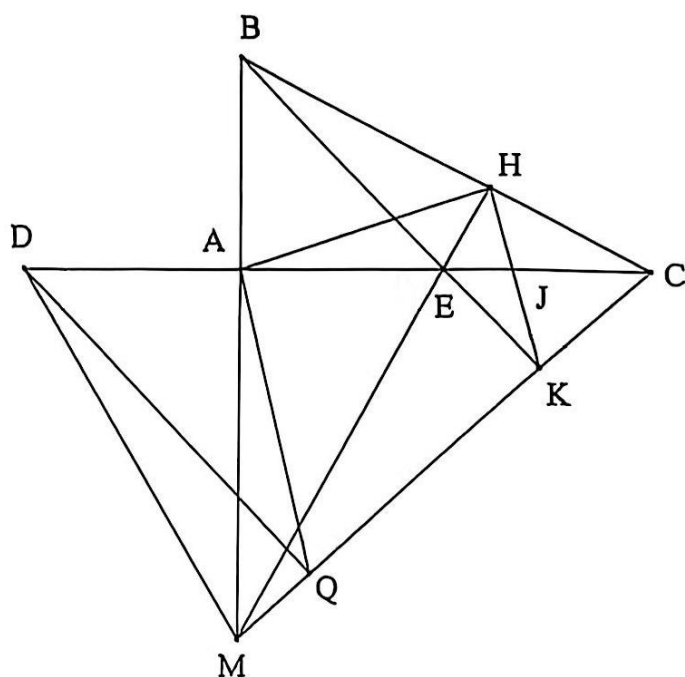
-----Hết-----

(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG TOÁN 9

Bài I (5điểm)	1) Cho $A = \frac{x+1}{x^2+3}$ và $B = \frac{1}{32x+8} + \frac{9}{32x-8} - \frac{4x^2}{1-16x^2}$ với $x \neq -1$; $x \neq \pm \frac{1}{4}$	Điểm
	Rút gọn $M = A : B$	
	$B = \frac{1}{32x+8} + \frac{9}{32x-8} - \frac{4x^2}{1-16x^2} = \frac{1}{8(4x+1)} + \frac{9}{8(4x-1)} + \frac{4x^2}{(4x+1)(4x-1)}$	0,5
	Quy đồng thu gọn được $B = \frac{8(4x^2+5x+1)}{8(4x+1)(4x-1)}$	0,5
	$B = \frac{8(4x+1)(x+1)}{8(4x+1)(4x-1)} = \frac{x+1}{4x-1}$	0,5
	$M = A : B = \frac{4x-1}{x^2+3}$ với $x \neq -1$; $x \neq \pm \frac{1}{4}$	0,5
	Tìm giá trị lớn nhất của M	
	Xét $1 - M = \frac{(x-2)^2}{x^2+3}$	0,5
	Lập luận để thấy $1 - M \geq 0$ từ đó suy ra $M \leq 1$	0,25
	Vậy GTLN của $M = 1$ khi $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)	0,25
	2) Giải phương trình : $x^4 - 4x^2 + 16 = x(x^2 + 4)$	
	Biến đổi ra : $(x^2 + 4)^2 - 12x^2 - x(x^2 + 4) = 0$	0,5
	Đặt $y = x^2 + 4$ ta có $y^2 - 12x^2 - xy = 0$	
	Biến đổi ra $(y - 4x)(y + 3x) = 0$	0,75
	Xét $y = 4x$ thay vào ta có $x^2 - 4x + 4 = 0$ suy ra $x = 2$	0,25
	Xét $y = -3x$ thay vào thì $x^2 + 3x + 4 = 0$ vô lý	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$	0,25
Bài II (3điểm)	Bài II (3 điểm) 1) Gieo hai con xúc xắc cùng một lúc. Tính tổng số chấm trong mỗi lần gieo. Gọi A là biến cố “ Tổng chia 5 dư 2”. Tìm xác suất của A.	
	Sẽ có 36 kết quả có thể xảy ra	0,5
	Số kết quả thuận lợi cho biến cố A có 8	0,5
	Xác suất xảy ra biến cố A là $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{4}{9}$	0,25
	2) Tìm x là số nguyên sao cho $x^2 + 13x + 32$ là số chính phương	
	Đặt $x^2 + 13x + 32 = y^2$ (y là số nguyên)	
	Biến đổi ta được $(2x + 13 - 2y)(2x + 13 + 2y) = 41$	0,25
	$(2x + 13 - 2y)(2x + 13 + 2y) = 1.41 = 41.1 = (-1).(-41) = (-41).(-1)$	0,25
	Giải hệ $\begin{cases} 2x + 13 - 2y = 1 \\ 2x + 13 + 2y = 41 \end{cases}$ Cho $(x; y) = (4; 10)$	0,25
	Giải hệ $\begin{cases} 2x + 13 - 2y = 41 \\ 2x + 13 + 2y = 1 \end{cases}$ Cho $(x; y) = (4; -10)$	0,25
	Giải hệ $\begin{cases} 2x + 13 - 2y = -1 \\ 2x + 13 + 2y = -41 \end{cases}$ Cho $(x; y) = (-17; -10)$	0,25

