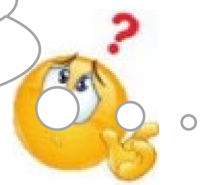
CHƯƠNG VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: phép tính lũy thừa; phép tính logarit; hàm số mũ, hàm số logarit; phương trình, bất phương trình mũ và logarit.

BÀI 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với phép tính lũy thừa với số mũ tự nhiên của một số thực và các tính chất của phép tính lũy thừa đó.

Những khái niệm lũy thừa với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ và số mũ thực của một số thực được xây dựng như thế nào? Những phép tính lũy thừa đó có tính chất gì?



A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHÉP TÍNH LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

1. Phép tính lũy thừa với số mũ nguyên

a) Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý, nêu định nghĩa lũy thừa bậc n của a.

b) Với a là số thực tùy ý khác 0, nêu quy ước xác định lũy thừa bậc 0 của a.

Lời giải

a) Lũy thừa bậc n của a, kí hiệu là a^n, là tích của n thừa số a: $a^n = a.\,a.\,a.\,...\,a$ (n thừa số a) với n là số nguyên dương. Số a được gọi là cơ số, n được gọi là số mũ.

b) Với a là số thực tùy ý khác 0, ta quy ước xác định lũy thừa bậc 0 của a là: $a^0 = 1$.

Ta có định nghĩa sau:

Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý khác 0, ta có $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Như vậy, ta đã xác định được a^m, ở đó a là số thực tùy ý khác 0 và m là một số nguyên.

Trong biểu thức a^m, ta gọi a là *cơ số*, số nguyên m là *số mũ*.

Chú ý

. 0^0 và 0^{-n} (n nguyên dương) không có nghĩa.

. Lũy thừa với số mũ nguyên có tính chất tương tự của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-12}.8^{-3} + (0,2)^{-4}.25^{-2} + 243^{-1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$$

Lời giải

Ta có:

$$A=\left(\frac{1}{2}\right)^{-12}.8^{-3}+\left(0,2\right)^{-4}.25^{-2}+243^{-1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$$

$$=2^{12}.\frac{1}{8^3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}.\frac{1}{25^2}+\frac{1}{243^1}.3^6$$

$$=\frac{2^{12}}{2^9}+\frac{5^4}{5^4}+\frac{3^6}{3^5}=2^3+1+3=12$$

Luyện tập 1. Tính giá trị của biểu thức: $M=\left(\frac{1}{3}\right)^{12}.\left(\frac{1}{27}\right)^{-5}+\left(0,4\right)^{-4}.25^{-2}.\left(\frac{1}{32}\right)^{-1}$

Lời giải

$$M=\left(\frac{1}{3}\right)^{12}.\left(\frac{1}{27}\right)^{-5}+\left(0,4\right)^{-4}.25^{-2}.\left(\frac{1}{32}\right)^{-1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{12}.27^5+\left(\frac{5}{4}\right)^4.\frac{1}{25^2}.32$$

$$=\frac{27^5}{3^{12}}+\frac{5^4}{2^4.\,25^2}.32$$

$$=\frac{3^{15}}{3^{12}}+\frac{5^4}{2^4.\,5^4}.32$$

$$=3^3+\frac{32}{2^4}=29$$

2. Căn bậc n

a) Định nghĩa

HĐ2:

a.Với a là số thực không âm, nêu định nghĩa căn bậc hai của a.

b.Với a là số thực tùy ý, nêu định nghĩa căn bậc ba của a.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho số thực a và số nguyên dương $n\left(n\geq 2\right)$. Số thực b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n=a$

Ví dụ 2.

a. Số $-\frac{1}{2}$ có phải là căn bậc 5 của $-\frac{1}{32}$ hay không?

b. Các số 3 và -3 có phải là căn bậc 4 của 81 hay không?

Lời giải

a. Do $\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$ nên số $-\frac{1}{2}$ là căn bậc 5 của $-\frac{1}{32}$.

b. Ta thấy: $\left(-3\right)^4=3^4=81$. Do đó các số 3 và -3 là căn bậc 4 của 81.

Luyện tập 2. Các số 2 và -2 có phải là căn bậc 6 của 64 hay không?

Lời giải

Các số 2 và -2 là căn bậc 6 của 64: $\sqrt[6]{64} = \pm 2$

Nhận xét

. với n và $a \in \mathbb{R}$: có duy nhất một căn bậc n của a, kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$

. Lũy thừa với số mũ nguyên có tính chất tương tự của lũy thừa với số mũ nguyên dương. Với n chẵn, ta xét ba trường hợp sau

+ $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a.

+ $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0.

+ $a > 0$: Có hai căn bậc n của a là hai số đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{a}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{a}$

b) Tính chất

HĐ 3:

a.Với mỗi số thực a, so sánh: $\sqrt{a^2}$ và $|a|$; $\sqrt[3]{a^3}$ và a.

b.Cho a,b là hai số thực dương. So sánh $\sqrt{a.b}$ và $\sqrt{a}.\sqrt{b}$.

Từ định nghĩa, ta có các tính chất sau:

- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \; neu \; n \; le \\ |a| \; neu \; n \; chan \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

(Ở mỗi công thức trên, ta giả sử các biểu thức xuất hiện trong đó là có nghĩa)

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức sau:

a. $\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{-81}$ **b.** $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$

Lời giải

a. $\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{-81} = \sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

b. $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}\right)^3} = \sqrt{5}$

Luyện tập 3. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}}.\sqrt[4]{81}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{98}.\sqrt[5]{343}}{\sqrt[5]{64}}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}}.\sqrt[4]{81} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{4}\right)^3}.\sqrt[4]{(3)^4} = \dfrac{5}{4}.3 = \dfrac{15}{4}$.

b) $\dfrac{\sqrt[5]{98}.\sqrt[5]{343}}{\sqrt[5]{64}}=\dfrac{\sqrt[5]{33614}}{\sqrt[5]{64}}=\dfrac{\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{7^5}}{\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{7}{2}$

3. Phép tính lũy thừa với số mũ hữu tỉ

HĐ 4. Thực hiện các hoạt động sau:

a. So sánh $2^{\frac{6}{3}}$ và 2^2

b. So sánh $2^{\frac{6}{3}}$ và $\sqrt[3]{2^6}$

Lời giải

a) $2^{\frac{6}{3}}=2^2$

b) $2^{\frac{6}{3}}=\sqrt[3]{2^6}$

Ta có định nghĩa sau:

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r=\dfrac{m}{n}$, trong đó $m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N},n\geq 2$. Lũy thừa của a với số mũ r được xác định bởi: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

Nhận xét:

. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\left(a>0,n\in\mathbb{N},n\geq 2\right)$.

. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ của số thực dương có đầy đủ tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên.

Ví dụ 4. Tính

a. $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

b. $243^{-\frac{2}{5}}$

Lời giải

a. $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3}=\dfrac{1}{4}$

b. $243^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{243^{-2}}=\sqrt[5]{\left(3^5\right)^{-2}}=\sqrt[5]{\left(3^{-2}\right)^5}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$.

Luyện tập 4. Rút gọn mỗi biểu thức: $N=\dfrac{x^{\frac{4}{3}}y+xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}\left(x>0,y>0\right)$.

Lời giải

$$N=\dfrac{x^{\frac{4}{3}}y+xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}y+x\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^3}.\sqrt[3]{x}y+x.\sqrt[3]{y^3}.\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\dfrac{xy\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=xy$$

II. PHÉP TÍNH LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

1. Định nghĩa

Ta đã định nghĩa lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Để định nghĩa lũy thừa với số mũ thực tùy ý. Ta cò phải định nghĩa lũy thừa với số mũ vô tỉ.

HĐ 5: Xét số vô tỉ $\sqrt{2}=1,414213562...$

Xét dãy số hữu tỉ $r_1=1;r_2=1,4;r_3=1,41$

$r_4=1,414;r_5=1,4142;r_5=1,41421....$ và $\lim r_n=\sqrt{2}$

Bằng cách tính 3^{r_n}, tương ứng, ta nhận được bảng 1 ghi các dãy số (r_n) và $\left(3^{r_n}\right)$ với $n=1,2,3....,6$. Người ta chứng minh được rằng khi $n\to+\infty$ thì dãy số $\left(3^{r_n}\right)$ dần đến một giới hạn mà ta gọi là $3^{\sqrt{2}}$.

n	r_n	3^{r_n}
1	1	3
2	1,4	4,655536722…
3	1,41	4,706965002….
4	1,414	4,727695035….
5	1,4142	4,728733930…
6	1,41421	4,728785881…

Nêu dự đoán về giá trị của số $3^{\sqrt{2}}$ (đến hàng phần trăm).

Lời giải

$3^{\sqrt{2}}$ xấp xỉ bằng 4,73.

Cho α là số thực dương, α là số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn tồn tại dãy số hữu tỉ (r_n) có giới hạn là α và dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ tương ứng có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số (r_n).

Cho α là số thực dương, α là số vô tỉ, (r_n) là dãy số hữu tỉ và $\lim r_n=\alpha$. Giới hạn của dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ gọi là lũy thừa của a với số mũ α, kí hiệu a^α, $a^\alpha=\lim a^{r_n}$.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta có: $1^\alpha=1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 5. Xét dãy số hữu tỉ $r_1=1$; $r_2=1,4$; $r_3=1,41$; $r_4=1,414$; $r_5=1,4142$; $r_6=1,41421$**….. và** $\lim r_5=\sqrt{2}$**.**

Bằng cách tính 10^{x_n} tương ứng , ta nhận được bảng 2 ghi các dãy số (r_n) và $\left(10^{r_n}\right)$ với $n=1,2,....,6$

n	r_n	10^{r_n}
1	1	10
2	1,4	25,11886432...
3	1,41	25,70395783...
4	1,414	25,94179362...
5	1,4142	25,95374301...
6	1,41421	25,95434062...

Bảng 2

Nêu dự đoán về giá trị của số $10^{\sqrt{2}}$ (đến hàng phần trăm).

Lời giải

Từ bảng 2, ta dự đoán $10^{\sqrt{2}} \approx 25,95$.

5 So sánh $10^{\sqrt{2}}$ và 10.

Lời giải

$$10^{\sqrt{2}} \approx 25,95 > 10$$

2.Tính chất

HĐ 6: Nêu những tính chất của phép tính lũy thừa với số mũ nguyên của một số thực dương.

Lời giải

Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Người ta chứng minh được rằng lũy thừa với số mũ thực của một số thực dương có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên.

- Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tùy ý. Khi đó, ta có:

$$a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta};\ (ab)^{\alpha} = a^{\alpha}.b^{\alpha};\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}};\ \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta};\ \left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

  Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1}.a^{7-\sqrt{5}}}{\left(a^{3-\sqrt{2}}.\right)^{3+\sqrt{2}}} (a > 0)$.

Lời giải

Với $a > 0$, ta có: $P = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1}.a^{7-\sqrt{5}}}{\left(a^{3-\sqrt{2}}.\right)^{3+\sqrt{2}}} = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1+7-\sqrt{5}}}{a^{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}} = \dfrac{a^8}{a^7} = a$.

Ví dụ 7: Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số: $3^{\sqrt{8}}$ và 3^3.

Lời giải

Ta có: $3 = \sqrt{9}$. Do $8 < 9$ nên $\sqrt{8} < \sqrt{9}$.

Vì cơ số 3 lớn hơn 1 nên $3^{\sqrt{8}} < 3^3$.

6 Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số: $2^{2\sqrt{3}}$ và $2^{3\sqrt{2}}$.

Lời giải

Ta có $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2\sqrt{3}} < 2^{3\sqrt{2}}$

3. Sử dụng máy tính cầm tay để tính lũy thừa với số mũ thực

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính lũy thừa với số mũ thực. Cụ thể như sau(lấy kết quả với 4 chữ số ở phần thập phân):

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$(-1,2)^{-3}$	(− 1 . 2) $x^{\square}$ − 3 =	– 0.5787
$6^{2,5}$	6 $x^{\square}$ 2 . 5 =	88.1816
$\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\square}$ 3 ▶ $x^{\square}$ $\sqrt{\square}$ 2 =	2.1746

Ví dụ 8: Dùng máy tính cầm tay để tính (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

a) $0,7^{-5}$;

b) $1,4^{\sqrt{2}-2}$

Lời giải

a) $0,7^{-5} \approx 5,95$

b) $1,4^{\sqrt{2}-2} \approx 0,82$

7 Dùng máy tính cầm tay để tính (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

a) $(-2,7)^{-4}$;

b) $(\sqrt{3}-1)^{\sqrt[3]{4}+1}$.

Lời giải

a) $(-2,7)^{-4} \approx 0,02$

b) $\left(\sqrt{3}-1\right)^{\sqrt[3]{4}+1} \approx 0,45$

Ví dụ 9: Trong mẫu của một sinh vật đã chết T năm, tỉ số R của cacbon phóng xạ còn lại và cacbon không phóng xạ còn lại có thể được ước tính bằng công thức $R = A.2,7^{\frac{T}{8033}}$. Trong đó, A là tỉ số của cacbon phóng xạ và cacbon không phóng xạ trong cơ thể sống. **(Nguồn: R.I. Challes et al., Algebra 2, Pearson)**

Tính đại lượng R theo A trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2000 năm; sau 4000 năm; sau 8000 năm(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2000 năm là: $R = A.2,7^{-\frac{2000}{8033}} \approx 0,78.A$.

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 4000 năm là: $R = A.2,7^{-\frac{4000}{8033}} \approx 0,61.A$.

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 8000 năm là: $R = A.2,7^{-\frac{8000}{8033}} \approx 0,37.A$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chấ của lũy thừa)
- Giải bằng casio (dò tìm đáp án đối với trắc nghiệm)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $K = \left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)$ ta được:

A. $x^2 + 1$ **B.** $x^2 + x + 1$ **C.** $x^2 - x + 1$ **D.** $x^2 - 1$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Tự luận: Dựa vào hằng đẳng thức thứ ba ta có

$$K = \left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) = \left[\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 - \sqrt{X}\right]\left(x - \sqrt{x} + 1\right)$$

$$= \left(x + \sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) = \left[\left(x + 1\right)^2 - x\right] = x^2 + x - 1.$$

Cách 2. Casio: Biểu diễn qua 100

Nhập $\left(\sqrt{X} - \sqrt[4]{X} + 1\right)\left(\sqrt{X} + \sqrt[4]{X} + 1\right)\left(X - \sqrt{X} + 1\right) \xrightarrow[X=100]{Calc} 10101$

$= 100^2 + 100 + 1 = x^2 + x + 1 \Rightarrow \boxed{B}$

Cách 3. Casio: Thử lần lượt 4 đáp án.

Nhập $\left(\sqrt{X} - \sqrt[4]{X} + 1\right)\left(\sqrt{X} + \sqrt[4]{X} + 1\right)\left(X - \sqrt{X} + 1\right) : X^2 + X + 1 \xrightarrow[X=1]{Calc} 3;3 \Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 2. Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $K = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}$?

A. x B. $2x$ C. $x + 1$ D. $x - 1$

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Tự luận: Viết biểu thức *K* dưới dạng

$$K=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{-2}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2}=x\Rightarrow\boxed{A}$$

Cách 2. Casio: Biểu diễn qua 100 và 0,01

Nhập $K=\left(X^{\frac{1}{2}}-Y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{Y}{X}}+\frac{Y}{X}\right)^{-1}\xrightarrow[X=100;Y=0,01]{Calc}100=x\Rightarrow\boxed{A}$

Cách 3. Casio: Thử lần lượt 4 đáp án. Đáp án đúng là đáp án *A*.

Nhập $K=\left(X^{\frac{1}{2}}-Y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{Y}{X}}+\frac{Y}{X}\right)^{-1}:X\xrightarrow[X=1;Y=0]{Calc}1;1\Rightarrow\boxed{A}$

Ví dụ 3. Cho số thực $a>0$ và $a\neq 1$. Hãy rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}$

A. $P=1+a$ **B.** $P=1$ **C.** $P=a$ **D.** $P=1-a$

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{7}{12}}\left(1-a\right)}=\dfrac{a^{\frac{5}{6}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{5}{6}}\left(1-a\right)}=1+a\Rightarrow\boxed{A}$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0,\ a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2018}\right)$.

A. $M=2017^{2018}+1$. **B.** 2017^{1009}.

C. $2017^{1009}+1$. **D.** $-2017^{1009}-1$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Tự luận

Ta có $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}}a^{\frac{3}{8}}-a^{\frac{1}{8}}a^{-\frac{1}{8}}}=\dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-a}=-1-a^{\frac{1}{2}}$

Do đó $M=f\left(2017^{2018}\right)=-1-\left(2017^{2018}\right)^{\frac{1}{2}}=-1-2017^{1009}$.

Cách 2. Casio biểu diễn qua 100

Nhập $f\left(X\right)=\dfrac{X^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{X^{-2}}-\sqrt[3]{X}\right)}{X^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{X^{3}}-\sqrt[8]{X^{-1}}\right)}\xrightarrow[X=100]{Cacl}-11=-1-\sqrt{100}=-1-\sqrt{X}$

Do đó $M=f\left(2017^{2018}\right)=-1-\sqrt{2017^{2018}}=-1-2017^{1009}$.

Ví dụ 5. Cho *x*, *y* là các số thực dương và $x\neq y$. Biểu thức $A=\sqrt{\left(x^{2x}+y^{2x}\right)^{2}-\left(4^{\frac{1}{2x}}xy\right)^{2x}}$ bằng

A. $y^{2x}-x^{2x}$ **B.** $\left|x^{2x}-y^{2x}\right|$ **C.** $\left(x-y\right)^{2x}$ **D.** $x^{2x}-y^{2x}$

Lời giải

Chọn B

$S=\sqrt{x^{4x}+2\left(xy\right)^{2x}+y^{4x}-4\left(xy\right)^{2x}}=\sqrt{x^{4x}-2\left(xy\right)^{2x}+y^{4x}}$

$=\sqrt{\left(x^{2x}-y^{2x}\right)^{2x}}=\left|x^{2x}-y^{2x}\right|$

Nhận xét: Câu này là câu bẫy với những ai dùng máy tính. Thật vậy

Nhập $\sqrt{\left(X^{2X}+Y^{2X}\right)^{2}-\left(4^{\frac{1}{2X}}XY\right)^{2X}}-\left(Y^{2X}-X^{2X}\right)\xrightarrow[X=2;Y=3]{Calc}0$ khoanh đáp án A là sai vì đáp án B mới là đáp án đúng. Để không bị sai khi gặp các đáp án giống nhau mà trong 1 đáp án có dấu trị tuyệt đối thì ta nên thử với các giá trị đối nhau

Nhập $\sqrt{\left(X^{2X}+Y^{2X}\right)^{2}-\left(4^{\frac{1}{2X}}XY\right)^{2X}}-\left|X^{2X}-Y^{2X}\right|\xrightarrow[\begin{cases}X=2;Y=3\\X=-2;Y=-3\end{cases}]{Calc}0$.

Dạng 2. Viết biểu thức dưới dạng lũy thừa

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chất của lũy thừa)
- Giải bằng casio (dò tìm đáp án đối với trắc nghiệm)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}}$ ta được:

A. $\sqrt[4]{x}$ **B.** $\sqrt[6]{x}$ **C.** $\sqrt[8]{x}$ **D.** $\sqrt{x}$

Lời giải

Chọn a

Cách 1. Theo nguyên tắc "Chia cộng" từ trong ra ngoài ta có

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{3}{4}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{7}{8}}}=\sqrt{x^{\frac{15}{8}}}=x^{\frac{15}{16}}$

Do đó $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}}=x^{\frac{15}{16}}:x^{\frac{11}{16}}=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$.

Chú ý: Trong quá trình thực hành vì cùng 1 ẩn *x* nên ta chỉ cần nhẩm theo số mũ cho nhanh.

Cách 2. Thử 4 đáp án.

Nhập $\sqrt{X\sqrt{X\sqrt{X\sqrt{X}}}}:X^{\frac{11}{16}}-\sqrt[4]{X}\xrightarrow[X=2]{Calc}0\Rightarrow\boxed{A}$

Cách 3. Nhập $\log_X\left(\sqrt{X\sqrt{X\sqrt{X\sqrt{X}}}}\right)-\log_X\left(X^{\frac{11}{16}}\right)\xrightarrow[X=2]{Calc}\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{A}$

Ví dụ 2. Biểu thức $K=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$ viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{18}}$ **B.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ **C.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$ **D.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Coi $X=\frac{2}{3}$. Theo nguyên tắc "Chia cộng" ta có

$$K=\sqrt[3]{X\sqrt[3]{X\sqrt{X}}}=\sqrt[3]{X\sqrt[3]{X.X^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3]{X\sqrt[3]{X^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{X.X^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{X^{\frac{3}{2}}}=X^{\frac{1}{2}}$$

Cách 2. Thử 4 đáp án.

Nhập $\log_X\sqrt[3]{X\sqrt[3]{X\sqrt{X}}}\xrightarrow[X=2]{Calc}\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{B}$

Ví dụ 3. Cho $a;b>0$ viết $a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ và $\sqrt[3]{b\sqrt{b\sqrt{b}}}$ về dạng $a^x,b^y;x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $6x+12y$ là

A. 17. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** 14. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Nhập $\begin{cases}\log_A\left(A^{\frac{2}{3}}.\sqrt{A}\right)\xrightarrow[A=2]{Calc}\frac{7}{6}=x\\ \log_B\left(\sqrt[3]{B\sqrt{B\sqrt{B}}}\right)\xrightarrow[B=2]{Calc}\frac{7}{12}=y\end{cases}\Rightarrow 6x+12y=14$.

Dạng 3. So sánh

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chấ của lũy thừa)
- Giải bằng casio: Sử dụng chức năng Ture/Fasle hoặc thay giá trị trực tiếp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **B.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$. **C.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **D.** $\frac{1}{a^{2018}}<\frac{1}{a^{2019}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{1}{a^{\sqrt{5}}} = a^{-\sqrt{5}}$.

Lại có $\begin{cases} -\sqrt{3} > -\sqrt{5} \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > a^{-\sqrt{5}} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Ví dụ 2. So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,2}$ ta được

A. $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2}$.
B. $(0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2} < \sqrt{3}^{0,2}$.
C. $\sqrt{3}^{0,2} < (0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2}$.
D. $(0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2} < (0,7)^{3,2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(0,2)^{0,3} = (0,2)^{\frac{3}{10}} = \left[(0,2)^3\right]^{\frac{1}{10}} = (0,008)^{\frac{1}{10}}$.

$(0,7)^{3,2} = (0,7)^{\frac{32}{10}} = \left[(0,7)^{32}\right]^{\frac{1}{10}}$.

$\sqrt{3}^{0,2} = (3)^{\frac{1}{2}.\frac{2}{10}} = 3^{\frac{1}{10}}$.

Do $(0,7)^{32} < 0,008 < 3$ nên $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2}$.

Ví dụ 3. Nếu $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2 < a < 3$. **B.** $a > 2$. **C.** $a < 3$. **D.** $a > 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ và $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ nên $a - 2 > 1 \Leftrightarrow a > 3$.

Ví dụ 4. Cho $(2m-1)^{\frac{-3}{4}} < (2m-1)^{\frac{-5}{4}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \geq 1$. **B.** $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$. **C.** $m > 1$. **D.** $\frac{1}{2} < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Do $\frac{-3}{4} > \frac{-5}{4}$ nên ta có: $(2m-1)^{\frac{-3}{4}} < (2m-1)^{\frac{-5}{4}} \Leftrightarrow 0 < 2m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < 2m < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$.

Ví dụ 5. Nếu $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2 < a < 3$. **B.** $a > 2$. **C.** $a < 3$. **D.** $a > 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$ và $(a-2)^{\frac{1}{4}}<(a-2)^{\frac{1}{3}}$ nên $a-2>1 \Leftrightarrow a>3$.

Ví dụ 6. Cho mệnh đề $A:\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2018}>\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2019}$ và mệnh đề $B:\log_{\frac{e}{2}}2018>\log_{\frac{e}{2}}2019$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. A sai, B sai. **B.** A đúng, B đúng.

C. A đúng, B sai. **D.** A sai, B đúng.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sin\frac{\pi}{12}<1$ và $2018<2019$ nên $\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2018}>\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2019}$ suy ra A đúng.

Tương tự vì $\frac{e}{2}>1$ và $2018<2019$ nên $\log_{\frac{e}{2}}2018<\log_{\frac{e}{2}}2019$ suy ra B sai.

Ví dụ 7. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017}<(\sqrt{5}+2)^{-2018}$. **B.** $(\sqrt{5}+2)^{2018}>(\sqrt{5}+2)^{2019}$.

C. $(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}$. **D.** $(\sqrt{5}-2)^{2018}<(\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases}0<\sqrt{5}-2<1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}\Rightarrow C$ đúng.

$\begin{cases}\sqrt{5}+2>1\\-2017>-2018\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}+2)^{-2017}>(\sqrt{5}+2)^{-2018}\Rightarrow A$ sai

$\begin{cases}\sqrt{5}+2>1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}+2)^{2018}<(\sqrt{5}+2)^{2019}\Rightarrow B$ sai

$\begin{cases}0<\sqrt{5}-2<1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}\Rightarrow D$ sai.

Ví dụ 8. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **B.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. **D.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Do $\begin{cases} 2018 > 2017 \\ \sqrt{3}-1>1 \end{cases}$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính:

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$; b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}-\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

c) $\left(4^{3+\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1}\right).2^{-2\sqrt{3}}$;

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{-4}{3}}=256^{\frac{3}{4}}+27^{\frac{4}{3}}=\sqrt[4]{\left(4^3\right)^4}+\sqrt[3]{\left(3^4\right)^3}=4^3+3^4=145$

b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}-\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{-2}{3}}=49^{\frac{3}{2}}-125^{\frac{2}{3}}=\sqrt[2]{\left(7^3\right)^2}-\sqrt[3]{\left(5^2\right)^3}=7^3-5^2=318$

c) $\left(4^{3+\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1}\right).2^{-2\sqrt{3}}=4^{\sqrt{3}}\left(4^3-4^{-1}\right).2^{-2\sqrt{3}}=2^{2\sqrt{3}}.2^{-2\sqrt{3}}.\left(4^3-4^{-1}\right)$

$=4^3-4^{-1}=\frac{255}{4}$

Bài 2. Cho a,b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$; b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}$; c) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$;

Lời giải

a) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}$

b) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}=b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=b$

c) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}=a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{-1}{3}}=a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=a$

d) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{6}}$

Bài 3. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{5}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}\left(a>0,a\neq 1\right)$;

b) $\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}\left(a>0,b>0\right)$;

Lời giải

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot\left(a^2-1\right)}{a^{\frac{1}{3}}\cdot\left(a-1\right)}=\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}=\sqrt[3]{\left(a^{12}b^6\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(a^{12}b^6\right)^{\frac{1}{6}}=a^2\cdot b$

Bài 4. Viết các số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $1^{1,5};3^{-1};\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

b) $2022^{0};\left(\frac{4}{5}\right)^{-1};5^{\frac{1}{2}}$;

Lời giải

a) Có $1^{1,5}=1$; $3^{-1}=\frac{1}{3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$.

$\Rightarrow$ Thứ tự là: $3^{-1};\ 1^{1,5};\ 4$.

b) Có $2022^0=1$; $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{4}$; $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ Thứ tự là: $2022^0;\ \left(\frac{4}{5}\right)^{-1};\ 5^{\frac{1}{2}}$

Bài 5. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số sau:

a) $\sqrt{42}$ và $\sqrt[3]{51}$; b) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$; c) $(0,2)^{\sqrt{16}}$ và $(0,2)^{\sqrt[3]{60}}$;

Lời giải

a) $\sqrt{42}=42^{\frac{1}{2}}=42^{\frac{1}{6}.3}=\left(42^3\right)^{\frac{1}{6}}=74088^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[3]{51}=51^{\frac{1}{3}}=51^{2.\frac{1}{6}}=\left(51^2\right)^{\frac{1}{6}}=2601^{\frac{1}{6}}$

$74088>2601 => \sqrt{42}>\sqrt[3]{51}$

b) $16^{\sqrt{3}}=\left(4^2\right)^{\sqrt{3}}=4^{2\sqrt{3}}$

$2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Rightarrow 4^{2\sqrt{3}}<4^{3\sqrt{2}}\Rightarrow 16^{\sqrt{3}}<4^{3\sqrt{2}}$

$\sqrt{16}=4,\sqrt[3]{60}=60^{\frac{1}{3}}<64^{\frac{1}{3}}=4$

c) $\Rightarrow \sqrt{16}>\sqrt[3]{60};\ 0<0,2<1$

$\Rightarrow (0,2)^{\sqrt{16}}<(0,2)^{\sqrt[3]{60}}$

Bài 6. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P=d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) **(Nguồn: R.I. Challes et al., Algebra 2, Pearson)**

Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất số năm Trái Đất là:

$$P=d^{\frac{3}{2}}=1.52^{\frac{3}{2}}\approx 1,87\ \text{(năm)}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}$ được kết quả là

A. ab^2. **B.** a^2b. **C.** ab. **D.** a^2b^2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}=\dfrac{a^3.b^2}{\sqrt[6]{\left(a^2.b\right)^6}}=a.b$.

Câu 2: Biểu thức $T=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$ với $a>0$. Viết biểu thức T dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $a^{\frac{3}{5}}$. **B.** $a^{\frac{2}{15}}$. **C.** $a^{\frac{1}{3}}$. **D.** $a^{\frac{4}{15}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $T=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt[5]{a.a^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}=a^{\frac{4}{15}}$.

Câu 3: Cho a là số thực dương, khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

A. $a^{\frac{8}{3}}$. **B.** $\sqrt[6]{a}$. **C.** $\sqrt[3]{a^2}$. **D.** $a^{\frac{3}{8}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{2}{3.4}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$.

Câu 4: Cho $0<a\neq 1$. Giá trị của biểu thức $P=\log_a\left(a.\sqrt[3]{a^2}\right)$ là

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P=\log_a\left(a.\sqrt[3]{a^2}\right)=\log_a\left(a.a^{\frac{2}{3}}\right)=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 5: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=\sqrt{x}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{8}}$. **C.** $P=x^{\frac{2}{9}}$. **D.** $P=x^2$.

Lời giải

Chọn A

Với $x>0$, ta có $P=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Câu 6: Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}$.

A. 1. **B.** $6^{-\sqrt{5}}$. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}=\dfrac{2^{3+\sqrt{5}}.3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}=2^{3+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}}.3^{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}=2.3^2=18$.

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[4]{x}$, với x là số thực dương.

A. $P=x^{\frac{1}{12}}$. **B.** $P=x^{\frac{7}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{2}{3}}$. **D.** $P=x^{\frac{2}{7}}$.

Lời giải

Chọn B

$P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{7}{12}}$.

Câu 8: Cho $x>0$, $y>0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ về dạng y^n. Tính $m-n$.

A. $\dfrac{11}{6}$. **B.** $-\dfrac{8}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0$, $y>0$, ta có

$x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}=x^{\frac{4}{5}}.\left(x^5.x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{5}{6}}.x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}}\Rightarrow m=\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{12}$.

$y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ $y=x+1$. Do đó $m-n=\dfrac{11}{6}$.

Câu 9: Cho $a>0$, $b>0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đúng?

A. $(a+b)^x=a^x+b^x$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=a^x.b^{-x}$. **C.** $a^{x+y}=a^x+a^y$. **D.** $a^xb^y=(ab)^{xy}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}=a^x.b^{-x}$.

Câu 10: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{3}{2}}.\sqrt[5]{x}$?

A. $x^{\frac{4}{7}}$. **B.** $x^{\frac{3}{10}}$. **C.** $x^{\frac{17}{10}}$. **D.** $x^{\frac{13}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x>0$ thì $P=x^{\frac{3}{2}}.\sqrt[5]{x}=x^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{5}}=x^{\frac{17}{10}}$.

Câu 11: Cho $a>0$, $b>0$ và biểu thức $T=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Khi đó:

A. $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=1$. **D.** $T=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $a>0$, $b>0$ ta có:

$$T=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.\sqrt{1+\frac{1}{4}.\frac{(a-b)^2}{ab}}$$

$$=\frac{1}{a+b}\sqrt{4ab+a^2-2ab+b^2}=\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{a+b}=1.$$

Câu 12: Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2016}\right)$

A. $M=2017^{1008}-1$ **B.** $M=-2017^{1008}-1$ **C.** $M=2017^{2016}-1$ **D.** $M=1-2017^{2016}$

Lời giải

Chọn B

$f(a)=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}-1}=-1-\sqrt{a}$ nên $M=f\left(2017^{2016}\right)=-1-\sqrt{2017^{2016}}=-1-2017^{1008}$

Câu 13: Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$

A. $P=a$ **B.** $P=a^3$ **C.** $P=a^4$ **D.** $P=a^5$

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^3}{a^{2-4}}=a^5$

Câu 14: Cho hai số thực dương a,b. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A=a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{21}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Lời giải

Chọn C

$$A=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\Rightarrow m=\frac{1}{3},\ n=\frac{1}{3}\Rightarrow m.n=\frac{1}{9}.$$

Câu 15: Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P=m^2+n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P\in(330;340)$. **B.** $P\in(350;360)$. **C.** $P\in(260;370)$. **D.** $P\in(340;350)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2^3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{3}{5}}.2^{\frac{1}{10}}.2^{\frac{1}{30}}=2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}}=2^{\frac{11}{15}}$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{11}{15}\Rightarrow\begin{cases}m=11\\n=15\end{cases}\Rightarrow P=m^2+n^2=11^2+15^2=346.$$

Câu 16: Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m,n\in N^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=312$. **B.** $m^2+n^2=543$. **C.** $m^2-n^2=-312$. **D.** $m^2+n^2=409$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A=\frac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}=\frac{a^{\frac{7}{3}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.a^{\frac{-5}{7}}}=\frac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}}=a^{\frac{19}{7}}$

Mà $A=a^{\frac{m}{n}},m,n\in N^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản $\Rightarrow m=19,n=7\Rightarrow m^2-n^2=312$

Câu 17: Cho $4^x+4^{-x}=2$ và biểu thức $A=\frac{4-2^x-2^{-x}}{1+2^x+2^{-x}}=\frac{a}{b}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng:

A. 6. **B.** -10. **C.** -8. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^x+4^{-x}=2\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+\left(2^{-x}\right)^2+2.2^x.2^{-x}=4\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=2$

Ta có: $A=\frac{4-2^x-2^{-x}}{1+2^x+2^{-x}}=\frac{4-\left(2^x+2^{-x}\right)}{1+\left(2^x+2^{-x}\right)}=\frac{4-2}{1+2}=\frac{2}{3}=\frac{a}{b}$.

Suy ra: $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a.b=2.3=6$.

Câu 18: Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}$.

A. $P=a(a+1)$. **B.** $P=a-1$. **C.** $P=a$. **D.** $P=a+1$.

Lời giải

Chọn C

$$P=\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}=\frac{a^{\frac{4}{3}}.a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{-1}{4}}}=\frac{a+a^2}{a+1}=\frac{a(a+1)}{a+1}=a.$$

Câu 19: Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x^{\frac{1}{2}}$ **B.** $P=x^{\frac{7}{12}}$ **C.** $P=x^{\frac{5}{8}}$ **D.** $P=x^{\frac{7}{24}}$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}=[x(x^3.x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}}=[x(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{7}{24}}=x^{\frac{5}{8}}$

Câu 20: Tích $(2017)!\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2...\left(1+\frac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a,\ b)$ là cặp nào trong các cặp sau?

A. $(2018;\ 2017)$. **B.** $(2019;\ 2018)$. **C.** $(2015;\ 2014)$. **D.** $(2016;\ 2015)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(2017)!\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2...\left(1+\frac{1}{2017}\right)^{2017}=(2017)!\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2...\left(\frac{2017}{2016}\right)^{2016}\left(\frac{2018}{2017}\right)^{2017}$

$=(2017)!\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}...\frac{1}{2016}.\frac{2018^{2017}}{2017}=2018^{2017}$. Vậy $a=2018;\ b=2017$.

Câu 21: Cho $f(x)=5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng: $f(1).f(2)...f(2020)=5^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$

A. $m-n^2=2021$. **B.** $m-n^2=-1$. **C.** $m-n^2=1$. **D.** $m-n^2=2020$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}=5^{\sqrt{\frac{x^2(x+1)^2+x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}}}=5^{\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}}=5^{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}$.

Do đó: $f(1).f(2)...f(2020)=5^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow 5^{\sum\limits_{x=1}^{2020}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}=5^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow \sum\limits_{x=1}^{2020}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{m}{n}$.

$\Leftrightarrow 2021-\frac{1}{2021}=\frac{4084440}{2021}=\frac{m}{n} \Rightarrow m=4084440=2021^2-1, n=2021$.

Vậy: $m-n^2=\left(2021^2-1\right)-2021^2=-1$.

Câu 22: Cho $m>0$, $a=m\sqrt{m}$, $y=\frac{\sqrt[3]{m}}{a^2.\sqrt[4]{m}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y=\frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}$. **B.** $y=\frac{1}{a^2}$. **C.** $y=\frac{1}{\sqrt[9]{a^{34}}}$. **D.** $y=\frac{1}{\sqrt[6]{a^{11}}}$.

Lời giải

Chọn A

$a=m\sqrt{m}=m^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a^{\frac{1}{18}}=m^{\frac{3}{2}.\frac{1}{18}}=m^{\frac{1}{12}}$, $y=\frac{\sqrt[3]{m}}{a^2.\sqrt[4]{m}}=\frac{m^{\frac{1}{13}}}{a^2.m^{\frac{1}{4}}}=\frac{m^{\frac{1}{12}}}{a^2}=\frac{a^{\frac{1}{18}}}{a^2}=\frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}$.

Câu 23: Biểu thức $C=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$ với $x>0$ được viết dưới dạng lũy thừa số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{3}{16}}$. **B.** $x^{\frac{7}{8}}$. **C.** $x^{\frac{15}{16}}$. **D.** $x^{\frac{31}{32}}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x>0$ ta có $C^2=x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \Leftrightarrow C^4=x^2.x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \Leftrightarrow C^8=x^4.x^2.x\sqrt{x\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow C^{16}=x^8.x^4.x^2.x\sqrt{x} \Leftrightarrow C^{32}=x^{16}.x^8.x^4.x^2.x \Leftrightarrow C^{32}=x^{31} \Leftrightarrow C=x^{\frac{31}{32}}$.

Câu 24: Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó m, $n\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=25$. **B.** $m^2+n^2=43$. **C.** $3m^2-2n=2$. **D.** $2m^2+n=15$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $A=\frac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}=\frac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.a^{\frac{-2}{7}}}=a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-4+\frac{2}{7}}=a^{\frac{2}{7}} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow 2m^2+n=15$.

