SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 - 2025

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 06/12/2024
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (3,50 điểm):

a) Giải phương trình $\cos x(\sin x + \cos x - \sin 3x) = \sin x \sin 3x$.

b) Cho dãy số hữu hạn $u_n = \log_{2025}\left(\dfrac{2025n}{2025-n}\right)$, với $n \in \{1; 2; 3; ...; 2024\}$.

Hãy tính tổng tất cả các số hạng của dãy số trên.

Câu 2 (3,50 điểm):

a) Cho hàm số $y = 2(1+m)x^3 - 3(m+1)x^2 + x + \dfrac{m}{2} - 1 \quad (1)$, (với m là tham số).

Chứng minh rằng đồ thị của hàm số (1) luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng với mọi m.

b) Cho các số thực x, y thỏa mãn:

$$e^{x-3y} + e^{1-xy} + x(1-y) + 1 = e^{xy-1} + \frac{1}{e^{x-3y}} + 3y, \text{ (với } x \geq 0\text{)}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x - 2y + 3$.

Câu 3 (4,00 điểm):

a) Giải bất phương trình $\sqrt{\log x + 1} + \sqrt{\log x^2 - 3} + \sqrt{17 - \log x^3} \geq 3\sqrt{5}$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 27 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \\ x^2 + 3xz + 3z^2 = 75 \end{cases}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = 2xy + 3yz + zx$.

Câu 4 (3,00 điểm):

a) Một lớp học có $(2n+3)$ học sinh (với $n \in \mathbb{N}^*$), trong đó có ba em A, B, C. Xếp ngẫu nhiên các học sinh của lớp học vào ngồi một dãy ghế có đánh số thứ tự từ 1 đến $(2n+3)$, mỗi em ngồi một ghế. Biết xác suất để số ghế của ba em A, B, C theo thứ tự đó tạo thành cấp số cộng là $\dfrac{17}{1155}$. Tìm số học sinh của lớp học.

b) Có 35 con thỏ *(bao gồm thỏ trắng và thỏ đen)* được nhốt vào hai chuồng. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng một con thỏ. Biết xác suất để bắt được hai con thỏ đen là $\dfrac{247}{300}$, hãy tính xác suất để bắt được hai con thỏ trắng.

Câu 5 (6,00 điểm):

a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và M là trung điểm của $B'C'$. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng AM và BC'.

b) Cho tứ diện đều $ABCD$ và điểm E trên cạnh AD sao cho tan của góc giữa hai mặt phẳng (BCD) và (BCE) bằng $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Tính tỷ số thể tích của hai khối tứ diện $ABCE$ và $EBCD$.

c) Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ACB} = 60^\circ$ và

$$\widehat{ACD} + \widehat{BCD} = \widehat{CAD} + \widehat{BAD} + \widehat{BAC} = \widehat{CBD} + \widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^\circ.$$

Gọi S là diện tích toàn phần của hình tứ diện $ABCD$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của S, biết chu vi tam giác ABC bằng 3.

——— HẾT ———

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
- Họ và tên thí sinh:…………………………… SBD:……………/Phòng:………………...
- Cán bộ coi thi 1:……………………………… Chữ ký:……………………………………
- Cán bộ coi thi 2:……………………………… Chữ ký:……………………………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 - 2025

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 06/12/2024

Câu 1 (3,50 điểm):

a) Giải phương trình $\cos x(\sin x+\cos x-\sin 3x)=\sin x\sin 3x$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
Pt $\Leftrightarrow \cos^2 x+(\sin x-\sin 3x)\cos x-\sin x\sin 3x=0$	0,50
$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos x-\sin 3x)=0$	0,50
• $\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, (với $k\in\mathbb{Z}$);	0,50
• $\cos x-\sin 3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, (với $k\in\mathbb{Z}$).	0,50

b) Cho dãy số hữu hạn $u_n=\log_{2025}\left(\frac{2025n}{2025-n}\right)$, với $n\in\{1;2;3;\dots;2024\}$.

Hãy tính tổng tất cả các số hạng của dãy số trên.