	Giải hệ $\begin{cases} 2x + 13 - 2y = -41 \\ 2x + 13 + 2y = -1 \end{cases}$ Cho $(x; y) = (-17; 10)$	0,25
	Kết luận vậy $x \in \{4; -17\}$ thì $x^2 + 13x + 32$ là số chính phương	0,25
Bài III (4điểm)	Bài III (4 điểm) 1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2025^2} < \frac{5}{3}$	
	Xét $\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2 - 1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$	1,0
	Vế trái $< 1 + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4049} - \frac{1}{4051}\right)$	0,75
	Suy ra vế trái $< 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ (điều phải chứng minh)	0,25
	2) Một sợi dây đồng dài 100 cm. Người ta cắt nó thành hai đoạn rồi mỗi đoạn gấp thành một hình vuông. Hỏi phải cắt như thế nào để tổng diện tích hai hình vuông gấp được có diện tích nhỏ nhất?	
	Gọi sợi dây khi cắt ra hai đoạn là a, b ($a > 0; b > 0$)	
	Ta có $a + b = 100$	0,5
	Khi gấp đoạn a thành hình vuông thì cạnh là $\frac{a}{4}$ Khi gấp đoạn b thành hình vuông thì cạnh là $\frac{b}{4}$	
	Khi đó tổng diện tích $P = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{16} = \frac{a^2 + b^2}{16}$	0,5
	Ta chứng minh bất đẳng thức sau: $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ (*)	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức (*) ta sẽ có $\frac{a^2 + b^2}{16} \geq \frac{(a+b)^2}{32}$	0,25
	Từ đó suy ra $P \geq 312,5$ và suy ra giá trị nhỏ nhất của $P = 312,5$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 50$	0,25
Bài IV (6điểm)	Bài IV (6 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Gọi E trung điểm của cạnh AC. Gọi hình chiếu vuông góc của E trên BC là H. Đường thẳng EH cắt đường thẳng AB tại M. Đường thẳng BE cắt CM tại K. Vẽ D đối xứng với E qua A. Kẻ DQ vuông góc với CM. Gọi AC cắt HK tại J	



a) Chứng minh rằng: $\widehat{CKH} = \widehat{CBA}$ và HK song song với AQ

Chứng minh $\triangle BKC$ đồng dạng với $\triangle MHC$ (g - g)

0,25

Chứng minh $\triangle CKH$ đồng dạng với $\triangle CBM$ (c - g - c)

0,25

Suy ra $\widehat{CKH} = \widehat{CBA}$

0,25

Chứng minh $\widehat{ABH} = \widehat{HEC} = \widehat{AEM} = \widehat{ADM}$

0,25

Chứng minh $\triangle MAC$ đồng dạng với $\triangle DQC$ (g - g)

0,25

Chứng minh $\triangle CQA$ đồng dạng với $\triangle CDM$ (c - g - c)

0,25

Suy ra $\widehat{CQA} = \widehat{CDM}$

0,25

Suy ra $\widehat{CKH} = \widehat{CQA} (= \widehat{ADM})$ và suy ra $AQ \parallel HK$

0,25

b) Chứng minh $\cos \widehat{BCM} = \cos \widehat{CBM} \cdot \cos \widehat{CMB}$

$\cos \widehat{CBM} = \frac{AB}{CB}$; $\cos \widehat{CMB} = \frac{AM}{MC}$; $\cos \widehat{BCM} = \frac{CK}{CB}$

