

Câu 1 (3 điểm).

- a. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh: $p^2 - 1$ chia hết cho 24
- b. Số điện thoại cố định dùng để tiếp dân của xã X, tỉnh Nghệ An là số có dạng $\overline{366aabb}$ biết \overline{aabb} là số chính phương. Tìm 4 số cuối của số điện thoại đó.

Câu 2 (4 điểm)

- a. Giải phương trình: $(x - 2)(x - 4)(x - 5)(x - 7) = 72$
- b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x^2 - y^2 - 3xy + x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$$

Câu 3 (4 điểm)

a. Đầu năm học mới 2025 - 2026, cô giáo chủ nhiệm lớp 9A tiến hành cho mỗi tổ trong lớp mình bốc thăm may mắn nhận quà. Tổ của Lan có 11 thành viên bốc thăm ngẫu nhiên với thùng phiếu gồm 4 phiếu có quà và 7 phiếu không có quà. Mọi thành viên trong tổ được quyền chọn rút trước hoặc rút sau và sẽ biết kết quả ngay sau khi rút phiếu. Sau 4 lần rút thăm, kết quả có 1 phiếu có quà và 3 phiếu không có quà (các phiếu đã rút ra không trả lại vào thùng) thì đến lượt Lan rút phiếu. Tính xác suất để Lan rút được phiếu có quà?

b. Hai cửa hàng A và B cùng bán một loại bánh với giá 10 000 đồng một cái nhưng mỗi cửa hàng có hình thức khuyến mãi khác nhau:

Cửa hàng A: Đối với 5 cái bánh đầu tiên mỗi cái giá 10 000 đồng. Với 5 cái bánh tiếp theo cửa hàng sẽ giảm giá 4% giá bán. Kể từ cái bánh thứ 11 trở đi mỗi cái bánh tính với giá 72% giá bán.

Cửa hàng B: Cứ mua 5 cái bánh thì được tặng thêm 1 cái bánh cùng loại.

Bạn Hoa có 250 000 đồng bạn nên chọn cửa hàng A hay cửa hàng B để mua được nhiều bánh hơn?

Câu 4 (8 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), đường cao BD, CE cắt nhau tại H.

- a. Chứng minh: $DA \cdot DC = DH \cdot DB$ và $\Delta AED \sim \Delta ACB$
- b. Chứng minh: $DE = BC \cdot \cos \widehat{BAC} = AH \cdot \sin \widehat{BAC}$
- c. Tia phân giác của \widehat{EHB} và \widehat{DHC} cắt AB và AC lần lượt tại I và K. Qua I và K lần lượt vẽ các đường thẳng vuông góc với AB, AC chúng cắt nhau tại M. Chứng minh HM luôn đi qua trung điểm của BC.

Câu 5 (1 điểm)

Một gia đình tiến hành trồng cây tràm con trên mảnh đất rừng. Xem các gốc cây tràm là các điểm (đường kính gốc cây không đáng kể), người ta trồng cây sao cho các tam giác có đỉnh là các điểm trùng với gốc cây tràm đều có diện tích không quá 500m^2 . Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có diện tích không quá 2025m^2 chứa tất cả các cây tràm trên. (Cho rằng mảnh vườn có diện tích đủ rộng để trồng cây)

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh..... SBD.....

Lưu ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM HSG CẤP XÃ LỚP 9, NĂM HỌC 2025-2026

