



# LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh 12 thân mến, vậy là thời gian chúng ta bên nhau đã không còn nhiều nữa. Thầy biết rằng trong mỗi chúng ta đều có một ước mơ, một khát khao và mong muốn đạt được nó. Có lẽ 3 năm cấp 3 trôi qua thật nhanh phải không em, trong thời gian không dài cũng không ngắn, cũng đủ để cho em phần nào trưởng thành hơn nhiều.

Ba năm học cấp 3 là thời gian vô cùng quan trọng, đó chính là bước đệm, là bệ phóng tương lai để các em có thể đến với những ngôi trường Đại học mà các em mong ước. Dù ước mơ của em là gì, dự định tương lai của em ra sao thì bộ môn Toán học vẫn là một trong những bộ môn đặc biệt quan trọng đối với các em. Vậy nên, việc học Toán chưa bao giờ là quá muộn. Marvel avengers math 12 superpowers là một cuốn sách cô đọng kiến thức Toán 12 giúp các em xây dựng một nền tảng tốt đối với bộ môn này, cũng như có thể giúp các em chinh phục tối ưu được các bài toán trong các kỳ thi THPT QG. Trong cuốn sách là sự đúc kết những phương pháp bản chất Toán học, phương pháp giải nhanh tối ưu... Sách sẽ phù hợp với những ai trân trọng nó tuyệt đối không dành cho những người ham chơi, lười học. Thầy tin rằng khi cầm cuốn sách này trên tay, học trò của thầy sẽ tin vào thầy cũng như tin vào chính bản thân các em vậy.

Thời gian không chờ đợi một ai, người thành công sẽ là người biết trân trọng từng khoảnh khắc, biết không ngừng cố gắng trau dồi và học hỏi để biến từng phút từng giây trôi qua có giá trị. Cuối cùng, thầy chúc các em cố gắng hết sức trong kì vượt vũ môn này cùng thầy, chúc cho thầy trò ta thật thành công trong kỳ thi tới em nhé!

"Không có kho báu nào quý bằng học thức. Hãy tích lũy nó bất cứ lúc nào có thể."

– Rudasky

Thầy của em

Nguyễn Công Hạnh



# AVENGERS MATH 12

NGUYỄN CÔNG HẠNH

---

## 01

### HÀM SỐ

<b>Bài 1:</b> Đơn điệu hàm số	1
<b>Bài 2:</b> Cực trị hàm số	20
<b>Bài 3:</b> Min max hàm số	49
<b>Bài 4:</b> Tiệm cận	88
<b>Bài 5:</b> Đồ thị hàm số	108
<b>Bài 6:</b> Tương giao	132

## 02

### VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ

<b>Bài 1:</b> Vectơ trong không gian	156
<b>Bài 2:</b> Tọa độ điểm - vectơ	174
<b>Bài 3:</b> Tích có hướng	199

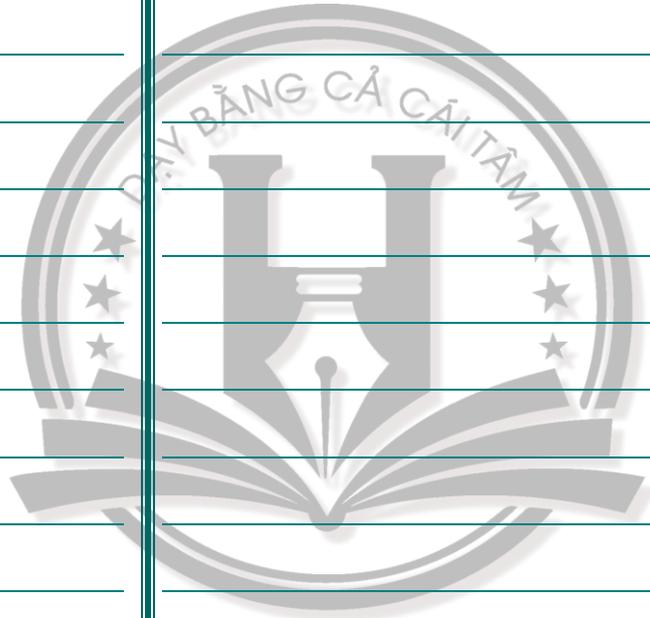
## 03

### THỐNG KÊ

<b>Bài 1:</b> Khoảng biến thiên	207
<b>Bài 2:</b> Phương sai	220









**MÓN QUÀ TẠI LỚP**

**☑ Đơn điệu biết  $f'(x)$**

**Ví dụ 1:** Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $f(x)$  biết

a)  $f'(x) = x(x+1)^2(x-1)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ .      b)  $f'(x) = x^2(x^2-4)(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**SOLUTION**

**☑ Đơn điệu biết hàm số  $f(x)$**

**Ví dụ 2:** Xét tính đơn điệu của hàm số:

a)  $y = x^3 - 3x^2 + 1$

b)  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$

**SOLUTION**



**Ví dụ 3:** Xét tính đơn điệu của hàm số:

a)  $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3$

b)  $y = -x^4 + 2x^2 + 2026$

**SOLUTION:**

**Ví dụ 4:** Xét tính đơn điệu của hàm số:

a)  $y = x^4 - 8x^2 + 6$

b)  $y = x^4 + 4x^2 + 1$

**SOLUTION:**





**Ví dụ 7:** Xét tính đơn điệu của hàm số:

a)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

b)  $y = x\sqrt{4 - x^2}$

**SOLUTION:**

**Đơn điệu chứa tham số**

**Ví dụ 8:** Tìm  $m$  để hàm số:

a) (Đề THPT QG 2020)  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

b)  $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**SOLUTION:**



**Ví dụ 9:** Tìm  $m$  để hàm số :

a)  $y = (m^2 - 4)x^3 + 3(m - 2)x^2 + 3x - 4$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

b) (Đề THPT QG 2017)  $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**SOLUTION**

**Ví dụ 10:** Tìm  $m$  để hàm số :

a) (ĐH Khối A 2013)  $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$  nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ .

b)  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4mx - 2$  đồng biến trên  $(-\infty; 0)$ .

c)  $y = \frac{3}{4}x^4 - (m - 1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

**SOLUTION**

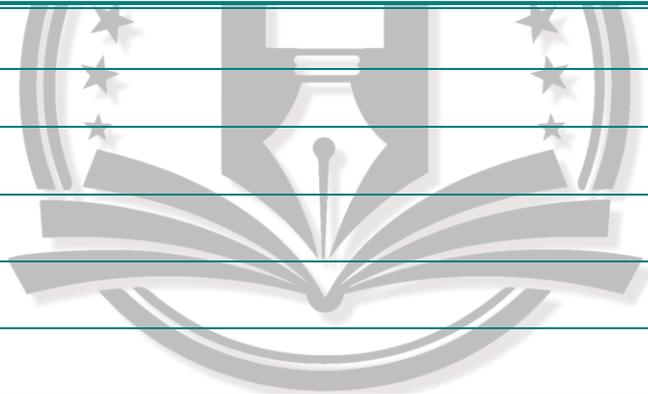


**Ví dụ 11:** Tìm  $m$  để hàm số :

a)  $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x$  nghịch biến trên khoảng  $(-1;1)$ .

b)  $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$  nghịch biến trên khoảng  $(0;1)$ .

**SOLUTION:**





**Ví dụ 12:** Tìm  $m$  để hàm số :

a)  $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$  nghịch biến trên từng khoảng xác định.

b)  $y = \frac{m^2x - 4}{x - 1}$  đồng biến trên các khoảng xác định

**SOLUTION:**

**Ví dụ 13:** Tìm  $m$  để hàm số :

a) (Đề THPT QG 2020)  $y = \frac{x + 4}{x + m}$  đồng biến trên  $(-\infty; -7)$ .

b)  $y = \frac{(m + 1)x + 2m + 2}{x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$

**SOLUTION:**

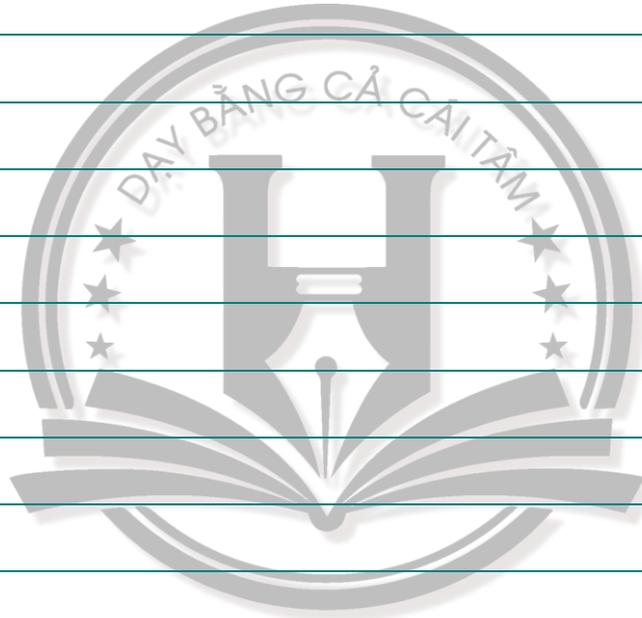


**Ví dụ 14:** Tìm  $m$  để hàm số :

a) (Đề THPT QG 2020)  $y = \frac{mx-4}{x-m}$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

b)  $y = \frac{mx-4}{m-x}$  nghịch biến trên khoảng  $(-3;1)$

**SOLUTION**





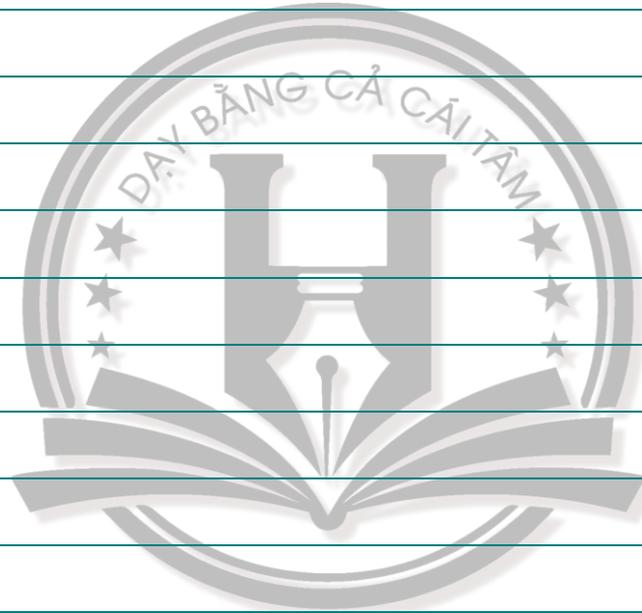
**Ví dụ 15:** Tìm  $m$  để hàm số :

a)  $y = \frac{2 \cos x - 1}{\cos x - m}$  đồng biến trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

b)  $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$  đồng biến trên  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

c)  $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$  đồng biến  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

**SOLUTION**



**QUICK TIPS MCQ MASTERY**

**1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án).**

**Câu 1:** (Mã 101 – 2020 Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			$4$			$-1$		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; -1)$ .      B.  $(0; 1)$ .      C.  $(-1; 1)$ .      D.  $(-1; 0)$

**Câu 2:** (Đề Minh Họa 2020 – Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$f(x)$			$2$		$-1$		$2$		$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(-\infty; -1)$ .      B.  $(0; 1)$ .      C.  $(-1; 0)$ .      D.  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 3:** (Mã 104 - 2017) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$		
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$       B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$   
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$       D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$

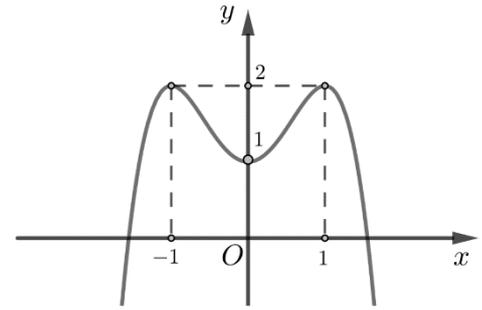
**Câu 4:** (Mã 101 - 2018) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			$3$			$-2$		$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

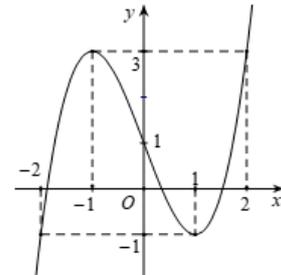
- A.  $(-1; 0)$       B.  $(-\infty; 0)$       C.  $(1; +\infty)$       D.  $(0; 1)$

**Câu 5:** (Mã 107 – 2020 Lần 2) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



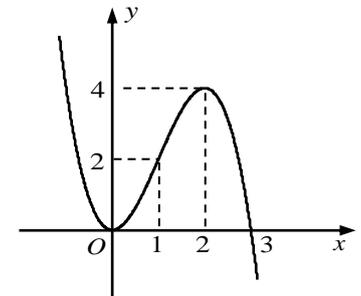
- A.  $(0;1)$ .                      B.  $(-\infty;0)$ .  
 C.  $(1;+\infty)$ .                  D.  $(-1;0)$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



- A.  $(-1;1)$ .                      B.  $(-2;-1)$ .  
 C.  $(-1;2)$ .                      D.  $(1;+\infty)$ .

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



- A.  $(-\infty;0)$ .                      B.  $(1;3)$ .  
 C.  $(0;2)$ .                          D.  $(0;+\infty)$ .

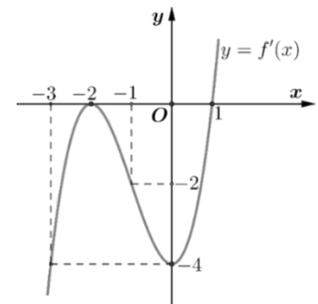
**Câu 8:** (Mã 101-2023) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

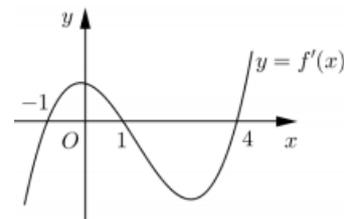
- A.  $(-\infty;0)$ .                      B.  $(2;+\infty)$ .                      C.  $(0;+\infty)$ .                      D.  $(-1;2)$ .

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên



- A.  $(-\infty;-2)$ .                      B.  $(0;1)$ .  
 C.  $(1;+\infty)$ .                      D.  $(-2;0)$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng



- A.  $(-\infty;0)$                       B.  $(-1;1)$   
 C.  $(2;4)$                           D.  $(1;4)$



- Câu 11:** (Mã 103 - 2022) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x + 1$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?  
 A.  $(-1; +\infty)$ .      B.  $(1; +\infty)$ .      C.  $(-\infty; -1)$ .      D.  $(-\infty; 1)$ .
- Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?  
 A.  $(-\infty; 1)$ .      B.  $(-\infty; -1)$ .      C.  $(1; 3)$ .      D.  $(3; +\infty)$ .
- Câu 13:** (Đề Minh Họa 2023) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-2)^2(1-x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?  
 A.  $(1; 2)$ .      B.  $(1; +\infty)$ .      C.  $(2; +\infty)$ .      D.  $(-\infty; 1)$ .
- Câu 14:** (Đề Tham Khảo - 2017) Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x+1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?  
 A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$       B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$   
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$       D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$
- Câu 15:** Hàm số  $y = \frac{5-2x}{x+3}$  nghịch biến trên  
 A.  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .      B.  $\mathbb{R}$ .      C.  $(-\infty; -3)$ .      D.  $(3; +\infty)$ .
- Câu 16:** (Mã 110 - 2017) Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?  
 A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$       B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$   
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$       D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$
- Câu 17:** Cho hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 2026$   
 A. Hàm số đã cho đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .  
 B. Hàm số đã cho nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .  
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên  $(-\infty; 1)$  và nghịch biến trên  $(1; +\infty)$ .  
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên  $(1; +\infty)$  và nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .
- Câu 18:** Hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$  đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?  
 A.  $(2; +\infty)$ .      B.  $(0; 2)$ .      C.  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .      D.  $(-\infty; 0)$ .
- Câu 19:** (Minh Họa - 2017) Hỏi hàm số  $y = 2x^4 + 1$  đồng biến trên khoảng nào?  
 A.  $(-\infty; 0)$ .      B.  $(-\infty; -\frac{1}{2})$ .      C.  $(0; +\infty)$ .      D.  $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ .
- Câu 20:** Hàm số  $y = x^4 - 4x^3$  đồng biến trên khoảng  
 A.  $(-\infty; +\infty)$ .      B.  $(3; +\infty)$ .      C.  $(-1; +\infty)$ .      D.  $(-\infty; 0)$ .



- Câu 21:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .    B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .  
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .    D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .
- Câu 22:** Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục  $Ox$ . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm  $t$  được xác định bởi hàm số  $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$  với  $t \geq 0$ . Khi đó  $v(t) = x'(t)$  là vận tốc của chất điểm tại thời điểm  $t$ . Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?
- A.  $t \in (0; 2)$ .    B.  $t \in (0; 3)$ .    C.  $t = 2$ .    D.  $t \in (2; +\infty)$ .
- Câu 23:** (Mã 110 - 2017) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?
- A.  $y = \frac{x-1}{x-2}$     B.  $y = x^3 + x$     C.  $y = -x^3 - 3x$     D.  $y = \frac{x+1}{x+3}$
- Câu 24:** (Đề minh họa 2022) Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên  $\mathbb{R}$
- A.  $y = -x^3 - x$ .    B.  $y = -x^4 - x^2$ .    C.  $y = -x^3 + x$ .    D.  $y = \frac{x+2}{x-1}$ .
- Câu 25:** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ ?
- A.  $y = x^3 - 3x + 2$ .    B.  $y = x^4 + 2x^2 + 2$ .  
 C.  $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ .    D.  $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ .
- Câu 26:** (Mã 101-2022) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?
- A.  $y = x^4 - x^2$ .    B.  $y = x^3 - x$ .    C.  $y = \frac{x-1}{x+2}$ .    D.  $y = x^3 + x$ .
- Câu 27:** (Mã 123 - 2017) Hàm số  $y = \frac{2}{x^2+1}$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
- A.  $(-\infty; +\infty)$     B.  $(0; +\infty)$     C.  $(-\infty; 0)$     D.  $(-1; 1)$
- Câu 28:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1}$ . Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?
- A.  $(-\infty; 5)$ .    B.  $(-3; +\infty)$ .    C.  $(3; +\infty)$ .    D.  $(-3; 5)$ .
- Câu 29:** (Mã 104 - 2017) Cho hàm số  $y = \sqrt{2x^2 + 1}$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$     B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$   
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; +\infty)$     D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$
- Câu 30:** Hàm số  $y = \sqrt{8+2x-x^2}$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?
- A.  $(1; +\infty)$ .    B.  $(-\infty; 1)$ .    C.  $(-2; 1)$ .    D.  $(1; 4)$ .

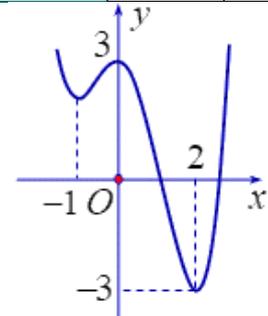
**2. Câu hỏi đúng sai.** (Trong mỗi ý (a),(b),(c),(d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai ).

**Câu 31:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$-\infty$	$0$	$5$	$-\infty$	

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 33:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 34:** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$  (tham số  $m$ ).

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 0$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ thì giá trị lớn nhất của $m$ là $-3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Có 8 giá trị nguyên dương $m$ để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 1 giá trị nguyên âm $m$ để hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 35:** Cho hàm số  $y = \frac{mx-1}{m-4x}$  (tham số  $m$ ). Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Ta có $y' = -\frac{m^2-4}{(m-4x)^2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Có 3 giá trị nguyên để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Hàm số nghịch biến trên trên từng khoảng xác định khi $m = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 2 giá trị nguyên để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh điền kết quả vào ô trống)**

**Câu 36:** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số  $N(t) = -t^3 + 12t^2$ ,  $0 \leq t \leq 12$ , trong đó  $N$  là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và  $t$  là thời gian (tuần). Gọi  $(a; b)$  là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Tính giá trị  $P = 2a^2 - b^2$ .

Trả lời :

**Câu 37:** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,025x^2(30-x)$  trong đó  $x$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ( $x$  được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng  $(a; b)$  thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tìm  $b-a$ ?

Trả lời :

**Câu 38:** Thể tích  $V(\text{cm}^3)$  của 1kg nước tại nhiệt độ  $T(0^\circ \text{C} \leq T \leq 30^\circ \text{C})$  được tính bởi công thức  $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0058043T^2 - 0,0000679T^3$ .

Thể tích nước  $V(T)(0^\circ \text{C} \leq T \leq 30^\circ \text{C})$  giảm trong khoảng nhiệt độ  $(a^\circ; b^\circ)$ ;  $b$  làm tròn đến hàng đơn vị. Tổng  $a+b$  bằng bao nhiêu?

Trả lời :

**Câu 39:** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = -\frac{t^3}{3} + 18t^2 - 35t + 10$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Trong 40 giây đầu tiên, chất điểm có vận tốc tức thời giảm trong khoảng thời gian  $(a; b)$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = 2b - 3a$ .

Trả lời :

**Câu 40:** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300km. Vận tốc dòng nước là 6km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v(\text{km/h})$  thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$  (Jun), trong đó  $c$  là hằng số. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng  $(a; b)$  thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Tính  $a+b$ ?

Trả lời :

**Câu 41:** Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm  $t$  (h) ( $0 \leq t \leq 24$ ) trong ngày được xác định bởi công thức  $h = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$ . Có bao nhiêu giờ trong ngày mà mực nước kênh tăng dần?

**Trả lời:**

**Câu 42:** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ ?

**Trả lời:**

**Câu 43:** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - (m+1)x^2 + 3x - m^2 + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Trả lời:**

**Câu 44:** (Mã 104 - 2017) Cho hàm số  $y = \frac{mx+4m}{x+m}$  với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định?

**Trả lời:**

**Câu 45:** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx-16}{x-m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ ?

**Trả lời:**

**Câu 46:** (Mã 104 - 2020 - Lần 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ ?

**Trả lời:**

**Câu 47:** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$  biết  $m \geq -10$ ?

**Trả lời:**

**Câu 48:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  có  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $x$  thỏa mãn bất phương trình  $f(x^2) < f(4x)$ ?

**Trả lời:**

**Câu 49:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$  nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3. Tính tổng các phần tử của  $S$ .

**Trả lời:**

**Câu 50:** Số giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = x + 3 - \frac{m}{x-2}$  đồng biến trên  $[5; +\infty)$ ?

**Trả lời:**

**Câu 51:** Số giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

**Trả lời:**

**Câu 52:** Cho hàm số  $y = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$  với  $m$  là tham số. Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên dương của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; e)$ . Số phần tử của  $S$ .

**Trả lời:**

**Câu 53:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = 2^{\frac{mx+4}{x+m}}$  nghịch biến trên  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ .

**Trả lời:**

**Câu 54:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm lớn hơn  $-10$  của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$  nghịch biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .

**Trả lời:**

**Câu 55:** Số giá trị nguyên không âm  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 5x + m + 6}{x + 2}$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ ?

**Trả lời:**

**Câu 56:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 1}$  nghịch biến trên khoảng  $(1; 3)$  và đồng biến trên khoảng  $(4; 6)$ .

**Trả lời:**

**Câu 57:** Số giá trị tham số  $m \in \mathbb{Z}^+$  để hàm số  $y = \frac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ ?

**Trả lời:**

**Câu 58:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $a \in (-\infty; 2026)$  sao cho hàm số  $y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ ?

**Trả lời:**

**Câu 59:** Hàm số  $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$  (tham số là  $m, n$ ) đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4(m^2 + n^2) - 2m - 2n$  là  $T$ . Tìm  $100T$ ?

**Trả lời:**

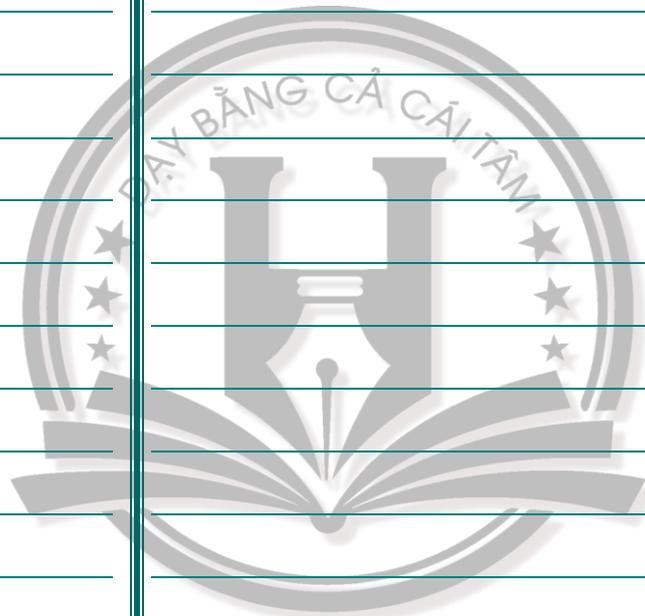
**Câu 60:** Có bao nhiêu số nguyên của  $m$  để hàm số  $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$  nghịch biến trên  $(1; 2)$ ?

**Trả lời:**



Không ai có thể thay bạn gánh chịu, cũng không ai có thể lấy đi sự kiên cường của bạn. Mỗi người đều là lữ khách cô độc, trải qua quá trình bôn ba hành tẩu rồi mới dần trở nên kiên cường!













**☑ Cực trị tại điểm  $x_0$**

**Ví dụ 7:** Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số

a)  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$  đạt cực đại tại  $x = 3$ ?

b)  $y = x^3 - 3mx^2 + (m + 2)x - m$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$ ?

c)  $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m - 5$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ ?

**SOLUTION**

**☑ Tìm  $m$  để hàm số có  $n$  điểm cực trị:**

**Ví dụ 8:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để :

a) Hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2$  có hai điểm cực trị.

b) Hàm số  $y = 2x^3 - (m - 2)x^2 + (6 - 3m)x$  có hai điểm cực trị.

**SOLUTION**



**Ví dụ 9:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để :

a) Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 2021$  không có cực trị.

b) Hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x$  không có cực trị.

**SOLUTION**

**Ví dụ 10:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để :

a) Hàm số  $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$  có cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại.

b) Hàm số  $y = mx^3 - 3mx^2 + 3x + 1$  có điểm cực đại nằm bên trái điểm cực tiểu.

**SOLUTION**



**Ví dụ 11:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để :

a) (ĐH B 2002) Hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$  có 3 điểm cực trị .

b) Hàm số  $y = mx^4 + (m - 2)x^2 + 1$  có 3 điểm cực trị.

**SOLUTION**

**Ví dụ 12:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để :

a) Hàm số  $y = m^2x^4 + (m - 4)x^2 + m$  có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại .

b) Hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + m^2$  có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

**SOLUTION**









**Ví dụ 19:** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$  có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

**SOLUTION:**

**Ví dụ 20:** Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{2x - 2m}$  có cực đại và cực tiểu

**SOLUTION:**





**☑ Cực trị chứa trị tuyệt đối**

**Ví dụ 23:** Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 14x^3 + 36x^2 + (16 - m)x$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có 7 điểm cực trị?

**SOLUTION**

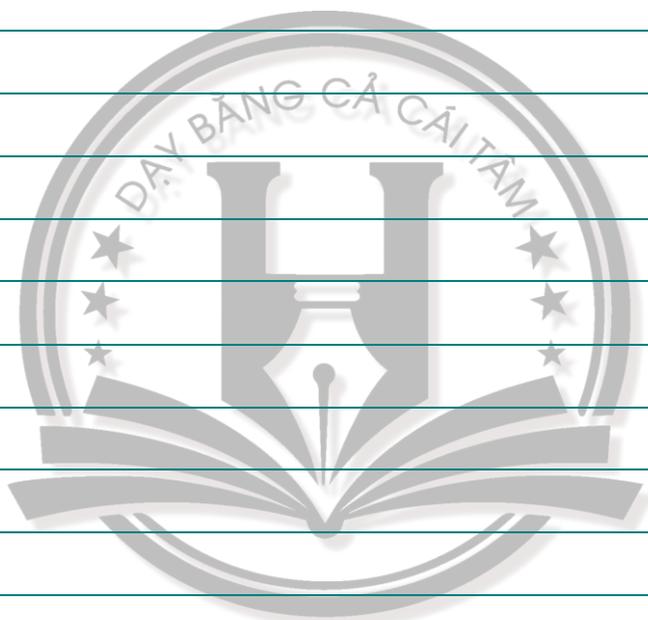
**Ví dụ 24: (Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có 7 điểm cực trị?

**SOLUTION**



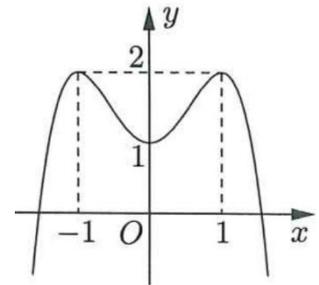
**Ví dụ 25:** (Mã 103 - 2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $a$  để hàm số  $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$  có đúng 3 điểm cực trị?

**SOLUTION**



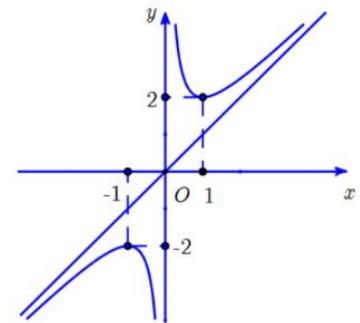


**Câu 7:** (Đề Minh Họa 2023) Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



- A.  $(-1; 2)$ .                      B.  $(0; 1)$ .  
 C.  $(1; 2)$ .                         D.  $(1; 0)$ .

**Câu 8:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là



- A. 1.                                      B. -1.  
 C. -2.                                    D. 2.

**Câu 9:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$  có bảng biến thiên như hình sau:

$x$	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -		- 0 +	
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	2	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm

- A.  $x = 5$ .                              B.  $x = 2$ .                              C.  $x = 0$ .                              D.  $x = -1$ .

**Câu 10:** (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$ , bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

$x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	0 - 0	- 0 +	

- A. 0.                                        B. 2.  
 C. 1.                                        D. 3.

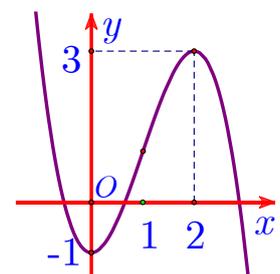
**Câu 11:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	0 +		- 0 -	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 4.                                        B. 1.                                        C. 2.                                        D. 3.

**Câu 12:** Cho hàm đa thức  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 3.                                        B. 1.  
 C. 2.                                        D. 0.



- Câu 13:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số  $f(x)$  có  $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là  
 A. 4.                                      B. 3.                                      C. 1.                                      D. 2.
- Câu 14:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là  
 A. 5.                                      B. 2.                                      C. 1.                                      D. 3.
- Câu 15:** (Mã 102-2023) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+2)(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là  
 A. 2.                                      B. 0.                                      C. 3.                                      D. 1.
- Câu 16:** Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019), \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(x)$  có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?  
 A. 1008                                      B. 1010                                      C. 1009                                      D. 1011
- Câu 17:** (Đề Minh Họa 2017) Tìm giá trị cực đại  $y_{CD}$  của hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$ .  
 A.  $y_{CD} = -1$                                       B.  $y_{CD} = 4$                                       C.  $y_{CD} = 1$                                       D.  $y_{CD} = 0$
- Câu 18:** Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?  
 A.  $y = \frac{x^2+1}{x}$                                       B.  $y = \frac{2x-2}{x+1}$                                       C.  $y = x^2 - 2x + 1$                                       D.  $y = -x^3 + x + 1$
- Câu 19:** Đồ thị hàm số  $y = x^4 - x^2 + 1$  có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?  
 A. 3.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 0.
- Câu 20:** Giá trị cực tiểu  $y_{CT}$  của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  là:  
 A.  $y_{CT} = 0$ .                                      B.  $y_{CT} = 3$ .                                      C.  $y_{CT} = 2$ .                                      D.  $y_{CT} = 4$ .
- Câu 21:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?  
 A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ .                                      B. Hàm số đạt cực đại tại điểm  $M(0; 2)$ .  
 C. Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 0$ .                                      D. Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 2$ .
- Câu 22:** Điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3x + 1$  là:  
 A.  $M(-1; -1)$ .                                      B.  $N(0; 1)$ .                                      C.  $P(2; -1)$ .                                      D.  $Q(1; 3)$ .
- Câu 23:** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$  đạt cực tiểu tại điểm  
 A.  $x = -1$ .                                      B.  $x = 1$ .                                      C.  $x = -3$ .                                      D.  $x = 3$ .
- Câu 24:** Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = x^4 - 2x^2$ .  
 A. 2.                                      B. 4.                                      C. 3.                                      D. 1.
- Câu 25:** Hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$  có tất cả bao nhiêu cực trị?  
 A. 2.                                      B. 3.                                      C. 1.                                      D. 0.





**Câu 30:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ . Khi đó :

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số có 3 điểm cực trị.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ ; $(1;+\infty)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ ; $(0;1)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 31:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 1$ hàm số có 2 điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = 1$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Biết $m < a$ thì hàm số có cực trị, khi đó phương trình $\log_2(x+a) = 3$ có nghiệm là $x = 7$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 6 giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho ứng với mỗi $m$ , hàm số có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-2;5)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$  với  $m$  là một tham số thực. Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 0$ hàm số không có điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m \neq 0$ hàm số có hai điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khi $m = 1$ thì tọa độ trung điểm của hai điểm cực trị đồ thị hàm số là $I(1;2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$ thì $m \in (1;3]$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 33:** Cho hàm số  $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$  có đồ thị  $(C_m)$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 0$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = 0$ hàm số có một điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Để hàm số có ba cực trị thì $m > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông thì $m = a$ , khi đó thể tích khối chóp có đáy $S = 4$ chiều cao $h = a$ bằng 4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 34:** Cho hàm số  $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$  ( $m$  là tham số).

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số có 3 điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = 0$ thì hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số $y = -f(x)$ có 2 điểm cực đại là $(-1;5)$ và $(0;0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 6 giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y =  f(x) $ có đúng 5 điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 35:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m+18]$  ( $m$  là tham số). Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = -2$ thì hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = -3$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khi $m = 5$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị bằng 5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh điền kết quả vào ô trống)

#### ⇒ Cực trị không tham số

**Câu 36:** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:  
 $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$  (con), trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây. Hỏi thời gian bằng bao nhiêu để số lượng vi khuẩn đạt cực đại?

Trả lời :

**Câu 37:** Giả sử tổng chi phí sản xuất  $x$  ( $0 \leq x \leq 50$ ) đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy được cho bởi công thức  $C(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 400$  (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá  $(900 - 6x)$  nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để lợi nhuận trung bình đạt cực đại

Trả lời :

**Câu 38:** Người ta thấy rằng trong vòng 3 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành  $P$  của một loại sản phẩm vào tháng thứ  $t$  thay đổi theo công thức  $P(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$  (đồng) với  $0 \leq t \leq 36$ . Giá thành đạt cực đại vào thời điểm nào?

Trả lời :

**Câu 39:** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số  $N(t) = -t^3 + 12t^2$ ,  $0 \leq t \leq 12$ , trong đó  $N$  là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và  $t$  là thời gian (tuần). Số lượng người nhiễm bệnh đạt cực đại có giá trị bằng bao nhiêu

Trả lời :

**Câu 40:** Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là  $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$  và hàm doanh thu là  $TR = -2x^2 + 1312x$ , với  $x$  là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số  $f(x) = TR - TC$ , cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Trả lời :

**Câu 41:** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số  $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \leq t \leq 12$ , trong đó  $N$  là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và  $t$  là thời gian (tuần). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất ở tuần thứ mấy?

**Trả lời :**

**Câu 42:** Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Tính từ thời điểm 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian  $t$  (giờ) trong ngày cho bởi công thức:  $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 24t$  ( $t > 0$ )

. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước lúc mấy giờ cùng ngày? Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

**Trả lời :**

**Câu 43:** Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày sẽ giảm 9 thùng. Số giếng dầu công ty có thể khai thác để sản lượng dầu chiết xuất cao nhất?



**Trả lời :**

**Câu 44:** Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất  $x$  sản phẩm ( $0 \leq x \leq 300$ ) được cho bởi hàm số  $y = -x^3 + 300x^2$  (đơn vị: đồng). Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để đạt được lợi nhuận cao nhất?

**Trả lời :**

**Câu 45:** Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm  $t = 0(s)$  cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm  $t = 126(s)$ , cho bởi hàm số sau:  $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$ , ( $v$  được tính bằng  $ft/s$ ,  $1\text{feet} = 0,3048m$ ) (Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012).



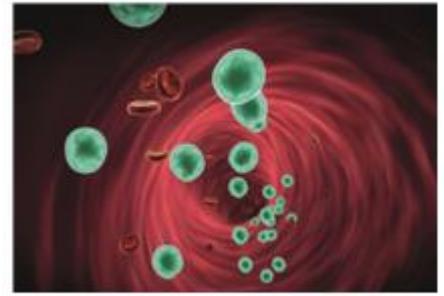
(Nguồn: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble\\_Space\\_Telescope](https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble_Space_Telescope))

Hỏi số nguyên nhỏ nhất  $t$  để gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi là bao nhiêu?

**Trả lời :**

**Câu 46:** Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (mg/l) của thuốc trong máu sau  $x$  phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức:  $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ . (Nguồn: James

Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning). Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lí phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu  $C(x)$  đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



**Trả lời :**

**Câu 47:** Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm  $t$  (h) ( $0 \leq t \leq 24$ ) trong ngày được xác định bởi công thức  $h = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$ . Tìm khoảng thời gian mà mực nước lên cao nhất?

**Trả lời :**

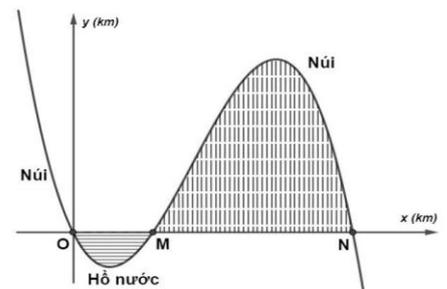
**Câu 48:** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

**Trả lời :**

**Câu 49:** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số  $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$ ,  $t \geq 0$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn đến hàng phần chục)

**Trả lời :**

**Câu 50:** Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách  $OM = 2\text{km}$ ; độ rộng của núi  $MN = 3,5\text{km}$ . Độ



sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

**Trả lời :**

↻ Cực trị tham chứa tham số m

**Câu 51:** (Mã 110 - 2017) Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$  đạt cực đại tại  $x = 3$ .

**Trả lời:**

**Câu 52:** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$

**Trả lời:**

**Câu 53:** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

**Trả lời:**

**Câu 54:** Có bao nhiêu số thực  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

**Trả lời:**

**Câu 55:** Tìm giá trị của  $m$  để hàm số  $y = x^3 + (3m - 1)x^2 + m^2x - 3$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .

**Trả lời:**

**Câu 56:** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^8 + (m - 4)x^5 - (m^2 - 16)x^4 + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

**Trả lời:**

**Câu 57:** Số giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = x^{12} + (m - 5)x^7 + (m^2 - 25)x^6 + 1$  đạt cực đại tại  $x = 0$ ?

**Trả lời:**

**Câu 58:** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = mx^3 - 2mx^2 + (m - 2)x + 1$  không có cực trị?

**Trả lời:**

**Câu 59:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3(7m - 3)x$ . Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số không có cực trị. Tìm số phần tử của  $S$ ?

**Trả lời:**

**Câu 60:** Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$  có cực đại và cực tiểu?

**Trả lời:**

**Câu 61:** Tập hợp các giá trị nguyên dương không vượt quá 10 của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 1$  có hai cực trị?

**Trả lời:**

**Câu 62:** Cho hàm số  $y = mx^4 - x^2 + 1$ . Số giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị ?

**Trả lời :**

**Câu 63:** Cho hàm số  $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$ . Số giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số đã cho có đúng một điểm cực tiểu ?

**Trả lời :**

**Câu 64:** Tìm số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$  có ba điểm cực trị.

**Trả lời :**

**Câu 65:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  trên miền  $[-10; 10]$  để hàm số  $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$  có ba điểm cực trị?

**Trả lời :**

**Câu 66:** (Đề Tham Khảo 2017) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$  không có cực đại?

**Trả lời :**

**Câu 67:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số có đúng một điểm cực trị?

**Trả lời :**

**Câu 68:** (Mã 104 - 2017) Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d : y = (2m-1)x + 3 + m$  vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .

**Trả lời :**

**Câu 69:** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = (2m-1)x + m + 3$  song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$

**Trả lời :**

**Câu 70:** Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$ . Tìm hệ số góc của đường thẳng  $AB$ .

**Trả lời :**

**Câu 71:** Đường thẳng  $d : y = (3m+1)x + 3 + m$  vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ . Tìm  $12m$  ?

**Trả lời :**

**Câu 72:** Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 2x + m$  đi qua điểm  $M(-3; 7)$  khi  $m$  bằng bao nhiêu?

**Trả lời:**  

**Câu 73:** Với giá trị nào của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + m$  có hai điểm cực trị  $A, B$  thỏa mãn  $OA = OB$  ( $O$  là gốc tọa độ)?

**Trả lời:**  

**Câu 74:** (Đề Tham Khảo 2017) Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$  sao cho  $A, B$  nằm khác phía và cách đều đường thẳng  $d: y = 5x - 9$ . Tính tổng tất cả các phần tử của  $S$ .

**Trả lời:**  

**Câu 75:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

**Trả lời:**  

**Câu 76:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$  có các giá trị cực trị trái dấu?

**Trả lời:**  

**Câu 77:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$  với  $m$  là một tham số thực. Tìm  $m$  để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng  $d: x + 8y - 74 = 0$ .

**Trả lời:**  

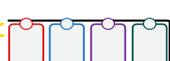
**Câu 78:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $C(1; 4)$ . Tính tổng các giá trị nguyên dương của  $m$  để  $(C)$  có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho tam giác  $ABC$  có diện tích bằng 4.

**Trả lời:**  

**Câu 79:** Cho hàm số  $y = x^3 - 6mx + 4$  có đồ thị  $(C_m)$ . Đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của  $(C_m)$  cắt đường tròn tâm  $I(1; 0)$ , bán kính  $\sqrt{2}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho tam giác  $IAB$  có diện tích lớn nhất. Tìm giá trị  $8m$ ?

**Trả lời:**  

**Câu 80:** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + 6mx + m^3$ . Tìm tổng các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho độ dài  $AB = \sqrt{2}$ .

**Trả lời:**  

**Câu 81:** (Mã 102-2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho ứng với mỗi  $m$ , hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$  có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng  $(0; 6)$ .

**Trả lời:**

**Câu 82:** Giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$  có 2 điểm cực trị  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$  là  $\frac{a}{b}$  tối giản. Tìm giá trị biểu thức  $T = a + 2b$ ?

**Trả lời:**

**Câu 83:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị?

**Trả lời:**

**Câu 84:** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 1$  có ba điểm cực trị  $A(0; 1), B, C$  thỏa mãn  $BC = 4$ ?

**Trả lời:**

**Câu 85:** (Đề Minh Họa 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 + 1$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

**Trả lời:**

**Câu 86:** (Mã 105 -2017) Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2mx^2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng 1.

**Trả lời:**

**Câu 87:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$  có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Tìm số phần tử của tập hợp  $S$ ?

**Trả lời:**

**Câu 88:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + m + 4$  có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

**Trả lời:**

**Câu 89:** Số giá trị nguyên của tham số  $a$  để hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + ax$  có đúng ba điểm cực trị?

**Trả lời:**

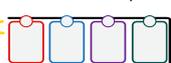
**Câu 90:** Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$  tạo với trục hoành một góc bao nhiêu độ theo chiều dương của trục hoành.

**Trả lời:**





**Câu 100:** (Đề Tham Khảo 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có 7 điểm cực trị?

Trả lời :  

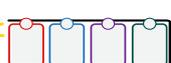
**Câu 101:** Cho hàm số  $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m - 1|$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên trong khoảng  $[-2; 2]$  của  $m$  để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị ?

