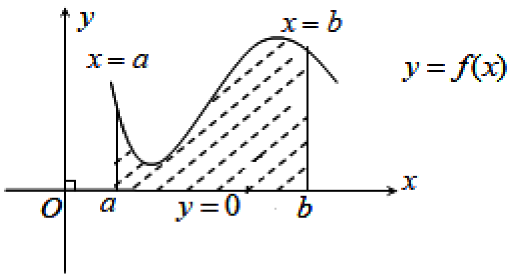
BÀI 3
ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình thang cong

a. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



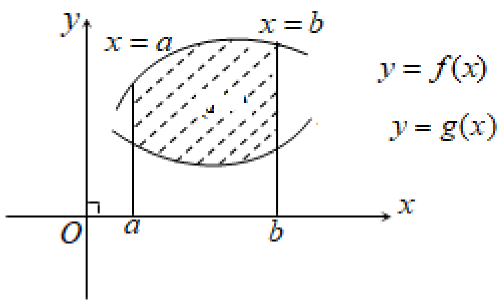
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox $(y = 0)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$

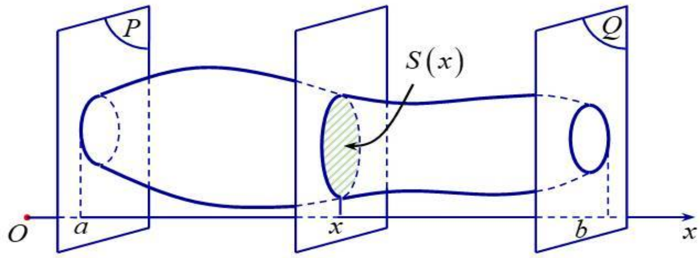


Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$$

2. Thể tích hình khối

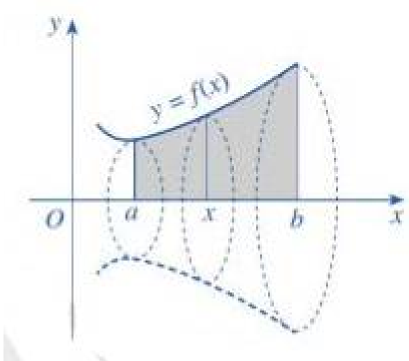
a. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

b. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

DẠNG 1
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một hàm số $y = f(x)$, trục hoành $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$.

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

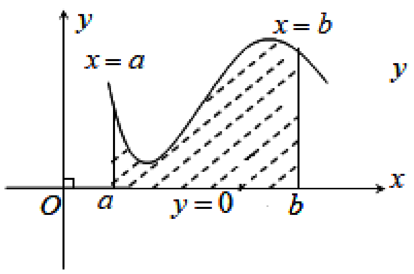
Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối của $|f(x)|$ ta làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.

Bước 2: Tính $S=\int\limits_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$

Chú ý: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$

- Nếu $f(x)\ge 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính bởi: $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$



- Nếu $f(x)\le 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính bởi: $S=-\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

2. Dạng 2: Tính diện hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a,x=b.$

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f\left(x\right) \\ y=g\left(x\right) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ là $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$

Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta làm như sau:

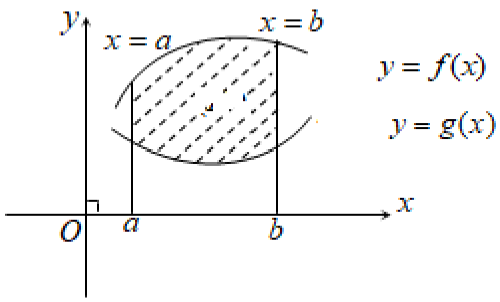
Bước 1: Giải phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_n\in\left(a;b\right)$ $\left(a<x_1<x_2<...<x_n<b\right)$.

Bước 2: Tính $S=\int\limits_a^{x_1}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$

$=\left|\int\limits_a^{x_1}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\right|$

Chú ý: Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$.

- Nếu $f\left(x\right)\ge g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$



- Nếu $f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int\limits_a^b\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$

3. Dạng 3: Tính diện hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Giải phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n$ $\left(x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n\right)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f\left(x\right) \\ y=g\left(x\right) \end{cases}$ là $S=\int\limits_{x_1}^{x_n}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$

Bước 2: Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta làm như sau:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+...+\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|$$

Chú ý: Khi tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường mà không thuộc ba dạng trên ta thường vẽ đồ thị hàm số các đường trên hệ trục Oxy, rồi dựa vào đồ thị ta tính được diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường đó.

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

b) Đồ thị hàm số $y=x^3+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$.

c) Đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$.

d) Đồ thị hàm số $y=(x+2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=\cos x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$.

b) Đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

c) Đồ thị hàm số $y=3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị của hai hàm số $y=x^2$, $y=2x$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$

b) Đồ thị của hai hàm số $y=x^2, y=2-x$ và hai đường thẳng $x=0, x=2.$

c) Đồ thị của hai hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$

d) Đồ thị của các hàm số $y=x^3, y=2x-1$ và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và trục hoành.

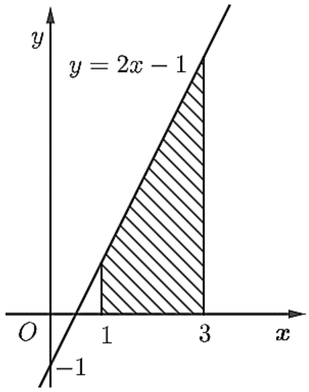
b) Đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=2-x^2$.

c) Đồ thị hàm số $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

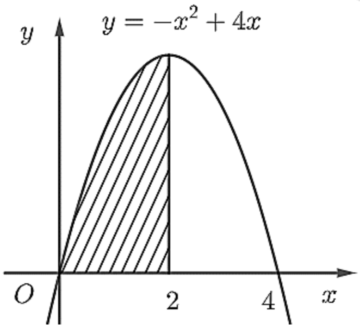
d) Đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$.

e) Đồ thị hàm số $y=x^2-1$, trục hoành và đường thẳng $x=3$.

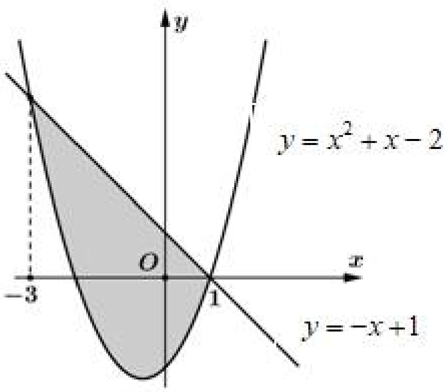
Bài 5. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới :



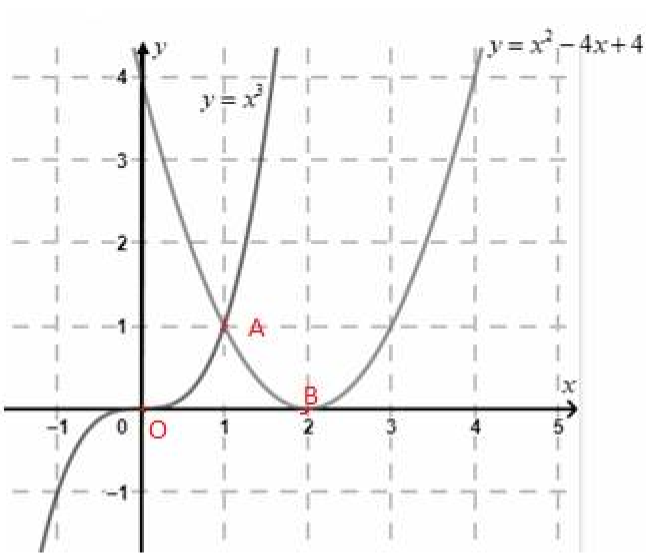
Bài 6. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới :



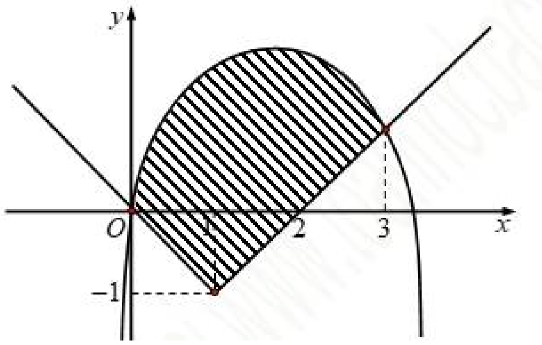
Bài 7. Tính diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới :



Bài 8. Tính diện tích phần hình phẳng là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



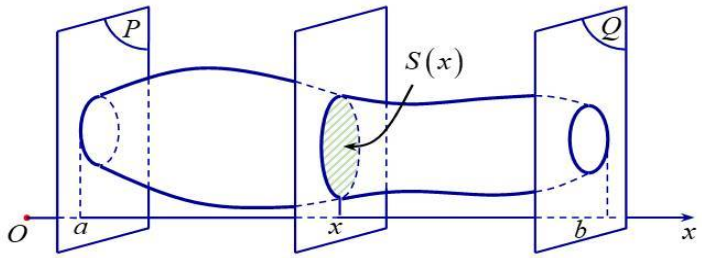
Bài 9. Cho (H) là hình phẳng được được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi}\, x\le 1\\ x-2 & \text{khi }\, x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu?



Bài 10. Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x, y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ có diện tích là $S=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $I=a-b$.

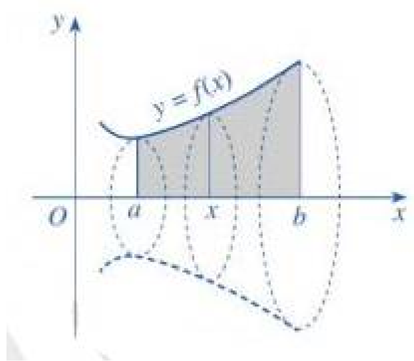
DẠNG 2
THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức: $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

2. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng: $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx$

Bài 1. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2.

Bài 2. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$ và $x=5$ quanh trục Ox.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x}, x\le 5$, trục tung, trục hoành quay quanh trục hoành.

Bài 3. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0; x=1$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{\tan x}, y=0, x=0, x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox.

Bài 4. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

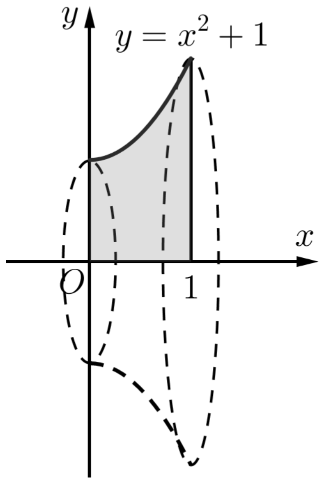
a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-3x+2$ và trục hoành quay quanh trục hoành.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2+x$ và $y=2x$ quay quanh trục hoành.

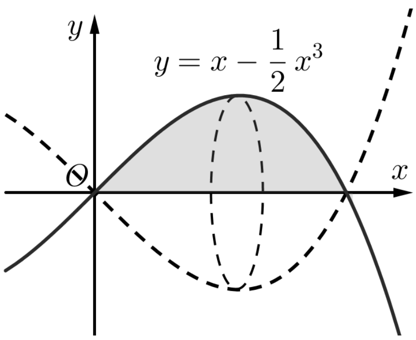
c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quay quanh trục hoành.

d) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số parapol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay quanh trục hoành.

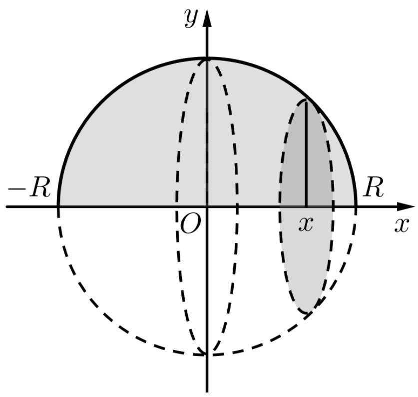
Bài 5. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.



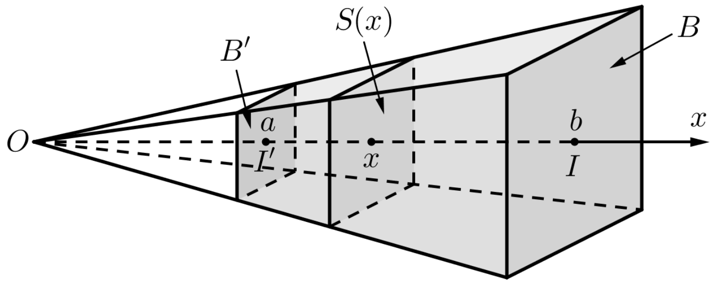
Bài 6. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường $y = x - \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = 0,\ x = \sqrt{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.



Bài 7. Sử dụng tích phân, tính thể tích khối cầu có bán kính R.



Bài 8. Cho khối chóp cụt đều tạo bởi khối chóp đỉnh S, diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao h. Chọn trục Ox chứa đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S. Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cụt đều lần lượt cắt Ox tại I và I'. Đặt $OI = b,\ OI' = a\ (a < b)$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại $x\ (a \le x \le b)$, cắt khối chóp cụt đều theo hình phẳng có diện tích $S(x)$.



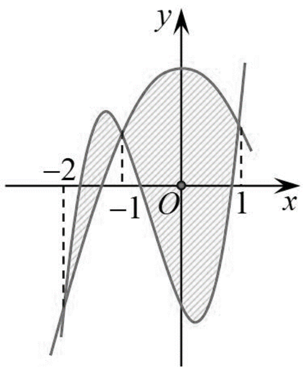
a) Chứng minh rằng $S\left(x\right)=B\dfrac{x^2}{b^2}$.

b) Dựa vào tích phân tính thể tích khối chóp cụt đều đó.

DẠNG 3

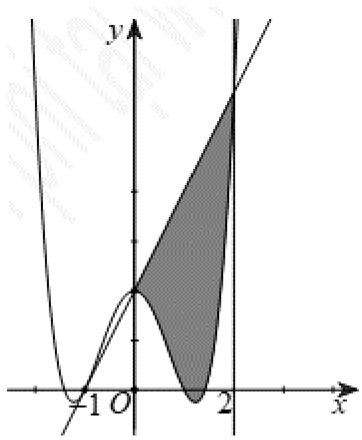
BÀI TOÁN DIỆN TÍCH , THỂ TÍCH LIÊN QUAN HÀM SỐ $f(x)$

Bài 1. Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?

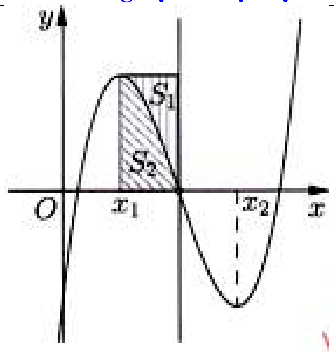
Bài 2. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0; x=2$; có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1; x=0$ có diện tích bằng bao nhiêu?

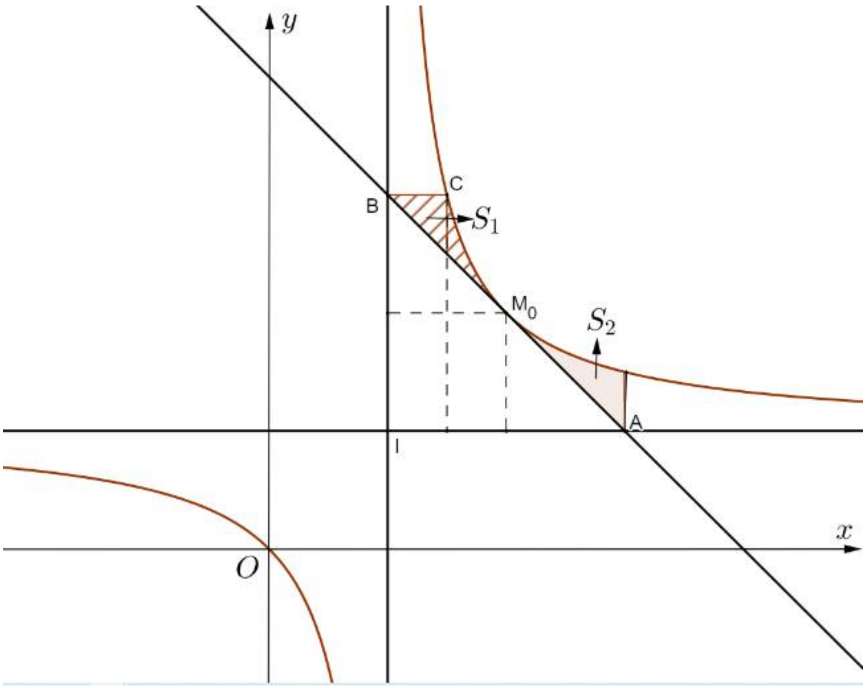
Bài 3. Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là $-2,-1,1$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng bao nhiêu?

Bài 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



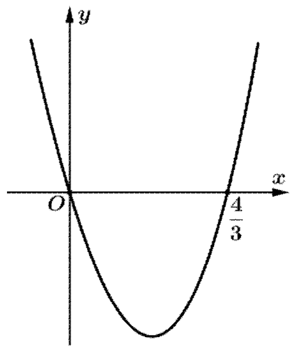
Bài 5. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a \quad (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng bao nhiêu ?

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C). Gọi giao điểm của hai đường tiệm cận là I. Điểm $M_0(x_0; y_0)$ di động trên (C), tiếp tuyến tại đó cắt hai tiệm cận lần lượt tại A, B và $S_{\Delta IAB} = 2$. Tìm giá trị $IM_0{}^2$ sao cho $\dfrac{S_1 + S_2}{S_{\Delta IAB}} = 1$ (với S_1, S_2 là 2 hình phẳng minh họa bên dưới)



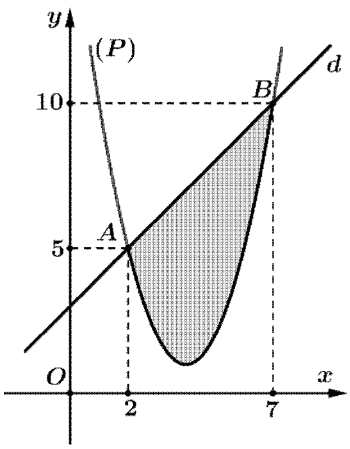
DẠNG 4
BÀI TOÁN DIỆN TÍCH , THỂ TÍCH LIÊN QUAN HÀM SỐ $f'(x)$

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+ax^2+bx\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

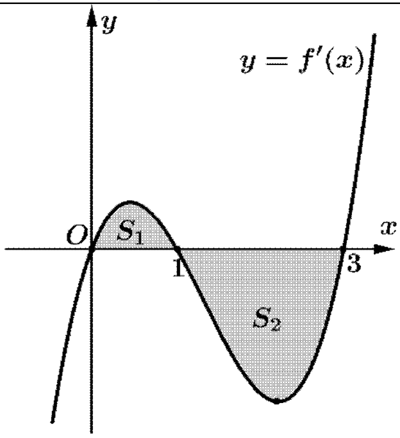


Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng $\frac{m}{n}\left(m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$

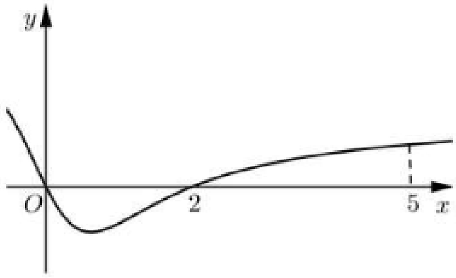
Bài 2. Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{6}$. Khi đó hãy tính tích phân $\int\limits_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x$.



Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.

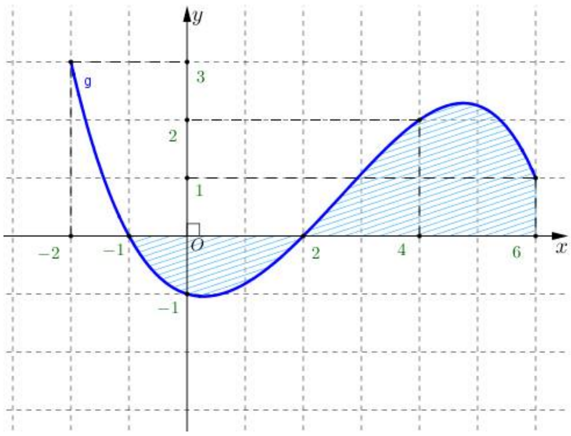


Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



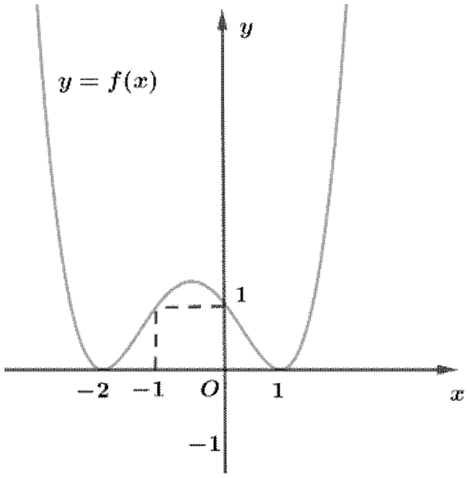
Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(a), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu ?

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



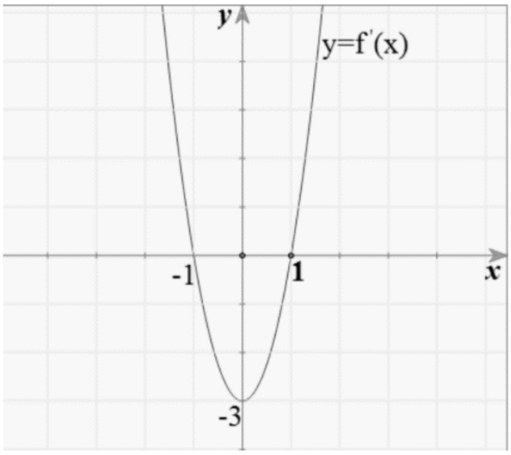
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;6]$ là $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(a)$ với $a\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của a.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng bao nhiêu?

Bài 7. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \left(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



Bài 8. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$.

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a, x=b$ bằng

A. $\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$. **B.** $\int_a^b |f(x)+g(x)|dx$. **C.** $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$. **D.** $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$.

Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 3^x dx$. **B.** $S=\pi\int_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S=\pi\int_0^2 3^x dx$. **D.** $S=\int_0^2 3^{2x} dx$.

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 4. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Câu 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5, y=6x$, $x=0$, $x=1$.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2, y=2x$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Câu 7. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x, y=0, x=-10, x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Câu 8. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x, y=1$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3 + 11x - 6, y = 6x^2$ và hai đường thẳng $x = 0,\ x = 2$ là

A. 2. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 10. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là

A. $\frac{1}{\ln 2}$ **B.** $\frac{3}{\ln 2}$ **C.** $\frac{\pi}{\ln 2}$ **D.** $\frac{3\pi}{\ln 2}$

Câu 11. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là:

A. $e^2 - 1$ **B.** e^2 **C.** $e^2 + 1$ **D.** $(e^2 - 1)\pi$

Câu 12. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x, Ox, x = 0, x = \pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = -x^2 + x + 6$ và $y = 0$ bằng

A. $\frac{95\pi}{6}$. **B.** $\frac{95}{6}$. **C.** $\frac{125\pi}{6}$. **D.** $\frac{125}{6}$.

Câu 15. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 3; x = 0$ và $y = 0$ bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 16. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2$ và đường thẳng $y = 6$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{40}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 17. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 4x - 3$ là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Câu 18. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = 8 - x^2$ là

A. 14. **B.** 28. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{64}{5}$.

Câu 19. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y = x^2 - 1$ và $y = x - 1$ bằng:

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 20. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x^3 - 6x$ và $y = x^2$ bằng

A. $\dfrac{125}{12}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{63}{4}$. **D.** $\dfrac{253}{12}$.

Câu 21. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=|\ln x|, y=1$ được tính bởi công thức:

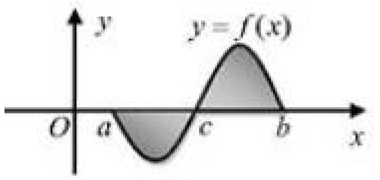
A. $S=\int_1^e \left|\left(|\ln x|-1\right)\right| \mathrm{d}x$

B. $S=\int_{\frac{1}{e}}^e \left(1-|\ln x|\right) \mathrm{d}x$

C. $S=\int_1^e \left|\left(1-|\ln x|\right)\right| \mathrm{d}x$

D. $S=\int_{\frac{1}{e}}^e \left(|\ln x|-1\right) \mathrm{d}x$

Câu 22. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



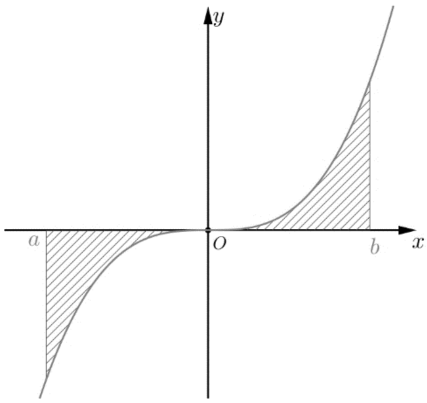
A. $S=\int_a^b f(x)dx$.

B. $S=\left|\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

D. $S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a, x=b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D, mệnh đề nào sau đây đúng?

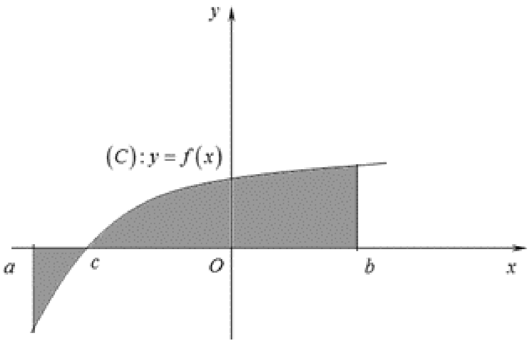
A. $S_D=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S_D=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S_D=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 24. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



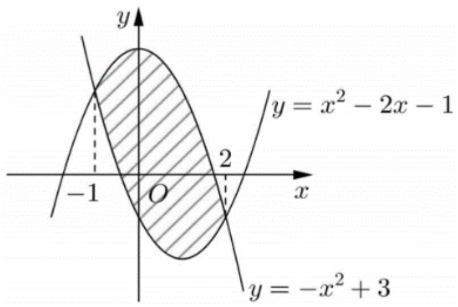
A. $S = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S = -\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

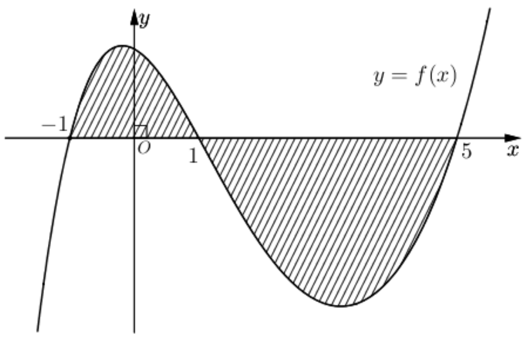
D. $S = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Câu 25. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}(-2x+2)dx$ **B.** $\int_{-1}^{2}(2x-2)dx$ **C.** $\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$ **D.** $\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)dx$

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

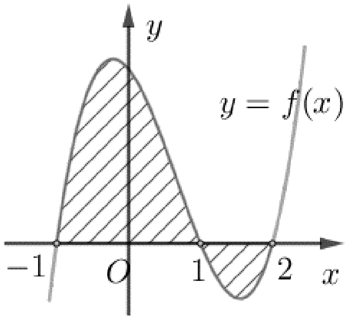
A. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



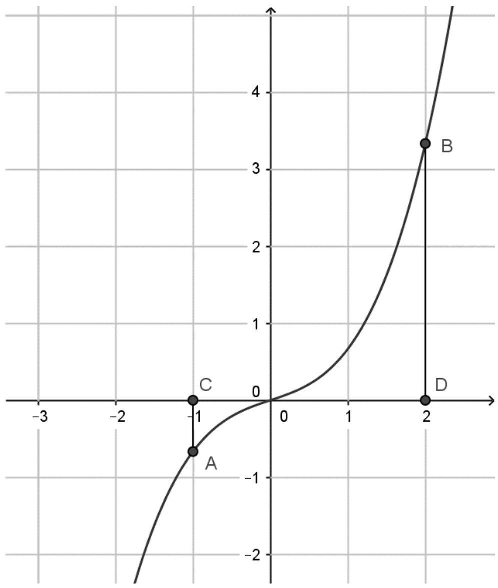
A. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

B. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

C. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

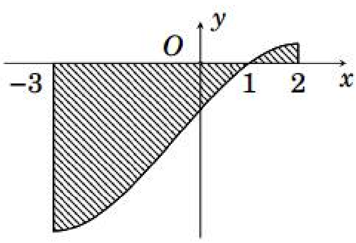
D. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Câu 28. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^{0} f(x)dx$, $b = \int_{0}^{2} f(x)dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



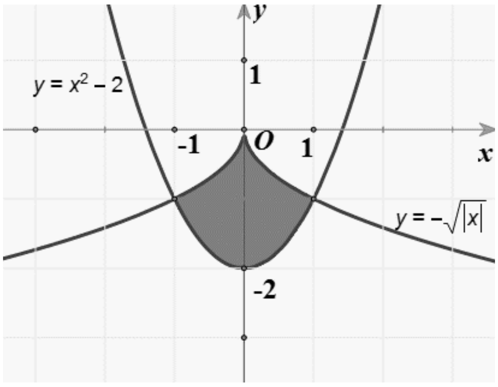
A. $S = b - a$ **B.** $S = b + a$ **C.** $S = -b + a$ **D.** $S = -b - a$

Câu 29. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-3}^{1} f(x)dx$, $b = \int_{1}^{2} f(x)dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S = a + b$. **B.** $S = a - b$. **C.** $S = -a - b$. **D.** $S = b - a$.

Câu 30. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{1}\left(x^2 - 2 + \sqrt{|x|}\right)dx$. **B.** $\int_{-1}^{1}\left(x^2 - 2 - \sqrt{|x|}\right)dx$.

C. $\int_{-1}^{1}\left(-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}\right)dx$. **D.** $\int_{-1}^{1}\left(-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}\right)dx$.

Câu 31. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b\ (a < b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V = \int_a^b |f(x)|dx$ **B.** $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V = \int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V = \pi\int_a^b f(x)dx$

Câu 32. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V = 3036$ **B.** $V = 3036\pi$ **C.** $V = 1518$ **D.** $V = 1518\pi$

Câu 33. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2 - 2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V = 156$ **B.** $V = 156\pi$ **C.** $V = 312$ **D.** $V = 312\pi$

Câu 34. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $2\sqrt{9 - x^2}$

A. 90 **B.** 72π **C.** 78π **D.** 72

Câu 35. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0, x = 1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (0 \le x \le 1)$ là một tam giác đều có cạnh bằng x.

A. $V = \dfrac{12\pi}{5}$. **B.** $V = \dfrac{12}{5}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 36. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^2 (x^2+3)dx$ **B.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)dx$ **C.** $V=\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$ **D.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$

Câu 37. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{\pi(e^2+1)}{2}$ **B.** $V=\frac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\frac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\frac{\pi(e^2-1)}{2}$

Câu 38. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\frac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\frac{4}{3}$

Câu 39. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Câu 40. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi(\pi+1)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2(\pi+1)$ **D.** $V=2\pi^2$

Câu 41. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$, đường thẳng $d: y=2x$ và đường thẳng $x=0, x=2$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int_0^2 (x^2-2x)^2 dx$. **B.** $\pi\int_0^2 4x^2dx-\pi\int_0^2 x^4dx$. **C.** $\pi\int_0^2 4x^2dx+\pi\int_0^2 x^4dx$. **D.** $\pi\int_0^2 (2x-x^2)dx$

Câu 42. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$. **B.** $V=\int_0^2 (x^2+3)dx$. **C.** $V=\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$. **D.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)dx$.

Câu 43. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 44. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int_1^4 x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int_1^4 x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_1^4 \left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x$.

Câu 45. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x+2}$ và hai trục toạ độ. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** 2. **C.** 2π. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 46. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 47. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=4,x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Câu 48. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2,y=0,x=1,x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **C.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Câu 49. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Câu 50. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x},y=0,x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Câu 51. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, các đường thẳng $x=0$, $x=\ln 3$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục hoành là

A. 2π. **B.** 4π. **C.** 4. **D.** π.

Câu 52. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$ **B.** $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$ **C.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$ **D.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$

Câu 53. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$ **B.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2 dx$ **C.** $\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2 dx$ **D.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Câu 54. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Câu 55. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và $x=5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh Ox bằng

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Câu 56. Thể tích vất thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ và trục hoành quay quanh Ox là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 57. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ xung quanh trục Ox.

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{27\pi}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 58. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\frac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 59. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Câu 60. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bở đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=\frac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\frac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=e^2-1$.

Câu 61. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $V=\frac{512\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{32}{3}$. **C.** $V=\frac{32\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{512}{15}$.

Câu 62. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x-2$ và trục hoành. Quay hình phẳng (H) quay quanh trục hoành, ta được một khối nón tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{81}{10}\pi$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 63. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi^2}{30}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Câu 64. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=2$, khi quay xung quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{5\pi}{6}$. **D.** $\frac{4\pi}{5}$.

Câu 65. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox là

A. $\frac{71\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71}{35}$. **D.** $\frac{81\pi}{35}$.

Câu 66. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Câu 67. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-x$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{15}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi}{5}$.

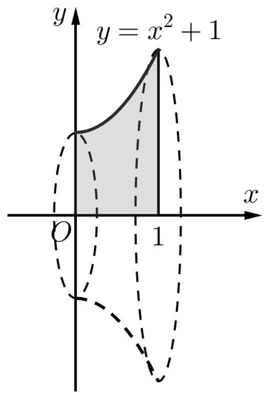
Câu 68. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-5x+4$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{81}{10}$. **C.** $\dfrac{81\pi}{10}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Câu 69. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$ và $x = 3$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{18\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{18}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

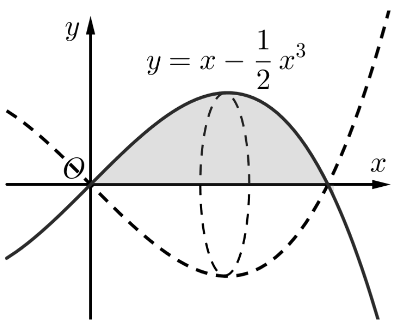
Câu 70. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$.



Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \int_0^1 (x^2 + 1)\,dx$. **B.** $V = \pi\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx$. **C.** $V = \int_0^1 (x^2 + 1)^2\,dx$. **D.** $V = \pi\int_0^1 (x^2 + 1)^2\,dx$.

Câu 71. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường $y = x - \dfrac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.

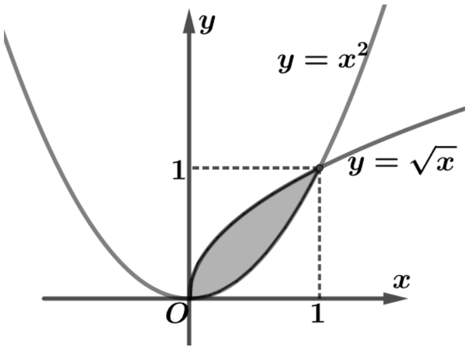


Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \dfrac{1}{2}x^3\right)^2 dx$. **B.** $V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \dfrac{1}{2}x^3\right)^2 dx$.

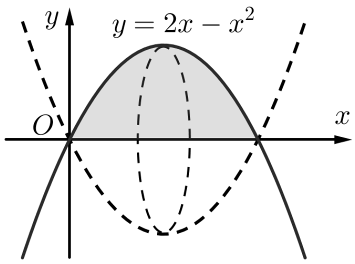
C. $V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \dfrac{1}{2}x^3\right) dx$. **D.** $V = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \dfrac{1}{2}x^3\right) dx$.

Câu 72. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2$ và đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox bằng



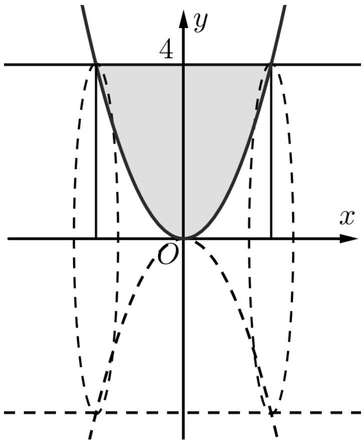
A. $V = \dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V = \dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V = \dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V = \dfrac{7\pi}{10}$.

Câu 73. Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$ khi quay quanh trục Ox là:



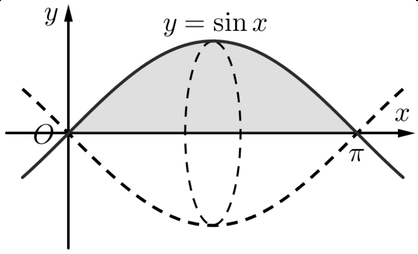
A. $\dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{14\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 74. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ quay quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bằng:



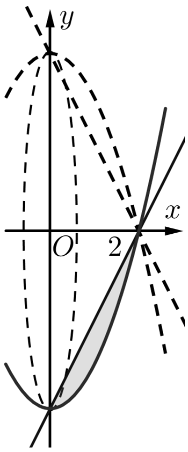
A. $\dfrac{64\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{128\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{256\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{152\pi}{5}$.