Môn: Toán

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 3 điểm	Câu 1 (3 điểm). a. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh: $p^2 - 1$ chia hết cho 24 b. Số điện thoại cố định dùng để tiếp dân của xã X, tỉnh Nghệ An là số có dạng $\overline{366aabb}$ biết \overline{aabb} là số chính phương. Tìm 4 số cuối của số điện thoại đó.	
Câu 1a 1.5 điểm	Ta có $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ Với p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ do đó p - 1 và p+1 là 2 số tự nhiên chẵn liên tiếp nên $(p-1)(p+1) : 8$ Lại có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ Suy ra $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ Vì $(3,8) = 1$ nên $p^2 - 1 : 24$	0.75 0.75
Câu 1b 1.5 điểm	Ta có $\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b$ với $0 < a \leq 9$ và $0 \leq b \leq 9$ $\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b)$ Vì 11 là số nguyên tố và \overline{aabb} là số chính phương nên $100a + b : 11$ $99a + a + b : 11$ $\Rightarrow a + b : 11$ Mà $0 < a + b \leq 18$ nên $a + b = 11$ Ta có $11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$ Mà \overline{aabb} là số chính phương nên $b \in \{4; 5; 6; 9\}$ Suy ra $\overline{aabb} \in \{7744; 6655; 5566; 2299\}$ Lại có \overline{aabb} là số chính phương nên số thoả mãn là 7744	0,5 0,5 0,5
Câu 2 4 điểm	a. Giải phương trình: $(x-2)(x-4)(x-5)(x-7) = 72$ b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x^2 - y^2 - 3xy + x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$	
Câu 2a 2.0 điểm	$(x-2)(x-4)(x-5)(x-7) = 72$ $(x^2 - 9x + 14)(x^2 - 9x + 20) - 72 = 0$ Đặt $x^2 - 9x + 17 = a$ Ta có phương trình $(a-3)(a+3) - 72 = 0$ $a^2 - 81 = 0$ $(a-9)(a+9) = 0$ Suy ra $a = 9$ hoặc $a = -9$ TH1: $a = 9$ TH2: $a = -9$ $x^2 - 9x + 17 = 9$ $x^2 - 9x + 17 = -9$ $x^2 - 9x + 8 = 0$ $x^2 - 9x + 26 = 0$	0.5 0.5 0.75

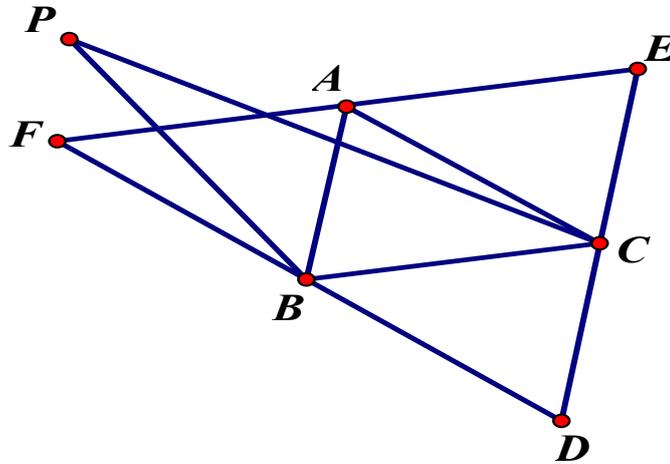
	$(x-1)(x-8) = 0$ Suy ra $x = 1$ hoặc $x = 8$	$(x - \frac{9}{2})^2 + \frac{23}{4} = 0$ (vô lý)	0.25
	Vây phương trình có nghiệm $x = 1; x = 8$		
Câu 2b 2.0 điểm	$\begin{cases} x - 2y = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 - 3xy + x + 4y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$		
	Từ (1) ta có $x = 2y + 2$ Thay $x = 2y + 2$ vào (2) ta có $4y^2 + 8y + 4 - y^2 - 6y^2 - 6y + 2y + 2 + 4y - 3 = 0$ $- 3y^2 + 8y + 3 = 0$ $(3y+1)(y-3) = 0$		1.0
	Suy ra $y = \frac{-1}{3}$ hoặc $y = 3$		0.5
	Vây nghiệm của hệ phương trình là $(x,y) \in \{(8; 3); (\frac{4}{3}; \frac{-1}{3})\}$		0.5
Câu 3 4 điểm	<p>a. Đầu năm học mới 2025-2026, cô giáo chủ nhiệm lớp 9A tiến hành cho mỗi tổ trong lớp mình bốc thăm may mắn nhận quà. Tổ của Lan có 11 thành viên bốc thăm ngẫu nhiên với thùng phiếu gồm 4 phiếu có quà và 7 phiếu không có quà. Mọi thành viên trong tổ được quyền chọn rút trước hoặc rút sau và sẽ biết kết quả ngay sau khi rút phiếu. Sau 4 lần rút thăm, kết quả có 1 phiếu có quà và 3 phiếu không có quà (các phiếu đã rút ra không trả lại vào thùng) thì đến lượt Lan rút phiếu. Tính xác suất để Lan rút được phiếu có quà?</p> <p>b. Hai cửa hàng A và B cùng bán một loại bánh với giá 10 000 đồng một cái nhưng mỗi cửa hàng có hình thức khuyến mãi khác nhau:</p> <p>Cửa hàng A: Đói với 5 cái bánh đầu tiên mỗi cái giá 10 000 đồng. Với 5 cái bánh tiếp theo cửa hàng sẽ giảm giá 4% giá bán. Kể từ cái thứ 11 trở đi mỗi cái bánh tính với giá 72% giá bán.</p> <p>Cửa hàng B: Cứ mua 5 cái bánh thì được tặng thêm 1 cái bánh cùng loại.</p> <p>Bạn Hoa có 250 000 đồng bạn nên chọn cửa hàng A hay cửa hàng B để mua được nhiều bánh hơn?</p>		

