

Câu 1 (3,0 điểm)

- a) Cho n nguyên dương, chứng minh rằng $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số
- b) Tìm một số chính phương có 4 chữ số, biết rằng khi ta thêm vào mỗi chữ số của nó 1 đơn vị thì được số mới cũng là số chính phương.

Câu 2 (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^4 = 1$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 1 \\ x^2 + y^5 = x^3 + y^2 \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm)

a, Bác An để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản cho bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 80 nghìn đồng. Hỏi sau 3 năm số dư trong tài khoản này của bác An là bao nhiêu? Gọi m là số tiền ban đầu trong tài khoản của bác An. Viết công thức tính số tiền dư trong tài khoản của bác An sau 10 năm theo m .

b, Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có chiều dài là 50 cm và chiều rộng là 30 cm. Bạn Linh cắt ở mỗi góc một tấm bìa hình vuông cạnh x (cm) và xếp phần còn lại thành một hình hộp không nắp. Tìm x để diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật sau khi cắt là lớn nhất

Câu 4 (7 điểm):

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $BC = 2a$ (cm). Đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB . Chứng minh rằng :

- a) $AB \cdot EB + AC \cdot EH = AB^2$
- b) Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với AC , qua điểm C vẽ đường thẳng song song với AB , hai đường thẳng này cắt nhau tại M . Gọi N và K lần lượt là trung điểm của BM và HC . Chứng minh AK vuông góc với KN .
- c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ADHE$.

Câu 5 (1 điểm). Mỗi điểm trên mặt phẳng đều được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm được tô cùng một màu mà khoảng cách giữa chúng bằng 1.

Câu 6 (2,0 điểm): Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{4; 5; 7; 8; 9; 11\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hòa. Tính xác suất của biến cố A: “Bạn Minh thắng”

.....Hết.....

Hướng dẫn chấm

Câu	Nội dung	Điểm
<u>Câu 1 (3,0 điểm)</u> a) Cho n nguyên dương, chứng minh rằng $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số b) Tìm một số chính phương có 4 chữ số, biết rằng khi ta thêm vào mỗi chữ số của nó 1 đơn vị thì được số mới cũng là số chính phương		
1 (3,0)	a 1,5 Ta có: $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ nên $2A = 2^{3n+2} + 2^{3n} + 2 = 4 \cdot (2^3)^n + (2^3)^n + 2 = 5 \cdot 8^n + 2$ Vì $8 \equiv 1 \pmod{7}$ nên $8^n \equiv 1 \pmod{7}$, suy ra $A \equiv 5 + 2 = 0 \pmod{7}$ hay $A \vdots 7$. Mặt khác ta chứng minh được $A > 7$ nên A là hợp số	1,5
	b 1,5 Gọi số đó là $\overline{abcd}$, $a \neq 0$, a, b, c, d là chữ số Do $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $\overline{abcd} = x^2, x \in \mathbb{N}$ Khi thêm vào mỗi chữ số của nó 1 đơn vị thì cũng được 1 số chính phương nên $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = y^2, y \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow y^2 - x^2 = 11.101$	0,5
	Suy ra: $(y-x)(y+x) = 11.101$. Mà $y-x < y+x$ $\Rightarrow \begin{cases} y-x=11 \\ y+x=101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=45 \\ y=56 \end{cases}$ Vậy số cần tìm là $45^2 = 2025$.	1,0
<u>Câu 2 (4 điểm)</u> a) Giải phương trình $\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^4 = 1$ b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^3 = 1 \\ x^2 + y^5 = x^3 + y^2 \end{cases}$		
	a 2,0 Đặt $t = x+1$ khi đó phương trình đã cho trở thành: $\left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = 1$ $\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} = 1$ $\Leftrightarrow 2t^4 + 3t^2 - \frac{7}{8} = 0$	0,5