Câu 75. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ là $F(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ khi quay quanh trục Ox là:



A. $\frac{\pi^2}{4}$. **B.** $\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 76. Thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$ quay quanh trục Ox bằng:



A. $\frac{416\pi}{15}$. **B.** $\frac{752\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 77. Trong mặt phẳng Oxy, cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số sau: $y=e^{\frac{x}{2}}; y=0$ và $x=0; x=2$.

a) Đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục hoành tại một điểm.

b) Đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục tung tại một điểm.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $a.e+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+2b=-2$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng πe^{m}, với $m\in\mathbb{Z}$. Khi đó $m^{\log_{\frac{1}{2}}5}=\frac{1}{5}$.

Câu 78. Trong mặt phẳng Oxy, cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-2x$ và trục hoành

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm.

b) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục tung tại một điểm.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{4}{5}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{16\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Câu 79. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ và $y=g(x)=x-1$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(1;0);(4;3)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox bằng $\frac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

Câu 80. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ và $y=g(x)=x$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(-\sqrt{3};0);(\sqrt{3};0)$.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm $(0;0);(-2;2);(2;-2)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{7}{2}$ (đơn vị diện tích).

Câu 81. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - x$ và $y = f(x) = 2x^2 - x$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y = 0$ bằng $\frac{3}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{5}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 82. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = x + \sqrt{x}$ và $y = x + x^2$.

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x = 0$ hoặc $x = -1$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ được tính theo công thức $S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ được tính theo công thức $S = \int_0^1 \left(x + \sqrt{x}\right) dx - \int_0^1 \left(x + x^2\right) dx$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ bằng $\frac{1}{3}$ (đơn vị diện tích)

Câu 83. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y = -2x + 8$ có đồ thị là (d) và các đường thẳng $x = 1$, $x = 3$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giởi hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x = 1$; S_2 là diện tích hình phẳng giởi hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x = 5$.

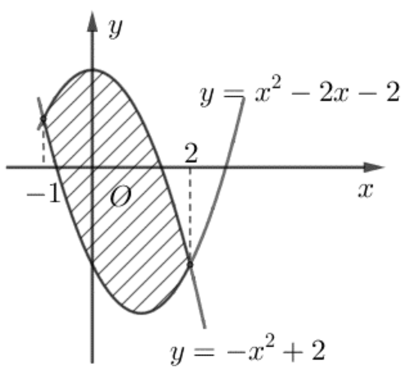
a) Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là 1.

b) Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

c) $S_1 = 9S_2$.

d) Tính diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, $y = -2x + 8$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ bằng $\frac{23}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 84. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



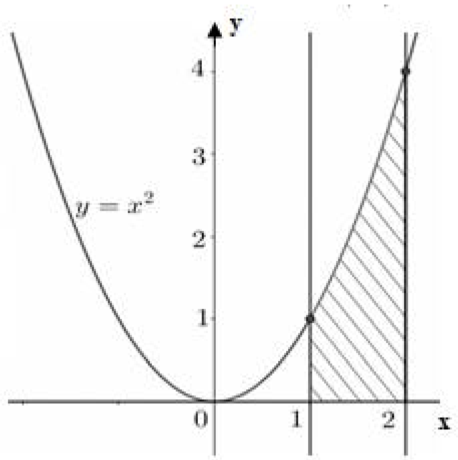
a) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2-2x-2$, $y=-x^2+2$, $x=-1, x=2$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)dx$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $S=\int_{-1}^{0}\left(-2x^2+2x+4\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$.

d) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{13}{2}$ (đơn vị diện tích)

Câu 85. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



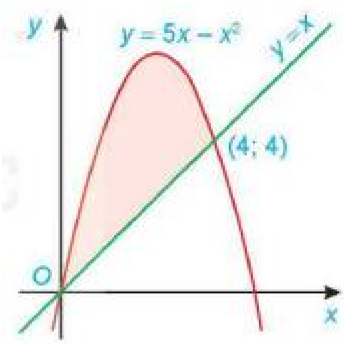
a) Đồ thị $y=x^2$ cắt đường thẳng $x=2$ tại điểm $(2;1)$.

b) Diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=x^2; x=0; x=2$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{7}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{31\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Câu 86. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



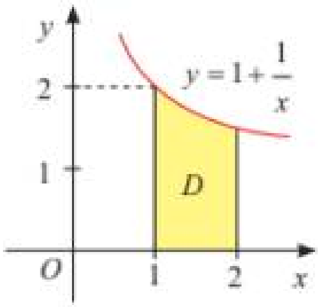
a) Đồ thị $y=5x-x^2$ cắt đường thẳng $y=x$ tại hai điểm $(0;0);(4;4)$.

b) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=5x-x^2; y=x; x=0; x=4$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{83}{4}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{153\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Câu 87. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên dưới.



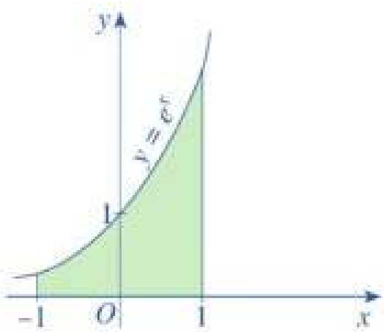
a) Đồ thị hàm số $y=1+\frac{1}{x}$ cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

b) Hình phẳng (D) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=1+\frac{1}{x}; x=0; x=1; x=2$.

c) Biết diện tích hình phẳng (D) bằng $m+n\ln 2$, với $m,n\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2025m-2024n=1$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (D) quay quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi+c\pi\ln 2$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+2b+3c=10$.

Câu 88. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



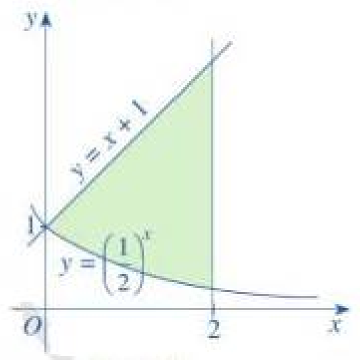
a) Đồ thị hàm số $y=e^x$ cắt đường thẳng $x=-1$ tại điểm $\left(-1;\frac{1}{e}\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y=e^x$ cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $\int_{-1}^{1} e^x dx$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\left(\frac{a.e^b-1}{c.e^2}\right).\pi$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $3a+2b-c=11$.

Câu 89. Trong mặt phẳng Oxy, cho các đồ thị $y=x+1; y=\left(\frac{1}{2}\right)^x; x=0; x=2$ như hình bên dưới. Gọi (H_1) là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y=x+1; x=0; x=2$ và có diện tích là S_1. Gọi (H_2) là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x; x=0; x=2$ và có diện tích là S_2. Gọi $\left(H_3\right)$ là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y=x+1; y=\left(\frac{1}{2}\right)^x; x=0; x=2$ và có diện tích là S_3.



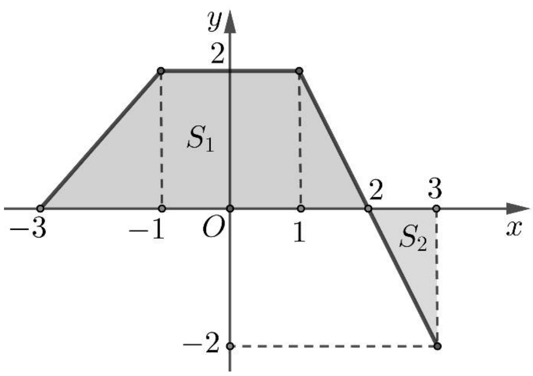
a) $S_1=\int_0^2(x+1)dx$

b) $S_2=\int_0^2\left(\frac{1}{2}\right)^x dx$.

c) $S_3=S_1+S_2$

d) $S_3=a+\frac{b}{c\ln 2}$ (đơn vị diện tích), với $a,b,c\in\mathbb{Z}; b<0$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó, $a+b+c=5$

Câu 90. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2 (S_1 là phần tô đậm nằm trên trục hoành, S_2 là phần tô đậm nằm dưới trục hoành như hình vẽ)



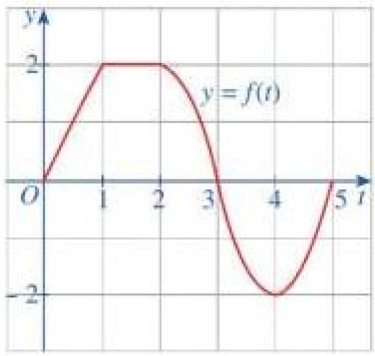
a) $S_2=\int_2^3(2x-4)\mathrm{d}x$

b) $S_1=\int_{-3}^{-1}(x+3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int_1^2(-2x+4)\mathrm{d}x$

c) $S_{(H)}=S_1+\int_2^3(-2x+4)\mathrm{d}x$

d) Giới hạn hình phẳng (H) có diện tích bằng 10 (đơn vị diện tích).

Câu 91. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như hình vẽ.



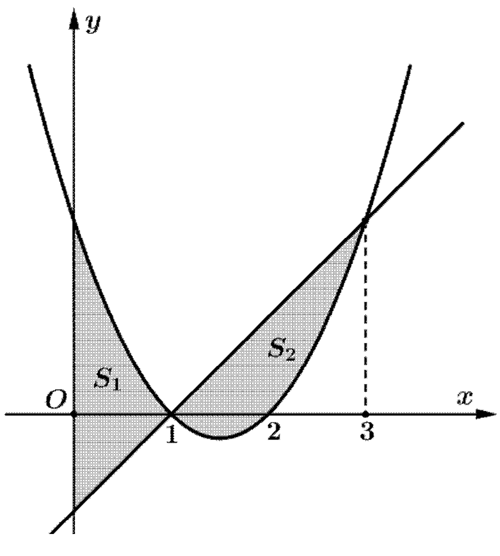
a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0; t = 1$ là $S = \frac{1}{2}\int_0^1 t dt$.

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 1; t = 2$ là $\int_1^2 2t dt$.

c) Tích phân $\int_2^3 f(x)dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 2; t = 3$.

d) Với $t \in [3;5]$ đồ thị hàm số $y = f(t)$ là một parabol có dạng: $y = f(t) = at^2 + bt + c$. Khi đó, diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 3; t = 5$ bằng $\frac{14}{9}$ (đơn vị diện tích).

Câu 92. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và $y = x - 1$ và $S_1; S_2$ là phần diện tích phần được tô đậm như trong hình dưới.



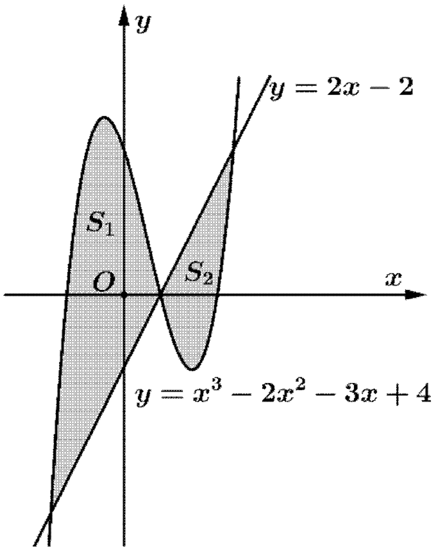
a) Đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ cắt đường thẳng $y = x - 1$ tại hai điểm $(1;0);(3;0)$.

b) $S_1 = \int_0^1 \left(-x^2 + 4x - 3\right)\mathrm{d}x$

c) $S_1 = S_2$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$; $y = x - 1$; $x = 0$; $x = 3$ bằng $\frac{10}{3}$(đơn vị diện tích).

Câu 93. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y = 2x - 2$ và $S_1; S_2$ là phần diện tích phần được tô đậm như trong hình dưới.



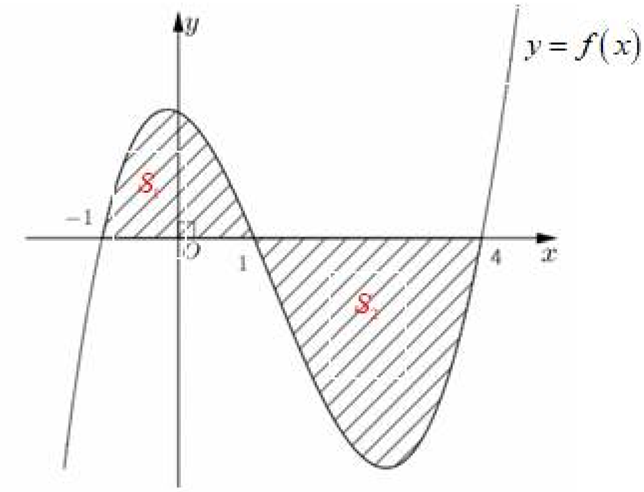
a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6), B(1;0), C(3;4)$.

b) $S_1 = \int_{-2}^{1} \left(-x^3 + 2x^2 + 5x - 6\right)dx$

c) $S_2 = \int_3^1 \left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right)dx$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C), đường thẳng (d) và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 3$ bằng $\frac{253}{12}$ (đơn vị diện tích).

Câu 94. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới. Gọi $S_1; S_2$ là phần diện tích phần được gạch chéo như trong hình dưới.



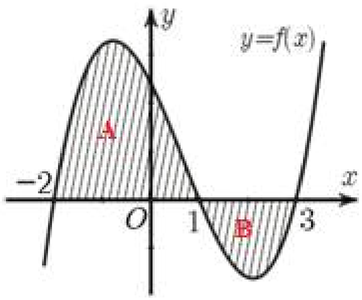
a) Đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $y=0$ tại ba điểm phân biệt.

b) $S_1=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{dx}$

c) $S_2=\int_{4}^{1} f(x)\mathrm{dx}$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$; trục Ox; $x=-1$; $x=4$ bằng $\frac{259}{24}$ (đơn vị diện tích).

Câu 95. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{5}{2}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới. Gọi $A;B$ là phần diện tích phần được gạch chéo như trong hình dưới.



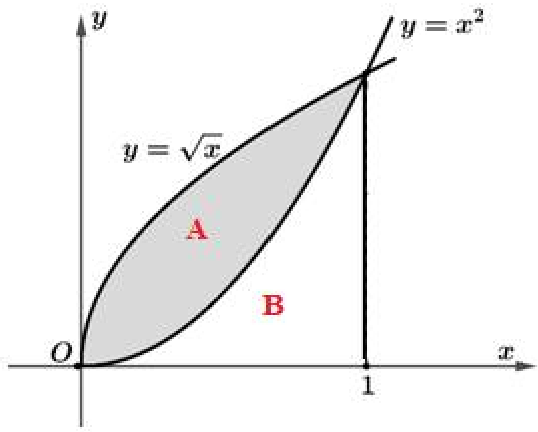
a) Đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $y=0$ tại một điểm phân biệt.

b) $A=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

c) $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x<\int_{3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$; trục Ox; $x=-2$; $x=3$ bằng $\frac{1265}{144}$ (đơn vị diện tích).

Câu 96. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt{x}$, $y=g\left(x\right)=x^2$ và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là phần diện tích được tô đậm và B là phần diện tích không tô đậm như trong hình dưới.



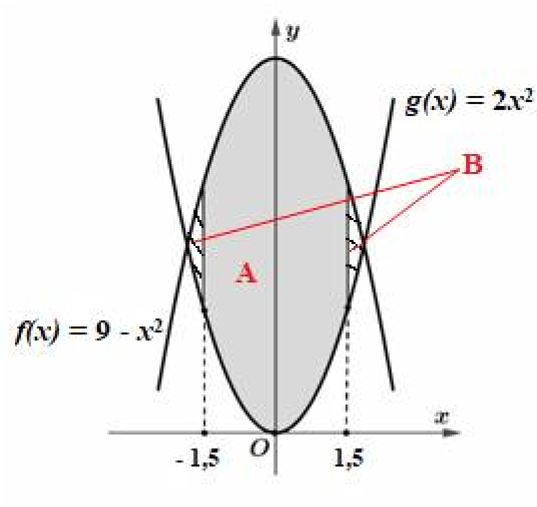
a) Hai đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ cắt nhau tại một điểm.

b) $B=\int\limits_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x$

c) $A-B=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

d) $A=\dfrac{2}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 97. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai hàm số $f\left(x\right)=9-x^2$, $g\left(x\right)=2x^2$ và hai đường thẳng $x=-1,5, x=1,5$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là phần diện tích được tô đậm và B là phần diện tích được gạch chéo như trong hình dưới.



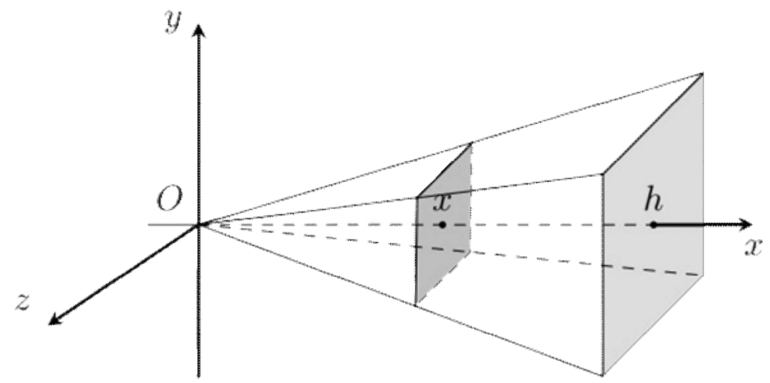
a) Hai đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ cắt nhau tại hai điểm $\left(-3;9\right)$ và $\left(3;9\right)$.

b) $A=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) $B = 2\int_{1,5}^{\sqrt{3}} \left(9 - x^2\right) dx$

d) $A + B = 12\sqrt{a}$ (đơn vị diện tích), với $a \in \mathbb{Z}$. Khi đó a là nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2 - 5\right) = 2$

Câu 98. Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy (như hình dưới).



a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0 \le x \le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

c) Diện tích mặt cắt là $S\left(x\right) = \dfrac{L}{h}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}L^2h$.

Câu 99. Khối chỏm cầu với bán kính $R = 5$ và chiều cao $h = 1$ có thể tích V và được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 4$, $x = 5$ xung quanh trục Ox.

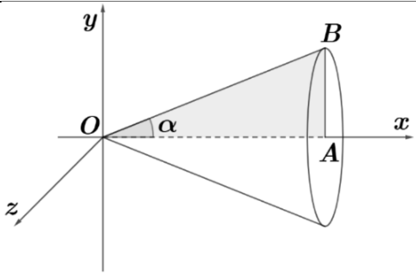
a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V được tính theo công thức $V = \pi\int_4^5 \left(25 - x^2\right) dx$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V = \dfrac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_1 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{7}{115}$.

Câu 100. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên tục Ox và $\widehat{AOB} = \alpha\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{2}$ (đvtt).