Câu 25: Cho a,b là hai số thực dương. Thu gọn biểu thức $\frac{a^{\frac{7}{6}}.b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}$, kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt[3]{\frac{a^4}{b}}$. **B.** ab. **C.** $\frac{b}{a}$. **D.** $\frac{a}{b}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{a^{\frac{7}{6}}.b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}=\frac{a^{\frac{7}{6}}.b^{\frac{-2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}.b^{\frac{1}{3}}}=a^1.b^{-1}=\frac{a}{b}$.

Câu 26: Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

A. $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$. **C.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. **D.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}.\frac{1}{3}+1}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 27: Cho a là số dương khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^{-2019}=a^{2019}$. **B.** $a^{-2019}=-\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$. **C.** $a^{-2019}=\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$. **D.** $a^{-2019}=-a^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^{-2019}=\frac{1}{a^{2019}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$.

Câu 28: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P=\frac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}$ được kết quả là

A. ab. **B.** a^2b^2. **C.** ab^2. **D.** a^2b.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P=\frac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}=\frac{a^3.b^2}{\sqrt[6]{\left(a^2.b\right)^6}}=ab$.

Câu 29: Cho biểu thức $P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x$ **B.** $P=x^{\frac{11}{6}}$ **C.** $P=x^{\frac{7}{6}}$ **D.** $P=x^{\frac{5}{6}}$

Lời giải

Chọn A

$P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x$

Câu 30: Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\dfrac{2}{1009}$. **B.** $\dfrac{1}{1009}$. **C.** $\dfrac{3}{1009}$. **D.** $\dfrac{3}{2018^2}$.

Lời giải

Chọn A

$a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}=a^{\frac{3}{2018}}.a^{\frac{1}{2018}}=a^{\frac{4}{2018}}=a^{\frac{2}{1009}}$. Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng $\dfrac{2}{1009}$.

Câu 31: Cho số thực $a>1$ và các số thực α, β. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a^{\alpha}>1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. **B.** $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$. **C.** $\dfrac{1}{a^{\alpha}}<0,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. **D.** $a^{\alpha}<1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Với $a>1$ và $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Ta có: $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Câu 32: Cho $\pi^{\alpha}>\pi^{\beta}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha.\beta=1$. **B.** $\alpha>\beta$. **C.** $\alpha<\beta$. **D.** $\alpha+\beta=0$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\pi\approx3,14>0$ nên $\pi^{\alpha}>\pi^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Câu 33: Với các số thực a, b bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(3^a)^b=3^{a+b}$. **B.** $(3^a)^b=3^{ab}$. **C.** $(3^a)^b=3^{a-b}$. **D.** $(3^a)^b=3^{a^b}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 34: Cho a,b là các số thực thỏa điều kiện $\left(\dfrac{3}{4}\right)^a>\left(\dfrac{4}{5}\right)^a$ và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}$.Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $a>0$ và $b>1$. **B.** $a>0$ và $0<b<1$.

C. $a<0$ và $0<b<1$. **D.** $a<0$ và $b>1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\left(\dfrac{3}{4}\right)^a>\left(\dfrac{4}{5}\right)^a\Rightarrow a<0$.

Và $b^{\frac{5}{4}}>b^{\frac{4}{3}}\Rightarrow0<b<1$.

Câu 35: Cho a thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{2}{e}\right)$, α và β là những số thực tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $(a^{\alpha})^b=a^{\alpha.\beta}$. **B.** $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$. **C.** $a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$. **D.** $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Lời giải

Chọn D

$a \in \left(0;\dfrac{2}{e}\right) \Rightarrow$ Hàm số $y = a^x$ nghịch biến.Do đó $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Vậy đáp án **sai** là D.

Câu 36: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **B.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. **D.** $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

Lời giải

Chọn B

+) $\begin{cases} 0 < \sqrt{2}-1 < 1 \\ 2017 < 2018 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$ nên **A** đúng.

+) $\begin{cases} 0 < \sqrt{3}-1 < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$ nên **B** sai.

+) $\begin{cases} 2 > 1 \\ \sqrt{2}+1 > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$ nên **C** đúng.

+) $\begin{cases} 0 < 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$ nên **D** đúng.

Câu 37: Cho các số thực $a; b$ thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định đúng:

A. $\ln a > \ln b$. **B.** $(0,5)^a < (0,5)^b$. **C.** $\log_a b < 0$. **D.** $2^a > 2^b$.

Lời giải

Chọn B

Do cơ số $e \in (1;+\infty)$ và $0 < a < b$ nên ta có $\ln a < \ln b$. Đáp án A sai.

Do cơ số $0,5 \in (0;1)$ và $0 < a < b$ nên ta có $(0,5)^a > (0,5)^b$. Đáp án B sai.

Do cơ số $a \in (0;1)$ và $b > 1$ nên ta có $\log_a b < \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b < 0$. Đáp án C đúng.

Do cơ số $2 \in (1;+\infty)$ và $a < b$ nên ta có $2^a < 2^b$. Đáp án D sai.

Câu 38: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017} < (\sqrt{5}+2)^{-2018}$. **B.** $(\sqrt{5}+2)^{2018} > (\sqrt{5}+2)^{2019}$.

C. $(\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019}$. **D.** $(\sqrt{5}-2)^{2018} < (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases} 0 < \sqrt{5}-2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019} \Rightarrow C$ đúng.

$\begin{cases} \sqrt{5}+2>1 \\ -2017>-2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^{-2017} > (\sqrt{5}+2)^{-2018} \Rightarrow A$ sai

$\begin{cases} \sqrt{5}+2>1 \\ 2018<2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^{2018} < (\sqrt{5}+2)^{2019} \Rightarrow B$ sai

$\begin{cases} 0<\sqrt{5}-2<1 \\ 2018<2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019} \Rightarrow D$ sai.

Câu 39: Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. **C.** $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. **D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < \left(\sqrt{2}\right)^{100}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\left(\frac{3}{7}\right) < \left(\frac{5}{8}\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. Phương án **A** sai.

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. Phương án **B** đúng.

$3<5 \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > 5^{-\sqrt{2}} \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. Phương án **C** sai.

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < \left(\sqrt{2}\right)^{100} \Rightarrow \left(2^{-2}\right)^{-50} < (2)^{100} \Rightarrow 2^{100} < 2^{100}$. Phương án **D** sai.

Câu 40: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Lời giải

Chọn D

A đúng vì $2>1$ và $\sqrt{2}+1>\sqrt{3}$ nên $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

B đúng vì $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<1$ và $2019>2018$ nên $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C đúng vì $\left(\sqrt{2}-1\right)<1$ và $2017<2018$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

D sai vì $\sqrt{3}-1<1$ và $2017<2018$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Câu 41: Cho $P=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}$ và $Q=2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}$, với x, y là các số thực khác 0. So sánh P và Q ta có

A. $P<Q$. **B.** $P=Q$. **C.** $P=-Q$. **D.** $P>Q$.

Lời giải

Chọn A

Ta có x^2, y^2, $\sqrt[3]{x^4y^2}$, $\sqrt[3]{x^2y^4}$ là những số thực dương.

$Q=2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}=2\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}$

$=\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}+\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}>\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}$

$>\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}=P$

Vậy $P<Q$.

Câu 42: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}$?

A. $a>0$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a>1$. **D.** $\frac{5}{21}<a<\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[7]{a^2}=\sqrt[21]{a^6}$. Ta có $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}\Leftrightarrow\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[21]{a^6}$ mà $5<6$ vậy $0<a<1$.

Câu 43: Tìm khẳng định đúng.

A. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$. **B.** $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{2017}$.

C. $-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2016}>-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017}$. **D.** $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

Lời giải

Chọn A

Có $0<2-\sqrt{3}<1\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$.

Câu 44: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$ **B.** $\frac{1}{a^{2017}}<\frac{1}{a^{2018}}$ **C.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **D.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow a^{\sqrt{3}}<a^{\sqrt{5}}$ luôn đúng với $a>1$.

Câu 45: Cho biết $(x-2)^{-\frac{1}{3}}>(x-2)^{-\frac{1}{6}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2<x<3$. **B.** $0<x<1$. **C.** $x>2$. **D.** $x>1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

Ta có $-\frac{1}{3}<-\frac{1}{6}$ nên $(x-2)^{-\frac{1}{3}}>(x-2)^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x-2<1 \Leftrightarrow x<3$. Vậy $2<x<3$.

Câu 46: Cho $U=2.2019^{2020}$, $V=2019^{2020}$, $W=2018.2019^{2019}$, $X=5.2019^{2019}$ và $Y=2019^{2019}$. Số nào trong các số dưới đây là số bé nhất?

A. $X-Y$. **B.** $U-V$. **C.** $V-W$. **D.** $W-X$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $X-Y=4.2019^{2019}$.

$U-V=2019^{2020}=2019.2019^{2019}$.

$V-W=2019.2019^{2019}-2018.2019^{2019}=2019^{2019}$.

$W-X=2013.2019^{2019}$.

Vậy trong các số trên, số nhỏ nhất là $V-W$.

Câu 47: Tìm tất cả các số thực m sao cho $\frac{4^a}{4^a+m}+\frac{4^b}{4^b+m}=1$ với mọi $a+b=1$.

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$. Thay vào $\frac{4^a}{4^a+m}+\frac{4^b}{4^b+m}=1$ ta được

$$\frac{4^a}{4^a+m}+\frac{4^{1-a}}{4^{1-a}+m}=1 \Leftrightarrow \frac{4+m.4^a+4+m.4^{1-a}}{4+m.4^a+m.4^{1-a}+m^2}=1 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Câu 48: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-6x+1=0$ với $x_1>x_2$. Tính giá trị của biểu thức $P={x_1}^{2017}.{x_2}^{2018}$

A. $P=1$ **B.** $P=3+2\sqrt{2}$ **C.** $P=3-2\sqrt{2}$ **D.** $P=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{17}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $P={x_1}^{2017}.{x_2}^{2018}=\left(x_1.x_2\right)^{2017}.x_2$. Theo định lý viet: $\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1.x_2=1 \end{cases} \Rightarrow P=x_2$

Ta có $x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3+2\sqrt{2} \\ x_2=3-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow P=3-2\sqrt{2}$.

Câu 49: Rút gọn biểu thức $P=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\left(3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2018}$.

A. $P=1$. **B.** $P=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$. **C.** $P=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. **D.** $P=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{4035}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ ta có

$$x^3=9+\sqrt{80}+3.\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^2.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+3.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^2+9-\sqrt{80}$$

$$=18+3.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\left(.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)$$

$$=18+3x.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=18+3x\Rightarrow x=3\Rightarrow 3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Ta có $P=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\left(3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2018}=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^{2018}$

$$=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)^{2017}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Câu 50: Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2018}.\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2017}$

A. 1. **B.** $7-4\sqrt{3}$. **C.** $7+4\sqrt{3}$. **D.** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2018}.\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2017}=\left[\left(7+4\sqrt{3}\right).\left(7-4\sqrt{3}\right)\right]^{2017}\left(7+4\sqrt{3}\right)=$

$$=1^{2017}\left(7+4\sqrt{3}\right)=7+4\sqrt{3}.$$

BÀI 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH = -\log\left[H^+\right]$ với $\left[H^+\right]$ là nồng độ ion hydrogen. Người ta đo được nồng độ ion hydrrogen của một cốc nước cam là 10^{-4}, nước dừa là 10^{-5} (nồng độ tính bằng mol L^{-1}).

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM LÔGARIT

1. Định nghĩa

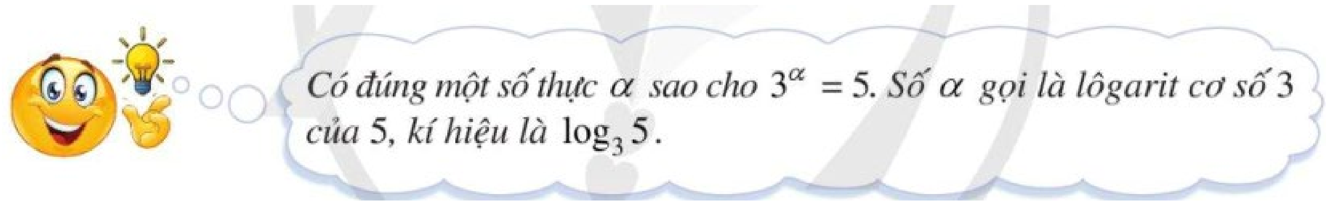
a) Tìm x trong mỗi trường hợp sau: $3^x = 9; 3^x = \frac{1}{9}$.

b) Có bao nhiêu số thực x sao cho $3^x = 5$?

Lời giải

a) $3^x = 9 \Rightarrow x = 2;\ \ 3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = -2$

b) Có một số thực x sao cho $3^x = 5$.



Cho hai số thực dương a, b với a khác 1. Số thực c để $a^c = b$ được gọi là *lôgarit cơ số a của b* và kí hiệu là $\log_a b$, nghĩa là $c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$.

$\log_a b$ xác định khi và chỉ khi $a > 0, a \ne 1$ và $b > 0$.

Ví dụ 1. Tính:

a) $\log_2 8$;

b) $\log_3 \frac{1}{9}$.

Lời giải

a) $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$.

b) $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$ vì $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$.

Luyện tập 1. Tính:

a) $\log_3 81$;

b) $\log_{10} \dfrac{1}{100}$.

Lời giải

a) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$.

b) $\log_{10} \dfrac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} = 2$.

2. Tính chất

Cho $a > 0, a \neq 1$. Tính:

a) $\log_a 1$;

b) $\log_a a$

c) $\log_a a^c$;

d) $a^{\log_a b}$ với $b > 0$.

Lời giải

a) $\log_a 1 = 0$;

b) $\log_a a = 1$;

c) $\log_a a^c = c$;

d) $a^{\log_a b} = b$.

Với số thực dương a khác 1, số thực dương b, ta có:

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$ $\log_a a^c = c$; $a^{\log_a b} = b$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\log_5 \sqrt[3]{5}$;

b) $4^{\log_2 7}$

Lời giải

a) $\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$.

b) $4^{\log_2 7} = \left(2^2\right)^{\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^2 = 7^2 = 49$.

Luyện tập 2. Tính:

a) $\log_4 \sqrt[5]{16}$;

b) $36^{\log_6 8}$

Lời giải

a) $\log_4 \sqrt[5]{16} = \log_4 \left(4^2\right)^{\frac{1}{5}} = \log_4 4^{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5}$

b) $36^{\log_6 8} = 6^{\log_6 8}.6^{\log_6 8} = 8.8 = 64$

3. Lôgarit thập phân. Lôgarit tự nhiên

- Lôgarit cơ số 10 của số thực dương b được gọi là *lôgarit thập phân* của b và kí hiệu là $\log b$ hay $\lg b$.
- Lôgarit cơ số e của số thực dương b được gọi là *lôgarit tự nhiên* của b và kí hiệu là $\ln b$.

Ví dụ 3. Tính

a) $\log 0,0001$; b) $\ln e^2$.

Lời giải

Ta có:

a) $\log 0,0001 = \log 10^{-4} = -4$.

b) $\ln e^2 = 2$.

Luyện tập 3. Giải bài toán được nêu ở phần đầu bài.

Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH = -\log\left[H^+\right]$ với $\left[H^+\right]$ là nồng độ ion hydrogen. Người ta đo được nồng độ ion hydrogen của một cốc nước cam là 10^{-4}, nước dừa là 10^{-5} (nồng độ tính bằng mol L^{-1}).

Lời giải

Độ pH của cốc nước cam là: $-\log 10^{-4} = 4$.

Độ pH của cốc nước dừa là: $-\log 10^{-5} = 5$.

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TÍNH LÔGARIT

1. Lôgarit của một tích, một thương

3 Cho $m = 2^7, n = 2^3$.

a)Tính $\log_2(mn)$; $\log_2 m + \log_2 n$ và so sánh các kết quả đó.

b) Tính $\log_2\left(\frac{m}{n}\right)$; $\log_2 m - \log_2 n$ và so sánh các kết quả đó.

Lời giải

a) $\log_2(mn) = 10$; $\log_2 m + \log_2 n = 10$ $\Rightarrow \log_2(mn) = \log_2 m + \log_2 n$

b) $\log_2\left(\frac{m}{n}\right) = 4$; $\log_2 m - \log_2 n = 4$ $\Rightarrow \log_2\left(\frac{m}{n}\right) = \log_2 m - \log_2 n$.

Với ba số thực dương a, m, n và $a \neq 1$, ta có:

$\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$;

$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$.

Ta có: $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b\,(a > 0, a \neq 1, b > 0)$.

Ví dụ 4. Tính:

a) $\log_6 9+\log_6 4$; b) $\log_5 100-\log_5 20$.

Lời giải

Ta có:

a) $\log_6 9+\log_6 4=\log_6(9.4)=\log_6 36=2$.

b) $\log_5 100-\log_5 20=\log_5\dfrac{100}{20}=\log_5 5=1$.

Chú ý: Với n số dương $b_1,b_2,...,b_n$: $\log_a(b_1b_2...b_n)=\log_a b_1+\log_a b_2+...+\log_a b_n\ (a>0,a\neq 1)$.

Luyện tập 4. Tính:

a) $\ln\left(\sqrt{5}+2\right)+\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$;

b) $\log 400-\log 4$;

c) $\log_4 8+\log_4 12+\log_4\dfrac{32}{3}$.

Lời giải

a) $\ln\left(\sqrt{5}+2\right)+\ln\left(\sqrt{5}-2\right)=\ln\left(\left(\sqrt{5}+2\right).\left(\sqrt{5}-2\right)\right)=\ln(5-4)=\ln 1=0$

b) $\log\ 400-\log\ 4=\log\left(\dfrac{400}{4}\right)=\log 100=2$

c) $\log_4 8+\log_4 12+\log_4\dfrac{32}{3}=\log_4\left(8.\ 12.\ \dfrac{32}{3}\right)=\log_4 1024=5$

2. Lôgarit của một lũy thừa

4 Cho $a>0,a\neq 1,b>0$, α là một số thực.

a) Tính $a^{\log_a b^\alpha}$ và $a^{\alpha\log_a b}$.

b) So sánh $\log_a b^\alpha$ và $\alpha\log_a b$.

Lời giải

a) $a^{\log_a b^\alpha}=b^\alpha$; $a^{\alpha\log_a b}=b^\alpha$

b) $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$

Cho $a>0,a\neq 1,b>0$. Với mọi số thực α, ta có: $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$.

Cho $a>0,a\neq 1,b>0$. Với mọi số nguyên dương $n\geq 2$, ta có: $\log_a\sqrt[n]{b}=\dfrac{1}{n}\log_a b$.

Ví dụ 5. Tính:

a) $\log_3 9^2$ b) $\log_5 15 - 2\log_5 \sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có:

a) $\log_3 9^2 = 2\log_3 9 = 2\log_3 3^2 = 2.2.\log_3 3 = 4$.

b) $\log_5 15 - 2\log_5 \sqrt{3} = \log_5 15 - \log_5 \left(\sqrt{3}\right)^2 = \log_5 15 - \log_5 3 = \log_5 \frac{15}{3} = \log_5 5 = 1$.

Luyện tập 5. Tính $2\log_3 5 - \log_3 50 + \frac{1}{2}\log_3 36$.

Lời giải

$$2\log_3 5 - \log_3 50 + \frac{1}{2}\log_3 36 = \log_3 5^2 - \log_3 50 + \log_3 6 = \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 6 = \log_3 3 = 1$$

3. Đổi cơ số của lôgarit

HĐ 5: Cho ba số thực dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$.

a) Bằng cách sử dụng tính chất $b = a^{\log_a b}$, chứng tỏ rằng $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$.

b) So sánh $\log_a b$ và $\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

a) Để chứng minh $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$, chúng ta sẽ sử dụng quy tắc của logarit: $b = a^{\log_a b}$

Và từ quy tắc $b = a^{\log_a b}$, ta có: $b = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_c a} = a^{(\log_a b)(\log_c a)}$

Từ đó, ta có: $c^{\log_e b} = a^{(\log_a b)(\log_a a)}$

Sử dụng tính chất của logarit, ta nhận thấy hai vế của phương trình trên đều bằng nhau.

Do đó: $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$

b) Để so sánh $\log_a b_{\text{và}} \frac{\log_e b}{\log_e a}$, chúng ta nhận thấy: $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_a b \cdot \log_c a}{\log_c a} = \log_a b$

Vậy ta kết luận $\log_a b_{\text{và}} \frac{\log_c b}{\log_c a}$ bằng nhau.

Với a, c là hai số thực dương khác 1 và b là số thực dương, ta có: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Nhận xét: Với $a > 0$ và $a \neq 1, b > 0$ và $b \neq 1, c > 0, \alpha \neq 0$, ta có những công thức sau:

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$;

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$.

Ví dụ 6. Tính: $\log_9 3$.

Lời giải

Ta có: $\log_9 3 = \log_{3^2} 3 = \frac{1}{2}\log_3 3 = \frac{1}{2}$.

Luyện tập 6. Tính: $5^{\log_{125} 64}$.

Lời giải

$5^{\log_{125} 64} = 5^{\log_5 64^{\frac{1}{3}}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÍNH LÔGARIT

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính lôgarit. Cụ thể như sau (lấy kết quả với 4 chữ số ở phần thập phân):

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\log 1,2$	log 1 . 2 =	0.0792
$\ln 0,35$	ln 0 . 3 5 =	– 1.0498
$\log_5 3$	$\log_{\square}\square$ 5 ▶ 3 =	0.6826

Chú ý với máy tính không có phím $\log_{[\ ]}[\ \ ]$ thì để tính $\log_5 3$, ta có thể dùng công thức đổi cở số để đưa về cở số 10 hoặc cơ số e.

Ví dụ 7. Sử dụng máy tính cầm tay để tính độ pH trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

a) Bia có $\left[H^+\right] = 0,00008$;

b) Rượu có $\left[H^+\right] = 0,0004$.

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021)

Lời giải

a) $\mathrm{pH} = -\log\left[H^+\right] = -\log(0,00008) \approx 4,1$.

b) $\mathrm{pH} = -\log\left[H^+\right] = -\log(0,0004) \approx 3,4$.

Luyện tập 7: Sử dụng máy tính cầm tay để tính: $\log_7 19; \log_{11} 26$.

Lời giải

Ta có: $\log_7 19 \approx 1,5;\quad \log_{11} 26 \approx 1,3$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A=\log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)$ với $a>0, a\neq 1$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $\frac{7}{4}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Tự luận

Ta có $A=\log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)=\log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a.a^{\frac{1}{2}}}}\right)=\log_a\left(a.\sqrt[5]{a^3.a^{\frac{3}{4}}}\right)=\log_a a^{\frac{7}{4}}=\frac{7}{4}$.

Cách 2. Casio

Nhập $\log_X\left(X\sqrt[5]{X^3\sqrt{X\sqrt{X}}}\right)-\frac{7}{4}\xrightarrow[X=2]{Calc}0\Rightarrow\boxed{A}$

Ví dụ 2. Cho $a,b>0$ và $a,b\neq 1$. Đặt $\log_a b=\alpha$, tính theo α biểu thức $P=\log_{a^2} b-\log_{\sqrt{b}} a^3$

A. $P=\frac{2-5\alpha^2}{\alpha}$ **B.** $P=\frac{\alpha^2-12}{2\alpha}$ **C.** $P=\frac{4\alpha^2-3}{2\alpha}$ **D.** $P=\frac{\alpha^2-3}{\alpha}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=\log_{a^2} b-\log_{\sqrt{b}} a^3=\frac{1}{2}\log_a b-2\log_b a^3$

$=\frac{1}{2}\log_a b-6\log_b a=\frac{1}{2}\log_a b-\frac{6}{\log_a b}=\frac{\alpha^2-12}{2\alpha}$

Ví dụ 3. Cho $x>0$ thỏa mãn $\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)$. Tính $(\log_2 x)^2$

A. 3 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** 27 **D.** 9

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Đặt $t=\log_2 x$, ta có $\log_8 x=\log_{2^3} x=\frac{1}{3}.\log_2 x=\frac{t}{3}\Rightarrow\log_2\frac{t}{3}=\log_8 t\Leftrightarrow\log_2\frac{t}{3}=\frac{1}{3}\log_2 t$

$\Leftrightarrow\log_2\frac{t}{3}=\log_2\sqrt[3]{t}\Leftrightarrow\frac{t}{3}=\sqrt[3]{t}\Leftrightarrow t=3\sqrt{3}\Rightarrow(\log_2 x)^2=t^2=27\Rightarrow\boxed{C}$

Cách 2. Nhập $\log_2(\log_8 x)-\log_8(\log_2 x)\xrightarrow[x=2]{Shift+Calc}luu\ A$

Nhập $(\log_2 x)^2-27\xrightarrow[X=A]{Calc}0\Rightarrow\boxed{C}$

Ví dụ 4. Cho $\log_2 m = a$ và $A = \log_m 8m\ (m > 0, m \neq 1)$. Khi đó mối quan hệ giữa *A* và *a* là:

A. $A = (3-a)a$. **B.** $A = \dfrac{3-a}{a}$. **C.** $A = \dfrac{3+a}{a}$. **D.** $A = (3+a)a$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Biến đổi $\log_m 8m$ theo $\log_2 m$

Ta có $A = \log_m 8 + \log_m m = 3\log_m 2 + 1 = \dfrac{3}{a} + 1 \Leftrightarrow A = \dfrac{3+a}{a} \Rightarrow \boxed{C}$

Cách 2. Từ giả thiết $\log_2 m = a$ rút ra *m* và thế vào

Ta có $\log_2 m = a \Leftrightarrow m = 2^a$ khi đó

$$A = \log_m 8m = \log_{2^a}\left(8.2^a\right) = \frac{1}{a}\left(\log_2 2^3 + a\log_2 2\right) = \frac{3+a}{a} \Rightarrow \boxed{C}$$

Cách 3. Sử dụng Casio. Không mất tính tổng quát cho $m = 2 \Rightarrow a = \log_2 2 = 1$

Nhập $\log_M(8M) - \dfrac{3+A}{A} \xrightarrow[M=A=2]{Calc} 0 \Rightarrow \boxed{C}$

Ví dụ 5. Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $xy = 10^a, yz = 10^{2b}, zx = 10^{3c}\ (a,b,c \in R)$. Tính $P = \log x + \log y + \log z$

A. $P = 3abc$ **B.** $P = a + 2b + 3c$

C. $P = 6abc$ **D.** $P = \dfrac{a+2b+3c}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $xy = 10^\alpha, yz = 10^{2b}, zx = 10^{3c} \Rightarrow (xyz)^2 = 10^{a+2b+3c}$.

Suy ra $P = \log x + \log y + \log z = \log(xyz) = \dfrac{1}{2}\log(xyz)^2 = \dfrac{1}{2}\log 10^{a+2b+3c} = \dfrac{a+2b+3c}{2}$.

Ví dụ 6. Cho a, b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b - 8\log_b\left(a\sqrt[3]{b}\right) = -\dfrac{8}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right) + 2017$.

A. $P = 2019$. **B.** $P = 2020$. **C.** $P = 2017$. **D.** $P = 2016$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Ta có

$$\log_a^2 b - 8\left(\log_b a + \frac{1}{3}\log_b b\right) + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \log_a^2 b - \frac{8}{\log_a b} = 0 \Leftrightarrow \log_a b = 2$$

Do đó $P = \log_a a^{\frac{4}{3}} + \log_a b^{\frac{1}{3}} + 2017 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}.\log_a b + 2017 = 2019 \Rightarrow \boxed{A}$

Cách 2. Không mất tính tổng quát cho $a = 2$

Nhập $\log_2(X)^2 - 8\log_X\left(2\sqrt[3]{X}\right) + \frac{8}{3} \xrightarrow[X=b=2]{Shift+Calc} 4$

Nhập $P = \log_A\left(A\sqrt[3]{AB}\right) + 2017 \xrightarrow[A=2;B=4]{Calc} 2019 \Rightarrow \boxed{B}$

Nhận xét:

- Thông thường để giải theo kiểu trắc nghiệm ta sẽ cho *a* hoặc *b* bằng 1 số thực cụ thể và giải phương trình theo *b* hoặc *a*. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp biểu phức tạp khó giải thì ta nên chọn cho *a* và *b* đồng thời các số thực, quan trọng là chọn như thế nào để thoả mãn bài toán, kinh nghiệm ở đây ta thấy để rút gọn $\log_a b$ thì $b = a^n$. Theo giả thiết nên ta kiểm tra như sau:

Nhập $\log_A^2 B - 8\log_B\left(A\sqrt[3]{B}\right) + \frac{8}{3} \xrightarrow[A=2;B=2^2]{Calc} 0$ thoả mãn

Nhập $P = \log_A\left(A\sqrt[3]{AB}\right) + 2017 \xrightarrow[A=2;B=4]{Calc} 2019$

- Ta có thể nhập như sau:

$\log_X(Y)^2 - 8\log_Y\left(X\sqrt[3]{Y}\right) + \frac{8}{3} \xrightarrow[Y=3;X=2]{Shift+Calc} 1,732050808 \xrightarrow{luu} A$

Nhập $P = \log_X\left(X\sqrt[3]{XY}\right) + 2017 \xrightarrow[X=a=A;Y=3]{Calc} 2019 \Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 7. Cho a,b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = m$, tính theo *m* giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

A. $\frac{4m^2-3}{2m}$ **B.** $\frac{m^2-12}{2m}$ **C.** $\frac{m^2-12}{m}$ **D.** $\frac{m^2-3}{2m}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 = \frac{1}{2}\log_a b - 6\log_b a$

$= \frac{1}{2}\log_a b - \frac{6}{\log_a b} = \frac{1}{2}m - \frac{6}{m} = \frac{m^2-12}{m}$.

Cách 2. Ta có $\log_a b = m \Leftrightarrow b = a^m$ thay vào ta được

$P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 = \log_{a^2} a^m - \log_{\sqrt{a^m}} a^3 = \frac{m}{2} - \frac{6}{m} = \frac{m^2-12}{m}$.

Cách 3. Cho $a = m = 2 \Rightarrow b = 4$

Nhập $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 - \frac{m^2-12}{2m} \xrightarrow[a=m=2;b=4]{Calc} 0 \Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 8. Cho x,y,z,a,b,c thoả mãn $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t$ và $xy = z^2t^2$. Tính giá trị của $P = a + b - 2c$

A. 4 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** -2 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Cách 1. $\frac{\ln x}{a}=\frac{\ln y}{b}=\frac{\ln z}{c}=\ln t\Rightarrow\begin{cases}x=t^a\\ y=t^b\\ z=t^c\\ xy=z^2t^2\end{cases}\Rightarrow t^a.t^b=t^{2c}t^2\Leftrightarrow a+b=2c+2$

$\Rightarrow a+b-2c=2$.

Chú ý: Có thể đặt $\frac{\ln x}{a}=\frac{\ln y}{b}=\frac{\ln z}{c}=\ln t=u$

Cách 2. $\frac{\ln x}{a}=\frac{\ln y}{b}=\frac{\ln z}{c}=\ln t\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{\ln x}{\ln t}=\log_t x\\ b=\frac{\ln y}{\ln t}=\log_t y\\ c=\frac{\ln z}{\ln t}=\log_t z\end{cases}$

$\Rightarrow a+b-2c=\log_t x+\log_t y-2\log_t z=\log_t\left(\frac{xy}{z^2}\right)=\log_t t^2=2$.

Cách 3. Cho $a=2;b=3;c=4$ thì từ $xy=z^2t^2\Rightarrow t=\frac{\sqrt{6}}{4}$

Khi đó $\begin{cases}a=\frac{\ln x}{\ln t}\xrightarrow[x=2;t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc}A\\ b=\frac{\ln y}{\ln t}\xrightarrow[y=3;t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc}B\\ c=\frac{\ln z}{\ln t}\xrightarrow[z=2;t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc}C\end{cases}\Rightarrow P=a+b-2c=A+B-2C=2$.

Ví dụ 9. Cho $\frac{\log a}{p}=\frac{\log b}{q}=\frac{\log c}{r}=\log x\neq 0;\ \frac{b^2}{ac}=x^y$. Tính y theo p,q,r.

A. $y=q^2-pr$. **B.** $y=\frac{p+r}{2q}$. **C.** $y=2q-p-r$. **D.** $y=2q-pr$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\frac{\log a}{p}=\frac{\log b}{q}=\frac{\log c}{r}=\log x\Rightarrow\begin{cases}\log a=p\log x\\ \log b=q\log x\\ \log c=r\log x\end{cases}$

Và $\frac{b^2}{ac}=x^y\Leftrightarrow\log\frac{b^2}{ac}=\log x^y$

$\Rightarrow y\log x=2\log b-\log a-\log c=2q\log x-p\log x-r\log x=\log x(2q-p-r)$

$\Rightarrow y=2q-p-r$ (do $\log x\neq 0$). **Chọn đáp án C**

Ví dụ 10. Cho $x>0,x\neq 1$ thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+...+\frac{1}{\log_{2017} x}=M$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $x=\sqrt[2017]{\dfrac{2017!}{M}}$ **B.** $x=2017^{M}$ **C.** $x=\dfrac{2017!}{M}$ **D.** $x^{M}=2017!$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a b.\log_b a=1\Rightarrow \log_b a=\dfrac{1}{\log_b a}\Rightarrow M=\log_x 2+\log_x 3+...+\log_x 2017$

$\Rightarrow M=\log_x\left(2.3.....2017\right)=\log_x 2017!$

$\Rightarrow x^{M}=2017!$.

Ví dụ 11. Cho hai số thực dương x và y thỏa mãn $\log_4 x=\log_6 y=\log_9\left(x+y\right)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}\left(a,b\in\mathbb{Z}^{+}\right)$. Tính tỉ số $S=a+b$.

A. $S=6$ **B.** $S=8$ **C.** $S=4$ **D.** $S=11$

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết $\log_4 x=\log_6 y=\log_9\left(x+y\right)$ có hai ẩn ta đưa về 1 ẩn như sau

$$\begin{cases}\log_4 x=\log_9\left(x+y\right)\\ \log_6 y=\log_4 x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6^{\log_4 x}\\ \log_4 x=\log_9\left(x+6^{\log_4 x}\right)\end{cases}$$

Nhập $\begin{cases}\log_4\left(X\right)-\log_9\left(X+6^{\log_4(X)}\right)\xrightarrow[X=2]{Shift+Calc}5,162430201\xrightarrow{luu}A=x\\ 6^{\log_4(X)}\xrightarrow[X=A]{Calc}8,385348209\xrightarrow{luu}B=y\end{cases}$

Mod 7 nhập: $f\left(X\right)=\sqrt{X}-2\dfrac{A}{B}$ với $a=f\left(X\right),b=X$

$Start=1;End=9;Step=1$ và nhìn trên bảng ta được $\begin{cases}a=1\\ b=5\end{cases}\Rightarrow a+b=6\Rightarrow\boxed{A}$

Cách 2. Đặt $\log_4 x=\log_6 y=\log_9\left(x+y\right)=t\Rightarrow\begin{cases}x=4^{t}\\ y=6^{t}\\ x+y=9^{t}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{t}\\ 4^{t}+6^{t}-9^{t}=0\xrightarrow{Mod\,5+3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{t}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=5\end{cases}\Rightarrow a+b=6\Rightarrow\boxed{A}\end{cases}$$

Ví dụ 12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^{\log_3 7}=27,b^{\log_7 11}=49,c^{\log_{11}25}=\sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức $T=a^{\log_3^2 7}+b^{\log_7^2 11}+c^{\log_{11}^2 25}$

A. $T=76+\sqrt{11}$ **B.** $T=31141$ **C.** $T=2017$ **D.** $T=469$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết biến đổi

$$T=a^{\log_3^2 7}+b^{\log_7^2 11}+c^{\log_{11}^2 25}=\left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7}+\left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11}+\left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25}$$

$$=(27)^{\log_3 7}+(49)^{\log_7 11}+\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25}$$

Ta có $\begin{cases}(27)^{\log_3 7}=\left(3^3\right)^{\log_3 7}=\left(3^{\log_3 7}\right)^3=7^3=343\\(49)^{\log_7 11}=\left(7^2\right)^{\log_7 11}=\left(7^{\log_7 11}\right)^2=11^2=121\\\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25}=\left(11^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{11} 25}=\left(11^{\log_{11} 25}\right)^{\frac{1}{2}}=25^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5\end{cases}$.

$\Rightarrow T=343+121+5=469$.

Ví dụ 13. Cho x,y,z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x=5^y=10^{-z}$. Giá trị của biểu thức $A=xy+yz+zx$ bằng?

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $2^x=5^y=10^{-z}\Leftrightarrow 2^x=5^y=\dfrac{1}{10^z}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x10^z=1\\5^y10^z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2^x10^z\right)^y=1\\\left(5^y10^z\right)^x=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2^{xy}10^{yz}=1\\5^{xy}10^{zx}=1\end{cases}\Rightarrow\left(2^{xy}10^{yz}\right)\left(5^{xy}10^{zx}\right)=10^{xy+yz+zx}=1\Rightarrow A=xy+yz+zx=0\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 2. Cho $x=2\Rightarrow 5^y=10^{-z}=4\Leftrightarrow\begin{cases}y=\log_5 4\to B\\z=-\log_{10}4\to C\end{cases}$

Nhập $A=XY+YM+MX\xrightarrow[X=2;Y=B;M=C]{Calc}0\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 3. $2^x=5^y=10^{-z}=t\Rightarrow\begin{cases}x=\log_2 t\\y=\log_5 t\\z=-\log_{10}t\end{cases}$. Nhập $A=xy+yz+zx$

$=\log_2 M.\log_5 M+\log_5 M.(-\log_{10}M)+(-\log_{10}M).\log_2 M\xrightarrow[t=M=2]{Calc}0\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 4. Ta có $2^x=5^y=10^{-z}\Leftrightarrow\begin{cases}2=10^{-\frac{z}{x}}\\5=10^{-\frac{z}{y}}\end{cases}\Rightarrow 2.5=10=10^{-\frac{z}{x}-\frac{z}{y}}\Leftrightarrow-\dfrac{z}{x}-\dfrac{z}{y}=1$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 5. Ta có $2^x=5^y=10^{-z}=t\Rightarrow\begin{cases}2=t^{\frac{1}{x}}\\5=t^{\frac{1}{y}}\\10=t^{-\frac{1}{z}}\end{cases}\Rightarrow 2.5=10\Leftrightarrow t^{\frac{1}{x}}.t^{\frac{1}{y}}=t^{-\frac{1}{z}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{z}$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0 \Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 14. Cho ba điểm $A(b;\log_a b)$, $B(c;2\log_a c)$, $C(b;3\log_a b)$ với $0<a\neq 1, b>0$, $c>0$. Biết B là trọng tâm của tam giác OAC với O là gốc tọa độ. Tính $S=2b+c$.