Trả lời :  

**Câu 102:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$  có 5 điểm cực trị?

Trả lời :  

**Câu 103:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = (x^3 - 3x - m + 1)^2$  có 5 điểm cực trị.

Trả lời :  

**Câu 104:** (Mã 101-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$  có đúng ba điểm cực trị

Trả lời :  

**Câu 105:** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$  với  $m, n$  là các tham số thực thỏa mãn  $\begin{cases} m + n > 0 \\ 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases}$

Tìm số cực trị của hàm  $y = |f(|x|)|$ .

Trả lời :  



Hãy bình tâm làm những việc mình nên làm. Phải nỗ lực thật nhiều! Đôi khi, sau khi phấn đấu hết mình, bạn sẽ phát hiện bản thân xuất sắc hơn chính mình tưởng tượng nhiều.



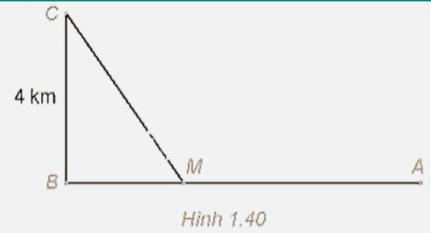








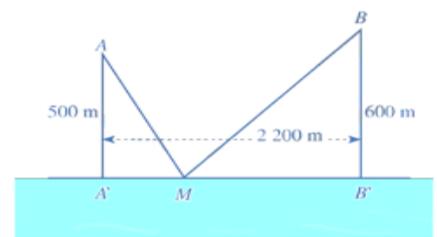
**Ví dụ 9:** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình 1.40. Khoảng cách từ C đến B là 4km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.



Hình 1.40

**SOLUTION**

**Ví dụ 10:** Có hai xã cùng ở một bên bờ sông Lam. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là  $AA' = 500m$ ,  $BB' = 600m$  và  $A'B' = 2200m$  (Hình 37). Các Kỹ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn  $A'B'$  sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.

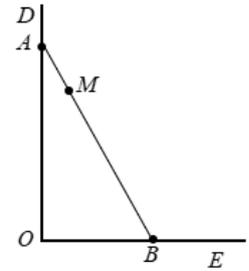


Hình 37

**SOLUTION**



**Ví dụ 13:** Người ta muốn xây một đoạn đường  $AB$  (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm  $M$ . Biết rằng vị trí điểm  $M$  cách  $OD$   $125m$  và cách  $OE$   $1km$ . Giả sử chi phí để làm  $100m$  đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của  $A$  và  $B$  để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?

**SOLUTION****Bài toán Min-Max về kinh tế**

**Ví dụ 14:** Thầy Hạnh là ca sĩ và là CEO một nhà hát A. Thầy đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, thầy xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Các em hãy giúp thầy xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

**SOLUTION**



**Ví dụ 15: (ĐMH 2025)** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 500$ ) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là  $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$  (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là  $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$  (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất

**SOLUTION:**



**Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên trên  $[-5; 7)$  như sau

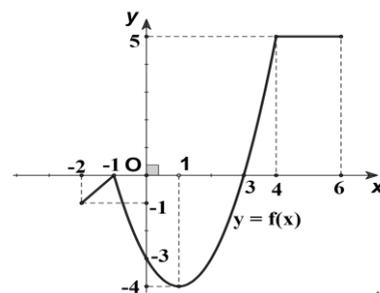
$x$	-5		1		7
$y'$		-	0	+	
$y$	6				9

(Arrows in the original image point from y=6 to y=2 and from y=9 to y=2)

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.  $\min_{[-5;7)} f(x) = 6$ .      B.  $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$ .      C.  $\max_{[-5;7)} f(x) = 9$ .      D.  $\max_{[-5;7)} f(x) = 6$ .

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 6]$  và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-2; 6]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng



- A. 9.      B. -8.  
C. -9.      D. 8.

**Câu 8:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

$x$	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$y'$		-		-	0	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A.  $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$       B.  $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$       C.  $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$       D.  $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

**Câu 9:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 33x$  trên đoạn  $[2; 19]$  bằng

- A. -72.      B.  $-22\sqrt{11}$ .      C. -58.      D.  $22\sqrt{11}$ .

**Câu 10:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$  trên đoạn  $[0; 9]$  bằng

- A. -2.      B. -11.      C. -26.      D. -27.

**Câu 11:** Tìm tập giá trị của hàm số  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

- A.  $T = [1; 9]$ .      B.  $T = [2\sqrt{2}; 4]$ .      C.  $T = (1; 9)$ .      D.  $T = [0; 2\sqrt{2}]$ .

**Câu 12:** (Mã 101 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 9$  trên đoạn  $[-2; 3]$  bằng

- A. 201      B. 2      C. 9      D. 54

**Câu 13:** (Mã 105 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^4 - x^2 + 13$  trên đoạn  $[-2; 3]$ .

- A.  $m = 13$       B.  $m = \frac{51}{4}$       C.  $m = \frac{51}{2}$       D.  $m = \frac{49}{4}$

**Câu 14:** (Mã 103 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + 3x^2$  trên đoạn  $[-4; -1]$  bằng

- A. -16      B. 0      C. 4      D. -4



**Câu 15:** (Đề Tham Khảo 2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

- A.  $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$       B.  $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$       C.  $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$       D.  $\min_{(0;+\infty)} y = 7$

**Câu 16:** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Tìm  $m$

- A.  $m = 4$ .      B.  $m = 2$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = 3$ .

**Câu 17:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos 2x$  trên  $[0; \pi]$  là

- A.  $\frac{9}{8}$ .      B.  $\frac{5}{4}$ .      C. 2.      D. 1.

**Câu 18:** Cho hàm số  $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$ . Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất và  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

- A.  $M = m + \frac{3}{2}$ .      B.  $M = \frac{3}{2}m$ .      C.  $M = m + 1$ .      D.  $M = m + \frac{2}{3}$ .

**Câu 19:** Với giá trị nào của  $x$  thì hàm số  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

- A.  $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ .      B.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .      C. 1.      D.  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .

**Câu 20:** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ . Tìm  $m$ ?

- A.  $m = 5$ .      B.  $m = 4$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = 3$ .

⇒ **Min Max chứa tham số, chứa trị tuyệt đối (Dành cho HSG thi các kì thi riêng HSG – ĐGNL)**

**Câu 21:** (Mã 123 2017) Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x-1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[2;4]} y = 3$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.  $m > 4$       B.  $3 < m \leq 4$       C.  $m < -1$       D.  $1 \leq m < 3$

**Câu 22:** (Mã 110 2017) Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.  $m > 4$       B.  $2 < m \leq 4$       C.  $m \leq 0$       D.  $0 < m \leq 2$

**Câu 23:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + m$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 0.

- A.  $m = 2$ .      B.  $m = 6$ .      C.  $m = 0$ .      D.  $m = 4$ .

**Câu 24:** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 - m$ . Trên  $[-1; 1]$  hàm số có giá trị nhỏ nhất là  $-1$ . Tính  $m$ ?

- A.  $m = -6$ .      B.  $m = -3$ .      C.  $m = -4$ .      D.  $m = -5$ .



- Câu 25:** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  trên  $[1;2]$  bằng 8 ( $m$  là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?  
 A.  $m > 10$ .                      B.  $8 < m < 10$ .                      C.  $0 < m < 4$ .                      D.  $4 < m < 8$ .
- Câu 26:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số  $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  sao cho  $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$ . Số phần tử của  $S$  là  
 A. 6.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 4.
- Câu 27:** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^2 - 2x + m|$  trên đoạn  $[-1;2]$  bằng 5.  
 A. -1.                      B. 2.                      C. -2.                      D. 1.
- Câu 28:** Cho hàm số  $y = (x^3 - 3x + m)^2$ . Tổng tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[-1;1]$  bằng 1 là  
 A. 1.                      B. -4.                      C. 0.                      D. 4.
- Câu 29:** (Đề Tham Khảo 2018) Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0;2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là  
 A. 0                      B. 6                      C. 1                      D. 2
- Câu 30:** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0;3]$  bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  là:  
 A. -16.                      B. 16.                      C. -12.                      D. -2.
- Câu 31:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$  trên đoạn  $[-2;4]$  bằng 16. Số phần tử của  $S$  là  
 A. 0.                      B. 2.                      C. 4.                      D. 1.
- Câu 32:** Cho hàm số  $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$ . Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = 10$ ?  
 A. 3.                      B. 5.                      C. 2.                      D. 1.
- Câu 33:** Cho hàm số  $f(x) = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  sao cho  $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10$ . Số phần tử của  $S$  là?  
 A. 2.                      B. 3.                      C. 5.                      D. 1.
- Câu 34:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao  $|2x^3 - 3x^2 + m| \leq 16, \forall x \in [0;3]$ . Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng  
 A. -65.                      B. -74.                      C. -42.                      D. 87.



- Câu 35:** Biết giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$  trên  $[0; 3]$  bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực  $m$ .
- A. 48.                                      B. 5.                                      C. 6.                                      D. 62.

**2. Câu hỏi đúng sai. (Trong mỗi ý (a), (b), (c), (d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng  hoặc sai ).**

**Min Max hàm số cho sẵn**

- Câu 36:** [THPT QG 2025] Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 12x - 8$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số đã cho có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 12$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{2\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$f(2) = 24$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng 24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Câu 37:** [Minh họa 2025] Cho hàm số  $f(x) = 2 \cos x + x$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2 \sin x + 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Câu 38:** Cho hàm số  $f(x) = 2x - \log_5(x+1)$

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}, \forall x \in (-1; +\infty)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số $f(x)$ có một điểm cực tiểu.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = 4$ là $f(4) = 8$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Câu 39:** Cho hàm số  $f(x) = \ln x - 2x^2, \forall x \in (0, +\infty)$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $[1; e^2]$ là $-\frac{5}{2} - \ln 2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	$f(1) = -2; f(e^2) = 2 - 2e^4$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



**Câu 40:** Cho hàm số  $y = f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$f(0) = 7$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = (2x - 5)e^x$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{5}{2})$ và đồng biến trên khoảng $(\frac{5}{2}; +\infty)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là 7 và $3e$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 41:** Cho hàm số  $f(x) = 4 \sin x \cos x + 2x$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 4 \sin 2x + 2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị thuộc $[-\pi; \pi]$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; \frac{\pi}{2}]$ là $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 42:** Cho hàm số  $f(x) = \sin x - x$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \cos x - 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ là $\pi$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ là $-1 - \frac{3\pi}{2}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	$f(0) = 0; f(\pi) = -\pi$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 43:** Cho hàm số  $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ , với  $m$  là tham số

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khi $m = 1$ thì trên đoạn $[1; 4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có duy nhất 1 giá trị của tham số $m$ để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng $-1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



**Câu 44:** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + m$ , với  $m$  là tham số

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = 0$ thì hàm số có hai điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng $m - 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y =  f(x) $ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Khi đó $S$ có một phần tử	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 45:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x + m}$ , với  $m$  là tham số thực dương

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Trên đoạn $[2;4]$ thì đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$ là $\min_{[2;4]} y = y(2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Chỉ có duy nhất một giá trị của tham số $m$ để $\min_{[2;4]} y = \frac{9}{5}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

➤ **Min Max thực tế**

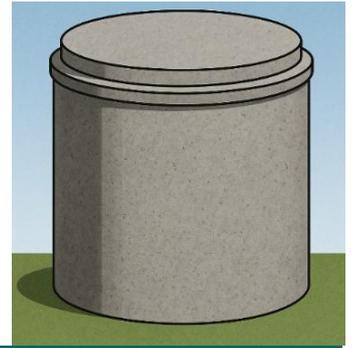
**Câu 46:** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s(t)$  tính bằng mét.

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng $8m/s$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $13m$ , vận tốc khi đó bằng $8m/s$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5m/s$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng $2m/s^2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 47:** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát (người giám sát sẽ giám sát tất cả các máy). Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ.

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Trong 1 giờ, cần 266 máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Trong $\frac{8}{3}$ giờ, cần 100 máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Chi phí hoạt động thấp nhất là 6,5 triệu đồng.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Để chi phí hoạt động thấp nhất, công ty cần sử dụng 16 máy.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 48:** Một trang trại cần xây một bể chứa nước hình trụ bằng bê tông (có nắp đậy) để chứa  $60(m^3)$  nước tưới tiêu. Chi phí xây dựng chủ yếu phụ thuộc vào diện tích bề mặt bê tông cần sử dụng (diện tích toàn phần của bể tính theo phần bên trong của bể). Theo hợp đồng với nhà thầu xây dựng, chi phí mỗi mét vuông xây dựng theo cách tính trên là 1,5 triệu đồng. Gọi  $r$  là bán kính đáy và  $h$  là chiều cao của bể (đơn vị tính của  $r, h$  là mét).



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Thể tích của bể là: $V = \pi r^2 h = 60(m^3)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Diện tích toàn phần $S_p$ của bể chứa nước được biểu diễn theo bán kính $r$ là $S_p(r) = \pi r^2 + \frac{120}{r}(m^2)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Để tiết kiệm chi phí nhất, bể nên được xây với bán kính đáy là $r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}(m)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Chi phí thấp nhất để xây dựng bể chứa nước nói trên là 127 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 49:** Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng trưởng chiều cao của cây cà chua khi trồng được cho bởi hàm số  $v(t) = -0,1t^3 + t^2$ , trong đó  $t$  tính theo tuần,  $v(t)$  tính bằng centimét/tuần. Gọi  $h(t)$  (tính bằng centimét) là chiều cao của cây cà chua ở tuần thứ  $t(t \geq 0)$

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{1}{3}t^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây cà chua kéo dài 10 tuần.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Chiều cao của cây cà chua ở tuần thứ 6 lớn hơn 40cm.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Chiều cao tối đa của cây cà chua không vượt quá 90 cm.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

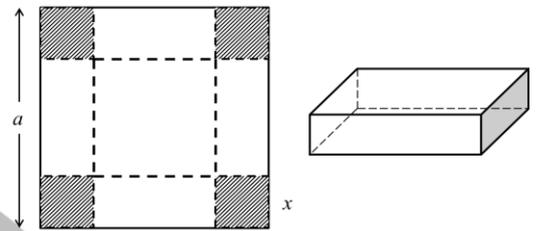
**Câu 50:** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = t^3 - 3t^2 + 6t + 4$ , trong đó  $0 \leq t \leq 10$ ,  $t$  tính bằng giây và  $s(t)$  tính bằng mét.

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Quãng đường chất điểm chuyển động trong $2(s)$ đầu tiên là $8(m)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ là $15(m/s)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tại thời điểm mà $s(t) = 22(m)$ thì gia tốc tức thời của chất điểm là $12(m/s^2)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Tại thời điểm $t = 2(s)$ vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 51:** Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là  $50m^2$ . Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ $m^2$  và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/ $m^2$  thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5 kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là 1,5 (kg).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 52:** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh  $a$ . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt $\frac{a}{12}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt $\frac{a}{6}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

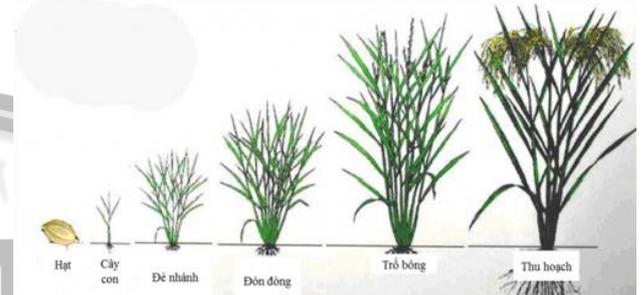
**Câu 53:** Chi phí nguyên liệu của một con tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi  $v = 10 km/h$  thì chi phí nguyên liệu phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng /giờ. Gọi  $x(km/h)$  là vận tốc của tàu.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Chi phí nhiên liệu cho phần thứ nhất trong thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{480}{x}$ (nghìn đồng).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trong 1 giờ là $C(x) = 480 + 0,03x^3$ (nghìn đồng).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trên quãng đường 1 km giảm khi vận tốc của tàu thuộc $(0; 30)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Tổng chi phí nhiên liệu để tàu chạy trên quãng đường 1 km nhỏ nhất là 43 (nghìn đồng).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 54:** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$  (mg/l).

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Sau khi tiêm thuốc 2 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân bằng 0,4 (mg/l).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân có thể vượt quá 0,5 (mg/l).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng 0,5 (mg/l).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 55:** Những ngày giáp Tết Nguyên Đán cũng là dịp bước vào vụ Đông Xuân, bà con nông dân tích cực xuống đồng cấy lúa. Cây lúa sau khi được cấy trải qua quá trình tăng trưởng để nhanh và phát triển chiều cao trước khi làm đồng, trở bông. Qua nghiên cứu một giống lúa mới, các nhà khoa học nhận thấy một cây lúa tính từ lúc được cấy bằng một cây mạ với chiều cao 20cm có tốc độ tăng trưởng chiều cao cho bởi hàm số  $v(t) = -0,1t^3 + 1,1t^2$ , trong đó  $t$  tính theo tuần,  $v(t)$  tính bằng cm/tuần. Gọi  $h(t)$  là chiều cao của cây lúa ở tuần thứ  $t$  ( $t \geq 0$ ).

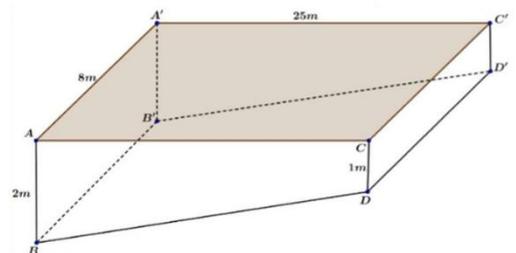


Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + 20$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây lúa kéo dài 12 tuần.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Chiều cao tối đa của cây lúa là 150cm.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Vào thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây đã lớn hơn 80cm.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh điền kết quả vào ô trống)

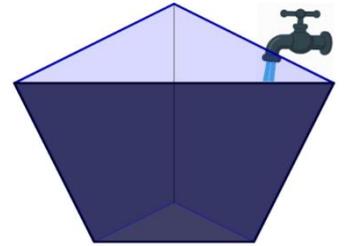
#### ⇒ Ứng dụng đạo hàm trong bài toán vật lý (NC)

**Câu 56:** Mặt bể bơi của một chung cư cao cấp có dạng một hình chữ nhật với chiều dài 25m và chiều rộng 8m. Bể bơi sâu 1m ở bên đầu nông và sâu 2m bên đầu sâu, Biết hai đầu nông, sâu thuộc hai mặt bên theo chiều dài bể bơi (tham khảo hình vẽ minh họa). Ban đầu bể bơi không có nước, nước bắt đầu được bơm vào bể bơi lúc 7h sáng với tốc độ  $1m^3$  / phút, vào lúc 7h 36 phút sáng thì mực nước dâng lên với tốc độ  $\frac{1}{a}$  (mét/phút). Giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?



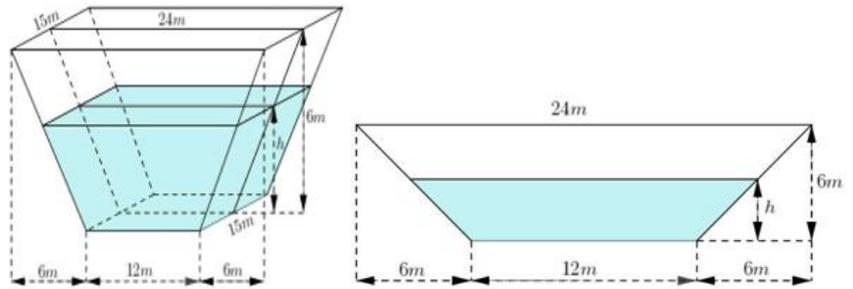
Trả lời:

**Câu 57:** Một cái chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt đều đáy là các tam giác cạnh bằng  $1\text{ dm}$  và  $3\text{ dm}$ . Chiều cao chậu nước bằng  $4\text{ dm}$ . Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi  $0,5\text{ lít/phút}$ . Đến phút thứ 10 thì tốc độ dâng lên của nước trong chậu là bao nhiêu  $\text{dm/phút}$ ? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



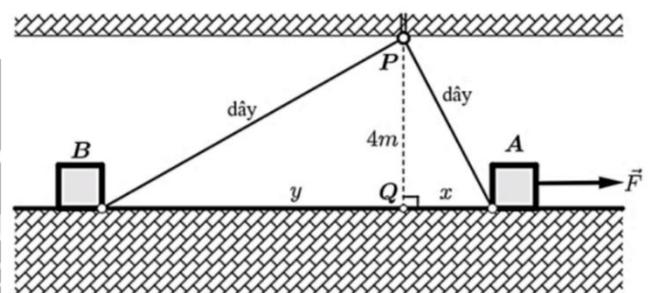
**Trả lời :**

**Câu 58:** Một bể chứa nước có mặt đáy và miệng bể đều là hình chữ nhật nằm trên 2 mặt phẳng song song với nhau, miệng bể có chiều ngang  $15\text{ m}$  và chiều dài  $24\text{ m}$ , đáy bể có kích thước  $15\text{ m} \times 12\text{ m}$ . Độ sâu của bể nước (tính từ miệng đến đáy) là  $6\text{ m}$ , mặt cắt vuông góc với chiều ngang của bể có hình dạng là hình thang cân (như hình vẽ). Lúc đầu bể không có nước, người ta sử dụng một máy bơm để bơm nước vào bể với tốc độ  $50\text{ m}^3$  trong một phút. Vào lúc mực nước đúng  $5\text{ m}$  thì tốc độ dâng lên của mực nước trong bể là bao nhiêu  $\text{m}$  trên một phút? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



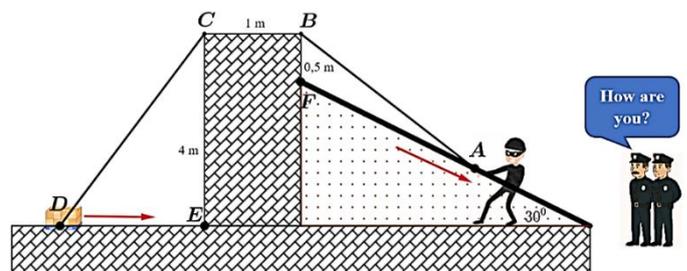
**Trả lời :**

**Câu 59:** Có hai thùng hàng  $A$  và  $B$  được đặt trên sàn nhà kho. Hai thùng được nối với nhau bằng một sợi dây dài  $15\text{ m}$ , sợi dây luôn căng và được kéo qua một ròng rọc gắn tại điểm  $P$  trên trần nhà. Biết trần nhà cao  $4\text{ m}$  so với mặt sàn (đoạn  $PQ=4\text{ m}$ ) và trong quá trình di chuyển, hai thùng hàng luôn nằm trên mặt sàn (bỏ qua lực ma sát). Nếu thùng  $A$  cách  $Q$  khoảng  $3\text{ m}$  và đang được kéo ra xa  $Q$  với tốc độ không đổi  $0,5\text{ m/s}$ , hỏi thùng  $B$  đang di chuyển về phía  $Q$  với tốc độ bao nhiêu  $\text{m/s}$ ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



**Trả lời :**

**Câu 60:** Một tên trộm đang cố gắng kéo thùng nữ trang qua một bức tường có độ dày  $BC = 1\text{ m}$ ; biết rằng tường cao  $4\text{ m}$  và sợi dây được kéo theo đường gấp khúc  $ABCD$  có độ dài không đổi bằng  $20\text{ m}$ , đoạn  $BF = 0,5\text{ m}$ . Trong khi kéo thì tên trộm luôn ghi đầu dây theo một thanh vịn của cầu thang (đầu dây dịch chuyển theo phương  $AF$ ). Biết rằng thanh vịn cầu thang hợp với phương ngang một góc bằng  $30^\circ$ . Khi hai chú cảnh sát xuất hiện thì vị trí  $A$  cách  $F$  khoảng  $6\text{ m}$  và thùng  $D$  tiến về phía  $E$  với tốc độ  $1\text{ m/s}$ . Hỏi đầu dây  $A$  rời xa điểm  $F$  với tốc độ bao nhiêu  $\text{m/s}$ ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



**Trả lời :**

Min max vật lý

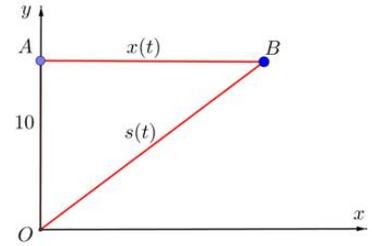
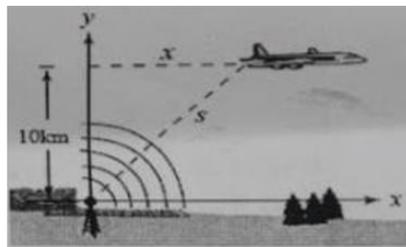
**Câu 61:** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$  với  $t$  là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và  $s$  là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời :

**Câu 62:** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là  $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$ , với  $t(s)$  là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s(m)$  là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc  $v(m/s)$  của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Trả lời :

**Câu 63:** Một máy bay đang bay ở độ cao  $10km$  so với mặt đất, thu phát tín hiệu qua một ăng-ten ra đa như hình vẽ. Khi máy bay cách ra đa  $16km$ , ra đa phát hiện khoảng cách giữa máy bay và ra đa thay đổi với tốc độ  $546km/h$ . Tìm vận tốc của máy bay (đơn vị  $km/h$ , kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



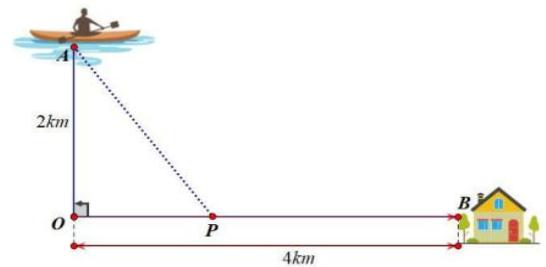
Trả lời :

**Câu 64:** Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Mô hình vận tốc của tàu trong sứ mệnh này, từ lúc rời bệ phóng ( $t = 0$  giây) cho đến khi được tên lửa đẩy nhanh khỏi bệ tại thời điểm  $t = 126$  giây, được xác định bởi công thức  $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$  ( feet/s ). (Nguồn: James Stewar, J (2015). Calculus. Cengage Learning 8<sup>th</sup> edition, p. 282) Tính gia tốc lớn nhất của tàu trong khoảng thời gian này (đơn vị: feet/s<sup>2</sup>, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



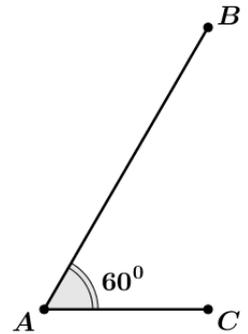
Trả lời :

**Câu 65:** Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông  $2km$ , anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là  $4km$  (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc  $6m/h$  và chạy bộ trên bờ với vận tốc  $10km/h$ . Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu phút ?



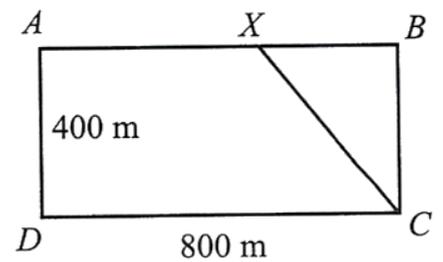
Trả lời :

**Câu 66:** Vào lúc 12 giờ 7 phút anh Hùng chạy xe xuất phát từ điểm  $A$  và đi đến điểm  $C$  với vận tốc là  $60$  (km/h). Biết rằng 7 phút trước đó anh Quang chạy xe xuất phát từ điểm  $B$  với vận tốc là  $30$  (km/h) sao cho hai quãng đường của hai xe hợp nhau một góc  $60^\circ$  như hình vẽ dưới đây. Cho biết  $AB = 42$  (km) và vào lúc  $a$  giờ  $b$  phút thì anh Quang và anh Hùng ở vị trí có cự li gần nhất để vẫy tay chào nhau ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ). Tính  $a+b$ ? Xem như hai xe đều chuyển động đều và không có tác dụng ngoại lực hay yếu tố nào khác.



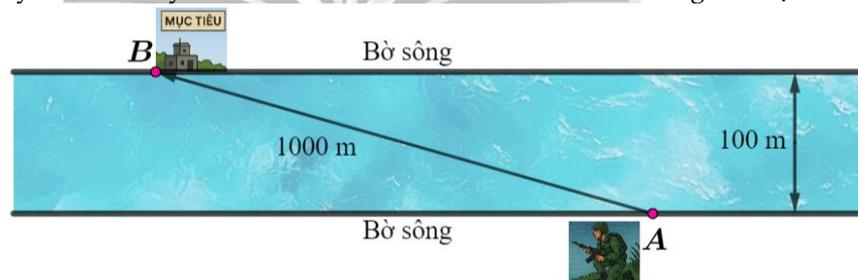
**Trả lời :**

**Câu 67:** Một vận động viên thể thao hai môn phối hợp luyện tập với một bể bơi hình chữ nhật rộng  $400m$ , dài  $800m$ . Vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm  $A$ , chạy đến điểm  $X$  và bơi từ điểm  $X$  đến điểm  $C$ . Hỏi nên chọn điểm  $X$  cách  $A$  gần bằng bao nhiêu mét để vận động viên đến  $C$  nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng vận tốc chạy là  $30km/h$ , vận tốc bơi là  $6km/h$ .



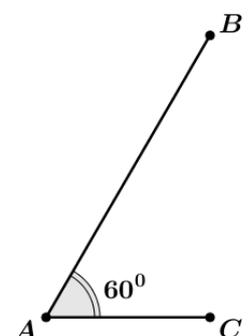
**Trả lời :**

**Câu 68:** Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng  $100m$  và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ  $1km$  theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia  $100m$  (làm tròn đến hàng đơn vị)?



**Trả lời :**

**Câu 69:** Vào lúc 12 giờ 7 phút anh Hùng chạy xe xuất phát từ điểm  $A$  và đi đến điểm  $C$  với vận tốc là  $60$  (km/h). Biết rằng 7 phút trước đó anh Quang chạy xe xuất phát từ điểm  $B$  với vận tốc là  $30$  (km/h) sao cho hai quãng đường của hai xe hợp nhau một góc  $60^\circ$  như hình vẽ dưới đây. Cho biết  $AB = 42$  (km) và vào lúc  $a$  giờ  $b$  phút thì anh Quang và anh Hùng ở vị trí có cự li gần nhất để vẫy tay chào nhau ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ). Tính  $a+b$ ? Xem như hai xe đều chuyển động đều và không có tác dụng ngoại lực hay yếu tố nào khác.



**Trả lời :**

**Câu 70:** Thầy Hạnh cần bơm 10 lít khí vào bên trong một quả khinh khí cầu. Biết rằng do sức chịu đựng của máy móc có giới hạn nhất định (nếu quá máy sẽ hỏng) nên thầy chia ra làm ba lần bơm. Theo lẽ thường, nếu có  $x$  lít khí được bơm ra thì thời gian bơm sẽ là  $5x^2$  (giây) nhưng do máy đã cũ nên ở lần thứ 3 gặp trục trặc và thời gian bơm ở lần 3 bị chuyển thành  $3x^3$  (giây) (bơm được  $x$  lít thì cần thời gian là  $3x^3$ ). Tìm tổng thời gian bơm ngắn nhất mà máy có thể bơm được (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị). Coi như thể tích khí ở mỗi lần bơm máy đều chịu được.



**Trả lời :**

⇒ Một số bài toán về sinh học (nồng độ - quần thể)

**Câu 71:** Giả sử tỷ lệ sinh của Tỉnh A tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số  $f(t) = \frac{200}{1+4e^{-t}}$ ;  $t \geq 0, t \in N$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng tháng. Khi đó đạo hàm  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ tăng dân số của tỉnh A. Hỏi sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A là lớn nhất?

**Trả lời :**

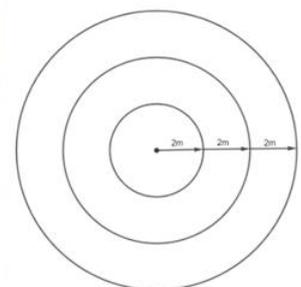
**Câu 72:** Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Đậu mùa Khỉ, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $x$  là  $f(x) = -x^3 + 18x^2$ . Ta xem  $f'(x)$  là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm  $x$ . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

**Trả lời :**

**Câu 73:** Anh Nam có một cái ao diện tích  $50m^2$  để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 40 con /  $m^2$  và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con /  $m^2$  thì mỗi con cá thành phẩm tăng thêm 0,5kg. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

**Trả lời :**

**Câu 74:** Một đường ống dẫn dầu bị rò rỉ hình thành nên một mảng dầu loang hình tròn trên mặt biển. Tốc độ tăng của bán kính mảng dầu loang theo thời gian là  $2m/h$ . Khi đó tốc độ tăng của diện tích ( tính theo  $m^2$ ) của mảng dầu loang cũng phụ thuộc theo thời gian  $t(h)$ . Hỏi tại thời điểm bán kính mảng dầu loang là  $25m$  thì tốc độ tăng diện tích mảng dầu loang theo thời gian là bao nhiêu  $m^2/h$ ? (Làm tròn đến hàng đơn vị)



**Trả lời :**

**Câu 75:** Nồng độ  $C$  của một loại hóa chất trong máu sau  $t$  giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức

$$C(t) = \frac{4t}{64+t^3} \text{ với } t \geq 0. \text{ Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hóa chất trong máu là}$$

cao nhất? (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

**Trả lời :**

**Câu 76:** Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ  $t$  của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm

$$số f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000 \text{ (con), } 0 \leq t \leq 365 \text{ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng}$$

cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**Trả lời :**

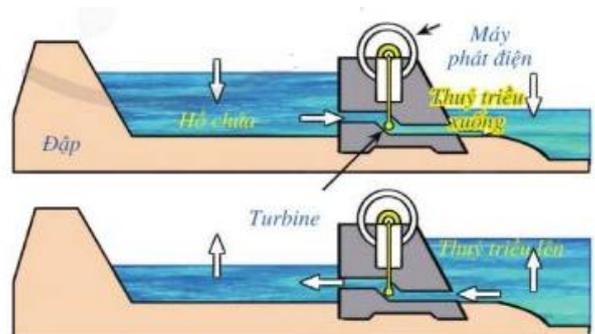
**Câu 77:** Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) vượt khoảng cách  $300km$  để tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là  $6km/h$ . Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là  $v km/h$  thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$  trong đó  $c$  là hằng số cho trước.  $E$  tính bằng Jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên, để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?

**Trả lời :**

**Câu 78:** Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (đơn vị: mg/l) của thuốc trong máu sau  $x$  phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức  $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ . Để đưa ra lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mg/l (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)?

**Trả lời :**

**Câu 79:** Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số  $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$ , trong đó  $t$  tính bằng giờ ( $0 \leq t \leq 24$ ),  $h'(t)$  tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm  $t = 0$ , mực nước trong hồ chứa cao  $8m$ . Mực nước trong hồ cao nhất bao nhiêu mét?



**Trả lời :**

Min max hình học

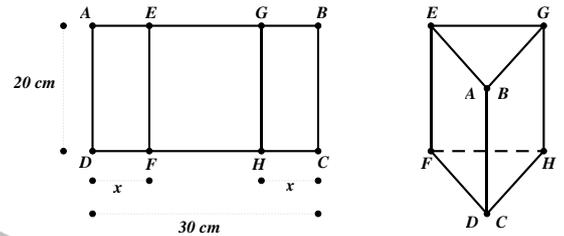
**Câu 80:** Ông A dự định sử dụng hết  $5,5 m^2$  kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) ?

Trả lời :

**Câu 81:** Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng  $10 m^3$ . Thùng tôn là hình hộp chữ nhật có chiều dài đáy bằng hai lần chiều rộng và không có nắp. Trên thị trường giá tôn làm đáy thùng là  $75.000 / m^2$  và giá tôn làm thành xung quanh thùng là  $55.000 / m^2$ . Chi phí thấp nhất để làm thùng đựng gạo là bao nhiêu triệu đồng. (làm tròn đến hàng phần chục)

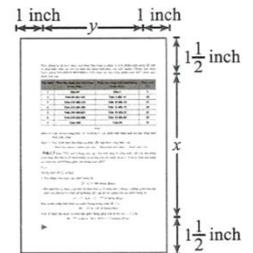
Trả lời :

**Câu 82:** Một tấm kẽm hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh  $AB = 30$  cm;  $BC = 20$  cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh  $EF$  và  $GH$  cho đến khi  $AD$  và  $BC$  trùng nhau như hình vẽ để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của  $x$  để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:



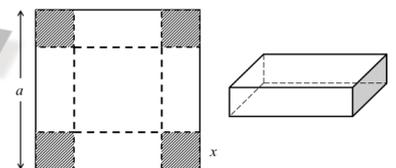
Trả lời :

**Câu 83:** Một nhà in sử dụng các trang giấy hình chữ nhật để in sách. Sau khi để lề trái, lề phải, lề trên và lề dưới theo số liệu được cho ở Hình thì diện tích phần in chữ trên trang sách là  $24 \text{ inch}^2$ . Tính diện tích nhỏ nhất của trang sách ?



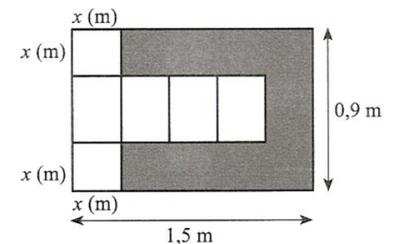
Trả lời :

**Câu 84:** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh  $12$  cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$  (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



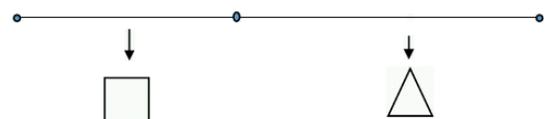
Trả lời :

**Câu 85:** Từ một miếng bìa có độ dài hai cạnh lần lượt là  $0,9 m$  và  $1,5 m$  như Hình. Bạn Minh cắt đi phần tô màu xám và gấp lại để được một hình hộp chữ nhật. Gọi  $V$  là thể tích hình hộp chữ nhật được tạo thành,  $V$  được tính theo  $x$  bởi công thức nào? Tìm  $x$  để hình hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.



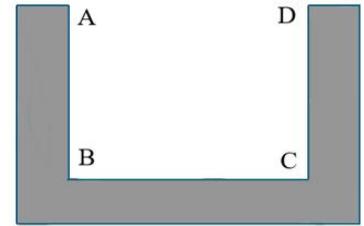
Trả lời :

**Câu 86:** Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi  $20 m$ , bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất ? (làm tròn đến hàng phần chục)



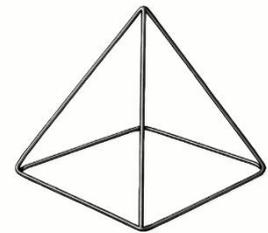
Trả lời :

**Câu 87:** Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật  $ABCD$ . Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt  $ABCD$  là  $0,48m^2$ . Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài  $T = AB + BC + CD$  là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



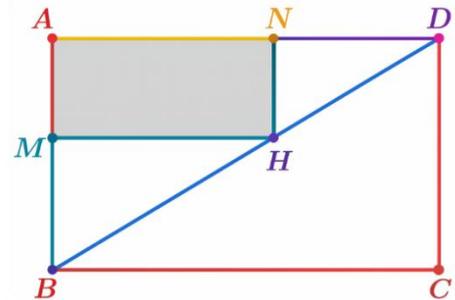
**Trả lời :**

**Câu 88:** Bạn An có một đoạn dây thép dài 16 dm muốn uốn thành một kim tự tháp có dạng chóp tứ giác đều (đoạn dây thép được uốn thành 4 cạnh bên và 4 cạnh đáy của kim tự tháp). Hỏi thể tích lớn nhất của kim tự tháp bạn An có thể làm được là bao nhiêu? (đơn vị:  $dm^3$ , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



**Trả lời :**

**Câu 89:** Trên mảnh đất hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích  $25m^2$ , người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là  $A$  và  $H$ , với  $H$  thuộc cạnh  $BD$ . Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) với chi phí trồng cỏ là  $70.000$  đồng/ $m^2$ ?

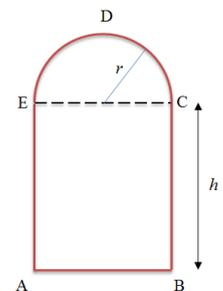


**Trả lời :**

**Câu 90:** Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần chục)?

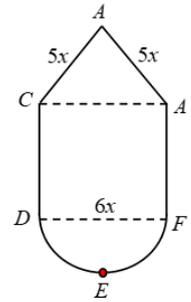
**Trả lời :**

**Câu 91:** Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi  $r$  là bán kính của nửa đường tròn. Tìm  $r$  (theo  $m$ ) để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất. (Làm tròn đến hàng phần chục)



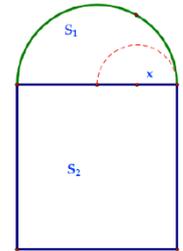
**Trả lời :**

**Câu 92:** Một đoạn dây thép dài 150 cm được uốn thành khung có dạng như hình vẽ. Khi  $x$  thay đổi, tìm  $x$  để diện tích hình phẳng thu được đạt giá trị lớn nhất. (đơn vị là cm và làm tròn đến hàng đơn vị)



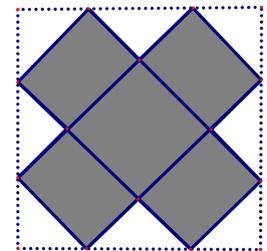
**Trả lời :**

**Câu 93:** Cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là  $a = 8 + 2\pi$  mét ( $a$  chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi đường kính của hình bán nguyệt). Gọi  $d$  là đường kính của hình bán nguyệt. Hãy xác định  $d$  để diện tích cửa sổ là lớn nhất.



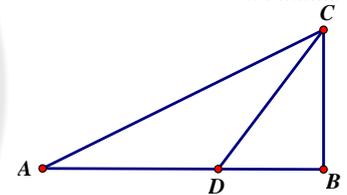
**Trả lời :**

**Câu 94:** Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp là  $V$ . Tính  $\frac{V}{\sqrt{2}}$  ?



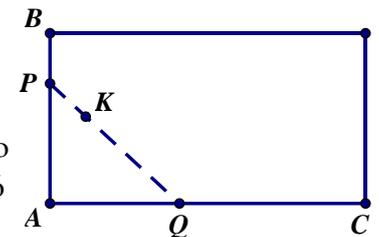
**Trả lời :**

**Câu 95:** Một người cần đi từ khách sạn  $A$  bên bờ biển đến hòn đảo  $C$ . Biết rằng khoảng cách từ đảo  $C$  đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn  $A$  đến điểm  $B$  trên bờ gần đảo  $C$  nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất?



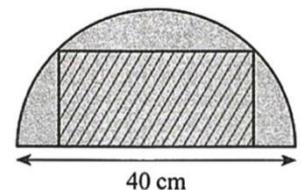
**Trả lời :**

**Câu 96:** Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí  $K$  cách bờ  $AB$  là 1 m và cách bờ  $AC$  là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ  $AB$ ,  $AC$  và cây cọc  $K$  (bỏ qua đường kính của sào, làm tròn đến hàng đơn vị).



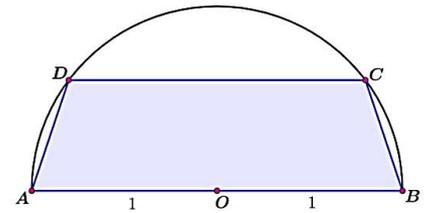
**Trả lời :**

**Câu 97:** Từ một tấm thép hình bán nguyệt có đường kính 40 cm, người ra muốn cắt ra một tấm thép hình chữ nhật (có một cạnh nằm trên đường kính của hình bán nguyệt như Hình) có diện tích lớn nhất có thể. Tìm giá trị của diện tích lớn nhất đó.



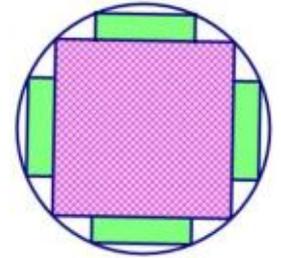
**Trả lời :**

**Câu 98:** Người ta thiết kế một khung để điều khiển con rối nước có dạng nửa đường tròn đường kính  $AB = 2 \text{ dm}$ , để các động tác từ hai tay con rối được đồng điệu thì họ thiết kế thanh  $CD$  luôn lên xuống và song song với thanh  $AB$  (hai đầu thanh  $C, D$  luôn thuộc nửa đường tròn). Các đỉnh  $A$  với  $D, B$  với  $C$  được nối với nhau bằng hai sợi dây đàn hồi. Hỏi khi thanh  $CD$  lên xuống như thế thì tứ giác  $ABCD$  có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu  $\text{dm}^2$  (làm tròn đến hàng phần chục)?