		$\Leftrightarrow 16t^4 + 24t^2 - 7 = 0$ $\Leftrightarrow (16t^4 + 28t^2) - (4t^2 + 7) = 0$ $\Leftrightarrow 4t^2(4t^2 + 7) - (4t^2 + 7) = 0$ $\Leftrightarrow (4t^2 - 1)(4t^2 + 7) = 0$ Suy ra: $4t^2 - 1 = 0$ (vì $4t^2 + 7 > 0$) $(2t - 1)(2t + 1) = 0$	1,0
		Suy ra: $2t - 1 = 0$ hoặc $2t + 1 = 0$ $t = \frac{1}{2} \text{ hoặc } t = -\frac{1}{2}$ +) Với $t = \frac{1}{2}$ suy ra $x + 1 = \frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{2}$ +) Với $t = -\frac{1}{2}$ suy ra $x + 1 = -\frac{1}{2}$ $x = -\frac{3}{2}$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ và $x = -\frac{3}{2}$	0,5
	b	$\begin{cases} x^2 = 1 - y^3 \\ y^5 - y^3 = x^3 + y^2 - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 1 - y^3 \\ x^3 = (y^2 - 1)(y^3 - 1) \end{cases}$ Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 1$	1,0
	2,0	Nếu $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$. Ta có: $\begin{cases} x = 1 - y^2 \\ x^2 = 1 - y^3 \end{cases} \Rightarrow (1 - y^2)^2 = 1 - y^3 \Rightarrow (1 - y)(-2y^2 - y^3) = 0$ Do y khác 1 suy ra $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = -2 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm(x;y) là (0;1), (1;0), (-3; -2)	1,0
<u>Câu 3 (3,0 điểm)</u> a, Bác An để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản cho bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng			

năm là 80 nghìn đồng. Hỏi sau 3 năm số dư trong tài khoản này của bác An là bao nhiêu? Gọi m là số tiền ban đầu trong tài khoản của bác An. Viết công thức tính số tiền dư trong tài khoản của bác An sau 10 năm theo m .

b, Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có chiều dài là 50 cm và chiều rộng là 30 cm. Bạn Linh cắt ở mỗi góc một tấm bìa hình vuông cạnh x (cm) và xếp phần còn lại thành một hình hộp không nắp. Tìm x để diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật sau khi cắt là lớn nhất

3 (3,0)	a 1,5đ	Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác là $m_1 = m + 3\%.m - 80\,000 = 1,03m - 80\,000$ (đồng)	0,25
		Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác là $m_2 = m_1 + 3\%.m_1 - 80\,000 = 1,03m_1 - 80\,000$ $= 1,03.(1,03m - 80\,000) - 80\,000$ $= 1,03^2 m - 1,03.80\,000 - 80\,000$ (đồng)	0,25
		Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác là $m_3 = m_2 + 3\%.m_2 - 80\,000 = 1,03m_2 - 80\,000$ $= 1,03(1,03^2 m - 1,03.80\,000 - 80\,000) - 80\,000$ $= 1,03^3 . m - 1,03^2 . 80\,000 - 1,03.80\,000 - 80\,000$ (đồng)	0,5
		$= 10\,679\,998$ đồng	
		Tương tự: Vào cuối năm thứ 10, số tiền trong tài khoản của bác là $A_{10} = 1,03^{10}.m - 1,03^9.80\,000 - 1,03^8.80\,000 - \dots - 1,03.80\,000 - 80\,000$ (đồng)	0,5
	b. 1,5đ	Diện tích tấm bìa hình chữ nhật này là: $50.30 = 1500$ (cm ²). Chiều dài sau khi cắt tấm bìa là: $50 - 2x$ (cm). Chiều rộng sau khi cắt tấm bìa là: $30 - 2x$ (cm). Diện tích xung quanh của hộp là: $2x(50 - 2x + 30 - 2x) = 2x(80 - 4x) = -8x^2 + 160x$ (cm ²). Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật sau khi cắt là lớn nhất thì $-8x^2 + 160x$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có: $-8x^2 + 160x = -8(x^2 - 20x + 100) + 800 = -8(x - 10)^2 + 800$. Nhận thấy $-8(x - 10)^2 \leq 0$ nên $-8(x - 10)^2 + 800 \leq 800$. Dấu “=” xảy ra khi $x - 10 = 0$ hay $x = 10$.	1,5

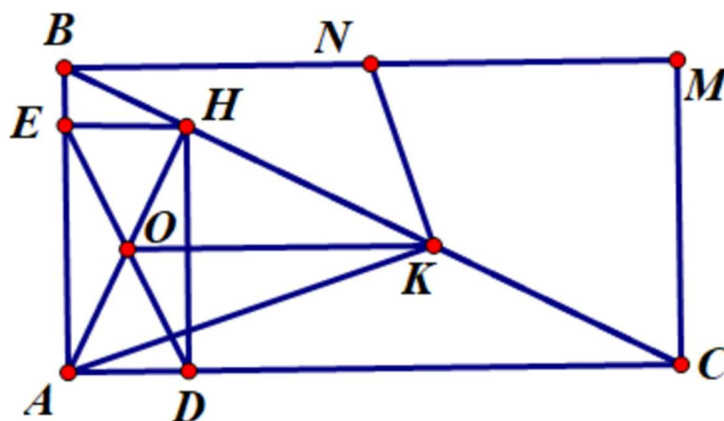
Câu 4 (7 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $BC = 2a$ (cm). Đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB . Chứng minh rằng :

a) $AB.EB + AC.EH = AB^2$

b) Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với AC , qua điểm C vẽ đường thẳng song song với AB , hai đường thẳng này cắt nhau tại M . Gọi N và K lần lượt là trung điểm của BM và HC . Chứng minh AK vuông góc với KN .