A. $S=9$. **B.** $S=7$. **C.** $S=11$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn A

Vì B là trọng tâm của tam giác OAC nên $\begin{cases} \dfrac{0+b+b}{3}=c \\ \dfrac{0+\log_a b+3\log_a b}{3}=2\log_a c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b+b=3c \\ 4\log_a b=6\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ 2\log_a b=3\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ \log_a b^2=\log_a c^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ b^2=c^3 \end{cases} \xrightarrow{c>0} \begin{cases} b=\dfrac{27}{8} \\ c=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow S=2b+c=9.$

Dạng 2. Biểu diễn theo lôga

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Đặt $a=\log_2 3, b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo *a* và *b*.

A. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}$

C. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Tự luận

Ta có $\log_6 45=\log_6 9+\log_6 5$.

$\log_6 9=2\log_6 3=\dfrac{2}{\log_3 6}=\dfrac{2}{1+\log_3 2}=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{a}}=\dfrac{2a}{a+1}$.

$\log_6 5=\dfrac{1}{\log_5 6}=\dfrac{1}{\log_5 3+\log_5 2}=\dfrac{a}{b(a+1)}$ vì $\log_5 2=\dfrac{b}{a}$.

Vậy $\log_6 45=\dfrac{2a}{a+1}+\dfrac{a}{b(a+1)}=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$.

Cách 2. Thử lần lượt 4 đáp án. Đáp án đúng là đáp án C.

Tính và lưu thành hai biến *A* và *B*. Tính $\begin{cases}\log_2 3 \to A \\ \log_5 3 \to B\end{cases}$

Nhập $\log_6 45 - \dfrac{a+2ab}{ab+b} \xrightarrow[a=A;b=B]{Calc} 0 \Rightarrow \boxed{C}$

Ví dụ 2. Cho $a=\log_3 2$ và $b=\log_3 5$. Tính $\log_{10} 60$ theo *a* và *b*.

A. $\dfrac{2a+b+1}{a+b}$. **B.** $\dfrac{2a+b-1}{a+b}$. **C.** $\dfrac{2a-b+1}{a+b}$. **D.** $\dfrac{a+b+1}{a+b}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{10} 60 = 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \dfrac{2}{1+\log_2 5} + \dfrac{1}{\log_3 2+\log_3 5} + \dfrac{1}{1+\log_5 2}$

$= \dfrac{2}{1+\dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}} + \dfrac{1}{\log_3 2+\log_3 5} + \dfrac{1}{1+\dfrac{\log_3 2}{\log_3 5}} = \dfrac{2}{1+\dfrac{b}{a}} + \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{1+\dfrac{a}{b}} = \dfrac{2a+b+1}{a+b}$.

Ví dụ 3. Cho $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \dfrac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$. **B.** $S=19$. **C.** $S=10$. **D.** $S=15$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Nhận xét về mối quan hệ giữa biểu thức và cơ số để phân tích hợp lí

Ta thấy $12=3.2^2;24=3.2^3;54=3^3.2;168=2^3.3.7$ do đó ta sẽ phân tích theo số 2 và 3. Số 7 làm cơ số trung gian

$\log_7 12 = x \Leftrightarrow \log_7 3 + 2\log_7 2 = x$ (1)

$xy = \log_7 12.\log_{12} 24 = \log_7 24 \Rightarrow \log_7 3 + 3\log_7 2 = xy$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\log_7 2 = xy - x$, $\log_7 3 = 3x-2xy$.

Do đó $\log_{54} 168 = \dfrac{\log_7 168}{\log_7 54} = \dfrac{\log_7 \left(2^3.3.7\right)}{\log_7 \left(3^3.2\right)} = \dfrac{3\log_7 2+\log_7 3+1}{\log_7 2+3\log_7 3} = \dfrac{xy+1}{-5xy+8x}$.

Do đó $a=1, b=-5, c=8 \Rightarrow S=15 \Rightarrow \boxed{D}$

Cách 2: Ta có $xy=\log_7 24$ và $\log_{54} 168 = \dfrac{\log_7 168}{\log_7 54} = \dfrac{\log_7 24+1}{\log_7 54}$

Do đó $\log_{54} 168 = \dfrac{\log_7 168}{\log_7 54} = \dfrac{\log_7 24+1}{\log_7 54} = \dfrac{a\log_7 24+1}{b\log_7 24+c\log_7 12}$. Đồng nhất hai vế ta được

$\begin{cases} a=1 \\ b\log_7 24 + c\log_7 12 = \log_7 54 \end{cases}$. Để tìm b,c ta có thể làm như sau

Cách 2.1: Dùng mode7 ta có $b\log_7 24 + c\log_7 12 = \log_7 54 \Leftrightarrow b = \dfrac{\log_7 54 - c\log_7 12}{\log_7 24}$

Nhập $f\left(x\right)=\dfrac{\log_7 54-X\log_7 12}{\log_7 24}\left(b=f\left(x\right);c=X\right);Start=-9;End=9;Step=1$.

Ta nhìn bảng trên máy tính. Từ đó suy ra $b=-5;c=8$

Cách 2.2: Giải hệ hai ẩn hai phương trình Mode 5 +1

$$\begin{cases}b\log_7 24+c\log_7 12=\log_7 54\\2b+3c=S-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5\\c=8\end{cases}$$

Dạng 3. So sánh

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Nếu $a^{\frac{\sqrt{5}}{5}}>a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ và $\log_b\dfrac{4}{5}<\log_b\dfrac{5}{6}$ thì

A. $0<a<1,\ 0<b<1$ **B.** $0<a<1,\ b>1$

C. $a>1,\ b>1$ **D.** $a>1,\ 0<b<1$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Vì $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5}}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\a^{\frac{\sqrt{5}}{5}}>a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\end{cases}\Rightarrow 0<a<1$ và $\begin{cases}\dfrac{4}{5}<\dfrac{5}{6}\\\log_b\dfrac{4}{5}<\log_b\dfrac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow b>1$

Cách 2. Vì phép so sánh là dựa vào cơ số nên ta chỉ thử với cơ số lớn hơn 1 và lớn hơn 0 nhỏ hơn 1. Coi $a=X;b=Y$

Nhập $X^{\frac{\sqrt{5}}{5}}-X^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\xrightarrow[X=2>1]{Calc}<0\Rightarrow\boxed{C,D}$ loại

Nhập $\log_Y\dfrac{4}{5}-\log_Y\dfrac{5}{6}\xrightarrow[Y=2]{Calc}<0\Rightarrow\boxed{B}$

Ví dụ 2. Cho hai số thực dương a,b khác 1 thỏa mãn: $a^{\frac{13}{7}}>a^{\frac{15}{8}},\log_b\dfrac{1}{2}<\log_b\dfrac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<1$ và $b<1$. **B.** $a>1$ và $b>1$.

C. $a>1$ và $b<1$. **D.** $a<1$ và $b>1$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\begin{cases}a^{\frac{13}{7}}>a^{\frac{15}{8}}\\\dfrac{13}{7}<\dfrac{15}{8}\end{cases}\Rightarrow 0<a<1$ và $\begin{cases}\log_b\dfrac{1}{2}<\log_b\dfrac{2}{3}\\\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow b>1$

Ví dụ 3. Cho hai số thực *a* và *b*, với $1<a<b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$ **B.** $1 < \log_a b < \log_b a$

C. $\log_b a < \log_a b < 1$ **D.** $\log_b a < 1 < \log_a b$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Dựa vào giả thiết $1 < a < b$ nên ta lấy loga hai vế theo cơ số *a* và *b* ta được.

Vì $\begin{cases} a,b > 1 \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \log_a a < \log_a b \\ \log_b a < \log_b b = 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$

Cách 2. Đặc biệt hoá cho *a*, *b* là 1 số cụ thể thoả mãn $1 < a < b$

Không mất tính tổng quát cho $a = 2 < b = 3 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 3 = 1,584962501 > 1 \\ \log_3 2 = 0,6309297536 < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D}$

Ví dụ 3. Cho $0 < x < 1;\ 0 < a;b;c \neq 1$ và $\log_c x > 0 > \log_b x > \log_a x$ so sánh a,b,c ta được kết quả:

A. $a > b > c$ **B.** $c > a > b$ **C.** $c > b > a$ **D.** $b > a > c$

Lời giải

Chọn D

Vì $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$. Do đó:

$$\log_c x > 0 > \log_b x > \log_a x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln c} > 0 > \frac{\ln x}{\ln b} > \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \ln c < 0 < \ln a < \ln b$$

Mà hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên ta suy ra $c < a < b$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính:

a) $\log_{12} 12^3$; b) $\log_{0,5} 0,25$; c) $\log_a a^{-3} (a > 0, a \neq 1)$.

Lời giải

a) $\log_{12} 12^3 = 3$;

b) $\log_{0,5} 0,25 = \log_{0,5} 0,5^2 = 2$;

c) $\log_a a^{-3} = -3$.

Bài 2. Tính:

a) $8^{\log_2 5}$ b) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$ c) $5^{\log_{25} 16}$.

Lời giải

a) $8^{\log_2 5} = 2^{3\log_2 5} = 5^3 = 125$

b) $\frac{1}{10}^{\log 81} = 10^{-1\log 81} = \frac{1}{81}$

c) $5^{\log_{25} 16} = 5^{\log_5 16^{\frac{1}{2}}} = 4$

Bài 3. Cho $\log_a b = 2$. Tính:

a) $\log_a\left(a^2b^3\right)$ b) $\log_a \dfrac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}}$ c) $\log_a(2b)+\log_a\left(\dfrac{b^2}{2}\right)$.

Lời giải

a) $\log_a\left(a^2b^3\right)=\log_a a^2+\log_a b^3=2\log_a a+3\log_a b=2+6=8$

b) $\log_a \dfrac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}}=\log_a a\sqrt{a}-\log_a b\sqrt[3]{b}=\log_a a\cdot a^{\frac{1}{2}}-\log_a b\cdot b^{\frac{1}{3}}=\log_a a^{\frac{3}{2}}\cdot\log_a b^{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}\cdot 2=\dfrac{-7}{6}$

c) $\log_a(2b)+\log_a\left(\dfrac{b^2}{2}\right)=\log_a\left(2b\cdot\dfrac{b^2}{2}\right)=\log_a\dfrac{2b^3}{2}=\log_a b^3=3.2=6$

Bài 4. Cho hai số thực dương a,b thoả mãn $a^3b^2=100$. Tính giá trị của biểu thức $P=3\log a+2\log b$.

Lời giải

$P=3\log a+2\log b=\log a^3+\log b^2=\log\left(a^3\cdot b^2\right)=\log 100=2$

Bài 5. Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $\left[\mathrm{H}^+\right]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $\left[\mathrm{H}^+\right]=8\cdot 10^{-8}$ (*Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com*). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

Lời giải

Ta có $pH=-\log\left[H^+\right]=-\log 8\cdot 10^{-8}\approx 7,1$

=> Độ pH của đầm đó không thích hợp để tôm sú phát triển.

Bài 6. Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5\cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: Câu hỏi và bài tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6\cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Số lượng tế bào đạt tới khối lượng của Trái Đất là:

$N=6.10^{27}:\left(5.10^{-13}\right)=1,2.10^{40}$

Số lần phân chia:

$N=N_o.2^n\Rightarrow n=\dfrac{\log N-\lg N_o}{\lg 2}=133$

Thời gian cần thiết là :

$133:3=44,3$ (giờ)

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 a=x$, $\log_2 b=y$. Tính $P=\log_2\left(a^2b^3\right)$.

A. $P=x^2y^3$ **B.** $P=x^2+y^3$ **C.** $P=6xy$ **D.** $P=2x+3y$

Lời giải

Chọn D

$P=\log_2\left(a^2b^3\right)=\log_2 a^2+\log_2 b^3=2\log_2 a+3\log_2 b=2x+3y$.

Câu 2: Cho $a,b>0$ và $a,b\neq 1$, biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}} b^3.\log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 18. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$P=\log_{\sqrt{a}} b^3.\log_b a^4=\left(6\log_a b\right).\left(4\log_b a\right)=24$.

Câu 3: Cho b là số thực dương khác 1. Tính $P=\log_b\left(b^2.b^{\frac{1}{2}}\right)$.

A. $P=\dfrac{3}{2}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\dfrac{5}{2}$. **D.** $P=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\log_b\left(b^2.b^{\frac{1}{2}}\right)=\log_b b^{\frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}\log_b b=\dfrac{5}{2}$.

Câu 4: Cho $a>0$, $a\neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng

A. $2a$. **B.** 2. **C.** 2^a. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{\log_a a^2}=a^{2\log_a a}=a^2$.

Câu 5: Giá trị biểu thức $A=2^{\log_4 9+\log_2 5}$ là:

A. $A=8$. **B.** $A=15$. **C.** $A=405$. **D.** $A=86$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A=2^{\log_4 9+\log_2 5}=2^{\log_4 9}.2^{\log_2 5}=2^{\log_2 3}.2^{\log_2 5}=3.5=15$.

Câu 6: Cho $a>0,a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\dfrac{1}{a^3}\right)$

A. $P=-9$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=1$. **D.** $P=9$.

Lời giải

Chọn A

• **Tự luận :** $P=\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\dfrac{1}{a^3}\right)=\log_{a^{\frac{1}{3}}} a^{-3}=-9\log_a a=-9$

• **Trắc nghiệm :** Sử dụng máy tính, thay $a=2$ rồi nhập biểu thức $\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)$ vào máy bấm = ta được kết quả $P=-9$.

Câu 7: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Lời giải

Chọn C

$I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2=2\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)=2$.

Câu 8: Cho a là số thực dương và b là số thực khác 0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+\frac{1}{3}\log_3 a-2\log_3|b|$. **B.** $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a-2\log_3 b$.

C. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a-2\log_3|b|$. **D.** $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=1+3\log_3 a+2\log_3 b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)=\log_3\left(3a^3\right)-\log_3 b^2 \;=\log_3 3+\log_3 a^3-\log_3 b$.

$=\log_3 3+\log_3 a^3-\log_3 b \;=1+3\log_3 a-2\log_3|b|$.

Câu 9: Cho $\log 3=a$. Tính $\log 9000$ theo a.

A. $6a$ **B.** a^2+3. **C.** $3a^2$. **D.** $2a+3$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: $\log 9000=\log 9+\log 1000=2\log 3+3=2a+3$.

Cách 2: Gán $\log 3=a$. Tính $\log 9000-(2a+3)=0$.

Câu 10: Cho $\log_6 9=a$. Tính $\log_3 2$ theo a

A. $\frac{a}{2-a}$. **B.** $\frac{a+2}{a}$. **C.** $\frac{a-2}{a}$. **D.** $\frac{2-a}{a}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_6 9=2\log_{2.3}3 \Leftrightarrow a=\frac{2}{\log_3 2.3} \Leftrightarrow \log_3 2+1=\frac{2}{a} \Leftrightarrow \log_3 2=\frac{2-a}{a}$.

Câu 11: Cho $a,b>0$. Rút gọn biểu thức $\log_a b^2+\log_{a^2} b^4$

A. $2\log_a b$ **B.** 0 **C.** $\log_a b$ **D.** $4\log_a b$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = 2\log_a b + \frac{1}{2}.4.\log_a b = 4\log_a b$.

Câu 12: Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. 6. **B.** -6. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{-1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Vì a, b là các số thực lớn hơn 1 nên ta có:

$$\begin{cases} \log_a x = 2 \\ \log_b x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^2 \\ x = b^3 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = b^3 \Leftrightarrow a = \sqrt{b^3} \Leftrightarrow a = b^{\frac{3}{2}}.$$

$$P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \log_{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2}} x = \log_{b^{\frac{-1}{2}}} x = -2\log_b x = -6.$$

Câu 13: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$. **B.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$. **D.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_6 45 = \frac{\log_3\left(5.3^2\right)}{\log_3(2.3)} = \frac{\log_3 5 + 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{\frac{1}{b}+2}{\frac{1}{a}+1} = \frac{a+2ab}{ab+b}.$$

Câu 14: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} \neq b$, $a \neq 1$, $\log_a b = 2$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba}$.

A. $T = -\frac{2}{5}$. **B.** $T = \frac{2}{5}$. **C.** $T = \frac{2}{3}$. **D.** $T = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_a b = 2 \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{2}$.

$$T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba} = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{b} + \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{a} = \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}} \frac{\sqrt{a}}{b}} + \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}} \frac{\sqrt{a}}{b}}.$$

$$= \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}} \sqrt{a} - \log_{\sqrt[3]{b}} b} + \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{a} - \log_{\sqrt[3]{a}} b} = \frac{1}{\frac{3}{2}\log_b a - 3} + \frac{1}{\frac{3}{2} - 3\log_a b}.$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}.\frac{1}{2} - 3} + \frac{1}{\frac{3}{2} - 3.2} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 15: Với $a=\log_2 5$ và $b=\log_3 5$, giá trị của $\log_6 5$ bằng

A. $\dfrac{ab}{a+b}$. **B.** $\dfrac{a+b}{ab}$. **C.** $\dfrac{1}{a+b}$. **D.** $a+b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_6 5=\dfrac{1}{\log_5 6}=\dfrac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{ab}{a+b}$.

Câu 16: Biết $\log(xy^3)=1$ và $\log(x^2y)=1$, tìm $\log(xy)$?

A. $\log(xy)=\dfrac{5}{3}$. **B.** $\log(xy)=\dfrac{1}{2}$. **C.** $\log(xy)=\dfrac{3}{5}$. **D.** $\log(xy)=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log(xy^3)=1\Leftrightarrow \log(xy)+2\log y=1$, $\log(x^2y)=1\Leftrightarrow \log(xy)+\log x=1$

Vậy $\log x=2\log y\Leftrightarrow x=y^2$

Xét $\log(xy^3)=1\Leftrightarrow \log(y^2y^3)=1\Leftrightarrow 5\log y=1\Leftrightarrow y=10^{\frac{1}{5}}$

Vậy $\log(xy)=\log(y^3)=\log\left(10^{\frac{3}{5}}\right)=\dfrac{3}{5}$

Câu 17: Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2}(a^{10}b^2)+\log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ (với $0<a\neq 1;0<b\neq 1$).

A. $P=2$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\sqrt{3}$. **D.** $P=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng các quy tắc biến đổi logarit

$$P=\log_{a^2}(a^{10}b^2)+\log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$$

. $$=\frac{1}{2}\left[\log_a a^{10}+\log_a b^2\right]+2\left[\log_a a-\log_a\sqrt{b}\right]+3.(-2)\log_b b.$$

$$=\frac{1}{2}\left[10+2\log_a b\right]+2\left[1-\frac{1}{2}\log_a b\right]-6=1.$$

Câu 18: Biết $\log_{27}5=a$, $\log_8 7=b$, $\log_2 3=c$ thì $\log_{12}35$ tính theo a, b, c bằng:

A. $\dfrac{3(b+ac)}{c+2}$. **B.** $\dfrac{3b+2ac}{c+1}$. **C.** $\dfrac{3b+2ac}{c+2}$. **D.** $\dfrac{3(b+ac)}{c+1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{27}5=\dfrac{1}{3}\log_3 5=a\Leftrightarrow \log_3 5=3a$, $\log_8 7=\dfrac{1}{3}\log_2 7=b\Leftrightarrow \log_2 7=3b$.

Mà $\log_{12}35=\dfrac{\log_2(7.5)}{\log_2(3.2^2)}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 5}{\log_2 3+2}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 3.\log_3 5}{\log_2 3+2}=\dfrac{3b+c.3a}{c+2}=\dfrac{3(b+ac)}{c+2}$.

Câu 19: Cho $a,b>0$, nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 8. **C.** 2^{18}. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}\log_8 a+\log_4 b^2=5\\ \log_4 a^2+\log_8 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b=5\\ \log_2 a+\dfrac{1}{3}\log_2 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 a=6\\ \log_2 b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2^6\\ b=2^3\end{cases}$.

Vậy $ab=2^9$.

Câu 20: Số nào trong các số sau lớn hơn 1

A. $\log_{0,5}\dfrac{1}{8}$. **B.** $\log_{0,2}125$. **C.** $\log_{\frac{1}{6}}36$. **D.** $\log_{0,5}\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\log_{0,5}\dfrac{1}{8}=\log_{2^{-1}}2^{-3}=3>1$, $\log_{0,2}125=\log_{5^{-1}}5^3=-3<1$.

$\log_{\frac{1}{6}}36=\log_{6^{-1}}6^2=-2<1$, $\log_{0,5}\dfrac{1}{2}=\log_{0,5}0,5=1$.

Câu 21: .Cho a, b là các số thực, thỏa mãn $0<a<1<b$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_b a+\log_a b<0$. **B.** $\log_b a>1$.

C. $\log_a b>0$. **D.** $\log_a b+\log_b a\geq 2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $0<a<1<b$ nên $\log_b a<\log_b 1\Leftrightarrow\log_b a<0$ và $\log_a b<\log_a 1\Leftrightarrow\log_a b<0$.

Suy ra : $\log_b a+\log_a b<0$.

Câu 22: Cho các số thực a, b thỏa mãn $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{\log_a b}<1<\dfrac{1}{\log_b a}$. **B.** $\dfrac{1}{\log_b a}<1<\dfrac{1}{\log_a b}$.

C. $1<\dfrac{1}{\log_a b}<\dfrac{1}{\log_b a}$. **D.** $\dfrac{1}{\log_a b}<\dfrac{1}{\log_b a}<1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $1<a<b$ nên ta có $\log_b a<\log_b b\Leftrightarrow\log_b a<1$ và $\log_a a<\log_a b\Leftrightarrow 1<\log_a b$.

Do đó $\log_b a < 1 < \log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} < 1 < \frac{1}{\log_b a}$.

Câu 23: Cho $0 < a < b < 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_b a > \log_a b$. **B.** $\log_b a < \log_a b$. **C.** $\log_a b > 1$. **D.** $\log_a b < 0$.

Lời giải

Chọn A

Do $0 < a < 1$ nên hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đáp án B sai, vì: Với $b < 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b > 0$.

Đáp án D sai, vì: Với $a < b \Rightarrow \log_a a > \log_a b \Leftrightarrow \log_a b < 1$.

Với $0 < a < b < 1$ ta có $0 < \log_a b < 1$.

Đáp án C sai, vì: Nếu $\log_b a < \log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} < \log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2 > 1$ (vô lí).

Đáp án A đúng, vì: Nếu $\log_b a > \log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} > \log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2 < 1$ (luôn đúng).

Câu 24: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_3 5 > 0$. **B.** $\log_{2+x^2} 2016 < \log_{2+x^2} 2017$.

C. $\log_{0,3} 0,8 < 0$. **D.** $\log_3 4 > \log_4 \left(\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{0,3} 0,8 < 0 \Leftrightarrow 0,8 > 0,3^0 \Leftrightarrow 0,8 > 1$ (sai)

Câu 25: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_3 \pi = 1$. **B.** $\ln 3 < \log_3 e$. **C.** $\log_3 5 > \log_7 4$. **D.** $\log_{\frac{1}{2}} 2 > 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3 5 > \log_3 3 \Rightarrow \log_3 5 > 1$

$\log_7 4 < \log_7 7 \Rightarrow \log_7 4 < 1$

Vậy: $\log_3 5 > \log_7 4$.

Câu 26: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < b < 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\log_b a < 0$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -2$. **D.** $\log_a b > 1$.

Lời giải

Chọn B

Vì $0 < a < b < 1$ nên

❍ $\log_b a > \log_b b = 1 \Rightarrow$ A sai.

❍ $\Leftrightarrow x + 2y + 5z - 5 = 0 \Rightarrow \log_b a > \log_a b \Rightarrow$ B đúng, C sai.

❍ $\log_a a > \log_a b \Leftrightarrow \log_a b < 1 \Rightarrow$ D sai.

Câu 27: Cho hai số thực a,b thỏa mãn điều kiện $0<a<b<1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1<\log_a b<\log_b a$. **B.** $\log_a b<1<\log_b a$.

C. $1<\log_b a<\log_a b$. **D.** $\log_b a<1<\log_a b$.

Lời giải

Chọn B

Do $0<a<1$ nên với $a<b$ ta có: $1=\log_a a>\log_a b \Rightarrow \log_a b<1$.

Tương tự do $0<b<1$ nên với $a<b$ ta có: $\log_b a>\log_b b=1$.

Vậy $\log_a b<1<\log_b a$.

Câu 28: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{e}{2}} a<\log_{\frac{e}{2}} b$. **B.** Nếu $0<a<b$ thì $\log a<\log b$.

C. Nếu $0<a<b$ thì $\ln a<\ln b$. **D.** Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a<\log_{\frac{\pi}{4}} b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a>\log_{\frac{\pi}{4}} b$ do $\frac{\pi}{4}<1$.

Câu 29: Gọi $a=3^{\log_{0,5}4};b=3^{\log_{0,5}13}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a<1<b$. **B.** $b<a<1$. **C.** $a<b<1$. **D.** $b<1<a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a=3^{\log_{0,5}4}<3^{\log_{0,5}1}=1$, $b=3^{\log_{0,5}13}<3^{\log_{0,5}1}=1$ (1)

Lại có $3^{\log_{0,5}13}<3^{\log_{0,5}4}$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow$ $b<a<1$

Câu 30: Giả sử x,y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$

B. $\log_2 \sqrt{xy}=\frac{1}{2}\left(\log_2 x+\log_2 y\right)$

C. $\log_2 \frac{x}{y}=\log_2 x-\log_2 y$

D. $\log_2\left(x+y\right)=\log_2 x+\log_2 y$

Lời giải

Chọn D

Do $\log_2 x+\log_2 y=\log_2\left(xy\right)$.

Câu 31: Cho hai số thực dương a và b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}\left(ab\right)=2+2\log_a b$. **B.** $\log_{a^2}\left(ab\right)=\frac{1}{2}\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$. **D.** $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$.

Lời giải

Chọn C

Với $a,\ b > 0$ và $a \neq 1$, ta có

$$\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b..$$

Câu 32: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln\frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. **C.** $\ln(ab) = \ln a . \ln b$. **D.** $\ln\frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 33: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$. **B.** $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$. **D.** $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ nên C đúng.

Câu 34: Giả sử ta có hệ thức $a^2 + b^2 = 7ab\ (a, b > 0)$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $2\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b.$ **B.** $2\log_2\frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b.$

C. $\log_2\frac{a+b}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b).$ **D.** $4\log_2\frac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b.$

Lời giải

Chọn B

+) $2\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \log_2(a+b)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -ab$

+) $2\log_2\frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 7ab$.

Câu 35: Cho $a,\ b$ là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\ln\frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$. **B.** $2\log_2(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

C. $2\log_4(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$. **D.** $2\log\frac{a+b}{4} = \log a + \log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2+b^2=14ab \Leftrightarrow (a+b)^2=16ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4}\right)ab$

Nên ta có $\ln\frac{a+b}{4}=\ln\sqrt{ab}=\frac{\ln a+\ln b}{2}$ vậy A đúng

$2\log_2(a+b)=\log_2(a+b)^2=\log_2(16ab)=4+\log_2 a+\log_2 b$ vậy B đúng

$2\log_4(a+b)=\log_4(a+b)^2=\log_4(16ab)=2+\log_4 a+\log_4 b$ vậy C sai

$2\log\frac{a+b}{4}=\log_2 a+\log_2 b$ vậy D đúng

Cách 2:.

Câu này ý **C** sai vì $2\log_4(a+b)=4+\log_4 a+\log_4 b \Leftrightarrow \log_4(a+b)^2=4\log_4 4+\log_4 ab$

$\Leftrightarrow \log_4(a+b)^2=\log_4 4^4+\log_4 ab=\log_4 64ab \Leftrightarrow (a+b)^2=64ab$.

Câu 36: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $3\log a+2\log b=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a^3+b^2=1$. **B.** $3a+2b=10$. **C.** $a^3b^2=10$. **D.** $a^3+b^2=10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3\log a+2\log b=1 \Leftrightarrow \log a^3+\log b^2=1 \Leftrightarrow \log\left(a^3b^2\right)=1 \Leftrightarrow a^3b^2=10$.

Câu 37: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. $\log_2\frac{9a^2}{b^3}=2+2\log_2 a-3\log_2 b$. **B.** $\ln\frac{9a^2}{b^3}=2\ln 3+2\ln a-3\ln b$.

C. $\log\frac{9a^2}{b^3}=2\log 3+2\log a-3\log b$. **D.** $\log_3\frac{9a^2}{b^3}=2+2\log_3 a-3\log_3 b$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy $\log_2\frac{9a^2}{b^3}=\log_2\left(9a^2\right)-\log_2 b^3$

$=\log_2 9+\log_2 a^2-\log_2 b^3=2\log_2 3+2\log_2 a-3\log_2 b$

Vậy B, C, D đúng.

Câu 38: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. **B.** $\ln\frac{a}{b}=\ln b-\ln a$. **C.** $\ln(ab)=\ln a.\ln b$. **D.** $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 39: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$. **B.** $\log_a b=\frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$. **D.** $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ nên C đúng.

Câu 40: Cho $P=\log_{a^4}b^2$ với $0<a\neq 1$ và $b<0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P=-2\log_a(-b)$. **B.** $P=2\log_a(-b)$.

C. $P=-\dfrac{1}{2}\log_a(-b)$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}\log_a(-b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=\log_{a^4}b^2=2.\dfrac{1}{4}\log_{|a|}|b|=\dfrac{1}{2}\log_a(-b)$ (Do $0<a\neq 1$ và $b<0$).

Câu 41: Cho $a>0$, $b>0$ và $a^2+b^2=7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a+\ln b)=\ln(7ab)$. **B.** $3\ln(a+b)=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.

C. $\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right)=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$. **D.** $\ln(a+b)=\dfrac{3}{2}(\ln a+\ln b)$.

Lời giải

Chọn C

Với $a>0$, $b>0$, ta có $a^2+b^2=7ab\Leftrightarrow(a+b)^2=9ab$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2=ab\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2=\ln(ab)$

$\Leftrightarrow 2\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right)=\ln a+\ln b\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right)=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.

Câu 42: Cho các số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\log_{\sqrt{2}}(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$. **B.** $\log_2(a+b)^2=4(\log_2 a+\log_2 b)$.

C. $\log_2\left(\dfrac{a+b}{4}\right)=2(\log_2 a+\log_2 b)$. **D.** $\log_2\left(\dfrac{a+b}{16}\right)=\dfrac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^2+b^2=14ab\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=16ab\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab\Leftrightarrow\left(\dfrac{a+b}{4}\right)^2=ab$.

$\Rightarrow \log_2\left(\dfrac{a+b}{4}\right)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow 2\log_2(a+b) - 2\log_2 4 = \log_2 a + \log_2 b$.

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

Câu 43: Cho $\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1$, với $y > 0, y > x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $3x = 4y$. **B.** $x = 3y$. **C.** $x = \dfrac{3}{4}y$. **D.** $y = \dfrac{3}{4}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow -\log_4(y-x) + \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 y = 1 + \log_4(y-x)$

$\Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 4.(y-x) \Leftrightarrow y = 4(y-x) \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}y$.

Câu 44: Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$. **B.** $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$.

C. $\log(a+b) = \dfrac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$. **D.** $\log(a+b) = \dfrac{1}{2} + \log a + \log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab$.

Hay ta có $\log(a+b)^2 = \log 10ab \Leftrightarrow 2\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$

$\Leftrightarrow \log(a+b) = \dfrac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$.

Câu 45: Cho $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy$, với $xy > 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $x > y$. **B.** $x < y$. **C.** $x = y$. **D.** $x = y^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy \Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = y$.

Câu 46: Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. $P = -6$. **B.** $P = \dfrac{1}{6}$. **C.** $P = -\dfrac{1}{6}$. **D.** $P = 6$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\log_a x = 2, \log_b x = 3 \Rightarrow x = a^2 = b^3 \Rightarrow a = b^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{a}{b^2} = \dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2} = b^{\frac{-1}{2}}$.

Do đó $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \log_{b^{\frac{-1}{2}}} x = -2\log_b x = -2.3 = -6$.

Cách 2: $\log_a x = 2 \Rightarrow x = a^2 > 1$. $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3 \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2}$, $\log_x b = \frac{1}{3}$.

Khi đó $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \dfrac{1}{\log_x \frac{a}{b^2}} = \dfrac{1}{\log_x a - 2\log_x b} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - 2.\frac{1}{3}} = -6$.

Câu 47: Với các số thực a, $b > 0$ bất kì, rút gọn biểu thức $P = 2\log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2$ ta được

A. $P = \log_2\left(2ab^2\right)$. **B.** $P = \log_2\left(ab\right)^2$.

C. $P = \log_2\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **D.** $P = \log_2\left(\frac{2a}{b^2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $P = 2\log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2 = \log_2 a^2 + \log_2 b^2 = \log_2\left(ab\right)^2$.

$P = \sqrt{2014}$.

Câu 48: Với các số thực dương a, b bất kì, đặt $M = \left(\dfrac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log M = -3\log a + \frac{1}{2}\log b$. **B.** $\log M = -3\log a - \frac{1}{2}\log b$.

C. $\log M = -3\log a + 2\log b$. **D.** $\log M = 3\log a + 2\log b$.

Hướngdẫngiải

Chọn A.

$$M = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3} = \left(\frac{a^{10}}{b^{\frac{5}{3}}}\right)^{-0,3} = \frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}$$

$$\Rightarrow \log M = \log\left(\frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}\right) = \log a^{-3} - \log b^{-0,5} = -3\log a + \frac{1}{2}\log b$$

Câu 49: Cho $a,b > 0, a \neq 1, ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**.

A. $\log_{ab} a = \dfrac{1}{1+\log_a b}$. **B.** $\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1+\log_a b)$.

C. $\log_{a^2}\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{4}(1-\log_a b)$. **D.** $\log_{\sqrt{a}}(ab^2) = 4(1+\log_a b)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{ab} a = \frac{1}{\log_a ab} = \frac{1}{\log_a a + \log_a b} = \frac{1}{1+\log_a b}.$$

$$\log_a \sqrt{ab} = \log_a (ab)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+\log_a b).$$

$$\log_{a^2}\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left(\log_a a-\log_a b\right)=\frac{1}{4}\left(1-\log_a b\right)$$

Câu 50: Cho các số thực dương a,x,y, a khác 1. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\log x=\dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$. **B.** $\log x=\dfrac{\log_a x}{\log_a \mathrm{e}}$.

C. $\log x=\dfrac{\log_a x}{\ln 10}$. **D.** $\log x=\dfrac{\log_x a}{\log a}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log x=\dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$.

Câu 51: Cho các số thực dương $a,\ b,\ x$ thỏa mãn $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x=4a+7b$. **B.** $x=4a-7b$. **C.** $x=a^4b^7$. **D.** $x=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{7}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b\Leftrightarrow \log_3 x=\log_3 a^4+\log_3 b^7\Leftrightarrow \log_3 x=\log_3\left(a^4b^7\right)\Leftrightarrow x=a^4b^7$.

Câu 52: Cho $a>1,a\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_2\left(\log_4 x\right)=\log_4\left(\log_2 x\right)+a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 x=4^a$. **B.** $\log_2 x=a+1$. **C.** $\log_2 x=2^{a+1}$. **D.** $\log_2 x=4^{a+1}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_2 x\Rightarrow \log_4 x=\dfrac{1}{2}t$. Ta có: $\log_2\left(\dfrac{1}{2}t\right)=\log_4 t+a\Leftrightarrow \log_2 t=2a+2\Leftrightarrow t=4^{a+1}$.

Vậy: $\log_2 x=4^{a+1}$.

Câu 53: Cho $\log_a bc=x,\log_b ca=y$ và $\log_c ab=\dfrac{mx+ny+2}{pxy-1}$, với m,n,p là các số nguyên. Tính $S=m+2n+3p$

A. $S=6$. **B.** $S=9$. **C.** $S=0$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases}x=\log_a bc\\ y=\log_b ca\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\log_c bc}{\log_c a}\\ y=\dfrac{\log_c ca}{\log_c b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\log_c a-\log_c b=1\\ \log_c a-y\log_c b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_c a=\dfrac{y+1}{xy-1}\\ \log_c b=\dfrac{x+1}{xy-1}\end{cases}$.

Mặt khác, $\log_c ab=\log_c a+\log_c b=\dfrac{x+y+2}{xy-1}$. Do đó $\begin{cases}m=1\\ n=1\\ p=1\end{cases}\Rightarrow S=m+2n+3p=6$.

Câu 54: Cho hai số thực dương a,b và $a\neq 1$ thỏa mãn $\log_2 a=\frac{b}{4},\log_a b=\frac{16}{b}$. Tính ab?

A. $ab=256$. **B.** $ab=16$. **C.** $ab=32$. **D.** $ab=64$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2 a.\log_a b=\frac{b}{4}.\frac{16}{b}\Leftrightarrow \log_2 b=4\Leftrightarrow b=2^4\Leftrightarrow b=16$

$\Rightarrow \log_2 a=4\Leftrightarrow a=16\Rightarrow a.b=16^2\Leftrightarrow ab=256$.

Câu 55: Cho $\log_a(bc)=2,\log_b(ca)=3$. Tính $S=\log_c(ab)$.

A. $S=\frac{7}{5}$. **B.** $S=\frac{7}{6}$. **C.** $S=\frac{5}{7}$. **D.** $S=\frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=\log_c a,y=\log_c b$.

Ta có $\log_a(bc)=2\Leftrightarrow \log_a b+\log_a c=2\Leftrightarrow \frac{\log_c b}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c a}=2\Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{1}{x}=2$.

$\log_b(ca)=3\Leftrightarrow \log_b c+\log_b a=3\Leftrightarrow \frac{\log_c a}{\log_c b}+\frac{1}{\log_c b}=3\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{1}{y}=3$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}\frac{y+1}{x}=2\\ \frac{x+1}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y+1=2x\\ x+1=3y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{4}{5}\\ y=\frac{3}{5}\end{cases}$.

Thay vào $S=\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b=\frac{7}{5}$.