Hướng dẫn chấm	Điểm
• $u_n=\log_{2025}\left(\frac{2025n}{2025n}\right)=1+\log_{2025}\left(\frac{n}{2025-n}\right)$	0,50
• $u_1+u_{2024}=1+\log_{2025}\left(\frac{1}{2024}\right)+1+\log_{2025}\left(\frac{2024}{1}\right)=2$;… • $u_{1012}+u_{1013}=1+\log_{2025}\left(\frac{1012}{1013}\right)+1+\log_{2025}\left(\frac{1013}{1012}\right)=2$	0,50
• $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{2024}=1012\times 2=2024$.	0,50

Câu 2 (3,50 điểm):

a) Cho hàm số $y=2(1+m)x^3-3(m+1)x^2+x+\frac{m}{2}-1$ (1), (với m là tham số).

Chứng minh rằng đồ thị của hàm số (1) luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng với mọi m.

Hướng dẫn chấm	Điểm
• Hàm số được viết lại $(4x^3-6x^2+1)m+4x^3-6x^2+2x-2-2y=0$.	0,50
• Tọa độ điểm cố định *(nếu có)* của họ đồ thị đã cho thỏa mãn $\begin{cases}4x^3-6x^2+1=0\\4x^3-6x^2+2x-2-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^3-6x^2+1=0\\y=x-\frac{3}{2}\end{cases}$	0,50
• Hệ trên có ba nghiệm phân biệt nên đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua ba điểm cố định và các điểm cố định này nằm trên đường thẳng $(d): y=x-\frac{3}{2}$.	0,50

b) Cho các số thực x, y thỏa mãn:

$$e^{x-3y} + e^{1-xy} + x(1-y) + 1 = e^{xy-1} + \frac{1}{e^{x-3y}} + 3y, \text{ (với } x \geq 0\text{)}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x - 2y + 3$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
• Biến đổi giả thiết bài toán $$e^{x-3y} - \frac{1}{e^{x-3y}} + x - 3y = e^{xy-1} - \frac{1}{e^{xy-1}} + xy - 1 \quad (*)$$	**0,50**
• Vì hàm số $f(t) = e^t - \frac{1}{e^t} + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $$(*) \Leftrightarrow f(x-3y) = f(xy-1) \Leftrightarrow x - 3y = xy - 1 \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x+3}$$	**0,50**
• Thay $y = \frac{x+1}{x+3}$ vào biểu thức T, ta được $T = h(x) = \frac{x^2+4x+7}{x+3}$.	**0,50**
• Khảo sát hàm $h(x)$, với $x \geq 0$ cho ta $\min T = \min\limits_{x \geq 0} h(x) = \frac{7}{3}$.	**0,50**

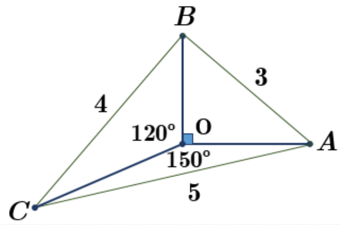
Câu 3 (4,00 điểm):

a) Giải bất phương trình $\sqrt{\log x + 1} + \sqrt{\log x^2 - 3} + \sqrt{17 - \log x^3} \geq 3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
• Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{\log x + 1} + \sqrt{2\log x - 3} + \sqrt{17 - 3\log x} \geq 3\sqrt{5}$ Đặt $\vec{u} = (1;1;1)$ và $\vec{v} = \left(\sqrt{\log x + 1}; \sqrt{2\log x - 3}; \sqrt{17 - 3\log x}\right)$, ta có	**0,50**
• $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{\log x + 1} + \sqrt{2\log x - 3} + \sqrt{17 - 3\log x}$ $\lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{1+1+1}.\sqrt{\log x + 1 + 2\log x - 3 + 17 - 3\log x} = 3\sqrt{5}$	**0,50**
• Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{\log x + 1} + \sqrt{2\log x - 3} + \sqrt{17 - 3\log x} \geq 3\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} \geq \lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{v}\rvert$ $(*)$	**0,50**
• Vì $\vec{u}.\vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{v}\rvert.\cos(\vec{u};\vec{v}) \leq \lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{v}\rvert$ nên $(*) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{v}\rvert \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\log x + 1}}{1} = \frac{\sqrt{2\log x - 3}}{1} = \frac{\sqrt{17 - 3\log x}}{1}$ $\Leftrightarrow \log x = 4 \Leftrightarrow x = 10\,000$.	**0,50**