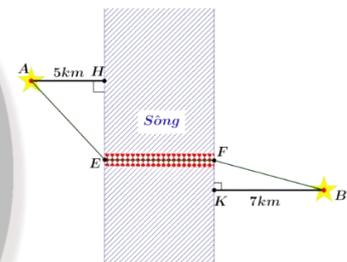
**Trả lời :**

**Câu 99:** Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng  $19 \text{ cm}$  sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích phần gỗ bỏ đi của mặt cắt ngang khúc gỗ hình trụ khi diện tích mặt cắt ngang của mỗi tấm ván đạt tối đa (theo đơn vị  $\text{cm}^2$  và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



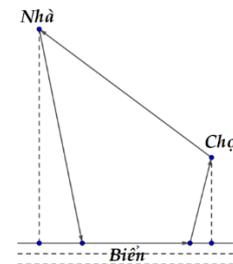
**Trả lời :**

**Câu 100:** Hai thành phố  $A$  và  $B$  cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu  $EF$  bắc qua sông biết rằng thành phố  $A$  cách con sông một khoảng là  $5 \text{ km}$  và thành phố  $B$  cách con sông một khoảng là  $7 \text{ km}$ , biết  $HE + KF = 24 \text{ km}$  và độ dài  $EF$  không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố  $B$  là bao nhiêu để đường đi từ thành phố  $A$  đến thành phố  $B$  là ngắn nhất (đi theo đường  $AEFB$ )? (kết quả làm tròn đến  $\text{km}$ )



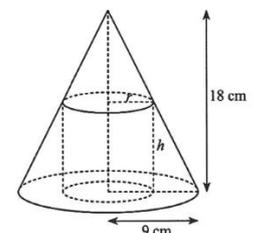
**Trả lời :**

**Câu 101:** Nhà thầy H cách bờ biển  $1 \text{ km}$ . Mỗi buổi sáng thầy chạy bộ từ nhà ra bờ biển sau đó chạy dọc bờ biển  $500 \text{ m}$ , rồi thầy chạy qua chợ hải sản để lấy thức ăn trong ngày tiện thể ghé thăm NYC, cuối cùng thầy chạy về nhà. Biết chợ hải sản cách bờ biển  $400 \text{ m}$  và cách nhà thầy H  $1 \text{ km}$ , tính quãng đường ngắn nhất mà thầy H đã chạy trong mỗi buổi sáng (đơn vị  $\text{m}$  và làm tròn đến hàng đơn vị).



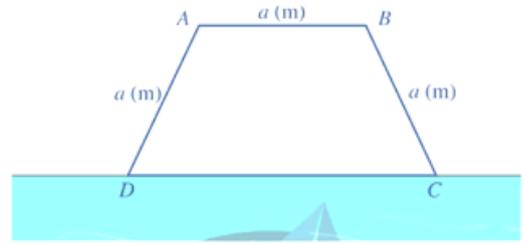
**Trả lời :**

**Câu 102:** Hình bên cho biết một hình trụ bán kính đáy  $r(\text{cm})$ , chiều cao  $h(\text{cm})$  nội tiếp hình nón có bán kính đáy  $9 \text{ cm}$ , chiều cao  $18 \text{ cm}$ . Tìm giá trị của  $r$  để thể tích của hình trụ là lớn nhất?



**Trả lời :**

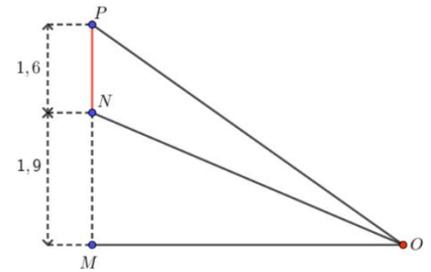
**Câu 103:** Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài  $a = 12(m)$  và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân  $ABCD$  như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng  $DC$  không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là  $a\sqrt{3} m^2$ . Tìm  $a$ ?



Hình 36

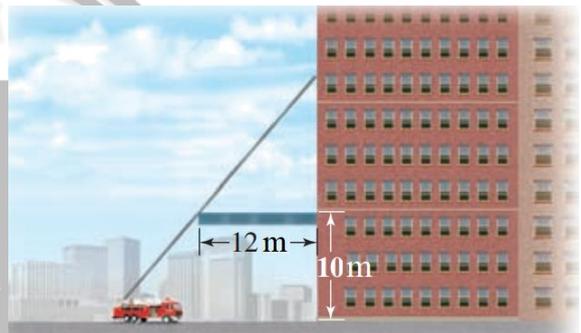
**Trả lời :**

**Câu 104:** Một màn hình  $NP$  có chiều cao 1,6 mét được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng  $NM$  bằng 1,9 mét. Một chiếc đèn chiếu sáng màn hình đặt ở vị trí  $O$  trên mặt đất (xem hình minh họa). Để góc chiếu sáng  $NOP$  lớn nhất thì độ dài đoạn  $OM$  bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



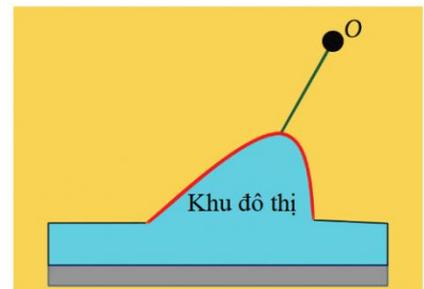
**Trả lời :**

**Câu 105:** Hình bên mô tả một mặt cắt ngang của một tòa nhà cao tầng. Một chiếc thang từ xe cứu hỏa lên đến mặt tường phía trước của tòa nhà phải vượt qua phần mái che cao hơn 10m so với mặt đất và vùng mái này nhô ra 12m so với tường. Giả sử, độ cao của xe cứu hỏa là không đáng kể, hãy tìm độ dài ngắn nhất của chiếc thang để các lính cứu hỏa có thể thực hiện nhiệm vụ này (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



**Trả lời :**

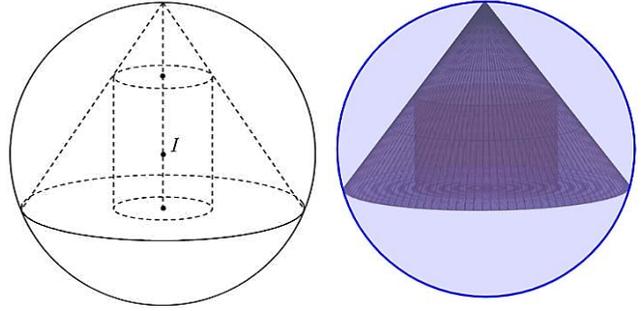
**Câu 106:** Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ  $Oxy$  với đơn vị tương ứng 1km có hòn đảo ở  $O$  thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số  $y = \frac{-x^2 + 2}{x}$ . Giả sử tuyến



cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

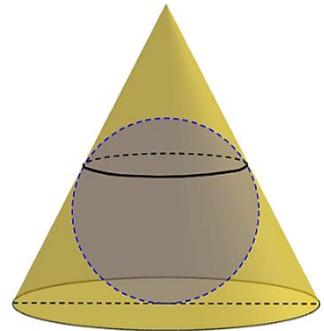
**Trả lời :**

**Câu 107:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu bán kính bằng 1. Gọi  $(N)$  là hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp trong mặt cầu  $(S)$  và  $(T)$  là hình trụ có diện tích xung quanh lớn nhất  $S_{\max}$  nội tiếp bên trong hình nón (như hình vẽ). Tìm diện giá trị  $S_{\max}$  đó và làm tròn đến hàng phần trăm.



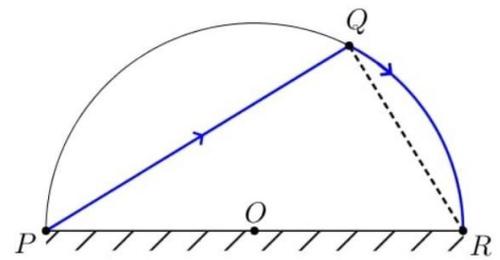
**Trả lời :**

**Câu 108:** Cho hình nón đỉnh  $S$ , đường tròn đáy tâm  $O$  bán kính  $r = 3 \text{ dm}$ , đường cao  $SO = 3 \text{ dm}$ . Mặt phẳng  $(P)$  di động luôn vuông góc với  $SO$  tại điểm  $H$  và cắt mặt nón theo giao tuyến là đường tròn  $(C)$ . Mặt cầu  $(T)$  chứa  $(C)$  và tiếp xúc với đáy hình nón tại  $O$ . Thể tích khối cầu  $(T)$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu lít (làm tròn đến hàng phần trăm)?



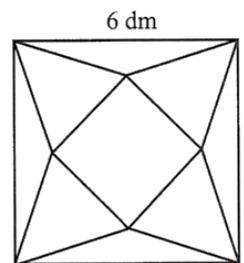
**Trả lời :**

**Câu 109:** Cho một bờ sông hình bán nguyệt có bán kính bằng  $2 \text{ km}$ , đường kính  $PR$  như hình vẽ sau. Từ điểm  $P$  anh Tèo chèo một chiếc thuyền với vận tốc  $3 \text{ km/h}$  đến điểm  $Q$  trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí  $R$  với vận tốc  $6 \text{ km/h}$ . Thời gian lớn nhất mà anh Tèo di chuyển từ  $P$  đến  $R$  là bao nhiêu? (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến phần chục)



**Trả lời :**

**Câu 110:** Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh  $6 \text{ dm}$ , bạn Hoa cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gập lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều (Hình). Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



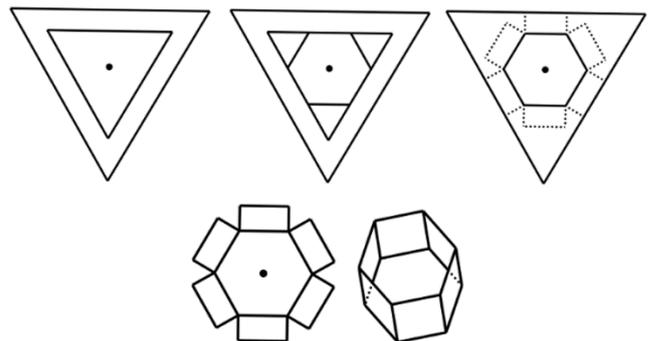
**Trả lời :**

**Câu 111:** Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (tham khảo hình vẽ). Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dài ngắn nhất của cây thang bao nhiêu centimet (cm) để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)?



**Trả lời :**

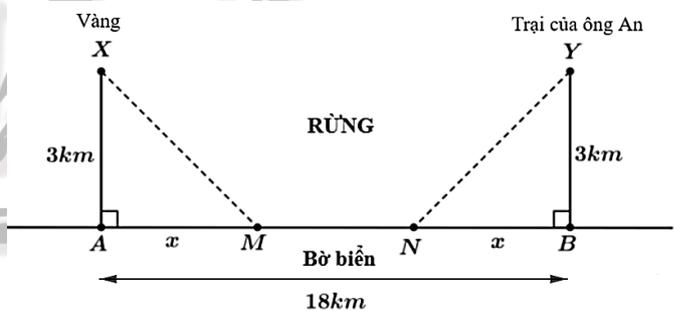
**Câu 112:** Cho một tấm tôn hình một tam giác đều có cạnh bằng 2m. Người ta thiết kế một hình lục giác đều và sáu hình chữ nhật ở phía ngoài lục giác có một cạnh bằng cạnh của lục giác, một cạnh bằng  $x$  (mét) với  $0 < x < \frac{2}{3}$ . Sau đó người ta cắt theo



nét đứt đoạn để thu được một hình hộp bởi một lục giác đều và sáu hình chữ nhật. Sau đó gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ lục giác đều (tham khảo hình vẽ dưới đây). Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu đề - xi - mét khối ( $dm^3$ ) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Trả lời :**

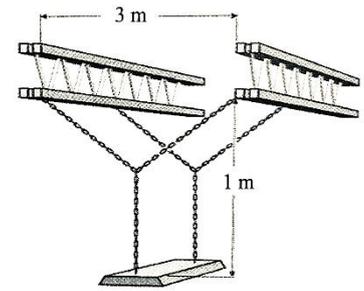
**Câu 113:** Ông An đang ở trong rừng để đào vàng. Ông ta tìm thấy vàng ở điểm  $X$ , cách điểm  $A$  3 km. Điểm  $A$  nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông An nằm ở  $Y$ , cách điểm  $B$  3 km. Điểm  $B$  cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng  $AB = 18$  km,  $AM = NB = x$  km và  $AX = BY = 3$  km. (Như hình vẽ)



Khi đang đào vàng, ông An bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo hàm số  $y = 50 \log(t+2)$  (mg/l), trong đó  $y$  là nồng độ,  $t$  là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông An cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng với vận tốc 5 km/h và chạy trên đường bờ biển với vận tốc 13 km/h. Để về đến trại ông An cần chạy từ trong rừng qua điểm  $M, N$  trên đường bờ biển. Chọn điểm  $M$  trên đường bờ biển sao cho khi ông An về đến trại nồng độ chất độc trong máu thấp nhất. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông An về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

**Trả lời :**

**Câu 114:** Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là  $a + b\sqrt{c}$  (trong đó  $a, b, c$  là các số tự nhiên). Tính  $a - b - c$ .



**Trả lời :**

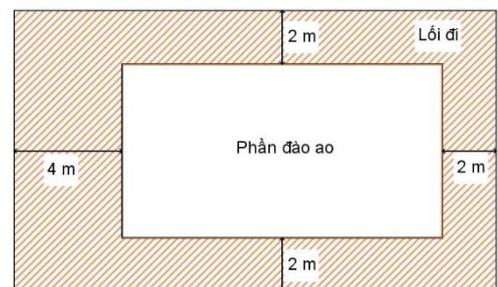
**Câu 115:** Một người cưỡi ngựa xuất phát từ  $A$  đi đến  $C$ . Điểm  $A$  nằm trong vùng đất ướt nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là  $12\text{ km/h}$ . Điểm  $C$  nằm trong vùng đất khô hơn nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là  $24\text{ km/h}$ . Hai phần đất này giáp nhau bởi một đường thẳng  $d$  đi qua trung điểm của  $AC$  và khoảng cách từ  $A$  và  $C$  đến đường thẳng này đều bằng  $10\text{ km}$



. Biết  $AC = 5\sqrt{41}\text{ km}$ , thời gian ít nhất để đi từ  $A$  đến  $C$  là  $t = \frac{a\sqrt{5}}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $a, b$  nguyên tố cùng nhau). Tính  $T = 3a + b$ ?

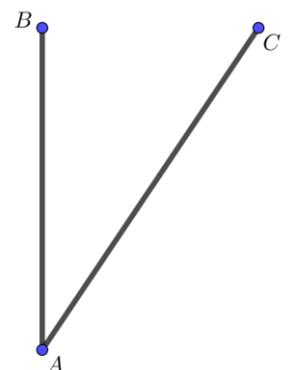
**Trả lời :**

**Câu 116:** Một gia đình dự định sử dụng một mảnh đất hình chữ nhật trong vườn có diện tích  $384\text{ m}^2$  để làm kinh tế gia đình. Sau khi bờ bên trái được trừ đi  $4\text{ m}$ , 3 bờ còn lại đều trừ  $2\text{ m}$  dùng làm lối đi và trồng cây thì diện tích còn lại được sử dụng để đào một cái ao dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu  $2\text{ m}$  để thả cá (như hình vẽ). Khi thể tích của ao thả cá là lớn nhất thì chu vi mảnh vườn hình chữ nhật là bao nhiêu?



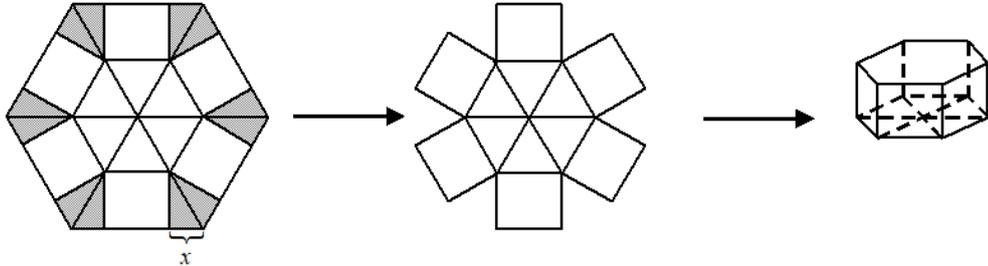
**Trả lời :**

**Câu 117:** Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led cho biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh  $AB = 4\text{ m}$ ,  $AC = 5\text{ m}$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  (tham khảo hình vẽ). Để tăng hiệu ứng các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ  $B$  xuống  $A$  với vận tốc  $4\text{ m/phút}$  và một chuỗi led chạy từ  $A$  đến  $C$  với vận tốc  $10\text{ m/phút}$ . Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao giây từ thời điểm đóng nguồn điện thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất?



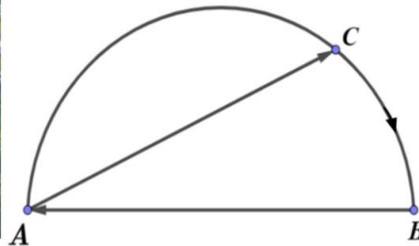
**Trả lời :**

**Câu 118:** Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh  $90\text{ (cm)}$ . Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng  $x\text{ (cm)}$  (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm  $x$  để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (đơn vị  $\text{cm}$ ).



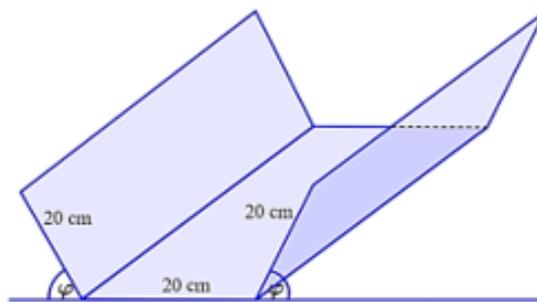
**Trả lời :**

**Câu 119:** Một hồ nước hình bán nguyệt có đường kính  $AB = 150\text{ m}$ . Một người chèo thuyền theo một đường thẳng với vận tốc  $1,5\text{ km/h}$  từ vị trí  $A$  đến vị trí  $C$  bất kỳ trên cung  $AC$ . Tại vị trí  $C$  người đó nghỉ 2 phút rồi tiếp tục đi bộ dọc theo cung nhỏ  $CB$  đến  $B$ , sau đó đi bộ theo đường thẳng  $BA$  để quay về  $A$  với vận tốc  $3\text{ km/h}$  (tham khảo hình vẽ). Hỏi thời gian chậm nhất mà người đó về đến  $A$  là bao nhiêu phút? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



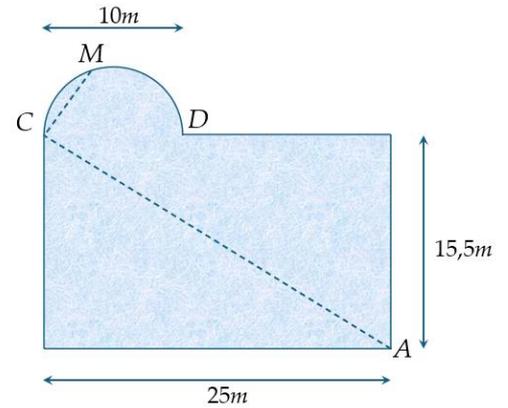
**Trả lời :**

**Câu 120:** Thầy Hạnh phụ hồ làm một cái máng thoát nước mưa, mặt cắt ngang của máng là hình thang cân có độ dài hai cạnh bên và cạnh đáy đều bằng  $20\text{ cm}$ , thành máng nghiêng với mặt nằm ngang một góc  $\varphi$  với  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ . Hỏi thầy Hạnh phụ hồ phải thiết kế máng để giá trị  $\cot \varphi$  bằng bao nhiêu sao cho lượng nước mưa thoát được là nhiều nhất (làm tròn đến hàng phần trăm)?



**Trả lời :**

**Câu 121:** Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng 15,5 m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng  $AC$  rồi bơi tiếp đoạn thẳng  $CM$ , với  $M$  là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm  $D$  dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí  $A$  và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ). Biết rằng vận tốc bơi của Hoa là 2,4 km/h, vận tốc đi bộ là 4,8 km/h và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

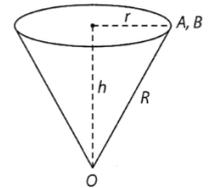
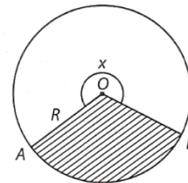


**Trả lời :**

**Câu 122:** Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đậy với thể tích 1 (m<sup>3</sup>). Chi phí mỗi m<sup>2</sup> đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m<sup>2</sup> nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m<sup>2</sup> mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi bán kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất? (làm tròn đến hàng phần trăm)

**Trả lời :**

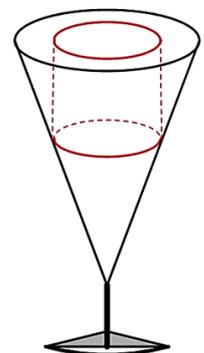
**Câu 123:** Cắt bỏ hình quạt tròn  $AOB$  (hình phẳng có nét gạch trong hình dưới đây) từ một mảnh các tông hình tròn bán kính  $R$  rồi dán hai bán kính  $OA$  và  $OB$  của hình quạt tròn còn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón.



Gọi  $x$  là góc ở tâm của quạt tròn dùng làm phễu ( $0 < x < 2\pi$ ). Giá trị lớn nhất của thể tích nón là  $\frac{a\sqrt{b}}{c} \pi R^3$ . Tìm  $abc$

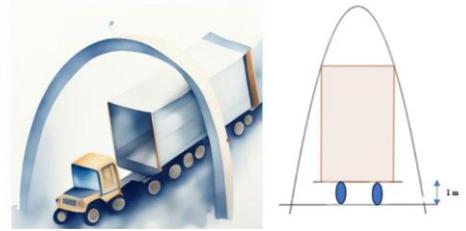
**Trả lời :**

**Câu 124:** Một nghệ nhân muốn thiết kế một chiếc ly hình nón có thể chứa được tối đa 500 ml nước với bán kính miệng ly  $R < 8$  cm. Sau đó, anh ta đặt một khối trụ đặc có bán kính đáy 2 cm vào bên trong ly sao cho trục của hình trụ trùng với trục của hình nón và đáy trên của hình trụ nằm cùng một mặt phẳng với đáy của hình nón. Nghệ nhân muốn đặt các thanh thủy tinh phát sáng có dạng đoạn thẳng vào ly chứa đầy dung dịch màu. Biết rằng  $AB$  là thanh thủy tinh có độ dài lớn nhất có thể đặt vào ly (không có điểm nào nhô ra khỏi mặt nước), tìm giá trị lớn nhất đó theo đơn vị cm (làm tròn đến hàng phần mười).



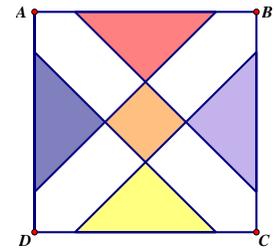
**Trả lời :**

**Câu 125:** Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao  $9m$ , khoảng cách giữa hai chân cổng là  $6m$ . Để vận chuyển thùng hàng hình hộp chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao  $1m$ . Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật. Hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu  $m^2$  để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



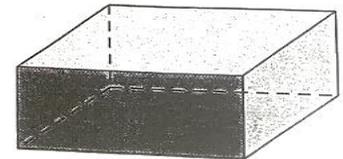
**Trả lời :**

**Câu 126:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $4$ , chính giữa có một hình vuông đồng tâm với  $ABCD$ . Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần chục)



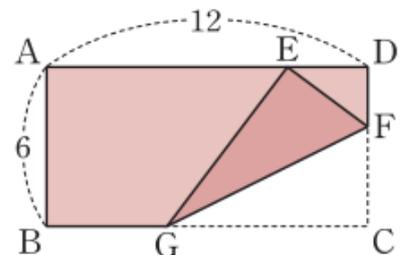
**Trả lời :**

**Câu 127:** Một người thợ gò làm một cái hòm dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng độ dài đường chéo hình hộp bằng  $3\sqrt{2}dm$  và chỉ được sử dụng vừa đủ  $18dm^2$  tôn. Với yêu cầu như trên người thợ có thể làm được cái hòm có thể tích lớn nhất bằng



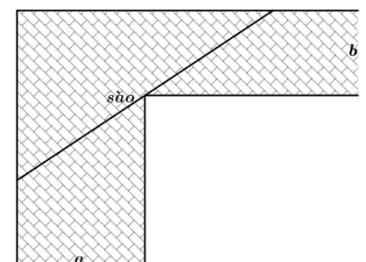
**Trả lời :**

**Câu 128:** Cho một tờ giấy hình chữ nhật có chiều dài  $12$  và chiều rộng  $6$  như hình bên. Gấp tờ giấy sao cho điểm  $C$  (là góc phải dưới) trùng với một điểm  $E$  trên đoạn  $AD$ , theo đường gấp  $FG$ . Khi đó, hãy xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác  $\triangle EFG$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



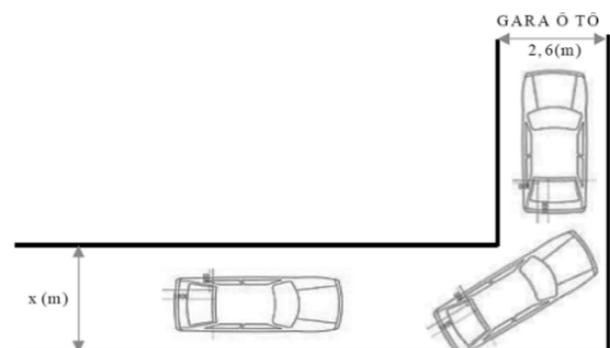
**Trả lời :**

**Câu 129:** Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết  $a = 24$  và  $b = 3$ . Hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị)



**Trả lời :**

**Câu 130:** Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng  $x$  (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng  $2,6$  (m). Biết kích thước xe ô tô là  $5m \times 1,9m$ . Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài  $5$  (m), chiều rộng  $1,9$  (m). Hỏi



chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục của m)

Trả lời :

➤ Min max kinh tế

**Câu 131:** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 180 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 180$ ) thì giá bán của mỗi sản phẩm là  $f(x) = 35840 - 192x$  (nghìn đồng) và chi phí sản xuất bình quân trên một sản phẩm là  $g(x) = 25,6x^2 - 153,6x + 3072 + \frac{19200}{x}$  (nghìn đồng). Biết rằng mức thuế trên một sản phẩm là 512 nghìn đồng. Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Trả lời :

**Câu 132:** Thầy Hạnh có một Villa sinh thái nghỉ dưỡng cho thuê và thầy thống kê được rằng: Nếu áp dụng mức giá 3 triệu đồng/người/ngày thì mỗi tháng có 160 khách đến nghỉ và mỗi khách sẽ nghỉ 10 ngày. Nếu cứ tăng giá thêm 500 nghìn đồng/người/ngày thì hàng tháng số khách đến nghỉ sẽ giảm 4 người và thời gian lưu trú của mỗi khách cũng giảm đi 2 ngày. Ngược lại, nếu cứ giảm giá 500 nghìn đồng/người/ngày thì hàng tháng số khách đến nghỉ sẽ tăng thêm 4 người và thời gian lưu trú của mỗi người khách cũng tăng thêm 2 ngày. Hỏi thầy Hạnh cần áp dụng mức giá bao nhiêu triệu đồng/người/ngày để lợi nhuận hàng tháng thu được là lớn nhất, biết tổng chi phí công ty phải chi cho một ngày lưu trú của mỗi người khách là 2 triệu đồng và Sở văn hóa, thể thao và du lịch không cho công ty thu vượt quá 10 triệu đồng/người/ngày. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời :

**Câu 133:** Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 3600 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 nghìn đồng. Chi phí cho  $n$  máy chạy trong một giờ là  $10(6n + 10)$  nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?



Trả lời :

**Câu 134:** Một cửa hàng bán lẻ bán được 2500 cái tivi mỗi năm. Để bán được số tivi đó, họ phải đặt hàng từ nhà máy sản xuất tivi nhiều lần trong năm, mỗi lần đặt hàng với số lượng tivi như nhau. Mỗi lần lấy hàng từ nhà máy về thì cửa hàng chỉ trưng bày được một nửa số tivi đó, một nửa còn lại phải lưu vào kho; chi phí gửi trong kho là 10 \$ cho một cái tivi và chi tính cho một lần nhập hàng trong năm. Chi phí cố định cho mỗi lần đặt hàng là 20 \$, ngoài ra cửa hàng phải trả thêm 9 \$ cho mỗi tivi. Hỏi mỗi lần đặt hàng trong năm thì cửa hàng cần đặt bao nhiêu tivi để chi phí mà cửa hàng phải trả là nhỏ nhất?



Trả lời :

**Câu 135:** Một công ty vận tải có thể huy động tối đa 10 xe tải để chuyển 60 tấn hàng hóa đến một địa điểm. Mỗi xe tải có thể chở 3 tấn hàng trong một chuyến đi (có thể đi nhiều chuyến), và mất 1 giờ để hoàn tất một chuyến. Chi phí khởi động để điều một xe tải là 100 nghìn đồng. Ngoài ra, khi cùng chạy,  $n$  xe tải tốn chi phí nhiên liệu mỗi giờ là  $15(2n + 5)$  nghìn đồng. Công ty đang tính toán để sử dụng một số lượng xe tải sao cho tổng chi phí vận chuyển là thấp nhất, vậy chi phí thấp nhất ấy là bao nhiêu nghìn đồng cho đợt vận chuyển hàng nói trên?



**Trả lời :**

**Câu 136:** Một xưởng may áo thun thủ công đã nghiên cứu thị trường để đưa ra các hàm số sau:

**Hàm chi phí tổng  $C(q)$ :** Tổng chi phí (nghìn đồng) để sản xuất  $q$  áo thun là  $C(q) = \frac{200q + 1000}{q + 10}$ ,  $q \geq 0$ . **Hàm doanh thu tổng**



**$R(q)$ :** Tổng doanh thu (nghìn đồng) khi bán  $q$  áo thun là  $R(q) = -0,05q^2 + 500q$ . Xưởng may sẽ thu được bao nhiêu **lợi nhuận tăng thêm (hay lợi nhuận cận biên)** nếu sản xuất và bán chiếc áo thun thứ 101 (số lượng áo tăng từ 100 đến 101)? Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị của nghìn đồng.

**Trả lời :**

**Câu 137:** Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau: **Năng suất:** 250 lệnh/giờ/máy.



**Chi phí triển khai:** 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).

**Chi phí vận hành:** Điện + bảo trì: 120000 đồng/giờ/máy.

**Chi phí nhân viên giám sát:** 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế). Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).

**Trả lời :**

**Câu 138:** Nhà máy SAMSUNG Bắc Ninh trung bình bán được 1500 chiếc sạc dự phòng mỗi tháng với giá 320 nghìn đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 10 nghìn đồng, số lượng sạc dự phòng bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 sạc dự phòng mỗi tháng. Hàm chi phí hàng tháng là  $C(x) = 20000 - 10x$  (nghìn đồng) trong đó  $x$  là số sạc dự phòng bán ra trong một tháng. Để lợi nhuận là lớn nhất thì nhà sản xuất phải bán được bao nhiêu sản phẩm mỗi tháng?

**Trả lời :**

**Câu 139:** Một nhà máy sản xuất  $x$  sản phẩm trong mỗi tháng. Chi phí sản xuất  $x$  sản phẩm được cho bởi hàm chi phí  $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$  (nghìn đồng). Biết giá bán của của mỗi sản phẩm là một hàm số phụ thuộc vào số lượng sản phẩm  $x$  và được cho bởi công thức  $p(x) = 1700 - 7x$  (nghìn đồng). Hỏi mỗi tháng nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? Biết rằng kết quả khảo sát thị trường cho thấy sản phẩm sản xuất ra sẽ được tiêu thụ hết.

**Trả lời :**

**Câu 140:** Một xưởng sản xuất nhận được đơn đặt hàng là 8000 sản phẩm Y. Trong xưởng có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 30 sản phẩm Y trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 200 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và cần hai người giám sát. Chi phí cần trả mỗi người giám sát là 96 nghìn đồng mỗi giờ. Gọi  $x$  là số máy mà xưởng cần dùng để sản xuất, khi đó xưởng cần đúng bao nhiêu máy để chi phí hoàn tất đơn đặt hàng là thấp nhất. Nếu xưởng dùng từ 25 máy trở lên để sản xuất thì chi phí ít nhất là bao nhiêu (nghìn đồng).

**Trả lời :**

**Câu 141:** Anh Hùng thành lập một công ty vận tải taxi điện (Sử dụng nguồn cung sẵn có trong nước với nhiều ưu đãi khuyến khích phát triển loại phương tiện này). Anh dự định sử dụng không quá 10 xe. Nếu công ty sử dụng tối đa thời gian hoạt động của  $x$  xe điện trên ( $1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}$ ) thì doanh thu nhận được của số xe đó là  $D(x) = x^3 - 4597x^2 + 50300x + 30000$  (triệu đồng), trong khi chi phí nạp điện, bảo dưỡng, phí cầu đường, thuế và thuê nhân công lái xe bình quân cho mỗi xe là  $C(x) = 3x + 300 + \frac{30000}{x}$  (triệu đồng). Hỏi anh Hùng cần ưu tiên tối đa cho bao nhiêu xe hoạt động thường xuyên để lợi nhuận công ty thu được là lớn nhất?

**Trả lời :**

**Câu 142:** Anh Nam có một cái ao với diện tích  $50m^2$  để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua anh nuôi với mật độ  $40con/m^2$  và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi  $8con/m^2$  thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm  $0,5kg$ . Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua thêm bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

**Trả lời :**

**Câu 143:** Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm  $T$  được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm  $T$  là  $x$  (USD) thì số sản phẩm  $T$  các nhà máy sản xuất sẽ là  $R(x) = x - 200$  và số sản phẩm  $T$  mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là  $Q(x) = 4200 - x$ . Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định trên thị trường quốc tế là  $x_0 = 3200$  (USD). Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là  $a$  (USD) và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là 4 : 1. Hãy xác định giá trị của  $a$  biết lãi mà doanh nghiệp thu được do xuất khẩu là nhiều nhất.

**Trả lời :**

**Câu 144:** Anh An thành lập một công ty sản xuất in ấn Sách Giáo Khoa chương trình "Chân trời sáng tạo". Nhằm tạo điều kiện cho các nhà sách tiêu thụ giá hợp lí, đơn giá mỗi bộ sách ban đầu được biểu diễn theo hàm  $p(x) = 200 - 3x$  (nghìn đồng) với  $x$  là số lượng từng bộ sách bán ra và tổng chi phí sản xuất được biểu diễn theo hàm  $C(x) = 75 + (80 + T)x - x^2$  (nghìn đồng) với mọi  $x$  thỏa  $0 \leq x \leq 40$ , trong đó  $T$  (nghìn đồng) là mức thuế giá trị gia tăng VAT phải đóng trên từng số lượng bộ sách sản xuất ra mà công ty anh An phải chi trả. Xem như công ty anh An sản xuất đều đặn trong điều kiện lí tưởng, khi lợi nhuận của công ty đạt giá trị cao nhất thì tổng mức thuế phải chi trả cũng đồng thời cao nhất. Khi đó mức thuế của mỗi bộ sách mà công ty phải trả là bao nhiêu (Đơn vị: nghìn đồng)?

**Trả lời :**

**Câu 145:** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 400$ ) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó được biểu diễn bởi công thức là  $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$  (đồng). Trong đó chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là  $G(x) = \frac{100000x}{\frac{3}{2}x+1}$  (đồng). Tổng chi phí mua nguyên vật liệu được

biểu diễn bởi hàm  $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$  (đồng) nhưng do doanh nghiệp đó mua nguyên vật liệu với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

**Trả lời:**

⇒ Nếu những bài trên quá dễ thì đây là bài thể hiện “Trình”

**Câu 146:** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$ . Tính giá trị  $M+m$ ?

**Trả lời:**

**Câu 147:** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi thỏa mãn  $x^2 + y^2 - xy = 1$  và hàm số  $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ . Gọi  $M, m$  tương ứng là GTLN và GTNN của  $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$ . Tính tổng  $M+m$ ?

**Trả lời:**

**Câu 148:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0$   
 Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$ ?

**Trả lời:**

**Câu 149:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + 2y$ ?

**Trả lời:**

**Câu 150:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2m(m+1)x + 2m^3 + m^2 + 1}{x-m}$  có đồ thị  $(C_m)$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $A$  là điểm thỏa mãn vừa là điểm cực đại của  $(C_m)$  ứng với một giá trị  $m$  vừa là điểm cực tiểu của  $(C_m)$  ứng với giá trị khác của  $m$ . Tìm giá trị của  $a$  để khoảng cách từ  $A$  đến đường thẳng  $(d): x - (a+1)y + a = 0$  đạt giá trị lớn nhất?

**Trả lời:**



Nếu một người không cố gắng, người khác muốn kéo lên cũng không tìm thấy tay của người đó đâu!



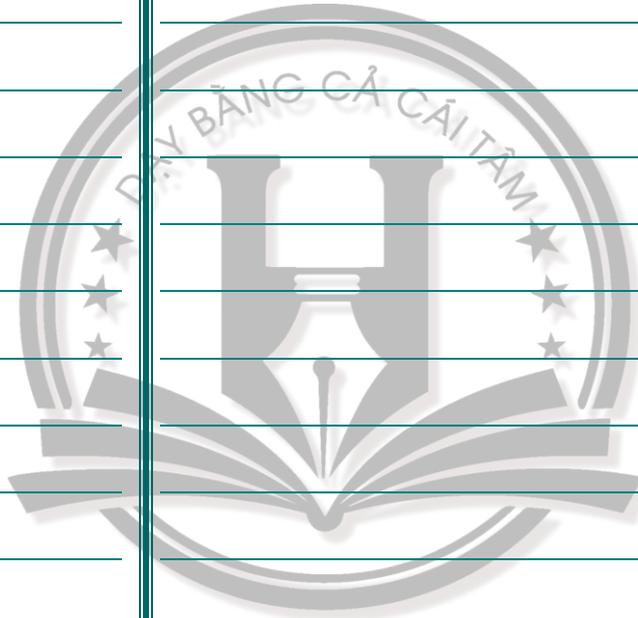
## BÀI 4 : TIỆM CÂN CỦA ĐỒ THI HÀM SỐ



THEORY UNLOCKED

Memorize :

Lý thuyết bài giảng :





**MÓN QUÀ TẠI LỚP**

**☑ Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số**

**Ví dụ 1:** Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của các đồ thị hàm số:

a)  $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ .

b)  $y = \frac{x}{x^2-1}$

**SOLUTION:**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Ví dụ 2:** Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của các đồ thị hàm số:

a)  $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ .

b)  $y = \frac{x^2+x+2}{x^2-2x+3}$

**SOLUTION:**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Ví dụ 3:** Tìm tiệm cận xiên của các đồ thị hàm số:

a)  $y = 2x-1-\frac{1}{x^2+1}$

b)  $y = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$

**SOLUTION:**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---













**QUICK TIPS MCQ MASTERY**

**1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án).**

**Câu 1:** (Đề Minh Họa 2017) Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $x = 1$  và  $x = -1$ .
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng  $y = 1$  và  $y = -1$ .

**Câu 2:** (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		1		$+\infty$
$y$	2		$+\infty$	3	5

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3
- B. 2
- C. 4
- D. 1

**Câu 3:** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$y'$		+	0	-		+
$y$	0		2		$-\infty$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 2.

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		1		$+\infty$
$y'$		+		+	
$y$	2		$+\infty$		$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 2.





- Câu 11:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{x+1}$  là  
 A.  $y = -2$ .                      B.  $y = 1$ .                      C.  $x = -1$ .                      D.  $x = 2$ .
- Câu 12:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{4x+1}{x-1}$  là  
 A.  $y = \frac{1}{4}$ .                      B.  $y = 4$ .                      C.  $y = 1$ .                      D.  $y = -1$ .
- Câu 13:** (Mã 101-2023) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x-1}{x-2}$  có phương trình là  
 A.  $x = 2$ .                      B.  $x = -2$ .                      C.  $x = 3$ .                      D.  $x = \frac{1}{2}$ .
- Câu 14:** (Mã 101 - 2020 Lần 2) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+2}{x-1}$  là  
 A.  $x = 2$ .                      B.  $x = -2$ .                      C.  $x = 1$ .                      D.  $x = -1$ .
- Câu 15:** (Đề Minh Họa 2021) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+4}{x-1}$   
 A.  $x = 1$ .                      B.  $x = -1$ .                      C.  $x = 2$ .                      D.  $x = -2$ .
- Câu 16:** (Đề minh họa 2022) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+2}{x-2}$  là đường thẳng có phương trình:  
 A.  $x = 2$ .                      B.  $x = -1$ .                      C.  $x = 3$ .                      D.  $x = -2$ .
- Câu 17:** (Mã 101-2022) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{2x+4}$  là đường thẳng có phương trình:  
 A.  $x = -2$ .                      B.  $x = 1$ .                      C.  $y = 1$ .                      D.  $y = -2$ .
- Câu 18:** Hàm số nào sau đây có một tiệm cận:  
 A.  $y = \frac{x+3}{2x-1}$                       B.  $y = \frac{x^2+3x-2}{x+3}$                       C.  $y = \frac{4}{x-1}$                       D.  $y = \frac{2x}{x^2+1}$ .
- Câu 19:** Đường thẳng  $2y+1=0$  là tiệm cận ngang của hàm số nào sau đây?  
 A.  $y = \frac{x+1}{2x+1}$                       B.  $y = \frac{x^2+x+1}{1-2x}$                       C.  $y = \frac{2x+1}{1-x}$                       D.  $y = \frac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$
- Câu 20:** Đường thẳng  $x = -1$  là tiệm cận đứng của hàm số nào sau đây?  
 A.  $y = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$                       B.  $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$                       C.  $y = \frac{x+1}{x^2+4x+3}$                       D.  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$
- Câu 21:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{3x^2-12x+1}{x^2-4x-5}$  có bao nhiêu tiệm cận. Chọn câu trả lời đúng.  
 A. 4.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 5.
- Câu 22:** Tìm phương trình các đường tiệm cận của hàm số  $y = x + \sqrt{x^2+1}$ . Chọn câu trả lời đúng.  
 A.  $y = 2x$ .                      B.  $y = 0$ .                      C.  $y = 2x$  và  $y = 0$ .                      D. Một đáp án khác.





**Câu 33:** [ĐGNL HCM 2025] Đồ thị hàm số  $f(x)$  có 3 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

Hỏi đồ thị hàm số  $g(x) = f(x) \cdot \frac{\sqrt{x^6 - 1}}{x^2 - 4}$  có tối đa bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 4                                      B. 6                                      C. 7.                                      D. 5.

**Câu 34:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$  có đồ thị (C). Tích khoảng cách từ  $M$  bất kỳ trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) bằng:

- A.  $2\sqrt{2}$                                       B. 2                                      C.  $\sqrt{2}$ .                                      D. 1.

**Câu 35:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$  là  $(C_m)$ . Giá trị của  $m$  làm cho  $(C_m)$  không có tiệm cận đứng là:

- A.  $m = 0$ .                                      B.  $m = 1$                                       C.  $m = 0$  hoặc  $m = 1$ .                                      D.  $m = 0$  hoặc  $m = -1$ .

**Câu 36:** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$  có đồ thị  $(C_m)$ . Với giá trị nào của  $m$  thì đồ thị  $(C_m)$  có tiệm cận đứng và không có tiệm cận xiên. Chọn câu trả lời đúng.

- A.  $m = \frac{7}{2}$                                       B.  $m = \frac{3}{2}$                                       C.  $m = 2$                                       D.  $m = 0$

**Câu 37:** Với giá trị của  $m$  thì đồ thị hàm số  $y = \frac{x + 2}{x^2 - 4x + m}$  chỉ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang. Chọn câu trả lời đúng.

