SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TỈNH QUẢNG NINH**	**KỲ THI TUYỂN SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG** **NĂM HỌC 2025 - 2026** **Môn thi: TOÁN (chuyên)**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC *(Đề thi này có 01 trang)*	**(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT Chuyên Hạ Long)** *Thời gian làm bài:* ***150 phút****, không kể thời gian phát đề*

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho các số thực $a, b\ (a \neq -2, b \neq -2)$, thỏa mãn $ab + a + b = 0$.

Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{(a+1)^2}{a^2+2a+b+2} + \dfrac{(b+1)^2}{b^2+2b+a+2}$.

b) Thầy giáo có 12 câu hỏi khác nhau dùng để kiểm tra vấn đáp, trong đó có 5 câu hỏi ở mức độ nhận biết, 4 câu hỏi ở mức độ thông hiểu và 3 câu hỏi ở mức độ vận dụng. Một học sinh được chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 câu hỏi trong số 12 câu hỏi trên để thực hiện kiểm tra. Tính xác suất để 2 câu hỏi học sinh đó chọn được thuộc hai mức độ khác nhau.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình $x^2 + x\sqrt{x^2 - 5x - 2} = -1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + x^2 - y^3 - yx + y^2 + x = 0 \\ \sqrt{8x - y^2} = 3y - 2x - 6. \end{cases}$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Tìm các số tự nhiên x, y thoả mãn $y^3 + 3y^2 + 3y + x^2 - 6x = 23$.

b) Tìm các số nguyên tố p, q với $p < q$ thoả mãn số $A = 2\left(p^2+1\right)\left(5q^2+29\right)$ có thể viết được dưới dạng tích của từ hai số nguyên liên tiếp trở lên.

Câu 4. *(3,5 điểm)* Cho đường tròn (O), đường kính BC (điểm O là tâm của đường tròn). Điểm A thay đổi thuộc đường tròn (O) sao cho $AB \leq AC$ và A khác B. Điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC. Điểm D là điểm đối xứng với H qua C, điểm E là điểm đối xứng với H qua A. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt các đường thẳng EB, ED lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh A là trực tâm tam giác BED.

b) Chứng minh M thuộc đường tròn (O).

c) Khi điểm A thay đổi và thỏa mãn các giả thiết của bài toán, tìm vị trí điểm A để $AM.AN$ lớn nhất.

Câu 5. *(0,5 điểm)* Bạn Bình có 18 thẻ gỗ, mỗi thẻ được đánh một số bất kì từ 1 đến 2526 (mỗi số trên mỗi thẻ là một số tự nhiên). Chứng minh rằng bạn Bình có thể chọn ra 3 thẻ sao cho ba số trên 3 thẻ đó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

.... *Hết* ....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN QUẢNG NINH
Năm học 2025 – 2026

Câu 1.

a) Đặt $x=a+1, y=b+1$ suy ra theo giả thiết $xy=1$.

Ta có: $A=\dfrac{x^2}{x^2+y}+\dfrac{y^2}{y^2+x}=\dfrac{x^3+y^3+2x^2y^2}{x^3++y^3+x^2y^2+xy}=\dfrac{x^3+y^3+2}{x^3+y^3+2}=1.$

b) Phép thử "*Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 câu hỏi trong số 12 câu hỏi thực hiện bài kiểm tra*".

Số kết quả có thể xảy ra là $\dfrac{12.11}{2}=66.$

Biến cố A "*Chọn hai câu sao cho chọn được 2 mức độ khác nhau*"

Có 5 cách chọn 1 câu mức độ nhận biết, 4 cách chọn 1 câu mức độ thông hiểu, 3 cách chọn 1 câu mức độ vận dụng. Số kết thoả mãn biến cố là: 5.4 + 4.3 + 5.3 = 47

Xác suất để 2 câu hỏi được chọn thuộc hai mức độ khác nhau là $P(A)=\dfrac{47}{66}.$

Câu 2.

a) ĐKXĐ: $x^2-5x-2\ge 0, x\le 0.$

Ta có $x^2+x\sqrt{x^2-5x-2}=-1 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2-5x-2}=-1-x^2$

Ta bình phương hai vế và thu được:

$$x^2(x^2-5x-2)=(-1-x^2)^2 \Leftrightarrow x^4-5x^3-2x^2=x^4+2x^2+1$$
$$\Leftrightarrow 5x^3+4x^2+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(5x^2-x+1)=0.$$

Ta thấy $5x^2-x+1>0, \forall x$ suy ra $x=-1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: {-1}.

b) ĐKXĐ: $8x-y^2\ge 0, 3y-2x-6\ge 0 (*)$.

Ta có: $\begin{cases} xy^2+x^2-y^2-yx+y^2+x=0 (1) \\ \sqrt{8x-y^2}=3y-2x-6 (2) \end{cases}$. Từ (1) ta có: $(x+y^2)(x-y+1)=0.$

Trường hợp 1: $x+y^2=0 \Rightarrow 8x-y^2=-9y^2\le 0$ suy ra $x=y=0$.

Thử lại thì không thoả mãn (*)

Trường hợp 2: $x-y+1=0 \Leftrightarrow x=y-1.$ Thay vào (2) ta có: $\sqrt{8y-8-y^2}=y-4. (**)$

Ta bình phương hai vế thu được: $8y-8-y^2=(y-4)^2 \Leftrightarrow 2y^2-16y+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=6 \end{array}\right.$.

Do khi $y=2$ thì thay vào (*) sẽ vô lý. Nên $y=6$ thì $x=5$ thử lại thoả mãn (*) và (**).