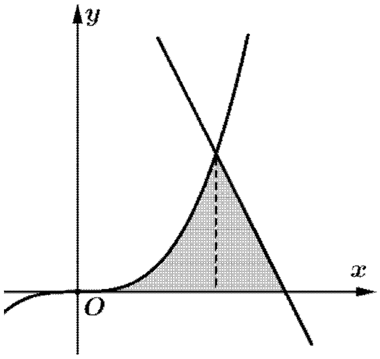
b) Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Khi thể tích V của khối β là $\frac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha < \frac{1}{2}$.

d) Khi $\tan\alpha = \cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{4}$.

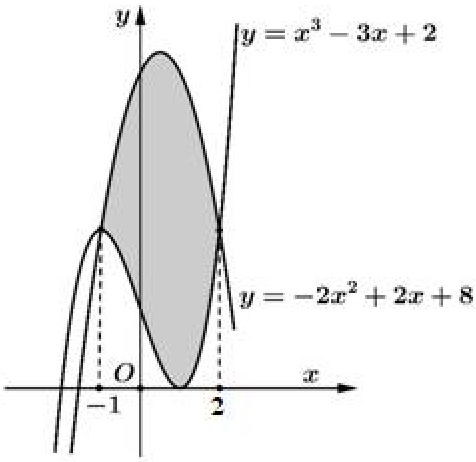
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3$, đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng (H) bằng bao nhiêu?



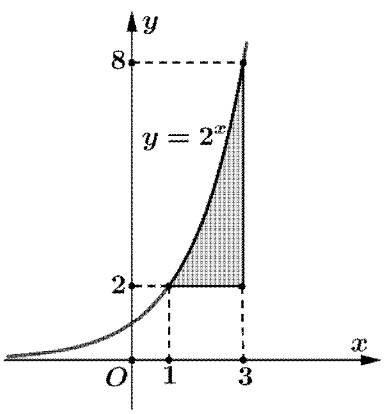
Trả lời: ………………..

Câu 102. Tính diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất).



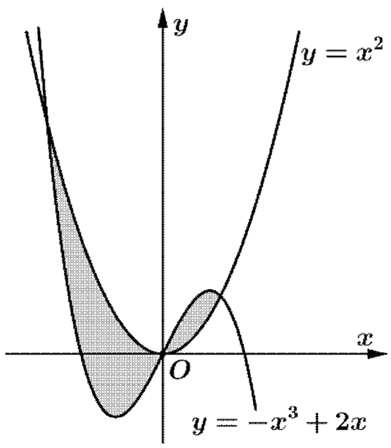
Trả lời: ………………..

Câu 103. Biết diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bằng $\dfrac{a}{\ln 2} + b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b$.



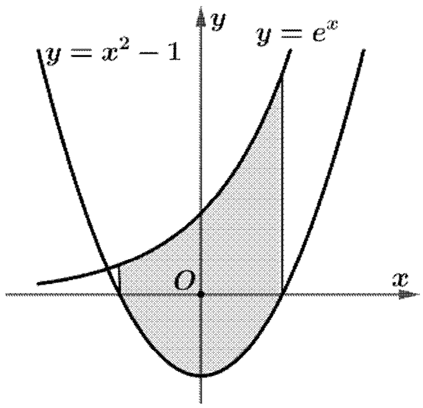
Trả lời: ………………..

Câu 104. Tính diện tích của phần hình phẳng tô đậm trong hình bên dưới (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Trả lời: ………………..

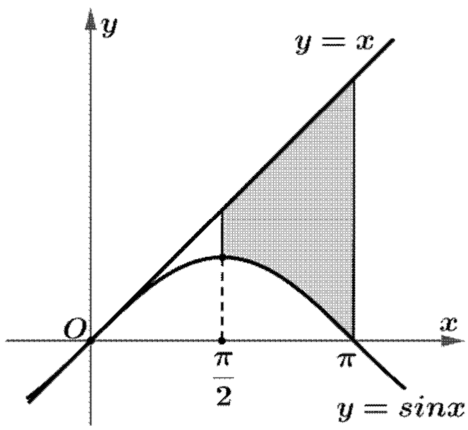
Câu 105. Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$ và được minh họa phần tô đậm trong hình vẽ sau đây:



Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a.e^2 + b.e + c}{3e}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b + c$.

Trả lời: ………………..

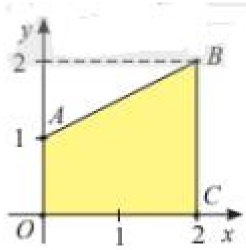
Câu 106. Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sin x, y = x, x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi$ và được minh họa phần tô đậm trong hình vẽ sau đây:



Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a.\pi^2}{b} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c$.

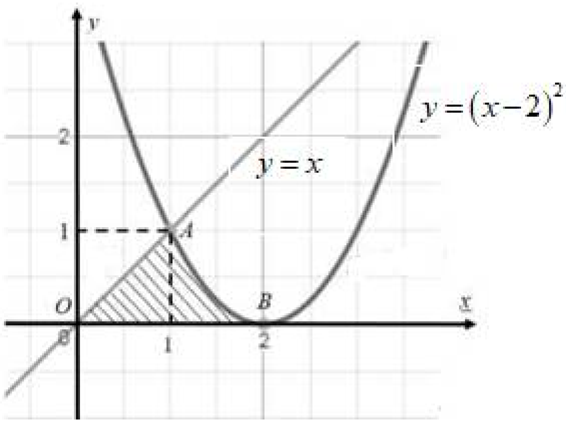
Trả lời: ………………..

Câu 107. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



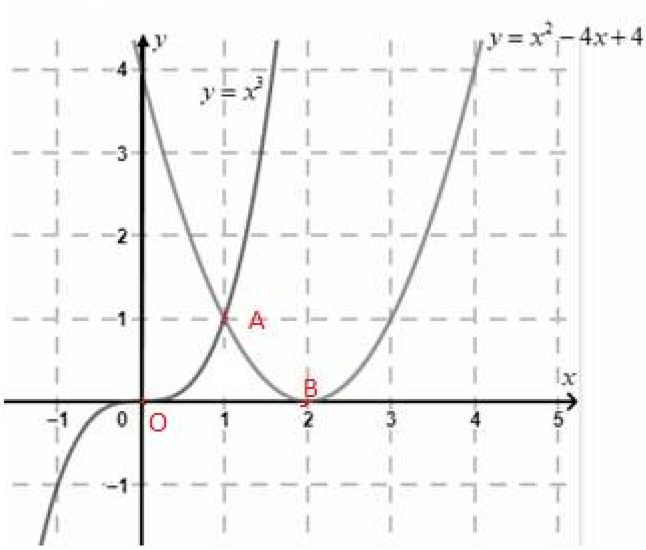
Trả lời: ………………..

Câu 108. Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên bằng $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.



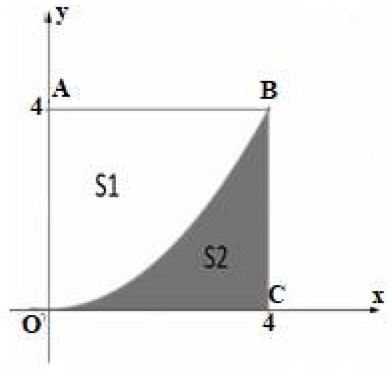
Trả lời: ………………..

Câu 109. Tính diện tích phần hình phẳng là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



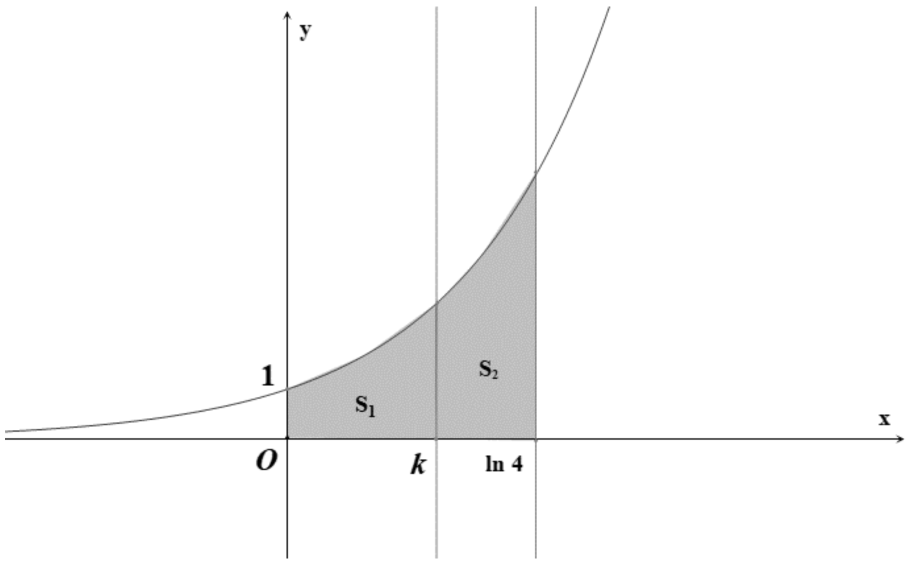
Trả lời: ………………..

Câu 110. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



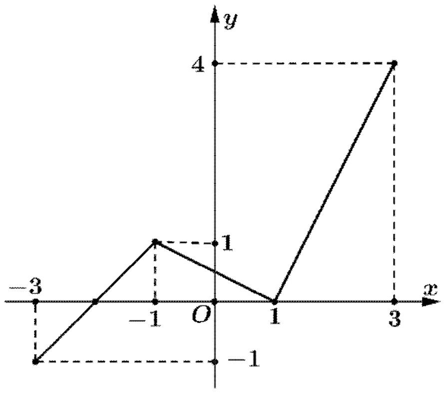
Trả lời: ………………..

Câu 111. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Biết khi $S_1 = 2S_2$ thì $k = \ln a$, với $a \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị a.



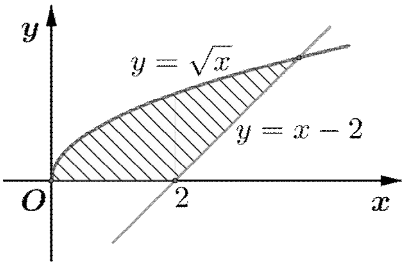
Trả lời: ………………..

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

Câu 113. Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Trả lời: ………………..

Câu 114. Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x, y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ có diện tích là $S=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $I=a-b$.

Trả lời: ………………..

Câu 115. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=t\ (t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

Trả lời: ………………..

Câu 116. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2\ (m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

Trả lời: ………………..

Câu 117. Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2$, $mx=\frac{1}{2}y^2$, $(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$

Trả lời: ………………..

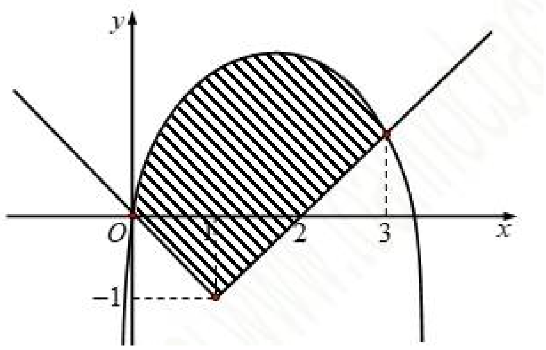
Câu 118. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0, x=0, x=m$ bằng 10 là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 119. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

Trả lời: ………………..

Câu 120. Cho (H) là hình phẳng được được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\dfrac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

Câu 121. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=0$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Biết thể tích vật thể (T) bằng $\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 122. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1; x=3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45^0 và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-\dfrac{1}{2}x^2}$. Biết thể tích vật thể trên bằng $\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 123. Biết thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox bằng $\dfrac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 124. Biết thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=2$ bằng $\dfrac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 125. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Biết thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bằng $a.\pi + \frac{b}{c}\pi^2$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a.b.c$.

Câu 126.

Trả lời: ………………..

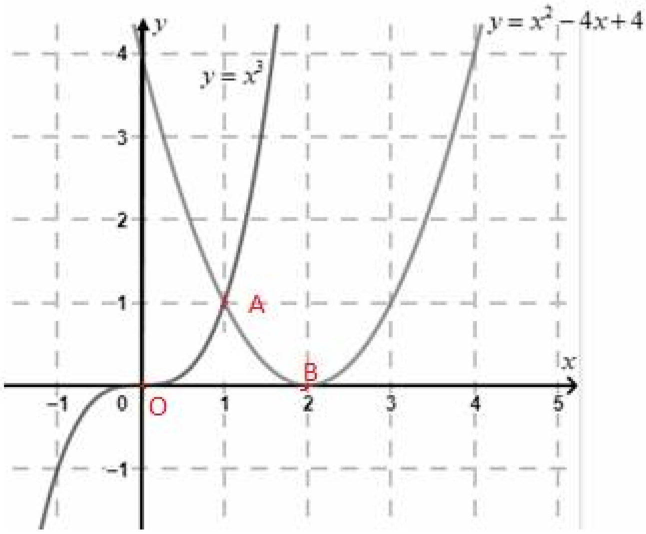
Câu 127. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = 2x - x^2, y = 0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V = \pi\left(\frac{a}{b} + 1\right)$ với a, b là các số tự nhiên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó ab bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Câu 128. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Biết $V = \frac{a}{b}\pi$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + 5b$.

Trả lời: ………………..

Câu 129. Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên dưới.

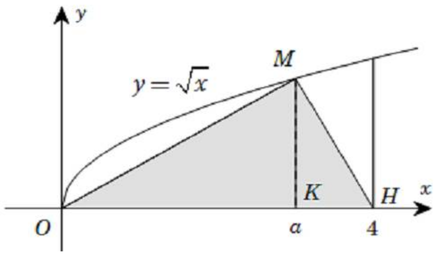


Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $3a - b$.

Trả lời: ………………..

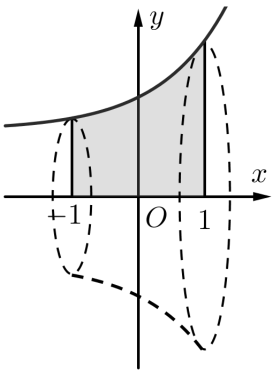
Câu 130. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x = a\ (0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại

M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó giá trị a bằng bao nhiêu?



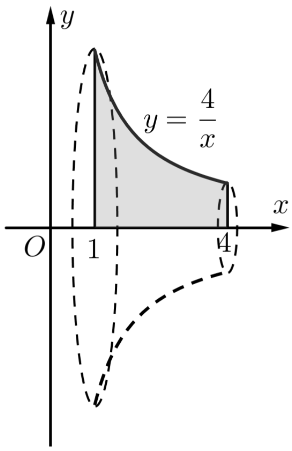
Trả lời: ………………..

Câu 131. Biết thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{e^x}{2}$, $y = 0$ và $x = -1$, $x = 1$ quanh trục hoành bằng $\left(\frac{a.e^4 + b}{c.e^2}\right)\pi$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a - b + c$.



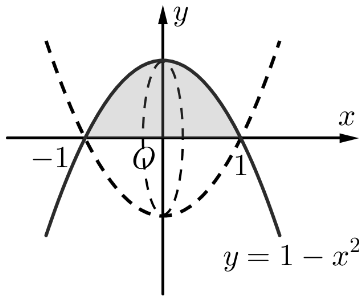
Trả lời: ………………..

Câu 132. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ quanh trục Ox là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất)



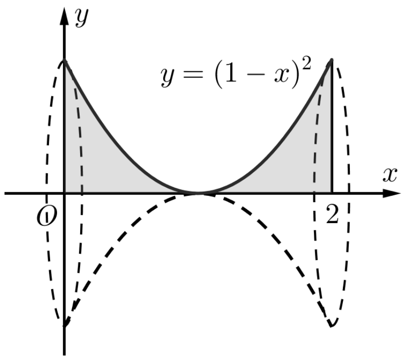
Trả lời: ………………..

Câu 133. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $S=a+b$ bằng bao nhiêu?



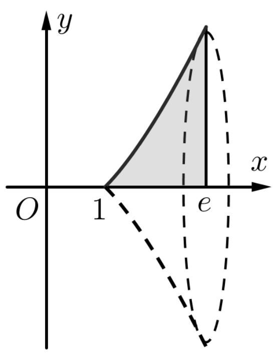
Trả lời: ………………..

Câu 134. Biết thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(1-x)^2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ có dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S=24a+12b$.



Trả lời: ………………..

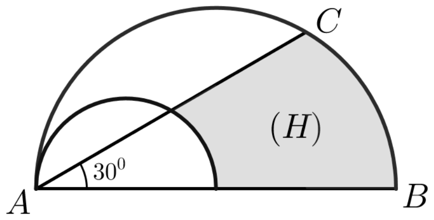
Câu 135. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$ quay xung quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng $\frac{\pi}{a}\left(be^3-2\right)$ với $a, b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a^2-b^2$, biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x\ln x)^2$ là $F(x)=\frac{x^3}{27}\left(9\ln^2 x-6\ln x+2\right)$.



Trả lời: ………………..

Câu 136. Cho các nửa đường tròn như hình vẽ sau, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc

$\widehat{BAC} = 30°$. Biết thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB bằng $\frac{a\pi}{b}$, với $a,b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-50b$.

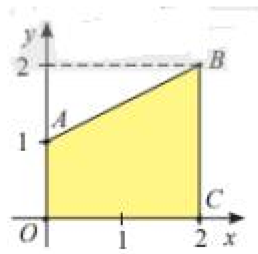


Trả lời: ………………..

Câu 137. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Trả lời: ………………..

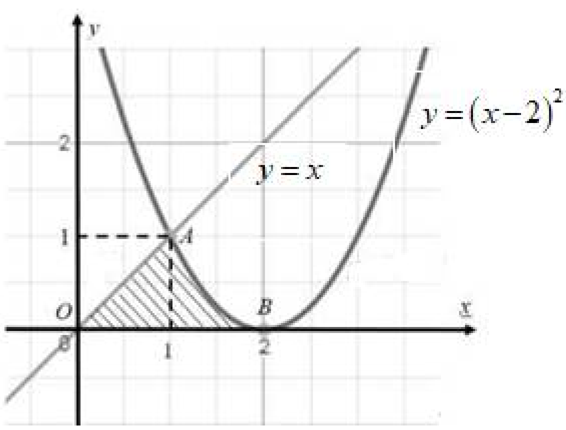
Câu 138. Cho diện tích hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

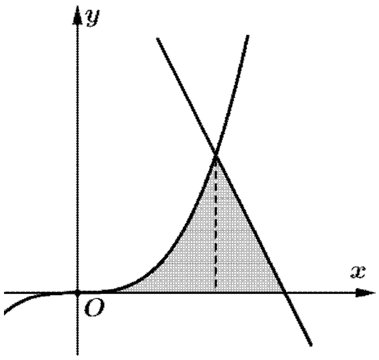
Câu 139. Diện tích phần hình phẳng (H) được gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Câu 140. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3$, đường thẳng $y=-2x+3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).