- A. 4.                                      B. 3                                      C. 2.                                      D. 1

**Câu 38:** Với giá trị nào của  $m$  thì đồ thị hàm số  $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$  có tiệm cận đứng đi qua  $M(-1, \sqrt{2})$ . Chọn câu trả lời đúng:

- A.  $m = \frac{1}{2}$                                       B.  $m = 2$                                       C.  $m = 0$                                       D.  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Câu 39:** Cho hàm số  $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$  (C) và đường thẳng  $5x - 12y + 7 = 0$  ( $\Delta$ ). Khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đến đường thẳng ( $\Delta$ ) bằng:

- A.  $\frac{46}{13}$                                       B.  $\frac{37}{13}$                                       C.  $\frac{41}{3}$                                       D. 3.

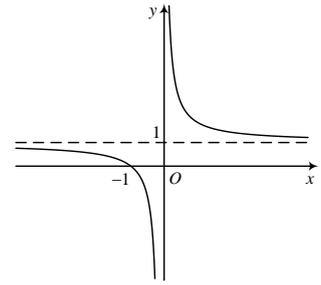
**Câu 40:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  có bảng biến thiên như sau. Hỏi đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x)}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$y'$		-	-
$y$	2		$+\infty$

- A. 4.                                      B. 3.                                      C. 2.                                      D. 1.

**2. Câu hỏi đúng sai.** (Trong mỗi ý (a),(b),(c),(d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai ).

**Câu 41:** Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình bên. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$ , tiệm cận ngang $y=1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số có hai cực trị.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 42:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến như sau:

$x$	$-\infty$		$-3$		$3$		$+\infty$
$y'$		+		+		+	
$y$		$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$	

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-3$ là tiệm cận đứng.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 4.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; +\infty)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 43:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$ . Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số có hai tiệm cận.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khoảng cách từ $O$ đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0; -4)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 44:** Gọi  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = \frac{mx^2 + (3-m)x + m^2 - 2}{x - 1}$ ,  $m$  là tham số. Khi  $(C)$  có tiệm cận xiên, gọi đường tiệm cận xiên này là  $(d)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m=2$ thì $(d)$ có phương trình là $y=2x+3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m=1$ thì $(d)$ đi qua điểm $A(1; 4)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Có 1 đường thẳng $(d)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khi $m = \pm\sqrt{3}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến $(d)$ bằng $\sqrt{3}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



**Câu 45:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} (C_m)$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị $(C_m)$ của hàm số có tiệm cận xiên thì $m \neq 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đề tiệm cận xiên của $(C_m)$ đi qua $M(2, -5)$ thì $m = -8$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đề tiệm cận xiên của $(C_m)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đvdt) thì tổng tất cả các giá trị $m$ tìm được bằng 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Với $m = 3$ thì giao điểm của hai đường tiệm cận của $(C_m)$ nằm trên Parapol $y = x^2 + 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 46:** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x^2 - 8x + m}$ ,  $m$  là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m < 16$ thì đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khi $m = 16$ thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 14 giá trị nguyên dương của $m$ để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 47:** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m} (C_m)$  với  $m \in \mathbb{R}$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số có hai tiệm cận $m \neq \frac{1}{3}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = 1$ thì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x - 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Biết đồ thị $(C_m)$ có 2 đường tiệm cận, khi đó $m = \pm 2$ thì góc giữa hai tiệm cận của đồ thị $(C_m)$ bằng $45^\circ$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Biết đồ thị $(C_m)$ có tiệm cận xiên tạo cắt hai trục tọa độ tại $A, B$ sao cho tam giác $\Delta AOB$ có diện tích bằng 4 khi đó tổng tất cả các giá trị của $m$ bằng 4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 48:** Gọi  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = \frac{4x+1}{3-x}$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định của nó	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	$y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tích các khoảng cách từ một điểm $M$ tùy ý trên $(C)$ đến hai đường tiệm cận của nó bằng 14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 2 điểm thuộc $(C)$ sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của $(C)$ nhỏ nhất.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 49:** Gọi  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x + 2}{x+1}$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Với $m = 1$ thì tích các khoảng cách từ một điểm bất kì trên $(C)$ đến hai đường tiệm cận của nó bằng 2.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Giả sử đồ thị $(C)$ có 2 đường tiệm cận, thì khi đó giao điểm của hai đường tiệm cận của $(C)$ luôn thuộc parabol $(P): y = -x^2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khi $(C)$ có tiệm cận xiên, thì có 4 giá trị $m$ để tiệm cận xiên tiếp xúc với đường tròn $(\gamma): x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 50:** Một công ty xuất nhập khẩu có chi phí và doanh thu theo quý được cho như sau:

Hàm chi phí:  $C(x) = 0,5x + \frac{10}{x+1}$  (tỷ đồng),  $x$  là sản lượng hàng

hóa họ làm ra được ( $x \geq 0$ ), đơn vị: tấn.

Hàm doanh thu:  $R(x) = 8x - 0,5x^2$  (tỷ đồng).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm chi phí $C(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 0,5x$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Doanh thu $R(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 8,5$ tấn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Chi phí trung bình của công ty tăng khi họ sản xuất hàng hóa tăng từ 2 lên 5 tấn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Công ty đạt lợi nhuận tối đa nếu họ sản xuất được 7,332 tấn hàng hóa (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh trả lời điền kết quả vào ô trống)

#### ➤ Bài toán liên quan đến tiệm cận

**Câu 51:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 2}$  có đồ thị  $(C)$ . Hai đường tiệm cận của đồ thị  $(C)$  cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích  $S$ . Tính  $S$ .

Trả lời:

**Câu 52:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx^2 + (3m+1)x - m + 2}{x+1}$  có tiệm cận xiên là  $(d)$  và  $(d)$  tiếp xúc với đường tròn tâm  $I(1;2)$ , bán kính bằng  $\sqrt{2}$ .

Trả lời:

**Câu 53:** Cho hàm số  $y = \frac{2x+m}{mx-1}$ . Tìm  $m$  để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 2.

Trả lời:

**Câu 54:** Với giá trị nào của hàm số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$  có tiệm cận ngang.

**Trả lời:**

**Câu 55:** Cho đường cong  $(C): y = \frac{x+2}{2x-1}$ . Tích khoảng cách từ điểm  $M$  bất kì trên  $(C)$  đến hai đường tiệm cận của  $C$  có giá trị bằng  $\frac{a}{b}$  với  $\frac{a}{b}$  tối giản. Tìm  $a+b$

**Trả lời:**

**Câu 56:** Cho đường cong  $(C): y = \frac{x-1}{x+1}$ . Biết điểm  $M(a,b)$  ( $a < 0$ ) nằm trên  $(C)$  và có khoảng cách tới tiệm cận đứng gấp 2 lần khoảng cách tới tiệm cận ngang của  $(C)$ . Khi đó  $a+b$  nhận giá trị bằng?

**Trả lời:**

**Câu 57:** Cho đường cong  $(C_m): y = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2}{mx-1}$  và đường thẳng  $(d_m): y = mx - m + 2$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để  $(C_m)$  có điểm cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên của nó tạo với đường thẳng  $(d_m)$  một góc  $45^\circ$ .

**Trả lời:**

**Câu 58:** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 + (m^2 + m + 2)x + m^2 + 3}{x+1}$ . Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để khoảng cách từ gốc  $O$  đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất.

**Trả lời:**

**Câu 59:** Tìm được trên đồ thị  $(C): y = \frac{x+2}{x-3}$  những điểm  $M$  sao cho khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường tiệm cận đứng bằng  $\frac{1}{5}$  khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường tiệm cận ngang. Hỏi có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn?

**Trả lời:**

**Câu 60:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (m-1)x + m^2 - 2m + 1}{1-x}$  (1). Tổng tất cả các giá trị của  $m$  để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng  $\frac{1}{2}$ .

**Trả lời:**

### ⇒ Bài toán thực tế về tiệm cận

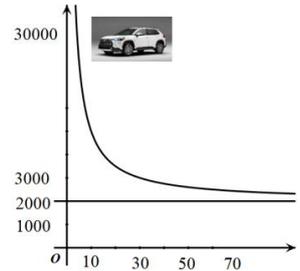
**Câu 61:** Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất  $x$  sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số  $F(x) = 60000 + 250x$ . Gọi  $\bar{F}(x)$  là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất  $x$  sản phẩm ( $x \geq 0$ ), khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là  $y = a$ . Tìm  $a$ ?

**Trả lời:**

**Câu 62:** Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong  $x$  (tháng) được tính bởi công thức  $S(x) = 300\left(2 + \frac{4}{x+2}\right)$  với  $x \geq 1$ . Xem  $y = S(x)$  là một hàm số xác định trên  $[1; +\infty)$ , khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là  $y = a$ . Tìm  $a$ ?

**Trả lời:**

**Câu 63:** Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30000 USD. Sau thời gian  $t$  (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là  $f(t) = \frac{30000 + 2000t}{t}$  (USD). Sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng bao nhiêu (USD)?



**Trả lời:**

**Câu 64:** Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất  $x$  (sản phẩm) là  $C(x) = 150x + 900$  (nghìn đồng). Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm không vượt quá  $t$  (nghìn đồng). Tìm giá trị nhỏ nhất của  $t$ .

**Trả lời:**

**Câu 65:** Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với  $x$  người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức  $P(x) = \frac{5000x}{4x+25}$ . Xem  $y = P(x)$  là một hàm số xác định trên  $[0; +\infty)$ , khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là  $y = a$ . Tìm  $a$ ?

**Trả lời:**

**Câu 66:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng  $900 m^2$ . Biết chiều dài của mảnh vườn là  $x$  (m). Gọi biểu thức tính chu vi của mảnh vườn là  $P(x)$  (mét). Biết rằng phương trình tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $P(x)$  là  $y = ax + b$ . Tính giá trị biểu thức  $T = 10^a + b$

**Trả lời:**

**Câu 67:** Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong  $x$  (tháng) được tính theo công thức  $S(x) = 200\left(5 - \frac{9}{2+x}\right)$ , trong đó  $x \geq 1$ . Xem  $y = S(x)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ , tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là  $y = a$ . Tìm  $a$ ?

**Trả lời:**

**Câu 68:** Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau  $t$  phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm  $f(t)$ . Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$ ,  $t \in [0; +\infty)$  là  $y = a$ . Tìm  $a$ ?

**Trả lời:**

**Câu 69:** Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất  $x$  (sản phẩm) là:  $C(x) = 2x + 50$  (triệu đồng), khi đó  $G(x) = \frac{C(x)}{x}$  là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm. Khi đó, chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá bao nhiêu?

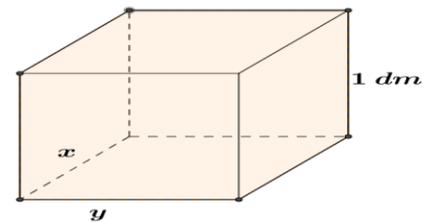


**Trả lời :**

**Câu 70:** Trong phòng thí nghiệm người ta xác định được số lượng vi khuẩn được nuôi cấy tính theo công thức  $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ , trong đó  $t$  là thời gian được tính bằng giây ( $t \geq 0$ ). Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi nuôi cấy.

**Trả lời :**

**Câu 71:** Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng  $5m^3$ . Chiều cao của bể là  $10dm$ , các kích thước khác là  $x(m)$ ,  $y(m)$  với  $x > 0$  và  $y > 0$ . Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số  $S(x)$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $S(x)$  là đường thẳng  $y = ax + b$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = a^2 + b^2$ .



**Trả lời :**

**Câu 72:** Một bể chứa  $2m^3$  nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số  $f(t)$ , thời gian  $t$  tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(t)$  là  $y = 10$ . Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là

**Trả lời :**

**Câu 73:** Dân số của một thị trấn kể từ năm 2000 được ước tính bởi công thức  $N(t) = \frac{15t+4}{2t+1}$  (nghìn người). Theo thời gian, dân số của thị trấn sẽ luôn tăng nhưng sẽ không bao giờ đạt đến ít nhất bao nhiêu nghìn người?

**Trả lời :**



**Câu 74:** Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40000USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 6USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi  $x(x \geq 1)$  là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và  $P(x)$  (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất  $x$  đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm



đồ chơi A là  $F(x) = \frac{P(x)}{x}$ . Xem  $F(x)$  là hàm số theo  $x$  xác định trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ . Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu?

Trả lời :  

**Câu 75:** Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với  $x$  người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức  $P(x) = \frac{5000x}{4x + 25}$ . Hãy tìm số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn?

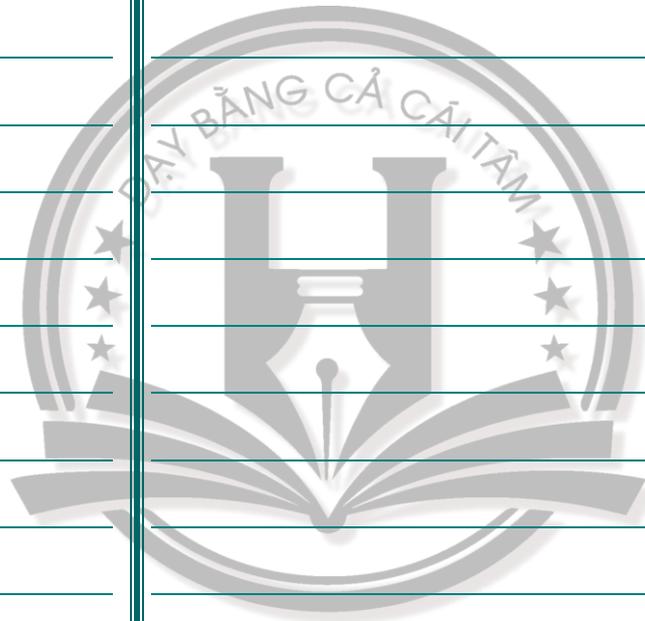


Trả lời :  



Nỗ lực hết mình, chuẩn bị cho những tình huống xấu nhất, vậy sẽ không sợ hãi. Bỏ ra nhiều công sức, nhưng không quá kỳ vọng, vậy sẽ không buồn lòng. Một giấc mộng đẹp, sống cuộc sống hiện thực, vậy sẽ không vô vị. Cuộc sống, bạn chuẩn bị thế nào thì hãy ứng đối thế ấy.







**MÓN QUÀ TẠI LỚP**

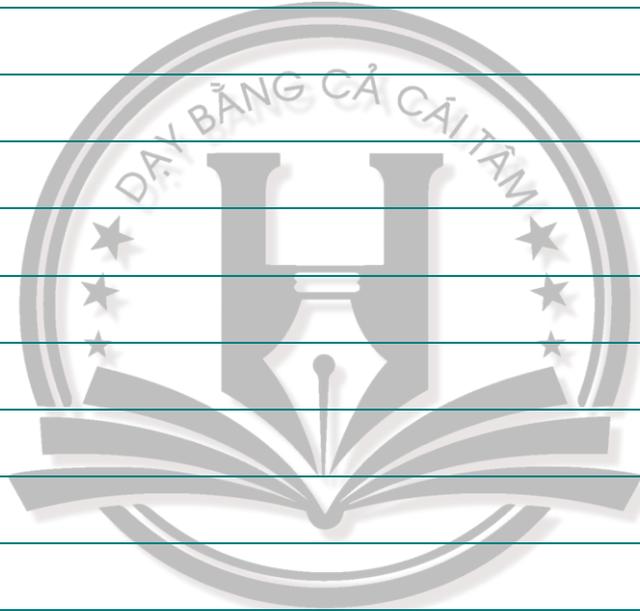
**☑ Đồ thị hàm bậc 3**

**Ví dụ 1:** Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau

a)  $y = x^3 - 3x^2 + 4$

b)  $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

**SOLUTION**



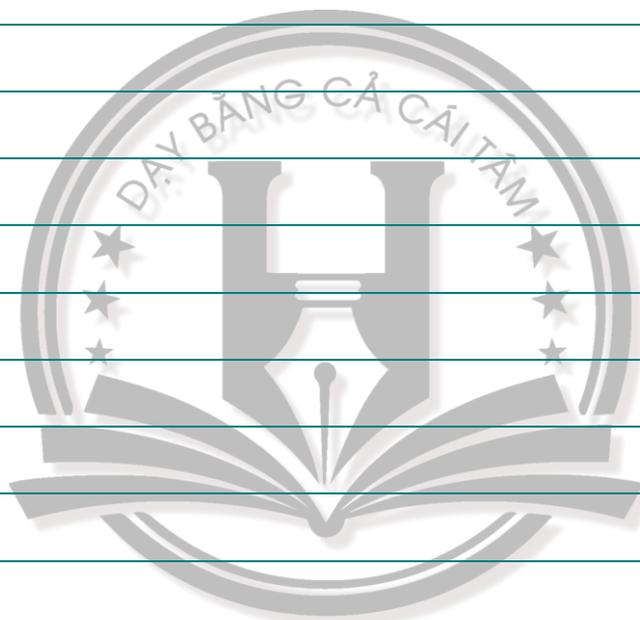


**Ví dụ 2:** Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau

a)  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

b)  $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

**SOLUTION:**





### ☑ Đồ thị hàm phân thức

**Ví dụ 3:** Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau

a)  $y = \frac{x+1}{x-2}$

b)  $y = \frac{2x+1}{x+1}$

**SOLUTION**



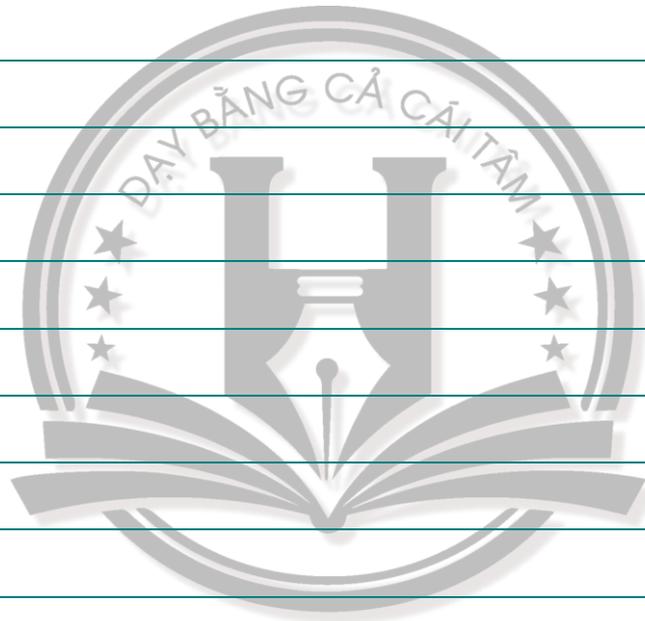


**Ví dụ 4:** Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau

a)  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

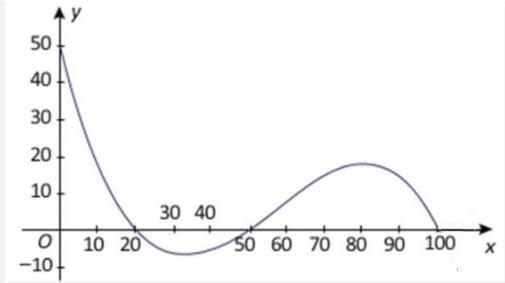
b)  $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

**SOLUTION**

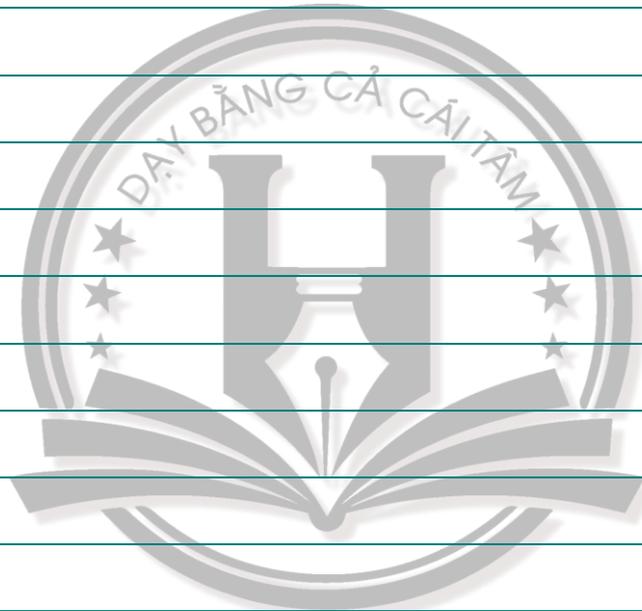


**☑ Đọc đồ thị trong toán thực tế**

**Ví dụ 5:** Một phần đường ray tàu lượn siêu tốc có dạng đồ thị hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Trục  $Ox$  mô tả quãng đường tàu di chuyển theo chiều ngang (tính bằng mét), trục  $Oy$  mô tả chiều cao của đường ray (tính bằng mét) tại mỗi vị trí  $x$ . Chiều cao xuất phát là 50m. Tàu xuống dưới trục  $Ox$  lần thứ nhất từ vị trí  $x = 20$ m, tàu lên trên trục  $Ox$  ở vị trí  $x = 50$ m và sau đó đi xuống dừng lại ở vị trí  $x = 100$ m. Xét đồ thị của hàm số đã cho khi  $x \in [0; 100]$  như hình vẽ bên. Biết điểm cao nhất của đường ray khi tàu nằm phía trên trục  $Ox$  và điểm thấp nhất của đường ray khi tàu nằm phía dưới trục  $Ox$  lần lượt có hoành độ là  $p$  và  $q$ . Tính  $p + 3q$ .



**SOLUTION**





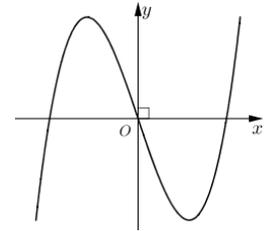
**QUICK TIPS MCQ MASTERY**

**Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án).**

⇒ Nhận dạng đồ thị hàm số

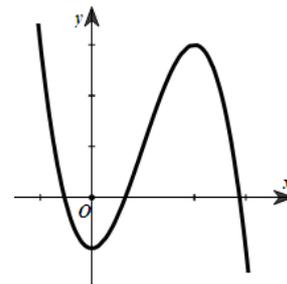
**Câu 1:** (TK 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

- A.  $y = x^3 - 3x$ .                      B.  $y = -x^3 + 3x$ .  
 C.  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .                D.  $y = -x^3 + 3x^2$ .



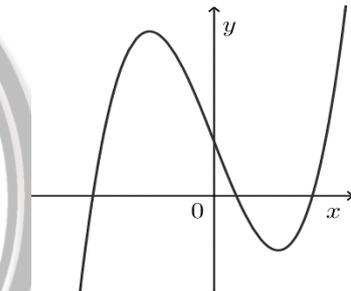
**Câu 2:** (THPT QG 2020 Lần 2) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên

- A.  $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ .    B.  $y = x^4 - 2x^2 - 1$ .  
 C.  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .        D.  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ .



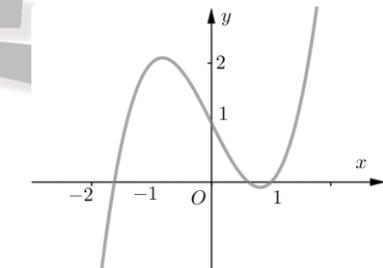
**Câu 3:** (Đề Minh Họa 2017) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^3 - 3x + 1$                       B.  $y = -x^3 + 3x + 1$   
 C.  $y = x^4 - x^2 + 1$                       D.  $y = -x^2 + x - 1$



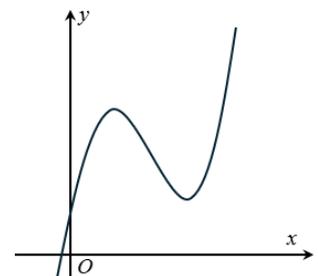
**Câu 4:** Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^3 + 2x + 1$ .                      B.  $y = x^3 - 2x^2 + 1$ .  
 C.  $y = x^3 - 2x + 1$ .                      D.  $y = -x^3 + 2x + 1$ .



**Câu 5:** Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

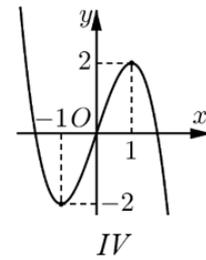
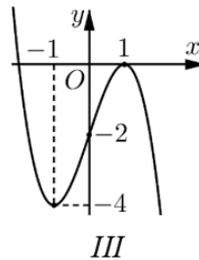
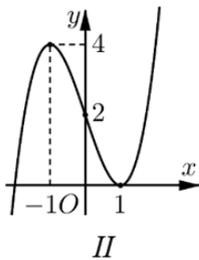
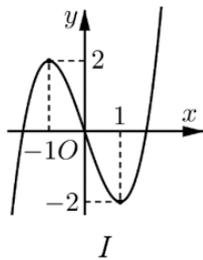
- A.  $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$ .            B.  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .  
 C.  $y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ .        D.  $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ .



**Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$2$	$-2$	$+\infty$	

Đồ thị nào thể hiện hàm số  $y = f(x)$ ?



A. I.

B. II.

C. III.

D. IV.

**Câu 7:** (Mã 103 - 2022) Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau

A.  $y = x^3 - 3x$ .

B.  $y = -x^3 + 3x$ .

C.  $y = x^2 - 2x$ .

D.  $y = -x^2 + 2x$ .

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$y'$		-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$			2		$-\infty$

**Câu 8:** (Mã 101-2023) Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau ?

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$y'$		-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$			3		$-\infty$

A.  $y = \frac{x+2}{x}$ .

B.  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

C.  $y = x^4 - 3x^2$ .

D.  $y = -2x^2 + 1$ .

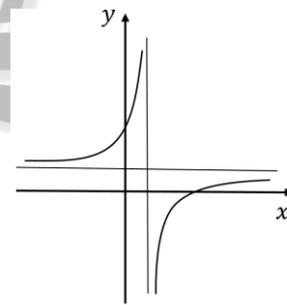
**Câu 9:** (Đề Minh Họa 2023) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên

A.  $y = x^4 - 3x^2 + 2$ .

B.  $y = \frac{x-3}{x-1}$ .

C.  $y = x^2 - 4x + 1$ .

D.  $y = x^3 - 3x - 5$ .



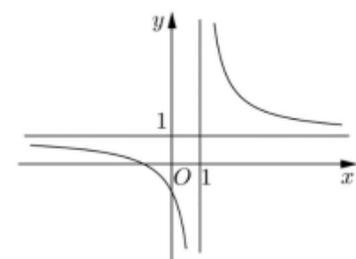
**Câu 10:** (Đề Tham Khảo 2019) Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A.  $y = \frac{2x-1}{x-1}$

B.  $y = \frac{x+1}{x-1}$

C.  $y = x^4 + x^2 + 1$

D.  $y = x^3 - 3x - 1$



**Câu 11:** (Mã 103 - 2021 - Lần 1) Biết hàm số  $y = \frac{x+a}{x-1}$  ( $a$  là số thực

cho trước,  $a \neq -1$ ) có đồ thị như trong hình vẽ sau

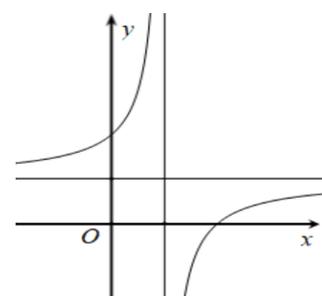
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $y' > 0, \forall x \neq 1$ .

B.  $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

C.  $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

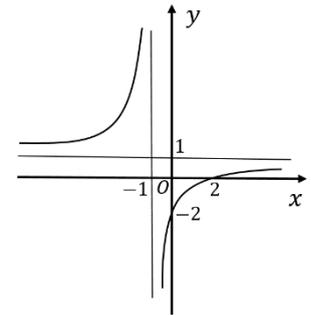
D.  $y' < 0, \forall x \neq 1$ .



**Câu 12:** (Đề Minh Họa 2023) Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị là đường cong

trong hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là

- A.  $(0; -2)$ .                      B.  $(2; 0)$ .  
 C.  $(-2; 0)$ .                      D.  $(0; 2)$ .



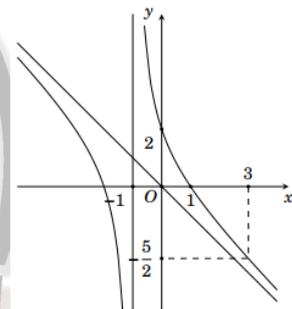
**Câu 13:** Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

$x$	0	2	$+\infty$
$y'$	-		-
$y$	2	$+\infty$	2

- A.  $y = \frac{2x-7}{x-2}$ .                      B.  $y = \frac{2x+1}{x+2}$ .                      C.  $y = \frac{2x+1}{x-2}$ .                      D.  $y = \frac{1-2x}{x-2}$ .

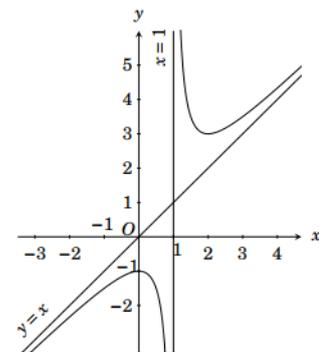
**Câu 14:** Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$ .                      B.  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ .  
 C.  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$ .                      D.  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ .



**Câu 15:** Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ .                      B.  $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$ .  
 C.  $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$ .                      D.  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ .



**Câu 16:** Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$ .                      B.  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$ .  
 C.  $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$ .                      D.  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$ .

$x$	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	+	0	-
$y$	$+\infty$		$+\infty$		0	$-\infty$

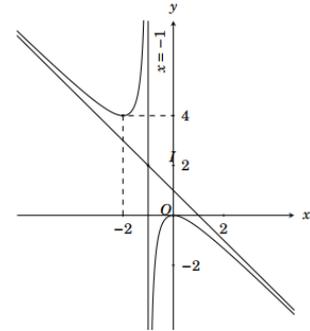
**Câu 17:** Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ .      B.  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$ .  
 C.  $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$ .      D.  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$ .

$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	+	0	-
$y$	$+\infty$		$+\infty$		-9	$-\infty$

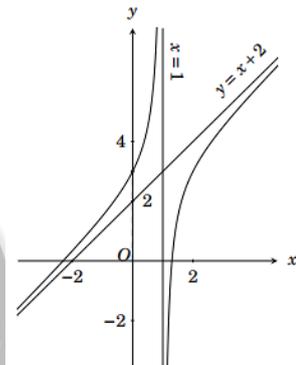
**Câu 18:** Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ .      B.  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ .  
 C.  $y = \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$ .      D.  $y = \frac{-x^2}{x + 1}$ .



**Câu 19:** Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .      B.  $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$ .  
 C.  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-x + 1}$ .      D.  $y = \frac{x^2 + 3}{-x + 1}$ .



**Câu 20:** Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

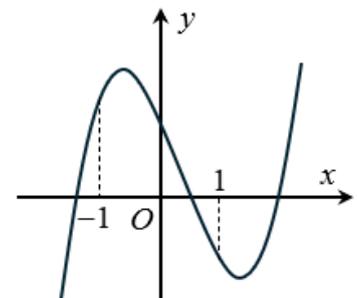
$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'$		+	+
$y$	$-\infty$		$+\infty$

- A.  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ .      B.  $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$ .      C.  $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$ .      D.  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ .

**↻ Xét dấu hệ số**

**Câu 21:** Hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

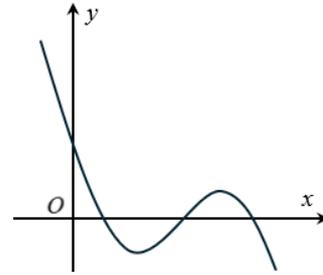
- A.  $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$ .  
 B.  $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .  
 C.  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .  
 D.  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .



**Câu 22:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên.

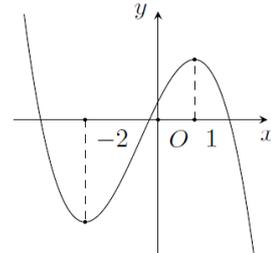
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .
- B.  $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .
- C.  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .
- D.  $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .



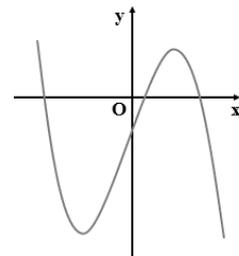
**Câu 23:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?

- A.  $ab > 0, bc < 0, cd < 0$ .
- B.  $ab > 0, bc < 0, cd > 0$ .
- C.  $ab > 0, bc > 0, cd > 0$ .
- D.  $ab < 0, bc < 0, cd > 0$ .



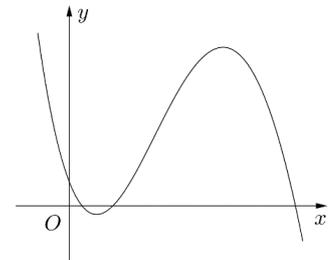
**Câu 24:** (Đề Minh Họa 2020) Cho hàm số  $y = ax^3 + 3x + d$  ( $a, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a > 0, d > 0$ .
- B.  $a < 0, d > 0$ .
- C.  $a > 0, d < 0$ .
- D.  $a < 0, d < 0$ .



**Câu 25:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

- A. 4.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.



**Câu 26:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ )

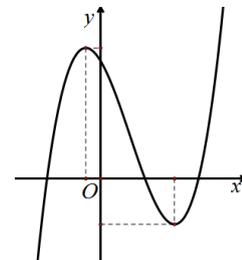
có bảng biến thiên như sau. Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

- A. 2.
- B. 4.
- C. 1.
- D. 3.

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$2$	$1$	$+\infty$	

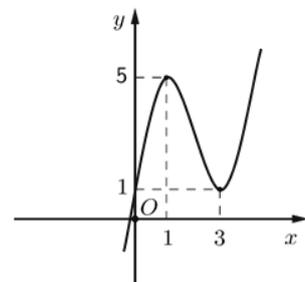
**Câu 27:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của  $a, b, c, d$ ?

- A.  $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$
- B.  $a > 0, c > 0 > b, d < 0$
- C.  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .
- D.  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$



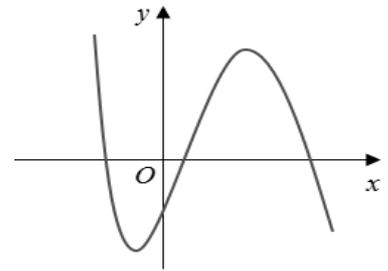
**Câu 28:** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .
- B.  $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .
- C.  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .
- D.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .



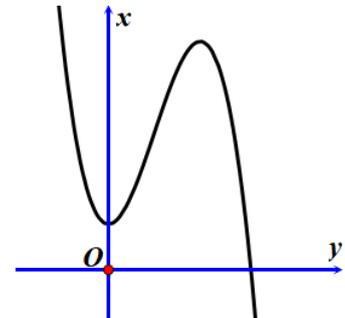
**Câu 29:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .
- B.  $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$ .
- C.  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .
- D.  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .



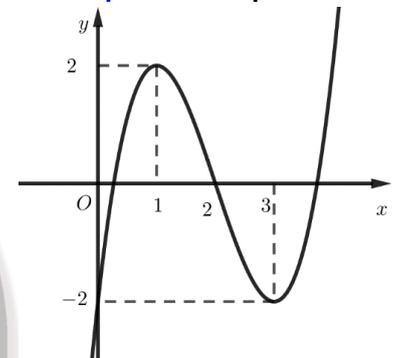
**Câu 30:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .
- B.  $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$ .
- C.  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .
- D.  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .



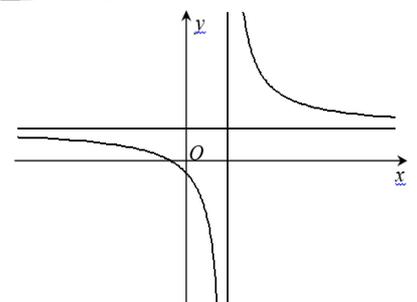
**Câu 31:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Số lớn nhất trong các số  $a, b, c, d$  là:

- A.  $c$ .
- B.  $a$ .
- C.  $b$ .
- D.  $d$ .



**Câu 32:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị như sau. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $ac > 0; bd > 0$
- B.  $ab < 0; cd < 0$
- C.  $bc > 0; ad < 0$
- D.  $ad > 0; bd < 0$



**Câu 33:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$1$	$+\infty$	$1$
	$\nearrow$		$\nearrow$
		$-\infty$	

Trong các số  $a, b$  và  $c$  có bao nhiêu số dương?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 1.
- D. 0.

**Câu 34:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax-4}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$1$	$+\infty$	$-\infty$

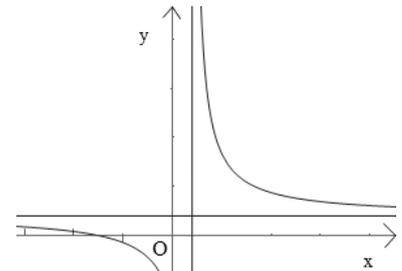
Trong các số  $a, b, c$  có bao nhiêu số dương?

- A. 3.                                      B. 4.                                      C. 2.                                      D. 1.

**Câu 35:** Cho hàm số  $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$ ,  $d < 0$  có đồ thị như hình trên.

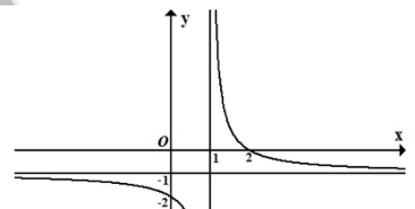
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.  $a > 1, b > 0, c < 1$ .              B.  $a > 1, b < 0, c > 1$ .  
 C.  $a < 1, b > 0, c < 1$ .              D.  $a > 1, b > 0, c > 1$ .



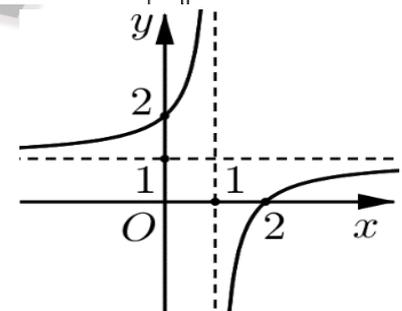
**Câu 36:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đồ thị như hình bên dưới, với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = a + 2b + 3c$ ?

- A.  $T = -8$ .                              B.  $T = 2$ .  
 C.  $T = 6$ .                                D.  $T = 0$ .



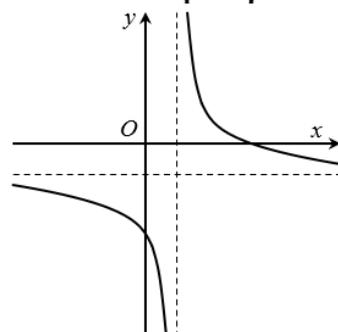
**Câu 37:** Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = \frac{x+a}{bx+c}$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó giá trị biểu thức  $T = a - 3b - 2c$  bằng

- A. 3.                                      B. 2.  
 C. 0.                                      D. -3.

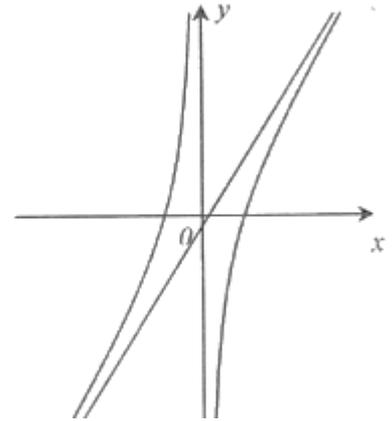


**Câu 38:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+4-b}{cx+b}$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a > 0, b > 4, c < 0$ .  
 B.  $a > 0, 0 < b < 4, c < 0$ .  
 C.  $a > 0, b < 0, c < 0$ .  
 D.  $a < 0, 0 < b < 4, c < 0$ .

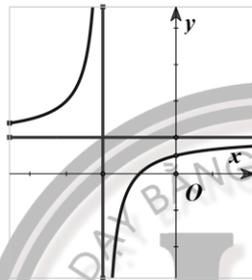


**Câu 39:** Cho hàm số  $y = ax + b - \frac{r}{x}$  ( $abr \neq 0$ ) và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau. Các hệ số  $a, b, r$  phải thoả mãn điều kiện nào dưới đây.

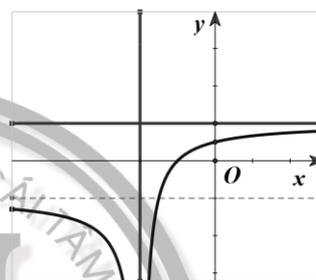


- A.  $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ r > 0 \end{cases}$                       B.  $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r < 0 \end{cases}$   
 C.  $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ r > 0 \end{cases}$                       D.  $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r > 0 \end{cases}$

**Câu 40:** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x+2}$  có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

- A.  $y = \left| \frac{x+1}{x+2} \right|$                       B.  $y = \frac{|x|+1}{|x|+2}$                       C.  $y = \frac{|x+1|}{x+2}$                       D.  $y = \frac{x+1}{|x+2|}$

**2. Câu hỏi đúng sai.** (Trong mỗi ý (a),(b),(c),(d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai ).

⇒ Đọc đồ thị

**Câu 41:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  có đồ thị là (C)

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đồ thị (C) đối xứng qua điểm $I(a;b)$ khi đó $a+b=3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=3$ đi qua điểm $A(0;23)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	$y = -3x + 5$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

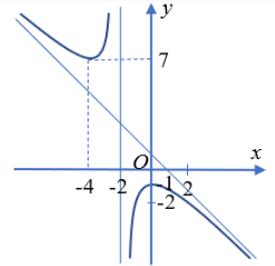
**Câu 42:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$  có đồ thị (C). Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 43:** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$  có đồ thị (C).

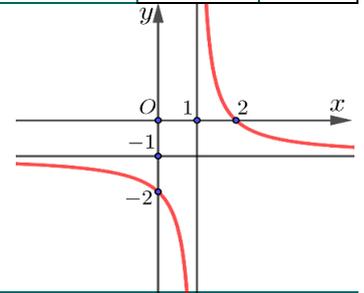
Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2, -1)$ và $(-1, 0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số có hai điểm cực trị.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đồ thị (C) không cắt trục $Ox$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 44:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây, biết đường tiệm cận của đồ thị hàm số đi qua hai điểm  $(0; 1)$  và  $(1; 0)$ .



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ $M(1; -8)$ đến đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng $\sqrt{5}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 0)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Ta có $a + b + c + d = -2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 45:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + 1}$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  có đồ thị là hình bên.



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đạo hàm của hàm số $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = -1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Tổng $a + b + c = 5$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 46:** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$  (1) với  $m$  là số thực

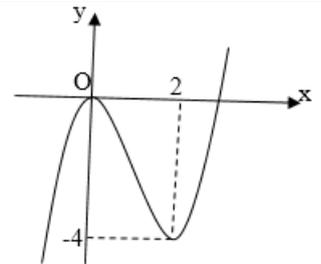
Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x - 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khi $m = 1$ thì tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I(3; -5)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 2 giá trị $m$ để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số bằng $45^\circ$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 47:** Cho hàm số  $y = \frac{-mx^2 + (4m-2)x + 1 - 4m}{x-1}$  có đồ thị là  $(C)$  với  $m$  là tham số

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khi $m = 1$ đồ thị hàm số không cắt trục $Ox$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khi $m < -1$ thì hàm số đạt cực đại và cực tiểu trong miền $x > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 2 tiếp tuyến của $(C)$ song song với đường thẳng $x - y = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

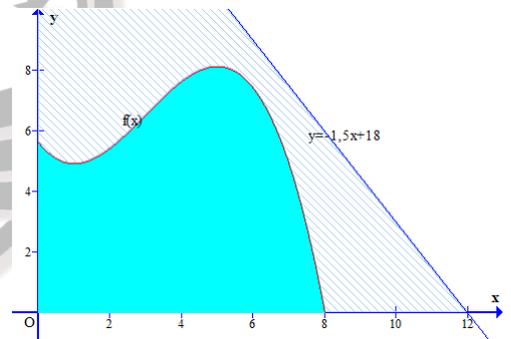
⇒ Bài toán thực tế về hàm số

**Câu 48:** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như vẽ. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được  $x$  mét vải lụa ( $0 \leq x \leq 18$ ). Tổng chi phí sản xuất  $x$  mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí  $C(x) = f(x) - 20x + 500$ . Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 200 nghìn đồng/mét.