Câu 56: Cho các số thực dương a,b khác 1 và số thực dương x thỏa mãn $\log_a(\log_b x)=\log_b(\log_a x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_a x=b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$. **B.** $\log_a x=a^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$. **C.** $\log_a x=b^{\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)}$. **D.** $\log_a x=a^{\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_a(\log_b x)=\log_b(\log_a x)=k\Leftrightarrow \begin{cases}\log_b x=a^k\\ \log_a x=b^k\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=b^{a^k}\\ x=a^{b^k}\end{cases}\Rightarrow b^{a^k}=a^{b^k}=a^k\log_a b\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^k=\log_a b\Leftrightarrow k=\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)\Rightarrow \log_a x=b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$

Câu 57: Cho $0<a\neq 1$ tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\log_a 2019+2^2\log_{\sqrt{a}}2019+3^2\log_{\sqrt[3]{a}}2019+...+n^2\log_{\sqrt[n]{a}}2019=1008.2017^2\log_a 2019$

A. $n=2016$. **B.** $n=2019$. **C.** $n=2017$. **D.** $n=2020$.

Lời giải

Chọn A

$\log_a 2019+2^3\log_a 2019+3^3\log_a 2019+...+n^3\log_a 2019=1008^2.2017^2\log_a 2019$

$\Leftrightarrow \left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)\log_a 2019=1008^2.2017^2\log_a 2019$

$\Leftrightarrow \left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)=1008^2.2017^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2=1008^2.2017^2 \Leftrightarrow n=2016$

Câu 58: Với a là số dương tùy ý, $\ln(5a)-\ln(3a)$ bằng:

A. $\dfrac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. **B.** $\ln(2a)$. **C.** $\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\ln(5a)-\ln(3a)=\ln\dfrac{5a}{3a}=\ln\dfrac{5}{3}$.

Câu 59: Cho ba số thực dương a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a+b+c=64$. Giá trị của biểu thức $P=3\log_2(ab+bc+ca)-\log_2(abc)$ bằng:

A. 18. **B.** 6. **C.** 24. **D.** 8

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} ac=b^2 \\ abc=b^3 \\ ab+bc+ca=b(a+c)+ca=b(64-b)+b^2=64b \end{cases}$.

Do đó $P=3\log_2(64b)-\log_2 b^3=3\log_2 64=3.6=18$.

Câu 60: Cho 3 số $2017+\log_2 a;\ 2018+\log_3 a;\ 2019+\log_4 a;$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Công sai của cấp số cộng này bằng:

A. 1. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Do 3 số $2017+\log_2 a;\ 2018+\log_3 a;\ 2019+\log_4 a;$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Suy ra

$2017+\log_2 a+2019+\log_4 a=2\left(2018+\log_3 a\right)$

$\Leftrightarrow \log_2 a+\dfrac{1}{2}\log_2 a=2\log_3 a \Leftrightarrow 3\log_2 a=4\log_3 a \Leftrightarrow \log_2 a\left(3-4\log_3 2\right)=0 \Leftrightarrow a=1.$

Vậy công sai $d=\log_3 a-\log_2 a+1=1$.

Câu 61: cho các số thực dương a,b,c lớn hơn 1, đặt $x=\log_a b+\log_b a, y=\log_b c+\log_c b$ và $z=\log_c a+\log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2+y^2+z^2-xyz$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $xyz=\left(\log_c b+\log_b c\right)\left(\log_a c+\log_c a\right)\left(\log_b a+\log_a b\right)$

$=\left(\log_a b\right)^2+\left(\log_a c\right)^2+\left(\log_b c\right)^2+\left(\log_c b\right)^2+\left(\log_c a\right)^2+\left(\log_b a\right)^2+2\ (1)$

$x^2+y^2+z^2=\left(\log_c b+\log_b c\right)^2+\left(\log_a c+\log_c a\right)^2+\left(\log_b a+\log_a b\right)^2$

$=\left(\log_a b\right)^2+\left(\log_a c\right)^2+\left(\log_b c\right)^2+\left(\log_c b\right)^2+\left(\log_c a\right)^2+\left(\log_b a\right)^2+6\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2+y^2+z^2-xyz=4$.

Câu 62: Tìm số tự nhiên n thoả mãn $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{120}{\log_3 x}$ với $0<x\neq 1$

A. $n=15$. **B.** $n=20$. **C.** $n=12$. **D.** $n=10$.

Lời giải

Chọn A

Do $0<x\neq 1$ nên ta có:

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\log_x\left(3.3^2....3^n\right)=\log_x 3^{1+2+\cdots+n}=\frac{n.(n+1)}{2}\cdot\log_x 3$$

Vậy ta có: $\frac{n.(n+1)}{2}=120 \Leftrightarrow n=15$

Câu 63: Với mỗi số thực dương x, khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $[\log x]+1$. Cho biết $\log 2=0,30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

A. 607. **B.** 606. **C.** 609. **D.** 608.

Lời giải

Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

$\left[\log\left(2^{2017}\right)\right]+1=\left[2017\times\log 2\right]+1=\left[2017\times 0,30103\right]+1=\left[607,17751\right]+1=608$.

Câu 64: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=10^{81}$ và $\left(\log_{10}x\right).\left(\log_{10}yz\right)+\left(\log_{10}y\right)\left(\log_{10}z\right)=468$. Tính giá trị của biểu thức $S=\sqrt{\left(\log_{10}x\right)^2+\left(\log_{10}y\right)^2+\left(\log_{10}z\right)^2}$.

A. 75. **B.** 936. **C.** 625. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}a=\log_{10}x\\ b=\log_{10}y\\ c=\log_{10}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10^a\\ y=10^b\\ z=10^c\end{cases}\Rightarrow xyz=10^{a+b+c}$.

Theo bài ta có: $\begin{cases}xyz=10^{81}\\ \left(\log_{10}x\right).\left(\log_{10}yz\right)+\left(\log_{10}y\right)\left(\log_{10}z\right)=468\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=81\\ ab+ac+bc=468\end{cases}\quad (1)$.

Vậy thay (1) vào ta có $S=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)}=\sqrt{81^2-2.468}=75$.

Câu 65: Cho hai số thực dương $x,y\neq 1$ thỏa mãn $\log_x y=\log_y x$ và $\log_x(x-y)=\log_y(x+y)$. Tính giá trị biểu thức $S=x^4-x^2+1$.

A. $S=2$. **B.** $S=3$. **C.** $S=4$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x,y\neq 1\\ x>y>0\end{cases}$. Ta có:

$$\log_x y=\log_y x\Leftrightarrow \log_x y=\frac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow (\log_x y)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_x y=1\text{ (L)}\\ \log_x y=-1\text{ (TM)}\end{array}\right.\Leftrightarrow y=x^{-1}\Leftrightarrow y=\frac{1}{x}.$$

Ta có: $\log_x(x-y)=\log_y(x+y)\Leftrightarrow \log_x\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\log_x\left(x+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow \log_x\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=1\Leftrightarrow x^4-x^2-1=0$. Vậy $S=x^4-x^2+1=1+1=2$.

Câu 66: Có hai cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{225}x+\log_{64}y=4$ và $\log_x 225-\log_y 64=1$ là $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Giá trị biểu thức $\log_{30}(x_1y_1x_2y_2)$ bằng:

A. 12. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 36.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra: $\log_x 225-\log_y 64=1$. Đặt $\begin{cases}X=\log_{225}x\\ Y=\log_{64}y\end{cases}$ ta được hệ:

$$\begin{cases}X+Y=4\\ \frac{1}{X}-\frac{1}{Y}=1\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{X}-\frac{1}{4-X}=1\Leftrightarrow 4-2X=X(4-X)\Leftrightarrow X^2-6X+4=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=3+\sqrt{5}\quad\Rightarrow Y=1-\sqrt{5}\\ X=3-\sqrt{5}\quad\Rightarrow Y=1+\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Với $\begin{cases}X=3+\sqrt{5}\\ Y=1-\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=225^{3+\sqrt{5}}\\ y_1=64^{1-\sqrt{5}}\end{cases}$ Với $\begin{cases}X=3-\sqrt{5}\\ Y=1+\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=225^{3-\sqrt{5}}\\ y_2=64^{1+\sqrt{5}}\end{cases}$

Khi đó: $\log_{30}(x_1y_1x_2y_2)=\log_{30}(225^6.64^2)=12$

Câu 67: Tìm tập hợp tất cả các số thực m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2)=1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $\{\pm 5\}$. **B.** $\{\pm 7,\pm 5,\pm 1\}$. **C.** $\{\pm 5,\pm 1\}$. **D.** $\{\pm 1\}$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y+1=0 \\ 4x+4y-6+m^2=x^2+y^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=4 \quad (1) \\ (x-2)^2+(y-2)^2=m^2 \, (2) \end{cases}$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1;2)$, bán kính $R_1=2$

và phương trình (2) là phương trình đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=|m|$

Cặp số thực $(x;y)$ tồn tại duy nhất khi và chỉ khi (C_1), (C_2) tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong

$(R_1=R_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I_1I_2=R_1+R_2 \\ \begin{cases} I_1I_2=|R_1-R_2| \\ R_1 \neq R_2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3=|m|+2 \\ \begin{cases} 3=||m|-2| \\ |m| \neq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm 5 \end{array}\right.$.

Câu 68: cho các số thực dương a,b,c lớn hơn 1, đặt $x=\log_a b+\log_b a, y=\log_b c+\log_c b$ và $z=\log_c a+\log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2+y^2+z^2-xyz$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $xyz=(\log_c b+\log_b c)(\log_a c+\log_c a)(\log_b a+\log_a b)$

$=(\log_a b)^2+(\log_a c)^2+(\log_b c)^2+(\log_c b)^2+(\log_c a)^2+(\log_b a)^2+2 \quad (1)$

$x^2+y^2+z^2=(\log_c b+\log_b c)^2+(\log_a c+\log_c a)^2+(\log_b a+\log_a b)^2$

$=(\log_a b)^2+(\log_a c)^2+(\log_b c)^2+(\log_c b)^2+(\log_c a)^2+(\log_b a)^2+6 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2+y^2+z^2-xyz=4$.

Câu 69: Với mỗi số thực dương x, khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $[\log x]+1$. Cho biết $\log 2=0{,}30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

A. 607. **B.** 606. **C.** 609. **D.** 608.

Lời giải

Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

$\left[\log\left(2^{2017}\right)\right]+1=[2017\times\log 2]+1=[2017\times 0{,}30103]+1=[607{,}17751]+1=608$.

BÀI 3. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

Một doanh nghiệp gửi ngân hàng 1 tỉ đồng với kì hạn 1 năm, lãi suất 6,2%/năm. Giả sử trong suốt n năm $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$, doanh nghiệp đó không rút tiền ra và số tiền lãi sau mỗi năm sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian này.

Mối liên hệ giũa số tiền doanh nghiệp đó có đượ (cả gốc và lãi) với số năm gửi ngân hàng gọi nên hàm số nào trong toán học?

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

HĐ 1: Xét bài toán ở phần mở đầu.

a) Tính số tiền doanh nghiệp đó có được sau 1 năm, 2 năm, 3 năm;

b) Dự đoán công thức tính số tiền doanh nghiệp đó có được sau n năm.

Lời giải

Sau 1 năm: $1.(1+0,062)^1=1,062$ tỷ đồng.

Sau 2 năm: $1.(1+0,062)^2=1,126\ 084$ tỷ đồng.

Sau 3 năm: $1.(1+0,062)^3=1,193\ 742$ tỷ đồng

Nhận xét: Tương ứng mỗi giá trị x với giá trị $y=(1,062)^x$ xác định một hàm số, hàm số đó gọi là hàm số mũ cơ số $1,062$.

Cho số thực $a(a>0, a \neq 1)$. Hàm số $y=a^x$ được gọi là hàm số mũ cở số a.

Tập xác định của hàm số mũ $y=a^x(a>0, a \neq 1)$ là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số mũ?

a) $y=x^2$

b) $y=(\sqrt{3})^x$;

c) $y=\frac{1}{x}$

d) $y=x^{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y=(\sqrt{3})^x$ là có dạng $y=a^x$ với $a=\sqrt{3}$ nên $y=(\sqrt{3})^x$ là hàm số mũ. số mũ.

Luyện tập 1. Cho hai ví dụ về hàm số mũ

Lời giải

$y=2^x$;   y= 3^x

2. Đồ thị và tính chất

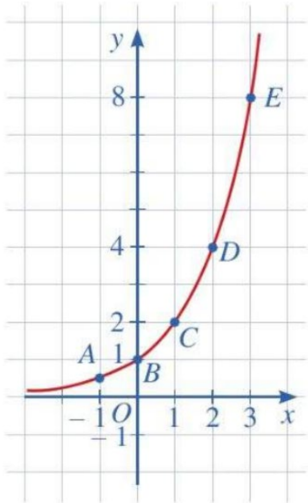
HĐ 2. Cho hàm số mũ $y=2^x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-1	0	1	2	3
y	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm trong bảng giá trị ở câu a.

Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $\left(x;2^x\right)$ với $x\in\mathbb{R}$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y=2^x$ (Hình 1).



Hình 1

c) Cho biết tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=2^x$ với trục tung và vị trí của đồ thị hàm số đó so với trục hoành.

d) Quan sát đồ thị hàm số $y=2^x$, nêu nhận xét về:

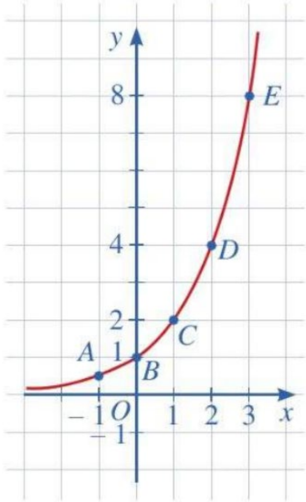
- $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$
- Sự biến thiên của hàm số $y=2^x$ và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Lời giải

a)

x	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biểu diễn nhiều điểm $\left(x;2^x\right)$ với $x\in\mathbb{R}$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y=2^x$ (Hình 1).



Hình 1

c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi lên kể từ trái sang phải.

d) Quan sát đồ thị hàm số $y=2^x$, nêu nhận xét về:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$
- Sự biến thiên của hàm số $y=2^x$: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số đó

x	$-\infty$	....	-1	0	1	2	3	....	$+\infty$
$y=2^x$	0	.....	0,5	1	2	4	8	....	$+\infty$

Nhận xét : Đồ thị hàm số $y=2^x$ là một đường cong liền nét, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi lên kể từ trái sang phải.

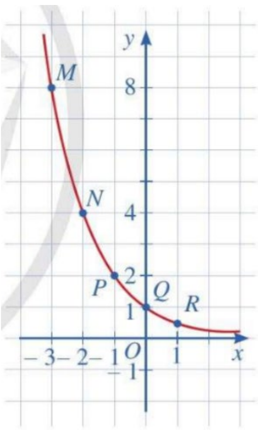
HĐ 3. Cho hàm số mũ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-3	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm $(x;y)$ trong bảng giá trị ở câu a.

Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $\left(x;\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$ với $x\in\mathbb{R}$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (Hình 2).



Hình 2

c) Cho biết tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ với trục tung và vị trí của đồ thị hàm số đó so với trục hoành.

d) Quan sát đồ thị hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, nêu nhận xét về:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$
- Sự biến thiên của hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ và lập bảng biến thiên của hàm số đó

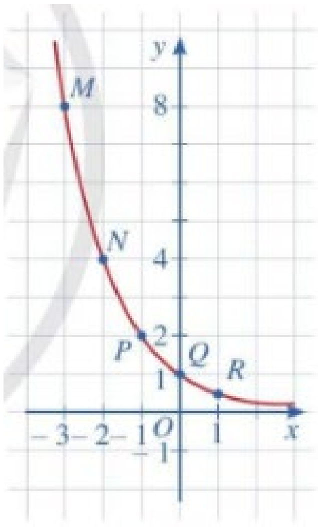
Lời giải

a)

x	-3	-2	-1	0	1
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biểu diễn các điểm $(x;y)$ trong bảng giá trị ở câu a.

làm tương tự, lấy nhiều điểm $\left(x;\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$ với $x\in\mathbb{R}$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (Hình 2).



Hình 2

c) Đồ thị cắt trung tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi xuống kể từ trái sang phải.

d) Quan sát đồ thị hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, nhận xét về:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=-\infty$

- Sự biến thiên của hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

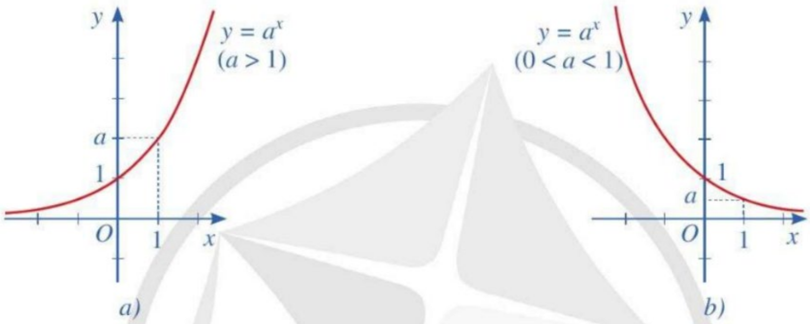
Ta có bảng biến thiên của hàm số đó

x	$-\infty$	….	-1	0	1	2	3	…….	$+\infty$
$y=2^x$	$+\infty$	…..	2	1	0,5	0,25	0,125	……..	0

Nhận xét : Đồ thị hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ là một đường cong liền nét, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi xuống kể từ trái sang phải.

Trong trường hợp tổng quát, ta có nhận xét sau (Hình 3):

Đồ thị hàm số $y=a^x (a>0, a\neq 1)$ là một đường cong liền nét, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi lên nếu $a>1$, đi xuống nếu $0<a<1$.



Hình 3

Nhận xét : Cho hàm số mũ $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$.

<table>
<tr><th>$y = a^x (a > 1)$</th><th>$y = a^x (0 < a < 1)$</th></tr>
<tr>
<td>
Tập xác định: $\mathbb{R}$; tập giá trị: $(0;+\infty)$.

Tính liên tục
Hàm số $y = a^x (a > 1)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giới hạn đặc biệt
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$
Sự biến thiên
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

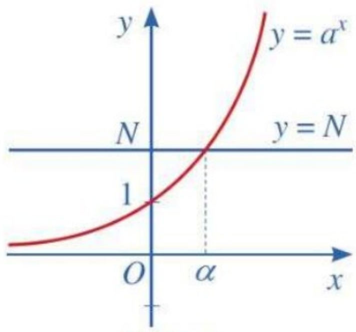
Bảng biến thiên
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$y = a^x$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
Tập xác định: $\mathbb{R}$; tập giá trị: $(0;+\infty)$.

Tính liên tục
Hàm số $y = a^x (0 < a < 1)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giới hạn đặc biệt
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$
Sự biến thiên
Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$y = a^x$</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Chú ý : Từ tính liên tục và sự biến thiên của hàm số mũ, ta có thể chứng minh được mệnh đề sau: Với mỗi $N > 0$, đường thẳng $y = N$ cắt đồ thị hàm số mũ $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ tại một và chỉ một điểm (Hình 4). Nói cách khác, ta có: Với mỗi $N > 0$, tồn tại duy nhất số thực α sao cho $a^\alpha = N$.



Hình 4

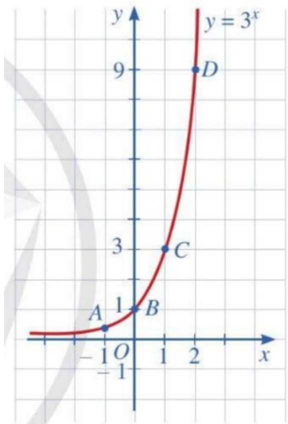
Ví dụ 2 : Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=3^x$

Lời giải

Vì hàm số $y=3^x$ có cở số $3>1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y=3^x$	0	1	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y=3^x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(-1;\dfrac{1}{3}\right),B(0;1),C(1;3),D(2;9)$ (Hình 5).



Hình 5

Ví dụ 3 : Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m(t)=m_0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ bạn đầu (tại thời điểm $t=0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12 , NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày là :

$$m(100)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{138}}\approx 60,5(\text{ g})$$

II. HÀM SỐ LÔGARIT

1.Định nghĩa

HĐ 4: Tìm giá trị y tương ứng với giá trị x trong bảng sau:

x	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	?	?	?	?

Lời giải

x	1	2	4	8
$=\log_2 x$	0	1	2	3

Nhận xét: Tương ứng với mỗi giá trị x dương với giá trị $y=\log_2 x$ xác định một hàm số, hàm số đó gọi là hàm số logarit cơ số 2.

Ta có định nghĩa sau:

> Cho số thực $a\left(a>0,a\neq 1\right)$. Hàm số $y=\log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

Tập xác định của hàm số lôgarit $y=\log_a x\left(a>0,a\neq 1\right)$ là $\left(0;+\infty\right)$.

Ví dụ 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lôgarit?

a) $y=\log_x 5$;

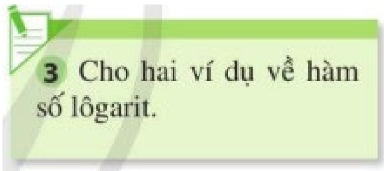
b) $y=\log_x e$;

c) $y=\log_5 x$;

d) $y=x^5$.

Giải

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y=\log_5 x$ là có dạng hàm số lôgarit $y=\log_a x$ $\left(a=5>0,a\neq 1\right)$. Vậy hàm số $y=\log_5 x$ là hàm số lôgarit.



Lời giải

(1) $y=\log_4 x$

(2) $y=\log_6 x$

2. Đồ thị và tính chất

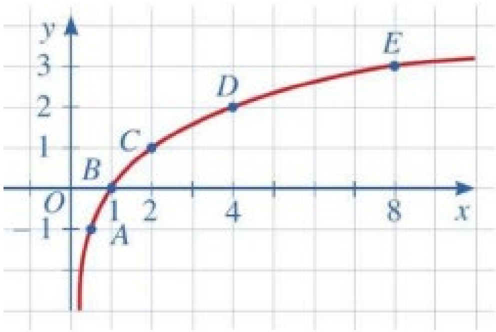
HĐ 5: Cho hàm số lôgarit $y=\log_2 x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị x trong bảng sau:

x	0,5	1	2	4	8
y	?	.?.	?	?	?

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biểu diễn điểm $\left(x;y\right)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương ứng, lấy nhiều điểm $\left(x;\log_2 x\right)$ với $x\in\left(0;+\infty\right)$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ (Hình 6).

c) Cho biết tọa độ giao điểm đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ với trục hoanhfvaf vị trí của đồ thị hàm số đó so với trục tung.



Hình 6

d) Quan sát đồ thị hàm số $y = \log_2 x$, nêu nhận xét về:

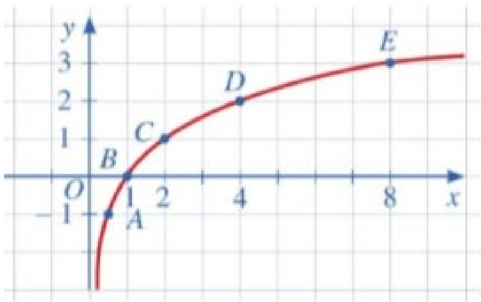
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_2 x, \lim\limits_{x\to +\infty} \log_2 x;$
- Sự biến thiên của hàm số $y = \log_2 x$ và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Lời giải

a)

x	0	1	2	4	8
y	‖	0	1	2	3

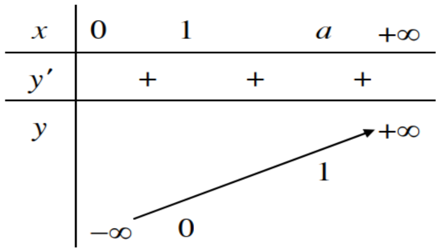
b) Đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ là đường thẳng đi qua các điểm $\mathrm{A}(0,5;-1), \mathrm{B}(1;0), \mathrm{C}(2;1); \mathrm{D}(4;2)$, $E(8;3)$



c) Đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 , nằm ở phía biên phải trục tung và đi lên kể từ trái sang phải

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_2 x = -\infty, \lim\limits_{x\to +\infty} \log_2 x = +\infty$

- Sự biến thiên: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$
- Bảng biến thiên



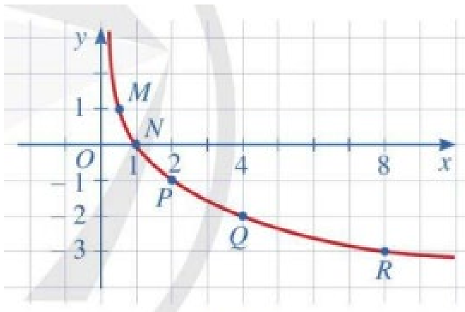
Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ là một đường cong liền nét, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, nằm ở phía bên phải trục tungvaf đi lên kể từ trái sang phải.

HĐ 6: Cho hàm số lôgarit $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị x trong bảng sau:

x	0,5	1	2	4	8
y	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biểu diễn điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương ứng, lấy nhiều điểm $\left(x; \log_{\frac{1}{2}} x\right)$ với $x \in (0; +\infty)$ và nối lại, ta được đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (Hình 7).



Hình 7

c) Cho biết tọa độ giao điểm đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ với trục hoành và vị trí của đồ thị hàm số đó so với trục tung.

d) Quan sát đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, nêu nhận xét về:

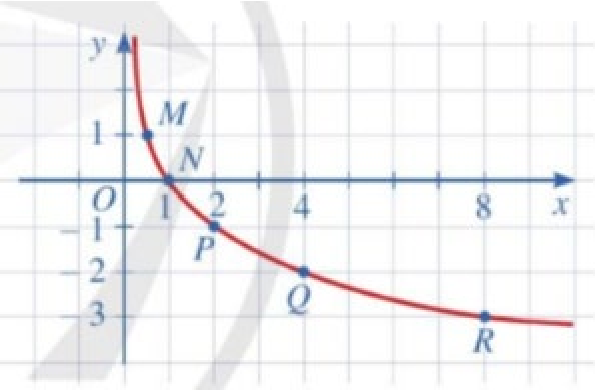
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$;
- Sự biến thiên của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Lời giải

a)

x	0,5	1	2	4	8
y	1	0	-1	-2	-3

b) Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(0,5;1), B(1;0), C(2;-1); D(4;-2)$, $E(8;-3)$



c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, nằm ở phía bên phải trục tung và đi xuống kể từ trái sang phải

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$

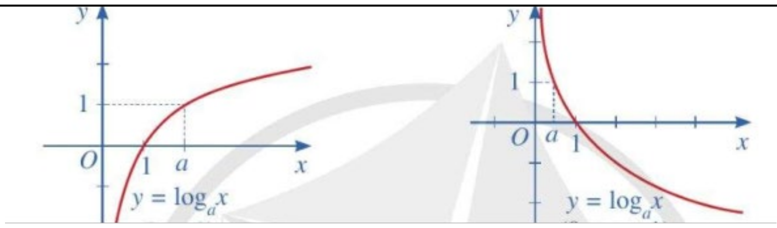
Bảng biến thiên

x	0	a	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	
y	$+\infty$	1	0	$-\infty$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ là một đường cong liền nét, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, nằm ở phía bên phải trục tung và đi lên kể từ trái sang phải.

Trong trường hợp tổng quát ta có nhận xét sau (Hình 8):

Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ là một đường cong liền nét, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, nằm ở phía bên phải trục tung và đi lên nếu $a>1$, đi xuống nếu $0<a<1$.



Nhận xét: Cho hàm số lôgarit $y=\log_a x$ với $a>0, a\neq 1$.

<table>
<tr><th>$y=\log_a x,(a>1)$</th><th>$y=\log_a x,(0<a<1)$</th></tr>
<tr><td>
1. Tập xác định: $(0;+\infty)$
2. Sự biến thiên.
$y'=\dfrac{1}{x\ln a}>0,\forall x>0$
$\rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty.$
Tiệm cận: Oy là tiệm cận đứng
3. Bảng biến thiên.
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
4. Đồ thị
</td><td>
1. Tập xác định: $(0;+\infty)$
2. Sự biến thiên.
$y'=\dfrac{1}{x\ln a}<0,\forall x>0$
$\rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến $(0;+\infty)$
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty.$
Tiệm cận: Oy là tiệm cận đứng.
3. Bảng biến thiên.
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>a</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>0</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>
4. Đồ thị
</td></tr>
</table>

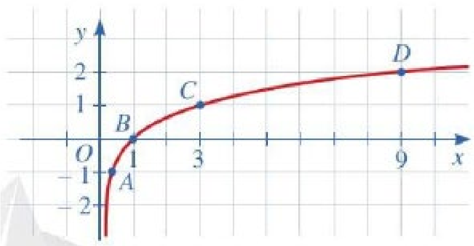
Ví dụ 5. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=\log_3 x$.

Lời giải

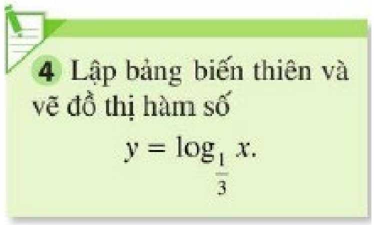
Vì hàm số $y=\log_3 x$ có cơ số $3>1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	$+\infty$
$y=\log_3 x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y=\log_3 x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(\frac{1}{3};-1\right), B(1;0)$, $C(3;1), D(9;2)$.(Hình 9)



Hình 9

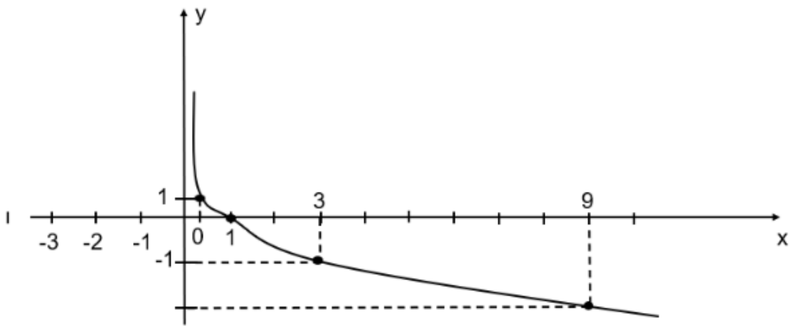

4 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Lời giải

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = log_{\frac{1}{3}} x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = log_{\frac{1}{3}} x$ là đường thẳng đi qua các điểm A(1;0), B(3; -1), C(9;-2), D(1;3)



Ví dụ 6. Lốc xoáy là hiện tượng một luồng không khí xoáy tròn mở rộng ra từ một đám mây dông xuống tới mặt đất (Hình 10). Các cơn lốc xoáy thường có sức tàn phá rất lớn. Tốc độ của gió (đơn vị: dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93\log d + 65$, (Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage) trong đó d (đơn vị: dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy di chuyển được.

Hãy tính tốc độ của gió ở gần tâm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường là:

a) 5 dặm;

b) 10 dặm.

Giải

a) Tốc độ của gió ở gần tâm khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường 5 dặm là:

$S = 93\log 5 + 65 \approx 130$ dặm/ giờ

b) Tốc độ của gió ở gần tâm khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường 10 dặm là:

$S = 93\log 10 + 65 = 158$ dặm/ giờ

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số

1. Phương pháp: $0 < a \neq 1$

Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định khi $f(x) > 0$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_3 (x^2 + 2x)$;

b) $y = \log_{0,2} (4 - x^2)$

Lời giải

a) Hàm số $y = \log_3 (x^2 + 2x)$ xác định khi $x^2 + 2x > 0$ hay $x < -2$ hoặc $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$:

b) Hàm số $y = \log_{0,2} (4 - x^2)$ xác định khi $4 - x^2 > 0$ hay $-2 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2; 2)$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3 - x}$

b) $y = \frac{2}{\log_4 x - 3}$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3 - x}$ xác định khi $\frac{1}{3 - x} > 0$ hay $x < 3$. Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty; 3)$.

b) Hàm số $y = \frac{2}{\log_4 x - 3}$ xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (0; 64) \cup (64; +\infty)$.

Dạng 2. So sánh

1. Phương pháp

$\oplus a > 1:\ a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$

$\oplus 0 < a < 1:\ a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

$\oplus a > 1: \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$

$\oplus 0 < a < 1:\ \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Hãy so sánh mỗi sơ sau với 1:

a) $(0,1)^{\sqrt{2}}$; b) $(3,5)^{0,1}$; c) $\pi^{-2,7}$; d) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

Lời giải

a) $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1$;

b) $(3,5)^{0,1}>1$;

c) $\pi^{-2,7}<1$;

d) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}>1$.

Ví dụ 2: Sử dụng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm sơ mũ, hãy so sánh mỗi căp sơ sau:

a) $(1,7)^{3}$ và 1 ;

b) $(0;3)^{2}$ va 1 ;

c) $(3,2)^{1,5}$ và $(3,2)^{1,6}$;

d) $(0,2)^{-3}$ và $(0,2)^{-2}$;

e) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1,4}$

g) 6^{π} và $6^{3,14}$.

Lời giải

a) $(1,7)^{8}>1$

b) $(0,8)^{2}<1$;

c) $(3,2)^{1,5}<(3,2)^{1,6}$;

d) $(0,2)^{-3}>(0,2)^{-2}$;

c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1,4}$

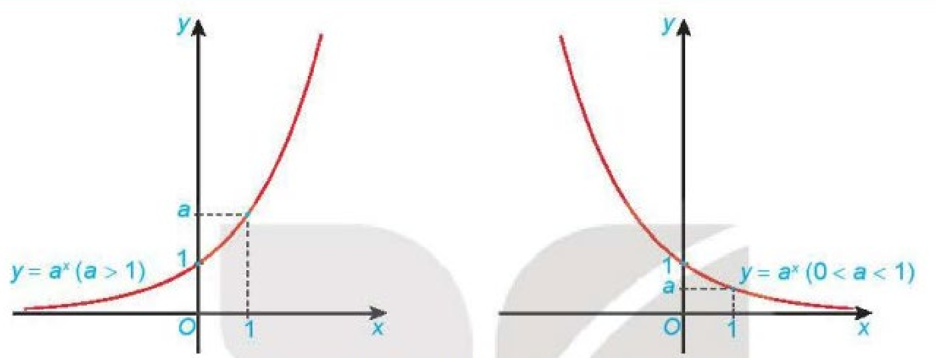
g) $6^{\pi}>6^{8;14}$.

Dạng 3. Đồ thị hàm số

1. Phương pháp:

Hàm số mũ $y=a^{x}$.

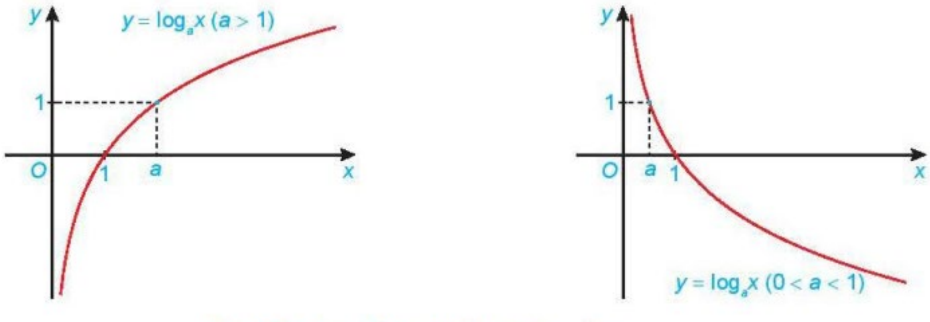
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty)$;
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0<a<1$;
- Liên tục trên $\mathbb{R}$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(0;1),(1;a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



Hình 6.1. Dạng đồ thị của hàm số $y=a^{x}$

Hàm số lôgarit $y=\log_a x$:

- Có tập xác định là $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $a>1$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi $0<a<1$;
- Liên tục trên $(0;+\infty)$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(1;0),(a;1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.



Hình 6.3. Dạng đồ thị của hàm số $y=\log_a x$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị các hàm số

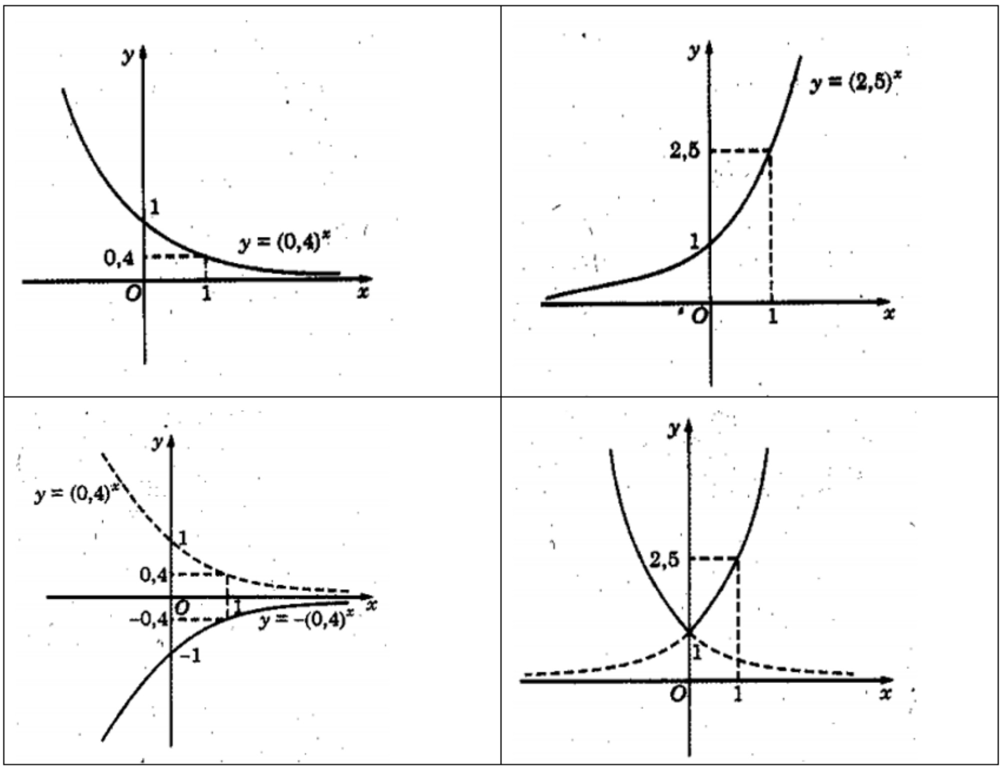
a) $y=(0,4)^x$;

b) $y=(2,5)^x$;

c) $y=-(0,4)^x$;

d) $y=(2,5)^{|x|}$.