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 27 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \\ x^2 + 3xz + 3z^2 = 75 \end{cases}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = 2xy + 3yz + zx$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
• Trong mặt phẳng lấy điểm O tùy ý, vẽ $OA = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $OB = y$, $OC = z$ sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ, \widehat{BOC} = 120^\circ, \widehat{AOC} = 150^\circ$  	0,50
• Ta có $\begin{cases} AB^2 = \dfrac{x^2}{3} + y^2 = 9 \\ BC^2 = y^2 + yz + z^2 = 16 \\ AC^2 = \dfrac{x^2}{3} + xz + z^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.	0,50
• $S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC} = S_{ABC} \Leftrightarrow \dfrac{xy}{2\sqrt{3}} + \dfrac{yz\sqrt{3}}{4} + \dfrac{xz}{4\sqrt{3}} = 6$	0,50
$\Leftrightarrow 2xy + 3yz + xz = 24\sqrt{3} \Leftrightarrow P = 24\sqrt{3}$	0,50

Câu 4 (3,00 điểm):

a) Một lớp học có $(2n+3)$ học sinh (với $n \in \mathbb{N}^*$), trong đó có ba em A, B, C. Xếp ngẫu nhiên các học sinh của lớp học vào ngồi một dãy ghế có đánh số thứ tự từ 1 đến $(2n+3)$, mỗi em ngồi một ghế. Biết xác suất để số ghế của ba em A, B, C theo thứ tự đó tạo thành cấp số cộng là $\dfrac{17}{1155}$. Tìm số học sinh của lớp học.

Hướng dẫn chấm	Điểm
• ***Tính số cách xếp ba học sinh A, B, C theo thứ tự lập thành cấp số cộng.*** Xếp B vào ghế số 2 thì có $2!$ cách xếp ghế cho A và C. Xếp B vào ghế số 3 thì có $2.2!$ cách xếp ghế cho A và C. Xếp B vào ghế số 4 thì có $3.2!$ cách xếp ghế cho A và C;… Xếp B vào ghế số n thì có $(n-1).2!$ cách xếp ghế cho A và C. Xếp B vào ghế số $(n+1)$ thì có $n.2!$ cách xếp ghế cho A và C. Xếp B vào ghế số $(n+2)$ thì có $(n+1).2!$ cách xếp ghế cho A và C. Xếp B vào ghế số $(n+3)$ thì có $n.2!$ cách xếp ghế cho A và C; … Xếp B vào ghế số $(2n+2)$ thì có $2!$ cách xếp ghế cho A và C. Vậy số cách xếp ba học sinh A, B, C theo thứ tự tạo thành cấp số cộng là $2.2!.(1+2+...+n) + (n+1).2! = 2!\left[n(n+1) + (n+1)\right] = 2!(n+1)^2$	0,50
• ***Tính xác suất:*** Với mỗi cách xếp ba em A, B, C như trên, có $(2n)!$ cách xếp các em còn lại. Số cách xếp các học sinh của lớp thỏa mãn số ghế của ba em A, B, C theo thứ tự tạo thành cấp số cộng là $n(X) = (2n)!.2!.(n+1)^2$. Ta có $n(\Omega) = (2n+3)! \Rightarrow P(X) = \dfrac{(2n)!2!(n+1)^2}{(2n+3)!}$.	0,50