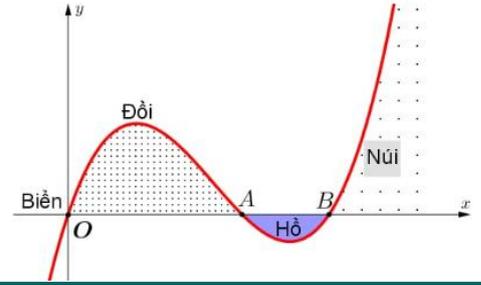
Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số có hệ số $d > 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số có hệ số $a > 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $E(0; 2)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày là 1100 nghìn đồng.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 49:** Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ . Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số  $y = -1,5x + 18$  ( $\Delta$ ). Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường là ngắn nhất.



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Xét điểm $M(x; y)$ nằm trên đường cong bờ hồ thì $x \in [0; 8]$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khoảng cách từ $M(x; y)$ đến đường thẳng ( $\Delta$ ) là $d = \frac{ x^3 - 9x^2 + 120 }{5\sqrt{13}}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Hoành độ của điểm để xây bến thuyền là 6.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng cách từ bến thuyền đến con đường là $\frac{16}{5}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 50:** Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hóa thành một hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới (đơn vị độ dài trên các trục là  $km$ ). Biết khoảng cách hai bên chân đồi  $OA = 2 km$ , độ rộng của hồ  $AB = 1 km$  và ngọn đồi cao  $0,528 km$ .

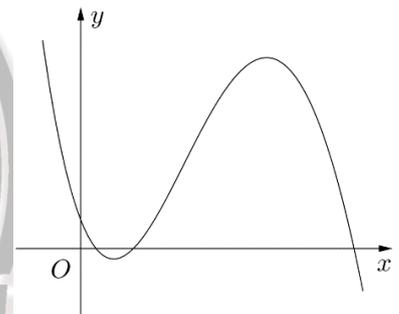


<b>Mệnh đề</b>		<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
(a)	Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $O(0;0)$ , $A(2;0)$ , $B(3;0)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in (0;1)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Một người dựng trên đỉnh đồi một cột cờ cao $3m$ , khi đó vị trí đỉnh cột cờ có tọa độ là $H(0,785;0,582)$ , kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất là $158 m$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh trả điện kết quả vào ô trống)**

**⇒ Bài toán liên quan đến xác định hàm số**

**Câu 51:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

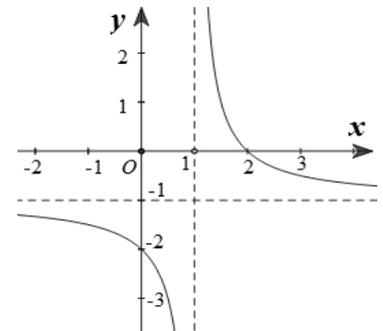


**Trả lời :**

**Câu 52:** Ta xác định được các số  $a, b, c$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  đi qua điểm  $(1;0)$  và có điểm cực trị  $(-2;0)$ . Tính giá trị biểu thức  $T = a^2 + b^2 + c^2$ .

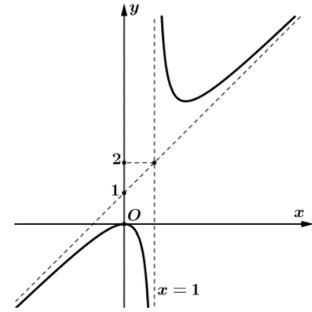
**Trả lời :**

**Câu 53:** Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ). Khi đó tổng  $a+b+c$  bằng



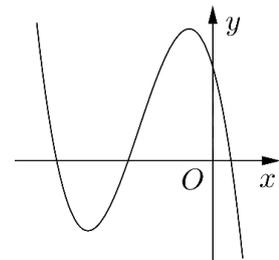
**Trả lời :**

**Câu 54:** Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số  $y = ax + b + \frac{1}{x+c}$   
 Khi đó tổng  $a+b+c$  bằng bao nhiêu?



**Trả lời :**

**Câu 55:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?



**Trả lời :**

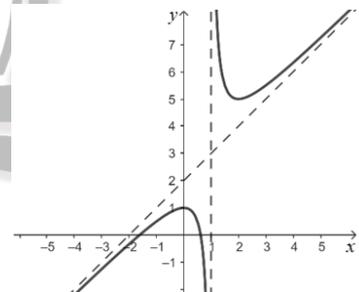
**Câu 56:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  và  $c \neq 0$ ). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm  $(-1; 7)$  và giao điểm hai tiệm cận là  $(-2; 3)$ . Giá trị biểu thức  $\frac{2a+3b+4c+d}{7c}$  bằng

**Trả lời :**

**Câu 57:** Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2+3x+10}{x+2}$  là bao nhiêu?

**Trả lời :**

**Câu 58:** Cho hàm số  $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$  ( $a > 0, m \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số  $b, c, m, n$  có tất cả bao nhiêu số dương?



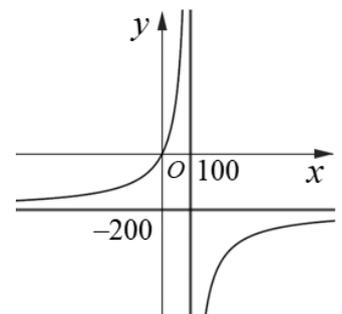
**Trả lời :**

**Câu 59:** Tìm được trên đồ thị (C):  $y = \frac{x^2+4x+5}{x+2}$  hai điểm  $M(a;b)$  và  $N(c;d)$  có khoảng cách đến đường thẳng  $3x+y+6=0$  nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị biểu thức  $T = a+b+c+d$

**Trả lời :**

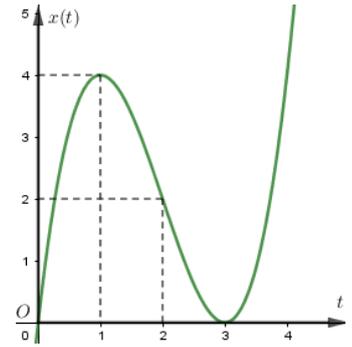
⇒ Bài toán thực tế về hàm số

**Câu 60:** Để loại bỏ  $x\%$  chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hoá bởi hàm số có dạng  $C(x) = \frac{ax+b}{-x+d}$  (như hình vẽ), ( $0 \leq x < 100$ ).  
 Tính chi phí chênh lệch (ti đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



**Trả lời :**

**Câu 61:** Một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải với vận tốc ban đầu là  $9m/s$  thì thay đổi quỹ đạo chuyển động. Giả sử tọa độ  $x(t)$  (mét) của chất điểm trên trục số từ thời điểm  $t=0$  giây (tính từ lúc bắt đầu thay đổi quỹ đạo chuyển động) đến thời điểm  $t=4$  giây được cho bởi công thức  $x(t) = at^3 + bt^2 + ct$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ sau. Vận tốc đạt cực tiểu tại thời điểm  $t$  bằng mấy giây?

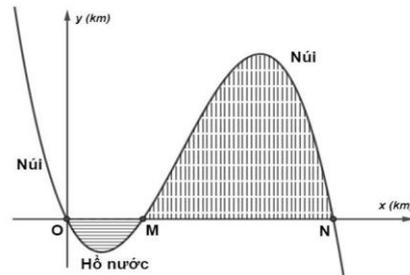


**Trả lời :**

**Câu 62:** Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hoá bằng hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c$  là các hệ số. Trong đó,  $x$  ( $0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$ ) là số tháng kể từ đầu năm học và  $f(x)$  là điểm trong tháng thứ  $x$ . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học, là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

**Trả lời :**

**Câu 63:** Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách  $OM = 2km$ ; độ rộng của núi  $MN = 3,5km$ . Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

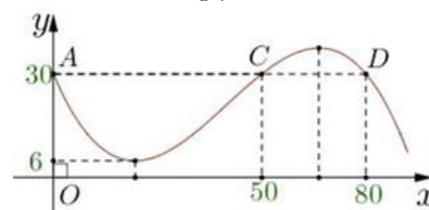


**Trả lời :**

**Câu 64:** Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục tọa độ  $Oxy$  được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $0 \leq x < 90$ ); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm  $A$ , đi qua các điểm  $C, D$  đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là  $6m$ . Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



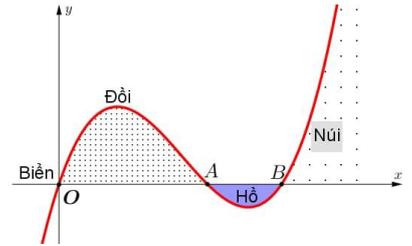
Hình 1



Hình 2

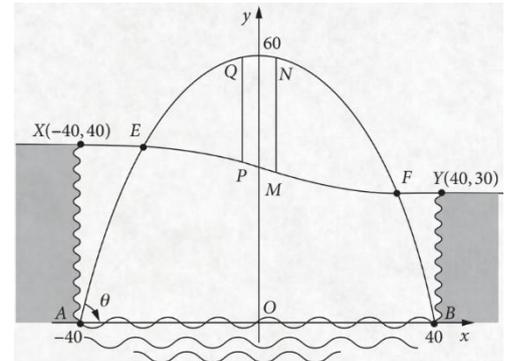
**Trả lời :**

**Câu 65:** Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km). Biết khoảng cách hai bên chân đồi  $OA = 2$  km, độ rộng của hồ  $AB = 1$  km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).



**Trả lời :**

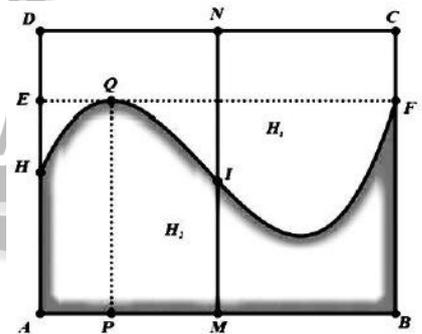
**Câu 66:** Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây. Con đường  $XY$  xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình:  $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$ . Hai cột đỡ dọc



$MN$  và  $PQ$  (song song với trục  $Oy$ ) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường  $XY$ . Tính tổng độ dài đoạn  $MN$  và  $PQ$  biết rằng  $N$  và  $Q$  là hai điểm đối xứng qua  $Oy$ ;  $MN$  là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

**Trả lời :**

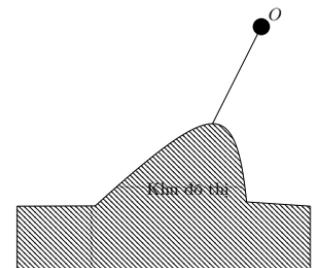
**Câu 67:** Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = 100$  m;  $AD = 80$  m. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần  $H_1$  (không tô màu) dành cho trẻ em và  $H_2$  (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với  $AH = 40$  m;  $AE = 60$  m;  $AP = 20$  m và  $EF \parallel AB$ ;  $PQ \parallel AD$ .



. Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ  $Oxy$ , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng  $MN$  như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn  $MN$  là bao nhiêu triệu đồng.

**Trả lời :**

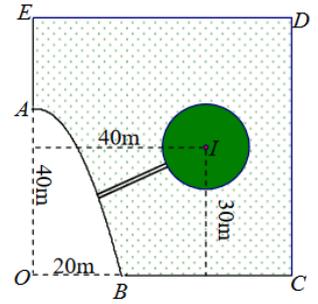
**Câu 68:** Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ  $Oxy$  với đơn vị tương ứng 1km có hòn đảo ở  $O$  thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số  $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$



. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

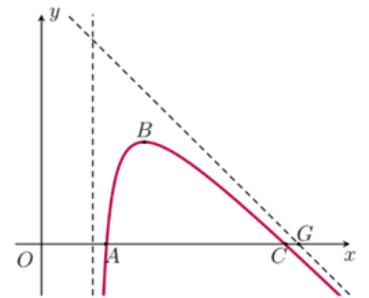
**Trả lời :**

**Câu 69:** Một cái ao hình  $ABCE$  (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10m. Người ta muốn bắc một cầu từ bờ  $AB$  của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu  $l$  (làm tròn đến hàng phần chục) của cây cầu biết :Hai bờ  $AE$  và  $BC$  nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm  $O$ ; Bờ  $AB$  là một phần của một parabol có đỉnh là điểm  $A$  và có trục đối xứng là đường thẳng  $OA$ ; Độ dài đoạn  $OA$  và  $OB$  lần lượt là 40 m và 20 m; Tâm  $I$  của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng  $AE$  và  $BC$  lần lượt 40 m và 30 m.



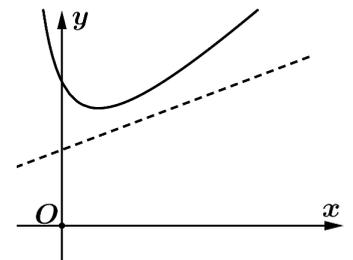
**Trả lời :**

**Câu 70:** Một máy bay trình diễn có đường bay gắn với hệ trục  $Oxy$  được mô phỏng như hình vẽ, trục  $Ox$  gắn với mặt đất. Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất  $y = f(x)$  có đường tiệm cận đứng là  $x = 2$ . Điểm  $G$  là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục  $Ox$  được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí  $A$  cách tọa độ  $O$  một khoảng 2,5 đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát 1,5 đơn vị theo phương song song với trục  $Ox$  và cách mặt đất 4,5 đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?



**Trả lời :**

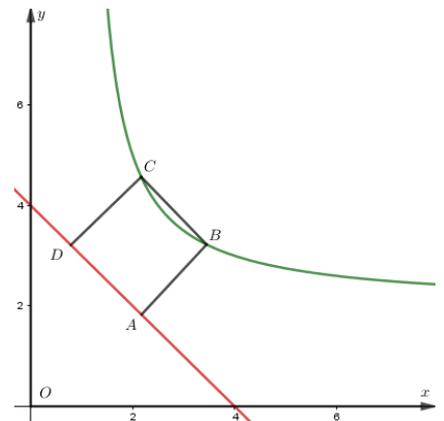
**Câu 71:** Một doanh nghiệp kinh doanh sản xuất đồng hồ có đồ thị hàm tổng chi phí theo số sản phẩm là một phần đồ thị của hàm số bậc hai trên bậc nhất  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + e}$  như hình vẽ (mỗi đơn vị trên trục hoành tương ứng 100 sản phẩm và mỗi đơn vị trên trục tung tương ứng 1000USD). Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số  $f(x)$  là  $A\left(-1; \frac{2}{3}\right)$  và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm  $B(3; 2)$ .



Theo khảo sát, tổng doanh thu của doanh nghiệp này được mô tả bởi hàm số  $R(x) = x^2 + 2x$  và lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm bằng 5250 USD. Khi chi phí theo số sản phẩm đạt giá trị nhỏ nhất thì số sản phẩm sản xuất được là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

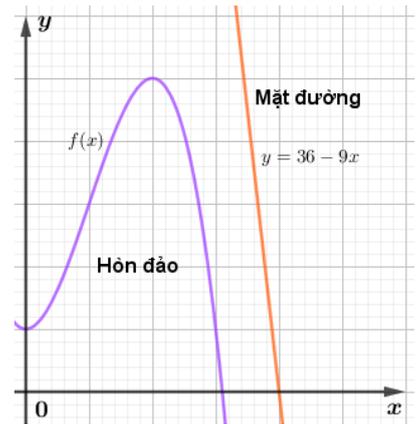
**Trả lời :**

**Câu 72:** Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục  $Oxy$  như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  và đường đi khi đó ứng với đường thẳng  $(d): y = -x + 4$ . Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



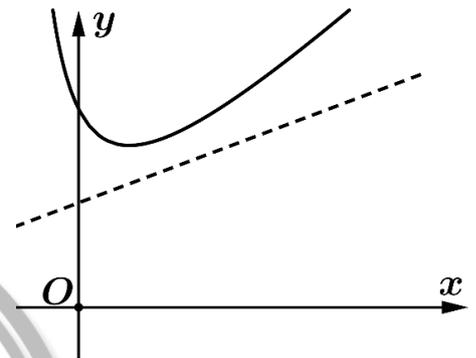
**Trả lời :**

**Câu 73:** Một hòn đảo nằm trong một hồ nước. Biết rằng đường cong tạo nên hòn đảo được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ  $Oxy$  là một phần của đồ thị hàm số bậc ba  $f(x)$ . Vị trí điểm cực đại là  $(2;5)$  với đơn vị của hệ trục là  $100m$  và vị trí điểm cực tiểu là  $(0;1)$ . Mặt đường chạy trên một đường thẳng có phương trình  $y = 36 - 9x$ . Người ta muốn làm một cây cầu có dạng một đoạn thẳng nối từ hòn đảo ra mặt đường. Độ dài ngắn nhất của cây cầu bằng bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần chục)



**Trả lời :**

**Câu 74:** Một doanh nghiệp kinh doanh sản xuất đồng hồ có đồ thị hàm tổng chi phí theo số sản phẩm là một phần đồ thị của hàm số bậc hai trên bậc nhất  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + e}$  như hình vẽ (mỗi đơn vị trên trục hoành tương ứng 100 sản phẩm và mỗi đơn vị trên trục tung tương ứng 1000USD). Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số  $f(x)$  là  $A\left(-1; \frac{2}{3}\right)$



và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm  $B(3;2)$ . Theo khảo sát, tổng doanh thu của doanh nghiệp này được mô tả bởi hàm số  $R(x) = x^2 + 2x$  và lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm bằng 5250USD. Khi chi phí theo số sản phẩm đạt giá trị nhỏ nhất thì số sản phẩm sản xuất được là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

**Trả lời :**

**Câu 75:** Trong hệ trục tọa độ  $(Oxy)$  cho đồ thị hàm số  $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá  $A$  và  $B$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng  $km$ ). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị  $(C)$ . Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị  $km$ ) giữa hai tàu đánh cá  $A$  và  $B$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Trả lời :**



Bắt đầu từ hôm nay, mỗi ngày hãy luôn nở nụ cười trên môi, trên đời này ngoài sinh tử ra mọi sự đều là chuyện nhỏ. Cho dù gặp phải chuyện phiền lòng cũng đừng tự làm khổ mình; bất luận hôm nay xảy ra bao nhiêu chuyện đen đủi, đều không nên cảm thấy bị thương. Hôm nay là ngày bạn trẻ nhất trong những ngày tháng sau này, vì còn có ngày mai, nên hôm nay mãi mãi chỉ là bước khởi đầu







**Ví dụ 3:** Gọi  $M, N$  là giao điểm của đường thẳng  $y = x + 1$  và đường cong  $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$ . Khi đó hoành độ  $x_I$  của trung điểm  $I$  của đoạn  $MN$  bằng bao nhiêu?

**SOLUTION**

### ☑ Tương giao chứa $m$

**Ví dụ 4:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số thực  $m$  để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

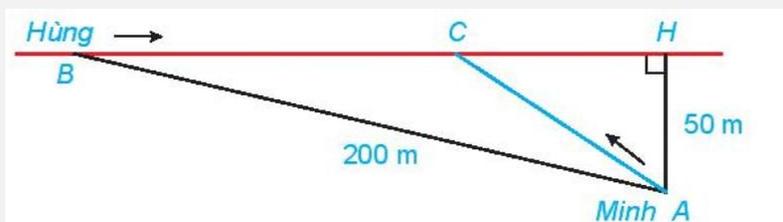
**SOLUTION**



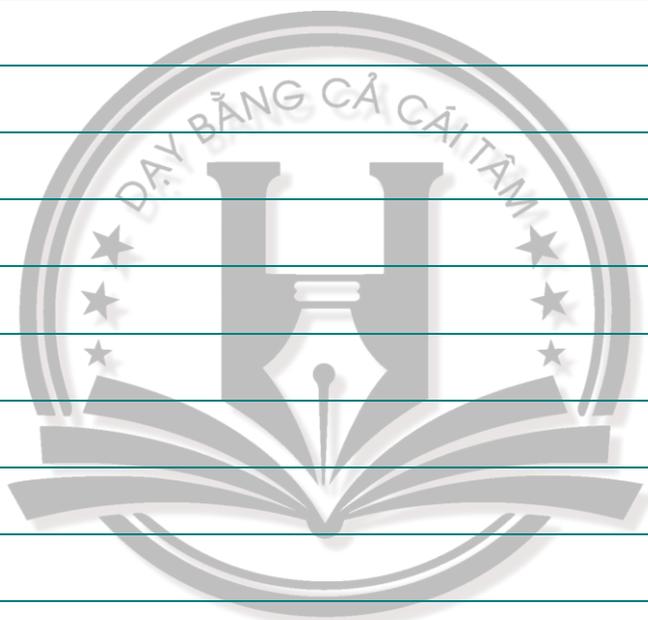




**Ví dụ 10:** Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B, cách mình một đoạn 200m thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là 5km/h, vận tốc đạp xe của Hùng là 15km/h. Hãy xác định vị trí C trên lề đường (hình vẽ) để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



**SOLUTION**



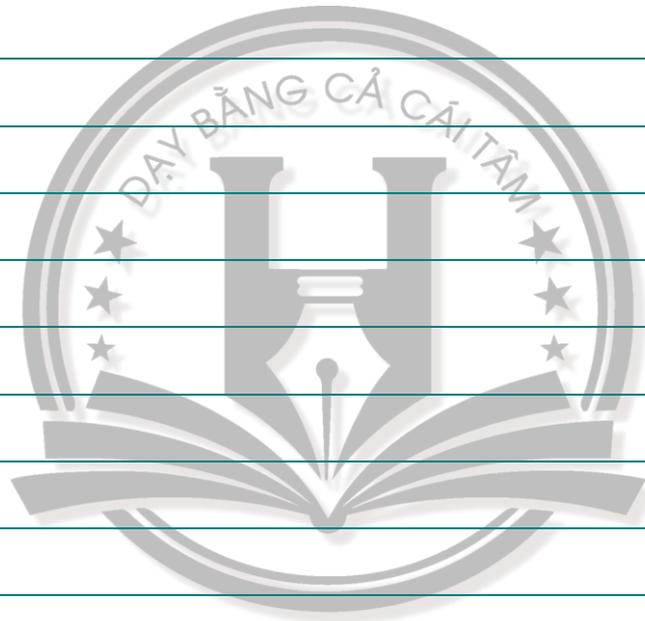


**☑ Tiếp tuyến biết tiếp điểm**

**Ví dụ 11:** Cho hàm số  $y = \frac{-2x+3}{x-1}$

- a) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ  $x_0 = 2$ .
- b) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có tung độ  $y_0 = 1$ .
- c) Viết phương trình tiếp tuyến tại giao của đồ thị và  $x - y - 3 = 0$ .

**SOLUTION**

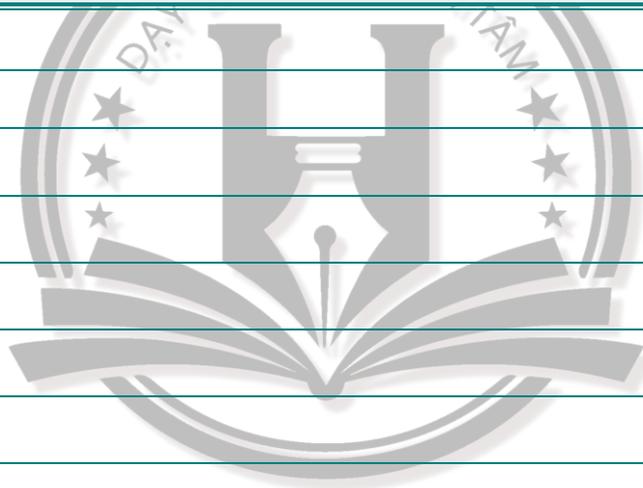






**Ví dụ 14:** [A 2009] Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị cắt trục hoành, trục tung tại  $A, B$  sao cho tam giác  $AOB$  cân tại  $O$ .

**SOLUTION**

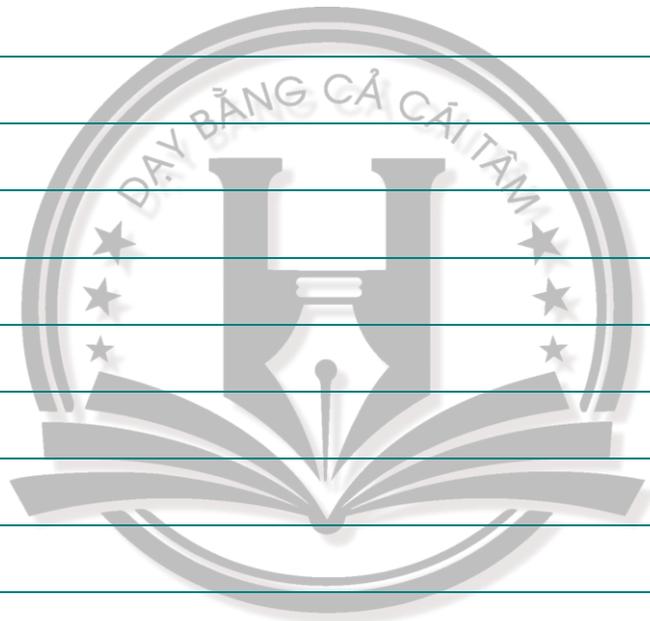




### ☑ Tiếp tuyến biết điểm đi qua

**Ví dụ 15:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  biết tiếp tuyến qua  $A(1; -6)$ .

**SOLUTION**









- Câu 13:** (Đề Minh Họa 2021) Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  
 A. 0.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. -2.
- Câu 14:** (Mã 101 - 2021 Lần 1) Đồ thị hàm số  $y = -x^4 + 4x^2 - 3$  cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  
 A. 0.                                      B. 3.                                      C. 1.                                      D. -3.
- Câu 15:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  và trục hoành là  
 A. 3.                                      B. 0.                                      C. 2.                                      D. 1.
- Câu 16:** (Mã 105 2017) Cho hàm số  $y = (x-2)(x^2+1)$  có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?  
 A. (C) cắt trục hoành tại một điểm.                                      B. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.  
 C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.                                      D. (C) không cắt trục hoành.
- Câu 17:** (Đề Minh Họa 2017) Biết rằng đường thẳng  $y = -2x + 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 + x + 2$  tại điểm duy nhất; kí hiệu  $(x_0; y_0)$  là tọa độ của điểm đó. Tìm  $y_0$   
 A.  $y_0 = 4$                                       B.  $y_0 = 0$                                       C.  $y_0 = 2$                                       D.  $y_0 = -1$
- Câu 18:** Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị  $y = x^3 - x^2 + 1$  và  $y = x^2 + 1$ . Tìm P.  
 A.  $P = 0$ .                                      B.  $P = 2$ .                                      C.  $P = 1$ .                                      D.  $P = 3$ .
- Câu 19:** (Đề Tham Khảo 2017) Cho hàm số  $y = x^3 - 3x$  có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.  
 A. 2                                      B. 3                                      C. 1                                      D. 0
- Câu 20:** (Mã 102-2023) Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^2 + 2x$  và trục hoành là  
 A. 3.                                      B. 2.                                      C. 1.                                      D. 0.
- Câu 21:** (Mã 101-2023) Biết đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{-x+5}{x-2}$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ là  $x_1, x_2$ . Giá trị  $x_1 + x_2$  bằng  
 A. -1.                                      B. 3.                                      C. 2.                                      D. 1.
- Câu 22:** Biết rằng đường thẳng  $y = x + 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x + 4$  tại điểm duy nhất, kí hiệu  $(x_0; y_0)$  là tọa độ của điểm đó. Tìm  $y_0$ .  
 A.  $y_0 = 1$ .                                      B.  $y_0 = 3$ .                                      C.  $y_0 = -2$ .                                      D.  $y_0 = 4$ .
- Câu 23:** đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?  
 A.  $y = \frac{x-1}{x-3}$ .                                      B.  $y = \frac{x+1}{x+4}$ .                                      C.  $y = \frac{x-1}{x+2}$ .                                      D.  $y = \frac{2x+1}{x+5}$ .
- Câu 24:** Số giao điểm của đường cong  $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$  và đường thẳng  $y = 1 - x$  là  
 A. 1                                      B. 2                                      C. 3                                      D. 0
- Câu 25:** (Đề Tham Khảo 2017) Cho hàm số  $y = x^3 - 3x$  có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.  
 A. 2                                      B. 3                                      C. 1                                      D. 0



➤ Tiếp tuyến

- Câu 26:** Cho hàm số  $y = x^4 + 2x^2 + 1$  có đồ thị  $(C)$ . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  tại điểm  $M(1;4)$  là  
 A.  $y = 8x - 4$ .                      B.  $y = x + 3$ .                      C.  $y = -8x + 12$ .                      D.  $y = 8x + 4$ .
- Câu 27:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+3}{x-2}$  tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là  
 A.  $y = 7x + 13$ .                      B.  $y = -7x + 30$ .                      C.  $y = 3x + 9$ .                      D.  $y = -x - 2$ .
- Câu 28:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x$  tại điểm có hoành độ bằng 2.  
 A.  $y = -9x + 16$ .                      B.  $y = -9x + 20$ .                      C.  $y = 9x - 20$ .                      D.  $y = 9x - 16$ .
- Câu 29:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x - 2$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại giao điểm của  $(C)$  với trục tung.  
 A.  $y = -2x + 1$ .                      B.  $y = 2x + 1$ .                      C.  $y = 3x - 2$ .                      D.  $y = -3x - 2$ .
- Câu 30:** Có bao nhiêu điểm  $M$  thuộc đồ thị hàm số  $f(x) = x^3 + 1$  sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $f(x)$  tại  $M$  song song với đường thẳng  $d: y = 3x - 1$ ?  
 A. 3.    B. 2.    C. 0.    D. 1.
- Câu 31:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 3$  có đồ thị  $(C)$ . Số tiếp tuyến của  $(C)$  vuông góc với đường thẳng  $y = \frac{1}{9}x + 2017$  là  
 A. 2.    B. 1.    C. 0.    D. 3.
- Câu 32:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ,  $(C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  song song với đường thẳng  $y = -3x$  có phương trình là  
 A.  $y = -3x - 1; y = -3x + 11$ .    B.  $y = -3x + 10; y = -3x - 4$ .  
 C.  $y = -3x + 5; y = -3x - 5$ .    D.  $y = -3x + 2; y = -3x - 2$ .
- Câu 33:** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+1}$   $(C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  vuông góc với đường thẳng  $x + 3y + 2 = 0$  tại điểm có hoành độ  
 A.  $x = 0$ .    B.  $x = -2$ .    C.  $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ .    D.  $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ .
- Câu 34:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  biết tiếp tuyến song song với đường thẳng  $d: 9x - y + 7 = 0$  là  
 A.  $y = 9x + 25$ .                      B.  $y = -9x - 25$ .                      C.  $y = 9x - 25$                       D.  $y = -9x + 25$ .
- Câu 35:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$ , biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng  $x - 3y + 6 = 0$ .  
 A.  $y = \frac{1}{3}x - 1$ .                      B.  $y = \frac{1}{3}x + 1$ .                      C.  $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ .                      D.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ .



**Câu 36:** Cho hàm số  $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$  có đồ thị là  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  biết tiếp tuyến có hệ số góc  $k = -9$ .

- A.  $y + 16 = -9(x + 3)$ .    B.  $y = -9(x + 3)$ .    C.  $y - 16 = -9(x - 3)$ .    D.  $y - 16 = -9(x + 3)$ .

**Câu 37:** Tìm điểm  $M$  có hoành độ âm trên đồ thị  $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$  sao cho tiếp tuyến tại  $M$  vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ .

- A.  $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$ .    B.  $M(-2; 0)$ .    C.  $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$ .    D.  $M(-2; -4)$ .

**Câu 38:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$  có đồ thị  $(C)$ . Tiếp tuyến của  $(C)$  có hệ số góc nhỏ nhất là bao nhiêu?

- A. 4.    B. 3.    C. 1.    D. 2.

**Câu 39:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$  có đồ thị  $(C)$ . Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị  $(C)$  là.

- A. 1    B. 6    C. 12    D. 9

**Câu 40:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ . Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(-1; 0)$ ?

- A. 1.    B. 2.    C. 3.    D. 4.

**2. Câu hỏi đúng sai.** (Trong mỗi ý (a), (b), (c), (d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai ).

**Câu 41:** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$  có đồ thị là  $(C)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đồ thị $(C)$ có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đồ thị $(C)$ nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Đồ thị $(C)$ có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với $Oy$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Đồ thị không cắt trục $Ox$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 42:** Cho hàm số  $y = f(x) = -x^3 - x + 2$

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Hàm số có 2 điểm cực trị	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ bằng 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Số nghiệm của phương trình: $ x^3 + x - 2  = m$ khi $m > 0$ là 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



**Câu 43:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị là (C)

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Điểm đối xứng của đồ thị (C) có tọa độ là (1;0)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Có 4 giá trị nguyên của $m$ để phương trình $x^3 - 3x^2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 3 giá trị nguyên của $m$ để phương trình: $- x ^3 + 3x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 44:** Cho hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$ , trong đó  $m$  là tham số.

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Với $m = 0$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Với $m = 0$ thì đồ thị hàm số đối có điểm đối xứng là $I(-1;2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $m \leq 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Để đồ thị hàm số đã cho cắt $Ox$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng thì $m = a$ , khi đó $a$ thỏa $\log_2(a+2) = 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 45:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$  có đồ thị là đường cong (C)

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng $-4$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;1)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$ đi qua điểm $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Phương trình $x^2 + 3x + 3 = m x + 2 $ có 4 nghiệm phân biệt khi $m > 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

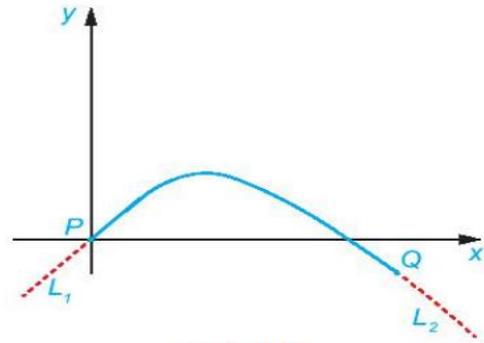
**Câu 46:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  có đồ thị là (C)

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đồ thị (C) đối xứng qua điểm $I(a;b)$ khi đó $a+b=3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=3$ đi qua điểm $A(0;23)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	$y = -3x + 5$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 47:** Cho hàm số  $y = 2x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x + 1$  (1).

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 1$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm phân biệt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(0;1)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 9x - 3$ đi qua điểm $B(1;5)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có 1 giá trị nguyên của tham số $m$ để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

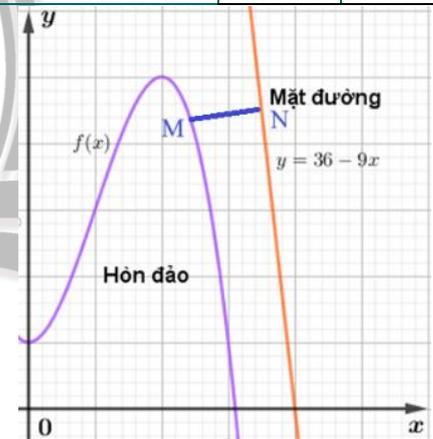
**Câu 48:** Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một đường cong có dạng parabol, đoạn dốc lên  $L_1$  và đoạn dốc xuống  $L_2$  là phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là  $0,5$  và  $-0,75$ . Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột,  $L_1$  và  $L_2$  phải có những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp  $P$  và  $Q$  (H.9.6b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại  $P$  và phương trình của parabol là  $y = ax^2 + bx + c$ , trong đó  $x$  tính bằng mét. Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau



Hình 9.6b

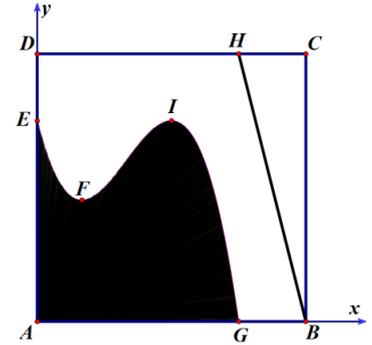
Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc tọa độ $(0;0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị $b = 0,5$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Nếu khoảng cách theo phương ngang giữa $P$ và $Q$ là $40\text{ m}$ thì $a = -\frac{1}{64}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nếu khoảng cách theo phương ngang giữa $P$ và $Q$ là $40\text{ m}$ thì độ chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp $P$ và $Q$ bằng $10\text{ m}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 49:** Một hòn đảo nằm trong một hồ nước. Biết rằng đường cong tạo nên hòn đảo được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ  $Oxy$  là một phần của đồ thị hàm số bậc ba  $(C): y = f(x)$  (với đơn vị của hệ trục là  $100\text{ m}$ ). Mặt đường chạy trên một đường thẳng có phương trình  $(d): y = 36 - 9x$ . Người ta muốn làm một cây cầu có dạng một đoạn thẳng  $MN$  nối từ hòn đảo ra mặt đường.



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Điểm cực đại, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $f(x)$ lần lượt là $(2;5)$ và $(0;1)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Phương trình của đường cong là $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Để làm được cây cầu có độ dài ngắn nhất, tại điểm $M(x_0; y_0), x_0 > 0$ nằm trên hòn đảo người ta dựng $MN$ vuông góc với đường thẳng $(d)$ . Khi đó $x_0 + y_0 = 3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Độ dài ngắn nhất của cây cầu (làm tròn đến hàng phần chục) là $88,3\text{ m}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 50:** Ông An có một mảnh đất hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = 12m$ . Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (phần tô đậm) và một lối đi là đoạn thẳng  $HB$ . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại  $A$  như hình vẽ, độ dài đơn vị là  $1m$ , thì đường cong  $EFIG$  là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có  $F$  là điểm cực tiểu và  $I$  là điểm cực đại. Biết  $CH = DE = GB = 3m$  và các điểm  $F, I$  cách cạnh  $AD$  lần lượt là  $2m$  và  $6m$ .



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Phương trình của đường thẳng $HB$ là $y = -4x + 48$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x+2)(x+6)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng $HB$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng $2,56m$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh trả lời điền kết quả vào ô trống)**

➤ **Tổng hợp tương giao**

**Câu 51:** Tìm được trên đồ thị  $(C): y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$  hai điểm  $M(a;b)$  và  $N(c;d)$  có khoảng cách đến đường thẳng  $3x + y + 6 = 0$  nhỏ nhất. Khi đó  $a + b + c + d = ?$

Trả lời:

**Câu 52:** Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để đường thẳng  $y = -x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho  $AB = \sqrt{6}$ .

Trả lời:

**Câu 53:** Cho hàm số  $y = \frac{3x + 2}{x + 2}$ ,  $(C)$  và đường thẳng  $d: y = ax + 2b - 4$ . Đường thẳng  $d$  cắt  $(C)$  tại  $A, B$  đối xứng nhau qua gốc tọa độ  $O$ . Tính  $T = 2a + b$ ?

Trả lời:

**Câu 54:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số thực  $m$  để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

Trả lời:

**Câu 55:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2$  cắt đường thẳng  $y = m$  tại ba điểm phân biệt.

Trả lời:

**Câu 56:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = mx - m + 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$  tại ba điểm  $A, B, C$  phân biệt sao  $AB = BC$

**Trả lời :**

**Câu 57:** Tìm tích các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4$  cắt các trục tọa độ  $Ox, Oy$  lần lượt tại  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng 8 ?

**Trả lời :**

**Câu 58:** Đường thẳng  $d$  có phương trình  $y = x + 4$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$  tại 3 điểm phân biệt  $A(0; 4), B$  và  $C$  sao cho diện tích của tam giác  $MBC$  bằng 4, với  $M(1; 3)$ . Tìm giá trị của  $m$  ?

**Trả lời :**

**Câu 59:** Tìm giá trị lớn nhất của  $m$  để đường thẳng  $(d): y = x - m + 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2(m - 2)x^2 + (8 - 5m)x + m - 5$  tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn điều kiện  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20$  ?

**Trả lời :**

**Câu 60:** Tìm  $m$  để đồ thị  $(C)$  của  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  và đường thẳng  $y = mx + m$  cắt nhau tại 3 điểm phân biệt  $A(-1; 0), B, C$  sao cho  $\Delta OBC$  có diện tích bằng 64.

**Trả lời :**

**Câu 61:** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 3mx + m - 1$ . Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục  $Ox$  có diện tích phần nằm phía trên trục  $Ox$  và phần nằm dưới trục  $Ox$  bằng nhau. Giá trị của  $20m$  là?

**Trả lời :**

**Câu 62:** Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x-2}$ . Khi đó độ dài đoạn  $AB$  ngắn nhất bằng

**Trả lời :**

**Câu 63:** Cho là đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ . Tìm  $k$  để đường thẳng  $d: y = kx + 2k + 1$  cắt tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho khoảng cách từ  $A$  đến trục hoành bằng khoảng cách từ  $B$  đến trục hoành.

**Trả lời :**

**Câu 64:** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  ( $C$ ) và đường thẳng  $d: y = -x + m$ . Gọi  $S$  là tập các số thực  $m$  để đường thẳng  $d$  cắt đồ thị ( $C$ ) tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  ( $O$  là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng  $2\sqrt{2}$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng

**Trả lời:**

**Câu 65:** Cho hàm số  $y = \frac{x+3}{x+1}$  có đồ thị ( $C$ ) và đường thẳng  $d: y = x - m$ , với  $m$  là tham số thực. Biết rằng đường thẳng  $d$  cắt ( $C$ ) tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$  sao cho điểm  $G(2; -2)$  là trọng tâm của tam giác  $OAB$  ( $O$  là gốc tọa độ). Tìm giá trị của  $m$  ?

**Trả lời:**

**Câu 66:** Để đường thẳng  $d: y = -3x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho trọng tâm  $\Delta OAB$  thuộc đường thẳng  $\Delta: x - 2y - 2 = 0$ , với  $O$  là gốc tọa độ. Tìm giá  $5m$  ?

**Trả lời:**

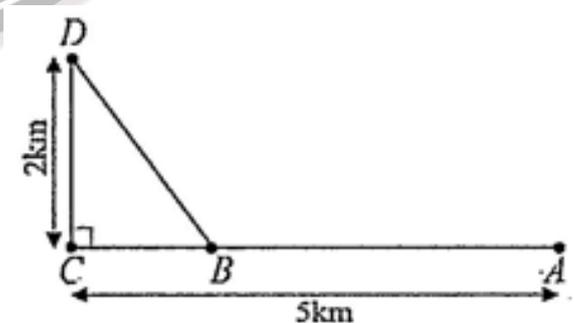
**Câu 67:** Biết rằng đường thẳng  $y = 2x + 2m$  luôn cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+3}{x+1}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  với mọi giá trị của tham số  $m$ . Tìm hoành độ trung điểm của  $AB$  ?

**Trả lời:**

**Câu 68:** Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = 2x + m$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x+3}{x+1}$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho độ dài  $AB$  là nhỏ nhất.

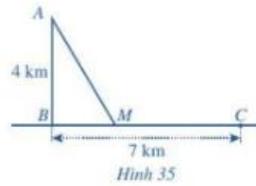
**Trả lời:**

**Câu 69:** Một đường dây điện được nối từ nhà máy điện trên đất liền ở vị trí  $A$  đến một hòn đảo ở vị trí  $D$ . Khoảng cách ngắn nhất từ  $D$  vào đất liền là  $DC = 2\text{km}$ , khoảng cách từ  $A$  đến  $C$  là  $5\text{km}$  (như hình vẽ). Người ta chọn một vị trí (điểm  $B$ ) nằm giữa  $A$  và  $C$  để mắc đường dây điện đi từ  $A$  đến  $B$ , rồi từ  $B$  đến  $D$  như hình vẽ bên dưới. Chi phí mỗi km dây điện trên đất liền là  $3000\text{USD}$ , mỗi km dây điện ngầm dưới biển là  $5000\text{USD}$ . Hỏi điểm  $B$  phải cách điểm  $A$  bao nhiêu km, biết tổng chi phí là  $23000\text{USD}$  (đây cũng là chi phí thấp nhất để mắc dây điện mà người ta tính toán được)?