Lời giải

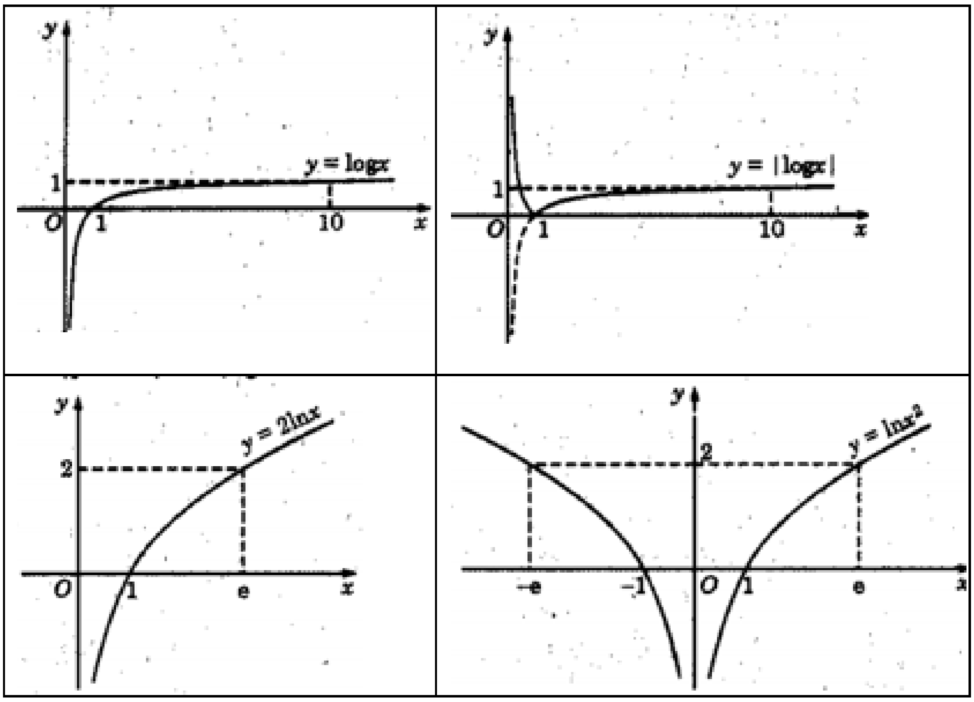


Ví dụ 2: Vẽ đồ thị các hàm số

a) $y=\log x$;   b) $y=|\log x|$;

c) $y = 2\ln x$; d) $y = \ln x^2$.

Lời giải



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = 4^x$;

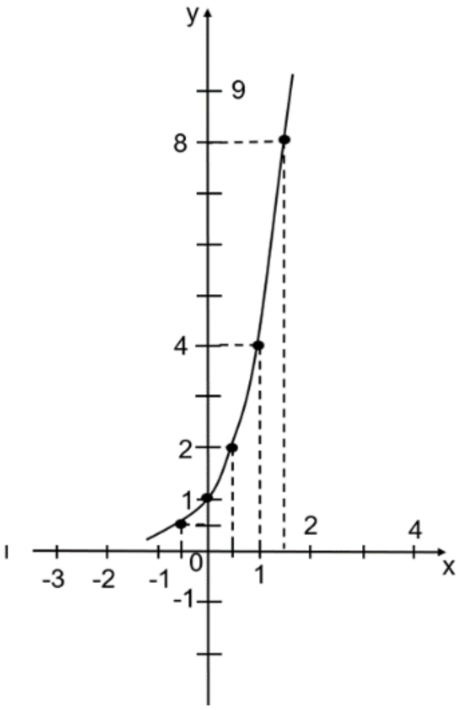
b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải

a) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 4^x$	0	1	$+\infty$

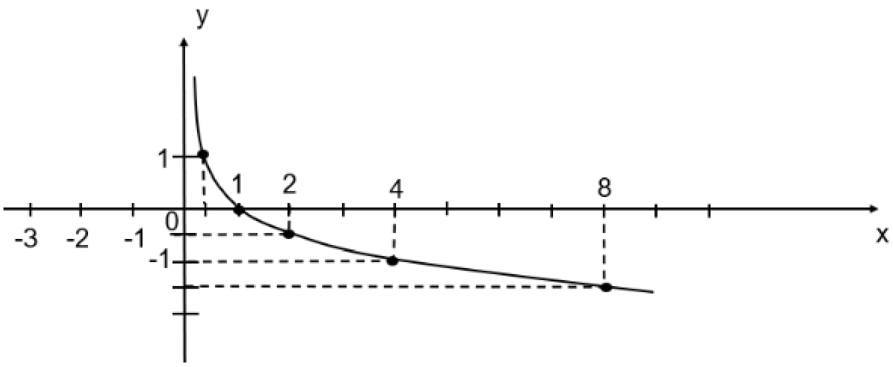
Đồ thị hàm số $y = 4^x$ là đường thẳng đi qua $A\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right), B(0;1), C(1;4), D\left(\frac{1}{2};2\right), E\left(\frac{3}{2};8\right)$.



b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y=\log_{\frac{1}{4}}x$	$+\infty$	0	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ là đường thẳng đi qua $A\left(\frac{1}{4};1\right),B\left(1;0\right),C\left(2;\frac{-1}{2}\right),D\left(4;-1\right),E\left(8;\frac{-3}{2}\right)$.



Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=12^x$;

b) $y=\log_5\left(2x-3\right)$;

c) $y=\log_{\frac{1}{5}}\left(-x^2+4\right)$.

Lời giải

a) $TXĐ:\mathbb{R}$. b) TXĐ: $(0;+\infty)$. c) TXĐ: $(0;+\infty)$.

Bài 3. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của hàm số đó? Vì sao?

a) $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$

b) $y=\left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$

c) $y=\log_\pi x$

d) $y=\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$.

Lời giải

a) $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì $\frac{\sqrt{3}}{2}<1$.

b) $y=\left(\frac{\sqrt[3]{26}}{2}\right)^x$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì $\frac{\sqrt[3]{26}}{2}<1$.

c) $y=\log_\pi x$ Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ vì $\pi>1$.

d) $y=\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$ Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ vì $\frac{\sqrt{15}}{4}<1$.

Bài 4. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A\cdot e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số 0,93%/năm (Nguồn: https://danso.org/viet-nam). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $S = A\cdot e^{rt}$, trong đó:
S là dân số của Việt Nam năm 2030 (cần dự đoán).
A là dân số của Việt Nam năm 2021, đã biết là 98,564,407 người.
r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm, đã biết là 0,93%
t là số năm từ năm 2021 đến năm 2030, tức là $t=2030-2021=9$ năm.
Thay các giá trị vào công thức, ta có: $S=98,564,407.e^{(0,0093.9)}$
Sau khi tính toán, ta có kết quả: $S\approx 107169341$ người.
Vậy dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 là khoảng 107 triệu người.

Bài 5. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t)=c\left(1-e^{-kt}\right)$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k=0,2$. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

Lời giải

Để tính số đơn vị kiến thức học sinh đã học được sau một số ngày nhất định, ta chỉ cần thay giá trị của t vào công thức $f(t)=c\left(1-\mathrm{e}^{(-k.t)}\right)$, trong đó:

Số đơn vị kiến thức học sinh đã học được sau 2 ngày: Thay $t=2$ vào công thức $f(t)=c\left(1-\mathrm{e}^{(-k.t)}\right)$, và biết rằng $\mathrm{f}(\mathrm{t})=25$ (số đơn vị kiến thức đã học được), $\mathrm{k}=0.2$ (tốc độ tiếp thu), ta có:

$$f(2)=c\left(1-e^{-kt}\right)=25.\left(1-e^{-0,2.2}\right)\approx 8 \text{ (đơn vị)}$$

Trong 8 ngày, em học sinh nhớ được:

$$f(t)=c\left(1-e^{-kt}\right)=25.\left(1-e^{-0,2.8}\right)\approx 20 \text{ (đơn vị)}$$

Bài 6. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $\mathrm{pH}=-\log\left[\mathrm{H}^{+}\right]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $\left[\mathrm{H}^{+}\right]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau:

Mẫu 1: $\left[\mathrm{H}^{+}\right]=8\cdot 10^{-7}$; Mẫu 2: $\left[\mathrm{H}^{+}\right]=2\cdot 10^{-9}$.

Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

Lời giải

Độ pH của mẫu 1 là:

$$pH=-\log\left[8.10^{-7}\right]=-\left(\log 8+\log 10^{-7}\right)=-\left(\log 8-7\log 10\right)=7-\log 8=7-3\log 2$$

Độ pH của mẫu 2 là:

$$pH=-\log\left[2.10^{-9}\right]=-\left(\log 2+\log 10^{-9}\right)=9-\log 2$$

Nhận thấy $\begin{aligned}&7<9\\&-3\log 2<-\log 2\\&\Rightarrow 7-3\log 2<9-\log 2\end{aligned}$.

Bài 7. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức

$y=\log_{1,06}\left(\frac{x}{10}\right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 15 triệu đồng? 20 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Có $y=\log_{1,06}\frac{15}{10}\approx 7$

Vậy sau ít nhất 7 năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=\log_2(10-2x)$ là

A. $(-\infty;2)$ **B.** $(5;+\infty)$ **C.** $(-\infty;10)$ **D.** $(-\infty;5)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 10-2x>0 \Leftrightarrow x<5 \Rightarrow D=(-\infty;5)$

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\log\left(x^2+2x\right)$ là

A. $D=(-2;0)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **C.** $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ **D.** $D=\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow x^2+2x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0\\x<-2\end{array}\right.$. Vậy $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

Câu 3: Cho $0<a<1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Tập giá trị của hàm số $y=a^x$ là $\mathbb{R}$

B. Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ là $\mathbb{R}$

C. Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là $\mathbb{R}$

D. Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\log_a x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(3-2x-x^2\right)$ là

A. $D=(-1;3)$ **B.** $D=(0;1)$ **C.** $D=(-1;1)$ **D.** $D=(-3;1)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 3-2x-x^2>0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Vậy $D=(-3;1)$.

Câu 5: Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

A. $m<\frac{1}{4}$ **B.** $m>0$ **C.** $m\ge\frac{1}{4}$ **D.** $m>\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}\Leftrightarrow 4^x-2^x+m>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m>2^x-4^x\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

Đặt $t=2^x>0\Rightarrow m>t-t^2\left(\forall t>0\right)\Leftrightarrow m>\max\limits_{t>0}f\left(t\right)\Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in\left[-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right]$ **B.** $m\in\left[-2;2\right]$

C. $m\in\left(-2;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ **D.** $m\in\left(-2;2\right)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-2mx+4>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta'=m^2-4<0\Leftrightarrow-2<m<2$

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai?**

A. $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}>\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$. **B.** $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}>\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$.

C. $\left(2,5\right)^{-3,1}>\left(2,6\right)^{-3,1}$. **D.** $\left(3,1\right)^{7,3}<\left(4,3\right)^{7,3}$.

Lời giải

Chọn A

Dùng tính chất: $\begin{cases}a,b>1\\a^x>b^x\Rightarrow a>b\\x>0\end{cases}$

Câu 8: Nếu $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<7-4\sqrt{3}$ thì

A. $a<1$ **B.** $a>1$ **C.** $a>0$ **D.** $a<0$

Lời giải

Chọn D

BPT $\Leftrightarrow\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}\Rightarrow a-1<-1\Leftrightarrow a<0$

Câu 9: Cho $\pi^\alpha>\pi^\beta$ với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\alpha>\beta$ **B.** $\alpha<\beta$ **C.** $\alpha=\beta$ **D.** $\alpha\le\beta$

Lời giải

Chọn A

Câu 10: Cho $M=\log_{0,3}0,07;N=\log_3 0,2.$ Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $0>N>M$. **B.** $M>0>N$. **C.** $N>0>M$. **D.** $M>N>0$.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $\begin{cases} 0<0,3<1 \\ 0<0,07<1 \end{cases} \Rightarrow M=\log_{0,3}0,07>0$

$\begin{cases} 3>1 \\ 0<0,2<1 \end{cases} \Rightarrow N=\log_3 0,2<0$

+ Suy ra: $M>0>N$

Câu 11: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

B. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

D. $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

Do $\begin{cases} 2018>2017 \\ \sqrt{3}-1>1 \end{cases}$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}<\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Câu 12: Cho $0<a\neq 1;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\frac{\alpha}{\beta}}$

B. $a^{\sqrt{a}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}\ (a>0)$

C. $a^{\alpha^{\beta}}=\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}$

D. $\sqrt{a^{\alpha}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}$

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{a^{\alpha}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}$

Câu 13: Có kết luận gì về a nếu $(2a+1)^{-3}>(2a+1)^{-1}\ (1)$

A. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)$

B. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$

C. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{6};0\right)$

D. $a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $2a+1\neq 0\Leftrightarrow a\neq -\frac{1}{2}$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow \frac{1}{(2a+1)^3}>\frac{1}{2a+1}\Leftrightarrow \frac{1-(2a+1)^2}{(2a+1)^3}>0\Leftrightarrow \frac{a(a+1)}{(2a+1)^3}<0$

Lập bảng xét dấu ta được: $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}<a<0 \\ a<-1 \end{array}\right.$.

Câu 14: Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào sai?

A. $\log_2 5 > \log_2 \pi$ **B.** $\log_{\sqrt{2}-1} \pi < \log_{\sqrt{2}-1} e$ **C.** $\log_{\sqrt{3}+1} \pi > \log_{\sqrt{3}+1} 7$ **D.** $\log_7 5 < 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt{3}+1>1$ do đó $\pi<7 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}+1} \pi < \log_{\sqrt{3}+1} 7$.

Câu 15: Cho $0<a<1$, $b>1$ và $M=\log_a 2$, $N=\log_2 b$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M>0$ và $N>0$. **B.** $M>0$ và $N<0$.

C. $M<0$ và $N<0$. **D.** $M<0$ và $N>0$.

Lời giải

Chọn D

Câu 16: Với những giá trị nào của a thì $(a-1)^{-\frac{2}{3}}>(a-1)^{-\frac{1}{3}}$?

A. $1<a<2$. **B.** $a>2$. **C.** $a>1$. **D.** $0<a<1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\begin{cases} \dfrac{-2}{3}<\dfrac{-1}{3} \\ (a-1)^{-\frac{2}{3}}>(a-1)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow 0<a-1<1 \Leftrightarrow 1<a<2$.

Câu 17: Nếu $a^{\frac{19}{5}}<a^{\frac{15}{7}}$ và $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)>\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ thì:

A. $a>1, 0<b<1$ **B.** $0<a<1, b>1$ **C.** $0<a<1, 0<b<1$ **D.** $a>1, b>1$

Lời giải

Chọn B

$a^{\frac{19}{5}}<a^{\frac{15}{7}}$ vì mũ không là số nguyên nên $a>0$. Mặt khác $\dfrac{19}{5}>\dfrac{15}{7}$ nên $a<1 \Rightarrow 0<a<1$

$\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)>\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ để có nghĩa thì $1\neq b>0$ và $\sqrt{2}+\sqrt{7}>\sqrt{2}+\sqrt{5}$ nên $b>1$

Câu 18: Cho các số thực *a,b* thỏa mãn $a>b>1$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\log_a b>\log_b a$ **B.** $\log_a b<\log_b a$ **C.** $\ln a>\ln b$ **D.** $\log_{\frac{1}{2}}(ab)<0$

Lời giải

Chọn A

Cho $a=4; b=2$ ta có: $\log_a b=\dfrac{1}{2}; \log_b a=2$ nên A sai.

Câu 19: Cho a, b là các số thực dương, thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{4}{3}}$ và $\log_b \dfrac{1}{2}<\log_b \dfrac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>1, 0<b<1$ **B.** $0<a<1, b>1$ **C.** $0<a<1, 0<b<1$ **D.** $a>1, b>1$

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 0 < a < 1\left(\text{do}\,\frac{3}{4} < \frac{4}{3}\right)$

Mặt khác $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3} \Rightarrow b > 1\left(\text{do}\,\frac{2}{3} > \frac{1}{2}\right)$

Câu 20: Cho hai số thực *a* và *b* sao cho với $a^{-5} > a^{-4}$ và $\log_b\left(\frac{3}{4}\right) < \log_b\left(\frac{4}{5}\right)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là đúng?

A. $a > 1; b > 1$. **B.** $a > 1; 0 < b < 1$.

C. $0 < a < 1; b > 1$. **D.** $0 < a < 1; 0 < b < 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} -5 < -4 \\ a^{-5} > a^{-4} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ và $\begin{cases} \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \\ \log_b\left(\frac{3}{4}\right) < \log_b\left(\frac{4}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow b > 1$.

Vậy $0 < a < 1; b > 1$.

Câu 21: Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^a > \left(\sqrt{2}-1\right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a > b$. **B.** $a < b$. **C.** $a = b$. **D.** $a \ge b$.

Lời giải

Chọn B

Do $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ nên hàm số mũ $y = \left(\sqrt{2}-1\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và ta có:

$\left(\sqrt{2}-1\right)^a > \left(\sqrt{2}-1\right)^b \Leftrightarrow a < b$

Câu 22: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$

A. $0 < a < 1$ **B.** $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$ **C.** $a > 1$ **D.** $a > 0$

Lời giải

Chọn A

$\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{5}{21}} > a^{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Câu 23: Cho p, q là các số thực thỏa mãn $m = \left(\frac{1}{e}\right)^{2p-q}, n = e^{p-2q}$, biết $m > n$. So sánh p và q

A. $p \ge q$ **B.** $p > q$ **C.** $p \le q$ **D.** $p < q$

Lời giải

Chọn D

Ta có $m = \left(\frac{1}{e}\right)^{2p-q} = e^{q-2p}, n = e^{p-2q}$. Vì $m > n$ nên $q - 2p > p - 2q \Leftrightarrow q > p$.

Câu 24: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$ **B.** $a^{-\sqrt{3}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **C.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$ **D.** $\dfrac{1}{a^{2016}} < \dfrac{1}{a^{2017}}$

Lời giải

Chọn B

Do $a > 1 \Rightarrow$ vưới $m > n$ thì $a^m > a^n$

Do $-\sqrt{3} > -\sqrt{5} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}} = \dfrac{1}{a^5}$

Câu 25: Cho $0 < a < 1$. Khẳng định nào đúng?

A. $a^{-\sqrt{2}} < \dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}}$ **B.** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}} > 1$ **C.** $a^{\frac{1}{3}} < \sqrt{a}$ **D.** $\dfrac{1}{a^{2017}} > \dfrac{1}{a^{2018}}$

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Xét hàm số có dạng $y = a^x, a > 0, a \ne 1$:

+ Nếu $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$

+ Nếu $a > 1$: hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

Cách giải: Với $0 < a < 1$:

$a^{-\sqrt{2}} < \dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^{\sqrt{2}}} < \dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 < a < 1$ (luôn đúng). Vậy phương án A đúng.

$\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > 1 \Leftrightarrow a > 1$ (Loại). Vậy phương án B sai.

$a^{\frac{1}{3}} < \sqrt{a} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a > 1$ (Loại). Vậy phương án C sai.

$\dfrac{1}{a^{2017}} > \dfrac{1}{a^{2018}} \Leftrightarrow a^{2017} < a^{2018} \Leftrightarrow a > 1$ (Loại). Vậy phương án D sai.

Câu 26: Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Khi $x > 0$ thì $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$. **B.** Khi $0 < a < 1$ và $b < c$ thì $a^b > a^c$.

C. Với $a < b$ thì $\log_a b < \log_b a < 1$. **D.** Điều kiện để $x^{\sqrt{2}}$ có nghĩa là $x > 0$.

Lời giải

Chọn C

Đáp án C sai vì với $a < b \Rightarrow \begin{cases} 1 < \log_a b \\ \log_b a < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$

Câu 27: Cho a là số thực dương khác 1. Xét hai số thực x_1, x_2. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Nếu $a^{x_1} > a^{x_2}$ thì $x_1 > x_2$. **B.** Nếu $a^{x_1} > a^{x_2}$ thì $x_1 < x_2$.

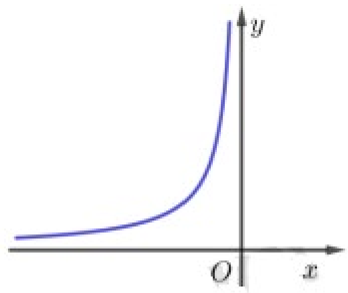
C. Nếu $a^{x_1} > a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1 - x_2) > 0$. **D.** Nếu $a^{x_1} > a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1 - x_2) < 0$.

Lời giải

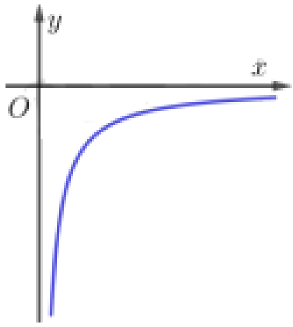
Chọn C

$$\begin{cases} a>1: a^{x_1} > a^{x_2} \to x_1 > x_2 \\ a<1: a^{x_1} < a^{x_2} \to x_1 < x_2 \end{cases} \to (a-1)(x_1-x_2)>0.$$

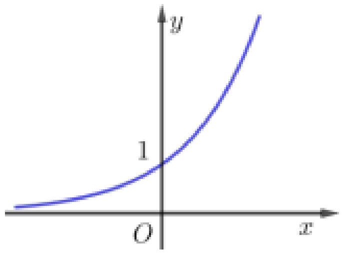
Câu 28: Cho a là số thực dương khác 1. Hình nào sau đây là đồ thị của hàm số mũ $y=a^x$?



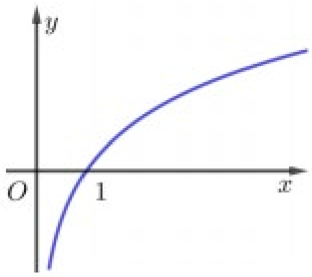
A.



B.



C.



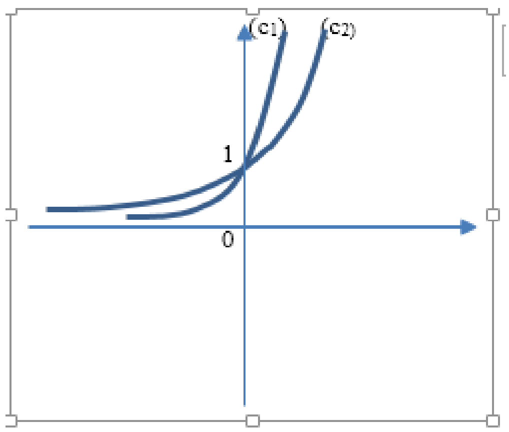
D.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty)$

Câu 29: Biết *(C₁), (C₂)* ở hình bên là hai trong bốn đồ thị của các hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x, y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x, y=5^x, y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Hỏi *(C₂)* là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ **C.** $y=5^x$ **D.** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lời giải

Chọn A

- Ta thấy *(C₁), (C₂)* đều có hướng đi lên khi x tăng $\Rightarrow$ *(C₁), (C₂)* đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Mà hàm $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$. Do đó ta loại hàm $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ và $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- Xét khi $x>0$ thì *(C₁)* ở trên *(C₂)* $\Rightarrow y(C_1)>y(C_2)$. Mà $5^x>\left(\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow (C_2): y=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Câu 30: Đối xứng qua đường thẳng $y=x$ của đồ thị hàm số $y=5^{\frac{x}{2}}$ là đồ thị nào trong các đồ thị có phương trình sau đây?

A. $y=\log_{\sqrt{5}} x$ **B.** $y=\log_5 x^2$ **C.** $y=\log_5 x$ **D.** $y=\frac{1}{2}\log_5 x$

Lời giải

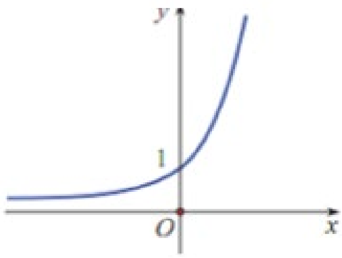
Chọn A

Ta đưa hàm số về dạng: $y=5^{\frac{x}{2}}=\left(\sqrt{5}\right)^x$.

Dựa vào lý thuyết “Hai hàm số $y=a^x, y=\log_a x$ có đồ thị đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất y = x”

Hoặc thay x = y và y = x ta có $x=\left(\sqrt{5}\right)^y \Leftrightarrow y=\log_{\sqrt{5}} x$

Câu 31: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **B.** $y=x^2$

C. $y=\log_2 x$ **D.** $y=2^x$

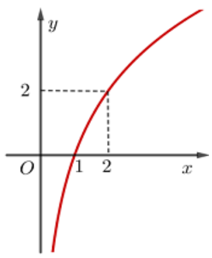
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn

Câu 32: Tìm a để hàm số $\log_a x\ (0<a\neq 1)$ có đồ thị là hình bên



A. $a=\sqrt{2}$ **B.** $a=2$ **C.** $a=\frac{1}{2}$ **D.** $a=-\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;2) \Rightarrow \log_a 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Câu 33: Nếu gọi (G_1) là đồ thị hàm số $y = a^x$ và (G_2) là đồ thị hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục hoành.

B. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.

C. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$

D. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x$

Lời giải

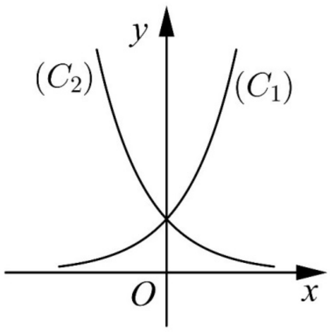
Chọn C

Mọi điểm $A(m;n) \in (G_1) \Rightarrow a^m = n \Rightarrow m = \log_a n \Rightarrow B(n;m) \in (G_2)$

Hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Do đó (G_1) và (G_2) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Câu 34: Cho hai hàm số $y = a^x, y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $0 < a < b < 1$ **B.** $0 < b < 1 < a$ **C.** $0 < a < 1 < b$ **D.** $0 < b < a < 1$

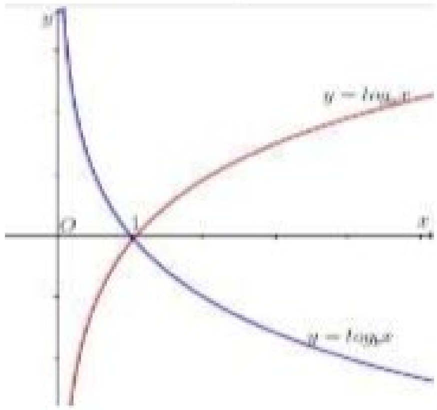
Lời giải

Chọn B

- Đồ thị hàm số (C_1) đồng biến nên $y' = a^x \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$

- Đồ thị hàm số (C_2) nghịch biến nên $y' = b^x \ln b < 0 \Leftrightarrow 0 < b < 1$. Do đó $0 < b < 1 < a$

Câu 35: Cho hai hàm số $y = \log_a x,\ y = \log_b x$ có đồ thị $(C_1),(C_2)$, được vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $0<b<a<1.$ **B.** $0<b<1<a.$ **C.** $0<a<b<1.$ **D.** $0<a<1<b.$

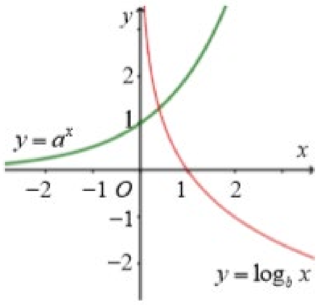
Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_b x$ nghịch biến nên $0<b<1$

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_a x$ đồng biến nên $a>1$

Câu 36: Cho $a>0,b>0,b\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ cho như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



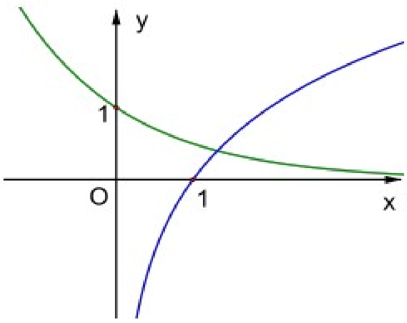
A. $a>1;\ 0<b<1.$ **B.** $1>a>0;\ b>1.$ **C.** $0<a<1;\ 0<b<1.$ **D.** $a>1;\ b>1.$

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị ta thấy. Hàm số $y=a^x$ đồng biến $\Rightarrow a>0$. Hàm số $y=\log_b x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<b<1$

Câu 37: Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<a<\dfrac{1}{2}<b$ **B.** $0<a<1<b$

C. $0<b<1<a$ **D.** $0<a<1,0<b<\frac{1}{2}$

Lời giải

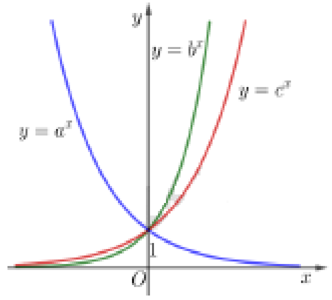
Chọn B

+ Xét hàm số $y=a^x$ đi qua $(0;1)$ suy ra đồ thị hàm số (1) là đường nghịch biến, suy ra $0<a<1$.

+ Xét hàm số $y=\log_b x$ đi qua (1;0) suy ra đồ thị hàm số (2) là đường đồng biến suy ra b>1.

Suy ra $0<a<1<b$.

Câu 38: Cho 3 số $a,b,c>0,a\neq 1,b\neq 1,c\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x,y=a^x,y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

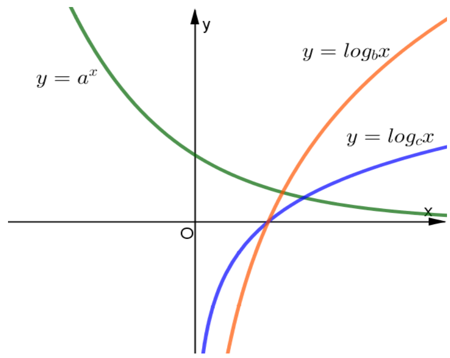
A. $b<c<a$ **B.** $a<c<b$ **C.** $a<b<c$ **D.** $c<a<b$

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $y=b^x;y=c^x$ đồng biến, hàm số $y=a^x$ nghịch biến nên $a<1;b,c>1$. Thay $x=10$, ta có $b^{10}>c^{10}\Rightarrow b>c$

Câu 39: Cho các hàm số $y=a^x$, $y=\log_b x,y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

A. $c>b>a$. **B.** $b>a>c$. **C.** $a>b>c$. **D.** $b>c>a$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=a^x$ đồ thị có dáng đi xuống từ trái sang phải nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do đó $0<a<1$ (1).

Hai hàm số $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ đồ thị có dáng đi lên từ trái sang phải nên đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó $b>1>a,\ c>1>a$ (2).

Quan sát đồ thị ta thấy với $0<x<1$ thì $\log_b x<\log_c x$, suy ra $c>b$.

Quan sát đồ thị ta thấy với $x>1$ thì $\log_b x>\log_c x$, suy ra $c>b$.

Suy ra $1<b<c$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $c>b>a$.

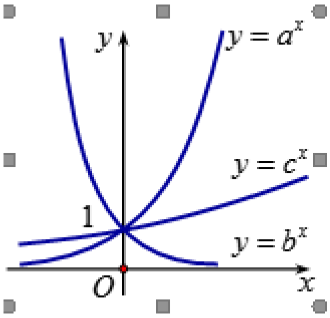
Cách khác:

Dễ thấy $a<1$, $b>1$, $c>1$. Nên a là số nhỏ nhất.

Xét đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hai hàm số $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ lần lượt tại các điểm $B(b;1)$ và $C(c;1)$

(hình vẽ). Dễ thấy $c>b$ vậy $c>b>a$.

Câu 40: Hình vẽ dưới đây vẽ đồ thị của 3 hàm số mũ.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a>b>c$. **B.** $a>c>1>b$. **C.** $b>c>1>a$. **D.** $b>a>c$.

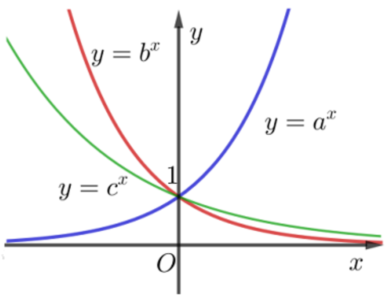
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ở hình 5 ta thấy đồ thị của hàm số $y=b^x$ là nghịch biến nên $0<b<1$.

Vẽ đường thẳng $x=1$ ta có đường thẳng $x=1$ cắt đồ thị hàm số $y=a^x$ tại điểm có tung độ $y=a$ và cắt đồ thị hàm số $y=c^x$ tại điểm có tung độ là $y=c$. Khi đó điểm giao với $y=a^x$ nằm trên điểm giao với $y=c^x$ nên $a>c>1$. Vậy $a>c>1>b$.

Câu 41: Trên hình 2.13, đồ thị của ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ (a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c



A. c > b > a **B.** b > c > a **C.** a > c > b **D.** a > b > c

Lời giải

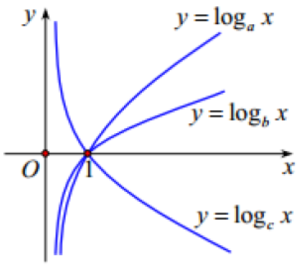
Chọn C

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng: Hàm số $y=a^x$ là hàm số đồng biến; hàm số $y=b^x, y=c^x$ là hàm số nghịch biến.

Suy ra $a>1$ và $\begin{cases}0<b<1\\0<c<1\end{cases} \to a>\{b;c\}$. Gọi $B(-1;y_B)$ thuộc đồ thị hàm số $y=b^x \Rightarrow y_B=\frac{1}{b}$;

Và $C(-1;y_C)$ thuộc đồ thị hàm số $y=c^x \Rightarrow y_C=\frac{1}{c}$. Dựa vào đồ thị, ta có $y_B>y_C \Leftrightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{c} \Leftrightarrow c>b$.

Câu 42: Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



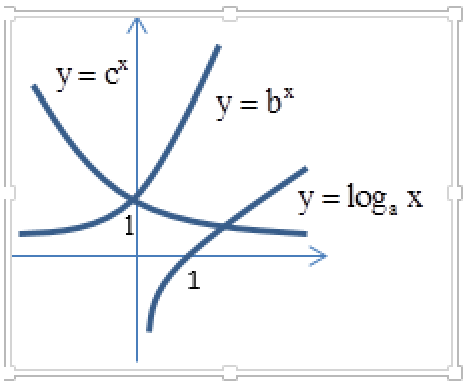
A. $a<b<c$ **B.** $c<a<b$ **C.** $c<b<a$ **D.** $b<c<a$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<c<1$, các hàm $y=\log_a x, y=\log_b x$ đồng biến nên $a;b>1$ Chọn $x=100 \Rightarrow \log_a 100>\log_b 100 \Rightarrow a<b \Rightarrow c<a<b$.

Câu 43: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $b<c<a$ **B.** $a<b<c$ **C.** $c<a<b$ **D.** $c<b<a$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=c^x$ là hàm nghịch biến nên $0<c<1$.

Hàm số $y=b^x$ là hàm đồng biến nên $b>1$

Hàm số $y=\log_a x$ là hàm đồng biến nên $a>1$. Lấy đối xứng đồ thị hàm $y=\log_a x$ qua đường phân giác thứ nhất của mặt phẳng toạ độ ta có đồ thị hàm số $y=b^x$ tăng nhanh hơn đồ thị hàm số $y=a^x$ nên $b>a$

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm.

Hỏi sau bao nhiêu năm, dân số sẽ gấp đôi dân số của năm lấy làm mốc tính?

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Phương trình mũ

HĐ1: Trong bài toán ở phần mở đầu, giả sử $r = 1{,}14\% /$ năm.

a) Viết phương trình thể hiện dân số sau t năm gấp đôi dân số ban đầu.

b) Phương trình vừa tìm được có ẩn là gì và nằm ở vị trí nào của luỹ thừa?

Lời giải

a) Có $S = 2A$

$2A = A \cdot e^{0,0114.t}$

$=> 2 = e^{0,0114.t}$

$=> \ln 2 = 0,0114.t$

b) Phương trình vừa tìm được có ẩn là t, là số năm cần tìm để dân số gấp đôi dân số ban đầu. Nó nằm trong lũy thừa của số e, tức là $e^{0,0114.t}$, đây là dấu hiệu cho thấy phương trình là một phương trình mũ.

Phương trình mũ là phương trình có chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mũ?

a) $5^{x^2+1} = 25$

b) $2^x = 3^{x+1}$

c) $x^2 = 4$

Lời giải

Ta thấy: Hai phương trình $5^{x^2+1} = 25$ và $2^x = 3^{x+1}$ là những phương trình mũ.

LT1. Cho hai ví dụ về phương trình mũ.

Lời giải

Hai phương trình $3^{x^2+1} = 1$ và $6^x = 2^{x+1}$ là những phương trình mũ.

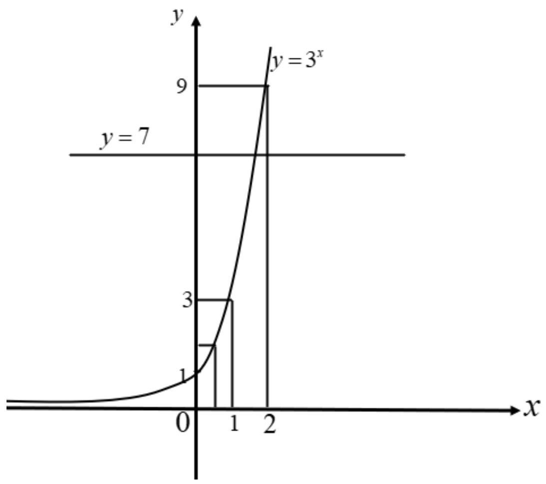
HĐ2

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3^x$ và đường thẳng $y = 7$.

b) Nhận xét về số giao điểm của hai đồ thị trên. Từ đó, hãy nêu nhận xét về số nghiệm của phương trình $3^x = 7$.

Lời giải

a)



b) Số giao điểm của hai đồ thị trên là : 1

=>Số nghiệm của phương trình $3^x = 7$ là : 1

Phương trình mũ cơ bản ẩn x có dạng $a^x = b(a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Nhận xét: Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ thì $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

Ví dụ 2. Giải mỗi phương trình sau:

a) $4^{2x-3} = 5$; b) $10^{x+1} - 2.10^x = 8$.

Lời giải

Ta có:

a) $4^{2x-3} = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = \log_4 5 \Leftrightarrow 2x = 3 + \log_4 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3 + \log_4 5)$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

b) $10^{x+1} - 2.10^x = 8 \Leftrightarrow 10.10^x - 2.10^x = 8 \Leftrightarrow 8.10^x = 8 \Leftrightarrow 10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $4^{x-2} = 2^{3x+1}$.

Lời giải

Ta có: $4^{x-2} = 2^{3x+1} \quad \Leftrightarrow 2^{2(x-2)} = 2^{3x+1}$

$\Leftrightarrow 2(x-2) = 3x + 1$

$\Leftrightarrow 2x - 4 = 3x + 1 \Leftrightarrow x = -5$.

Chú ý:

- Với $a > 0, a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

- Cách giải phương trình mũ như trên thường được gọi là phương pháp *đưa về cùng cơ số*

Ví dụ 4. Giải phương trình đưa ra trong Hoạt động 1 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi A là số dân ban đầu. Phương trình thể hiện số dân sau t năm gấp đôi số dân ban đầu là:

$$A.e^{0,0114.t}=2A\Leftrightarrow e^{0,0114.t}=2\Leftrightarrow 0,0114.t=\ln 2\Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{0,0114}\approx 61.$$

Vậy sau 61 năm dân số sẽ gấp đôi số dân ban đầu.

2 Giải mỗi phương trình sau:

a) $9^{16-x}=27^{x+4}$;

b) $16^{x-2}=0,25\ .\ 2^{-x+4}$.