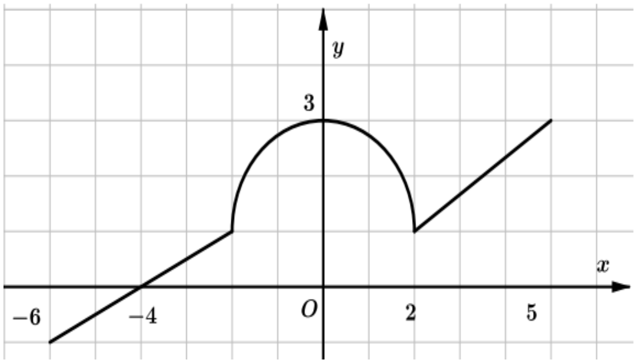


Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $3a-b$.

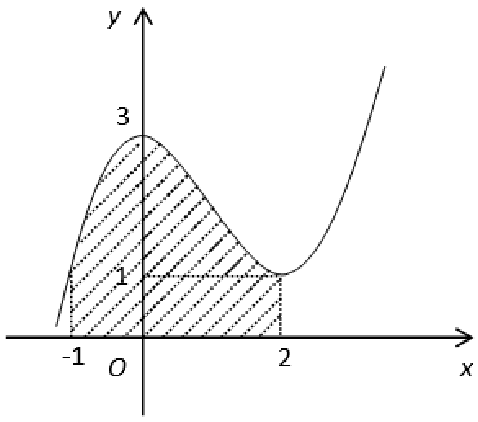
Trả lời: ………………..

PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

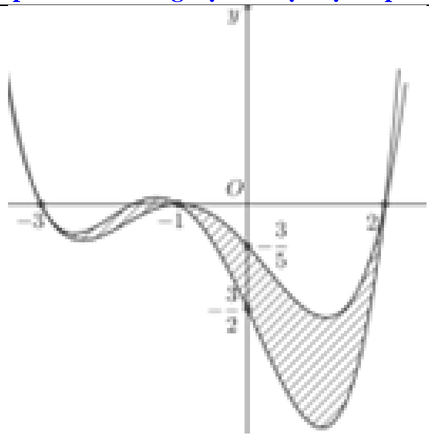
Câu 141. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]dx$ (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất).



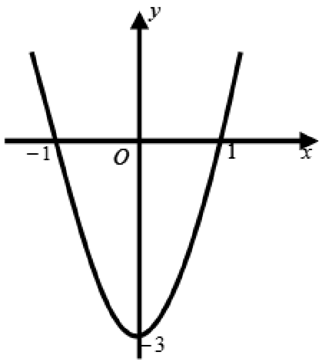
Câu 142. Diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1, x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.



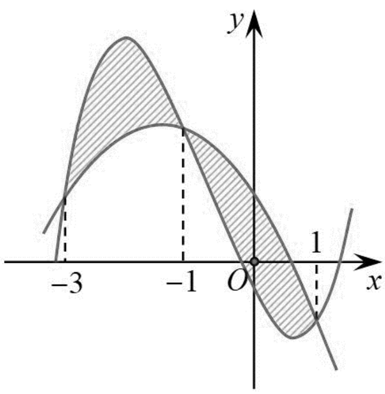
Câu 143. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;\ 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m-3n$.



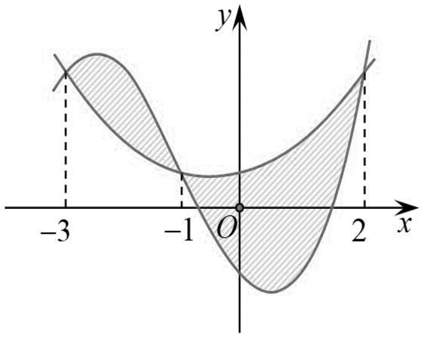
Câu 144. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d,\left(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$**.** Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=9x-18$ tại điểm có hoành độ dương. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ và trục hoành.



Câu 145. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+1$ $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng boa nhiêu?

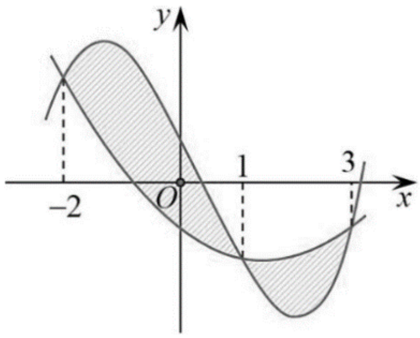


Câu 146. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



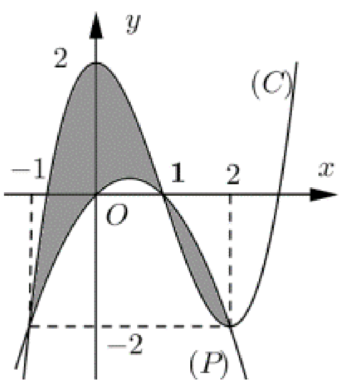
Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+2n$.

Câu 147. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ).

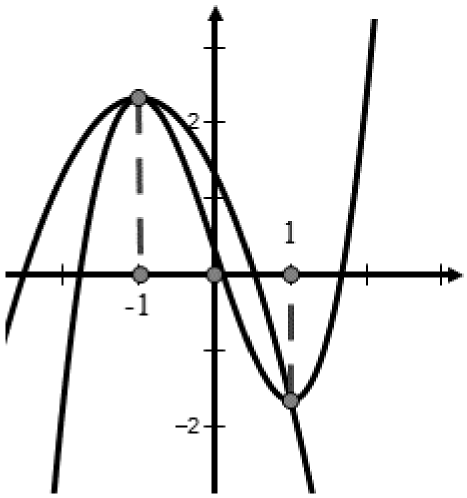


Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m-3n$.

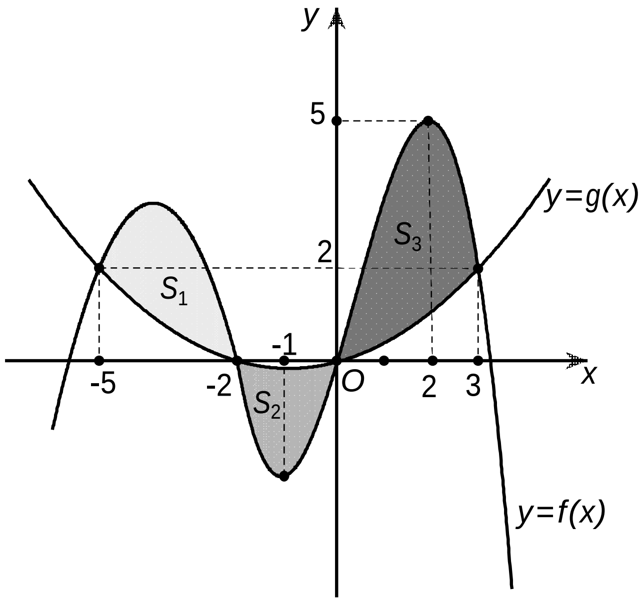
Câu 148. Hình phẳng $\left(H\right)$ được giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol $\left(P\right)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai)



Câu 149. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ và $y=mx^2+nx+p$ $\left(m,n,p\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị $\left(P\right)$ như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$ và $\left(P\right)$ (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

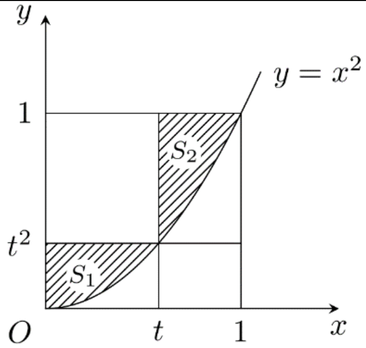


Câu 150. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-5;3\right]$. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1,\ S_2,\ S_3$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và đường parabol $y=g\left(x\right)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m, n, p.

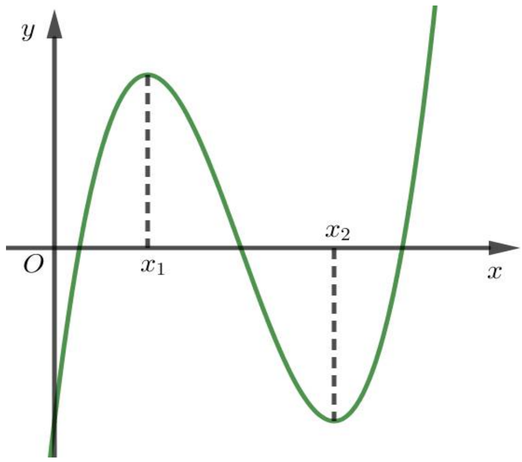


Biết tích phân $\int\limits_{-5}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{242}{45}$, tính giá trị của $m-n+p$.

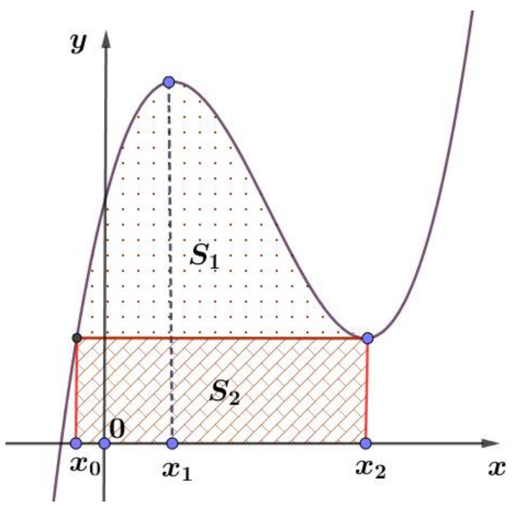
Câu 151. Cho hàm số $y=x^2$ xác định trên đoạn $\left[0;1\right]$. Giả sử t là một số bất kì thuộc đoạn $\left[0;1\right]$. Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0$, $y=t^2$ và $y=x^2$, còn S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $x=t$ và $y=1$. Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S_1+S_2 bằng $\dfrac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



Câu 152. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$; $f(x_1) + f(x_2) = 0$ và $\int_{x_1}^{x_1+1} f(x)\,dx = \frac{5}{4}$. Tính $L = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - 2}{(x - x_1)^2}$.



Câu 153. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới. Biết tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$, với $m, n \in \mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m + n$.



Câu 154. Biết $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)dx = F(4) - G(0) + a\ (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x); y = G(x); x = 0; x = 4$. Khi $S = 8$ thì a bằng bao nhiêu?

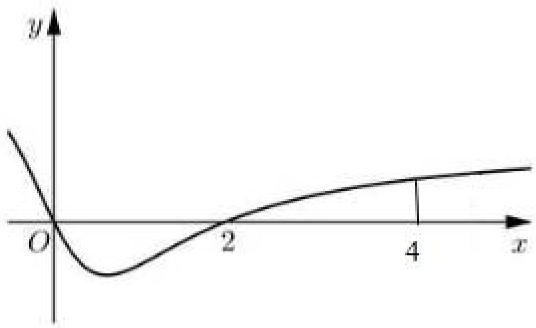
Câu 155. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5) - G(0) + a,\ (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bao nhiêu?

Câu 156. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - G(0) + a\ (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 2$, Khi $S = 6$ thì a bằng bao nhiêu?

Câu 157. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

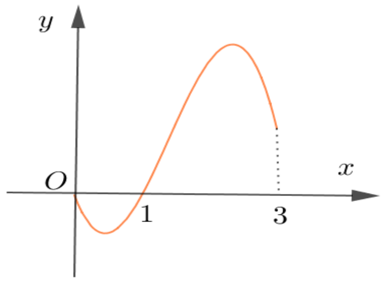
Câu 158. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

Câu 159. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(4)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(a), \max\limits_{[0;5]} f(x) = f(b)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu ?

Câu 160. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.

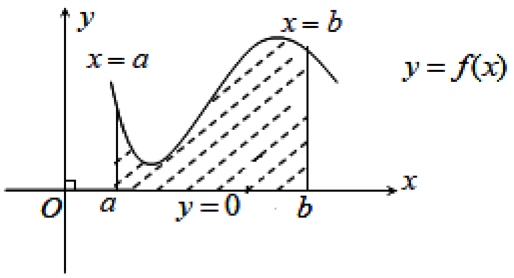


Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(a)$; $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(b)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $2a + 3b$ bằng bao nhiêu ?

BÀI 3
ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình thang cong

a. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$



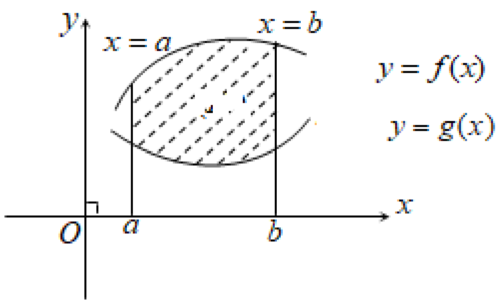
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành Ox $(y=0)$ và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ được tính bởi công thức:

$$S=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$$

Chú ý: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$

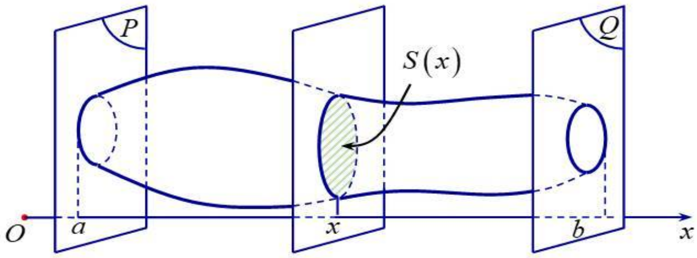


Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ được tính bởi công thức:

$$S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$$

2. Thể tích hình khối

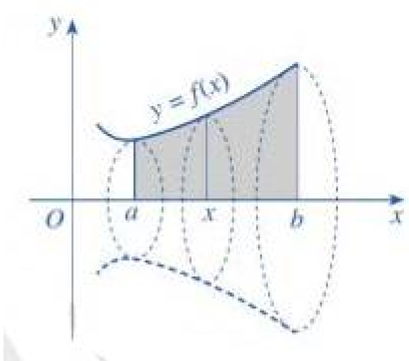
a. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

b. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

DẠNG 1
DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một hàm số $y = f(x)$, trục hoành $(y = 0)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ là $S = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$

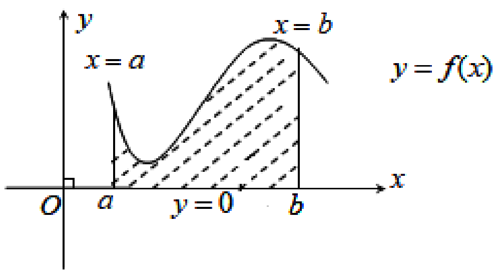
Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối của $|f(x)|$ ta làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a;b)$ $(a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b)$.

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x)| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| \mathrm{d}x + \dots + \int_{x_n}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x = \left|\int_a^{x_1} f(x) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d}x\right| + \dots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x) \mathrm{d}x\right|$

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$

- Nếu $f(x) \ge 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox $(y = 0)$ và hai đường thẳng $x = a,\ x = b$ được tính bởi: $S = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$



- Nếu $f(x) \le 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox $(y = 0)$ và hai đường thẳng $x = a,\ x = b$ được tính bởi: $S = -\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$

2. Dạng 2: Tính diện hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a,x=b.$

Phương pháp giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f\left(x\right) \\ y=g\left(x\right) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ là $S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$

Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta làm như sau:

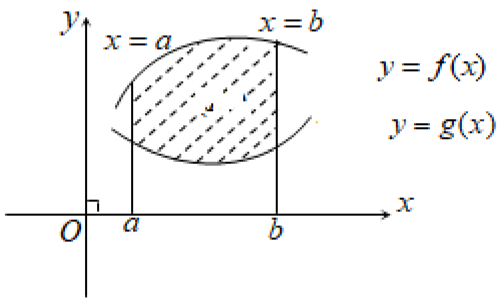
Bước 1: Giải phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_n\in\left(a;b\right)$ $\left(a<x_1<x_2<...<x_n<b\right)$.

Bước 2: Tính $S=\int\limits_a^{x_1}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$

$=\left|\int\limits_a^{x_1}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x\right|$

Chú ý: Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$.

- Nếu $f\left(x\right)\ge g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$



- Nếu $f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int\limits_a^b\left[g\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$

3. Dạng 3: Tính diện hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Giải phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n$ $\left(x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n\right)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y=f\left(x\right) \\ y=g\left(x\right) \end{cases}$ là $S=\int\limits_{x_1}^{x_n}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$

Bước 2: Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta làm như sau:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+...+\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|$$

Chú ý: Khi tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường mà không thuộc ba dạng trên ta thường vẽ đồ thị hàm số các đường trên hệ trục Oxy, rồi dựa vào đồ thị ta tính được diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường đó.

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

b) Đồ thị hàm số $y=x^3+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$.

c) Đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$.

d) Đồ thị hàm số $y=(x+2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

Lời giải

a) Ta có: $x^2=0\Leftrightarrow x=0\in[0;2]$

Diện tích hình phẳng là $S=\int_0^2\left|x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}$.

b) Ta có: $x^3+1=0\Leftrightarrow x=-1\notin[0;1]$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_0^1\left|x^3+1\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^3+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\right|_0^1=\frac{5}{4}$.

c) Ta có: $x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=-1(L)\\x^2=4(N)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin[0;3]\\x=2\in[0;3]\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_0^3\left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^2\left(x^4-3x^2-4\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_2^3\left(x^4-3x^2-4\right)\mathrm{d}x\right|$

$$=\left|\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\right|_0^2\right|+\left|\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\right|_2^3\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}.$$

d) $y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$ liên tục và không âm trên đoạn $[1;2]$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_0^2\left|x^2+4x+3\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2+4x+3\right)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right|_0^2=\frac{34}{3}$

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=\cos x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$.

b) Đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

c) Đồ thị hàm số $y = 3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

Lời giải

a) Vì $\cos x - 2 < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x - 2| \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (2 - \cos x) \mathrm{d}x = (2x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi.$$

b) Vì $\mathrm{e}^x > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^2 |e^x| \mathrm{d}x = \int_0^2 e^x \mathrm{d}x = e^x\Big|_0^2 = e^2 - 1.$$

d) Vì $3^x > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^2 |3^x| \mathrm{d}x = \int_0^2 3^x \mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^2 = \left(\frac{3^2}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3}\right) = \frac{8}{\ln 3}$$

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị của hai hàm số $y = x^2$, $y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$

b) Đồ thị của hai hàm số $y = x^2, y = 2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

c) Đồ thị của hai hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$

d) Đồ thị của các hàm số $y = x^3, y = 2x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Lời giải

a) Ta có $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \notin [0;1] \\ x = 0 \in [0;1] \end{array}\right.$

Diện tích cần tìm là $S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \left|\int_0^1 (x^2 - x)\, dx\right| = \dfrac{4}{3}$

b) Ta có $x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \notin [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \end{array}\right.$

Khi đó, diện tích cần tìm là :

$$S = \int_0^2 |x^2 + x - 2| \mathrm{d}x = \int_0^1 |x^2 + x - 2| \mathrm{d}x + \int_1^2 |x^2 + x - 2| \mathrm{d}x = \left|\int_0^1 (x^2 + x - 2) \mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^2 (x^2 + x - 2) \mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_0^1\right| + \left|\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_1^2\right| = \left|\frac{-7}{6}\right| + \left|\frac{11}{6}\right| = 3.$$

c) Ta có $-x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;2] \\ x = 2 \in [0;2] \end{array}\right.$

Khi đó, diện tích cần tìm là :

$S=\int_0^2\left|2x^2-4x+1-\left(-x^2+2x+1\right)\right|dx=\int_0^2\left|3x^2-6x\right|dx=\left|\int_0^2\left(3x^2-6x\right)dx\right|=\left|\left(3x^2-x^3\right)\Big|_0^2\right|=4$

d) Ta có: $x^3=2x-1\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow x^3-2x+1\ge 0,\forall x\in[1;2]$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_1^2\left(x^3-2x+1\right)dx=\left(\dfrac{1}{4}x^4-x^2+x\right)\Big|_1^2=\dfrac{7}{4}$.