**Trả lời:**

**Câu 70:** Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí  $A$  cách bờ biển một khoảng cách  $AB = 4\text{ km}$ . Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí  $C$  cách  $B$  một khoảng là  $7\text{ km}$ . Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ  $A$  đến vị trí  $M$  trên bờ biển với vận tốc  $3\text{ km/h}$  rồi đi bộ đến  $C$  với vận tốc  $5\text{ km/h}$  như Hình 35. Tính khoảng cách từ vị trí  $B$  đến  $M$ , biết thời gian người đó đi từ  $A$  đến  $C$  là 148 phút.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

**Trả lời :**

**Câu 71:** Anh Nam có một cái ao với diện tích  $50\text{ m}^2$  để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua anh nuôi với mật độ  $40\text{ con/m}^2$  và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi  $8\text{ con/m}^2$  thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm  $0,5\text{ kg}$ . Để tổng năng suất bằng  $3200\text{ kg}$  thì vụ tới anh Nam nên mua thêm bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

**Trả lời :**

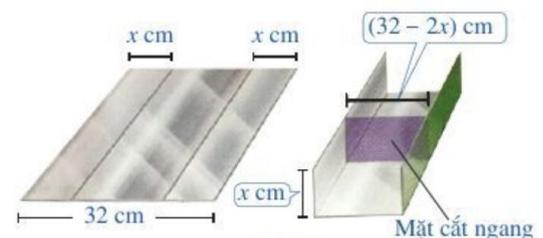
**Câu 72:** [THPT QG 2025] Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 4500$ ) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là  $F(x) = 300x - 0,01x^2$  (nghìn đồng) và chi phí sản xuất bình quân trên một sản phẩm là  $G(x) = \frac{30000}{x} + 200$  (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

**Trả lời :**

**Câu 73:** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 180 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 180$ ) thì giá bán của mỗi sản phẩm là  $f(x) = 35840 - 192x$  (nghìn đồng) và chi phí sản xuất bình quân trên một sản phẩm là  $g(x) = 25,6x^2 - 153,6x + 3072 + \frac{19200}{x}$  (nghìn đồng). Biết rằng mức thuế trên một sản phẩm là 512 nghìn đồng. Doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất  $a$  sản phẩm và nhiều nhất  $b$  sản phẩm thì lợi nhuận thu được lớn hơn 350 triệu đồng. Tìm  $a+b$

**Trả lời :**

**Câu 74:** Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32cm thành một rãnh nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình bên. Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng  $120\text{ cm}^2$ . Rãnh nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu cm?



**Trả lời :**

**Câu 75:** Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau: 10 khách đầu tiên có giá 800 000 đồng/ người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng/ người cho toàn bộ hành khách. Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự có chuyến đi là 700 000 đồng/ người.

Trả lời :

### ⇒ Tổng hợp tiếp tuyến

**Câu 76:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $S$  là tập các giá trị của  $m$  sao cho đồ thị  $(C)$  có đúng một tiếp tuyến song song với trục  $Ox$ . Tổng các phần tử của  $S$  là

Trả lời :

**Câu 77:** Tìm tổng giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = 6x + m + 1$  là tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 + 3x - 1$ ?

Trả lời :

**Câu 78:** Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{1-x}$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $A(m;1)$ . Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị của  $m$  để có đúng một tiếp tuyến của  $(C)$  đi qua  $A$ . Tổng bình phương các phần tử của  $S$  là  $T$ . Tính  $40T$  ?

Trả lời :

**Câu 79:** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$ . Có bao nhiêu tiếp tuyến của  $(C)$  cắt trục  $Ox, Oy$  lần lượt tại hai điểm  $A$  và  $B$  thỏa mãn điều kiện  $OA = 4OB$ .

Trả lời :

**Câu 80:** Đường thẳng  $d$  là tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+3}{x+2}$  chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân. Tính khoảng cách từ điểm  $O$  đến đường thẳng  $d$  ? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời :

**Câu 81:** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + 1$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $A(1;m)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để qua  $A$  có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị  $(C)$ . Tìm số phần tử của  $S$  ?

Trả lời :

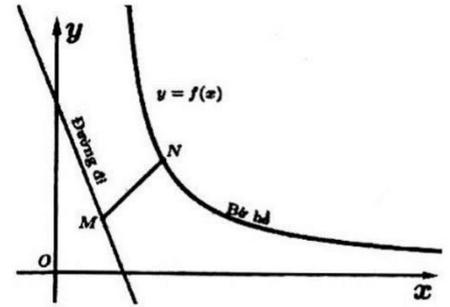
**Câu 82:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn  $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$ . Gọi  $d$  khoảng cách từ điểm  $O$  đến đường thẳng tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại điểm có hoành độ  $x=1$ . Tìm  $\sqrt{17d}$  ?

Trả lời :

**Câu 83:** (Đề Tham Khảo 2018) Cho hàm số  $y = \frac{-x+2}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $A(a;1)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $a$  để có đúng một tiếp tuyến của  $(C)$  đi qua  $A$ . Tổng tất cả các giá trị các phần tử của  $S$  ?

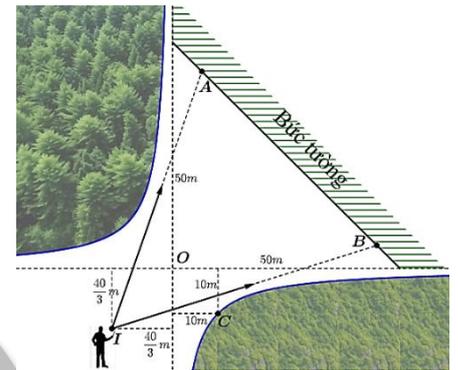
Trả lời :

**Câu 84:** Trong công viên có một hồ nước và một đường đi trải nhựa. Thiết lập hệ trục  $Oxy$  như hình vẽ, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi là một nhánh của đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  với  $x > 2$ , đồng thời đường đi khi đó ứng với đường thẳng  $d: y = 4 - 3x$ . Kiến trúc sư muốn làm một lối đi từ điểm  $M$  trên đường thẳng  $d$  đến điểm  $N$  trên bờ hồ. Khoảng cách ngắn nhất của lối đi  $MN$  này? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)



**Trả lời:**

**Câu 85:** Bộ phim Avatar (2009) hiện vẫn là phim ăn khách nhất mọi thời đại với doanh thu 2,9 tỷ đô. Trong một lần đạo diễn James Cameron đến phim trường, ông đứng ở vị trí  $I$  để quan sát bức tường xa xa (bức tường này được trải 1 tấm màn để tạo hiệu ứng cho bầu trời), đoạn  $AB$  được xem là khoảng quan sát của ông đối với đường chân tường. Biết rằng tại phim trường thì người ta tạo hai đường kẻ  $a, b$  vuông góc nhau tại  $O$  để tiện cho việc đo đạc. Hai bên phim trường là những ngọn núi nhân tạo được bao quanh bởi hai đường hypebol nhận  $a, b$  làm các đường tiệm cận. Vị trí  $I$  mà đạo diễn đứng cách mỗi đường  $a, b$  khoảng  $\frac{40}{3} m$ ; vị trí  $C$  cách mỗi đường  $a, b$  khoảng  $10 m$ . Đường chân tường giao nhau với  $a, b$  tại các điểm cách  $O$  một khoảng  $50 m$ . Tìm khoảng quan sát lớn nhất của đạo diễn đối với đường chân tường theo đơn vị mét và làm tròn đến hàng phần chục.

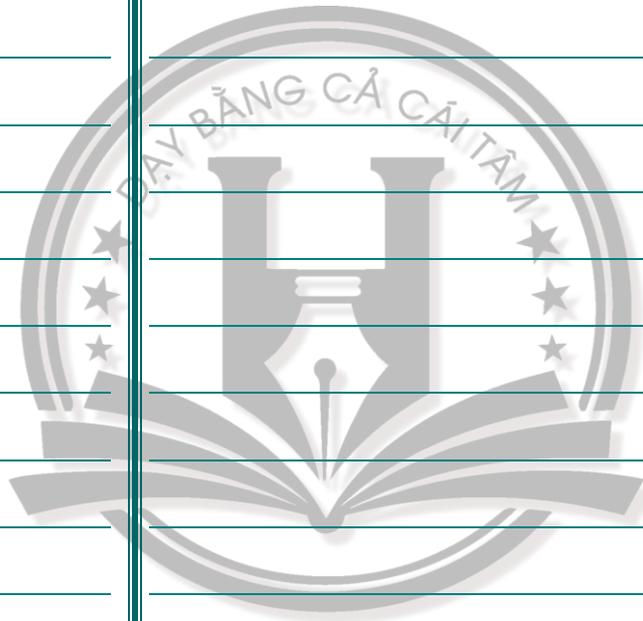


**Trả lời:**



Hãy sống một cách chân thành và tuyệt vời nhất, dù người khác nói gì đi nữa thì cứ làm theo điều con tìm thấy, đừng quay đầu, đừng nhìn ngó lung tung. Người không bằng bạn mới dị nghị về bạn; người tài giỏi hơn bạn còn đang mãi làm việc, căn bản chẳng hơi đâu mà ngó ngang đến bạn







MÓN QUÀ TẠI LỚP

Phép toán cơ bản vectơ

**Ví dụ 1:** Cho hình tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ .

**SOLUTION**

**Ví dụ 2:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $AB'D'$

a) Tìm vectơ  $\vec{CC'} + \vec{BA} + \vec{D'A'}$

b) Chứng minh  $\vec{BC} + \vec{DC} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$

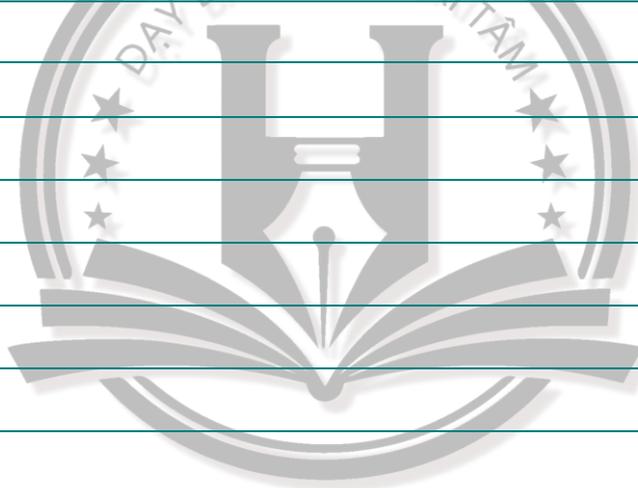
c) Chứng minh  $\vec{BB'} + \vec{AD} + \vec{CD} = \vec{BD'}$

d) Chứng minh  $\vec{BB'} - \vec{C'B'} + \vec{D'C'} = \vec{AC'}$

e) Chứng minh  $\vec{A'C} = 3\vec{A'G}$

f) Tính độ dài  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{AA'}$

**SOLUTION**





**Ví dụ 3:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ,  $G$  là trung điểm của  $MN$  và  $G_1$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Chứng minh các hệ thức sau:

a)  $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$

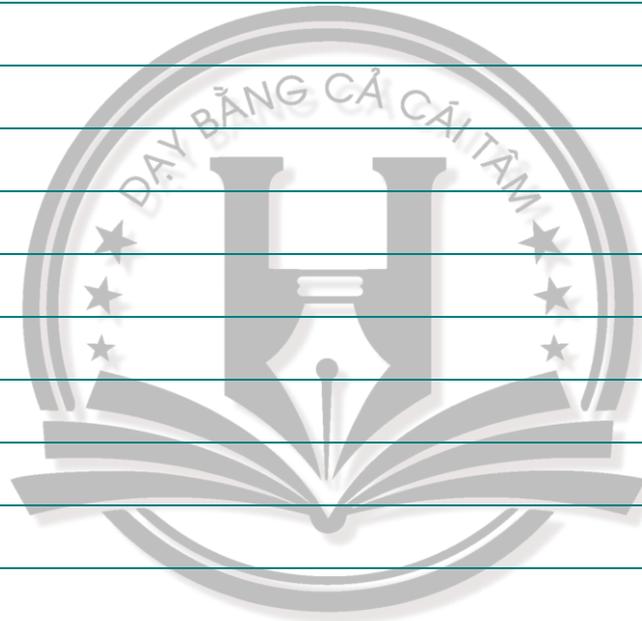
b)  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD}) = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$

c)  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

d)  $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} + \vec{ND} = 4\vec{NG}, \forall N$ .

e)  $A, G, G_1$  thẳng hàng

**SOLUTION**







**Ví dụ 6:** Cho tứ diện  $ABCD$  có trung tuyến qua đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$  và  $AN$ . Lấy điểm  $M$  trên  $AN$  sao cho  $\frac{AM}{MN} = \frac{3}{7}$ . Phân tích vectơ  $\overrightarrow{DM}$  theo  $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ .

SOLUTION

Tích vô hướng và ứng dụng

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

a) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ .      b) Tính góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ .

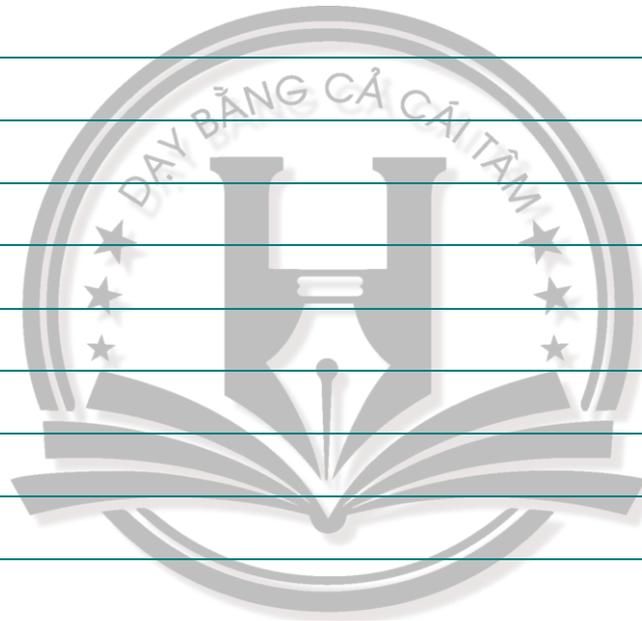
SOLUTION





**Ví dụ 10:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $a$  và các cạnh bên đều bằng  $a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $SD$ . Số đo của góc  $(MN, SC)$  bằng:

**SOLUTION**



**QUICK TIPS MCQ MASTERY**

**1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án).**

**⇒ Phép toán cơ bản vectơ**

**Câu 1:** Cho hình tứ diện  $ABCD$  có trọng tâm  $G$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ .  
 B.  $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$ .  
 C.  $\vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$ .  
 D.  $\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$ .

**Câu 2:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A.  $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC}$ .  
 B.  $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BC}$ .  
 C.  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{DB} - \vec{DC}$ .  
 D.  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CD} + \vec{BC}$ .

**Câu 3:** Cho hình chóp  $S.ABC$ , gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Ta có

- A.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = \vec{SG}$ .  
 B.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 2\vec{SG}$ .  
 C.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 3\vec{SG}$ .  
 D.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 4\vec{SG}$ .

**Câu 4:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $P, Q$  là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Chọn khẳng định **đúng**?

- A.  $\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{AD})$ .  
 B.  $\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{AD})$ .  
 C.  $\vec{PQ} = \vec{BC} + \vec{AD}$ .  
 D.  $\vec{PQ} = \frac{1}{4}(\vec{BC} + \vec{AD})$ .

**Câu 5:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $G$  là trung điểm của  $MN$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\vec{GM} + \vec{GN} = \vec{0}$ .  
 B.  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$ .  
 C.  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GD}$ .  
 D.  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ .

**Câu 6:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Đặt  $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{c}$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $\vec{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$ .  
 B.  $\vec{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .  
 C.  $\vec{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$ .  
 D.  $\vec{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$ .

**Câu 7:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Trên các cạnh  $AD$  và  $BC$  lần lượt lấy các điểm  $P, Q$  sao cho  $3\vec{AP} = 2\vec{AD}, 3\vec{BQ} = 2\vec{BC}$ . Các vectơ  $\vec{MP}, \vec{MQ}, \vec{MN}$  đồng phẳng khi chúng thỏa mãn đẳng thức vectơ nào sau đây:

- A.  $\vec{MN} = \frac{3}{4}\vec{MP} + \frac{3}{4}\vec{MQ}$ .  
 B.  $\vec{MQ} = \frac{1}{2}\vec{MN} + \frac{1}{2}\vec{MP}$ .  
 C.  $\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{MP} + \frac{2}{3}\vec{MQ}$ .  
 D.  $\vec{MN} = \frac{3}{2}\vec{MP} + \frac{3}{2}\vec{MQ}$ .



**Câu 8:** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC$  và  $BD$  của tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm đoạn  $MN$  và  $P$  là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vectơ:  $\vec{PI} = k(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$ .

- A.  $k = \frac{1}{4}$ .                      B.  $k = 2$ .                      C.  $k = 4$ .                      D.  $k = \frac{1}{2}$ .

**Câu 9:** Cho tứ diện đều  $ABCD$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Đặt  $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}, \vec{AD} = \vec{d}$ . Phân tích véc tơ  $\vec{MG}$  theo  $\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}$ .

- A.  $\vec{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$ .                      B.  $\vec{MG} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$ .  
C.  $\vec{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$ .                      D.  $\vec{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$ .

**Câu 10:** Cho tứ diện  $ABCD$ .  $M$  và  $N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Bộ ba vectơ nào dưới đây đồng phẳng?

- A.  $\vec{BC}, \vec{BD}, \vec{AD}$ .                      B.  $\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{MN}$ .  
C.  $\vec{BC}, \vec{AD}, \vec{MN}$ .                      D.  $\vec{AC}, \vec{DC}, \vec{MA}$ .

**Câu 11:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AD$  và  $BC$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $\vec{AM} = 3\vec{MD}$ ,  $\vec{NB} = -3\vec{NC}$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Các vectơ  $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.                      B. Các vectơ  $\vec{AB}, \vec{PQ}, \vec{MN}$  đồng phẳng.  
C. Các vectơ  $\vec{PQ}, \vec{DC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.                      D. Các vectơ  $\vec{BD}, \vec{AC}, \vec{MN}$  đồng phẳng.

**Câu 12:** Cho tứ diện  $ABCD$ .  $M$  là điểm trên đoạn  $AB$  và  $MB = 2MA$ .  $N$  là điểm trên đường thẳng  $CD$  mà  $\vec{CN} = k\vec{CD}$ . Nếu  $\vec{MN}, \vec{AD}, \vec{BC}$  đồng phẳng thì giá trị của  $k$  là:

- A.  $k = \frac{2}{3}$ .                      B.  $k = \frac{3}{2}$ .                      C.  $k = \frac{4}{3}$ .                      D.  $k = \frac{1}{2}$ .

**Câu 13:** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{AC}_1 = \vec{AA}_1 + \vec{AD}$ .                      B.  $\vec{AC}_1 = \vec{AA}_1 + \vec{AB}$ .  
C.  $\vec{AC}_1 = \vec{AB} + \vec{AD}$ .                      D.  $\vec{AC}_1 = \vec{AA}_1 + \vec{AD} + \vec{AB}$ .

**Câu 14:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biểu thức nào sau đây đúng:

- A.  $\vec{A'D} = \vec{A'B} + \vec{A'C}$ .                      B.  $\vec{AB}' = \vec{AB} + \vec{AA}' + \vec{AD}$ .  
C.  $\vec{AC}' = \vec{AB} + \vec{AA}' + \vec{AD}$ .                      D.  $\vec{AD}' = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC}'$ .

**Câu 15:** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Gọi  $O$  là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

- A.  $\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1)$ .                      B.  $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1)$ .  
C.  $\vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1)$ .                      D.  $\vec{AO} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1)$ .



**Câu 16:** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với tâm  $O$ . Chọn đẳng thức sai.

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$ .                      B.  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$ .                      D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{OC_1}$ .

**Câu 17:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ .    B.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .    C.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .    D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Câu 18:** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  với  $M = CD_1 \cap C_1D$ . Khi đó:

- A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$                       B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$   
 C.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$                       D.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

**Câu 19:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$ ,  $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$ ,  $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ .                      B.  $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ .  
 C.  $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ .                      D.  $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ .

**Câu 20:** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Các véc tơ  $\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}$  đồng phẳng.                      B. Các véc tơ  $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}$  đồng phẳng.  
 C. Các véc tơ  $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}$  đồng phẳng.                      D. Các véc tơ  $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}$  đồng phẳng.

**Câu 21:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  và  $K$  lần lượt là tâm của hình bình hành  $ABB'A'$  và  $BCC'B'$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Bốn điểm  $I, K, C, A$  đồng phẳng.                      B.  $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$ .  
 C. Ba vectơ  $\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{IK}; \overrightarrow{B'C'}$  không đồng phẳng.                      D.  $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$ .

**Câu 22:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Bộ 3 vectơ nào sau đây đồng phẳng:

- A.  $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{CD'}, \overrightarrow{A'B}$ .    B.  $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ .    C.  $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{C'D}, \overrightarrow{A'B'}$ .    D.  $\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}$ .

**Câu 23:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$ .                      B.  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$ .  
 C.  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ .                      D.  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$ .

**Câu 24:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Đặt  $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ ;  $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ ;  $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ ;  $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .    B.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ .    C.  $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ .    D.  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$ .

**Câu 25:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $G$  là điểm thỏa mãn:  $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?  
 A.  $G, S$  không thẳng hàng.    B.  $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$ .    C.  $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$ .    D.  $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$ .

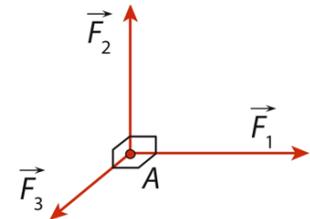
**Câu 26:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$ . Trong các biểu thức véctơ sau đây, biểu thức nào **đúng**.  
 A.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ .    B.  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ .    C.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .    D.  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .

**Câu 27:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Hãy phân tích (biểu thị) vectơ  $\overrightarrow{BC'}$  qua các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .  
 A.  $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$     B.  $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$     C.  $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$     D.  $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

**Câu 28:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  với  $G$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AG}$  bằng  
 A.  $\vec{a} + \frac{1}{6}(\vec{b} + \vec{c})$ .    B.  $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$ .    C.  $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ .    D.  $\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})$

**Câu 29:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi  $I$  là điểm thuộc đường thẳng  $CC'$  sao cho  $C'I = 3C'C$ ,  $G$  điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$ . Biểu diễn vectơ  $\overrightarrow{IG}$  qua các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?  
 A.  $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$ .    B.  $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$ .  
 C.  $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b})$ .    D.  $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - 2\vec{a}\right)$

**Câu 30:** Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có chung điểm đặt  $A$  và có giá vuông góc với nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt là  $10N, 8N$  và  $5N$ , xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).  
 A. 13, 7.    B. 12, 7.  
 C. 14, 7.    D. 11, 7.



### ➤ Tích vô hướng và ứng dụng

**Câu 31:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$   
 A.  $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0$ .    B.  $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 1$ .  
 C.  $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{2}$ .    D.  $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 32:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết đáy  $ABCD$  là hình vuông. Tính góc giữa  $A'C$  và  $BD$ .  
 A.  $90^0$ .    B.  $30^0$ .    C.  $60^0$ .    D.  $45^0$ .

**Câu 33:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Giá trị tích vô hướng  $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$  bằng

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .                      B.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $\frac{3a^2}{2}$ .

**Câu 34:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $BC = a\sqrt{2}$ , các cạnh còn lại đều bằng  $a$ . Góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{SB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  bằng

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $120^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

**Câu 35:** Cho hình chóp  $O.ABC$  có ba cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = OB = OC = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Góc hợp bởi hai vectơ  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{OM}$  bằng

- A.  $120^\circ$ .                      B.  $150^\circ$ .                      C.  $135^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .

**Câu 36:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và góc  $CAB = 30^\circ$ . Giá trị  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC})$  gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 0,83.                      B. 0,37.                      C. 0,45.                      D. 0,71.

**Câu 37:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = AC$ ,  $SAC = SAB$ . Tính số đo của góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{SA}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

- A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

**Câu 38:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng  $a$  và  $ABCD$  là hình vuông. Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Giá trị  $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$  bằng

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .                      B.  $-\frac{a^2}{2}$ .                      C.  $\frac{a^2}{3}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$ .

**Câu 39:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ , tính  $|\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'})|$

- A.  $\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 40:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , tam giác  $A'BC$  đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với  $(ABC)$ .  $M$  là trung điểm cạnh  $CC'$ . Tính cosin góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AA'}$  và  $\overrightarrow{BM}$ .

- A.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$ .                      B.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$ .                      C.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$ .                      D.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$ .

**2. Câu hỏi đúng sai.** (Trong mỗi ý (a), (b), (c), (d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai ).

**Câu 41:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{D'C} = a^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{B'C'}) = 45^\circ$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}) = 120^\circ$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 42:** Cho hình tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ,  $I$  là trung điểm của đoạn  $MN$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 43:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , có đáy  $ABCD$  là hình bình hành.

Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\vec{SA} + \vec{SD} = \vec{SB} + \vec{SC}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

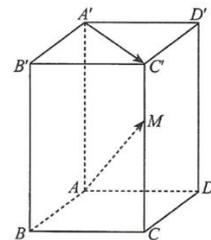
**Câu 44:** Trong không gian, cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Các vectơ $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}'$ , $\vec{AB} + \vec{AD}$ , $\vec{CB} - \vec{CA}$ không đồng phẳng	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Các vectơ $\vec{AA}'$ , $\vec{BB}'$ , $\vec{CC}'$ không đồng phẳng.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Các vectơ $\vec{AB} + \vec{AD}$ , $\vec{C'B'} + \vec{C'D'}$ , $\vec{A'C}$ không đồng phẳng	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Các vectơ $\vec{AB'} + \vec{AD'}$ , $\vec{AB} + \vec{AA}'$ , $\vec{AD} + \vec{AA}'$ đồng phẳng	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 45:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  và  $K$  lần lượt là tâm của hình bình hành  $ABB'A'$  và  $BCC'B'$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{A'C'}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Bốn điểm $I, K, C, A$ đồng phẳng.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\vec{BD} + 2\vec{IK} = 2\vec{BC}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Ba vectơ $\vec{BD}$ ; $\vec{IK}$ ; $\vec{B'C'}$ không đồng phẳng	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 46:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB=1$ ,  $AD=2$ ,  $AA'=3$ . Gọi  $M$  là một điểm trên đoạn  $CC'$  sao cho  $CM = 2MC'$  (Hình bên).



Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\vec{AA}' = \frac{3}{2}\vec{CM}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$\cos(\vec{AM}, \vec{A'C'}) = \frac{2}{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AA}'$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$\vec{AM} \cdot \vec{B'D} = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 47:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA=a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Góc giữa hai vectơ $\vec{SB}$ và $\vec{CD}$ bằng $45^\circ$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	$\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -a^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\vec{AM} \cdot \vec{BD} = -\frac{a^2}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Góc giữa hai vectơ $\vec{AM}$ và $\vec{BD}$ bằng $60^\circ$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



**Câu 48:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng 2. Cạnh bên  $SA=1$  và vuông góc với đáy. Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{SB}$  và  $\overrightarrow{AM}$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai		Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AM} = -2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$\cos \alpha = \frac{2}{5}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 49:** Cho tứ diện đều  $ABCD$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ ,  $N$  là trung điểm của  $AD$ . Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi  $\overrightarrow{BM}$  và  $\overrightarrow{CN}$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai		Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BM = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{a^2}{8}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$\cos \alpha = \frac{1}{6}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 50:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và tam giác $SAB$ đều	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ và $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh trả lời điền kết quả vào ô trống)

#### ➔ Các bài toán cơ bản

**Câu 51:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có các cạnh  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc và  $SA = SB = SC = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{SI}; \overrightarrow{BC}$

Trả lời :

**Câu 52:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD, BAC = BAD = 60^\circ, CAD = 90^\circ$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Góc giữa cặp véc tơ  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IJ}$  bằng bao nhiêu độ?

Trả lời :

**Câu 53:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = BD = a, AB = CD = 2a, AD = BC = a\sqrt{6}$ . Khi đó góc giữa hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$  bằng bao nhiêu độ

Trả lời :

**Câu 54:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, CD$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{MN}$ ?

Trả lời :

**Câu 55:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Cosin góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CI$ , với  $I$  là trung điểm của  $AD$  bằng  $\frac{\sqrt{a}}{b}$ . Tính  $b-a$

**Trả lời:**

**Câu 56:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = a$ ,  $SB = 2a$ ,  $SC = 3a$ ,  $ASB = BSC = 60^\circ$ ,  $CSA = 90^\circ$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$ . Khi đó  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$ . Tìm  $a$ ?

**Trả lời:**

**Câu 57:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ . Khi đó góc giữa  $AM$  và  $BD$  bằng bao nhiêu độ?

**Trả lời:**

**Câu 58:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$  và  $AA' = \sqrt{2}a$ . Khi đó góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng bao nhiêu độ?

**Trả lời:**

**Câu 59:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BB'$ . Cosin của góc hợp bởi  $MN$  và  $AC'$  bằng  $\frac{\sqrt{a}}{b}$ . Tính  $ab$

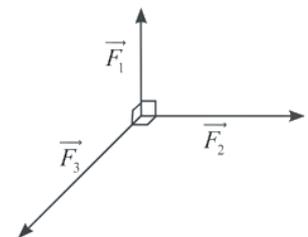
**Trả lời:**

**Câu 60:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết:  $\vec{AN} = -4\vec{AB} + k\vec{AA'} - 2\vec{AD}$  ( $k \in \mathbb{R}$ );  $\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}$ . Giá trị  $k$  để  $\vec{AN} \perp \vec{AM}$ ?

**Trả lời:**

⇒ Vectơ trong bài toán vật lý

**Câu 61:** Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là  $2N; 3N; 4N$ . Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho. (làm tròn đến hàng phần chục)

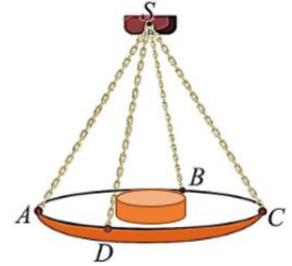


**Trả lời:**

**Câu 62:** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $100^\circ$  và có độ lớn lần lượt là  $25\text{ N}$  và  $12\text{ N}$ . Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn  $4\text{ N}$ . Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên. (làm tròn đến hàng đơn vị)

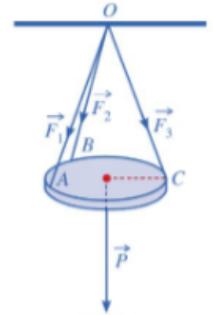
**Trả lời:**

**Câu 63:** Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng  $m = 3\text{ kg}$  được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $ASC = 90^\circ$ . Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ . Lấy  $g = 10\text{ m/s}^2$ , khi đó giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?



**Trả lời :**

**Câu 64:** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đều có độ lớn bằng  $60(N)$ . Cho biết các đường thẳng  $OA, OB, OC$  cùng tạo với mặt phẳng ngang một góc bằng  $30^\circ$ . Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



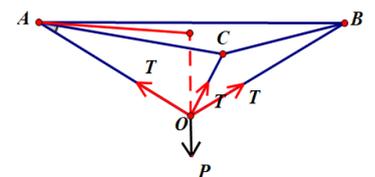
**Trả lời :**

**Câu 65:** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho tam giác  $ABC$  đều. Độ dài của ba đoạn dây  $OA, OB, OC$  đều bằng  $L$ . Trọng lượng của chiếc đèn là  $27N$  và bán kính của chiếc đèn là  $0,5m$ . Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là  $12N$ . (Chiều dài tính theo đơn vị  $cm$  và làm tròn hàng phần chục)



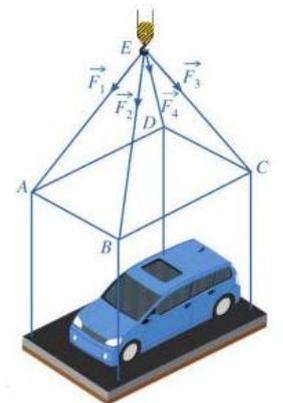
**Trả lời :**

**Câu 66:** Người ta treo một chiếc đèn trang trí có trọng lượng  $200N$  lên trần nhà bằng ba sợi dây không giãn, bằng nhau tại ba điểm  $A, B, C$  tạo thành tam giác đều. Mỗi sợi dây tạo với mặt phẳng trần nhà một góc  $30$  đến được giữ ở trạng thái cân bằng (tham khảo hình vẽ). Hãy tính lực căng trong mỗi sợi dây (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



**Trả lời :**

**Câu 67:** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiến cần cầu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc  $45^\circ$  như hình vẽ. Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$ , trọng lượng khung sắt là  $1000(N)$  và trọng lượng của chiếc xe ô tô là  $4000(N)$ . Tính cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp. (làm tròn đến hàng đơn vị)



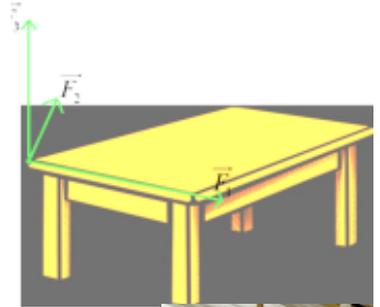
**Trả lời :**

**Câu 68:** Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân. Trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là  $30\text{ N}$  và được phân bố thành ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lên ba chân của giá đỡ. Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có độ lớn bằng nhau và góc tạo bởi mỗi chân của giá đỡ và mặt đất là  $60^\circ$ . Hỏi độ lớn của lực  $\vec{F}_1$  là bao nhiêu N (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



**Trả lời :**

**Câu 69:** Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có giá nằm trên mặt phẳng chứa mặt bàn, tạo với nhau một góc  $110^\circ$  và có độ lớn lần lượt là  $9\text{ N}$  và  $4\text{ N}$ , lực  $\vec{F}_3$  vuông góc với mặt bàn và có độ lớn  $7\text{ N}$ . Độ lớn hợp lực của ba lực trên là  $a(\text{N})$ , tìm giá trị của  $a$ . (kết quả quy tròn về số nguyên).



**Trả lời :**

**Câu 70:** Một giỏ hoa treo trong nhà làm bằng 3 sợi dây không giãn, mỗi sợi dài  $60(\text{cm})$  miếng kê là một miếng gỗ cân đối hình tròn bán kính  $20(\text{cm})$ , ba sợi dây được thắt một đầu bên trên và đỡ giá gỗ tại 3 điểm tạo thành tam giác đều (giả sử mỗi thắt của 3 sợi dây và mỗi nối của mỗi sợi dây với miếng gỗ không đáng kể). Biết lực chịu đựng của mỗi sợi dây bằng nhau và mỗi sợi chịu không quá  $15\text{ N}$  trọng lượng của miếng giá gỗ là  $5\text{ N}$ . Tính trọng lượng tối đa của các chậu hoa để dây treo không bị đứt (đơn vị  $\text{N}$ , kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

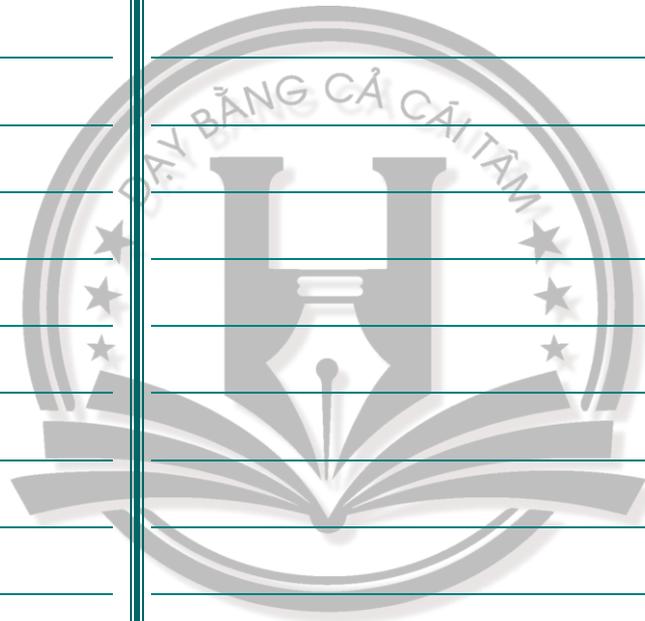


**Trả lời :**



Làm những chuyện có ích, nói những lời tràn đầy năng lượng tích cực, nghĩ những chuyện tốt đẹp, ngủ những giấc ngon lành. Dùng thời gian để tiến bộ hơn, chứ không phải để oán trách, than phiền.









**Ví dụ 3:** Bài toán độ dài:

- a) Cho hai điểm  $A(2;3;1)$  và  $B(3;1;5)$ . Tính vécto  $\overline{AB}$  và tính độ dài  $AB$ ?
- b) Cho hai điểm  $A(1;2;3)$  và  $M(0;0;m)$ . Tìm  $m$  biết  $AM = \sqrt{5}$
- c) Cho hai điểm  $A(1;3;m)$ ,  $B(-1;4;-2)$  và  $C(1;m;2)$ . Tìm  $m$  biết  $\Delta ABC$  cân tại  $B$ ?

**SOLUTION:**

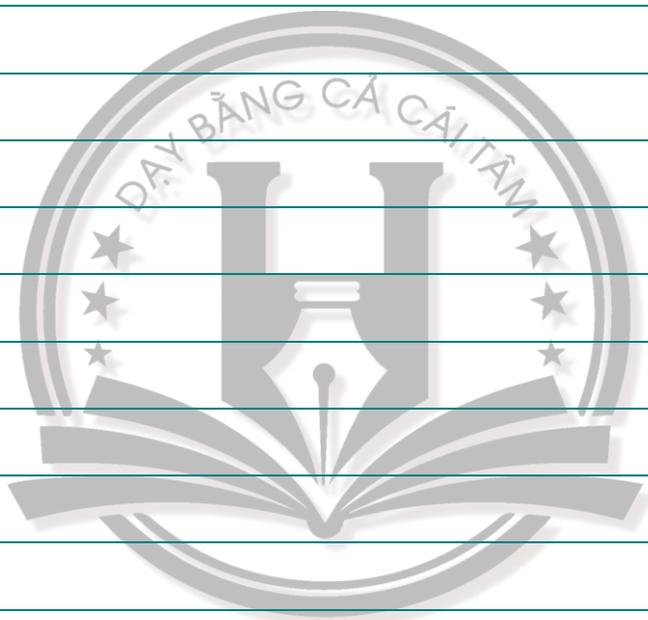




**Ví dụ 4:** Bài toán véctor bằng nhau :

- a) Cho ba điểm  $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-3;5;1)$ . Tìm điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành?
- b) Cho hai điểm  $A(-1;2;3), B(1;0;2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{AB} = 2\overline{MA}$ ?
- c) Cho  $\vec{u} = (2; -5; 3), \vec{v} = (0; 2; -1), \vec{w} = (1; 7; 2)$ . Tìm tọa độ véctor  $\vec{a} = \vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{w}$ ?
- d) Cho ba véctor  $\vec{u} = (2; 1; 0), \vec{v} = (1; -1; 2), \vec{w} = (2; 2; -1)$ . Biểu diễn véctor  $\vec{a} = (3; 7; -7)$  theo ba véctor  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trên ?

**SOLUTION:**

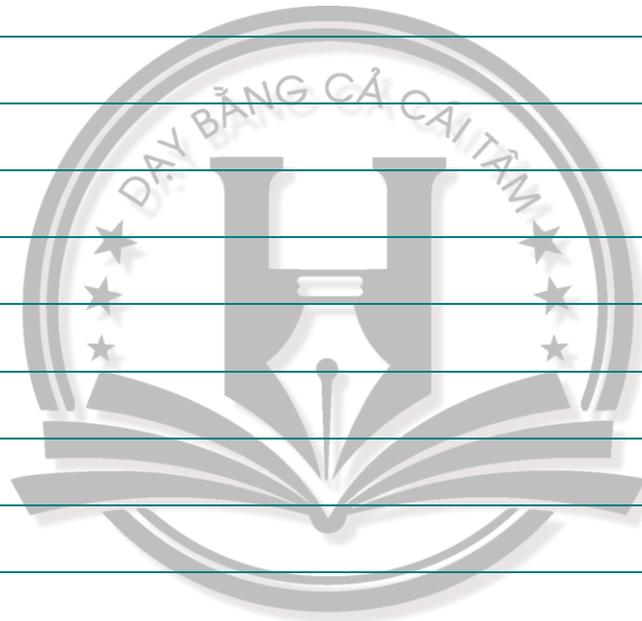




**Ví dụ 5:** Bài toán cùng phương – thẳng hàng:

- a) Cho  $\vec{u} = (2; m-1; 4)$ ,  $\vec{v} = (1; 3; -2n)$ . Tính  $m+n$  để  $\vec{u}$  cùng phương với  $\vec{v}$  ?
- b) Cho  $A(-2; 1; 3)$  và  $B(5; -2; 1)$ . Tìm giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oxy)$
- c) Cho  $A(-1; 6; 6)$  và  $B(3; -6; -2)$ . Tìm điểm  $M \in (Oxy)$  để  $MA+MB$  ngắn nhất?

**SOLUTION**





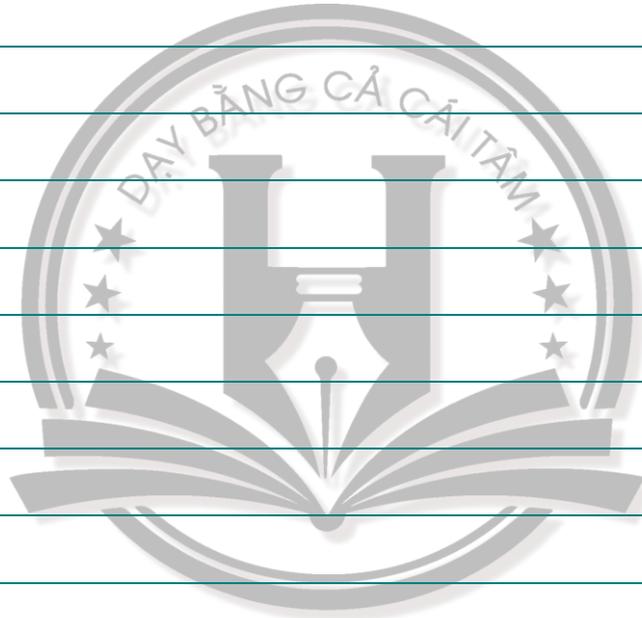
**Ví dụ 6:** Bài toán tích vô hướng:

a) Cho ba điểm  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(-1; 3; -1)$ ,  $C(5; -3; 4)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ ?

b) Cho hai vectơ  $\vec{u} = (-1; 3; 2)$  và  $\vec{v} = (x; 0; 1)$ . Tìm  $x$  để  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ?

c) Cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (-1; 0; -2)$ . Tính  $\cos(\vec{a}; \vec{b})$ ?

**SOLUTION**

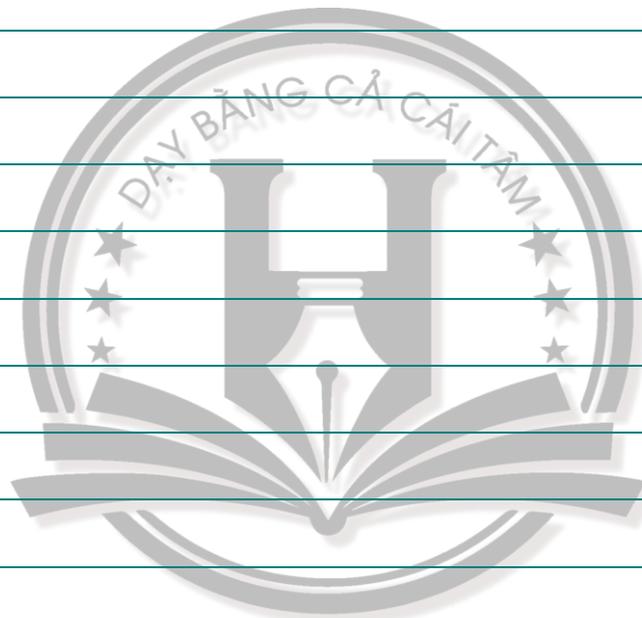




**Ví dụ 7: Bài toán tích vô hướng:**

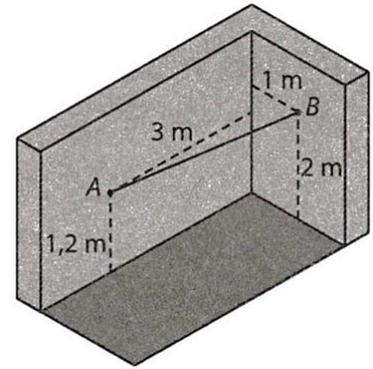
- a) Cho hai véctơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Biết rằng  $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 4$ . Tính  $|\vec{u} + \vec{v}|$ ?
- b) Cho  $\vec{u} = (2; 3; 1), \vec{v} = (5; 6; 4)$  và  $\vec{w} = (a; b; 1)$ . Tính  $a + b$  để  $\vec{w} \perp \vec{u}$  và  $\vec{w} \perp \vec{v}$
- c) (THPT QG 2017) Cho ba điểm  $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1), P(1; m-1; 2)$ . Tìm  $m$  để  $\triangle MNP$  vuông tại  $N$ ?