Lời giải

a) $9^{16-x}=27^{x+4}$

$\Leftrightarrow 3^{2(16-x)}=3^{3(x+4)}$

$=> 2(16-x)=3(x+4)$

$=> x=4$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=4$

b) $16^{x-2}=0,25\cdot 2^{-x+4}$.

$\Leftrightarrow 2^{4(x-2)}=2^{-2}.2^{-x+4}$

$\Leftrightarrow 2^{4(x-2)}=2^{-2+(-x+4)}$

$\Rightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2$

2. Phương trình lôgarit

3 Chỉ số thay đổi pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH=-\log\left[H^+\right]$(trong đó $\left[H^+\right]$ chỉ nồng độ ion hydrogen). Đo chỉ số pH của một số mẫu nước sông, ta có kết quả là $pH=6,1$.

a) Viết phương trình thể hiện nồng độ x của hydrogen $\left[H^+\right]$ trong mẫu nước sông đó.

b) Phương trình vừa tìm được có ẩn là gì và nằm ở vị trí nào của lôgarit?

Lời giải

a) với chỉ số $pH=6,1$ ta có

$pH=-\log\left[H^+\right]$

$6,1=-\log\left[H^+\right]$

Phương trình thể hiện nồng độ x của hydrogen $\left[H^+\right]$ trong mẫu nước sông là: $\left[H^+\right]=x$

b)Phương trình vừa tìm được có ẩn $\left[H^+\right]$ và nằm ở vị trí trong biểu thức dưới dấu lôgarit

Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

Ví dụ 5. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình lôgarit?

a) $\log_7(x+1)=2$; b) $\log_2\left(x^2+x+1\right)=3$; c) $\log_x(x+1)=3$.

Lời giải

Hai phương trình $\log_7(x+1)=2$ và $\log_2\left(x^2+x+1\right)=3$ là những phương trình lôgarit.

3 Cho hai ví dụ về phương trình lôgarit.

Lời giải

Phương trình logarit: $\log_5(x+3)=7, \log_3(6x+9)$

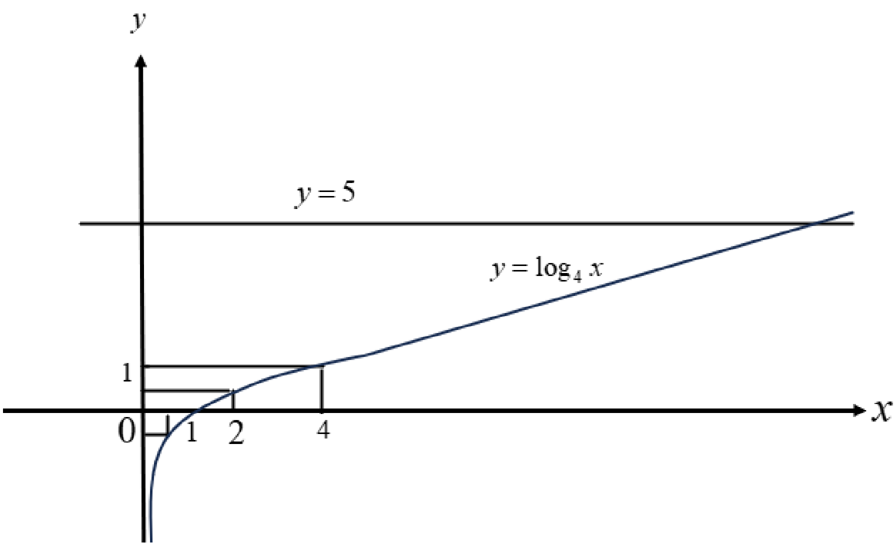
4

a) Vẽ đồ thị hàm số $y=\log_4 x$ và đường thẳng $y=5$.

b) Nhận xét về số giao điểm của hai đồ thị trên. Từ đó, hãy nêu nhận xét về số nghiệm của phương trình $\log_4 x=5$.

Lời giải

a)



b) số giao điểm của hai đồ thị trên là 1.

số nghiệm của phương trình $\log_4 x=5$ là 1

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x=b$ $(a>0, a\neq 1)$.

Phương trình đó có một nghiệm là $x=a^b$.

Nhận xét: Với $a>0, a\neq 1$ thì $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b$.

Ví dụ 6. Giải mỗi phương trình sau:

a) $\log_2 x=5$; b) $\log_4(5x-4)=2$.

Lời giải

a) Ta có: $\log_2 x=5 \Leftrightarrow x=2^5 \Leftrightarrow x=32$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=32$.

b) Ta có: $\log_4(5x-4)=2 \Leftrightarrow 5x-4=4^2 \Leftrightarrow 5x=20 \Leftrightarrow x=4$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=4$.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $\log_8(3x-6)=-\log_{\frac{1}{8}}(2x-2)$

Lời giải

Điều kiện xác định là: $\begin{cases}3x-6>0\\2x-2>0,\end{cases}$ tức là $x>2$.

Ta có $\log_3(3x-6)=-\log_{\frac{1}{8}}(2x-2) \Leftrightarrow \begin{cases}x>2\\ \log_3(3x-6)=\log_8(2x-2)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>2\\3x-6=2x-2\end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Nhận xét: Cho $a>0, a\neq 1$. Ta có: $\log_a f(x)=\log_b g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)>0\\f(x)=g(x).\end{cases}$

Ví dụ 8. Giải phương trình đưa ra trong Hoạt động 3.

Lời giải

Phương trình thể hiện nồng độ x của inon hydrogen $\left[H^+\right]$ trong mẫu nước sông đó là:

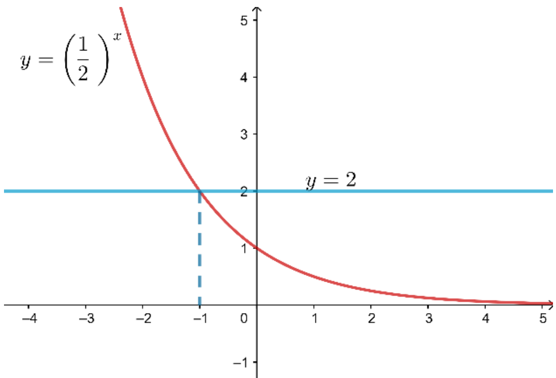
$-\log x=6,1 \Leftrightarrow \log x=-6,1 \Leftrightarrow x=10^{-6,1}$.

Vậy nồng độ của inon hydrogen $\left[H^+\right]$ trong mẫu nước sông đó là $10^{-6,1}\left(\text{mol L}^{-1}\right)$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Bất phương trình mũ

5 Quan sát Hình 11 và nêu nhận xét về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Từ đó, hãy tìm x sao cho $\left(\frac{1}{2}\right)^x>2$.



Hình 11

Lời giải

Hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ nghịch biến trên R

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2 \Rightarrow x > -1$$

- Bất phương trình mũ là bất phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.
- Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình mũ có một trong những dạng sau:

$a^x > b; a^x < b; a^x \geq b; a^x \leq b\left(a>0, a \neq 1\right)$.

Ví dụ 9. Bất phương trình nào là bất phương trình mũ cơ bản trong các bất phương trình sau:

a) $3^x > 27$; b) $2^{x+5} > 3^{2x+1}$; c) $7^x \leq 12$;

Lời giải

Ta thấy: hai bất phương trình $3^x > 27$ và $7^x \leq 12$ là những bất phương trình mũ cơ bản.

Luyện tập - Vận dụng 5. Cho 2 ví dụ về bất phương trình mũ cơ bản.

Lời giải

$2^x > 5$

$3^x > 12$

Sau đây, ta sẽ nêu cách giải bất phương trình mũ cơ bản

Xét bất phương trình mũ: $a^x > b$ $(a>0;\ a \neq 1)$.

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\mathbb{R}$ (vì $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$).
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

+ Với $a > 1$, tập nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

+ Với $0 < a < 1$, tập nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Lưu ý:

- Với $a > 1$ thì $a^x > a^\alpha \Leftrightarrow x > \alpha$.
- Với $0 < a < 1$ thì $a^x > a^\alpha \Leftrightarrow x < \alpha$.

Ví dụ 10: Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $5^x > 12$.

b) $(0,3)^{x+1} > 1,7$.

Lời giải

Ta có:

a) $5^x > 12 \Leftrightarrow x > \log_5 12$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(\log_5 12; +\infty)$.

a) $(0,3)^{x+1} > 1,7 \Leftrightarrow x+1 < \log_{0,3} 1,7 \Leftrightarrow x < -1+\log_{0,3} 1,7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty;-1+\log_{0,3}1,7\right)$.

Nhận xét: các bất phương trình muc cơ bản còn lại được giải tương tự.

Luyện tập 6. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $7^{x+3}<343$.

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\geq 3$.

Lời giải

$$\text{a)}\,7^{x+3}<343$$
$$\Leftrightarrow 7^{x+3}<7^{3}$$
$$\Leftrightarrow x+3<3$$
$$\Leftrightarrow x<0$$

$$\text{b)}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\geq 3$$
$$\Leftrightarrow x\leq \log_{\frac{1}{4}}3$$

Ví dụ 11. Dân số nước ta năm 2021 ước tính là 98 564 407 người.*(Nguồn: https://danso.org/viet-nam)*

Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta là $0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2021) ước tính theo công thức: $S=A.e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 110 triệu người?

Lời giải

Xét bất phương trình:

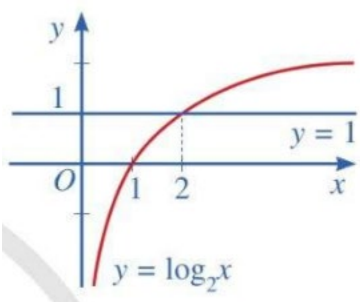
$$98564407.e^{0,0093t}>110000000\Leftrightarrow e^{0,0093t}>110000000:98564407$$
$$\Leftrightarrow 0,0093t>\ln\frac{110000000}{98564407}\Leftrightarrow t>11,803$$

Vậy từ năm 2033 trở đi thì dân số nước ta vượt quá 110 triệu người.

2. Bất phương trình logarit

Hoạt động 6:

Quan sát hình 12 và nêu nhận xét về tính đồng biến , nghịch biến của hàm số logarit $y=\log_2 x$. Từ đó, hãy tìm x sao cho $\log_2 x>1$.



Hình 12

Lời giải

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$

- Bất phương trình logarit là bất phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu logarit.
- Bất phương trình logarit cơ bản là bất phưng trình logarit có một trong những dạng sau:

$$\log_a x > b; \log_a x \ge b;\ \log_a x < b;\ \log_a x \le b\ (a>0; a \ne 1).$$

Luyện tập 7. Cho hai ví dụ về bất phương trình logarit cơ bản.

Lời giải

$$\log_2 x > 4$$
$$\log_4 x > 16$$

Ví dụ 12. Bất phương trình nào là bất phương trình logarit cơ bản trong các bất phương trình sau?

$a)\log_2 x > 3;\quad b)\log_5 x > \log_9(x+1);\quad c)\log_8 x \le 2$

Giải

Ta thấy: hai bất phương trình $\log_2 x > 3;\ \log_8 x \le 2$ là những bất phương trình logarit cơ bản.

Xét bất phương trình $\log_a x > b\,(a>0; a\ne 1)$.

Bất phương trình tương đương với $\log_a x > \log_a a^b$.

+ Với $a>1$, tập nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
+ Với $0<a<1$, tập nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Ví dụ 13. Giải mỗi bất phương trình sau:

$a)\ \log_{\frac{1}{2}} x > -2;\quad b)\log_2(x+1) > 3$.

Lời giải

Ta có:

a) $\log_{\frac{1}{2}} x > -2 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 0 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0;4)$.

a) $\log_2(x+1) > 3 \Leftrightarrow x+1 > 2^3 \Leftrightarrow x > 7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(7;+\infty)$.

Nhận xét: các bất phương trình muc cơ bản còn lại được giải tương tự.

Ví dụ 14: Mức cường độ âm L (đơn vị:dB) được tính bởi công thức $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm *(Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021)*. Mức cường độ âm ở một khu dân cư được quy định là dưới 60dB. Hỏi cường độ âm ở khu vực đó phải dưới bao nhiêu W/m^2?

Lời giải

Ta có :

$$L < 60 \Leftrightarrow 10\log\frac{I}{10^{-12}} < 60 \Leftrightarrow \log\frac{I}{10^{-12}} < 6 \Leftrightarrow \log I - \log 10^{-12} < 6$$
$$\Leftrightarrow \log I + 12 < 6 \Leftrightarrow \log I < -6 \Leftrightarrow I < 10^{-6}$$

Vậy cường độ âm ở khu vực đó phải dưới $10^{-6}\ (W/m^2)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

▷ $a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x),\ (a > 0, a \neq 1)$

▷ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \overset{a>0,a\neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) > 0\ (hoac\ g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

▷ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình mũ sau

a) $3^{x^2-4x+5} = 9$ b) $1,5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ c) $2^{2x-1} + 4^{x+2} = 10$

Giải

a) Đưa hai vế về cùng cơ số 3, ta được phương trình đã cho tương đương với: $3^{x^2-4x+5} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2^{(1)} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.

Giải phương trình bậc hai này được hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 3$.

b) Đưa về cùng cơ số 1,5, phương trình đã cho tương đương với:

$1,5^{5x-7} = 1,5^{-x-1} \Leftrightarrow 5x - 7 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

c) Phương trình đã cho tương đương với

$\frac{1}{2}\cdot 4^x + 16\cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow \frac{33}{2}\cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow 4^x = \frac{20}{33} \Leftrightarrow x = \log_4\frac{20}{33}$.

Vậy $x = \log_4\frac{20}{33}$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\log_3(2x+1) = \log_3 5$ b) $\log_2(x+3) = \log_2\left(2x^2 - x - 1\right)$

c) $\log_5(x-1) = 2$ d) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$

Lời giải

a) ĐK: $2x+1>0 \Leftrightarrow x>(-1/2)$

$\text{PT} \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$ (thoả ĐK)

b) ĐK: $x+3>0, 2x^2-x-1>0$ ta được: $x>1$ hoạcc $(-3)<x<(-1/2)$

Ta có: $\log_2(x+3)=\log_2\left(2x^2-x-1\right) \Leftrightarrow x+3=2x^2-x-1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$ (thoả) hoặc $x=2$ (thoả)

c) ĐK: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Ta có: $\log_5(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=5^2 \Leftrightarrow x=26$ (thoả)

d) ĐK: $x-5>0$ và $x+2>0$ ta được: $x>5$

Ta có:

$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3 \Leftrightarrow \log_2(x-5)(x+2)=3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2)=2^3$

$\Leftrightarrow x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow x=-3$ (loại) hoạcc $x=6$ (thoả)

Ví dụ 1: Giải bất phương trình mũ sau: $3^{x^2-x} \le 3^{1-x}$

Lời giải

Ta có: $3^{x^2-x} \le 3^{1-x} \Leftrightarrow x^2-x \le 1-x \Leftrightarrow x^2-1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $[-1;1]$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình mũ sau: $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2-x}$

Lời giải

- Ta có thể biến đổi theo 1 trong 2 cách sau (thực tế thì cùng phương pháp).

Cách 1: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x-2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left[-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

Cách 2: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow -4x \le 2-x \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left[-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}-2)^{-x^2+3}$.

Lời giải

Ta có: $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+2)^{-1}$

Vậy: $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}-2)^{-x^2+3} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}+2)^{x^2-3} \Leftrightarrow x-1 \ge x^2-3$

$\Leftrightarrow x^2-x-2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$

Vậy BPT có tập nghiệm $S=[-1;2]$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \le 0$

Lời giải

Đặt $t = \log_2 x$, khi đó phương trình trở thành:

$t^2 - 5t - 6 \le 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-6) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 6$

Do đó ta có:

$-1 \le \log_2 x \le 6 \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} \le \log_2 x \le \log_2 64 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 64$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2};64\right]$.

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

$\alpha a^{2x} + \beta . a^x + \gamma = 0$. Đặt $t = a^x, (t > 0)$

$\alpha \log_a^2 x + \beta . \log_a x + \gamma = 0$. Đặt $t = \log_a x, (x > 0)$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ b) $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$

c) $5^x + 5^{1-x} - 6 = 0$ d) $25^x - 2.5^x - 15 = 0$

Lời giải

a) $9^x - 4.3^x + 3 = 0$ đặt $t = 3^x$ với $t > 0$ ta được phương trình: $t^2 - 4.t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$ (2 nghiệm đều thoả điều kiện $t > 0$).

với $t = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

với $t = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

b) $9^x - 3.6^x + 2.4^x = 0$ chia 2 vế của phương trình cho 4^x ta được phương trình sau $\left(\frac{9}{4}\right)^x - 3\left(\frac{6}{4}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0$ đặt $t = (3/2)^x$ với $t > 0$ ta được phương trình

$t^2 - 3.t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$ (2 nghiệm đều thoả $t > 0$)

với $t = 1 \Leftrightarrow (3/2)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

với$t = 2 \Leftrightarrow (3/2)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2$

c) $5^x + 5^{1-x} - 6 = 0 \Leftrightarrow 5^x + 5.5^{-x} - 6 = 0$

Đặt $t = 5^x$ (với $t > 0$) thì $5^{-x} = 1/t$ ta được phương trình:

$t + 5\frac{1}{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 5$ (thoả điều kiện $t > 0$)

với $t = 1 \Leftrightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

với $t = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

d) d) $25^x - 2.5^x - 15 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 2.5^x - 15 = 0$ đặt $t = 5^x$ với $t > 0$ ta được phương trình

$t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 5$ (nhận) hoặc $t = -3$ (loại) với $t=5 \Leftrightarrow 5^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\log_3^2 x+2\log_3 x-3=0$

b) $4\log_9 x+\log_x 3-3=0$

Lời giải

a) ĐK: $x>0$

Ta đặt $t=\log_3 x$ khi đó $PT \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoạcc $t=-3$

Với t $=1 \Leftrightarrow \log_3 \mathrm{x}=1 \Leftrightarrow \mathrm{x}=3$

Với $t=-3 \Leftrightarrow \log_3 x=-3 \Leftrightarrow x=3^{-3}=1/27$

b) $4\log_9 x+\log_x 3-3=0$ ĐK: $0<x\neq 1$

$\mathrm{PT} \Leftrightarrow 2\log_3 \mathrm{x}+1/\log_3 \mathrm{x}-3=0$

Ta đặt $\mathrm{t}=\log_3 \mathrm{x}$ khi đó $\mathrm{PT} \Leftrightarrow 2\mathrm{t}+1/\mathrm{t}-3=0 \Leftrightarrow 2t^2-3\mathrm{t}+1=0 \Leftrightarrow \mathrm{t}=1$ hoặc $\mathrm{t}=1/2$

Vớit $=1 \Leftrightarrow \log_3 x=1 \Leftrightarrow x=3$ (thoả)

Vớit $=1/2 \Leftrightarrow \log_3 x=1/2 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (thoả)

Ví dụ 3: Giải bất phương trình mũ sau: $9^x+2.3^{x+1}-16\geq 0$

Lời giải

$9^x+2.3^{x+1}-16\geq 0\ (*)$

Ta đặt $t=3^x$ (điều kiện $t>0$), khi đó phương trình $(\ ^*)$ biến đổi về dạng:

$3^{2x}+6.3^x-16\geq 0 \Leftrightarrow t^2+6t-16\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq -8(\text{ loai }) \\ t\geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t\geq 2$

Với: $t\geq 2 \Leftrightarrow 3^x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \log_3 2$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $\left[log_3 2;+\infty\right)$

Ví dụ 4: Giải bất phương trinh sau: $(7+4\sqrt{3})^x-3(2-\sqrt{3})^x+2\leq 0$

Lời giải

Ta có: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ và $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ nên đặt $\mathrm{t}=(2+\sqrt{3})^{\mathrm{x}},\mathrm{t}>0$ ta có bất phương trình:

$t^2-3/t+2\leq 0 \Leftrightarrow t^3+2t-3\leq 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+3\right)\leq 0 \Leftrightarrow t\leq 1 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq 0$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm là $x\leq 0$

Dạng 3: Logarit hóa, mũ hóa

1. Phương pháp

$$a^{f(x)}=b \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\neq 1 \\ b>0 \\ f(x)=\log_a b \end{cases}.$$

$$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)=a^b \end{cases}$$

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < a < 1\\ f(x) < \log_a b\end{cases}\\ \begin{cases}a > 1\\ f(x) > \log_a b\end{cases}\end{array}\right.$$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a > 1\\ f(x) > g(x).\log_a^b\end{cases}\\ \begin{cases}0 < a < 1\\ f(x) < g(x).\log_a^b\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\log_a f(x) > b \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a > 1\\ f(x) > a^b\end{cases}\\ \begin{cases}0 < a < 1\\ f(x) < a^b\end{cases}\end{array}\right.$$

2. Ví dụ

Vi dụ 1: Giải phương trình sau

a) $3^x = 2$ b) $2^x \cdot 3^x = 1$

Lời giải

a) $3^x = 2$ ta logarit cơ số 3 hay vế

$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_3 3^x = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$

$b) 2^x \cdot 3^x = 1 \Leftrightarrow (2.3)^x = 1 \Leftrightarrow 6^x = 1 \Leftrightarrow \log_6 6^x = \log_6 1 \Leftrightarrow x = 0$

Hoặc có thể làm như sau, lấy logarit cơ số 2 của 2 vế ta được

$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x \cdot 3^x\right) = \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x \cdot 3^x\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 3^x = 0$

$\Leftrightarrow x + x \cdot \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x\left(1 + \log_2 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\ln(x+3) = -1 + \sqrt{3}$

b) $\log_2\left(5 - 2^x\right) = 2 - x$

Lời giải

a) ĐK: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ với điều kiện này ta mũ hóa 2 vế của PT đã cho ta được PT: $e^{ln(x+3)} = e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x + 3 = e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = e^{-1+\sqrt{3}} - 3$ (thoả)

b) $\log_2\left(5 - 2^x\right) = 2 - x$

ĐK: $5 - 2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 5$

$\text{PT} \Leftrightarrow 2^{\log_2 5 - 2^x} = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = 4.2^{-x}$

Đặt $t = 2^x \left(t > 0, t < 5 \text{ do } 2^x < 5\right)$ ta được: $5 - t = (4/t) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ (thoả) hoạc $t = 4$ (thoả)

Vớit $= 1 \Leftrightarrow \text{x} = 0$

Vớit $= 4 \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $2^{x^2-4} \geq 5^{x-2}$.

Lời giải

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của bất phương trình đã cho ta có:

$$\log_2\left(2^{x^2-4}\right) \ge \log_2\left(5^{x-2}\right) \Leftrightarrow x^2-4 \ge (x-2)\log_2 5 \Leftrightarrow (x-2)\left(x+2-\log_2 5\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le \log_2 5-2 \end{array}\right.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S=\left(-\infty;\log_2 5-2\right]\cup[2;+\infty)$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình logarit sau: $\log_8(4-2x) \ge 2$

Lời giải

- Điều kiện $4-2x>0$ suy ra $x<2$.

$$\log_8(4-2x) \ge 2 \Leftrightarrow \log_8(4-2x) \ge \log_8 8^2 \Leftrightarrow 4-2x \ge 8^2 \Leftrightarrow 4-2x \ge 64 \Leftrightarrow 2x \le -60 \Leftrightarrow x \le -30$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình logarit là: $(-\infty;-30]$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1 . Giải mỗi phương trình sau:

a) $(0,3)^{x-3}=1$.

b) $5^{3x-2}=25$.

c) $9^{x-2}=243^{x+1}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-3$.

e) $\log_5(3x-5)=\log_5(2x+1)$.

g) $\log_{\frac{1}{7}}(x+9)=\log_{\frac{1}{7}}(2x-1)$.

Lời giải

a) $(0,3)^{x-3}=1 \Leftrightarrow (0,3)^{x-3}=(0,3)^0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

b) $5^{3x-2}=25 \Leftrightarrow 5^{3x-2}=5^2 \Leftrightarrow 3x-2=2 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$

c) $9^{x-2}=243^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2(x-2)}=3^{5(x+1)} \Leftrightarrow 2x-4=5x+5 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-3$

ĐKXĐ: $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(8) \Leftrightarrow x+1=8 \Leftrightarrow x=7.$$

e) $\log_5(3x-5)=\log_5(2x+1)$

ĐKXĐ: $x>\dfrac{5}{3}$

$$\log_5(3x-5)=\log_5(2x+1) \Leftrightarrow 3x-5=2x+1 \Leftrightarrow x=6$$

g) $\log_{\frac{1}{7}}(x+9)=\log_{\frac{1}{7}}(2x-1)$

ĐKXĐ: $x>\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{7}}(x+9)=\log_{\frac{1}{7}}(2x-1)\Leftrightarrow x+9=2x-1\Leftrightarrow x=10$

Bài 2. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $3^x>\frac{1}{243}$;

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7}\le\frac{3}{2}$;

c) $4^{x+3}\ge 32^x$;

d) $\log(x-1)<0$;

e) $\log_{\frac{1}{5}(2x-1)}\ge\log_{\frac{1}{5}}(x+3)$;

g) $\ln(x+3)\ge\ln(2x-8)$.

Lời giải

a) $3^x>\frac{1}{243}\Leftrightarrow 3^x>3^{-5}\Leftrightarrow x>-5$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3x-7\ge -1\Leftrightarrow 3x\ge 6\Leftrightarrow x\ge 2$

c) $4^{x+3}\ge 32^x\Leftrightarrow 2^{2(x+3)}\ge 2^{5x}\Leftrightarrow 2x+6\ge 5x\Leftrightarrow -3x\ge -6\Leftrightarrow x\le 2$

d) $\log(x-1)<0$

$ĐKXĐ: x>1$

$\log(x-1)<0\Leftrightarrow\log(x-1)<\log(1)\Leftrightarrow x-1<1\Leftrightarrow x<2$

Kết hợp với ĐKXĐ: $1<x<2$

e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)\ge\log_{\frac{1}{5}}(x+3)$

ĐKXĐ: $x>\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)\ge\log_{\frac{1}{5}}(x+3)\Leftrightarrow 2x-1\le x+3\Leftrightarrow x\le 4$

Kết hợp với $ĐKXĐ\Rightarrow\ \frac{1}{2}<x\le 4$

g) $\ln(x+3)\ge\ln(2x-8)$

ĐKXĐ: $x>3$

$\ln(x+3)\ge\ln(2x-8)\Leftrightarrow x+3\ge 2x-8\Leftrightarrow x\le 11$

Kết hợp với $ĐKXĐ\Rightarrow 3<x\le 11$

Bài 3. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $x\%/\text{năm}(x>0)$. Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x, biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

Ta có công thức: $100.\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^3=119,1016 \Leftrightarrow 1+\dfrac{x}{100}=1,06 \Leftrightarrow \dfrac{x}{100}=0,06 \Leftrightarrow x=6$.

Bài 4. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12}\,\mathrm{W}/m^2$ đến $10W/m^2$.

Lời giải

$L=10\log\dfrac{I}{10^{-12}} \Leftrightarrow 130=10\log\dfrac{I}{10^{-12}}$

$\Leftrightarrow \log\dfrac{I}{10^{-12}}=13 \Leftrightarrow \log\dfrac{I}{10^{-12}}=\log 1.10^{13}$

$\Leftrightarrow \dfrac{I}{10^{-12}}=1.10^{13}$

$\Leftrightarrow I=10$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình $2^{2x+1}=32$ có nghiệm là

A. $x=\dfrac{5}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x+1}=32 \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 2: Phương trình $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-x+1} \Leftrightarrow x^2-2x-3=-x+1 \Leftrightarrow x^2-x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

Câu 3: Phương trình $\log_{\sqrt{2}}x=\log_2(x+2)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\log_{\sqrt{2}}x=\log_2(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x^2=\log_2(x+2)\\ x>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x+2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x^2+4x>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-4 \end{array}\right. \\ x>-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3(2x+3)$

$$\Leftrightarrow x^2+4x=2x+3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta được $x=1$.

Câu 5: Tập nghiệm S của phương trình $\left(\dfrac{4}{7}\right)^x\left(\dfrac{7}{4}\right)^{3x-1}-\dfrac{16}{49}=0$ là

A. $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $\left\{\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\dfrac{1}{2};2\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\dfrac{4}{7}\right)^x\left(\dfrac{7}{4}\right)^{3x-1}-\dfrac{16}{49}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{7}\right)^{-2x+1}=\left(\dfrac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow -2x+1=2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Cho phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{x^2+x-1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình có hai nghiệm không dương.

B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải

Chọn A

Do $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2\left(x^2+x-1\right)}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2x^2+2x-2=x-2 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1>0 \\ 3x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$.

Khi đó phương trình trở thành

$\log_2(2x+2)=\log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2x+2=3x-1 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

Câu 8: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$ là

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>5$

$3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3 \Leftrightarrow 3\log_3(x-1)+3\log_3(x-5)=3$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)+\log_3(x-5)=1 \Leftrightarrow \log_3\left[(x-1)(x-5)\right]=1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)=3$

$\Leftrightarrow x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{7}$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x=3+\sqrt{7}$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^{x+1}.4^{x-1}.\dfrac{1}{8^{1-x}}=16^x$ là

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=4$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

$2^{x+1}.4^{x-1}.\dfrac{1}{8^{1-x}}=16^x \Leftrightarrow 2^{x+1}.2^{2(x-1)}.2^{3(x-1)}=2^{4x}$

$\Leftrightarrow x+1+2(x-1)+3(x-1)=4x \Leftrightarrow x=2.$

Câu 10: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x-1}.3^{x^2-2x}=18$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x^2-2x-1}.3^{x^2-2x}=18 \Leftrightarrow 6^{x^2-2x}=36 \Leftrightarrow x^2-2x=2 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0$.

Phương trình $x^2-2x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí vi-et tổng hai nghiệm của phương trình là: $x_1+x_2=2$.

Câu 11: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ là $S=a+b\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $Q=a.b$ bằng

A. 0.　　**B.** 3.　　**C.** 9.　　**D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2<x\neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0 \Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4|=0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4|=1$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1\\(x-2)(x-4)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\x^2-6x+9=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\pm\sqrt{2}\\x=3\end{array}\right.$ So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm $x_1=3+\sqrt{2};x_2=3$

Ta được: $S=x_1+x_2=6+\sqrt{2}\Rightarrow a=6;b=1$.

Vậy $Q=a.b=6$.

Câu 12: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2^2x-3\log_2x+2=0$. Tính $P=x_1+x_2$.

A. 6.　　**B.** -3.　　**C.** 2.　　**D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$$\log_2^2x-3\log_2x+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2x=1\\\log_2x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=4\end{array}\right..$$

Vậy $P=x_1+x_2=2+4=6$.

Câu 13: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2x-3\log_3x.\log_23+2=0$

A. 20　　**B.** 18　　**C.** 6　　**D.** 25

Lời giải

Chọn A

$$\log_2^2x-3\log_3x.\log_23+2=0\Leftrightarrow\log_2^2x-3\log_2x+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2x=1\\\log_2x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=4\end{array}\right.\Rightarrow x_1^2+x_2^2=20$$

Câu 14: Phương trình $6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Khi đó tổng hai nghiệm x_1+x_2 là.

A. 5.　　**B.** 3.　　**C.** 2.　　**D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0\Leftrightarrow\frac{6^{2x}}{6}-\frac{5.6^x}{6}+1=0\Leftrightarrow 6^{2x}-5.6^x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6^{x_1}=2\\6^{x_2}=3\end{array}\right..$$

$$\Rightarrow 6^{x_1}.6^{x_2}=3.2\Leftrightarrow 6^{x_1+x_2}=6\Leftrightarrow x_1+x_2=1.$$

Câu 15: Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính T.

A. $T = 4$. **B.** $T = 5$. **C.** $T = 84$. **D.** $T = -4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 1\\ \log_3 x = 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3\\ x = 81\end{array}\right.$.

Vậy $T = 3 + 81 = 84$.

Câu 16: Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có: $9^x - 6^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^x - 6^x = 2.4^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1 (L)\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

Câu 17: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 4$. Khi đó $x_1^2 + 2x_2^2$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right)^x.\left(2+\sqrt{3}\right)^x = 1$. Đặt $t = \left(2-\sqrt{3}\right)^x, t > 0 \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$.

Với $t = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy $x_1^2 + 2x_2^2 = 3$.

Câu 18: Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - \log_2(2018x) - 2019 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2.Tích x_1x_2 bằng

A. $\log_2 2018$ **B.** 0,5 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

$\log_2^2 x - \log_2(2018x) - 2019 = 0$. (1)

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t=\log_2 x$. Phương trình trở thành $t^2-t-\log_2 2018-2019=0.$ (2)

Do $ac<0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm t_1,t_2. Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $t_1=\log_2 x_1; t_2=\log_2 x_2$.

Theo Vi-et ta có $t_1+t_2=1$ hay $\log_2(x_1x_2)=1 \Leftrightarrow x_1x_2=2$.

Câu 19: Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x^2-\log_4(4x^2)-5=0$.

A. 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\neq 0$.

Phương trình $\log_2^2 x^2-\log_4(4x^2)-5=0 \Leftrightarrow \log_2^2 x^2-\frac{1}{2}\log_2 x^2-6=0$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2=\frac{1+\sqrt{97}}{4} \vee \log_2 x^2=\frac{1-\sqrt{97}}{4}$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 20: Cho phương trình $\log_5(5^x-1).\log_{25}(5^{x+1}-5)=1$. Khi đặt $t=\log_5(5^x-1)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2-1=0$ **B.** $t^2+t-2=0$ **C.** $t^2-2=0$ **D.** $2t^2+2t-1=0$

Lời giải

Chọn B

$\log_5(5^x-1).\log_{25}(5^{x+1}-5)=1$ (1)

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có $\log_{25}(5^{x+1}-5)=\log_{5^2}(5.5^x-5)=\frac{1}{2}\left(\log_5(5^x-1)+1\right)$.

Đặt $t=\log_5(5^x-1)$ $(t>0)$.

Phương trình (1) trở thành $t.\frac{1}{2}(t+1)=1 \Leftrightarrow t^2+t-2=0$.

Câu 21: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^x+3^{4-x}=30$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 27.

Lời giải

Chọn A

$3^x+3^{4-x}=30 \Leftrightarrow 3^x+\frac{81}{3^x}=30$.

Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, phương trình đã cho trở thành:

$t+\frac{81}{t}=30 \Leftrightarrow t^2-30t+81=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=27 \Rightarrow 3^x=27 \Leftrightarrow x=3 \\ t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1 \end{array}\right.$ Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình là $1.3=3$.

Câu 22: Biết phương trình $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = (x_1)^{x_2}$

A. $T = 64$. **B.** $T = 32$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 16$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Ta có: $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7 \Leftrightarrow 2\log_2 x + \dfrac{3}{\log_2 x} = 7$

$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x - 7\log_2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = 8 \Rightarrow T = (x_1)^{x_2} = \left(\sqrt{2}\right)^8 = 16$.

Câu 23: Phương trình $3.9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-1} + 3 = 0$ có tổng các nghiệm thực là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3^{x^2+x-1}$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $t = 3 \Rightarrow 3^{x^2+x-1} = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^{x^2+x-1} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; -1; 0; 1\}$ nên tổng tất cả các nghiệm thực là -2.

Câu 24: Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 4^x, (t > 0)$. Phương trình trở thành: $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt $t > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m < -3 \vee m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{4;5;6\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m = 0$ (1)

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ phương trình trở thành $t^2 - 2m.t + 2m = 0$ (2).

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ điều kiện là phương trình (2) có hai nghiệm t_1, $t_2 > 0$ thỏa mãn $t_1.t_2 = 2^{x_1}.2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 8$ suy ra $2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 26: Tìm giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$.

A. $m = -4$ **B.** $m = 44$ **C.** $m = 81$ **D.** $m = 4$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_3 x$ ta được $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$, tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm t_1, t_2

$t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3(x_1x_2) = \log_3 81 = 4$

Theo vi-et suy ra $t_1 + t_2 = m \Rightarrow m = 4$

Câu 27: Số nghiệm của phương trình $(x-2)\left[\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) + 1\right] = 0$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right.$.

Kết hợp ĐKXĐ ta có:

$(x-2)\left[\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0,5^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với ĐKXĐ ta thấy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $9 - 7 = 2$

Câu 28: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là

A. $\{0\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{-1;0\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2\left(x^2-x+2\right)=1 \Leftrightarrow x^2-x+2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Câu 29: Nghiệm của phương trình $\log(x-1)=2$ là

A. 5. **B.** 21. **C.** 101. **D.** 1025.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của phương trình là $x>1$.

$\log(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=10^2 \Leftrightarrow x=101$.

Vậy $x=101$ thỏa mãn điều kiện nên phương trình đã cho có nghiệm là $x=101$.

Câu 30: Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$ là:

A. $\{16\}$. **B.** $\{\sqrt{2}\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$$\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=7 \Leftrightarrow \frac{7}{4}\log_2 x=7.$$

$\Leftrightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=2^4 \Leftrightarrow x=16$.

Câu 31: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$ bằng

A. $-3\log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** -4. **D.** $1-\log_2 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2-1}=3^{2x+3} \Leftrightarrow x^2-1=(2x+3)\log_2 3 \Leftrightarrow x^2-2\log_2 3.x-1-3\log_2 3=0$.

Vì $ac<0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và

$x_1x_2=-1-3\log_2 3=-\log_2 2-\log_2 27=-\log_2 54$.

Câu 32: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x.5^{x^2-2x}=1$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. $2-\log_5 2$. **B.** $-2+\log_5 2$. **C.** $2+\log_5 2$. **D.** $2-\log_2 5$.

Lời giải

$$2^x.5^{x^2-2x}=1 \Leftrightarrow \log_5\left(2^x.5^{x^2-2x}\right)=0 \Leftrightarrow x\log_5 2+x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\left(\log_5 2+x-2\right)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2-\log_5 2 \end{array}\right..$$

Câu 33: Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x=-\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x = 72 \Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)}.2^x = 3^2.2^3 \Leftrightarrow \frac{3^{\frac{3x-3}{x}}}{3^2} = \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2} = 2^{3-x}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = \log_3 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = -(x-3)\log_3 2 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{x} + \log_3 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ -\log_3 2 = \frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3(N) \\ x = -\log_2 3(N) \end{array}\right.$.

Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy tổng $S = a + b = 5$.

Câu 34: Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_4(3.2^x - 1) = x - 1$

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

$\log_4(3.2^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 3.2^x - 1 = 4^{x-1} \Leftrightarrow 4^x - 12.2^x + 4 = 0$

Đặt $t = 2^x\,(t > 0)$. Phương trình trở thành: $t^2 - 12t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \pm 4\sqrt{2}$

Với $t = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 6 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2(6 + 4\sqrt{2})$.

Với $t = 6 - 4\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 6 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2(6 - 4\sqrt{2})$.