0,25

Chứng minh $AB \cdot AM = AE \cdot AC = CE \cdot AC$

0,25

Chứng minh $CE \cdot CA = CK \cdot CM$

0,25

Suy ra $\cos \widehat{BCM} = \cos \widehat{CBM} \cdot \cos \widehat{CMB}$

0,25

$EJ \cdot AC = AE \cdot JC$

Chứng minh $\triangle BHM$ đồng dạng với $\triangle BAC$ (g - g)

0,25

Chứng minh $\triangle BHA$ đồng dạng với $\triangle BMC$ (c - g - c)

0,25

Suy ra $\widehat{BHA} = \widehat{BMC}$ Do $\widehat{CHK} = \widehat{BMC}$

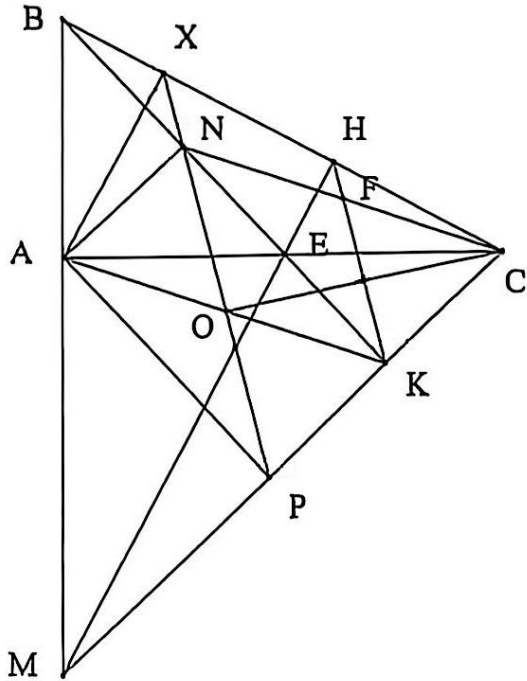
Suy ra HE là phân giác trong của $\triangle HAJ$ và HC là phân giác ngoài $\triangle HAJ$

0,25

Suy ra $\frac{HJ}{HA} = \frac{EJ}{EA} = \frac{CJ}{CA}$ và suy ra điều phải chứng minh.

0,25

c) Kẻ AN vuông góc với BK, CN cắt KH tại F. Gọi O trung điểm AK. Chứng minh CO đi qua trung điểm của KF.

		
	Kẻ $AX \perp BC$; $AP \perp MC$;	0,25
	*Chứng minh $KH \parallel XP$ và $XN \parallel HK$	
	$\frac{BX}{XH} = \frac{BA}{AM} = \frac{BN}{NK}$ suy ra $XN \parallel HK$	0,5
	$\frac{HC}{HX} = \frac{CE}{EA} = \frac{CK}{KP}$ suy ra $HK \parallel XP$	0,5
	*Chỉ ra O là trung điểm của PN	0,25
	Do $FK \parallel NP$ trong tam giác CNP thì suy ra OC đi qua trung điểm của FK	0,5
Bài V (2điểm)	1) Cho đa thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số nguyên khác 0 và $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi x nguyên. Chứng minh rằng: $ab - bc + ac$ chia hết cho 49.	
	Ta xét $P(0) = c$ mà $P(0) : 7$ suy ra $c : 7$	0,25
	$P(1) = a + b + c : 7$ suy ra $a + b : 7$	
	$P(-1) = a - b + c : 7$ suy ra $2b : 7$ suy ra $b : 7$	0,25
	Từ đó suy ra $a : 7$	0,25
	$P = ab - bc + ac : 7 \cdot 7 = 49$ (điều phải chứng minh)	0,25
	2) Chứng minh rằng trong 16 số tự nhiên khác nhau tùy ý nhỏ hơn 50 có thể chọn ra hai số mà ước chung lớn nhất của chúng khác 1.	
	Từ 1; 2; 3; ...; 50 có 15 số nguyên tố	0,25
	Xét số a bất kì nhỏ hơn 50 khi phân tích ra thừa số nguyên tố	0,25
	Ta có 16 số như vậy mà có 15 số nguyên tố như vậy sẽ có ít nhất 2 số có cùng một số nguyên tố sau khi phân tích.	0,25
	Như thế thì ước chung lớn nhất của chúng là số nguyên tố chung đó	0,25

Lưu ý: Học sinh làm cách khác mà đúng cho điểm tương đương; Điểm toàn bài giữ nguyên không làm tròn.