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y=x^2+x-2$ và trục hoành.

b) Đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=2-x^2$.

c) Đồ thị hàm số $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

d) Đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$.

e) Đồ thị hàm số $y=x^2-1$, trục hoành và đường thẳng $x=3$.

Lời giải

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng $S=\int_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|dx=-\int_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)dx=\dfrac{9}{2}$.

b) Xét phương trình $x^2=2-x^2\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy diện tích hình phẳng đã cho bằng $\int_{-1}^{1}\left|x^2-\left(2-x^2\right)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|2x^2-2\right|dx=\dfrac{8}{3}$.

c) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$ là:

$-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow x^3-x^2-12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=0\\x=4\end{array}\right.$

$S=\int_{-3}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|dx=\int_{-3}^{0}\left|x^3-x^2-12x\right|dx+\int_{0}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|dx$

$=\left|\int_{-3}^{0}\left(x^3-x^2-12x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{4}\left(x^3-x^2-12x\right)dx\right|=\left|\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{-3}^{0}\right|+\left|\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{0}^{4}\right|$

$=\left|\dfrac{-99}{4}\right|+\left|\dfrac{-160}{3}\right|=\dfrac{937}{12}$.

d) Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$ là:

$$x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

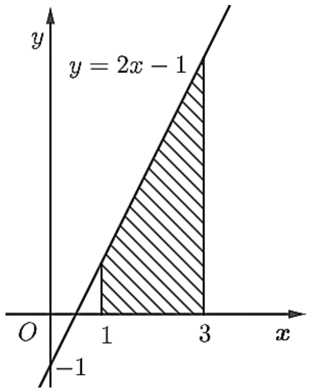
Suy ra $S = \int_{-2}^{1} \left| x^3 + x^2 - 2x \right| \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x \right) \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} \left(x^3 + x^2 - 2x \right) \mathrm{d}x$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right)\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{8}{3} - \left(\frac{-5}{12} \right) = \frac{37}{12}.$$

e) Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2 - 1$ và Ox là: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Diện tích hình phẳng là: $S = \int_{-1}^{3} \left| x^2 - 1 \right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1 \right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \left(x^2 - 1 \right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + x \right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - x \right)\Bigg|_{1}^{3} = 8$

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới :

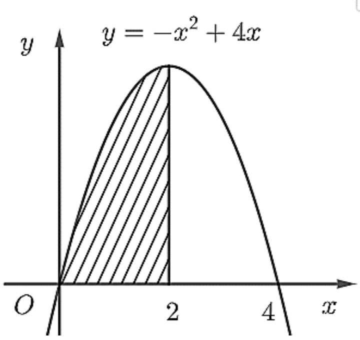


Lời giải

Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.

Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{1}^{3} (2x - 1) \mathrm{d}x = \left(x^2 - x \right)\Big|_{1}^{3} = 6$ (đơn vị diện tích)

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên dưới :

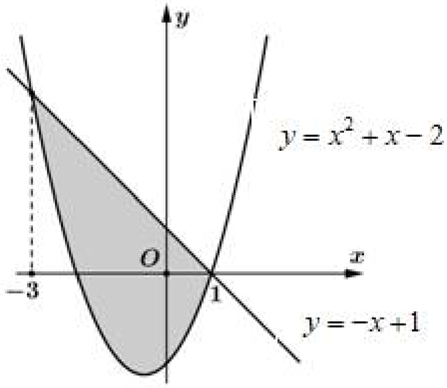


Lời giải

Hình phẳng phần gạch chéo được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.

Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_0^2\left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\right|_0^2=\frac{16}{3}$ (đơn vị diện tích)

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới :



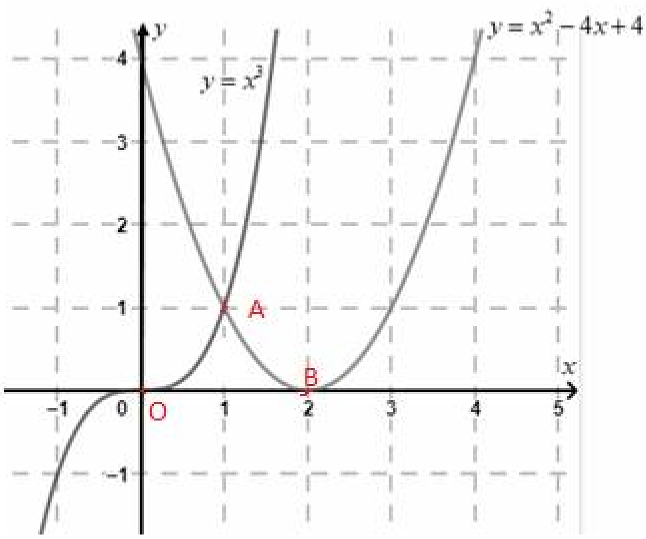
Lời giải

Dựa vào đồ thị hai hàm số $y=x^2+x-2$ và $y=-x+1$, ta có :

Diện tích hình phẳng là :

$$S=\int_{-3}^{1}\left(-x+1-\left(x^2+x-2\right)\right)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}\left(-x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right)\right|_{-3}^{1}=\frac{32}{3}\text{(đơn vị diện tích)}$$

Bài 8. Tính diện tích phần hình phẳng là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Lời giải

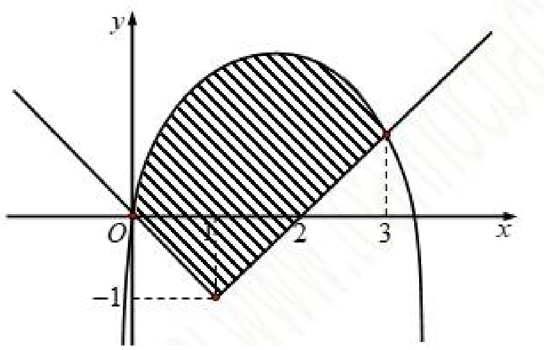
Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục Ox, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là $S=\int_0^1\left|x^3\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|x^2-4x+4\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{12}\approx 0,58$.

Bài 9. Cho (H) là hình phẳng được được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu?



Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=-x$ và $y=x-2$ là: $-x=x-2\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int\limits_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)dx+\int\limits_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)dx$.

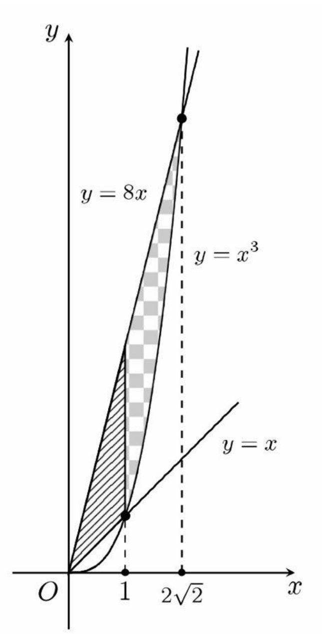
$$=\int\limits_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)dx+\int\limits_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)dx$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)dx+\int\limits_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)dx$$

$$=\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_1^3=\frac{13}{2}=6,5.$$

Bài 10. Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x, y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ có diện tích là $S=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $I=a-b$.

Lời giải



Đồ thị của ba hàm số đã cho được minh họa như hình vẽ bên.

Trong góc phần tư thứ nhất, xét các phương trình hoành độ giao điểm:

+ $x^3 = x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

+ $x^3 = 8x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2\sqrt{2}$

Hình phẳng cần tính diện tích là phần gạch sọc, được chia ra làm hai vùng. Theo hình vẽ ta có

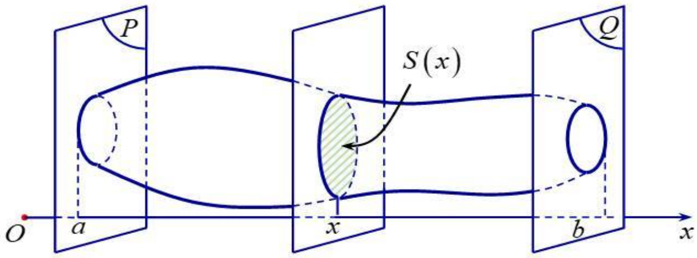
$$S = \int_0^1 (8x - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\sqrt{2}} \left(8x - x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{63}{4}.$$

Suy ra $a = 63, b = 4$.

Vậy $I = a - b = 59$.

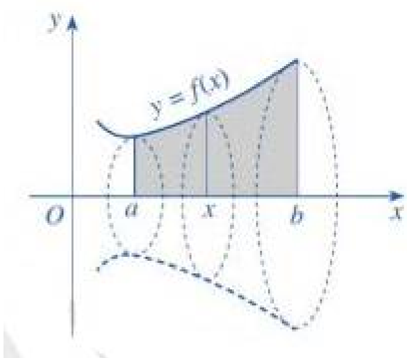
DẠNG 2
THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức: $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$

2. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Bài 1. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2.

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x)=3x.x^2=3x^3$.

Khi đó $V=\int\limits_1^3 3x^3\text{d}x=\frac{3}{4}x^4\Big|_1^3=60$.

Bài 2. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$ và $x=5$ quanh trục Ox.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x}, x\le 5$, trục tung, trục hoành quay quanh trục hoành.

Lời giải

a) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\text{d}x=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\text{d}x=\frac{81\pi}{35}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là : $V=\frac{81\pi}{35}$.

b) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox ta có: $V=\pi\int\limits_2^5\left(\sqrt{x}-1\right)^2\text{d}x$

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm hai hàm số là: $\sqrt{5-x}=0\Leftrightarrow 5-x=0\Leftrightarrow x=5$

Khi đó D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\begin{cases} y=f(x)=\sqrt{5-x} \\ y=0 \\ x=0; x=5 \end{cases}$

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là:

$$V=\pi\int\limits_0^5\left(\sqrt{5-x}\right)^2\text{d}x=\pi\int\limits_0^5(5-x)\text{d}x=\pi\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5=\frac{25\pi}{2}.$$

Bài 3. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0; x=1$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$ quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{\tan x}, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox.

Lời giải

a) Ta có thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^1\left(e^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$.

b) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2+\cos x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(\pi+1\right).$$

c) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là:

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\tan x}\right)^2.dx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.dx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}.dx=-\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}$$

$$=-\pi\left(\ln\left|\cos x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\pi\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

Bài 4. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-3x+2$ và trục hoành quay quanh trục hoành.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2+x$ và $y=2x$ quay quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quay quanh trục hoành.

d) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị của hàm số parapol $\left(P\right): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay quanh trục hoành.

Lời giải

a) Ta có $y=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Khi đó: $V=\pi\int\limits_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx=\frac{\pi}{30}$.

b) Ta có phương trình: $x^2+x=2x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Ta có thể tích cần tìm là: $V=\pi\int_0^1\left|\left(x^2+x\right)^2-\left(2x\right)^2\right|\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{10}$

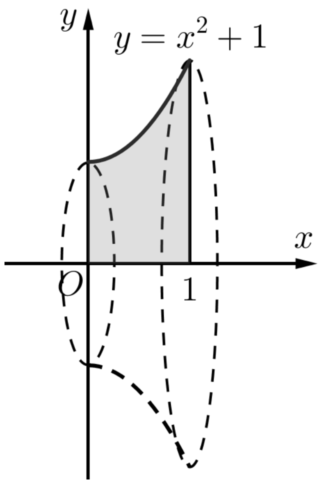
c) Ta có phương trình: $\sqrt{4x-x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Do đó, thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quay quanh trục Ox là $V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4=\frac{32\pi}{3}$.

d) Ta có phương trình: $x^2=2x \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$V=\pi\int_0^2\left[\left(2x\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}$.

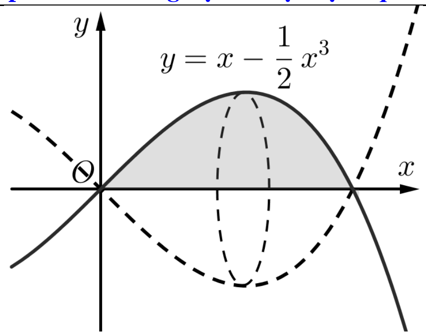
Bài 5. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường $y=x^2+1,\ x=0,\ x=1,\ y=0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.



Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{28\pi}{15}$

Bài 6. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường $y=x-\frac{1}{2}x^3$, $y=0$, $x=0,\ x=\sqrt{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

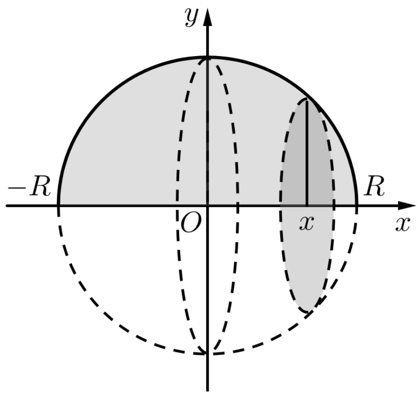


Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x - \frac{1}{2}x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right.$

Thể tích của vật thể là: $V = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^2 dx = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{4}x^6\right)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{28}x^7\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{105}$.

Bài 7. Sử dụng tích phân, tính thể tích khối cầu có bán kính R.



Lời giải

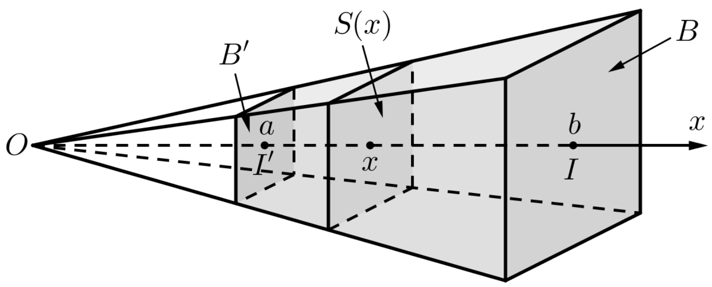
Khối cầu có bán kính R thì phương trình mặt cầu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Xét mặt cát ngang của khối cầu qua trục x ta có $y^2 + z^2 = R^2 - x^2$

Diện tích mặt cắt ngang khi đó là $\pi\left(R^2 - x^2\right)$

Khi đó thể tích khối cầu là $V = \int\limits_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{4}{3}\pi R^3$

Bài 8. Cho khối chóp cụt đều tạo bởi khối chóp đỉnh S, diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao h. Chọn trục Ox chứa đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S. Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cụt đều lần lượt cắt Ox tại I và I'. Đặt $OI = b, OI' = a\ (a < b)$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại $x\ (a \le x \le b)$, cắt khối chóp cụt đều theo hình phẳng có diện tích $S(x)$.



a) Chứng minh rằng $S(x)=B\dfrac{x^2}{b^2}$.

b) Dựa vào tích phân tính thể tích khối chóp cụt đều đó.

Lời giải

Khối chóp cụt đều có hai đáy với diện tích lần lượt là B và B'. Khi mặt phẳng (P) cắt khối chóp cụt tại vị trí x thì diện tích của thiết diện là $S(x)$

Diện tích của thiết diện thay đổi theo tỉ lệ bình phương của khoảng cách từ đỉnh S đến mặt cắt. Cụ thể diện tích $S(x)$ tỉ lệ với bình phương của khoảng cách từ O đến x, nghĩa là $\left(\dfrac{x}{b}\right)^2$

Do đó ta có: $S(x)=B\left(\dfrac{x}{b}\right)^2=B.\dfrac{x^2}{b^2}$

b) Để tính thể tích của khối chóp cụt đều thì ta sử dụng tích phân của thiết diện $S(x)$ từ $x=a$ đến $x=b$.

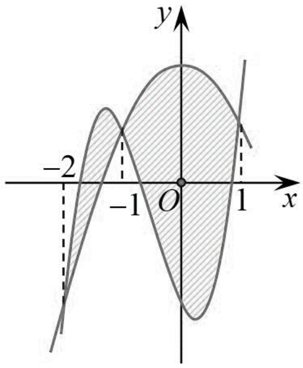
Thể tích của khối chóp cụt đều được tính bằng công thức: $V=\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b B.\dfrac{x^2}{b^2}\mathrm{d}x$

Khi đó $V=\dfrac{B}{b^2}\int\limits_a^b x^2\mathrm{d}x=\dfrac{B}{3b^2}\left(b^3-a^3\right)$ ta thay $h=b-a$ và $B'=B.\dfrac{a^2}{b^2}$ thì ta được thể tích khối chóp cụt được tính bằng công thức $V=\dfrac{h}{3}\left(B+\sqrt{B.B'}+B'\right)$.

DẠNG 3

BÀI TOÁN DIỆN TÍCH , THỂ TÍCH LIÊN QUAN HÀM SỐ $f\left(x\right)$

Bài 1. Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là

$ax^3+bx^2+cx-2=dx^2+3x+2\Leftrightarrow a^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x-4=0.\qquad(*)$

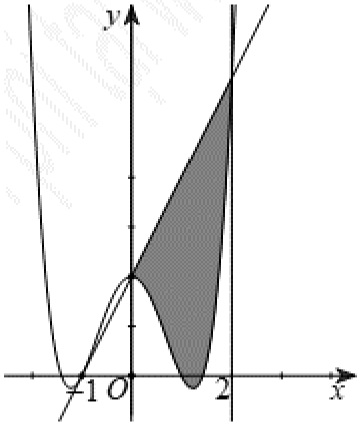
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-2$; $x=-1$; $x=1$. Ta được

$ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x-4=k\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)$.

Khi đó $-4=-2k\Rightarrow k=2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int\limits_{-2}^{1}\left|2\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{37}{6}$.

Bài 2. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị $\left(C\right)$, biết rằng $\left(C\right)$ đi qua điểm $A\left(-1;0\right)$, tiếp tuyến d tại A của $\left(C\right)$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị $\left(C\right)$ và hai đường thẳng $x=0;x=2$; có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1; x=0$ có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y'=4ax^3+2bx \Rightarrow d: y=(-4a-2b)(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c(1)$.