**SOLUTION**



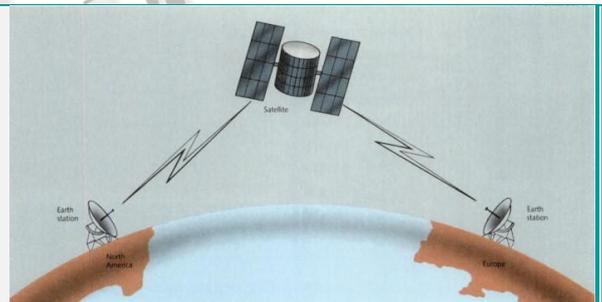
**Ví dụ 8: Bài toán thực tế**

Hình bên mô tả hai bức tường gạch được xây vuông góc với nhau và cùng vuông góc với mặt đất. Một người thợ xây căng dây giữa hai bức tường. Đầu  $A$  của sợi dây nằm trên bức tường thứ nhất, cách bức tường thứ hai là  $3\text{ m}$  và cách mặt đất là  $1,2\text{ m}$ . Đầu  $B$  của sợi dây nằm trên bức tường thứ hai, cách bức tường thứ nhất là  $1\text{ m}$  và cách mặt đất là  $2\text{ m}$ . Tính độ dài của sợi dây được căng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



**SOLUTION**

**Ví dụ 9: Bài toán thực tế** Có hai trạm thu phát sóng tín hiệu mặt đất đặt ở hai điểm  $A, B$  và vệ tinh thu phát tín hiệu tại ở vị trí  $M$ , biết vệ tinh di chuyển luôn cách mặt đất  $35000\text{ km}$ . Tín hiệu tại  $A$  phát lên vệ tinh  $M$  rồi truyền đến trạm thu tại  $B$ . Xét hệ trục  $Oxyz$  được chọn thỏa mãn  $A(0;0;-35)$ ,  $B(35;45;-35)$ ,  $M(x;y;0)$  (đơn vị tọa độ là ngàn km). Biết vận tốc trung bình truyền tín hiệu giữa vệ tinh với các trạm thu phát sóng khoảng  $270000\text{ km/s}$ . Một tín hiệu phát từ  $A$  đến  $M$ , rồi truyền về  $B$  mất ít nhất bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm).



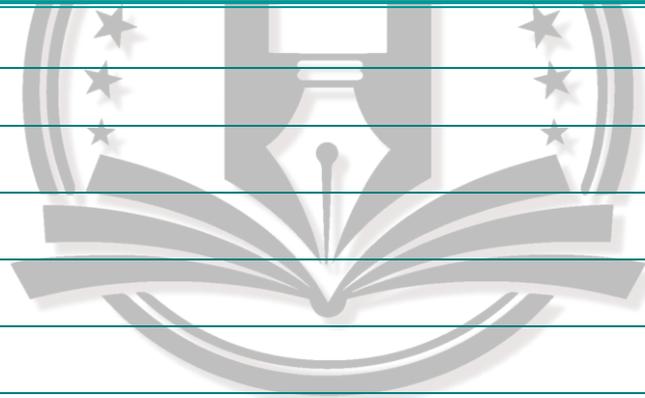
**SOLUTION**



**Ví dụ 10: Bài toán thực tế**

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3 km về phía Đông và 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,3 km. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**SOLUTION**



**1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án).**

- Câu 1:** (Mã 101-2022) Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -3)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là  
A.  $(0; 2; -3)$ .      B.  $(1; 0; -3)$ .      C.  $(1; 2; 0)$ .      D.  $(1; 0; 0)$ .
- Câu 2:** (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; -1; 1)$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm  
A.  $M(3; 0; 0)$       B.  $N(0; -1; 1)$       C.  $P(0; -1; 0)$       D.  $Q(0; 0; 1)$
- Câu 3:** (Mã 104 - 2019) Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(3; 1; -1)$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là  
A.  $(3; 0; -1)$ .      B.  $(0; 1; 0)$ .      C.  $(3; 0; 0)$ .      D.  $(0; 0; -1)$ .
- Câu 4:** (Đề Minh Họa 2023) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$ . Điểm đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(Oxz)$  có tọa độ là  
A.  $(1; -2; 3)$ .      B.  $(1; 2; -3)$ .      C.  $(-1; -2; -3)$ .      D.  $(-1; 2; 3)$ .
- Câu 5:** (Mã 102 2018) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; -2)$  và  $B(2; 2; 1)$ . Vectơ  $\overline{AB}$  có tọa độ là  
A.  $(-1; -1; -3)$       B.  $(3; 1; 1)$       C.  $(1; 1; 3)$       D.  $(3; 3; -1)$
- Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$  cho  $\vec{a} = (2; 3; 2)$  và  $\vec{b} = (1; 1; -1)$ . Vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  có tọa độ là  
A.  $(3; 4; 1)$ .      B.  $(-1; -2; 3)$ .      C.  $(3; 5; 1)$ .      D.  $(1; 2; 3)$ .
- Câu 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a}$  là  
A.  $(-1; 2; -3)$ .      B.  $(2; -3; -1)$ .      C.  $(2; -1; -3)$ .      D.  $(-3; 2; -1)$ .
- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -3; 1)$ ,  $B(3; 0; -2)$ . Tính độ dài  $AB$ .  
A. 26.      B. 22.      C.  $\sqrt{26}$ .      D.  $\sqrt{22}$ .
- Câu 9:** (Mã 101-2023) Trong không gian  $Oxyz$  cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; 2; -2)$  và  $\vec{v} = (2; -2; 3)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{u} + \vec{v}$  là  
A.  $(-1; 4; -5)$ .      B.  $(1; -4; 5)$ .      C.  $(3; 0; 1)$ .      D.  $(3; 0; -1)$ .
- Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(3; -2; 3)$  và  $B(-1; 2; 5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  là:  
A.  $I(-2; 2; 1)$ .      B.  $I(1; 0; 4)$ .      C.  $I(2; 0; 8)$ .      D.  $I(2; -2; -1)$ .



- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;3;4), B(2;-1;0), C(3;1;2)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là
- A.  $G(2;1;2)$ .      B.  $G(6;3;6)$ .      C.  $G\left(3;\frac{2}{3};3\right)$ .      D.  $G(2;-1;2)$ .
- Câu 12:** (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a}=(2;1;0)$  và  $\vec{b}=(-1;0;-2)$ . Tính  $\cos(\vec{a},\vec{b})$ .
- A.  $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$       B.  $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$       C.  $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$       D.  $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$
- Câu 13:** Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{u}=(-\sqrt{3};0;1)$  là
- A.  $120^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $150^\circ$ .      D.  $30^\circ$ .
- Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u}=(3;0;1)$  và  $\vec{v}=(2;1;0)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{u}\cdot\vec{v}$ .
- A.  $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$ .      B.  $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$ .      C.  $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ .      D.  $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$ .
- Câu 15:** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$  và  $\vec{v}=(2;-1)$ . Tính  $\vec{u}\cdot\vec{v}$ .
- A.  $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$ .      B.  $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ .      C.  $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2;-3)$ .      D.  $\vec{u}\cdot\vec{v}=5\sqrt{2}$ .
- Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(0;0;3), B(0;0;-1), C(1;0;-1), D(0;1;-1)$ . Mệnh đề nào dưới đây sai?
- A.  $AB \perp BD$ .      B.  $AB \perp BC$ .      C.  $AB \perp AC$ .      D.  $AB \perp CD$ .
- Câu 17:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{u}=(2;-1;1)$  và  $\vec{v}=(0;-3;-m)$ . Tìm số thực  $m$  sao cho tích vô hướng  $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ .
- A.  $m=4$ .      B.  $m=2$ .      C.  $m=3$ .      D.  $m=-2$ .
- Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , tọa độ một vectơ  $\vec{n}$  vuông góc với cả hai vectơ  $\vec{a}=(1;1;-2), \vec{b}=(1;0;3)$  là
- A.  $(2;3;-1)$ .      B.  $(3;5;-2)$ .      C.  $(2;-3;-1)$ .      D.  $(3;-5;-1)$ .
- Câu 19:** Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-2)$  thẳng hàng. Khi đó  $x+y$  bằng
- A.  $x+y=1$ .      B.  $x+y=17$ .      C.  $x+y=-\frac{11}{5}$ .      D.  $x+y=\frac{11}{5}$ .
- Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$ . Với giá trị nào của  $x, y$  thì  $A, B, M$  thẳng hàng.
- A.  $x=4; y=7$       B.  $x=-4; y=-7$       C.  $x=4; y=-7$       D.  $x=-4; y=7$



- Câu 21:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0;0;0)$ ,  $B(a;0;0)$ ;  $D(0;2a;0)$ ,  $A'(0;0;2a)$  với  $a \neq 0$ . Độ dài đoạn thẳng  $AC'$  là
- A.  $|a|$ .                      B.  $2|a|$ .                      C.  $3|a|$ .                      D.  $\frac{3}{2}|a|$ .
- Câu 22:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết rằng  $A(-3;0;0)$ ,  $B(0;2;0)$ ,  $D(0;0;1)$ ,  $A'(1;2;3)$ . Tìm tọa độ điểm  $C'$ .
- A.  $C'(10;4;4)$ .              B.  $C'(-13;4;4)$ .              C.  $C'(13;4;4)$ .              D.  $C'(7;4;4)$ .
- Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; m-1; 3)$ ,  $\vec{b} = (1; 3; -2n)$ . Tìm  $m, n$  để các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng.
- A.  $m=7; n=-\frac{3}{4}$ .              B.  $m=7; n=-\frac{4}{3}$ .              C.  $m=4; n=-3$ .              D.  $m=1; n=0$ .
- Câu 24:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;2;-1)$ ,  $B(2;-1;3)$  và  $C(-3;5;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.
- A.  $D(-2;8;-3)$               B.  $D(-4;8;-5)$               C.  $D(-2;2;5)$               D.  $D(-4;8;-3)$
- Câu 25:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-2;0)$ ,  $B(2;1;-2)$ ,  $C(0;3;4)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  để tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.
- A.  $(1;0;-6)$ .                      B.  $(1;6;2)$ .                      C.  $(-1;0;6)$ .                      D.  $(1;6;-2)$ .
- Câu 26:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;-1)$ ,  $\vec{AB} = (1;3;1)$  thì tọa độ của điểm  $B$  là:
- A.  $B(2;5;0)$ .                      B.  $B(0;-1;-2)$ .                      C.  $B(0;1;2)$ .                      D.  $B(-2;-5;0)$
- Câu 27:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  tạo với nhau một góc  $120^\circ$  và  $|\vec{u}| = 2$ ,  $|\vec{v}| = 5$ . Tính  $|\vec{u} + \vec{v}|$
- A.  $\sqrt{19}$ .                      B.  $-5$ .                      C.  $7$ .                      D.  $\sqrt{39}$ .
- Câu 28:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2;3;-1)$ ,  $N(-1;1;1)$  và  $P(1;m-1;2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .
- A.  $m = -6$ .                      B.  $m = 0$ .                      C.  $m = -4$ .                      D.  $m = 2$ .
- Câu 29:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình vuông  $ABCD$ ,  $B(3;0;8)$ ,  $D(-5;-4;0)$ . Biết đỉnh  $A$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  và có tọa độ là những số nguyên, khi đó  $|\vec{CA} + \vec{CB}|$  bằng:
- A.  $10\sqrt{5}$ .                      B.  $6\sqrt{10}$ .                      C.  $10\sqrt{6}$ .                      D.  $5\sqrt{10}$ .
- Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2;3;1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{AM}{BM}$ .
- A.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$                       B.  $\frac{AM}{BM} = 2$                       C.  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$                       D.  $\frac{AM}{BM} = 3$

**Câu 31:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2;3;1)$ ,  $B(2;1;0)$ ,  $C(-3;-1;1)$ . Tìm tất cả các điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và diện tích tứ giác  $ABCD$  bằng 3 lần diện tích tam giác  $ABC$ .

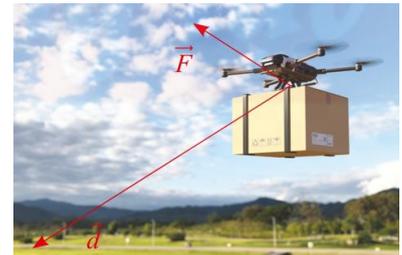
- A.  $D(-12;-1;3)$ .      B.  $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$ .      C.  $D(8;7;-1)$ .      D.  $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$ .

**Câu 32:** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;2;0)$ ,  $C(0;0;2)$ . Có tất cả bao nhiêu điểm  $M$  trong không gian thỏa mãn  $M$  không trùng với các điểm  $A, B, C$  và  $AMB = BMC = CMA = 90^\circ$

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Câu 33:** Tính công sinh bởi lực  $\vec{F} = (20;30;-10)$  (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (Hình) khi thực hiện một độ dịch chuyển  $\vec{d} = (150;200;100)$  (đơn vị: m).

- A.  $3200J$ .      B.  $8000J$ .  
 C.  $10000J$ .      D.  $5800J$ .



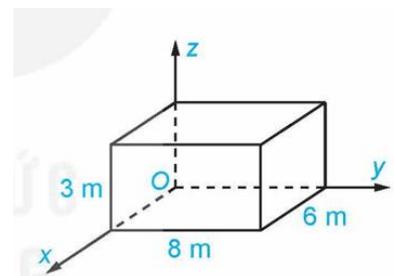
**Câu 34:** Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời. Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ không đổi là  $890\text{ km/h}$  trong nửa giờ.



Xác định tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian  $Oxyz$  được lấy theo kilômét.

- A.  $(0;435;0)$ .      B.  $(445;0;0)$ .      C.  $(0;445;0)$ .      D.  $(435;0;0)$ .

**Câu 35:** Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là  $8\text{ m}$ , chiều rộng là  $6\text{ m}$  và chiều cao là  $3\text{ m}$ . Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



- A.  $(4;4;4)$       B.  $(4;3;4)$       C.  $(3;4;3)$       D.  $(4;5;4)$

**2. Câu hỏi đúng sai.** (Trong mỗi ý (a), (b), (c), (d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai ).

**Câu 36:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (-1;1;0)$ ;  $\vec{b} = (1;1;0)$  và  $\vec{c} = (1;1;1)$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\vec{c} \perp \vec{b}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$ \vec{c}  = \sqrt{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\vec{a} \perp \vec{b}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 37:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (2; -2; -4)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; 1)$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$ \vec{b}  = \sqrt{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 38:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (2; -1; -1)$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Vec to cùng vuông góc với vec to $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có tọa độ bằng $(-5; -7; -3)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Vectơ $\vec{a}$ không cùng phương với vectơ $\vec{b}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Vectơ $\vec{a}$ không vuông góc với vectơ $\vec{b}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	$ \vec{a}  = \sqrt{14}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

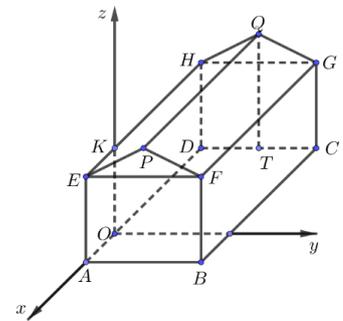
**Câu 39:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{b} = (-4; -2; 6)$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\vec{b} = -2\vec{a}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$ \vec{b}  = 2 \vec{a} $ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 40:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $\vec{OA} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{OB} = (4; 3; -2)$ ,  $\vec{OC} = (0; 2; -1)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(xOy)$  tại điểm  $M(x_M; y_M; z_M)$ . Gọi  $C_{\Delta ABC}$  là chu vi tam giác  $ABC$ .

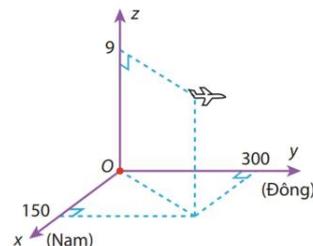
Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$BAC = 90^\circ$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$C_{\Delta ABC} = 3(2 + \sqrt{2})$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$x_M = y_M = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$x_M + y_M + z_M = 10$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 41:** Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng  $ABFPE.DCGQH$  với  $ABFE$  là hình chữ nhật và  $EFP$  là tam giác cân tại  $P$ . Gọi  $T$  là trung điểm của  $DC$ . Các kích thước của kho chứa lần lượt là  $AB = 6\text{m}$ ;  $AE = 5\text{m}$ ;  $AD = 8\text{m}$ ;  $QT = 7\text{m}$ . Người ta mô hình hoá nhà kho bằng cách chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm  $O$  thuộc đoạn  $AD$  sao cho  $OA = 2\text{m}$  và các trục tọa độ tương ứng như hình vẽ dưới đây.



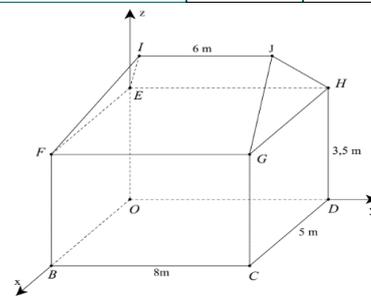
Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm $Q$ là $(-6; 3; 5)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Véc to $\vec{OC}$ có tọa độ là $(-6; 6; 0)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của $FG$ và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí $O$ . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ $O$ đến $K$ sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $5 + 2\sqrt{10}$ m.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Mái nhà được lợp bằng tôn Hoa Sen, giá tiền mỗi mét vuông tôn là 130.000 đồng. Số tiền cần bỏ ra để mua tôn lợp mái nhà là 3.750.000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các miếng tôn, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 42:** Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9 giờ 30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị  $km$ . Mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất,  $O$  trùng với vị trí trung tâm điều khiển.



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tại thời điểm 9h30, máy bay đang ở độ cao 9 $km$ so với mặt đất.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tại thời điểm 9h30, tọa độ của máy bay là $(300;150;9)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Phi công để máy bay ở chế độ tự động bay thẳng theo hướng đông với vận tốc là $750 km/h$ , độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc $10 m/s$ . Giả sử vận tốc và hướng gió không thay đổi thì tại thời điểm 10 giờ 30 phút máy bay ở tọa độ $(150;1086;9)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Tại thời điểm 9 giờ 30 phút, máy bay cách trung tâm điều khiển một khoảng (làm tròn đến hàng phần mười) là $335,6 km$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 43:** Một ngôi nhà có hình dáng và kích thước như hình vẽ dưới đây. Biết rằng các bức tường và nền nhà đều là các hình chữ nhật; hai bên mái nhà là các hình thang cân  $IJGF$  và  $IJHE$  có diện tích bằng nhau; độ dốc của mái nhà số đo góc nhị diện  $[J, FG, H]$  là  $45^\circ$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là  $1m$ ).



Mệnh đề		Đúng	Sai	Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	$\vec{JI} = (0; 6; 0)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(b)	$J\left(\frac{5}{2}; 7; 6\right)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$E\left(0; 0; \frac{7}{2}\right)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	(d)	$G\left(5; 8; \frac{7}{2}\right)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 44:** Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao  $80 m$  sử dụng rada có phạm vi theo dõi  $500 km$  được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất sao cho trục  $Ox$  hướng về phía Tây, trục  $Oy$  hướng về phía Nam, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trên. Một máy bay tại vị trí  $A$  cách mặt đất  $10 km$ , cách  $300 km$  về phía Đông và  $200 km$  về phía Bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Vị trí $A$ có tọa độ $(-300; -200; 10)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Rada ở vị trí có tọa độ $(0; 0; 0)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Rada của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí $A$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng cách từ máy bay đến rada lớn hơn $360,69 km$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



**Câu 45:** Hệ thống cáp treo gồm hai trụ lớn và một đường cáp nối giữa hai trụ đó (coi như độ cong không đáng kể), được đặt trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ . Một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $O(0;0;0)$  thuộc trụ thứ nhất và chuyển động thẳng đều theo đường cáp treo đến điểm  $A(896;2025;189)$  thuộc trụ thứ hai với tốc độ  $7,4$  (m/s) (đơn vị trên mỗi trục là mét).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ dài đường cáp xấp xỉ bằng 2222 mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Điểm chính giữa của đường cáp có tọa độ là $(448;1012,5;94)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Trên đường cáp có điểm $B$ với hoành độ $x_B = 672$ , khi đó thời gian để cabin đi từ điểm $B$ đến điểm $A$ xấp xỉ bằng 75 giây (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Có một khu vui chơi phía dưới cáp treo nằm trong mặt phẳng ( $Oxy$ ) với điểm trung tâm có tọa độ $(750,5;1497,25;0)$ . Biết rằng từ trong cabin cáp treo có thể ngắm nhìn toàn cảnh khu vui chơi rõ nhất tại vị trí điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ cách trung tâm khu vui chơi một khoảng ngắn nhất. Khi đó, ta có $x_0 + y_0 + z_0 \approx 2330,5$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

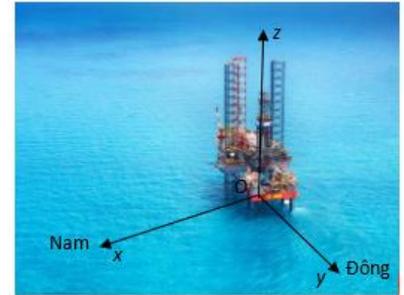
**Câu 46:** Hai phương tiện bay không người lái (drone) cùng lúc xuất phát tại cùng một địa điểm trên mặt đất. Sau một thời gian, chiếc thứ nhất đến vị trí cách điểm xuất phát về phía Nam  $60m$ , về phía Đông  $40m$  và cách mặt đất  $50m$ , chiếc thứ hai đến vị trí cách điểm xuất phát về phía Bắc  $40m$ , về phía Tây  $20m$  và cách mặt đất  $30m$ . Tại thời điểm đang xét thì :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát $87,57m$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Chiếc thứ hai cách điểm xuất phát $53,85m$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khoảng cách giữa hai chiếc drone là $118,32m$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Trong các vị trí trên mặt đất quan sát hai drone có một vị trí mà tổng khoảng cách từ vị trí này đến hai drone nhỏ nhất và tổng này bằng $141,42m$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 47:** Một tên lửa phóng từ mặt đất từ vị trí gốc tọa độ  $O$  theo hướng, vận tốc không đổi (đặt mặt phẳng ( $Oxy$ ) trùng với mặt đất). Tên lửa đi từ điểm  $O(0;0;0)$  đến điểm  $A(140;60;6)$  trong 8 phút.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Trong 8 phút tên lửa bay được quãng đường (làm tròn đến hàng đơn vị) xấp xỉ bằng $152km$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Ở phút thứ 4 độ cao của tên lửa là $3km$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tọa độ của tên lửa sau 12 phút kể từ lúc phóng là $(210;90;12)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Sau 10 phút tiếp theo kể từ vị trí $A$ tên lửa đạt độ cao là $13,5km$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 48:** Trong không gian, xét hệ tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí một giàn khoan trên biển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt biển (được coi là mặt phẳng) với tia  $Ox$  hướng về phía nam, tia  $Oy$  hướng về phía đông và tia  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ). Đơn vị đo trong không gian  $Oxyz$  lấy theo kilômét. Một chiếc radar đặt tại  $O$  có phạm vi theo dõi là 30 km. Một chiếc tàu thám hiểm tại vị trí  $A$  ở độ sâu 10 km so với mặt nước biển, cách  $O$  25 km về phía nam và 15 km về phía tây. Một tàu đánh cá tại vị trí  $B(-20; 15; 0)$ .



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khoảng cách từ chiếc tàu thám hiểm đến radar bằng 25 km.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Radar <b>không</b> phát hiện được tàu thám hiểm đặt tại vị trí $A$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Radar phát hiện ra tàu đánh cá tại vị trí $B$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Một chiếc tàu của cảnh sát biển đang tuần tra di chuyển đến vị trí $C$ cách $O$ 15 km về phía nam. Để	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 49:** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị lấy kilomet, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $M(500; 200; 10)$  đến điểm  $N(800; 300; 10)$  trong 20 phút.

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Máy bay đang di chuyển theo hướng tiến lại gần vị trí đặt ra đa.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khoảng cách $MN = 100\sqrt{10} \text{ km}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tốc độ của máy bay khi di chuyển từ $M$ đến $N$ là $150\sqrt{10} \text{ km/h}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nếu tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 4 phút tiếp theo là $Q(a; b; c)$ với $a + b + c = 1191$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 50:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , đài kiểm soát không lưu của sân bay đặt tại điểm  $O(0; 0; 0)$ , đơn vị độ dài trên mỗi trục ứng với  $1 \text{ km}$ . Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không lưu  $417 \text{ km}$  sẽ hiển thị trên màn hình radar. Một máy bay đang ở vị trí  $M(-779; -260; 8)$  chuyển động thẳng đều với tốc độ không đổi theo hướng của vectơ  $\vec{u} = (91; 75; 0)$ .

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng mô tả đường đi của máy bay đi qua điểm $N(-597; -110; 8)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Vị trí đầu tiên mà máy bay xuất hiện trên màn hình radar là điểm $P(40; 415; 8)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Nếu thời gian máy bay xuất hiện trên màn hình radar là 30 phút thì thời gian máy bay di chuyển từ $M$ đến khi xuất hiện lần cuối cùng trên màn hình radar là 54 phút.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu luôn lớn hơn $294 \text{ km}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh trả điền kết quả vào ô trống)

#### ⇒ Phương pháp tọa độ

**Câu 51:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-1;3), B(-1;-1;2)$  và  $C(-3;-2;2)$ . Tính  $\cos ABC$ .

Trả lời :

**Câu 52:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3;1;-2), B(2;-3;5)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA=2MB$ , tọa độ điểm  $M$  là  $(a;b;c)$ . Khi đó  $a+b+c$  bằng?

Trả lời :

**Câu 53:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;3;-1), B(3;-1;5), C(0;5;0)$ . Điểm  $M$  thuộc tia đối của tia  $BA$  sao cho diện tích tam giác  $MAC$  bằng ba lần diện tích tam giác  $MBC$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $CM$ ?

Trả lời :

**Câu 54:** Trong không gian  $Oxyz$  cho các điểm  $A(5;1;5); B(4;3;2); C(-3;-2;1)$ . Điểm  $I(a;b;c)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tính  $a+2b+c$ ?

Trả lời :

**Câu 55:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ . Ba đỉnh  $A(1;2;1), B(2;0;-1), C(6;1;0)$  Hình thang có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$ . Giả sử đỉnh  $D(a;b;c)$ , tìm  $a+b+c$ ?

Trả lời :

#### ⇒ Cực trị hình học và bài toán thực tế

**Câu 56:** Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông  $80(km)$  và về phía Nam  $65(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $700(m)$ . Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc  $50(km)$  và về phía Tây  $30(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $900(m)$ . Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai (Kết quả làm tròn đến đơn vị kilomet).

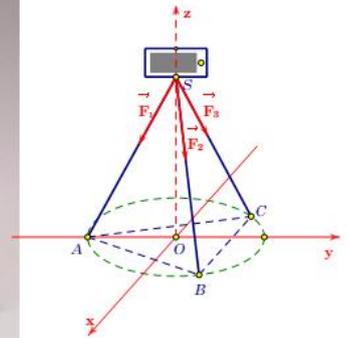


Trả lời :

**Câu 57:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $A(800;500;7)$  đến điểm  $B(940;550;8)$  trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì cao độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

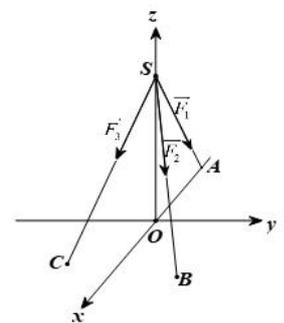
Trả lời :

**Câu 58:** Một chiếc điện thoại iphone được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt  $S(0;0;20)$  và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là  $A(0;-6;0), B(3\sqrt{3};3;0), C(-3\sqrt{3};3;0)$  (đơn vị cm). Cho biết điện thoại có trọng lượng là  $2\text{ N}$  và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có độ lớn bằng nhau. Biết tọa độ của lực  $\vec{F}_1 = (a;b;c)$ , khi đó  $T = 2a + 5b + 6c$  bằng?



**Trả lời :**

**Câu 59:** Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt  $S(0;0;4)$  và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là  $A(-2;0;0), B(1;\sqrt{3};0), C(1;-\sqrt{3};0)$ . Biết rằng trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là  $30\text{ N}$  và được phân bố thành ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có độ lớn bằng nhau như hình dưới. Tính tích vô hướng của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .



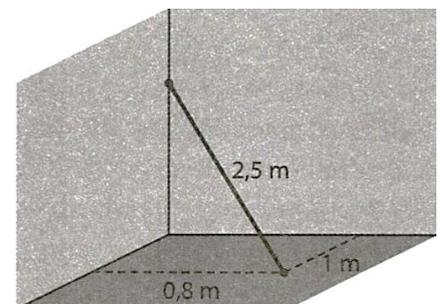
**Trả lời :**

**Câu 60:** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $M(400;100;9)$  đến điểm  $N(700;200;14)$  trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 6 phút tiếp theo máy bay đến vị trí  $Q(x;y;z)$ . Tính  $x + 2y + z$



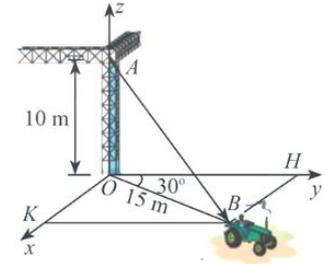
**Trả lời :**

**Câu 61:** Một chiếc gậy có chiều dài  $2,5\text{ m}$  được đặt trong góc phòng như hình sau đây. Một đầu của chiếc gậy nằm trên sàn nhà, cách hai bức tường lần lượt là  $1\text{ m}$  và  $0,8\text{ m}$ . Đầu còn lại của chiếc gậy nằm trên mép tường. Tính khoảng cách từ đầu gậy trên mép tường đến sàn nhà. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



**Trả lời :**

**Câu 62:** Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng  $1m$ . Độ dài cáp  $AB = a\sqrt{b}$ . Tìm giá trị  $b-a$ ?



**Trả lời :**

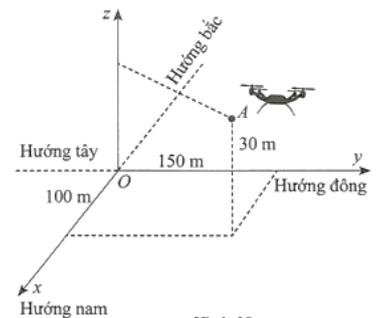
**Câu 63:** Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông  $60(km)$  và về phía Nam  $40(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $2(km)$ . Chiếc máy bay



thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc  $80(km)$  và về phía Tây  $50(km)$ , đồng thời cách mặt đất  $4(km)$ . Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng. Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

**Trả lời :**

**Câu 64:** Một người điều khiển một flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Đầu tiên flycam ở vị trí  $A$  cách vị trí điều khiển  $100m$  về phía nam và  $150m$  về phía đông, đồng thời cách mặt đất  $30m$  (Hình). Để thực hiện nhiệm vụ tiếp theo, người điều khiển flycam đến vị trí  $B$  cách vị trí điều khiển  $80m$  về phía bắc và  $120m$  về phía tây, đồng thời cách mặt đất  $50m$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  là vị trí người điều khiển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  có hướng trùng với hướng nam, trục  $Oy$  có hướng trùng với hướng đông, trục  $Oz$  vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với  $1m$ . Tính quãng đường flycam bay từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$ , biết flycam bay từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$  theo một đường thẳng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

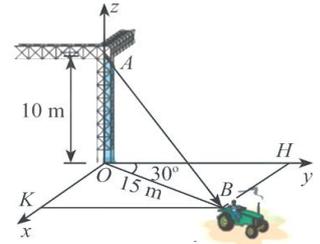


**Trả lời :**

**Câu 65:** Khi gán hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí  $A(5; 0; 5)$  đến vị trí  $B(10; 10; 3)$  và hạ cánh tại vị trí  $M(a; b; 0)$ . Giá trị của  $a+b$  bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?

**Trả lời :**

**Câu 66:** Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng  $1m$ . Biết  $\vec{AB} = (x; y; z)$ . Tính  $x + 2y - z$  (làm tròn đến hàng phần mười).



**Trả lời:**

**Câu 67:** Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí  $A$  cao  $15m$  của tháp 1 này sang vị trí  $B$  cao  $10m$  của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của  $A$  và  $B$  lần lượt là  $A(3; 2,5; 15)$  và  $B(21; 27,5; 10)$ . Khi du khách khi ở độ cao  $12$  mét thì tọa độ của du khách lúc đó là  $M(a; b; c)$ . Tính giá trị biểu thức  $T = a + b + c$ .



**Trả lời:**

**Câu 68:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là  $1m$ ), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm  $A(10; 3; 0)$  và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí  $D$  cách điểm  $A$  một khoảng  $3780m$ . Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ  $\vec{u} = (2; -2; 1)$  và sau  $3$  phút kể từ khi xuất phát thì cabin đi đến vị trí  $B$  có hoành độ  $x_B = 550$ . Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường  $AD$  là bao nhiêu giây?

**Trả lời:**

**Câu 69:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; -2; 4), B(-3; 3; -1), C(-1; -1; -1)$  và  $M$  là điểm thay đổi thuộc  $Ox$ , giá trị nhỏ nhất của  $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$  bằng?

**Trả lời:**

**Câu 70:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-3; 3; -1), B(2; -2; 4)$ . Xét điểm  $M(a; b; c)$  thuộc mặt phẳng  $(Oyz)$  sao cho biểu thức  $T = 3MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $T$ ?

**Trả lời:**

**Câu 71:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(0; -1; 1), B(-2; 1; -1), C(-1; 3; 2)$ . Điểm  $M \in (Oxy)$  để biểu thức  $T = |\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất  $T$ ?

**Trả lời:**

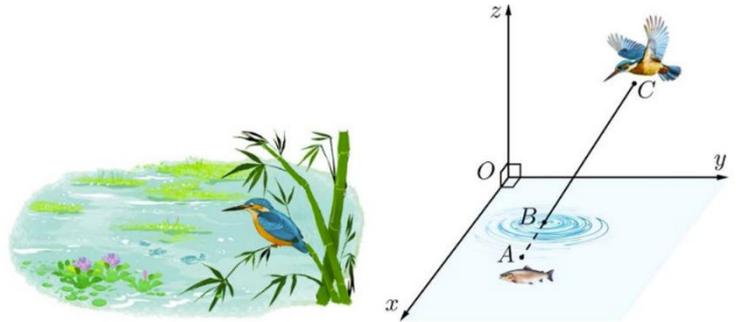
**Câu 72:** Cho  $A(0; 0; -1), B(-1; 1; 0), C(1; 0; 1)$ . Điểm  $M \in (Oyz)$  thỏa  $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất của  $T$ ?

**Trả lời:**

**Câu 73:** (Đề Tham Khảo 2025) Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm  $M$  trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm  $A(3;1;0)$ ,  $B(3;6;6)$ ,  $C(4;6;2)$ ,  $D(6;2;14)$ ; vị trí  $M(a;b;c)$  thỏa mãn  $MA=3$ ,  $MB=6$ ,  $MC=5$ ,  $MD=13$ . Khoảng cách từ điểm  $M$  đến điểm  $O$  bằng bao nhiêu?

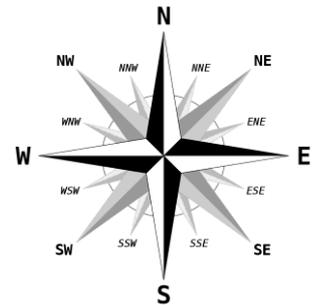
Trả lời :

**Câu 74:** Với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  nằm trên mặt nước, mặt phẳng  $(Oxy)$  là mặt nước, trục  $Oz$  hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước  $2m$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $3m$  và  $1m$  phóng thẳng xuống vị trí con cá cách mặt nước  $50cm$ , cách mặt phẳng  $(Oxz)$ ,  $(Oyz)$  lần lượt là  $1m$  và  $1,5m$ . Tọa độ điểm  $B$  lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là  $(a;b;c)$ . Tính  $T = 5a + 15b + 25c$ .



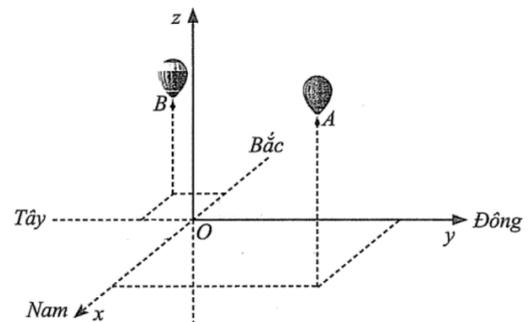
Trả lời :

**Câu 75:** Hai quả bóng bay được thả lên cùng một địa điểm. Sau một khoảng thời gian, quả bóng thứ nhất nằm cách địa điểm xuất phát  $200m$  về hướng Đông và  $200m$  về hướng Nam, đồng thời cách mặt đất  $50m$ ; quả bóng thứ hai nằm cách địa điểm xuất phát  $100m$  về hướng Tây và  $100m$  về hướng Bắc, đồng thời cách mặt đất  $40m$ . Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất quan sát thấy hai quả bóng này. Biết rằng so với các vị trí quan sát trên mặt đất, vị trí người đứng có tổng khoảng cách đến hai quả bóng bay là nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ vị trí người quan sát đến địa điểm thả hai quả bóng bay này (Đơn vị: mét) (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



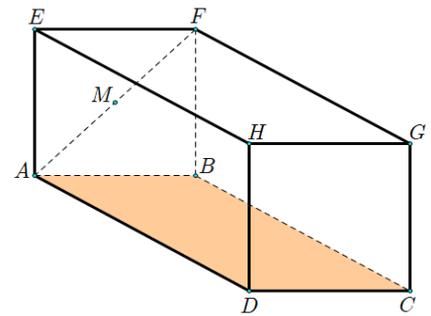
Trả lời :

**Câu 76:** Hai chiếc kính khí cầu  $A$  và  $B$  bay lên từ cùng một vị trí  $O$  trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, kính khí cầu  $A$  nằm cách điểm xuất phát  $4km$  về phía Đông và  $3km$  về phía Nam, đồng thời cách mặt đất  $1km$ ; kính khí cầu  $B$  nằm cách điểm xuất phát  $1km$  về phía Bắc và  $1,5km$  về phía Tây, đồng thời cách mặt đất  $0,8km$  (hình minh họa bên dưới). Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai kính khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai kính khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời :

**Câu 77:** Một bể cá đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật  $ABCD.EFGH$  với  $AB = 6$  (dm),  $AD = 8$  (dm) và cạnh bên bằng 10 (dm). Một chú cá con bơi theo những đoạn thẳng từ điểm  $G$  đến chạm mặt đáy của hồ, rồi từ điểm đó bơi đến vị trí điểm  $M$  là trung điểm của  $AF$  được mô hình hóa như hình vẽ sau. Để đường đi ngắn nhất thì chú cá bơi đến điểm dưới đáy hồ cách  $BA$  và  $BC$  những đoạn bằng  $a$  và  $b$ . Khi đó tổng  $D = 3a + 6b$  bao nhiêu?



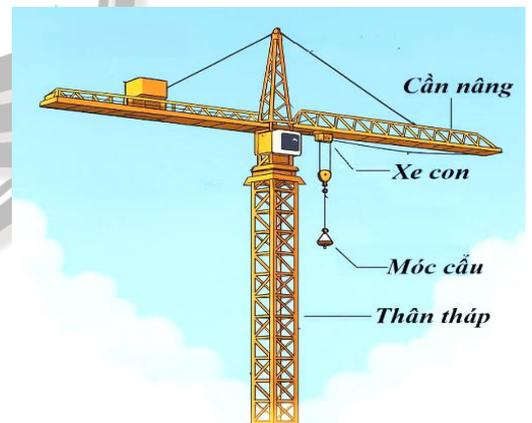
**Trả lời :**

**Câu 78:** Khi khắc phục hậu quả của thiên tai, bão lũ, một trong những giải pháp nhằm tiếp tế hàng cứu trợ đến những nơi khó tiếp cận là sử dụng flycam để xác định vị trí chính xác của người cần cứu trợ, sau đó sử dụng drone để vận chuyển các vật dụng thiết yếu thả xuống cho người này, giúp họ có thể cầm cự trong khi chờ đợi lực lượng cứu hộ đến nơi. Hai chiếc drone làm nhiệm vụ chuyển hàng cứu trợ bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất bay đến điểm cách điểm xuất phát  $2,5\text{km}$  về phía nam và  $1,5\text{km}$  về phía đông, đồng thời cách mặt đất  $60\text{m}$ . Chiếc thứ hai bay đến điểm cách điểm xuất phát  $3\text{km}$  về phía bắc và  $2,5\text{km}$  về phía tây, đồng thời cách mặt đất  $40\text{m}$ . Trong không gian, xét hệ tọa độ  $Oxyz$  với gốc tọa độ  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc drone, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng). Giả sử trong trường hợp khẩn cấp cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng cứu trợ cho hai drone sao cho tổng khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu tới hai drone nhỏ nhất. Vị trí cần tìm cách gốc tọa độ  $a\text{ km}$  theo hướng bắc và  $b\text{ km}$  theo hướng tây. Khi đó  $a + b$  bằng bao nhiêu?



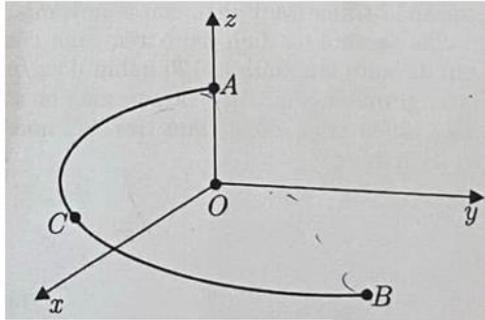
**Trả lời :**

**Câu 79:** Người ta thường dùng cầu trục tháp (như hình vẽ) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cầu trục dùng móc cầu nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn  $1\text{m}$  so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cầu trục quay cần nâng một góc  $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$  sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng  $(P)$  chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng  $(P)$  so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống  $1\text{m}$  theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , thân tháp là trục  $Oz$  và mặt đất là mặt phẳng  $Oxy$  (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm  $A(6; 8; 0)$  và vị trí cần đặt vật liệu là điểm  $B(4; -3; 15)$ . Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

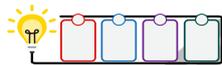


**Trả lời :**

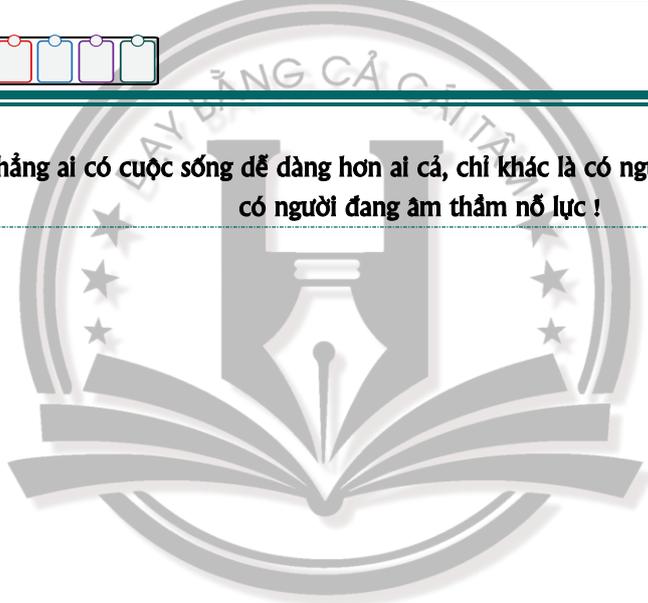
**Câu 80:** Trượt nước là một trò chơi vận động được nhiều người yêu thích trong các công viên nước. Một cái máng trượt nước có thiết kế dạng cung tròn với hai đầu mút là  $A$  và  $B$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại hình chiếu của  $A$  trên mặt đất, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo mét (tham khảo hình vẽ dưới đây). Biết các điểm  $A, B$  và một điểm  $C$  nằm trên máng trượt lần lượt có tọa độ là  $(0;0;5)$ ,  $(6;7;1)$  và  $(5;0;2)$ . Độ dài máng trượt nước đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?