Như vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (5,6).

Câu 3.

a) Ta có: $y^3+3y^2+3y+x^2-6x=23 \Leftrightarrow (y+1)^3+(x-3)^2=33.$

Khi đó do y + 1 nguyên dương nên $(y+1)^3 \le 33 \Rightarrow y+1 \le \sqrt[3]{33} \Rightarrow y \le 2.$

Nếu y = 1 thì $(x-3)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow x=8.$

Nếu y = 2 thì $(x-3)^2=6$ suy ra không có giá trị x thoả mãn.

b) Ta thấy nếu A là tích của ít nhất của ba số tự nhiên liên tiếp thì A chia hết cho 3.

Ta thấy $p^2,q^2 \equiv 0,1 (\bmod 3) \Rightarrow p^2+1{,}5q^2+29 \equiv 1{,}2 (\bmod 3)$ Như vậy A không chia hết cho 3. Suy ra A chỉ có thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Giả sử $A=2(p^2+1)(5q^2+29)=n(n+1) \Rightarrow 8(p^2+1)(5q^2+29)+1=(2n+1)^2$. (1

Ta xét q > p > 3, thì $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 (\bmod 3)$.

Khi đó $VT(1) \equiv 8(1+1)(5+29)+1 \equiv 2 (\bmod 3).$

Mà VP(1) là số chính phương, như vậy vô lý. Khi đó có ít nhất một số bằng 3.

Nếu q = 3 thì p = 2, ta có $A=740=n(n+1)$. Ta thấy phương trình này không có nghiệm nguyên.

Nếu p = 3 thì $20(5q^2+29)=n(n+1) \Leftrightarrow 100q^2+580=n(n+1)$

$\Leftrightarrow (20q)^2+2321=(2n+1)^2 \Leftrightarrow 2321=(2n+1-20q)(2n+1+20q).$

Ta thấy $2n+1-20q<2n+1+20q$ ta có bảng sau:

$2n+1+20q$	2321	211
$2n+1-20q$	1	11
n	580	55
q	58 (loại)	5

Như vậy q = 5. Thử lại thì $55.56=3080=n(n+1)$.

Vậy (p, q) = (3,5) là bộ số ta cần tìm.

Câu 4.

a) Do *A, C* là trung điểm của *HE, HD* nên *AC* là đường trung bình của tam giác *EHD*.

Suy ra *AC* || *ED* mà *AB* vuông góc *AC* hay *BA* vuông góc *ED*.

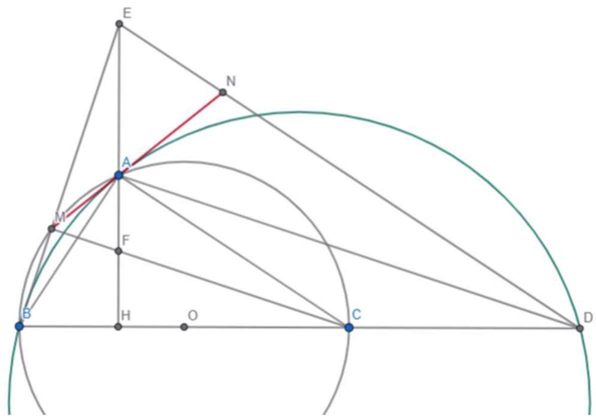
Mà *EH* vuông góc *BC* suy ra *A* là trực tâm của tam giác *BDE*.

b) Do *MA* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp *ABD* nên $\angle BAM = \angle BDA = \angle BAE$.

Suy ra $\Delta BMA \sim \Delta BEA (g.g)$. Khi đó $BA^2=BM.BE$. Mặt khác ta chứng minh được $BA^2=BH.BC$.

Khi đó *BH.BC=BM.BE* hay $\dfrac{BH}{BM}=\dfrac{BE}{BC}$ kết hợp góc *EBD* chung thì $\Delta EBH \sim \Delta CBM (c.g.c)$.

Như vậy $\angle BMC=90$. Suy ra *M* thuộc (*O*).



c) Gọi giao của *CM* và *AH* là *F*. Ta thấy *CF* || *AD*. Khi đó *F* là trung điểm *AH*.

Ta có: $\angle AMF = \angle ABC = \angle AEN$ suy ra tứ giác *MFNE* nội tiếp.

Khi đó chứng minh được $AM.AN = AE.AF = AF.AH = \dfrac{AH^2}{2}$. Mà $AH \le R$.

Như vậy $\max(AM.AN) = \dfrac{R^2}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *A* là điểm chính giữa cung *BC*.

Lưu ý: Một số kết thức về góc nội tiếp, góc tạo tiếp tuyến và dây cung, HS tự chứng minh lại.

Câu 6. Giả sử các số được ghi trên thẻ gỗ là $a_1, a_2, ..., a_{18}$, đồng thời ta coi

$$1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_{18} \le 2526.$$

Ta thấy $a_i \le a_j \le a_k$ không lập thành độ dài ba cạnh của tam giác khi và chỉ khi $a_i + a_j \le a_k$.

Từ đây suy ra $a_2 \ge 2, a_3 \ge a_2 + a_1 \ge 3, a_4 \ge a_3 + a_2 \ge 5, ...$

Lặp lại dãy bất đẳng thức trên ta thấy là các phần tử của dãy Fibonacci nên với $a_{18} \ge a_{17} \ge 2584$.

Dẫn đến điều vô lý. Như vậy bạn Bình có thể chọn ra 3 thẻ sao cho ba số trên 3 thẻ đó là độ dài ba cạnh của một tam giác.