Phương trình (1) phải cho 2 nghiệm là $x=0$, $x=2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a-2b=c \\ -12a-6b=16a+4b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b-c=0(2) \\ 28a+10b+c=0(3) \end{cases}.$$

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\frac{28}{5}=\int\limits_0^2\left[(-4a-2b)(x+1)-ax^4-bx^2-c\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{5}=4(-4a-2b)-\frac{32}{5}a-\frac{8}{3}b-2c \Leftrightarrow \frac{112}{5}a+\frac{32}{3}b+2c=-\frac{28}{5}(4).$$

Giải hệ 3 phương trình (2), (3) và (4) ta được $a=1$, $b=-3$, $c=2$.

Khi đó, $(C): y=x^4-3x^2+2$, $d: y=2(x+1)$.

Diện tích cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^0\left[x^4-3x^2+2-2(x+1)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(x^4-3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{5}$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là $-2,-1,1$. Gọi $y=g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do $f(x)$ có ba điểm cực trị là $-2,-1,1$ nên:

$$f'(x)=12(x+2)(x^2-1)=12x^3+24x^2-12x-24 \Rightarrow f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+d.$$

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được: $f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)+\left(-7x^2-16x+4+d\right)$

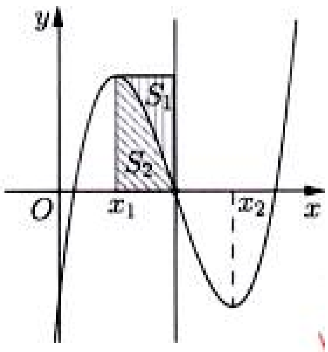
Mà $g(x)$ là parabol qua các điểm cực trị của $f(x)$ nên $g(x)=-7x^2-16x+4+d$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{-2}{3}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$ và $g(x)$ là:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|3x^4+8x^3+x^2-8x-4\right|\mathrm{d}x=\frac{2948}{405}(dvdt).$$

Bài 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



Lời giải

Cách 1

Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$.

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Ta có $f(x_1)+f(x_2)=0\Rightarrow f(x_1)+f(x_1+2)=0\Rightarrow C+8a-12a+C=0\Rightarrow C=2a$.

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a=a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]$.

$$f(x)=0\Rightarrow a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1+1-\sqrt{3}\\ x=x_1+1\\ x=x_1+1+\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Suy ra $S_2=\int_{x_1}^{x_1+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_1+1}a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}(x-x_1)$$

$$=a\left[\frac{(x-x_1)^4}{4}-(x-x_1)^3+2(x-x_1)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_1+1}=\frac{5a}{4}.$$

Mặt khác ta có $S_1+S_2=\int_{x_1}^{x_1+1} f(x_1)\mathrm{d}x=f(x_1)\int_{x_1}^{x_1+1}\mathrm{d}x=f(x_1)=2a \Rightarrow S_1=2a-S_2=\frac{3a}{4}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$.

Cách 2

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi nếu ta tịnh tiến đồ thị sang trái cho điểm uốn trùng gốc tọa độ O. Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là hàm số khi đó thì dễ thấy $f(x)$ lẻ nên có ngay $b=d=0$ và $f(x)=ax^3+cx$ có hai điểm cực trị tương ứng là $-1{,}1$ cũng là nghiệm của $3ax^2+c=0$. Từ đó dễ dàng có $f(x)=k(x^3-3x), k>0$.

Xét diện tích hình chữ nhật $S_1+S_2=\left|(-1).f(-1)\right|=2k$.

Ngoài ra $S_2=k\int_{-1}^{0}\left|x^3-3x\right|\mathrm{d}x=\frac{5}{4}k$.

Vì thế $S_1=2k-\frac{5k}{4}=\frac{3k}{4}$ và $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$

Bài 5. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx=F(3)-G(0)+a \quad (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=3$. Khi $S=15$ thì a bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Giả thiết $F(x), G(x)$ đều là nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có: $F(x)=G(x)+C \Rightarrow F(0)=G(0)+C$ (1).

Ta có $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_0^3=F(3)-F(0)=F(3)-(G(0)+C)=F(3)-G(0)-C$.

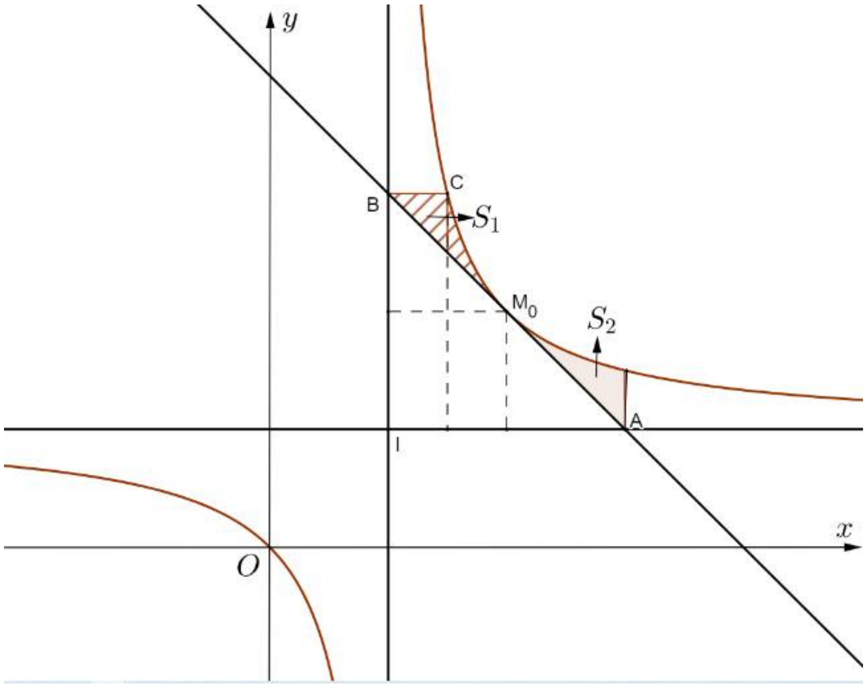
Mà theo giả thiết $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-G(0)+a$ nên $C=-a$.

Suy ra $F(x)=G(x)-a \Leftrightarrow F(x)-G(x)=-a$.

Ta có $S=\int_0^3\left|F(x)-G(x)\right|\mathrm{d}x=\int_0^3\left|-a\right|\mathrm{d}x=ax\big|_0^3=3a$.

Mà $S=15$ nên ta có $a=5$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C). Gọi giao điểm của hai đường tiệm cận là I. Điểm $M_0(x_0;y_0)$ di động trên (C), tiếp tuyến tại đó cắt hai tiệm cận lần lượt tại A,B và $S_{\Delta IAB}=2$. Tìm giá trị $IM_0{}^2$ sao cho $\dfrac{S_1+S_2}{S_{\Delta IAB}}=1$ (với S_1,S_2 là 2 hình phẳng minh họa bên dưới)



Lời giải

Nhận thấy kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị (C) theo $\overrightarrow{IO}$. Khi đó hai tiệm cận của (C) là hai trục tọa độ.

Và hàm số của đồ thị (C) trở thành: $y=\dfrac{\alpha}{x}\ (\alpha>0)\Rightarrow y'=-\dfrac{\alpha}{x^2}$.

Gọi d là tiếp tuyến tại $M_0(x_0;y_0)\Rightarrow d:y=-\dfrac{\alpha}{x_0^2}(x-x_0)+\dfrac{\alpha}{x_0}=-\dfrac{\alpha}{x_0^2}x+\dfrac{2\alpha}{x_0}$

Suy ra: $Ox\cap d=A(2x_0;0)$ và $Oy\cap d=B\left(0;\dfrac{2\alpha}{x_0}\right)$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=2\alpha\Rightarrow 2a=2\Rightarrow\alpha=1$

$\Rightarrow(c)\,y=\dfrac{1}{x},\ d:y=-\dfrac{1}{x_0^2}x+\dfrac{2}{x_0},\ B\left(0;\dfrac{2}{x_0}\right),\ C\left(\dfrac{x_0}{2};\dfrac{2}{x_0}\right)$

Và $S_2=\displaystyle\int_{x_0}^{2x_0}\left(\dfrac{1}{x}\right)dx-\dfrac{1}{2}(2x_0-x_0)\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{3}{4x_0^2}-\dfrac{1}{2}$

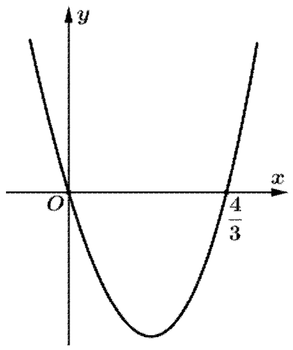
Theo giả thiết $\dfrac{S_1+S_2}{S_{\Delta IAB}}=1\Rightarrow S_1+S_2=S_{\Delta IAB}\Rightarrow\dfrac{3}{x_0^2}+\dfrac{3}{4x_0^2}-1=2\Rightarrow x_0^2=\dfrac{5}{4}\Rightarrow y_0^2=\dfrac{4}{5}$

Vậy $IM_0{}^2=x_0^2+y_0^2=\dfrac{41}{20}$.

DẠNG 4

BÀI TOÁN DIỆN TÍCH , THỂ TÍCH LIÊN QUAN HÀM SỐ $f'(x)$

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx\,(a,b \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\frac{m}{n}\left(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$

Lời giải

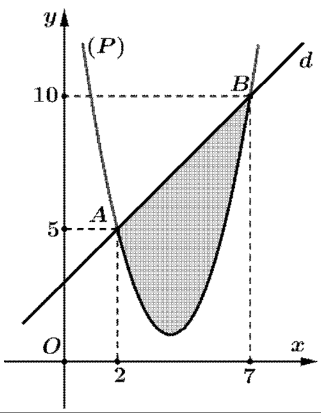
Ta có: $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$.

Từ đồ thị suy ra: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -4 \end{cases}$.

Ta có: $f(x) - f'(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x$. Cho $f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng là $S = \int\limits_0^4 \left|2x^3 - 10x^2 + 8x\right| dx = \frac{71}{3} \Rightarrow m + n = 74$.

Bài 2. Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \frac{125}{6}$. Khi đó hãy tính tích phân $\int\limits_2^7 (2x-3)\, f'(x)\,dx$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có điểm $A(2;5)$ và $B(7;10)$ thuộc đường thẳng d và Parabol (P)

Suy ra đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(5;5)$

Phương trình đường thẳng $d: y=x+3$

Gọi (P) có phương trình: $y=ax^2+bx+c,(a>0)$

$A,B\in(P)\Rightarrow$ Hệ phương trình: $\begin{cases}4a+2b+c=5\\49a+7b+c=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4a-2b+5\\49a+7b+5-4a-2b=10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4a-2b+5\\b=1-9a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=3+14a\\b=1-9a\end{cases}$

Hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{6}$

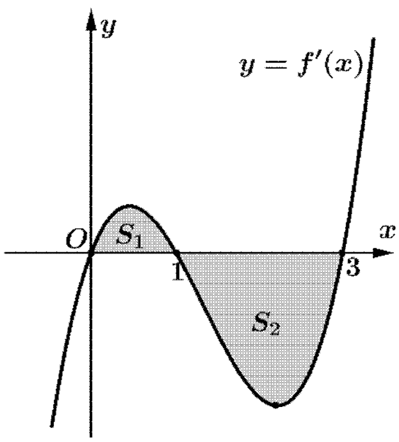
$\Rightarrow\int_2^7\left|x+3-\left(ax^2+bx+c\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{125}{6}\Rightarrow\int_2^7\left|x+3-\left[ax^2+(1-9a)x+(3+14a)\right]\right|\mathrm{d}x=\frac{125}{6}$

$\Leftrightarrow\int_2^7\left[-ax^2+9ax-14a\right]\mathrm{d}x=\frac{125}{6}\Leftrightarrow\left(-\frac{ax^3}{3}+\frac{9ax^2}{2}-14ax\right)\Big|_2^7=\frac{125}{6}$

$\Leftrightarrow\frac{125}{6}a=\frac{125}{6}\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=-8;c=17$

(P) có phương trình: $y=f(x)=x^2-8x+17\Rightarrow f'(x)=2x-8\Rightarrow\int_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{215}{3}$

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.



Lời giải

Hình phẳng A được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, trục tung $x=0$ và đường thẳng $x=1$ nên diện tích hình phẳng A là:

$S_A=\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)\Rightarrow f(1)=S_A+f(0)=4+2=6$.

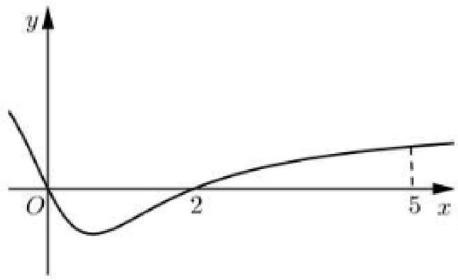
Hình phẳng B được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, đường thẳng $x=1$ và đường thẳng $x=3$ nên diện tích hình phẳng B là:

$$S_B=\int_1^3\left|f'(x)\right|\,\mathrm{d}x=-\int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=-f(x)\Big|_1^3=-\left[f(3)-f(1)\right]=-f(3)+f(1).$$

Suy ra $f(3)=f(1)-S_B=6-10=-4$.

Vậy $f(3)=-4$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(a),\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Cách 1: Căn cứ đồ thị của $y=f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$$S_1=\int_0^2\left|f'(x)\right|dx=\int_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2) \text{ và } S_2=\int_2^5\left|f'(x)\right|dx=\int_2^5 f'(x)dx=f(2)-f(5)$$

Theo giả thiết, ta có:

$$f(0)+f(3)=f(2)+f(5)\Rightarrow f(5)-f(3)=f(0)-f(2)$$

Suy ra $S_2=\int_2^5\left|f'(x)\right|dx>\int_3^5\left|f'(x)\right|dx=f(5)-f(3)=S_1$.

Suy ra $S_2>S_1>0\Rightarrow f(5)>f(0)>f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2),\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)\Rightarrow a+b=7$

Cách 2:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		5	$+\infty$
f'		0	$-$	0	$+$		
f		$f(0)$ $f(5)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$		

Dựa vào đồ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(2)$

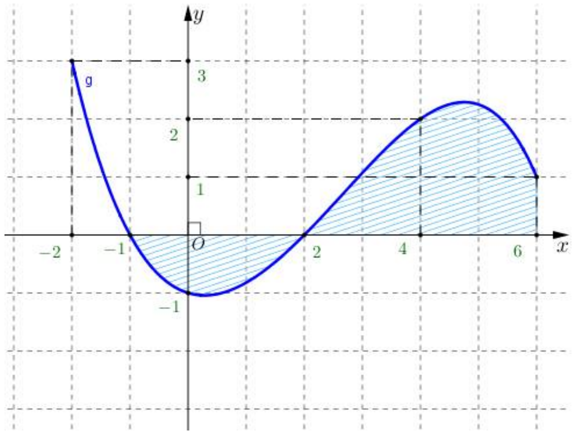
Và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(5)\}$

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;5]$ nên

$f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$

Do đó $f(5) > f(0)$, vậy $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(5)\} = f(5)$

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;6]$ là $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(a)$ với $a \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của a.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ trên $[-2;6]$

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y		↗		↘		↗	

Do đó hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox.

$\Rightarrow S_1 = \int\limits_{-1}^{2} [-f'(x)]dx = f(-1) - f(2)$.

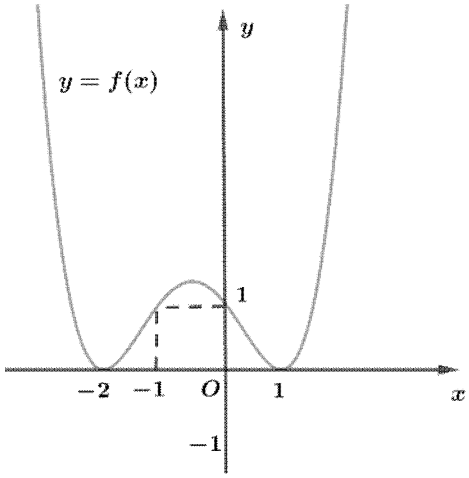
Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 2; x = 6$.

$\Rightarrow S_2 = \int_2^6 f'(x)dx = f(6) - f(2)$.

Ta có $S_2 > S_1 \Rightarrow f(6) - f(2) > f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(6) > f(-1)$.

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(6) \Rightarrow a = 6$.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số đã cho có dạng $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Từ giả thiết đồ thị hàm số đã cho ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$ và có hai điểm cực tiểu là $(1;0)$, $(-2;0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(-2) &= 0 \\ f(1) &= 0 \\ f'(-2) &= 0 \\ f'(1) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e &= 1 \\ a+b+c+d &= -1 \\ 16a-8b+4c-2d &= -1 \\ -32a+12b-4c+d &= 0 \\ 4a+3b+2c+d &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e &= 1 \\ a &= \dfrac{1}{4} \\ b &= \dfrac{1}{2} \\ c &= \dfrac{-3}{4} \\ d &= -1 \end{cases}.$$

Do đó $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = f'(x)$.

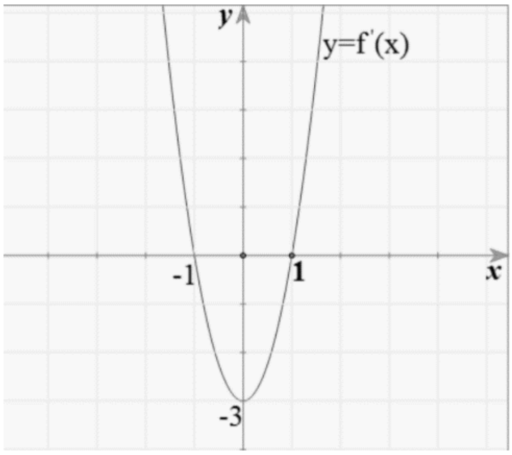
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x &=& -2 \\ x &=& -1 \\ x &=& 1 \\ x &=& 4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ là $S = \int_{-2}^{4} \left|f(x) - f'(x)\right| dx$

Vì biểu thức $f(x)-f'(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1),(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có

$$S=\left|\int_{-2}^{-1}[f(x)-f'(x)]dx\right|+\left|\int_{-1}^{1}[f(x)-f'(x)]dx\right|+\left|\int_{1}^{4}[f(x)-f'(x)]dx\right|=\frac{107}{5}(dvdt)$$

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)=3(x^2-1)$.

Khi đó $f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x+C$.

Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ là:

$\begin{cases}f(x)=4\\ f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+C=4\\ 3(x^2-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ C=2\end{cases}$ suy ra $f(x)=x^3-3x^2+2(C)$.

$(C)\cap Ox\Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x=-2;x=1$.