Câu 3a 1.5 điểm	Sau 4 lần rút thăm, kết quả có 1 phiếu có quà và 3 phiếu không có quà nên trong hộp còn 3 phiếu có quà và 4 phiếu không có quà.	0,5
	Kết quả có thể xảy ra cho lượt Lan bốc thăm là $3 + 4 = 7$	
	Vì Lan bốc ngẫu nhiên 1 phiếu nên các kết quả là đồng khả năng	0.5
	Kết quả thuận lợi để Lan bốc trúng phiếu có quà là 3	
	Xác suất để Lan bốc trúng phiếu có quà là $\frac{3}{7}$	0.5
Câu 3b 2.5 điểm	+) Ta tính số bánh có thể mua được của cửa hàng A: Số tiền mua 5 cái bánh đầu tiên là $5 \cdot 10\,000 = 50\,000$ đồng Số tiền mua 5 cái bánh tiếp theo là $5 \cdot 10000 \cdot 96\% = 48\,000$ đồng Số tiền còn lại sau khi mua 10 bánh đầu tiên là $250\,000 - 50\,000 - 48\,000 = 152\,000$ đồng	0.75

	<p>Khi đó số bánh có thể mua là $152\,000 : (10000.72\%) \approx 21,1$ Với số tiền 250 000 đồng có thể mua 31 bánh tại cửa hàng A và còn dư tiền +) Tính số bánh mua ở cửa hàng B $250\,000 : 50\,000 \cdot 6 = 30$ bánh Vậy Bạn Hoa có 250 000 đồng bạn nên chọn cửa hàng A để mua được nhiều bánh hơn</p>	<p>0.5</p> <p>1.0</p> <p>0.25</p>
<p>Câu 4 8 điểm</p>	<p>Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), đường cao BD, CE cắt nhau tại H.</p> <p>a. Chứng minh: $DA \cdot DC = DH \cdot DB$ và $\Delta AED \sim \Delta ACB$</p> <p>b. Chứng minh: $DE = BC \cdot \cos \widehat{BAC} = AH \cdot \sin \widehat{BAC}$</p> <p>c. Tia phân giác của \widehat{EHB} và \widehat{DHC} cắt AB và AC lần lượt tại I và K. Qua I và K lần lượt vẽ các đường thẳng vuông góc với AB, AC chúng cắt nhau tại M. Chứng minh HM luôn đi qua trung điểm của BC.</p>	
<p>Câu 4a 3 điểm</p>	<p>+) Xét ΔDAB và ΔDHC có $\widehat{BDA} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ $\widehat{ABD} = \widehat{DCH}$ (cùng phụ với góc BAD) Do đó: $\Delta DAB \sim \Delta DHC$ (g.g) Suy ra $\frac{DA}{DH} = \frac{DB}{DC}$ Vậy $DA \cdot DC = DH \cdot DB$</p> <p>+) Xét ΔDAB và ΔEAC có $\widehat{BDA} = \widehat{AEC} = 90^\circ$ \widehat{BAC} là góc chung Do đó: $\Delta DAB \sim \Delta EAC$ (g.g) Suy ra $\frac{DA}{AB} = \frac{EA}{AC}$ Xét ΔAED và ΔACB có</p>	<p>1.5</p> <p>1.5</p>