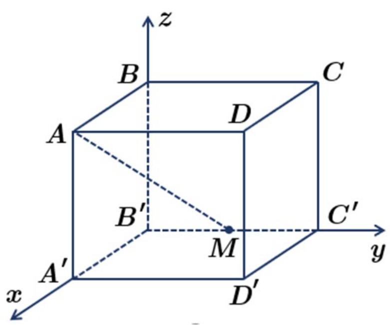
• ***Tính số học sinh của lớp:*** $P(X)=\dfrac{17}{1155}\Leftrightarrow\dfrac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{17}{1155}$ $\Leftrightarrow 68n^2-1019n-1104=0\Leftrightarrow n=16$ (loại $n=-\dfrac{69}{68}$). Số học sinh của lớp là $2n+3=2.16+3=35$ học sinh.	**0,50**

b) Có 35 con thỏ *(bao gồm thỏ trắng và thỏ đen)* được nhốt vào hai chuồng. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng một con thỏ. Biết xác suất để bắt được hai con thỏ đen là $\dfrac{247}{300}$, hãy tính xác suất để bắt được hai con thỏ trắng.

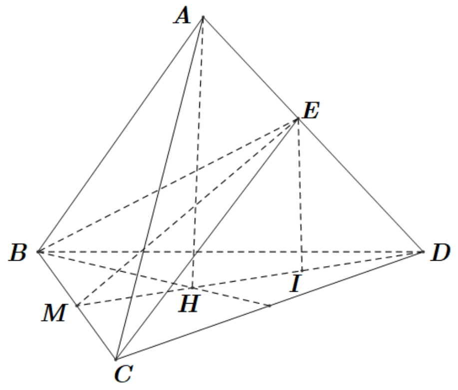
Hướng dẫn chấm	Điểm
• Giả sử chuồng thứ nhất có x con thỏ, trong đó có a con thỏ đen, chuồng thứ hai có y con thỏ, trong đó có b con thỏ đen. Ta có $x+y=35$, (với $a,b,x,y\in\mathbb{N}^*;a\le x,b\le y$).	**0,50**
• Xác suất bắt được hai con thỏ màu đen là $P=\dfrac{a}{x}\times\dfrac{b}{y}$. Ta có $P=\dfrac{247}{300}\Leftrightarrow\dfrac{a.b}{x.y}=\dfrac{13.19}{300}\Rightarrow a=13;b=19$ *(vì $13;19$ là các số nguyên tố và không mất tổng quát, giả sử $a\le b$).*	**0,50**
• Khi đó $x=15;y=20$. Số thỏ trắng ở mỗi chuồng thứ nhất và chuồng thứ hai tương ứng là 2 và 1. Vậy xác suất để bắt được hai con thỏ màu trắng là $\dfrac{2}{15}.\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{150}$	**0,50**

Câu 5 (6,00 điểm):

a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và M là trung điểm của $B'C'$. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng AM và BC'.

Hướng dẫn chấm	Điểm
• Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $B'(0;0;0)$, $A'(1;0;0)$, $C'(0;1;0)$, $B(0;0;1)$. 	**0,50**
• $M\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$, $A(1;0;1)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(-1;\dfrac{1}{2};-1\right)$, $\overrightarrow{BC'}=(0;1;-1)$.	**0,50**
• $\cos(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BC'})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BC'})=45^\circ\Rightarrow(AM;BC')=45^\circ$.	**0,50**

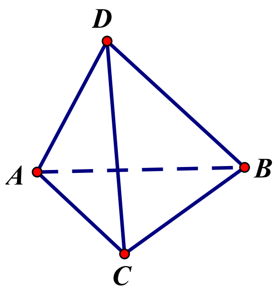
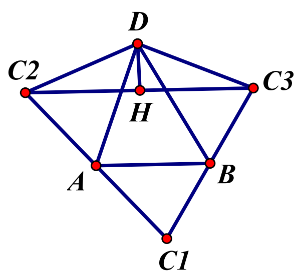
b) Cho tứ diện đều $ABCD$ và điểm E trên cạnh AD sao cho tan của góc giữa hai mặt phẳng (BCD) và (BCE) bằng $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Tính tỷ số thể tích của hai khối tứ diện $ABCE$ và $EBCD$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
 • Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và E trên mặt phẳng (BCD). Khi đó $H, I \in DM$ (với M là trung điểm của BC). Ta có $\left((BCD);(BCE)\right)=\widehat{DME} \Rightarrow \tan\widehat{DME}=\dfrac{EI}{MI}=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$.	0,50
• Đặt $AB=1$ và $DE=x$, ta tính được $AH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $DH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $MH=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.	0,50
• $\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{EI}{AH}=\dfrac{DI}{DH}\Rightarrow\begin{cases}EI=\dfrac{DE.AH}{AD}=\dfrac{x\sqrt{6}}{3}\\ DI=\dfrac{DE.DH}{AD}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Rightarrow MI=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.	0,50
$\tan\alpha=\dfrac{EI}{MI}=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{8}$.	0,50
Khi đó $\dfrac{V_{DBCE}}{V_{ABCD}}=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{5}{8}\Rightarrow\dfrac{V_{ABCE}}{V_{BCDE}}=\dfrac{3}{5}$.	0,50

c) Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ACB}=60^{\circ}$ và

$$\widehat{ACD}+\widehat{BCD}=\widehat{CAD}+\widehat{BAD}+\widehat{BAC}=\widehat{CBD}+\widehat{ABD}+\widehat{ABC}=180^{\circ}.$$

Gọi S là diện tích toàn phần của hình tứ diện $ABCD$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của S, biết chu vi tam giác ABC bằng 3.

Hướng dẫn chấm	Điểm
 	

• Cắt tứ diện $ABCD$ theo các cạnh CA, CB, CD và trải xuống mặt phẳng (ABD). Khi đó $\Delta ADC \longrightarrow \Delta ADC_2;\ \Delta BDC \longrightarrow \Delta BDC_3;\ \Delta ABC \longrightarrow \Delta ABC_1$. Ta có $\widehat{CBD}+\widehat{ABD}+\widehat{ABC}=\widehat{C_3BD}+\widehat{ABD}+\widehat{ABC_1}=180^\circ$ $\Rightarrow C_3, B, C_1$ thẳng hàng. $\widehat{CAD}+\widehat{BAD}+\widehat{BAC}=\widehat{C_2AD}+\widehat{BAD}+\widehat{BAC_1}=180^\circ$ $\Rightarrow C_2, A, C_1$ thẳng hàng. $\widehat{ACD}+\widehat{BCD}=\widehat{BAC}=\widehat{AC_2D}+\widehat{BC_1D}=180^\circ$. $\Rightarrow C_1C_2DC_3$ là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{C_2DC_3}=120^\circ$, (vì $\widehat{ACB}=\widehat{AC_1B}=60^\circ$)	**0,50**
• Diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ là diện tích tứ giác $C_1C_2DC_3$. Ta có $S_{C_1C_2DC_3}=S_{C_1C_2C_3}+S_{C_2DC_3}$ Đặt $CA=x; CB=y \Rightarrow AB=\sqrt{x^2+y^2-xy}$ Chu vi ΔABC bằng $x+y+\sqrt{x^2+y^2-xy}=3$. Ta có $C_1C_2=2CA=2x; C_1C_3=2CB=2y; C_2C_3=2AB=2\sqrt{x^2+y^2-xy}$. $\tan 60^\circ=\dfrac{C_3H}{DH}\Rightarrow DH=\dfrac{C_2C_3}{2.\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-xy}}{\sqrt{3}}$.	**0,50**
• Ta có $S_{C_1C_2DC_3}=S_{C_1C_2C_3}+S_{C_2DC_3}=\dfrac{1}{2}.C_1C_2.C_1C_3.\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}.DH.C_2C_3$ $=\sqrt{3}xy+\dfrac{x^2+y^2-xy}{\sqrt{3}}=\dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{3}}$	**0,50**
• Áp dụng bất đẳng thức $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}$, ta có $3=x+y+\sqrt{x^2+y^2-xy}=x+y+\sqrt{(x+y)^2-3xy}$ $\ge x+y+\sqrt{(x+y)^2-\dfrac{3}{4}(x+y)^2}=\dfrac{3}{2}(x+y)$ $\Rightarrow x+y\le 2$ Vậy $S=\dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{3}}\le\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow S_{\max}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (khi $x=y=1$).	**0,50**

Chú ý: *Học sinh giải cách khác, giám khảo căn cứ các ý trong đáp án để cho điểm.*

——— HẾT ———