Tổng các nghiệm là $\log_2(6 + 4\sqrt{2}) + \log_2(6 - 4\sqrt{2}) = \log_2 4 = 2$.

Câu 35: Phương trình $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$ có hai ngiệm x_1, x_2. Tính $P = x_1 + x_2 + x_1x_2$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2^x < 5$

$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2$

Câu 36: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_6(3.4^x + 2.9^x) = x + 1$ bằng

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương $3.4^x + 2.9^x = 6^{x+1} \Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, (t > 0)$. Khi đó ta có phương trình $3t^2 - 6t + 2 = 0$

Hiển nhiên phương trình có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 dương và thỏa mãn $t_1.t_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $4^x - (m+3).2^{x+1} + m + 9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t = 2^x \left(x > 0 \Rightarrow t > 1 \right)$, phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(m+3)t + m + 9 = 0$.

Bài toán trở thành: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình:

$t^2 - 2(m+3)t + m + 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $1 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ \frac{S}{2} = m + 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 \ (*) \\ \frac{S}{2} = m + 3 > 1 \end{cases}$$

Phương trình: $t^2 - 2(m+3)t + m + 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 nên theo Viet ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+3) \\ t_1.t_2 = m + 9 \end{cases}$$

Thay vào hệ $(*)$ ta được $\begin{cases} m^2 + 5m > 0 \\ -m + 4 > 0 \\ m + 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 0 \end{array} \right. \\ m < 4 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Vì $m \in \mathbb{Z}, 0 < m < 4 \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Cho phương trình $4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 \le x_1 < x_2$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 4.2^x + m - 2 = 0 \ (1)$. Đặt $t = 2^x \ (t > 0)$

$(1) \Leftrightarrow t^2 - 4t + m - 2 = 0 \ (2)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 \le x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow 2^0 \le 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 1 \le t_1 < t_2$

Thì phương trình (2) thỏa: $0 \le t_1 - 1 < t_2 - 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(m-2) > 0 \\ 4 > 2 \\ t_1t_2 - (t_1 + t_2) + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \ge 5 \end{cases}$. Vậy $m = 5$ thỏa yêu cầu.

Câu 39: Phương trình $\left(1+\sqrt{2}\right)^x + (1-2a)\left(\sqrt{2}-1\right)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. **C.** $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$. Đặt $t = \left(1+\sqrt{2}\right)^x \ (t > 0) \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^x = \frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2t = 0 \ (1)$.

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương t_1, t_2.

$\begin{cases} \Delta' = 2a + 3 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1t_2 = 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < a < \frac{1}{2}$.

Và thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3 \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)^{x_1 - x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1t_2 = 1 - 2a = 1.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

Vậy với $a = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

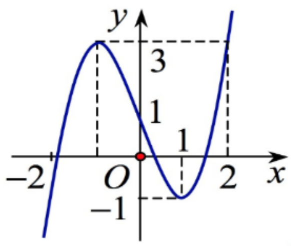
Câu 40: Cho phương trình $4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m + 1 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m \in (1;3)$. **B.** $m \in (-5;-3)$. **C.** $m \in (-3;0)$. **D.** $m \in (0;1)$.

Lời giải

Chọn D

$4^{x+1}-(8m+5)2^x+2m+1=0\ (*)$



Đặt $t=2^x$, điều kiện $t>0$, phương trình $(*)$ trở thành

$4t^2-(8m+5)t+2m+1=0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-2m-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1}{4} \\ t_2=2m+1. \end{array}\right.$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m+1>0 \\ 2m+1\neq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{2} \\ m\neq -\dfrac{3}{8}. \end{cases}\ (**)$

Lại có $x_1x_2=-1 \Leftrightarrow \log_2 t_1\cdot\log_2 t_2=-1 \Leftrightarrow \log_2\dfrac{1}{4}\cdot\log_2(2m+1)=-1 \Leftrightarrow \log_2(2m+1)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2m+1=\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Câu 41: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn các điêu kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$. Tổng các giá trị của S bằng

A. 33. **B.** 24. **C.** 15. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $4x+4y-4>0$

Ta có $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6=0 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x;y)$

.

Với $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ là phương trình đường tròn tâm $A(2;2)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Với $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$ là phương trình đường tròn tâm $B(-1;1)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$ với $m>0$.

Hai đường tròn có điểm chung duy nhất khi xảy ra các trường hợp sau:

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $AB=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{m}+\sqrt{2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow m=(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$.

Hai đường tròn tiếp xúc trong $AB=|R_1-R_2| \Leftrightarrow \sqrt{m}-\sqrt{2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow m=(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2$.

Vậy tổng các giá trị của tham số $m=(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2=24$.

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|}=m^4-m^2+1$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. $0<|m|<1$. **B.** $|m|<1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m<0$.

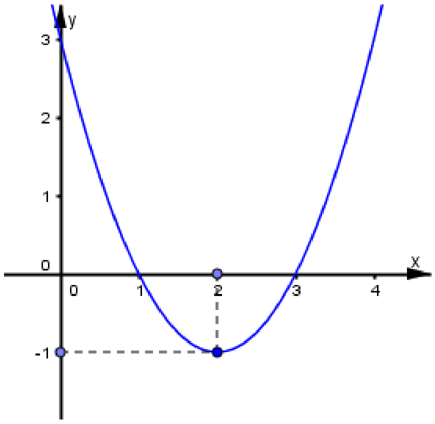
Lời giải

Chọn A

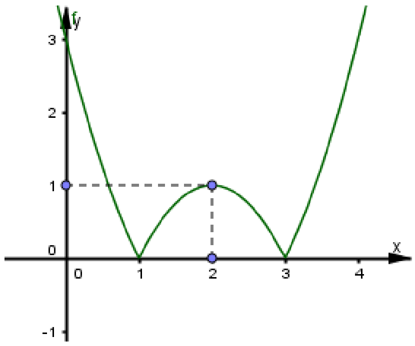
Vì $m^4 - m^2 + 1 > 0, \forall m$ nên phương trình tương đương với

$\left|x^2 - 4x + 3\right| = \log_{\frac{1}{5}}\left(m^4 - m^2 + 1\right)$ (1)

Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 4x + 3$



Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$0 < \log_{\frac{1}{5}}\left(m^4 - m^2 + 1\right) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < m^4 - m^2 + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < |m| < 1$.

Câu 43: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 9^t \end{cases}$.

Mà $4^t.9^t = (6^t)^2 \Rightarrow x(x+y) = y^2 \Leftrightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (l) \\ \frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (t/m) \end{array}\right.$.

Câu 44: Nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$ là

A. $x \geq -4$. **B.** $x < 0$. **C.** $x > 0$. **D.** $x < 4$.

Lời giải

Chọn A

$3^{x+2} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \geq 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Câu 45: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là:

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $S=(1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2-4x > -3 \Leftrightarrow x^2-4x+3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$.

Vậy $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 46: Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1$ ta được tập nghiệm T. Tìm T.

A. $T=[-2;2]$. **B.** $T=[2;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;-2]$. **D.** $T=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2;2]$

Vậy tập nghiệm $T=[-2;2]$.

Câu 47: Bất phương trình $2^x > 4$ có tập nghiệm là:

A. $T=(2;+\infty)$. **B.** $T=(0;2)$. **C.** $T=(-\infty;2)$. **D.** $T=\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

$2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T=(2;+\infty)$.

Câu 48: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

A. $S=(3;7]$. **B.** $S=[3;7]$. **C.** $S=(-\infty;7]$. **D.** $S=[7;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \ge \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow 0 < x-3 \le 4 \Leftrightarrow 3 < x \le 7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3;7]$.

Câu 49: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{-x^2+3x} < 4$

A. $S = (\infty;1) \cup (2;+\infty)$. **B.** $S = (-\infty;1)$. **C.** $S = \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$. **D.** $S = (2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương với $2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2+3x < 2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Câu 50: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S = (-\infty;2)$. **B.** $S = (-\infty;1)$. **C.** $S = (1;+\infty)$. **D.** $S = (2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < (5)^{2x} \Leftrightarrow 2 < x$.

Câu 51: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+4}$ là

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(0;16)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x} < 2^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x+4 \Leftrightarrow x < 4$.

Câu 52: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln x^2 < 2\ln(4x+4)$ là:

A. $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)$. **B.** $(-1;+\infty) \setminus \{0\}$. **C.** $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right) \setminus \{0\}$. **D.** $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn C

Đk: $-1 < x \ne 0$; $\ln x^2 < 2\ln(4x+4) \Leftrightarrow x^2 < (4x+4)^2 \Leftrightarrow 15x^2+32x+16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{4}{3} \\ x > -\frac{4}{5} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm $S = \left(-\frac{4}{5};+\infty\right) \setminus \{0\}$.

Câu 53: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < \log_2(12-3x)$ là:

A. $(0;6)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2 x < \log_2(12-3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 12-3x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Câu 54: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5) > \log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10?

A. 9. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

$\log_2(2x+5) > \log_2(x-1) \Leftrightarrow 2x+5 > x-1 \Leftrightarrow x > -6$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình: $S = (1;+\infty)$.

Vậy trong tập S có 8 phần tử là số nguyên dương bé hơn 10.

Câu 55: Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > -1$.

$\log_4(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow x+7 > x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Do điều kiện nên tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{0,1\}$.

Câu 56: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x)$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>0 \\ 9-x>0 \\ 2x>9-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<9 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 9$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3;9)$.

Câu 57: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{5}{9};1\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} 9x-5>0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{5}{9} \\ x>-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{5}{9}$.

Ta có: $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5)<\log_{4-\sqrt{3}}(3x+1) \Leftrightarrow 9x-5<3x+1 \Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là: $S=\left(\frac{5}{9};1\right)$.

Câu 58: Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_2(x-3)+\log_2 x\ge 2$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $(3;4]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x>3$.

$\log_2(x-3)+\log_2 x\ge 2 \Leftrightarrow x^2-3x\ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ x\le -1 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của bpt là $S=[4;+\infty)$.

Câu 59: Bất phương trình $2^{x^2-3x+4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình tương đương với $2^{x^2-3x+4}\le 2^{10-2x} \Leftrightarrow x^2-3x+4\le 10-2x \Leftrightarrow x^2-x-6\le 0$ $\Leftrightarrow -2\le x\le 3$. Do $x>0$ nên $0<x\le 3$.

Mà $x\in\mathbb{Z}^+$ nên $x\in\{1;2;3\}$.Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 60: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1}<5^{x+3}$ là:

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-5;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1}<5^{x+3} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}}<5^{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}<x+3 \Leftrightarrow x-1<3x+9 \Leftrightarrow x>-5$.

Câu 61: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}$ là

A. $S=(-\infty;1]$. **B.** $S=[1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;1)$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}+2\right)^{-x+1} \Leftrightarrow x-1\le -x+1 \Leftrightarrow x\le 1$.

Vậy $S=(-\infty;1]$.

Câu 62: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x>3^{x+1}$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. **C.** $\left(-\infty;\log_2 3\right]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow x>\log_2\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow x>(x+1)\log_2 3\Leftrightarrow x(1-\log_2 3)>\log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3}>\log_2 3\Leftrightarrow x<\frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Cách 2: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>3\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Câu 63: Giải bất phương trình $3^{x^2}<2^x$

A. $x\in(0;+\infty)$. **B.** $x\in(0;\log_2 3)$. **C.** $x\in(0;\log_3 2)$. **D.** $x\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^{x^2}<2^x\Leftrightarrow\log_3 3^{x^2}<\log_3 2^x\Leftrightarrow x^2-x\log_3 2<0\Leftrightarrow 0<x<\log_3 2$.

Câu 64: Tập nghiệm của bất phương trinh $2^x>3^{x+1}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. **C.** $\left(-\infty;\log_2 3\right]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow x>\log_2\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow x>(x+1)\log_2 3\Leftrightarrow x(1-\log_2 3)>\log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3}>\log_2 3\Leftrightarrow x<\frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Cách 2: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>3\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $f(x)>1\Leftrightarrow x^2+x\log_2 5>0$. **B.** $f(x)>1\Leftrightarrow x-x^2\log_2 5<0$.

C. $f(x)>1\Leftrightarrow x^2-x\log_5 2>0$. **D.** $f(x)>1\Leftrightarrow -x\ln 2+x^2\ln 5>0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)>1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}>1\Leftrightarrow\log_2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}\right]>0$

$\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^x+\log_2 5^{x^2}>0\Leftrightarrow -x+x^2\log_2 5>0$ nên phương án A sai.

Câu 66: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1)>3$

A. $x>4$. **B.** $x>14$ **C.** $x<2$. **D.** $2<x<14$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3(2x-1)>3 \Leftrightarrow 2x-1>3^3 \Leftrightarrow x>14$.

Câu 67: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1)<2$ ta được nghiệm là

A. $\frac{1}{2}<x<5$. **B.** $x>\frac{1}{5}$. **C.** $x<5$. **D.** $x>5$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_3(2x-1)<2 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1>0\\2x-1<9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{2}\\x<5\end{cases}.$$

Câu 68: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(1-x)<0$?

A. $x=0$. **B.** $x<0$. **C.** $x>0$. **D.** $-1<x<0$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\frac{1}{2}}(1-x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}1-x>0\\1-x>1\end{cases} \Leftrightarrow x<0.$$

Câu 69: Các giá trị x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$ là:

A. $x>3$. **B.** $\frac{1}{3}<x<3$. **C.** $x<3$. **D.** $x>\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2(3x-1)>3 \Leftrightarrow 3x-1>8 \Leftrightarrow x>3$.

Câu 70: Bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1)\geq 0$ có tập nghiệm là?

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right]$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

$\log_{0,5}(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\leq 0,5^0 \Leftrightarrow 2x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq 1$.

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệp của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Câu 71: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(9-x)\leq 3$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(9-x)\le 3 \Leftrightarrow 0<9-x\le 8 \Leftrightarrow 1\le x<9$. Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có 8 nghiệm nguyên.

Câu 72: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là:

A. $(-\infty;10)$. **B.** $(1;9)$. **C.** $(1;10)$. **D.** $(-\infty;9)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_2(x-1)<3\Rightarrow x-1<8\Leftrightarrow x<9$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;9)$.

Câu 73: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x^2+2)\le 3$ là:

A. $S=(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$. **B.** $S=\varnothing$.

C. $S=\mathbb{R}$. **D.** $P=[-5;5]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3(x^2+2)\le 3\Leftrightarrow x^2+2\le 27\Leftrightarrow x^2\le 25\Leftrightarrow -5\le x\le 5$.

Câu 74: Số nghiệm thực nguyên của bất phương trình $\log(2x^2-11x+15)\le 1$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $2x^2-11x+15>0\Leftrightarrow x<\dfrac{5}{2}$ hoặc $x>3$.

$\log(2x^2-11x+15)\le 1\Leftrightarrow 2x^2-11x+15\le 10\Leftrightarrow 2x^2-11x+5\le 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le x\le 5$.

Kết hợp điều kiện ta có: $\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{5}{2}$ hoặc $3<x\le 5$. Vậy BPT có 4 nghiệm nguyên là:

$x\in\{1;2;4;5\}$.

Câu 75: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{x-1}>2$.

A. $S=(1;1+\sqrt{2})$. **B.** $S=(1;9)$. **C.** $S=(1+\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $S=(9;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1}>2\Leftrightarrow \begin{cases}x-1>0\\ \dfrac{2}{x-1}<\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x-1<8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x<9\end{cases}.$$

Câu 76: Bất phương trình $\max\left\{\log_3 x,\ \log_{\frac{1}{2}} x\right\} < 3$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;27)$. **B.** $(8;27)$. **C.** $\left(\frac{1}{8};\ 27\right)$. **D.** $(27;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

$$\max\left\{\log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x\right\} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3 x < 3\\ \log_{\frac{1}{2}} x < 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 27\\ x > \frac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < 27.$$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $\left(\frac{1}{8};27\right)$.

Câu 77: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right) \le -1$ là:

A. $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$. **B.** $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. **D.** $S=\left[-\sqrt{5};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải

Chọn B

* ĐKXĐ: $\begin{cases}\log_2\left(x^2-1\right) > 0\\ x^2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow x^2-1>1 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow x^2\ge 5 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

* Kết hợp điều kiện ta được: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 78: Cho phương trình $3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2<0(1)$. Nếu đặt $t=3^{x+5}\ (t>0)$ thì (1) trở thành phương trình nào?

A. $9t^2-6t-2<0$. **B.** $t^2-2t-2<0$. **C.** $t^2-18t-2<0$. **D.** $9t^2-2t-2<0$.

Lời giải.

Chọn B

$3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2<0 \Leftrightarrow 3^{2(x+5)}-2.3^{x+5}-2<0$

Vậy khi đặt $t=3^{x+5}\ (t>0)$ thì (1) trở thành phương trình $t^2-2t-2<0$.

Câu 79: Cho phương trình $25^{x+1}-26.5^x+1>0$. Đặt $t=5^x$, $t>0$ thì phương trình trở thành

A. $t^2-26t+1>0$. **B.** $25t^2-26t>0$. **C.** $25t^2-26t+1>0$. **D.** $t^2-26t>0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $25^{x+1}-26.5^x+1>0 \Leftrightarrow 25.5^{2x}-26.5^x+1>0$.

Vậy nếu đặt $t=5^x$, $t>0$ thì phương trình trên trở thành $25t^2-26t+1>0$.

Câu 80: Xét bất phương trình $5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0$. Nếu đặt $t=5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-3t+32<0$. **B.** $t^2-16t+32<0$. **C.** $t^2-6t+32<0$. **D.** $t^2-75t+32<0$.

Lời giải

Chọn D

$5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0 \Leftrightarrow 5^{2x}-3.5^2.5^x+32<0 \Leftrightarrow 5^{2x}-75.5^x+32<0$.

Nếu đặt $t=5^x>0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2-75t+32<0$.

Câu 81: Cho phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3\geq 0$. Khi đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2+8t-3\geq 0$. **B.** $2t^2-3\geq 0$. **C.** $t^2+2t-3\geq 0$. **D.** $4t-3\geq 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3\geq 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2-2x}\right)^2+2^3.2^{x^2-2x}-3\geq 0$.

Kho đó, đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình $t^2+8t-3\geq 0$.

Câu 82: Khi đặt $t=\log_5 x$ thì bất phương trình $\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{5}} x-5\leq 0$ trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-6t-4\leq 0$. **B.** $t^2-6t-5\leq 0$. **C.** $t^2-4t-4\leq 0$. **D.** $t^2-3t-5\leq 0$.

Lời giải

Chọn C

$\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{3}} x-5\leq 0 \Leftrightarrow (\log_5 x+1)^2-6\log_5 x-5\leq 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x-4\log_5 x-4\leq 0$.

Với $t=\log_5 x$ bất phương trình trở thành: $t^2-4t-4\leq 0$.

Câu 83: Bất phương trình $\log^2 x-2019\log x+2018\leq 0$ có tập nghiệm là

A. $S=\left[10;10^{2018}\right]$. **B.** $S=\left[10;10^{2018}\right)$. **C.** $S=[1;2018]$. **D.** $S=\left(10;10^{2018}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log^2 x-2019\log x+2018\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq \log x\leq 2018 \Leftrightarrow 10\leq x\leq 10^{2018}$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[10;10^{2018}\right]$.

Câu 84: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0$

A. 5. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$$\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-8\log_2 x^{\frac{1}{2}}+3<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-4\log_2 x+3<0$$

$\Leftrightarrow 1<\log_2 x<3 \Leftrightarrow 2<x<8$. So với điều kiện ta được $2<x<8$.

Câu 85: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$

A. $S=(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$. **B.** $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $S=[2;16]$.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x>0$

Đặt $t=\log_2 x$, $t\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình tương đương $t^2-5t+4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ t\ge 4 \end{array}\right.$.

- $\log_2 x\le 1 \Leftrightarrow 0<x\le 2$.
- $\log_2 x\ge 4 \Leftrightarrow x\ge 16$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Câu 86: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x+9.3^{-x}<10$ là

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, bất phương trình có dạng $t+\dfrac{9}{t}<10 \Leftrightarrow t^2-10t+9<0 \Leftrightarrow 1<t<9$.

Khi đó $1<3^x<9 \Leftrightarrow 0<x<2$. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $x=1$.

Câu 87: Tập nghiệm của bất phương trình $16^x-5.4^x+4\ge 0$ là:

A. $T=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $T=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **D.** $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=4^x$, $t>0$.

$16^x-5.4^x+4\ge 0$ trở thành $t^2-5.t+4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 4 \\ t\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 4 \\ 0<t\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x\ge 4 \\ 0<4^x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le 0 \end{array}\right.$.

Vậy $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Câu 88: Biết $S=[a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x-10.3^x+3\le 0$. Tìm $T=b-a$.

A. $T=\dfrac{8}{3}$. **B.** $T=1$. **C.** $T=\dfrac{10}{3}$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3.9^x-10.3^x+3\le 0 \Leftrightarrow 3.\left(3^x\right)^2-10.3^x+3\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le 3^x\le 3 \Leftrightarrow \log_3\frac{1}{3}\le x\le \log_3 3$

$\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Khi đó bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left[-1;1\right]$, do vậy $T=1-\left(-1\right)=2$.

Câu 89: Nghiệm của bất phương trình $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$ là.

A. $0\le x\le 1$. **B.** $0<x<1$. **C.** $0<x\le 1$. **D.** $0\le x<1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$.

$\Rightarrow \left(5^{\sqrt{x}}\right)^2-6.5^{\sqrt{x}}+5<0\Rightarrow \begin{cases}5^{\sqrt{x}}<5\\5^{\sqrt{x}}>1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x<1\\x>0\end{cases}$

Câu 90: Bất phương trình $64.9^x-84.12^x+27.16^x<0$ có nghiệm là:

A. $1<x<2$. **B.** $\frac{9}{16}<x<\frac{3}{4}$. **C.** $x<1$ hoặc $x>2$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn A

$64.9^x-84.12^x+27.16^x<0\Leftrightarrow 27.\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-84.\left(\frac{4}{3}\right)^x+64<0\Leftrightarrow 1<x<2$.

Câu 91: Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $9^x-2\left(m+1\right)3^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

A. $m\in\left(-5-2\sqrt{3};-5+2\sqrt{3}\right)$. **B.** $m<-\frac{3}{2}$.

C. $m\le -\frac{3}{2}$. **D.** $m\ne 2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Khi đó, bất phương trình trở thành:
$t^2-2\left(m+1\right)t-3-2m>0\Leftrightarrow\left(t+1\right)\left(t-3-2m\right)>0 \Leftrightarrow t-3-2m>0\Leftrightarrow t>3+2m$ $\left(1\right)$ (Do $t>0$).
Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\left(1\right)$ phải nghiệm đúng với mọi $t\in\left(0;+\infty\right)$.

Điều này tương đương với $3+2m\le 0 \Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m\le -\frac{3}{2}$.

Câu 92: Cho Hàm số $f\left(x\right)=\frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f\left(x\right)>1\Leftrightarrow\left(x-2\right)\log 3-\left(x^2-4\right)\log 7>0$.

B. $f\left(x\right)>1\Leftrightarrow\left(x-2\right)\log_{0,3}3-\left(x^2-4\right)\log_{0,3}7>0$.

C. $f(x)>1 \Leftrightarrow (x-2)\ln 3-(x^2-4)\ln 7>0$.

D. $f(x)>1 \Leftrightarrow x-2-(x^2-4)\log_3 7>0$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)>1 \Leftrightarrow \dfrac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}>1 \Leftrightarrow \log_{0.3}\dfrac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}<\log_{0,3}1 \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3}3-(x^2-4)\log_{0,3}7<0$.

Câu 93: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \dfrac{1}{3^x}$ là một đoạn $[a;b]$ ta có $a+b$ bằng:

A. $a+b=11$. **B.** $a+b=9$. **C.** $a+b=12$. **D.** $a+b=10$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x^2+5x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -6$

Ta có: $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \dfrac{1}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq 3^{-x} \Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6} \geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6} \leq x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+5x-6 \leq x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6 \vee x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;10]$$

Vậy $a+b=11$

Câu 94: Cho bất phương trình $25^x+15^x-2.9^x \leq m.3^x(5^x-3^x)$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$ là

A. $m \leq \dfrac{11}{2}$. **B.** $m > \dfrac{11}{2}$. **C.** $m < \dfrac{11}{3}$. **D.** $m \geq \dfrac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Chia hai vế của bất phương trình cho 3^{2x} ($3^x>0$), ta được $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2x}+(1-m)\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+m-2 \leq 0$

Đặt $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=t$.

Với $x \in [0;1] \Rightarrow t \in \left[1;\dfrac{5}{3}\right]$, ta có bất phương trình bậc hai $t^2+(1-m)t+m-2 \leq 0$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình: $t^2+(1-m)t+m-2 \leq 0$, $\forall t \in \left[1;\dfrac{5}{3}\right]$

$t^2+(1-m)t+m-2 \leq 0, \forall t \in \left[1;\dfrac{5}{3}\right] \Leftrightarrow (t-1)(t+2-m) \leq 0, \forall t \in \left[1;\dfrac{5}{3}\right] (*)$

Vì $t-1 \geq 0, \forall t \in \left[1;\dfrac{5}{3}\right]$, nên $(*) \Leftrightarrow t+2-m \leq 0, \forall t \in \left[1;\dfrac{5}{3}\right] \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}+2-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{11}{3}$

Câu 95: Giả sử phương trình $\log_2^2 x-(m+2)\log_2 x+2m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=6$. Giá trị của biểu thức $|x_1-x_2|$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_2 x$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $t^2-(m+2)t+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=2 \\ \log_2 x=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2^m \end{array}\right.$.

Do $x_1+x_2=6 \Leftrightarrow 4+2^m=6 \Leftrightarrow m=1$. Vậy $|x_1-x_2|=|4-2^1|=2$.

Câu 96: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[0;2019]$ của tham số m để phương trình $4^x-(m+2018)2^x+(2019+3m)=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 2016 **B.** 2019. **C.** 2013 **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x+(m-1)2^x+(4+3m)=0$ (1).

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2+(m-1)t+4+3m=0$ (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa

$$0<t_1<1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(1)<0 \\ af(0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<2013$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[0;2019]$ suy ra $m\in\{0;1;2;...;2012\}$

Câu 97: Giả sử phương trình $\log_2{}^2(2x)-3\log_2 x-2=0$ có một nghiệm dạng $x=2^{\frac{a+\sqrt{b}}{c}}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ và $b<20$. Tính tổng $a+b+c^2$.

A. 10. **B.** 11. **C.** 18. **D.** 27.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>0$.

Ta có:

$$\log_2{}^2(2x)-3\log_2 x-2=0 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-3\log_2 x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2{}^2 x-\log_2 x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \log_2 x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{array}\right..$$

Vậy: $a=1;b=5;c=2 \Rightarrow a+b+c^2=10$.

Câu 98: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0$ vô nghiệm.

A. $m\in\left(\sqrt{2};2\right)$. **B.** $m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **C.** $m\in\left(-\sqrt{2};2\right)$. **D.** $m\in\left(-2;\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log^2\left|\cos x\right|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0 \Leftrightarrow \log^2\left|\cos x\right|-2m\log\left|\cos x\right|-m^2+4=0$

Đặt $\log\left|\cos x\right|=t$. Điều kiện: $t\le 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2-2mt-m^2+4=0, t\le 0$.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ t_1+t_2>0\\ t_1.t_2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-1.\left(-m^2+4\right)<0\\ \begin{cases}m^2-1.\left(-m^2+4\right)\ge 0\\ \dfrac{2m}{1}>0\\ \dfrac{-m^2+4}{1}>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m^2-4<0\\ \begin{cases}2m^2-4\ge 0\\ 2m>0\\ -m^2+4>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}\\ \begin{cases}m\ge\sqrt{2}\\ -2<m<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<2$$

Câu 99: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x-1}+5m^2-44=0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$16^x-m.4^{x-1}+5m^2-44=0 \Leftrightarrow \left(4^x\right)^2-\dfrac{m}{4}.4^x+5m^2-44=0$

$\Leftrightarrow 4\left(4^x\right)^2-m.4^x+20m^2-176=0$, (1).

Đặt $t=4^x$ điều kiện $t>0$ từ (1) ta có $4t^2-m.t+20m^2-176=0$, $(*)$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1;x_2$ thì $x_1+x_2=0$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương $t_1;t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2=1$. Nhưng vì phương trình $(*)$ có $\dfrac{c}{a}=-\dfrac{176}{4}=-44<0$ nên không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 100: Cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của m thuộc khoảng

A. $(9;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2 - 8m + 4 > 0\\ 2(2m+1) > 0\\ 3(4m-1) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 1\\ m > -\dfrac{1}{2}\\ m > \dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 1\\ m > \dfrac{1}{4}\end{cases}.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $t = 4m - 1$ và $t = 3$.

Với $t = 4m - 1$ thì $3^{x_1} = 4m - 1 \Leftrightarrow x_1 = \log_3(4m-1)$.

Với $t = 3$ thì $3^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2) = 12 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \dfrac{5}{2}$ nên m thuộc khoảng $(1;3)$.

Câu 101: Cho phương trình $(m-5).3^x + (2m-2).2^x.\sqrt{3^x} + (1-m).4^x = 0$, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(m-5).3^x + (2m-2).2^x.\sqrt{3^x} + (1-m).4^x = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (m-5).\left(\dfrac{3}{4}\right)^x + (2m-2).\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + 1 - m = 0$. Đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình trở thành: $(m-5)t^2 + (2m-2)t + 1 - m = 0, (2)$.

Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}a \neq 0\\ \Delta > 0\\ P > 0\\ S > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 5\\ \left[\begin{array}{l}m > 3\\ m < 1\end{array}\right.\\ 1 < m < 5\end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 5 \Leftrightarrow m \in (3;5)$.

Vậy $a = 3$, $b = 5$ nên $a + b = 8$.

Câu 102: Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$ (1). Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 7 \ (i)$.

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là $t_1 = \log_3 x_1; t_2 = \log_3 x_2$. Vì $x_1 < x_2$ nên $t_1 < t_2$.

Mặt khác, $x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$

$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1t_2 < 16$.

$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m-3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \ (ii)$.

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 103: Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + (1-2a).\left(2-\sqrt{3}\right)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = t$, $t > 0$ khi đó $\left(2-\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Nhận xét: Với cách đặt đó thì $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1} = t_1$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_2} = t_2$ nên từ $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$, ta có $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1 - x_2} = 3$ hay $\frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

Vậy bài toán đã cho tương đương với bài toán tìm a để phương trình $t + (1-2a).\frac{1}{t} - 4 = 0 \ (*)$ có hai nghiệm dương t_1, t_2 thỏa mãn nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.

Ta thấy: $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2a = 0$.

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (1-2a) > 0 \\ 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{-3}{2} \\ a < \frac{1}{2} \end{cases} \ (**)$.

Cách 1: Nhận xét rằng phương trình ẩn t có tổng hai nghiệm bằng 4 mà nghiệm này gấp 3 nghiệm kia nên phương trình phải có 1 nghiệm băng 1 và 1 nghiệm bằng 3, từ đó $1 - 2a = 3 \Leftrightarrow a = -1$.

Cách 2: Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1t_2 = 1 - 2a \end{cases}$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia khi

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3t_2 \\ t_2 = 3t_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (t_1 - 3t_2).(t_2 - 3t_1) = 0 \Leftrightarrow -3\left(t_1^2 + t_2^2\right) + 10t_1.t_2 = 0$

$\Leftrightarrow -3(t_1 + t_2)^2 + 6t_1t_2 + 10t_1.t_2 = 0 \Leftrightarrow -48 + 16(1-2a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$ thỏa mãn điều kiện $(**)$.

Giá trị này của a thuộc đáp án D

Cách 3. Dựa vào điều kiện có 2 nghiệm dương loại đáp án A, suy luận nếu *a* thuộc đáp án B, C thì cũng thuộc đáp án D

Câu 104: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-3x+2}+3^{4-x^2}=3^{6-3x}+m\ (1)$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $3^{4-x^2}=v>0,\ 3^{6-3x}=u>0$ phương trình trở thành $m\frac{u}{v}+v=u+m \Leftrightarrow m\left(\frac{u-v}{v}\right)=(u-v)$

$\Leftrightarrow (u-v)(m-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3^{6-3x}=3^{4-x^2} & (I) \\ 3^{4-x^2}=m & (II) \end{array}\right.$

Giải (I): $3^{6-3x}=3^{4-x^2} \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (II) xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x=1$ và một nghiệm $x\neq 2$. Với $x=1$ ta có $m=3^{4-1^2}=27$. Khi đó $3^{4-x^2}=27 \Leftrightarrow 4-x^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\neq 2 \end{array}\right.$.

Vậy $m=27$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x=2$ và một nghiệm $x\neq 1$. Với $x=2$ ta có $m=3^{4-2^2}=1$. Khi đó $3^{4-x^2}=1 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2\neq 1 \end{array}\right.$.

Vậy $m=1$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 3: Phương trình (II) có đúng 1 nghiệm x khác $1;2$

Từ $3^{4-x^2}=m \Leftrightarrow x^2=4-\log_3 m\geq 0$ để có một nghiệm thì nghiệm đó là $x=0 \Rightarrow 4-\log_3 m=0$ $\Leftrightarrow m=81$, đồng thời $x=0$ thỏa mãn khác $1;2$ nên $m=81$ là một giá trị cần tìm.

Vậy có ba giá trị $m=1$; $m=27$; $m=81$ thỏa mãn bài toán.

Câu 105: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để **không** tồn tại bộ số thực (x,y) nào thỏa mãn đồng thời các hệ thức $x^2+(y-2)^2\leq 9$ và $\log_{x^2+y^2+1}(2mx+2y+m-2)\geq 1$. Số phần tử của S là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Miền biểu diễn $x^2+(y-2)^2\leq 9$ là hình tròn (C) có tâm $I(0,2)$ và bán kính $R=3$

$\log_{x^2+y^2+1}(2mx+2y+m-2)\geq 1 \Leftrightarrow 2mx+2y+m-2\geq x^2+y^2+1$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-1)^2 \le m^2+m-2$.

Miền biểu diễn $(x-m)^2+(y-1)^2 \le m^2+m-2$ là hình tròn (C') có tâm $I'(m,1)$ và bán kính $R'=\sqrt{m^2+m-2}$

Để tồn tại bộ số thực (x,y) thỏa mãn bài toán thì:

$$\left[\begin{array}{l} m^2+m-2<0 \\ II'>R+R' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<m<1 \\ \sqrt{m^2+1}>3+\sqrt{m^2+m-2}\,(VN) \end{array}\right. \Rightarrow m\in\{-1;0\}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

Câu 1: Điều kiện xác định của x^{-3} là:

A. $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x \geq 0$. **C.** $x \neq 0$. **D.** $x > 0$.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Điều kiện xác định của $x^{\frac{3}{5}}$ là:

A. $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x \geq 0$. **C.** $x \neq 0$. **D.** $x > 0$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y = \log_{0,5}\left(x^2 - 2x + 1\right)$ là:

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$y = \log_{0,5}\left(2x - x^2\right)$

$=> 2x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 2$

Câu 4: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = (0,5)^x$. **B.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. **C.** $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$. **D.** $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_3 x$. **B.** $y = \log_{\sqrt{3}} x$. **C.** $y = \log_{\frac{1}{e}} x$. **D.** $\log_{\pi} x$.

Lời giải

Chọn C

Vì $0 < \frac{1}{e} < 1$.

Câu 6: Nếu $3^x = 5$ thì 3^{2x} bằng:

A. 15. **B.** 125. **C.** 10. **D.** 25.

Lời giải

Chọn D

Vì $3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3 5 \Rightarrow 3^{2x} = 3^{2\log_3 5} \Rightarrow x = 25$

Câu 7: Cho $A = 4^{\log_2 3}$. Khi đó giá trị của A bằng:

A. 9. **B.** 6. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 81.

Lời giải

Chọn A

Câu 8: Nếu $\log_a b = 3$ thì $\log_a b^2$ bằng:

A. 9. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Vì $\log_a b^2 = 2\log_a b = 2.3 = 6$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $3^{2x-5} = 27$ là:

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

$3^{2x-5} = 27 \Leftrightarrow 2x - 5 = 3 \Leftrightarrow x = 4$

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\log_{0,5}(2-x) = -1$ là:

A. 0. **B.** $2,5$. **C.** $1,5$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$\log_{0,5}(2-x) = -1 \Leftrightarrow \log_{0,5}(2-x) = \log_{0,5}(2) \Leftrightarrow 2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $(0,2)^x > 1$ là:

A. $(-\infty;\, 0,2)$. **B.** $(0,2\,;+\infty)$. **C.** $(0\,;+\infty)$. **D.** $(-\infty\,;0)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}} x > -2$ là:

A. $(-\infty;16)$. **B.** $(16;+\infty)$. **C.** $(0;16)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

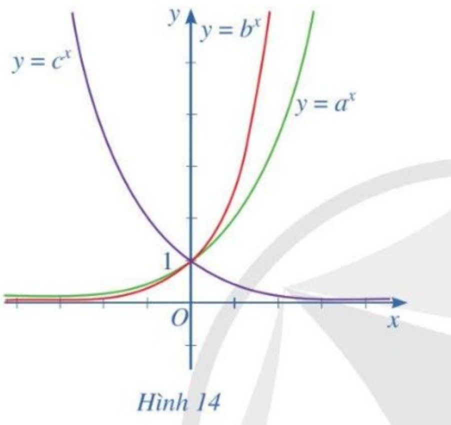
$\log_{\frac{1}{4}} x > -2 \;\; ĐKXĐ: x > 0$

$\log_{\frac{1}{4}} x > -2 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow x < 16$

Kết hợp với ĐKXĐ $\Rightarrow 0 < x < 16$.

Câu 13: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị ba hàm số mũ $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho bởi hình 14. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c?

A. $c < a < b$. **B.** $c < b < a$. **C.** $a < b < c$. **D.** $b < c < a$.



Hình 14

Lời giải

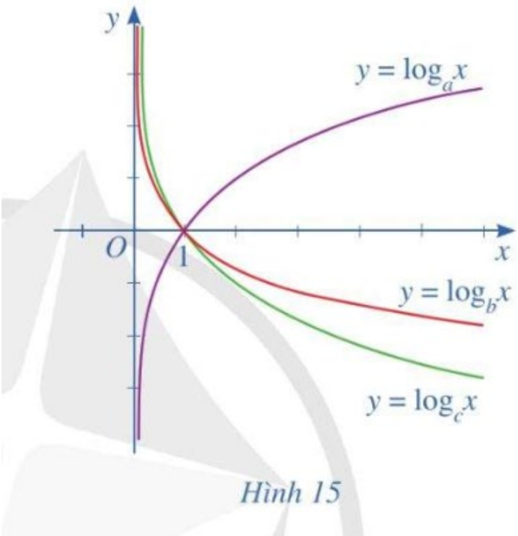
Chọn A

Nhận thấy $y=c^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow 0<c<1$ $y=a^x; y=b^x$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow a,b>1$.