	\widehat{BAC} là góc chung $\frac{DA}{AB} = \frac{EA}{AC}$ Do đó: $\Delta AED \sim \Delta ACB$ (g.g)	
Câu 4b 3 điểm	+) ΔABD vuông tại D có $\cos\widehat{BAC} = \frac{DA}{AB}$ Theo câu b ta có $\Delta AED \sim \Delta ACB$ nên $\frac{DA}{AB} = \frac{ED}{BC}$ Suy ra $\cos\widehat{BAC} = \frac{ED}{BC}$ hay $DE = BC \cdot \cos\widehat{BAC}$ (1)	1.5
	+) ΔABD vuông tại A có $\sin\widehat{BAC} = \frac{DB}{AB}$ Kéo dài AH cắt BC tại F. ΔABC có đường cao BD, CE cắt nhau tại H nên H là trực tâm tam giác ABC do đó AF vuông góc với BC Xét ΔADH và ΔBDC có $\widehat{ADH} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ $\widehat{DAH} = \widehat{DBC}$ (cùng phụ với \widehat{ACB}) Do đó $\Delta ADH \sim \Delta BDC$ (g.g) Suy ra $\frac{AH}{BC} = \frac{DA}{BD}$ hay $AH \cdot BD = BC \cdot DA$ Suy ra $AH \cdot \frac{BD}{AB} = BC \cdot \frac{DA}{AB}$ Vậy $BC \cdot \cos\widehat{BAC} = AH \cdot \sin\widehat{BAC}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $DE = BC \cdot \cos\widehat{BAC} = AH \cdot \sin\widehat{BAC}$	1.5
Câu 4c 2 điểm	Gọi P, Q, O, N lần lượt là giao điểm của IM và BH, MK và CH, HM và PQ, HM và BC	0.5
	Xét từ giác HPMQ có PM // HQ (cùng vuông góc với AB), PH//MQ (cùng vuông góc với AC) nên tứ giác HPMQ là hình bình hành suy ra PO = QO	0.5
	ΔBHE có PI // HE $\Rightarrow \frac{PH}{PB} = \frac{IE}{IB}$ (định lý Thales)	
	ΔBHE có HI là phân giác $\widehat{EHB} \Rightarrow \frac{EH}{HB} = \frac{IE}{IB}$	
	Do đó: $\frac{PH}{PB} = \frac{EH}{HB}$ (3)	
Tương tự ta có: $\frac{QH}{QC} = \frac{HD}{HC}$ (4)		
$\Delta EHB \sim \Delta DHC$ (g.g) nên $\frac{EH}{HB} = \frac{HD}{HC}$ (5)	0.5	
Từ (3), (4), (5) suy ra $\frac{PH}{PB} = \frac{QH}{QC}$		
Tam giác BHC có $\frac{PH}{PB} = \frac{QH}{QC}$ nên PQ//BC (định lý Thales đảo)	0.5	
Suy ra $\frac{BN}{CN} = \frac{PO}{QO} = 1$		
Suy ra N là trung điểm của BC		
Vậy HM luôn đi qua trung điểm của BC		
Câu 5 1 điểm	Một gia đình tiến hành trồng cây tràm con trên mảnh đất rừng. Xem các gốc cây tràm là các điểm (đường kính gốc cây không đáng kể), người ta trồng cây	

sao cho các tam giác có đỉnh là các điểm trùng với gốc cây tràm đều có diện tích không quá 500m^2 . Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có diện tích không quá 2025m^2 chứa tất cả các cây tràm trên. (Cho rằng mảnh vườn có diện tích đủ rộng để trồng cây)



Vì số cây tràm trồng trên vườn rừng là hữu hạn nên số tam giác được lập từ các điểm là các gốc cây tràm đã cho hữu hạn. Do đó tồn tại 1 tam giác có diện tích lớn nhất, chẳng hạn tam giác ABC có đỉnh là các điểm trùng với gốc cây tràm có diện tích không quá 500m^2 . (1)

Vẽ tam giác DEF sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của EF, DF.

DE. Khi đó $S_{DEF} = 4 \cdot S_{ABC}$

Mà $S_{ABC} \leq 500$ nên $S_{DEF} \leq 2000$

Ta sẽ chứng minh tam giác DEF là tam giác chứa tất cả các cây tràm trên

Thật vậy, Giả sử tồn tại điểm P là gốc 1 cây tràm nằm ngoài tam giác DEF.

Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm khác phía BC đối với EF.

Khi đó khoảng cách từ P đến BC lớn hơn khoảng cách từ A đến BC

suy ra $S_{PBC} > S_{ABC}$ (hai tam giác có chung cạnh đáy BC)

điều này mâu thuẫn với (1)

Vậy với tam giác ABC là tam giác có diện tích lớn nhất được tạo bởi 3 điểm là 3 gốc cây trong vườn tràm, không vượt quá 500m^2 luôn tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá 2025m^2 chứa tất cả các cây tràm trên.

0.5

0.5

Lưu ý: Mọi đáp án đúng để cho điểm tối đa

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 9
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-hsg-toan-9>