

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Năm học: 2025 – 2026

Môn thi: TOÁN

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán)

Ngày thi: 06/4/2025

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm).

a) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, tính giá trị biểu thức

$$A = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}.$$

b) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, chứng minh rằng không tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.

Câu 2 (1,0 điểm).

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 - (x + y) = m \\ x^2 - (x + y) = m \end{cases}$ (với m là tham số), tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 3 (1,0 điểm).

Có 10 bạn (trong đó chỉ có một bạn tên An và một bạn tên Bảo) xếp ngẫu nhiên thành một hàng dọc, tính xác suất để trong đó nhất thiết có 2 bạn An và Bảo phải đứng cạnh nhau.

Câu 4 (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn tính chất $(2^n + 1) \mid n$.

b) Cho p là số nguyên tố, chứng minh phương trình $\frac{x^2 + x}{y^2 + y} = p^4$ không có nghiệm nguyên dương.

Câu 5 (3,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường thẳng đi qua I vuông góc với AI cắt BC tại T .

a) Chứng minh TI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC .

b) AI cắt lại (O) tại D (D khác A), đoạn TI cắt (O) tại Q , QD cắt BC tại P . Chứng minh rằng $IP^2 = PB \cdot PC$.

c) Gọi E, F là tiếp điểm của (I) theo thứ tự với AC, AB và N là trung điểm EF . Chứng minh rằng \widehat{BNC} tù.

Câu 6 (1,0 điểm).

Trên bảng có viết 2025 số nguyên dương từ 1 đến 2025. Mỗi lần ta được phép xóa đi 2 số a, b tùy ý có trên bảng và thay bởi số $|a - b|$. Thực hiện cho tới khi trên bảng chỉ còn đúng một số là m . Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của m .

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của giám thị số 1: Chữ kí của giám thị số 2:

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, tính giá trị biểu thức

$$A = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}.$$

b) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, chứng minh rằng không tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.

Giải

a) Từ đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx)$, với $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Vì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ nên $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc} \Rightarrow A = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} = 3$, vậy $A = 3$.

b) Giả sử tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$, không mất

tính tổng quát nếu giả sử b là số lớn nhất ($b > a, b > c$). Khi đó ta có

$$\begin{cases} P(a) - P(b) : (a - b) \\ P(b) - P(c) : (b - c) \\ P(c) - P(a) : (c - a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \neq (b - c) : (a - b) & \left\{ \begin{array}{l} |b - c| \geq |a - b| \\ |c - a| \geq |b - c| \Rightarrow |a - b| \geq |c - a| \geq |b - c| \geq |a - b| \\ |a - b| \geq |c - a| \end{array} \right. \\ 0 \neq (c - a) : (b - c) \\ 0 \neq (a - b) : (c - a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a - b| = |c - a| = |b - c| \Rightarrow |a - b| = |b - c| \Rightarrow b - a = b - c \Rightarrow a = c \text{ vô lý.}$$

Vậy không tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c thỏa mãn đề bài.

Câu 2 (1,0 điểm).

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 - (x + y) = m \\ x^2 - (x + y) = m \end{cases}$ (với m là tham số), tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Nhận xét nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ thì (y_0, x_0) cũng là một nghiệm của hệ. Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$, từ hệ suy ra phương trình: $x^2 - 2x - m = 0$.

Do hệ có nghiệm duy nhất nên phương trình trên phải có nghiệm duy nhất.

$$\Rightarrow \Delta' = 1 + m = 0 \Rightarrow m = -1.$$

$$\text{Với } m = -1 \text{ ta có hệ: } \begin{cases} y^2 - (x + y) = -1 \\ x^2 - (x + y) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1 \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

Vậy đáp số bài toán $m = -1$.

Câu 3 (1,0 điểm).

Có 10 bạn (trong đó chỉ có một bạn tên An và một bạn tên Bảo) xếp ngẫu nhiên thành một hàng dọc, tính xác suất để trong đó nhất thiết có 2 bạn An và Bảo phải đứng cạnh nhau.

Giải

Số cách xếp 10 bạn xếp thành một hàng dọc là $10!$

Xem An và Bảo là “1 bạn” thì số cách xếp 9 “bạn” thành 1 hàng dọc là $9!$, đổi chỗ An và Bảo cho nhau được cách xếp 10 bạn mà trong đó An và Bảo đứng cạnh nhau là $2 \cdot 9!$.

Vậy xác suất để trong đó nhất thiết có 2 bạn An và Bảo phải đứng cạnh nhau là: $\frac{2 \cdot 9!}{10!} = \frac{1}{5}$.

Câu 4 (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn tính chất $(2^n + 1) : n$

b) Cho p là số nguyên tố, chứng minh phương trình $\frac{x^2 + x}{y^2 + y} = p^4$ không có nghiệm nguyên dương.