Trả lời :



Trên đời này chẳng ai có cuộc sống dễ dàng hơn ai cả, chỉ khác là có người đang kêu trời than đất thì lại có người đang âm thầm nỗ lực !







**MÓN QUÀ TẠI LỚP**

**Ví dụ 1: Bài toán về tích có hướng:**

- a) Tìm  $m$  để ba vectơ  $\vec{u} = (2; -1; 1), \vec{v} = (1; 2; 1), \vec{w} = (m; 3; -1)$  đồng phẳng?
- b) Cho hai điểm  $A(1; 2; -1), B(0; -2; 3)$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ?
- c) Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0; 3), B(2; -2; 0), C(-3; 2; 1)$ . Tính chiều cao  $AH$ ?

**SOLUTION**





**Ví dụ 2:** Bài toán về tích có hướng:

- a) Tính diện tích hình bình hành  $ABCD$  với  $A(2;1;-3), B(0;-2;5), C(1;1;3)$ ?
- b) Tính thể tích tứ diện  $ABCD$  với  $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(4;5;6)$ ?
- c) Cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2), D(3;3;1)$ . Tính chiều cao của tứ diện hạ từ đỉnh  $D$  xuống mặt  $(ABC)$ ?

**SOLUTION:**



**QUICK TIPS MCQ MASTERY**
**1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án).**

- Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; -2)$  và vectơ  $\vec{b} = (1; 0; 2)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{c}$  là tích có hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- A.  $\vec{c} = (2; 6; -1)$ .      B.  $\vec{c} = (4; 6; -1)$ .      C.  $\vec{c} = (4; -6; -1)$ .      D.  $\vec{c} = (2; -6; -1)$ .
- Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , tọa độ một vectơ  $\vec{n}$  vuông góc với cả hai vectơ  $\vec{a} = (1; 1; -2)$ ,  $\vec{b} = (1; 0; 3)$  là
- A.  $(2; 3; -1)$ .      B.  $(3; 5; -2)$ .      C.  $(2; -3; -1)$ .      D.  $(3; -5; -1)$ .
- Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; 2; -1)$ ,  $\vec{b} = (3; -1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; -5; 2)$ . Câu nào sau đây **đúng**?
- A.  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{b}$ .      B.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng.  
 C.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.      D.  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$ .
- Câu 4:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(1; -2; 0)$ ,  $B(2; 0; 3)$ ,  $C(-2; 1; 3)$  và  $D(0; 1; 1)$ . Thể tích khối tứ diện  $ABCD$  bằng:
- A. 6.      B. 8.      C. 12.      D. 4.
- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 1; -1)$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A.  $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ .      B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$ .      C.  $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$ .      D.  $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1; -4; 3)$ .
- Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; -1)$ ,  $B(1; -1; 2)$ . Diện tích tam giác  $OAB$  bằng
- A.  $\sqrt{11}$ .      B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{11}}{2}$ .      D.  $\sqrt{6}$ .
- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 4 điểm  $A(2; 0; 2)$ ,  $B(1; -1; -2)$ ,  $C(-1; 1; 0)$ ,  $D(-2; 1; 2)$ . Thể tích của khối tứ diện  $ABCD$  bằng
- A.  $\frac{42}{3}$ .      B.  $\frac{14}{3}$ .      C.  $\frac{21}{3}$ .      D.  $\frac{7}{3}$ .
- Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , tính diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ , biết  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 0)$  và  $C(0; 0; 4)$ .
- A.  $S = \frac{\sqrt{61}}{3}$ .      B.  $S = \frac{\sqrt{61}}{2}$ .      C.  $S = 2\sqrt{61}$ .      D.  $S = \sqrt{61}$ .
- Câu 9:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(0; 1; -2)$ ,  $B(1; 2; 1)$ ,  $C(4; 3; m)$ . Tất cả giá trị của  $m$  để 4 điểm  $O, A, B, C$  đồng phẳng?
- A.  $m = 14$ .      B.  $m = -14$ .      C.  $m = 7$ .      D.  $m = -7$ .



- Câu 10:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình chóp  $ABCD$  có  $A(0;1;-1)$ ,  $B(1;1;2)$ ,  $C(1;-1;0)$  và  $D(0;0;1)$ . Tính độ dài đường cao của hình chóp  $ABCD$ .
- A.  $2\sqrt{2}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $3\sqrt{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- Câu 11:** Trong không gian với hệ trục tọa độ, cho hình bình hành  $ABCD$ . Biết  $A(2;1;-3)$ ,  $B(0;-2;5)$  và  $C(1;1;3)$ . Diện tích hình bình hành  $ABCD$  là
- A.  $2\sqrt{87}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{349}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{349}$ .                      D.  $\sqrt{87}$ .
- Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(0;1;1)$ ,  $B(-1;0;2)$ ,  $C(-1;1;0)$  và điểm  $D(2;1;-2)$ . Khi đó thể tích tứ diện  $ABCD$  là
- A.  $V = \frac{5}{6}$ .                      B.  $V = \frac{5}{3}$ .                      C.  $V = \frac{6}{5}$ .                      D.  $V = \frac{3}{2}$ .
- Câu 13:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1;2;-1)$ ,  $B(0;-2;3)$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$ .
- A.  $\frac{\sqrt{29}}{6}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{29}}{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{78}}{2}$ .                      D. 2.
- Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(0;0;2)$ ,  $B(3;0;5)$ ,  $C(1;1;0)$ ,  $A(4;1;2)$ . Độ dài đường cao của tứ diện  $ABCD$  hạ từ đỉnh  $D$  xuống mặt phẳng  $ABC$  là
- A.  $\frac{\sqrt{11}}{11}$ .                      B. 1.                      C. 11.                      D.  $\sqrt{11}$ .
- Câu 15:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (-5;3;-1)$ ,  $\vec{b} = (1;2;1)$ ,  $\vec{c} = (m;3;-1)$ . Giá trị của  $m$  sao cho  $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$  là
- A.  $m = -1$ .                      B.  $m = -2$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m = 2$ .
- Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{m} = (4;3;1)$ ,  $\vec{n} = (0;0;1)$ . Gọi  $\vec{p}$  là vectơ cùng hướng với  $[\vec{m}, \vec{n}]$  (tích có hướng của hai vectơ  $\vec{m}$  và  $\vec{n}$ ). Biết  $|\vec{p}| = 15$ , tìm tọa độ vectơ  $\vec{p}$
- A.  $\vec{p} = (9;-12;0)$ .                      B.  $\vec{p} = (45;-60;0)$ .                      C.  $\vec{p} = (0;9;-12)$ .                      D.  $\vec{p} = (0;45;-60)$ .
- Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(0;-2;2-a)$ ;  $B(a+3;-1;1)$ ;  $C(-4;-3;0)$ ;  $D(-1;-2;a-1)$ . Tập hợp các giá trị của  $a$  để bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng là tập con của tập nào sau?
- A.  $(-7;-2)$ .                      B.  $(3;6)$ .                      C.  $(5;8)$ .                      D.  $(-2;2)$ .
- Câu 18:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  biết  $A(3;-2;m)$ ,  $B(2;0;0)$ ,  $C(0;4;0)$ ,  $D(0;0;3)$ . Tìm giá trị dương của tham số  $m$  để thể tích tứ diện bằng 8.
- A.  $m = 8$ .                      B.  $m = 4$ .                      C.  $m = 12$ .                      D.  $m = 6$ .



**Câu 25:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(0; -2; 1); B(1; 0; -2); C(3; 1; -2); D(-2; -2; -1)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Bốn điểm $A, B, C, D$ không đồng phẳng.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tam giác $ACD$ là tam giác vuông tại $A$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Tam giác $ABD$ là tam giác cân tại $B$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

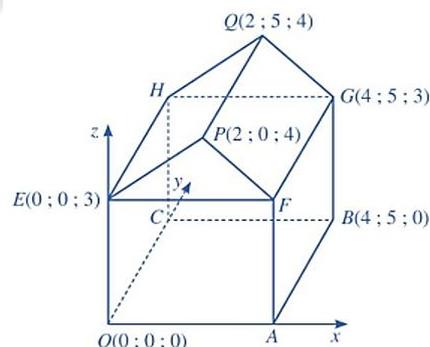
**Câu 26:** Cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(2; 1; 0); B(1; 1; 3); C(2; -1; 3); D(1; -1; 0)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối đôi một bằng nhau.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Góc giữa 2 đường thẳng $AB$ và $CD$ là $\varphi = \arccos 0,3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khoảng cách giữa 2 đường thẳng $AB$ và $CD$ bằng 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{14}}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 27:** Trong hệ trục  $Oxyz$ , cho 3 điểm  $A(1; 0; 0); B(0; 0; 1); C(2; 1; 1)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Diện tích của tam giác $ABC$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (đvdt)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Gọi $D(x; y; z)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi đó $x + y + z = 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Độ dài đường cao của tam giác $ABC$ hạ từ $A$ bằng $AH = \frac{\sqrt{30}}{5}$ (đơn vị dài)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Thể tích của khối chóp $SABCD$ với đỉnh $S(0; 3; 4)$ bằng 2 (đvtt)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 28:** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm $A$ là $(4; 0; 0)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4; 5; 3)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng $FG$ , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



**3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh trả điền kết quả vào ô trống)**

**Câu 29:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $C(4;0;0)$  và  $B(2;0;0)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác  $MBC$  bằng 3.

**Trả lời :**

**Câu 30:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(2;-1;1)$ ,  $B(3;0;-1)$ ,  $C(2;-1;3)$ ,  $D \in Oy$  và thể tích tứ diện  $ABCD$  bằng 5. Tổng tung độ của các điểm  $D$  thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng

**Trả lời :**



Lý do để từ bỏ có rất nhiều, nhưng lý do để nỗ lực phấn đấu thì chỉ có một, đó chính là để bản thân có quyền lựa chọn mà mình mong muốn



# 3

# THỐNG KÊ

- 1. KHOẢNG BIẾN THIÊN & KHOẢNG TỬ PHÂN VỊ
- 2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN



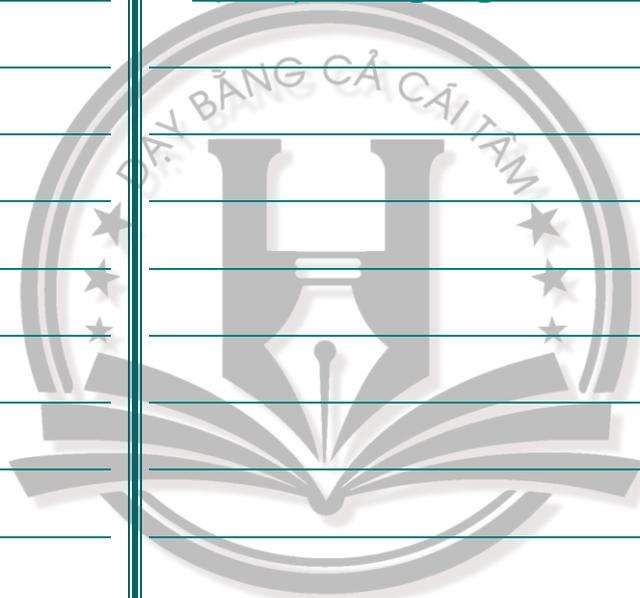
## BÀI 1 : KHOẢNG BIẾN THIÊN – KHOẢNG TỬ PHÂN VỊ

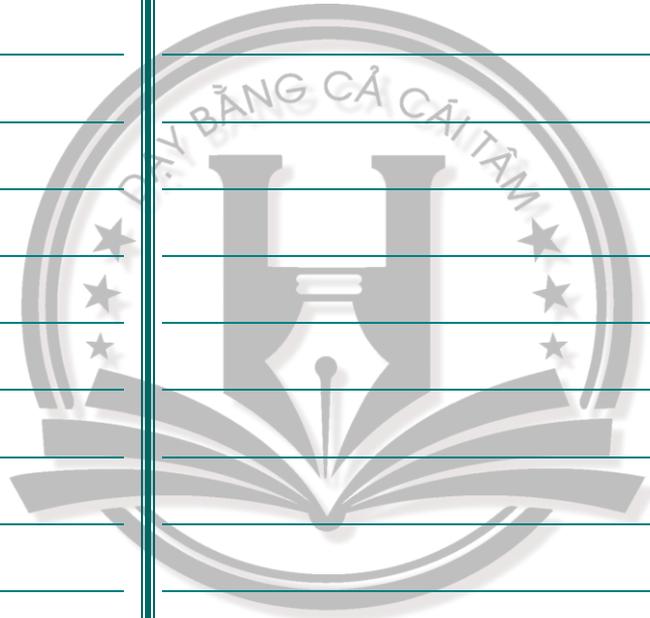


THEORY UNLOCKED

 **Memorize :**

 **Lý thuyết bài giảng :**









**Ví dụ 3:** Thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của người lao động ở hai nhà máy như sau:

Thu nhập	[5;8)	[8;11)	[11;14)	[14;17)	[17;20)
Số người của nhà máy A	20	35	45	35	20
Số người của nhà máy B	17	23	30	23	17

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở hai nhà máy trên.  
 Tìm khoảng tứ phân vị và khoảng biến thiên.

**SOLUTION:**

**Ví dụ 4:** Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

Chiều cao (cm)	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số HS 12A	1	0	15	12	10	5
Số HS 12B	0	0	17	10	9	6

- Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho các mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 12A, 12B.
- Để so sánh độ phân tán về chiều cao của học sinh hai lớp này ta nên dùng khoảng biến thiên hay khoảng tứ phân vị? Vì sao?

**SOLUTION:**



**Ví dụ 5:** Điểm kiểm tra cuối khoá môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các bảng

Điểm	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)	[90;100)
Số HS lớp A	8	20	50	17	5
Số HS lớp B	15	20	30	20	15

- Tìm khoảng biến thiên của mỗi mẫu số liệu. Có thể dùng khoảng biến thiên để biết điểm của lớp nào đồng đều hơn không?
- Tìm khoảng tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu.
- Mẫu số liệu nào có độ phân tán lớn hơn? Minh hoạ câu trả lời bằng cách biểu diễn các tứ phân vị và khoảng tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu trên trục số.

**SOLUTION:**



**QUICK TIPS MCQ MASTERY**
**1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án).**

**Câu 1:** Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40;45)	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)
Tần số	0	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 25.                                      B. 30.                                      C. 6.                                      D. 20.

**Câu 2:** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 25.                                      B. 20.                                      C. 15.                                      D. 30.

**Câu 3:** Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. 3.                                      B. 4.                                      C. 5.                                      D. 6.

**Câu 4:** Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

- A. [15;16).                                      B. [16;17).                                      C. [17;18).                                      D. [18;19).

**Câu 5:** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

- A. 7.                                      B. 7,6.                                      C. 8.                                      D. 8,6.

**Câu 6:** Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau.

Tuổi thọ	[2;3,5)	[3,5;5)	[5;6,5)	[6,5;8)
Số bóng đèn	8	22	35	15

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là

- A. [2;3,5).                                      B. [3,5;5).                                      C. [5;6,5).                                      D. [6,5;8).



**Câu 7:** Cho bảng số liệu về chiều cao của 100 học sinh một trường trung học phổ thông dưới đây. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là

Chiều cao	[150;153)	[153;156)	[156;159)	[159;162)	[162;165)	[165;168)
Số HS	7	13	40	21	13	6

- A. 156,25.                      B. 157,5.                      C. 156,38.                      D. 157,54.

**Câu 8:** Bảng dưới biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày.

Chiều cao	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Số HS	3	6	19	23	9

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

- A. 50.                      B. 40.                      C. 14,23.                      D. 70,87.

**Câu 9:** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 23,75.                      B. 27,5.                      C. 31,88.                      D. 8,125.

**Câu 10:** Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5;12,5)	[12,5;15,5)	[15,5;18,5)	[18,5;21,5)	[21,5;24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 10,75.                      B. 4,75.                      C. 4,63.                      D. 4,38.

**Câu 11:** Bảng dưới biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là:

Nhóm	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Tần số	3	6	19	23	9

- A. 50.                      B. 30.                      C. 6.                      D. 69,8.

**Câu 12:** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khoẻ. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2,7;3,0)	[3,0;3,3)	[3,3;3,6)	[3,6;3,9)	[3,9;4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 1,5.                      B. 0,9.                      C. 0,6.                      D. 0,3.

**Câu 13:** Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm nhận giá trị nào trong các giá trị dưới đây?

- A. 6.                      B. 8.                      C. 10.                      D. 12.



**Câu 14:** Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A. [14;15).                      B. [15;16).                      C. [16;17).                      D. [17;18).

**Câu 15:** Khảo sát thời gian tập thể dục trong ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A. [0;20).                      B. [20;40).                      C. [40;60).                      D. [60;80).

**Câu 16:** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

- A. 10.                              B. 11.                              C. 12.                              D. 13.

**Câu 17:** Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau.

Tuổi thọ	[2;3,5)	[3,5;5)	[5;6,5)	[6,5;8)
Số bóng đèn	8	22	35	15

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là

- A. [2;3,5).                      B. [3,5;5).                      C. [5;6,5).                      D. [6,5;8).

**Câu 18:** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2,7;3,0)	[3,0;3,3)	[3,3;3,6)	[3,6;3,9)	[3,9;4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 0,9.                              B. 0,975.                              C. 0,5.                              D. 0,575.

**Câu 19:** Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 10,75.                              B. 1,75.                              C. 3,63.                              D. 14,38.

**Câu 20:** Ghi lại tốc độ bóng trong 200 lần giao bóng của một vận động viên môn quần vợt cho kết quả như bảng bên.

Tốc độ $v$ (km/h)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)	[175;180)
Số lần	18	28	35	43	41	35

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 12,6.                      B. 11,5.                      C. 14,3.                      D. 16,8.

**2. Câu hỏi đúng sai. (Trong mỗi ý (a),(b),(c),(d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai ).**

**Câu 21:** Bảng sau biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về độ tuổi của cư dân trong một khu phố.

Nhóm	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	
Tần số	25	20	20	15	14	6	
Mệnh đề						Đúng	Sai
(a)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $R = 60$					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tứ phân vị thứ nhất là: $Q_1 = 35$					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tứ phân vị thứ ba là: $Q_3 = \frac{160}{3}$					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $\Delta_Q = \frac{65}{3}$					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 22:** Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của một số quả dưa được lựa chọn ngẫu nhiên từ một lô hàng (đơn vị: gam).

Nhóm	[1750;1770)	[1770;1790)	[1790;1810)	[1810;1830)	[1830;1850)		
Tần số	12	25	38	20	5		
Mệnh đề					Đúng	Sai	
(a)	Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $n = 100$ .					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 100 gam.					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $Q_3 = 1830$ .					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $\Delta_Q = 29,6$ .					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 23:** Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10)		
Tần số	8	10	16	24	13	7	4		
Mệnh đề							Đúng	Sai	
(a)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 4$							<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Số trung bình của mẫu số liệu xấp xỉ bằng: 8,12							<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Mốt của mẫu số liệu là: 6,21							<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = 2,05$							<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

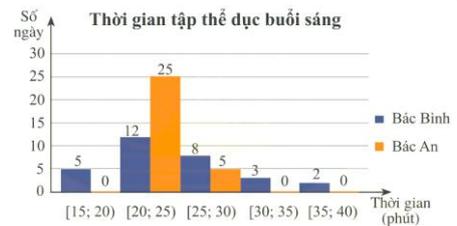
**Câu 24:** Một thư viện thống kê số người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của một tháng và kết quả được cho bởi Bảng.

Nhóm	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)	[70;75)	[75;80)	[85;90)
Tần số	4	5	7	8	3	2	1

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là: 40 (người)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tứ phân vị nhất $Q_1$ của mẫu số liệu trên là 58,5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tứ phân vị ba $Q_3$ của mẫu số liệu trên nhỏ hơn 68	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) bằng 9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 25:** Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.



Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác Bình là 25 (phút).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác An là: $\Delta_Q = 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng của bác Bình là: $Q_3' = \frac{455}{16}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác An lớn hơn bác Bình	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 26:** Bảng sau biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng).

Nhóm	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)
Tần số	15	18	10	10	5	2

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $R = 30$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Số phần tử của mẫu là $n = 60$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tứ phân vị thứ nhất là: $Q_1 = 15$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là: $\Delta_Q = 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 27:** Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,4;8,6)	[8,6;8,8)	[8,8;9,0)	[9,0;9,2)	[9,2;9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khoảng biên thiên của mẫu số liệu ghép nhóm: $l(m)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3 = 10,5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = 2,06$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4m. Thì chiều cao của cây keo này là giá trị ngoại lệ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 28:** Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ ( $m^3$ )	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 9,375.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Mốt của mẫu số liệu là $M_o = 8,0625$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất. Khi đó công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ $14,79m^3$ nước trở lên.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 29:** Giả sử kết quả khảo sát hai khu vực A và B về độ tuổi kết hôn của một số phụ nữ vừa lập gia đình được cho ở bảng sau:

Tuổi kết hôn	[19;22)	[22;25)	[25;28)	[28;31)	[31;34)
Số phụ nữ khu vực A	10	27	31	25	7
Số phụ nữ khu vực B	47	40	11	2	0

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với khu vực A là: 15 (tuổi)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với khu vực B là: 12 (tuổi)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ứng với khu vực A là: $\frac{61}{3}$ (tuổi)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì phụ nữ ở khu vực B có độ tuổi kết hôn đồng đều hơn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 30:** Bảng sau biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày.

Nhóm	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Tần số	5	8	25	20	2

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là 65 (nghìn đồng).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Trung vị của mẫu số liệu trên là 66,8 (nghìn đồng).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Tứ phân vị nhất $Q_1$ của mẫu số liệu trên là 60,8 (nghìn đồng).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Mốt của mẫu số liệu trên là 65 (nghìn đồng).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh trả lời điền kết quả vào ô trống)

**Câu 31:** Bác Tuấn kiểm tra cân nặng của 40 quả trứng được lựa chọn ngẫu nhiên từ một trang trại và ghi kết quả vào bảng dữ liệu ghép nhóm sau:

Cân nặng (gam)	[75;80)	[80;85)	[85;90)	[90;95)	[95;100)
Tần số tương đối	25%	35%	25%	10%	5%

Tính tỉ số của khoảng tứ phân vị và khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Trả lời:

**Câu 32:** Bảng tần số tương đối ghép nhóm sau đây ghi lại huyết áp tâm thu của 80 người cao tuổi ở một khu vực (đơn vị: mmHg).

Nhóm	[120;125)	[125;130)	[130;135)	[135;140)	[140;145)
Tần số tương đối	5%	10%	15%	25%	45%

Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**Trả lời :**

**Câu 33:** Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của một số quả bưởi da xanh ở một khu vực (đơn vị: kg).

Nhóm	[1, 2;1, 3)	[1, 3;1, 4)	[1, 4;1, 5)	[1, 5;1, 6)	[1, 6;1, 7)
Tần số	8	21	8	7	6

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần trăm)

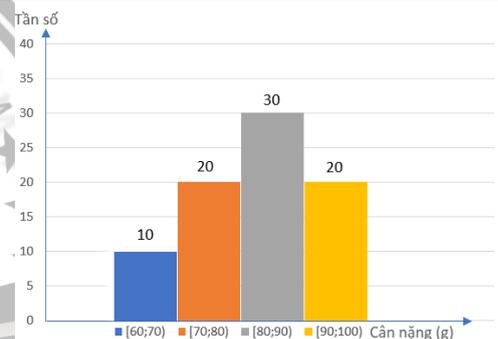
**Trả lời :**

**Câu 34:** Một trung tâm tiếng Anh tổ chức thi thử cho 120 học sinh đã đăng kí. Kết quả điểm của 120 học sinh là một mẫu số liệu có bảng tần số, tần số tích lũy như Bảng.

Nhóm	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10]
Tần số	2	4	7	7	16	28	25	20	7	4

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm ?

**Trả lời :**



**Câu 35:** Kết quả khảo sát cân nặng của 80 con tôm càng xanh 5 tháng tuổi ở một khu nuôi tôm được biểu diễn ở biểu đồ tần số bên. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Trả lời :**

**Câu 36:** Bảng sau cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê chiều dài đường bờ biển (đơn vị: kilômét) của 28 tỉnh, thành phố có giáp biển ở Việt Nam.

Nhóm	[0;100)	[100;200)	[200;300)	[300;400)
Tần số	13	11	3	1

Trung vị của mẫu số liệu đó bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Trả lời :**

**Câu 37:** Bạn Minh ghi lại thời gian tập bóng bàn của mình trong 10 ngày ở bảng sau đây (đơn vị: phút).

Thời gian tập	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)
Số ngày	3	2	2	3

Tính trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm ?

**Trả lời :**

**Câu 38:** Bảng sau cho biết thời gian hoàn thành cự li đi bộ 10000 m của một số học sinh:

Thời gian (phút)	[70;75)	[75;80)	[80;85)	[85;90)	[90;95)
Số người	5	12	18	24	19

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Làm tròn đến hàng phần mười.)

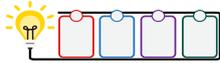
**Trả lời :**

**Câu 39:** Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài Thanh Ca được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường.

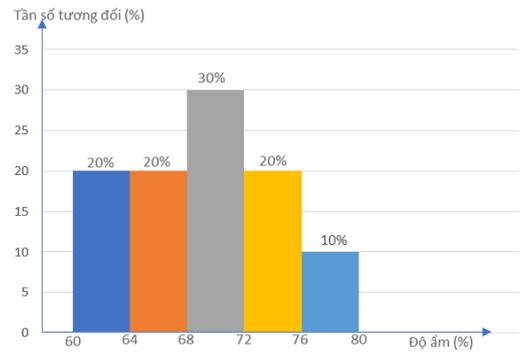
Cân nặng (g)	[250; 290)	[290; 330)	[330; 370)	[370; 410)	[410; 450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là  $\frac{a}{b}$ . Tìm  $a - 63b$

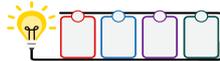
**Trả lời :**



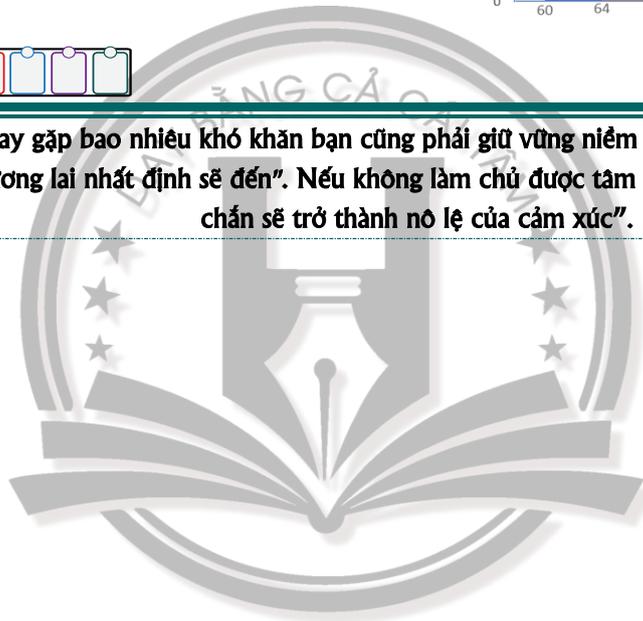
**Câu 40:** Người ta đo độ ẩm không khí lúc 12 giờ trưa mỗi ngày tại một địa điểm trong tháng 4. Kết quả các lần đo được biểu diễn ở biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dưới đây. **Tần số tương đối của độ ẩm không khí lúc 12 giờ trưa.** Tính hiệu số giữa khoảng tứ phân vị và khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên



**Trả lời :**



Dù cho hôm nay gặp bao nhiêu khó khăn bạn cũng phải giữ vững niềm tin: “Chỉ có quá khứ không thể quay lại chứ tương lai nhất định sẽ đến”. Nếu không làm chủ được tâm thái của bản thân, vậy bạn chắc chắn sẽ trở thành nô lệ của cảm xúc”.









**Ví dụ 5:** Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19;19,5)	[19,5;20)	[20;20,5)	[20,5;21)	[21;21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**SOLUTION**

**Ví dụ 6:** Mai và Ngọc cùng sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân hai bạn đi mỗi ngày trong một tháng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

Số bước (đơn vị: nghìn)	[3;5)	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)
Mai	6	7	6	6	5
Ngọc	2	5	13	8	2

- Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì bạn nào có số lượng bước chân đi mỗi ngày đều đặn hơn?

**SOLUTION**

**QUICK TIPS MCQ MASTERY**

**1. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án).**

**Câu 1:** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. [7;9).                      B. [9;11).                      C. [11;13).                      D. [13;15).

**Câu 2:** Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở Bảng.

Nhóm	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)	[90;100)
Tần số	3	5	25	4	3

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó là:

- A. 9,08.                      B. 82,4375.                      C. 74,75.                      D. 50.

**Câu 3:** Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong Bảng 18.

Nhóm	[40;45)	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)
Tần số	4	14	8	10	6	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là:

- A. 6,8.                      B. 7,3.                      C. 3,3.                      D. 46,1.

**Câu 4:** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2,7;3,0)	[3,0;3,3)	[3,3;3,6)	[3,6;3,9)	[3,9;4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 3,39.                      B. 11,62.                      C. 0,1314.                      D. 0,36.

**Câu 5:** Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 5,98.                      B. 6.                      C. 2,44.                      D. 2,5.

**Câu 6:** Bảng sau thống kê khối lượng một số quả táo được lựa chọn ngẫu nhiên từ một lô hàng (đơn vị: gam).

Khối lượng	[80;82)	[82;84)	[84;86)	[86;88)	[88;90)
Tần số	18	20	24	15	13

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là

- A. 2,64.                      B. 6,96.                      C. 84,92.                      D. 10.

**Câu 7:** Điểm trung bình môn Toán của một số học sinh khối 12 được ghi lại ở bảng sau:

Nhóm	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Tần số	10	14	19	32	25

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc khoảng

- A. (1,25;1,28).      B. (1,28;1,3).      C. (1,6;1,65).      D. (1,65;1,7).

**Câu 8:** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 31,77.      B. 32.      C. 31.      D. 31,44.

**Câu 9:** Trong một giải bóng đá, số cổ động viên đến sân cổ vũ mỗi trận đấu được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: nghìn người):

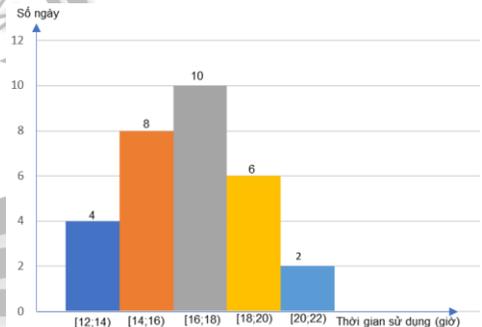
Số cổ động viên (nghìn người)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số trận đấu	5	12	19	21	7

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 3,66.      B. 4,89.      C. 13,40.      D. 2,21.

**Câu 10:** Bác Minh thống kê lại thời gian sử dụng điện thoại của mình từ khi điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi pin được sử dụng hết trong 30 ngày ở biểu đồ sau. Biểu đồ tần số theo thời gian sử dụng. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần nghìn) là

- A. 24,079.      B. 2,215.  
C. 4,906.      D. 4,907.



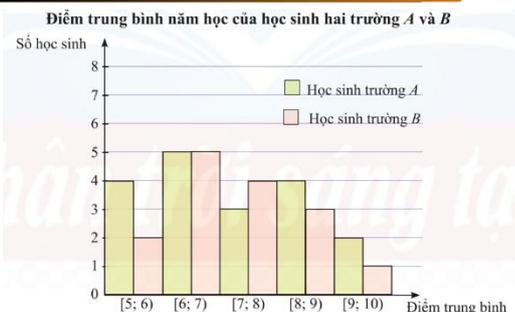
**2. Câu hỏi đúng sai. (Trong mỗi ý (a),(b),(c),(d) mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai ).**

**Câu 11:** Mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị: triệu đồng) được thể hiện như bảng dưới đây (đơn vị: triệu đồng)

Nhóm	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)
Cty A	15	18	10	10	5	2
Cty B	25	15	7	5	5	3

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm của công ty A là: $\frac{62}{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm của công ty A là: 5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm của công ty B (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 52,91	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nhận thấy độ lệch chuẩn của công ty A nhỏ hơn công ty B nên mức lương của công ty A đồng đều hơn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 12:** Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về điểm trung bình năm học của học sinh hai trường A và B. Người ta lập được bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên như sau:



Điểm trung bình	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Học sinh trường A	4	5	3	4	2
Học sinh trường B	2	5	4	3	1

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường A là: 6,1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường B là: 1,23	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường B có điểm trung bình đồng đều hơn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh trường A có điểm trung bình đồng đều hơn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 13:** Bảng 24 thống kê độ ẩm không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Đà Lạt và Vũng Tàu (đơn vị: %).

Tháng \ Độ ẩm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đà Lạt	83	79	79	87	87	87	88	89	90	91	88	86
Vũng Tàu	75	77	78	77	79	79	81	79	81	83	80	77

Bảng 24

(Nguồn: Niên giám Thống kê 2021, NXB Thống kê, 2022)

Người ta lần lượt ghép các số liệu của Đà Lạt, Vũng Tàu thành mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Nhóm	[75; 78,3)	[78,3; 81,6)	[81,6; 84,9)	[84,9; 88,2)	[88,2; 91,5)
Đà Lạt	0	2	1	6	3
Vũng Tàu	5	6	1	0	0

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Xét số liệu ở Đà Lạt ta có khoảng biến thiên là: 16,5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Xét số liệu ở Đà Lạt thì ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 3,28	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Xét số liệu ở Vũng Tàu thì phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là: 4,235	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Đà Lạt có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn vì độ lệch chuẩn nhỏ hơn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 14:** Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau:

111,6	134,9	130,3	134,2	140,9	109,3	154,4	156,3	116,1	96,7
105,2	80,8	80,8	110	109	139	145	161	126	114

Người ta lập được bảng tần số ghép nhóm như sau:

<b>Số giờ nắng</b>	[80;98)	[98;116)	[116;134)	[134;152)	[152;170)
<b>Giá trị đại diện</b>	89	107	125	143	161
<b>Số năm</b>	3	6	3	5	3

<b>Mệnh đề</b>		<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
<b>(a)</b>	Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 124,1.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>(b)</b>	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 566,19.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>(c)</b>	Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn) là 23,795.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>(d)</b>	Sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc (kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn) là 4,805%.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 15:** Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu  $A$  và  $B$  trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

<b>Giá đóng cửa</b>	[120;122)	[122;124)	[124;126)	[126;128)	[128;130)
<b>Cổ phiếu A</b>	8	9	12	10	11
<b>Cổ phiếu B</b>	16	4	3	6	21

<b>Mệnh đề</b>		<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
<b>(a)</b>	Xét mẫu số liệu của cổ phiếu $A$ ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 7,5216	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>(b)</b>	Xét mẫu số liệu của cổ phiếu $B$ ta có số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 115,28.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>(c)</b>	Xét mẫu số liệu của cổ phiếu $B$ ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{15,4096}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>(d)</b>	Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, thì cổ phiếu $A$ có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu $B$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 16:** Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên Dũng và Huy được lần lượt thống kê trong bảng bên dưới (đơn vị: mét)

Nhóm	[6, 22; 6, 46)	[6, 46; 6, 70)	[6, 70; 6, 94)	[6, 94; 7, 18)	[7, 18; 7, 42)
Dũng	3	7	5	20	5
Huy	2	5	8	19	6

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 1 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: $\approx 6,92(m)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng cho bởi Bảng 1 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: $0,26(m)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Huy cho bởi Bảng 2 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: $0,16$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Kết quả nhảy xa của vận động viên Dũng đồng đều hơn kết quả nhảy xa của vận động viên Huy.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 17:** Bảng dưới đây biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2021 tại Hà Nội và Huế (đơn vị:  $^{\circ}C$ ).

Nhóm	[16, 8; 19, 8)	[19, 8; 22, 8)	[22, 8; 25, 8)	[25, 8; 28, 8)	[28, 8; 31, 8)
Hà Nội	2	3	2	1	4
Huế	1	2	3	2	4

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Hà Nội là: $8,75$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Hà Nội (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: $3,56$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên số liệu ở Huế là: $12,75$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Huế có nhiệt độ không khí trung bình tháng đồng đều hơn vì độ lệch chuẩn nhỏ hơn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 18:** Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn.

Số giờ nắng	[130;160)	[160;190)	[190;220)	[220;250)	[250;280)	[280;310)
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	2	4	10	3

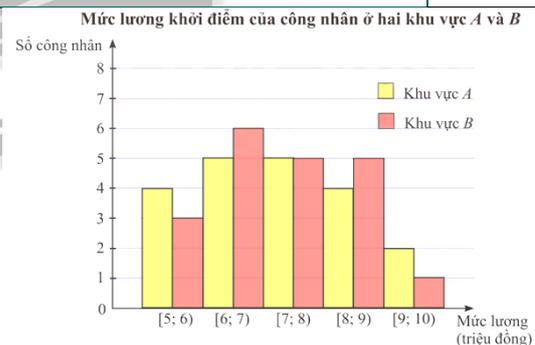
<b>Mệnh đề</b>		<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
(a)	Xét số liệu ở Nha Trang thì khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: 32,64	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Xét số liệu của Quy Nhơn ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 30,59	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 của Nha Trang đồng đều hơn	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 19:** Thầy Hạnh đã thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A và 11B ở bảng sau:

Điểm Trung bình	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Lớp 11A	1	0	11	22	6
Lớp 11B	0	6	8	14	12

<b>Mệnh đề</b>		<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
(a)	Khoảng biến thiên của điểm số học sinh lớp 11A là: 5.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì điểm trung bình của các học sinh lớp 11B ít phân tán hơn điểm trung bình của các học sinh lớp 11A.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Xét mẫu số liệu của lớp 11A ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{0,51}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp 11A có điểm trung bình ít phân tán hơn học sinh lớp 11B.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Câu 20:** Biểu đồ dưới đây mô tả kết quả điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của một số công nhân ở hai khu vực A và B.



<b>Mệnh đề</b>		<b>Đúng</b>	<b>Sai</b>
(a)	Xét mẫu số liệu của khu vực A ta có số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 6,25.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b)	Xét mẫu số liệu của khu vực A ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{1,5875}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(c)	Xét mẫu số liệu của khu vực B ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 1,3875.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d)	Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì mức lương khởi điểm của công nhân khu vực B đồng đều hơn của công nhân khu vực A.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 3. Câu hỏi trả lời ngắn. (Thí sinh trả điền kết quả vào ô trống)

**Câu 21:** Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	[5;5,5)	[5,5;6)	[6;6,5)	[6,5;7)	[7;7,5)
Số chiếc điện thoại (tần số)	2	8	15	10	5

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời :

**Câu 22:** Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau:

Cân nặng (kg)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)
Số quả mít	6	12	19	9	4

Hãy tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.)

Trả lời :

**Câu 23:** Thành tích môn nhảy cao của các vận động viên tại một giải điền kinh dành cho học sinh trung học phổ thông như sau:

Mức xà (cm)	[170;172)	[172;174)	[174;176)	[176;180)
Số vận động viên	3	10	6	1

Hãy xác định độ lệch chuẩn của thời gian sử dụng pin (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời :

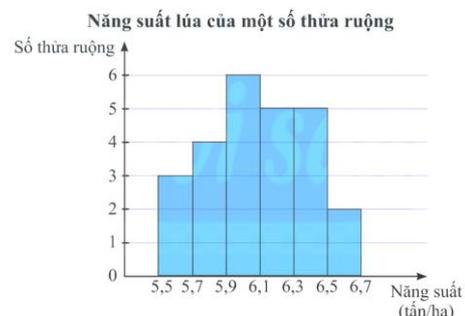
**Câu 24:** Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

Độ dài quãng đường (km)	[50;100)	[100;150)	[150;200)	[200;250)	[250;300)
Số ngày	5	10	9	9	2

Hãy xác định độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên

Trả lời :

**Câu 25:** Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị: tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau. Người ta lập được bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm tương ứng của mẫu số liệu trên như sau



Năng suất	[5,5;5,7)	[5,7;5,9)	[5,9;6,1)	[6,1;6,3)	[6,3;6,5)	[6,5;6,7)
Số thửa ruộng	3	4	6	5	5	2
Giá trị đại diện	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6
Tần số tương đối	3	4	6	5	5	2

Hãy xác định độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời :

**Câu 26:** Hãy tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Chiều cao (cm)	[160;164)	[164;168)	[168;172)	[172;176)	[176;180)
Số học sinh	3	5	8	4	1

Trả lời :

**Câu 27:** Bảng dưới đây thống kê cự li ném tạ của một vận động viên.

Cự li (m)	[19;19,5)	[19,5;20)	[20;20,5)	[20,5;21)	[21;21,5)
Tần số	13	45	24	12	6

Hãy tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời :

**Câu 28:** Chiều dài của 40 bé trai sơ sinh 12 ngày tuổi chọn ngẫu nhiên ở một bệnh viện được nhà nghiên cứu thống kê trong Bảng dưới đây:

Chiều dài (cm)	[44;46)	[46;48)	[48;50)	[50;52)	[52;54)	[54;56)
Số trẻ	3	3	10	15	7	2

Tính độ lệch chuẩn của chiều dài nhóm 40 bé trai sơ sinh (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Trả lời :

**Câu 29:** Thời gian bù giờ của 64 trận đấu bóng đá trong một giải đấu được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[2;3)	[3;4)	[4;5)	[5;6)	[6;7)
Số trận đấu	5	19	24	10	6

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

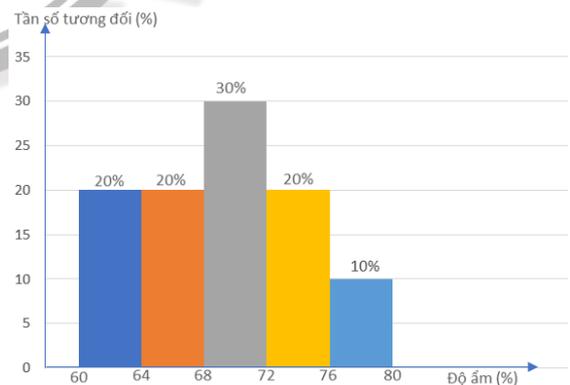
Trả lời :

**Câu 30:** Người ta đo độ ẩm không khí lúc 12 giờ trưa mỗi ngày tại một địa điểm trong tháng 4. Kết quả các lần đo được biểu diễn ở biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dưới đây.

Tần số tương đối của độ ẩm không khí lúc 12 giờ trưa

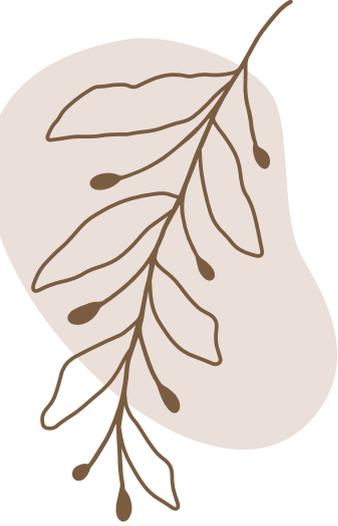
Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (Làm tròn kết quả đến hàng chục.)

Trả lời :



Khi khóc không ai dỗ dành, tôi học được sự kiên cường; khi sợ hãi không ai bên cạnh, tôi học được cách đứng cảm; khi muộn phiền không ai hỏi han, tôi học được cách chịu đựng; khi mệt mỏi không ai để dựa dẫm, tôi học được cách tự lập...

Chính từ đó, tôi đã tìm thấy chính mình, tôi chỉ có một, chỉ có một "tôi" mà thôi!



---

---

*Thank You*

CẢM ƠN EM ĐÃ TIN TƯỞNG VÀ LỰA CHỌN  
TẬP ĐOÀN TOÁN THẦY HẠNH



---

---