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ADHE$.



a

2,5

4

(7,0)

Xét tứ giác $ADHE$ có: $\hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$

$\Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HE = AD$.

Áp dụng TSLG vào các tam giác vuông và chứng minh đc:

$$BH^2 = BA.BE(1)$$

$$AH^2 = AD.AC$$

Mà $HE = AD$ nên $AH^2 = AD.AC = AC.HE(2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AB.EB + AC.EH = BH^2 + AH^2 = AB^2 \text{ (đpcm)}$$

1,5

1,0

b

2,5

Gọi O là giao điểm của AH và ED .

Chứng minh được OK là đường trung bình của $\triangle AHC$

Chứng minh được tứ giác $BNKO$ là hình bình hành để suy ra BO song song với NK

- Chứng minh được O là trực tâm của $\triangle ABK$

- Chứng minh được BO vuông góc với AK để suy ra NK vuông góc

1,0

1,5

		với AK	
c	2,0	Tìm giá trị lớn nhất của: diện tích tứ giác $ADHE$ $\triangle ABC$ vuông tại A, trung tuyến AM ta có: $AM = \frac{1}{2}BC = a$ (cm) Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có: $AH^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$ Tương tự: $AD = \frac{AH^2}{AC}$ Do đó: $S_{ADHE} = AE \cdot AD = \frac{AH^2}{AB} \cdot \frac{AH^2}{AC} = \frac{AH^4}{AB \cdot AC} = \frac{AH^3}{BC} \leq \frac{AM^3}{BC} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}$ Dấu “=” xảy ra khi $AH \equiv AM$ khi $H \equiv M$ Vậy $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Vậy $\max S_{ADHE} = \frac{a^2}{2}$ khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A.	1,5 0,25 0,25

Câu 5 (1 điểm) Mỗi điểm trên mặt phẳng đều được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm được tô cùng một màu mà khoảng cách giữa chúng bằng 1.

		Giả sử không có hai điểm nào được tô cùng màu và khoảng cách giữa chúng bằng 1 đơn vị Xét một điểm O bất kỳ trên mặt phẳng, giả sử điểm O được tô màu vàng Vẽ đường tròn $(O; \sqrt{3})$. Lấy một điểm P bất kỳ trên $(O; \sqrt{3})$.	0,25
		Dựng hình thoi $OAPB$ có cạnh bằng 1 và đường chéo $OP = \sqrt{3}$ Dễ thấy $OA=OB=AB=BC=1$ Theo giả sử không có hai điểm nào cùng màu mà có khoảng cách bằng 1 nên hai điểm A, B không phải màu vàng vì $OA = OB = 1$	0,5
		Suy ra P phải tô màu vàng vì $PA = PB = 1$ và A, B không tô màu vàng Mà P bất kỳ trên $(O; \sqrt{3})$ nên mọi điểm trên $(O; \sqrt{3})$ đều được tô màu vàng Suy ra luôn tồn tại hai điểm cùng tô màu vàng trên $(O; \sqrt{3})$ có khoảng cách bằng 1 Điều này trái giả sử. Suy ra điều phải chứng minh	0,25

Câu 6 (2,0 điểm) Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập $\{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập $\{4; 5; 7; 8; 9; 11\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hòa. Tính xác suất của biến cố A : “Bạn Minh thắng”

		Số cách chọn ngẫu nhiên là $6.6 = 36$ cách	0,5
		A : “Bạn Minh thắng”	

	Minh có 6 cách chọn số (từ tập hợp {5; 6; 7; 8; 9; 10}) - 5 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 10, Huy chọn 4, 5, 7, 8, 9 - 4 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 9, Huy chọn 4, 5, 7, 8 - 3 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 8, Huy chọn 4, 5, 7 - 4 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 6, 7; Huy chọn 4, 5 - 1 trường hợp Minh thắng: Minh chọn 5; Huy chọn 4 Suy ra số cách để Minh chọn thắng là: $5 + 4 + 3 + 4 + 1 = 17$. Xác suất của biến cố A: “Bạn Minh thắng” là 17: 36	1,0 0,5
--	---	-----------------------

Lưu ý: 1. Nếu học sinh giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa tương ứng cho câu đó,
2. Riêng câu 4, học sinh không vẽ hình hay vẽ hình sai thì không chấm