Giải

a) Ta có nhận xét sau: nếu $(2^n + 1) : n$ thì $(2^m + 1) : m$ với $m = 2^n + 1$

Thật vậy do $(2^n + 1) : n$ và $(2^n + 1)$ lẻ nên n lẻ, đặt $m = 2^n + 1 = nl$ (l là số lẻ)

Ta có: $2^m + 1 = (2^n)^l + 1 = (2^n + 1) \left[(2^n)^{l-1} - (2^n)^{l-2} + \dots - (2^n) + 1 \right]$ suy ra

$(2^m + 1) : (2^n + 1)$ hay $(2^m + 1) : m$ (nhận xét đã được chứng minh)

Với $n = 1, n = 3$ thỏa mãn tính chất, cho nên, $n = 2^3 + 1 = 9, n = 2^9 + 1 \dots$ cũng thỏa mãn. Đây là điều phải chứng minh.

b) Phương trình đã cho tương đương với: $x(x+1) = y(y+1)p^4$ (1) suy ra $x(x+1) : p^4$, mặt khác ta có $(x, x+1) = 1$ nên $x : p^4$ hoặc $(x+1) : p^4$.

) Xét $x : p^4$, đặt $x = p^4 k$ ($k \in \mathbb{N}^$) thay vào phương trình ta được:

$$p^4 k (p^4 k + 1) = p^4 y (y + 1) \Leftrightarrow k (p^4 k + 1) = y (y + 1) \Leftrightarrow (kp^2 - y)(kp^2 + y) = y - k$$

Nếu $y = k$ suy ra $p = 1$ vô lý.

Nếu $y > k$ suy ra $y - k \geq kp^2 + y \Rightarrow k(1 + p^2) \leq 0$ vô lý

Nếu $y < k$ suy ra $y < p^2 k \Rightarrow (kp^2 - y)(kp^2 + y) > 0 > y - k$ vô lý.

*) Nếu $(x+1) : p^4$ xét tương tự ta cũng suy ra vô lý.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Câu 5 (3,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường thẳng đi qua I vuông góc với AI cắt BC tại T .

a) Chứng minh TI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC .

b) AI cắt lại (O) tại D (D khác A), đoạn TI cắt (O) tại Q , QD cắt BC tại P . Chứng minh rằng $IP^2 = PB \cdot PC$.

c) Gọi E, F là tiếp điểm của (I) theo thứ tự với AC, AB và N là trung điểm EF . Chứng minh rằng \widehat{BNC} tù.

Giải

Giải: a) Gọi D là giao điểm thứ hai của AI với (O), suy ra D là trung điểm cung BC không chứa A, suy ra $DB = DC$. **(0,25 điểm)**

$$\text{Xét tam giác DBI, có } \begin{cases} \widehat{DIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \\ \widehat{DBI} = \widehat{DBC} + \widehat{CBI} = \widehat{DAC} + \widehat{CBI} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DBI} \Rightarrow \Delta DBI \text{ cân}$$

tại D, suy ra $DI = DB = DC$. **(0,5 điểm)**

Vậy D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI, mà IT vuông góc với ID theo giả thiết. Do đó TI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI. **(0,25 điểm)**

$$\text{b) Xét hai tam giác DPB và DBQ, có } \begin{cases} \widehat{BDP} \text{ chung} \\ \widehat{DBP} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2}sd\widehat{DC} = \frac{1}{2}sd\widehat{DB} = \widehat{DQB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta DPB \sim \Delta DBQ (g - g) \Rightarrow \frac{DP}{DB} = \frac{DB}{DQ} \Rightarrow DB^2 = DP \cdot DQ \Rightarrow DI^2 = DP \cdot DQ \Rightarrow \frac{DI}{DP} = \frac{DQ}{DI}$$

(0,25 điểm)

Xét hai tam giác DIQ và DPI, có

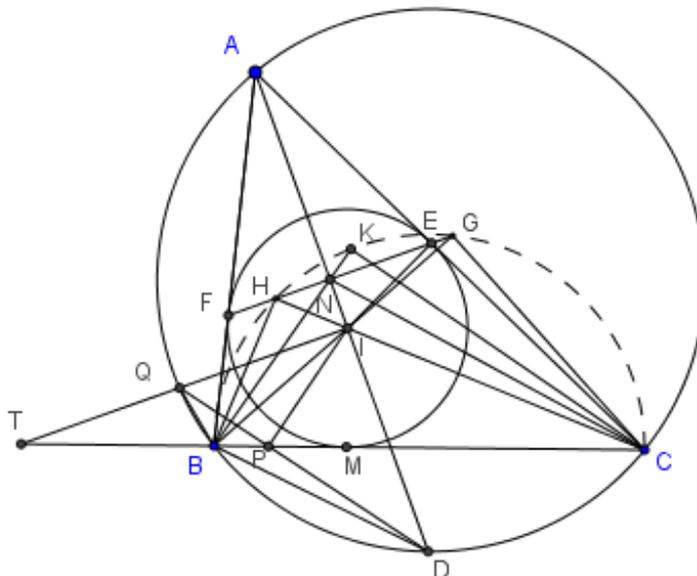
$$\begin{cases} \widehat{QDI} \text{ chung} \\ \frac{DI}{DP} = \frac{DQ}{DI} \end{cases} \Rightarrow \Delta DIQ \sim \Delta DPI (c - g - c) \Rightarrow \widehat{DPI} = \widehat{DIQ} = 90^\circ, \text{ vậy tam giác DIQ vuông tại I}$$