Cho cùng giá trị của $x=x_0$ ta thấy $a^{x_0}<b^{x_0}$.

Câu 14: Cho ba thực dương a,b,c khác 1 và đồ thị ba hàm số logarit $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ được cho bởi hình 15. Kết luận nào sau đây là đúng với ba số a,b,c

A. $c<a<b$. **B.** $c<b<a$. **C.** $a<b<c$. **D.** $b<c<a$.



Hình 15

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy $y=\log_a x$ đồng biến nên $a>1$.

$y=\log_b x, y=\log_c x$ nghịch biến nên $0<b,c<1$.

Nhận thấy $b<c$. $\Rightarrow b<c<a$.

Câu 15: Viết các biểu thức sau về lũy thừa cơ số a

a) $A=\sqrt[3]{5\sqrt{\frac{1}{5}}}$ $\forall a=5$. b) $B=\frac{4.\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{4}}$ $\forall a=\sqrt{2}$.

Lời giải

a) $A=\sqrt[3]{5\sqrt{\frac{1}{5}}}=\sqrt[3]{5\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{5.5^{\frac{-1}{2}}}=\sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}}=5^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}$

b) Có $a=\sqrt{2}\Rightarrow a^2=2$

$$B=\frac{4\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2^2\cdot 2^{\frac{1}{5}}}{2^{2\cdot\frac{1}{3}}}=\frac{2^{\frac{11}{5}}}{2^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{2\cdot\frac{11}{5}}}{a^{2\cdot\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{22}{5}}}{a^{\frac{4}{3}}}=a^{\frac{46}{15}}$$

Câu 16: Cho x,y là các số thực dương. Rút gọn biểu thức sau:

$A=\frac{x^{\frac{5}{4}}.y+x.y^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; $B=\left(\sqrt[7]{\frac{x}{y}.\sqrt[5]{\frac{y}{x}}}\right)^{\frac{35}{4}}$.

Lời giải

a) $A=\frac{x^{\frac{5}{4}}\cdot y+x\cdot y^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{y}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}\cdot x\cdot y+x\cdot y\cdot y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=\frac{xy\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=xy$

b) $B=\left(\sqrt[7]{\frac{x}{y}\sqrt[5]{\frac{y}{x}}}\right)^{\frac{95}{4}}=\left(\sqrt[7]{\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{-1}{5}}}\right)^{\frac{25}{4}}=\left(\sqrt[7]{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{4}{5}}}\right)^{\frac{35}{4}}=\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{4}{35}}\right)^{\frac{35}{4}}=\frac{x}{y}$

Câu 17: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y=\frac{5}{2^x-3}$; b) $y=\sqrt{25-5^x}$;

c) $y=\frac{x}{1-\ln x}$; d) $y=\sqrt{1-\log_3 x}$.

Lời giải

a) $y=\frac{5}{2^x-3}$

ĐKXĐ: $2^x-3\neq 0\Rightarrow 2^x\neq 3\Rightarrow x\neq\log_2 3\Rightarrow \text{TXĐ}: D=\mathbb{R}\backslash\log_2 3$

b) $y=\sqrt{25-5^x}$

ĐKXĐ: $25-5^x\geq 0\Rightarrow 5^x\leq 5^2\Rightarrow x\leq 2$

TXĐ: $D=\left(-\infty;2\right]$

c) $y=\frac{x}{1-\ln x}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} x>0 \\ 1-\ln x\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq e\end{cases}$

$D=(0;+\infty)\setminus e$

d) $y=\sqrt{1-\log_3 x}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} x>0 \\ 1-\log_3 x\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\leq 3\end{cases}$

Câu 18: Cho $a>0, a\neq 1$ và $a^{\frac{3}{5}}=b$

a) Viết $a^6; a^3b; \frac{a^9}{b^9}$ theo lũy thừa cơ số b.

b) Tính: $\log_a b; \log_a\left(a^2b^5\right); \log_{\sqrt[5]{a}}\left(\frac{a}{b}\right)$.

Lời giải

a) $a^6=\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{10}=b^{10}$; $\quad a^3b=\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{5}\cdot b=b^5\cdot b=b^6$; $\quad \frac{a^9}{b^9}=\frac{\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{15}}{b^9}=\frac{b^{15}}{b^9}=b^6$

b) $\log_a b=\frac{3}{5}$

$\log_a a^2b^5=\log_a a^2+\log_a b^5=2\log_a a+5\log_a b=2+5\cdot\frac{3}{5}=5$

$\log_{\sqrt[5]{a}}\left(\frac{a}{b}\right)=\log_{\sqrt[5]{a}}a-\log_{\sqrt[5]{a}}b=5\log_a a-5\log_a b=5-5\cdot\frac{3}{5}=2$

Câu 19: Giải mỗi phương trình sau:

a) $3^{x^2-4x+5}=9$; b) $0,5^{2x-4}=4$;

c) $\log_3(2x-1)=3$; d) $\log x+\log(x-3)=1$.

Lời giải

a) $3^{x^2-4x+5}=9 \Leftrightarrow x^2-4x+5=2 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1\end{array}\right.$

b) $0,5^{2x-4}=4 \Leftrightarrow 2x-4=\log_{0,5}4 \Leftrightarrow 2x-4=-2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$

c) $\log_3(2x-1)=3 \Leftrightarrow \log_3(2x-1)=\log_3 27 \Leftrightarrow 2x-1=27 \Leftrightarrow x=14$

d) $\log x+\log(x-3)=1$, ĐKXĐ: $x>3$

$\log x + \log(x-3) = 1 \Leftrightarrow \log(x^2-3x) = \log 10$

$\Leftrightarrow x^2-3x=10 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-2 \text{(không t/m đkxđ)} \end{array}\right.$

$\Rightarrow x=5$

Câu 20: Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $5^x < 0,125$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq 3$;

c) $\log_{0,3} x > 0$; d) $\ln(x+4) > \ln(2x-3)$.

Lời giải

a)$5^x < 0,125 \Leftrightarrow x < \log_5 0,125$

b)$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq 3 \Leftrightarrow 2x+1 \leq \log_{\frac{1}{3}} 3 \Leftrightarrow 2x+1 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -1$

c) $\log_{0,3} > 0 \Leftrightarrow x < 1$

d) $\ln(x+4) > \ln(2x-3)$, ĐKXĐ: $x > \frac{3}{2}$

$\ln(x+4) > \ln(2x-3) \Leftrightarrow x+4 > 2x-3 \Leftrightarrow x < 7$

Kết hợp vs ĐKXĐ: $\frac{3}{2} < x < 7$.

Câu 21: Trong một trận động đất, năng lượng giải tỏa E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E \approx 11,4+1,5M$.

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021).

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.

b) Năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

Lời giải

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter:

Thay $M=5$ vào công thức, ta có: $\log E \approx 11,4+1,5.5 \approx 18,9 \Rightarrow E \approx 10^{18,9}$

b) Tính tỷ lệ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter so với tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter:

$\log E \approx 11,4+1,5.8 \approx 23,4 \Rightarrow E \approx 10^{23,4} \Rightarrow$ Gấp khoảng 31623 lần.

Câu 22: Trong cây cối có chất phóng xạ ${}^{14}_{6}C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của ${}^{14}_{6}C$ là $T=5730$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t

được cho bởi công thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021).

Lời giải

Từ đó, ta có thể tính được hằng số phóng xạ: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T} = \dfrac{\ln 2}{5,730} \approx 0.12$

Giờ ta cần tìm thời gian t mà đã trôi qua từ thời điểm mẫu gỗ cổ được sinh ra đến thời điểm hiện tại. Để tìm thời gian này, ta sử dụng tỷ lệ phóng xạ giữa mẫu gỗ cỗ và mẫu gỗ tươi cùng loại:

$$\frac{H}{H_0} = 0.86 = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \frac{\ln 0.86}{-\lambda} \approx 3,078 \text{ năm}$$

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó là khoảng 3,078 năm.

BÀI TẬP TỔNG ÔN

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $[-1;1]$.

C. $D = (-1;1)$. **D.** $D = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\dfrac{x+1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;1)$.

Câu 2: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{125}\left(x^2 - 75x - 2499\right)^3 = \log_5\left|-x^2 + 75x + 2501\right|$.

A. -75. **B.** 75. **C.** 125. **D.** -125.

Lời giải

Chọn B

$\log_{125}\left(x^2 - 75x - 2499\right)^3 = \log_5\left|-x^2 + 75x + 2501\right|$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2 - 75x - 2499\right) = \log_5\left|-x^2 + 75x + 2501\right|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 75x - 2499 = \left|-x^2 + 75x + 2501\right| \\ x^2 - 75x - 2499 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 75x - 2499 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} -x^2 + 75x + 2501 = x^2 - 75x - 2499 \\ -x^2 + 75x + 2501 = -x^2 + 75x + 2499 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 75x - 2499 > 0 \\ 2x^2 - 150x - 5000 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-25 \\ x_2=100 \end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=75.$

Câu 3: Cho phương trình $\ln^2\left(x^2\right)-3\ln x-1=0\,(x>0)\,(*)$. Đặt $t=\ln x$, phương trình (*) trở thành phương trình nào sau đây?

A. $2t^2+3t-1=0$. **B.** $4t^2+3t-1=0$. **C.** $4t^2-3t-1=0$. **D.** $2t^2-3t-1=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\ln^2\left(x^2\right)-3\ln x-1=0 \Leftrightarrow \left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-3\ln x-1=0$

$\Leftrightarrow (2\ln x)^2-3\ln x-1=0 \Leftrightarrow 4(\ln x)^2-3\ln x-1=0$

Do đó, đặt $t=\ln x$ phương trình (*) trở thành: $4t^2-3t-1=0$.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\ln a>\ln b \Leftrightarrow b>a$. **B.** $\ln a>\ln b \Leftrightarrow a>b>0$.

C. $\ln a>\ln b \Leftrightarrow a>b$. **D.** $\ln a>\ln b \Leftrightarrow b>a>0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A sai vì e > 1 và chưa đủ điều kiện.

Phương án C sai vì chưa đủ điều kiện.

Phương án D sai vì cơ số e > 1.

Câu 5: Biết P là tích tất cả các nghiệm của phương trình $4^{x^2-2020}+2^{x^2-2019}-3=0$, tính P.

A. $P=0$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-2020$. **D.** $P=2020$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{2\left(x^2-2020\right)}+2\cdot 2^{x^2-2020}-3=0$

$\Rightarrow \left(2^{x^2-2020}\right)^2+2\cdot 2^{x^2-2020}-3=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-2020}=1 \\ 2^{x^2-2020}=-3\ (\text{loai}) \end{array}\right.$

$\Rightarrow x^2-2020=0$.

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2020}$.

Do đó $P=\sqrt{2020}\cdot\left(-\sqrt{2020}\right)=-2020$.

Câu 6: Biết $\mathrm{P}=\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{2019\text{ can bac hai}}=2^{\frac{m}{n}}$ $\left(m\in\mathbb{N}^*, n\in\mathbb{N}^*, \frac{m}{n}\right.$ là phân số tối giản). Tính $S=m+n$.

A. 2000. **B.** $S=2^{2020}+1$. **C.** $S=2^{2018}+1$. **D.** $S=2^{2019}+1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{2}=2^{1/2^1}$; $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt{2^{1/2}}=2^{(1/2):2}=2^{1/4}=2^{1/2^2}$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=2^{1/2^3}$; …

Do đó $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{2019 \text{ can bac hai}}=2^{1/2^{2019}}$

Vậy $S=2^{2019}+1$.

Câu 7: Cho $a>0; a\neq 1$ và $b\neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b^4=\frac{1}{4}\log_a|b|$. **B.** $\log_a b^4=4\log_a b.$

C. $\log_a b^4=\frac{1}{4}\log_a b.$ **D.** $\log_a b^4=4\log_a|b|$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức logarit, ta có đáp án là D

Câu 8: Phương trình $\log_3 x+\log_3(4-x)=1$ có tập nghiệm là

A. $S=\{1;3\}$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{3\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0<x<4$

Phương trình tương đương $\log_3(x(4-x))=1\Leftrightarrow -x^2+4x=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.(TM)$

Vậy chọn A

Câu 9: Cho $a>0, a\neq 1, P=(2\ln a+\log_a e)^2+\ln^2 a-\log_a^2 e$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P=3\ln^2 a-4.$ **B.** $P=3\ln^2 a+4.$ **C.** $P=5\ln^2 a-4.$ **D.** $P=5\ln^2 a+4.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln a.\log_a e=\log_e a.\log_a e=\log_e e=1$, nên ta có:

$$P=(2\ln a+\log_a e)^2+\ln^2 a-\log_a^2 e$$
$$=4\ln^2 a+4\ln a.\log_a e+\log_a^2 e+\ln^2 a-\log_a^2 e$$
$$=5\ln^2 a+4$$

Câu 10: Cho $a>0, a\neq 1, b>0, \alpha\neq 0, \beta\neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_{a^\alpha}(b^\beta)=\frac{\beta}{\alpha}\log_a b$ **B.** $\log_{a^\alpha}(b^\beta)=\frac{\alpha}{\beta}\log_a b$

C. $\log_{a^\alpha}(b^\beta)=\alpha\beta\log_a b$ **D.** $\log_{a^\alpha}(b^\beta)=\frac{1}{\alpha\beta}\log_a b$

Lời giải

Chọn A

Câu 11: Có tất cả mấy giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\left|x^2-2x\right|}=m^2+m+1$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\left|x^2-2x\right|}=m^2+m+1$ (1)

Xét $f\left(x\right)=x^2-2x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$y=x^2-2x$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $x^2-2x=t$

Theo BBT phương trình $x^2-2x=t$ có hai nghiệm phân biệt khi $t>-1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\left|x^2-2x\right|}=m^2+m+1\Leftrightarrow\left|x^2-2x\right|=\log_{\frac{1}{3}}\left(m^2+m+1\right)\Leftrightarrow\left|t\right|=\log_{\frac{1}{3}}\left(m^2+m+1\right)$ (2)

(1) Có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $t>-1$

$$\Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{3}}\left(m^2+m+1\right)<1\Leftrightarrow\frac{1}{3}<m^2+m+1<1\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m+\frac{2}{3}>0\left(\forall m\right)\\ m^2+m<0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1<m<0$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên không có số nguyên m nào thỏa đề.

Câu 12: Cho $a=\log_2 3;b=\log_3 5;c=\log_7 2$. Biết $\log_{63}140=\frac{m.abc+n.c+1}{2ac+1}\left(m\in\mathbb{N}^*;n\in\mathbb{N}^*\right)$.Tính $S=m-n$.

A. $S=3$. **B.** $S=-3$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{63}140=\frac{\log_2 140}{\log_2 63}=\frac{\log_2\left(2^2.5.7\right)}{\log_2\left(3^2.7\right)}=\frac{2+\log_2 5+\log_2 7}{2\log_2 3+\log_2 7}=\frac{2+\log_3 5.\log_2 3+\log_2 7}{2\log_2 3+\log_2 7}$$

$=\frac{2+ab+\frac{1}{c}}{2a+\frac{1}{c}}=\frac{abc+2c+1}{2ac+1}$. Suy ra $m=1;n=2$, $S=m-n=-1$.

Câu 13: Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}=2^{x+2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}=2^{x+2}\Leftrightarrow\left(2^{-1}\right)^{1-2x}=2^{x+2}\Leftrightarrow 2^{2x-1}=2^{x+2}\Leftrightarrow 2x-1=x+2\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 14: Cho $a\in\mathbb{R},a>0,\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=\left(a^{\beta}\right)^{\alpha}$. **B.** $a^{\alpha^{\beta}}=a^{\alpha.\beta}$. **C.** $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$. **D.** $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\beta-\alpha}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 15: Cho $a\in R,n\in N^{*}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=1$. **B.** $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$.

C. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=a$. **D.** $\sqrt[2n]{a^{2n}}=-a$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất của căn bậc n.

Câu 16: Cho $a\in R,a>0,m\in Z,n\in N,n\geq 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^{\frac{m}{n}}=a^{m-n}$. **B.** $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$. **C.** $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[m]{a^{n}}$. **D.** $a^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{m}}{a^{n}}$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

Câu 17: Cho biểu thức $P=\dfrac{x^{\frac{5}{4}}y+xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\ (x>0,\ \ y>0)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P=xy$. **B.** $P=x+y$. **C.** $P=1$. **D.** $P=2xy$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\dfrac{x^{\frac{5}{4}}y+xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\dfrac{xy.\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=xy$

Vậy $P=xy$.

Câu 18: Cho hàm số $y=\log_{a}x\ (a>0,\ a\neq 1)$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $y'=\dfrac{1}{x\ln a}\ (x>0)$. **B.** $y'=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$. **C.** $y'=\dfrac{\ln a}{x}\ (x>0)$. **D.** $y'=\log_{a}x\ (x>0)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 19: Cho $\log_{25}7=a,\log_2 5=b$. Tính $P=\log_{\sqrt{5}}\frac{245}{32}$ theo a,b.

A. $P=4a-\frac{10}{b}+2$. **B.** $P=8a-\frac{10}{b}+2$. **C.** $P=8a-10b+2$. **D.** $P=2a-\frac{5}{2b}+2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\log_{\sqrt{5}}\frac{245}{32}=\log_{5^{\frac{1}{2}}}\frac{245}{32}=2\log_5\frac{245}{32}$

$=2(\log_5 245-\log_5 32)$

$=2(\log_5 5.7^2-\log_5 2^5)$

$=2(1+2\log_5 7-5\log_5 2)$.

Mặt khác, do $a=\log_{25}7=\log_{5^2}7=\frac{1}{2}\log_5 7\Rightarrow\log_5 7=2a$.

$\log_2 5=b\Rightarrow\log_5 2=\frac{1}{\log_2 5}=\frac{1}{b}$.

Suy ra $P=2\left(1+2.2\text{a}-5.\frac{1}{b}\right)=2\left(1+4\text{a}-\frac{5}{b}\right)=2+8a-\frac{10}{b}$.

Câu 20: Cho $a>0,\ a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\log_a a^a=a$. **B.** $\log_a 1=0$. **C.** $\log_a a=1$. **D.** $a^{\log_a a}=1$.

Lời giải

Chọn D

$\forall a>0,\ a\neq 1$ ta có $\log_a a=1$. Do đó $a^{\log_a a}=a^1=a$.

Câu 21: Cho phương trình $\log_2\left(2^x+1\right).\log_4\left(2^{x-1}+\frac{1}{2}\right)=1$. Khi đặt $t=\log_2\left(2^x+1\right)$, ta được phương trình nào dưới đây.

A. $t^2+t-2=0$. **B.** $2t^2+2t-1=0$. **C.** $t^2-t-2=0$. **D.** $2t^2-2t-1=0$.

Lời giải

Chọn C

$\log_2\left(2^x+1\right).\log_4\left(2^{x-1}+\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow\log_2\left(2^x+1\right).\log_4\left(\frac{2^x}{2}+\frac{1}{2}\right)=1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(2^x+1\right).\log_4\left[\frac{1}{2}.\left(2^x+1\right)\right]=1\Leftrightarrow\log_2\left(2^x+1\right).\left[\log_4\frac{1}{2}+\log_4\left(2^x+1\right)\right]=1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(2^x+1\right).\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2\left(2^x+1\right)\right]=1\Leftrightarrow t.\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)=1\Leftrightarrow t^2-t-2=0$

Câu 22: Cho số dương x, viết biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $x^{\frac{15}{18}}$. **B.** $x^{\frac{3}{16}}$. **C.** $x^{\frac{15}{16}}$. **D.** $x^{\frac{7}{18}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{3}{4}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{7}{8}}}=\sqrt{x^{\frac{15}{8}}}=x^{\frac{15}{16}}$$

Nhận xét: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}=x^{\frac{2^4-1}{2^4}}=x^{\frac{15}{16}}$

Câu 23: Cho hai số dương a,b thỏa mãn: $\log_2 a+\log_2 b=\log_2\left(a+b\right)$. Khi đó:

A. $a+b=ab$. **B.** $a+b=2ab$. **C.** $a+b=a^2b^2$. **D.** $2\left(a+b\right)=ab$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2 a+\log_2 b=\log_2\left(a+b\right)\Leftrightarrow\log_2\left(ab\right)=\log_2\left(a+b\right)\Leftrightarrow ab=a+b$

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y=\left(3x-6\right)^{-3}$ là

A. $D=\left(2;+\infty\right)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $D=\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định $3x-6\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2\Rightarrow$ TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9^x-m.3^{x+1}+6m+3=0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$.

A. $m=4$ **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Bài giải

Chọn A

$9^x-m.3^{x+1}+6m+3=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-3m.3^x+6m+3=0$

Để phương trình có 2 nghiệm thì:

$$\Delta=\left(-3m\right)^2-4.1.\left(6m+3\right)=9m^2-24m-12\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq\dfrac{4-2\sqrt{7}}{3}\\ m\geq\dfrac{4+2\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:

$3^{x_1}.3^{x_2}=3^{x_1+x_2}=3^3=27=6m+3\Rightarrow m=4$ (chọn)

Câu 26: Cho bất phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x^2+2}>125^{2x}$ có tập nghiệm là:

A. $S=\mathbb{R}\setminus\left\{-2;1\right\}$ **B.** $S=\left(-\infty;2\right)\cup\left(-1;+\infty\right)$

C. $S=\left(-2;-1\right)$ **D.** $S=\left(1;2\right)$

Bài giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{x^2+2} > 125^x \Leftrightarrow \frac{1}{25^{x^2+2}} > 125^{2x} \Leftrightarrow 1 > 25^{x^2+2}.125^{2x} \Leftrightarrow 1 > \left(5^2\right)^{x^2+2}.\left(5^3\right)^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 1 > 5^{2x^2+6x+4} \Leftrightarrow 2x^2+6x+4<0 \Leftrightarrow -2<x<-1.$$

Câu 27: Bất phương trình $x^{1+\log_3 x} > 81x$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup(9;+\infty)$. **B.** $S=\left(\frac{1}{9};9\right)$.

C. $S=\left(0;\frac{1}{9}\right)$. **D.** $S=(9;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $x^{1+\log_3 x} > 81x$. Điều kiện $x>0$

Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế của bất phương trình ta được

$$x^{1+\log_3 x} > 81x \Leftrightarrow (1+\log_3 x).\log_3 x > \log_3 81 + \log_3 x$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x > 2\\ \log_3 x < -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>9\\ x<\frac{1}{9}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $x>0$ ta có bất phương trình $x^{1+\log_3 x} > 81x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>9\\ 0<x<\frac{1}{9}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bát phương trình trên là $S=\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup(9;+\infty)$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y=4^x+6^x$ bằng

A. $4^x.\ln 4+6^x.\ln 6$. **B.** 4^x+6^x.

C. $4^x.\log 4+6^x.\log 6$. **D.** $x(4^{x-1}+6^{x-1})$.

Lời giải

Chọn A

$$y=4^x+6^x \Rightarrow y'=(4^x)'+(6^x)'=4^x.\ln 4+6^x.\ln 6.$$

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y=\left(2^x-8\right)^{-2}$ là:

A. $D=[3;+\infty)$. **B.** $D=(3;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Lời giải:

Chọn C

Vì $-2\in\mathbb{Z}^- \Rightarrow 2^x-8\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3 \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số $y=\left(2^x-8\right)^{-2}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 30: Tính chất nào của hàm số $y=x^{-3}$ đúng trên nửa khoảng $(0;+\infty)$?

A. Hàm số luôn nghịch biến. **B.** Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(0;0)$.

C. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(0;1)$. **D.** Hàm số luôn đồng biến.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $y = x^{-3} \Rightarrow y' = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2} < 0$ với $\forall x > 0$.

Hàm số luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 31: Phương trình $\log_3(x^2 - 1) = \log_3(x-1) + 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 1$

Với điều kiện trên ta có

$\log_3(x^2 - 1) = \log_3(x-1) + 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 1) = \log_3(x-1) + \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 1) = \log_3[3.(x-1)]$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3.(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(L) \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 32: Đạo hàm của hàm số: $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ bằng:

A. $-x^2.e^x$. **B.** $(2x-2)e^x$. **C.** $(x^2-2)e^x$. **D.** x^2e^x.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (x^2 - 2x + 2)'e^x + (x^2 - 2x + 2)(e^x)' = (2x-2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x$.

$= (2x - 2 + x^2 - 2x + 2)e^x = x^2e^x$

Câu 33: Nếu $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5}$ thì:

A. $a > 1$ và $b > 1$. **B.** $0 < a < 1$ và $b > 1$.

C. $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$. **D.** $a > 1$ và $0 < b < 1$.

Lời giải

Chọn B

$\begin{cases} a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1$; $\begin{cases} \log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow b > 1$

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của m để biểu thứ $A = \log_5(1 - 2m)$ có nghĩa.

A. $m \geq \frac{1}{2}$. **B.** $m > \frac{1}{2}$. **C.** $m \leq \frac{1}{2}$. **D.** $m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $1-2m>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Câu 35: Đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(x^2+x+1\right)$ bằng

A. $\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}$. **B.** $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$. **C.** $\frac{\ln 2}{x^2+x+1}$. **D.** $\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right).\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y'=\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}.$$

Câu 36: Rút gọn biểu thức $P=\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^2}\ (a>0)$.

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** $a^{-\frac{2}{3}}$. **C.** $a^{-\frac{10}{3}}$. **D.** $a^{\frac{10}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

$$P=a^{\frac{4}{3}-2}=a^{-\frac{2}{3}}.$$

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y=(4x-3)^4$.

A. $y'=16(4x-3)^4$. **B.** $y'=4(4x-3)^3$. **C.** $y'=4(4x-3)^4$. **D.** $y'=16(4x-3)^3$.

Lời giải

Chọn D

$$y'=4.(4x-3)'(4x-3)^3=4.4.(4x-3)^3=16(4x-3)^3.$$

Câu 38: Cho các mệnh đề sau:

I. Với $x_1,x_2>0$, ta có: $5\log x_1-5\log x_2=5(\log x_1-\log x_2)=5\log\frac{x_2}{x_1}$.

II. Với $x_1,x_2,x_3>0, 0<a\neq 1$, ta có: $\log_a(x_1+x_2+x_3)=\log_a x_1.\log_a x_2.\log_a x_3$.

III. $\log_{(2^2.3)}12=\frac{1}{12}\log_6 12=\frac{1}{2}(1+\log_6 2)$.

IV. Cho các số dương a,b, với $a\neq 1$, ta có: $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$.

Số mệnh đề sai là bao nhiêu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề I, II và III sai

Câu 39: Cho $a>0, a\neq 1$. Đơn giản biểu thức $B=\log_a(a^2.\sqrt[4]{a^3})$.

A. $a^{\frac{10}{3}}$. **B.** $a^{\frac{11}{4}}$. **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$B=\log_a^{\left(a^2.\sqrt[4]{a^3}\right)}=\log_a^{a^{\frac{11}{4}}}=\frac{11}{4}.$$

Câu 40: Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\log_2(x-2)}$ có tập xác định D. Khi đó:

A. $D=(2;5)$. **B.** $D=[2;5]$ **C.** $D=(2;5]$. **D.** $D=(2;5]\setminus\{3\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}5-x\ge 0\\ x-2>0\\ x-2\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 5\\ x>2\\ x\ne 3\end{cases}$

Vậy tập xác định $D=(2;5]\setminus\{3\}$.

Câu 41: Tìm tập nghiệm của phương trình $2^{9x^2-17x+10}=2^{7-5x}$.

A. $\left\{-1;-\frac{1}{3}\right\}$. **B.** $\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$. **C.** $\{-1;3\}$. **D.** $\{-3;1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{9x^2-17x+10}=2^{7-5x}\Leftrightarrow 9x^2-17x+10=7-5x\Leftrightarrow 9x^2-12x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$.

Câu 42: Cho phương trình $4^x-4.2^x+3=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $3x_1+2x_2$.

A. $3\log_2 3$. **B.** $2\log_2 3$. **C.** $3\log_3 2$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2^x$ $(t>0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$t^2-4.t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ (TM)\\ t=3\ (TM)\end{array}\right.$

Với $t=1$. Ta có $2^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Với $t=3$. Ta có $2^x=3\Leftrightarrow x=\log_2 3$.

Do phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$ nên ta chọn $x_1=0$ và $x_2=\log_2 3$.

Vậy $3x_1+2x_2=2\log_2 3$.

Câu 43: Bất phương trình $\log_4^2\left(3^x-1\right)-2\log_4\left(3^x-1\right)+\frac{3}{4}\ge 0$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left(0;1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$. **B.** $S=\left(0;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

C. $S=\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **D.** $S=\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $3^x-1>0\Leftrightarrow x>0$.

Đặt $t=\log_4\left(3^x-1\right)$.

Ta có bất phương trình: $t^2-2t+\frac{3}{4}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le\frac{1}{2}\\t\ge\frac{3}{2}\end{array}\right.$

Với $t\le\frac{1}{2}\Rightarrow\log_4\left(3^x-1\right)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<3^x-1\le 2\Leftrightarrow 0<x\le 1$.

Với $t\ge\frac{3}{2}\Rightarrow\log_4\left(3^x-1\right)\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3^x-1\ge 8\Leftrightarrow x\ge 2$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(0;1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Câu 44: Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1-\sqrt{x-1}\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{x-1}+2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

C. $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}+2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$. **D.** $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D=\left[1;2\right)$.

Ta có: $y'=\left(\ln\left(1-\sqrt{x-1}\right)\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x-1}\right)'}{1-\sqrt{x-1}}=\frac{-1}{2\sqrt{x-1}\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

Câu 45: Một người gửi 88 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất $1,68\%$ (mỗi quý). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó có được 100 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu? (giả sử rằng lãi suất không đổi).

A. 2 năm. **B.** 1,5 năm. **C.** 8 năm. **D.** 3 năm.

Lời giải

Chọn A

Gọi *M* là vốn và lãi sau *n* kỳ hạn.

A là số vốn ban đầu.

r là lãi suất (theo quý).

Ta có: $M = A(1+r)^n$

$\Leftrightarrow 100000000 = 88000000(1+1,68\%)^n \Leftrightarrow (1+0,0168)^n = \dfrac{25}{22} \Leftrightarrow n \approx 8$

Vậy : Sau 8 quý (tức là sau 2 năm) người đó sẽ có được 100 triệu đồng cả vốn lẫn lãi.

B. TỰ LUẬN

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Lời giải

Ta có: $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m^2 - 5 = 0$.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$, ta được phương trình: $t^2 - 2mt + 2m^2 - 5 = 0 \ (1)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ m > \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 3m - 3 = 0 (1) \Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 3m - 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x$, $(t > 0)$ ta có phương trình $t^2 - 2mt + 3m - 3 = 0 (2)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 3m - 3 > 0 \\ m > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ t_1.t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 3m - 3 - 2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (1;2).$$

Câu 3: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x + 2y)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$?

Lời giải

Giả sử $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x+2y) = t$. Ta có: $\begin{cases} x = 6^t & (1) \\ y = 9^t & (2) \\ 2x+2y = 4^t & (3) \end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6^t}{9^t} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t > 0$.

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2.6^t + 2.9^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 2.\left(\frac{2}{3}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1+\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} & (\text{thỏa}) \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1-\sqrt{3} & (\text{loại}) \end{array}\right.$$.

Câu 4: Biết rằng a là số thực dương sao cho bất đẳng thức $3^x + a^x \ge 6^x + 9^x$ đúng với mọi số thực x. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Lời giải

Ta có

$3^x + a^x \ge 6^x + 9^x$

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \ge 6^x + 9^x - 3^x - 18^x$

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \ge 3^x(2^x - 1) - 9^x(2^x - 1)$

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \ge -3^x(2^x - 1)(3^x - 1)$ $(*)$.

Ta thấy $(2^x - 1)(3^x - 1) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -3^x(2^x - 1)(3^x - 1) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $(*)$ đúng với mọi số thực x

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{18}\right)^x \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{18} = 1 \Leftrightarrow a = 18 \in (16;18]$.

Câu 5: Tìm m để phương trình $9^x - 2(2m+1).3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$

Lời giải

Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$ (1).

(1) có hai nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 3(4m-1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 4m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ m > \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l} t = 4m-1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x_1} = 4m-1 \\ 3^{x_2} = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \log_3(4m-1) \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=12 \Leftrightarrow \log_3(4m-1)=2 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Câu 6: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$.

Lời giải

$\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$ (1). ĐK: $\begin{cases} x>0 \\ x^2>0 \\ \log_2 x-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\ne 2$.

$(1)\Leftrightarrow \frac{\log_2 x-1}{\log_2 x}-\frac{2\log_2 x}{\log_2 x-1}\le 1$.

Đặt $t=\log_2 x$.

Bất phương trình trở thành: $\frac{t-1}{t}-\frac{2t}{t-1}\le 1 \Leftrightarrow \frac{-2t^2-t+1}{t(t-1)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>1 \\ 0<t\le \frac{1}{2} \\ t\le -1 \end{array}\right.$.

- $t>1 \Leftrightarrow \log_2 x>1 \Leftrightarrow x>2$.
- $0<t\le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<\log_2 x\le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1<x<\sqrt{2}$.
- $t\le -1 \Leftrightarrow \log_2 x\le -1 \Leftrightarrow x\le \frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình (1) có tập nghiệm $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left(1;\sqrt{2}\right]\cup(2;+\infty)$.

Câu 7: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực $x_1;x_2$ thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

Lời giải

$\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ (1)

Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\log_3 x \Leftrightarrow x=3^t$ thì phương trình tương đương $t^2-3t+2m-7=0$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Giả sử (2) có 2 nghiệm $t_1=\log_3 x_1, t_2=\log_3 x_2$ khi đó $x_1x_2=3^{(t_1+t_2)}=27$.

Suy ra $(x_1+3)(x_2+3)=72 \Leftrightarrow x_1x_2+3(x_1+x_2)=63 \Leftrightarrow x_1+x_2=12$

Vậy x_1,x_2 là 2 nghiệm phương trình $x^2-12x+27=0 \Leftrightarrow x=9 \vee x=3$

$x=9$ suy ra $\log_3^2 9-3\log_3 9+2m-7=0 \Leftrightarrow m=\frac{9}{2}$.

$x=3$ suy ra $\log_3^2 3-3\log_3 3+2m-7=0 \Leftrightarrow m=\frac{9}{2}$.

Vậy $m=\frac{9}{2}$.

Câu 8: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải.

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\(x-1)^2=mx-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x^2-(m+2)x+9=0\end{cases}.$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực lớn hơn 1 thì điều kiện sau thỏa mãn.

$$\begin{cases}\Delta>0\\1<x_1<x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m-32>0\\(x_1-1)+(x_2-1)>0\\(x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-8\\m>4\end{array}\right.\\m>0\\8-m>0\end{cases}\Leftrightarrow 4<m<8$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{5,6,7\}$.

Câu 9: Phương trình $\log_2^{\,2}x-(m^2-3m)\log_2x+3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2=16$.

Lời giải

$\log_2^{\,2}x-(m^2-3m)\log_2x+3=0\quad(1)$.

Điều kiện $x>0$.

Đặt $\log_2x=t$. Ta được phương trình $t^2-(m^2-3m)t+3=0\quad(2)$.

Ta có: $x_1x_2=16\Leftrightarrow\log_2(x_1x_2)=4\Leftrightarrow\log_2x_1+\log_2x_2=4$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2=16$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1+t_2=4$.

Vậy suy ra $m^2-3m=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-1\end{array}\right.$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 10: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\frac{3x-1}{x+1}\right)\le 0$

Lời giải

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\frac{3x-1}{x+1}\right)\le0\Leftrightarrow\log_2\frac{3x-1}{x+1}\ge1\Leftrightarrow\frac{3x-1}{x+1}\ge2\Leftrightarrow\frac{x-3}{x+1}\ge0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge3\\x<-1\end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;+\infty)\cup[3;+\infty)$.

Câu 11: Tìm m để phương trình $\log(x^2+mx)=\log(x+m-1)$ có nghiệm duy nhất

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=x^2+mx=x+m-1 \\ x+m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=x^2-(1-m)x+1-m=0 (1) \\ x>1-m \end{cases}$.

PT đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi xảy ra 1 trong 2 TH sau:

TH1: PT (1) có nghiệm kép $x>1-m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ \dfrac{1-m}{2}>1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2-4(1-m)=0 \\ 1-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$$

TH2: PT (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<1-m=x_2$

Đk: $\begin{cases} \Delta>0 \\ \dfrac{S}{2}>1-m \\ g(1-m)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ \dfrac{1-m}{2}>1-m \\ (1-m)^2-(1-m)(1-m)+1-m=0 \end{cases}$:Không có m thỏa mãn.

TH3:Phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<1-m<x_2$

ĐK: $\begin{cases} \Delta>0 \\ [x_1-(1-m)][x_2-(1-m)]<0 \end{cases} (*)$ trong đó $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1x_2=1-m \end{cases}$

Khi đó $(*)$ thành $\begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ x_1x_2-(1-m)(x_1+x_2)+(1-m)^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ 1-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>1$.

KL: $m>1$.

Câu 12: Giải phương trình $\log_{49} x^2+\dfrac{1}{2}\log_7 (x-1)^2=\log_7\left(\log_{\sqrt{3}} 3\right)$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

$$\log_{49} x^2+\frac{1}{2}\log_7 (x-1)^2=\log_7\left(\log_{\sqrt{3}} 3\right) \Leftrightarrow \log_7|x|+\log_7|x-1|=\log_7 2$$

$$\Leftrightarrow \log_7|x(x-1)|=\log_7 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-1)=2 \\ x(x-1)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2-x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Câu 13: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

Lời giải

Ta có $(x_1+3)(x_2+3)=72 \Rightarrow x_1x_2+3(x_1+x_2)=63$.

Xét $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$, đặt $t=\log_3 x$, PT trở thành $t^2-3t+2m-7=0$ (1).

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $x_1,x_2 \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 9-4(2m-7)>0 \Leftrightarrow -8m+37>0 \Leftrightarrow m<\frac{37}{8}.$$

Khi đó, giả sử (1) có hai nghiệm t_1,t_2, tương ứng PT đã cho có hai nghiệm x_1,x_2.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 t_2 = 2m - 7 \end{cases}$.

Nên $\begin{cases} \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3 \Rightarrow x_1.x_2 = 27 \\ \log_3 x_1.\log_3 x_2 = 2m - 7 (*) \end{cases}$

Kết hợp với giả thiết ta có $\begin{cases} x_1.x_2 = 27 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{cases}$. Thay vào $(*)$ ta được $m = \dfrac{9}{2}$ (TM).

_