có IP là đường cao, do đó $IP^2 = PD \cdot PQ$ (1) **(0,5 điểm)**

Xét hai tam giác PDC và PBQ có $\widehat{DPC} = \widehat{BPQ}$ (đối đỉnh) và $\widehat{PCD} = \widehat{PQB}$

$$\Rightarrow \Delta PDC \sim \Delta PBQ \Rightarrow \frac{PC}{PQ} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PD \cdot PQ = PB \cdot PC$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IP^2 = PB \cdot PC$ (đpcm) **(0,25 điểm)**



c) Gọi $G = BI \cap EF$, $H = CI \cap EF$ và M là tiếp điểm của (I) với BC. Xét hai tam giác BIC và

$$\text{BFG có } \begin{cases} \widehat{FBG} = \widehat{IBC} = \frac{\widehat{B}}{2} \\ \widehat{BFG} = \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta BIC \sim \Delta BFG (g - g) \Rightarrow \frac{BG}{BC} = \frac{BF}{BI} = \frac{BM}{BI} \Rightarrow \frac{BG}{BM} = \frac{BC}{BI}$$

Xét hai tam giác BGC và BMI, có $\begin{cases} \widehat{IBM} \text{ chung} \\ \frac{BG}{BM} = \frac{BC}{BI} \end{cases} \Rightarrow \Delta BGC \sim \Delta BMI \Rightarrow \widehat{BGC} = \widehat{BMI} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự, ta có $\widehat{BHC} = 90^\circ$. **(0,5 điểm)**

Từ $\widehat{BGC} = \widehat{BHC} = 90^\circ \Rightarrow BHGC$ nội tiếp đường tròn (kí hiệu (BHGC)). Gọi K là giao điểm của tia BN với (BHGC), suy ra $\widehat{BKC} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{BNC} = \widehat{NKC} + \widehat{NCK} = 90^\circ + \widehat{NCK} > 90^\circ$. (đpcm) **(0,5 điểm)**

Câu 6 (1,0 điểm).

Trên bảng có viết 2025 số nguyên dương từ 1 đến 2025. Mỗi lần ta được phép xóa đi 2 số a, b tùy ý có trên bảng và thay bởi số $|a - b|$. Thực hiện cho tới khi trên bảng chỉ còn đúng một số là m . Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của m .

Giải

Giả sử ở thời điểm n , các số có mặt trên bảng là a_1, a_2, \dots, a_k . Gọi $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ là tổng các số ở thời điểm n , ở thời điểm $n+1$ ta xóa hai số a_i, a_j và thay bởi số $|a_i - a_j|$, thì

$$S_{n+1} = S_n - (a_i + a_j) + |a_i - a_j|.$$

Suy ra S_{n+1}, S_n cùng tính chẵn lẻ vì $(a_i + a_j), |a_i - a_j|$ cùng tính chẵn lẻ. Điều này có nghĩa là mỗi lần thao tác thì tính chẵn lẻ của tổng các số có mặt trên bảng không đổi. Lúc đầu tổng các số là $1 + 2 + \dots + 2025 = \frac{(1+2025)2025}{2}$ là số lẻ nên cuối cùng m lẻ, do đó $m \geq 1$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng có thể thực hiện được các thao tác để $m = 1$. Ở lượt thứ nhất xóa cặp số $(2, 3)$, rồi ở lượt thứ hai xóa cặp $(4, 5)$, ..., lượt thứ 1012 xóa cặp $(2024, 2025)$. Thế thì sau lượt thứ 1012 trên bảng còn 1013 số 1. Bắt đầu từ đây chọn 2 số 1 từ trái qua phải rồi xóa ta sẽ thu được dãy số $0, 0, \dots, 0, 1$. Cuối cùng cứ chọn 2 số 0 bất kỳ để xóa thì trên bảng còn lại hai số 0, 1. Xóa bước cuối thì còn lại số 1. Vậy giá trị nhỏ nhất có thể có của m là 1.

Xem thêm: **ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 MÔN TOÁN**
<https://thcs.toanmath.com/de-thi-tuyen-sinh-lop-10-mon-toan>