Khi đó $V=\pi\int\limits_{-2}^{1}\left(x^3-3x^2+2\right)^2dx=\frac{729}{35}\pi$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$.

Lời giải

Ta có $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(3+a)x^2+(b+2a+6)x+2a+b+c$.

Suy ra: $g'(x)=3x^2+2(3+a)x+b+2a+6$.

Xét phương trình

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Leftrightarrow g(x)=f(x)-6 \Leftrightarrow 3x^2+2(a+3)x+2a+b+6=0 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$$

Ta có diện tích bằng

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=\left|\ln\left|g\left(x_2\right)+6\right|-\ln\left|g\left(x_1\right)+6\right|\right|=\left|\ln 4\right|=2\ln 2$$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a, x=b$ bằng

A. $\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_a^b |f(x)+g(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a, x=b$ được tính theo công thức $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 3^x dx$. **B.** $S=\pi\int_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S=\pi\int_0^2 3^x dx$. **D.** $S=\int_0^2 3^{2x} dx$.

Lời giải

Chọn A.

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S=\int_0^2 3^x dx$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S=\int_1^2 \left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\int_1^2 \left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int_1^2 (x^2-4x+3)\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{3}$.

Câu 4. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=6$.

Câu 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5, y=6x$, $x=0$, $x=1$.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+5=6x \Leftrightarrow x=5; x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S=\int\limits_{0}^{1}\left|x^2-6x+5\right|\mathrm{d}x=\frac{7}{3}$.

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2, y=2x$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Lời giải

Chọn C.

diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int\limits_{0}^{2}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2=\frac{4}{3}$.

Câu 7. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x, y=0, x=-10, x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y=x^2-2x$ và $(d): y=0$ là:

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích cần tìm:

$$S=\int\limits_{-10}^{10}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-10}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{10}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{-10}^{0}-\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{0}^{2}+\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{2}^{10}=\frac{1300}{3}+\frac{4}{3}+\frac{704}{3}=\frac{2008}{3}.$$

Câu 8. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x, y=1$ và hai đường thẳng

$x=1, x=e$ bằng

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

Lời giải

Chọn D.

$$S=\int_1^e |\ln x-1| dx=\left|\int_1^e (\ln x-1) dx\right|=\left|x(\ln x-1)\Big|_1^e-\int_1^e dx\right|=\left|1-x\Big|_1^e\right|=|1-(e-1)|=|2-e|=e-2$$

Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3+11x-6, y=6x^2$ và hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ là

A. 2. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** 5. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Giải phương trình: $x^3+11x-6=6x^2 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có $S=\int_0^2 \left|x^3-6x^2+11x-6\right| \mathrm{d}x=\left|\int_0^1 \left(x^3-6x^2+11x-6\right) \mathrm{d}x\right|+\left|\int_1^2 \left(x^3-6x^2+11x-6\right) \mathrm{d}x\right|=\frac{5}{2}$.

Câu 10. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là

A. $\frac{1}{\ln 2}$ **B.** $\frac{3}{\ln 2}$ **C.** $\frac{\pi}{\ln 2}$ **D.** $\frac{3\pi}{\ln 2}$

Lời giải

Chọn B.

$S=\int_0^2 \left|2^x\right| \mathrm{d}x=\int_0^2 2^x \mathrm{d}x=\frac{3}{\ln 2}$ (do $2^x>0, \forall x \in [0;2]$).

Câu 11. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là:

A. e^2-1 **B.** e^2 **C.** e^2+1 **D.** $\left(e^2-1\right)\pi$

Lời giải

Chọn B.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là:

$$S=\int_0^2 e^x \mathrm{d}x=e^x\Big|_0^2=e^2-1.$$

Câu 12. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Lời giải

Chọn C.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$ là

$$S=\int_0^{\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2.$$

Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Khi đó, diện tích hình phẳng giởi hạn bởi hai đồ thị trên là: $S=\int_{-2}^{0}\left|x^2+2x\right|dx=\frac{4}{3}$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+x+6$ và $y=0$ bằng

A. $\frac{95\pi}{6}$. **B.** $\frac{95}{6}$. **C.** $\frac{125\pi}{6}$. **D.** $\frac{125}{6}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2+x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_{-2}^{3}\left|-x^2+x+6\right|dx=\frac{125}{6}$.

Câu 15. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x+3; x=0$ và $y=0$ bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

$$S=\int_0^3\left|x^2-4x+3\right| dx=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right) dx-\int_1^3\left(x^2-4x+3\right) dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_1^3=\frac{8}{3}$$

Câu 16. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2$ và đường thẳng $y=6$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{40}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2+2=6 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_{-2}^{2}\left|x^2-4\right|dx=\frac{32}{3}$.

Câu 17. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=4x-3$ là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=4x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Khi đó $S=\int_{1}^{3}\left|x^2-4x+3\right|dx=\frac{4}{3}$.

Câu 18. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=8-x^2$ là

A. 14. **B.** 28. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{64}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm cần tìm là $x^2=8-x^2 \Leftrightarrow 2x^2=8 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$S=\int_{-2}^{2}\left|x^2-\left(8-x^2\right)\right|dx=\int_{-2}^{2}\left|2x^2-8\right|dx=\int_{-2}^{2}\left(-2x^2+8\right)dx$ vì $2x^2-8\leq 0, \forall x\in[-2;2]$

$\Rightarrow S=\left(-\frac{2}{3}x^3+8x\right)\Big|_{-2}^{2}=-\frac{2}{3}.2^3+8.2-\left(-\frac{2}{3}.(-2)^3+8.(-2)\right)=\frac{64}{3}$.

Câu 19. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng:

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số là: $x^2-1=x-1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_{0}^{1}\left|x^2-x\right|dx=\left|\int_{0}^{1}\left(x^2-x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 20. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x^3-6x$ và $y=x^2$ bằng

A. $\frac{125}{12}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{63}{4}$. **D.** $\frac{253}{12}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x^3-6x=x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Ta có $S=\int\limits_{-2}^{3}\left|x^3-x^2-6x\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{12}$.

Câu 21. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=|\ln x|, y=1$ được tính bởi công thức:

A. $S=\int\limits_{1}^{e}\left|\left(|\ln x|-1\right)\right|\mathrm{d}x$

B. $S=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1-|\ln x|\right)\mathrm{d}x$

C. $S=\int\limits_{1}^{e}\left|\left(1-|\ln x|\right)\right|\mathrm{d}x$

D. $S=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left(|\ln x|-1\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

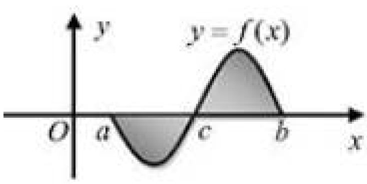
Chọn B.

Xét phương trình: $|\ln x|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x=-1 \\ \ln x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{e} \\ x=e \end{array}\right.$

Khi đó: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=|\ln x|, y=1$ được tính bởi công thức:

$$S=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left|1-|\ln x|\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1-|\ln x|\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 22. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$.

B. $S=\left|\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$.

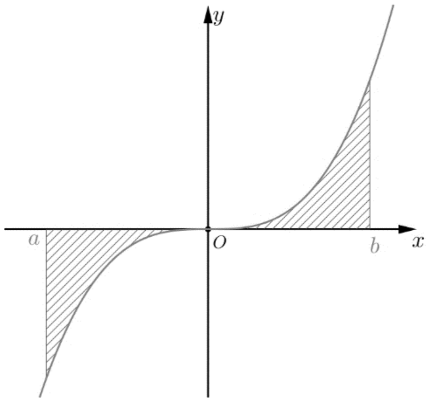
D. $S=\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$.

Lời giải

Chọn B.

$S = \left|\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right|$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_D = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S_D = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S_D = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

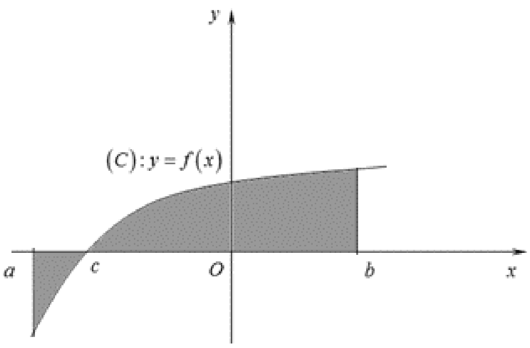
Chọn B.

Ta có $S_D = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^0 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Vì $f(x) \le 0, \forall x \in [a;0]$, $f(x) \ge 0, \forall x \in [0;b]$ nên:

$S_D = \int_a^0 (-f(x))\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 24. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

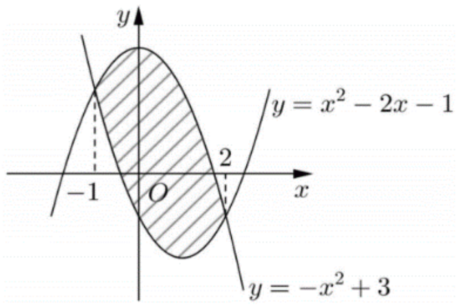
C. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

Chọn C.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là $S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^c|f(x)|\mathrm{d}x+\int_c^b|f(x)|\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 25. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}(-2x+2)dx$ **B.** $\int_{-1}^{2}(2x-2)dx$ **C.** $\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$ **D.** $\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)dx$

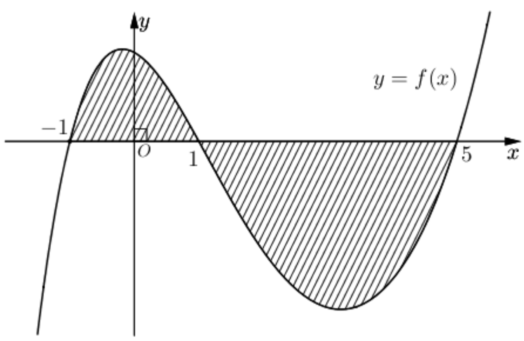
Lời giải

Chọn C.

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|(-x^2+3)-(x^2-2x-1)\right|dx=\int_{-1}^{2}\left|-2x^2+2x+4\right|dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx.$$

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

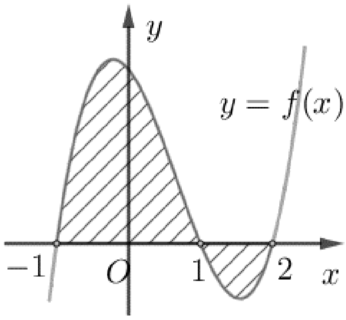
C. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $S=\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{dx}+\int_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{dx}$.

B. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{dx}-\int_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{dx}$.

C. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{dx}+\int_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{dx}$.

D. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{dx}-\int_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{dx}$.

Lời giải

Chọn D.

$S=\int_{-1}^{2}|f(x)|\mathrm{dx}=\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{dx}+\int_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{dx}$

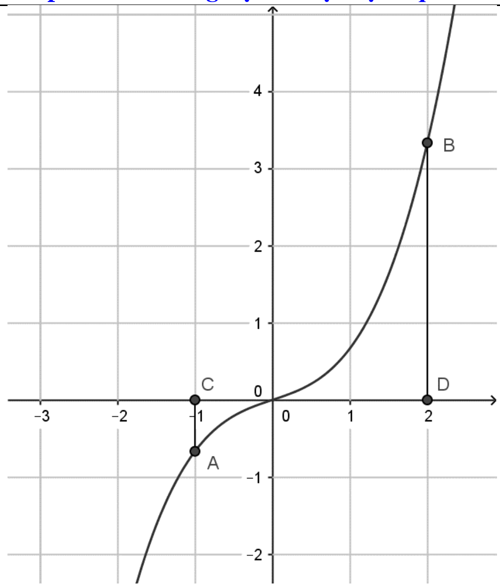
Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$ nên

$\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{dx}=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{dx}$; hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$ nên

$\int_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{dx}=-\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{dx}$

Vậy $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{dx}-\int_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{dx}$

Câu 28. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt $a=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{dx}$, $b=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{dx}$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$ **C.** $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

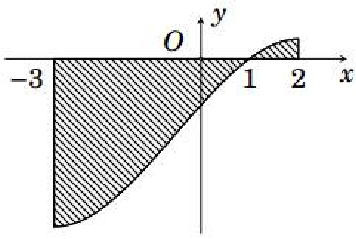
Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-a+b.$$

Câu 29. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\int_{-3}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$, $b=\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



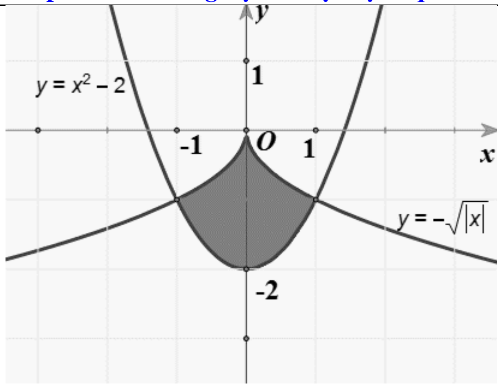
A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $S=\int_{-3}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int_{-3}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-a+b$.

Câu 30. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)dx$. **B.** $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)dx$.

C. $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)dx$. **D.** $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)dx$.

Lời giải

Chọn D.

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$\int_{-1}^{1}\left|x^2-2-\left(-\sqrt{|x|}\right)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left(-\sqrt{|x|}-x^2+2\right)dx$ **(vì** $x\in[-1;1]\Rightarrow -\sqrt{|x|}>x^2-2$ **).**

Câu 31. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\int_a^b |f(x)|dx$ **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi\int_a^b f(x)dx$

Lời giải

Chọn B.

Lý thuyết

Câu 32. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x)=2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V=3036$ **B.** $V=3036\pi$ **C.** $V=1518$ **D.** $V=1518\pi$

Lời giải

Chọn A.

Thể tích vật thể là: $V=\int_1^2 2024x\,dx=3036$

Câu 33. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2-2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V=156$ **B.** $V=156\pi$ **C.** $V=312$ **D.** $V=312\pi$

Lời giải

Chọn A.

Diện tích thiết diện là: $S(x)=3x.\left(3x^2-2\right)=9x^3-6x$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int\limits_1^3\left(9x^3-6x\right)dx=156$

Câu 34. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $2\sqrt{9-x^2}$

A. 90 **B.** 72π **C.** 78π **D.** 72

Lời giải

Chọn D.

Diện tích hình vuông là $S=\left(2\sqrt{9-x^2}\right)^2=4\left(9-x^2\right)=36-4x^2$

Vậy thẻ tích vật thể là $V=\int\limits_0^3 S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(36-4x^2\right)\mathrm{d}x=72$.

Câu 35. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0,x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le 1\right)$ là một tam giác đều có cạnh bằng x.

A. $V=\dfrac{12\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{12}{5}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích vật thể là: $V=\int\limits_0^1 S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 36. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **C.** $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là: $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$.

Câu 37. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$

Lời giải

Chọn D.

$$V=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\left.\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$$

Câu 38. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B.

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_0^1=\frac{4\pi}{3}.$$

Câu 39. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Lời giải

Chọn A.

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2dx=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 40. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi\left(\pi+1\right)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2\left(\pi+1\right)$ **D.** $V=2\pi^2$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\left(2+\sin x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi\left(\pi+1\right)$.

Câu 41. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $\left(P\right):y=x^2$, đường thẳng $d:y=2x$ và đường thẳng $x=0,x=2$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int_0^2 (x^2-2x)^2 dx$. **B.** $\pi\int_0^2 4x^2dx-\pi\int_0^2 x^4dx$. **C.** $\pi\int_0^2 4x^2dx+\pi\int_0^2 x^4dx$. **D.** $\pi\int_0^2 (2x-x^2)dx$

Lời giải

Chọn A.

Vậy thể tích khối tròn xoay được tính $V=\pi\int_0^2 4x^2dx-\pi\int_0^2 x^4dx$.

Câu 42. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$. **B.** $V=\int_0^2 (x^2+3)dx$. **C.** $V=\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$. **D.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)dx$.

Lời giải

Chọn A.

Thể tích của vật thể được tạo nên là $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$.

Câu 43. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$V=\pi\int_0^1 (x^2-2x)^2 dx=\pi\int_0^1 (x^4-4x^3+4x^2)dx=\pi.\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\pi.\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}\right)=\frac{8\pi}{15}.$$

Câu 44. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int_1^4 x dx$. **B.** $V=\pi^2\int_1^4 x dx$. **C.** $V=\pi\int_1^4 \sqrt{x} dx$. **D.** $V=\int_1^4 \left|\sqrt{x}\right| dx$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $V=\pi\int_1^4 x dx$

Câu 45. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x+2}$ và hai trục toạ độ. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** 2. **C.** 2π. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn C.

$V=\pi\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{x+2}\right)^2dx=\pi\left(x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{0}=2\pi.$

Câu 46. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π.　**B.** $\frac{3\pi}{2}$.　**C.** $\frac{2\pi}{3}$.　**D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$V=\pi\int_{1}^{2}xdx=\frac{\pi x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{3\pi}{2}.$

Câu 47. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=4,x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$.　**B.** $V=\frac{5\pi}{6}$.　**C.** $V=\frac{7\pi}{11}$.　**D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$V=\pi\int_4^9\left(\sqrt{x}-2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_4^9\left(x-4\sqrt{x}+4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}+4x\right)\Bigg|_4^9$$

$$=\pi\left(\frac{81}{2}-72+36\right)-\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{64}{3}+16\right)=\frac{11\pi}{6}.$$

Câu 48. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2,y=0,x=1,x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$　**B.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$　**C.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$　**D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 49. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.　**B.** $\int_0^1\mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$.　**C.** $\pi\int_0^1\mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$.　**D.** $\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

$\pi\int_0^1 \left(e^{3x}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 e^{6x} dx$.

Câu 50. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{4x}, y = 0, x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x} dx$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x} dx$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x} dx$. **D.** $\int_0^1 e^{8x} dx$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$V = \pi\int_0^1 \left(e^{4x}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 e^{8x} dx.$

Câu 51. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, các đường thẳng $x = 0$, $x = \ln 3$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục hoành là

A. 2π. **B.** 4π. **C.** 4. **D.** π.

Lời giải

Chọn B.

$V = \pi\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx = \pi\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{\ln 3} = 4\pi$.

Câu 52. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục *Ox*, trục *Oy* và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục *Ox*. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ **B.** $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ **C.** $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ **D.** $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Lời giải

Chọn C.

Công thức tính: $V = \pi\int_a^b f^2(x) dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

Câu 53. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2 (2x-x^2)dx$ **B.** $\pi\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$ **C.** $\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$ **D.** $\pi\int_0^2 (2x-x^2)dx$

Lời giải

Chọn B.

Theo công thức ta chọn $V=\pi\int_0^2 (2x-x^2)^2 dx$

Câu 54. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox là: $V=\pi\int_1^3 (x^2-4x+3)^2 \mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 55. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và $x=5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh Ox bằng

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=\sqrt{x-1}$ và trục hoành là $\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow x=1$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_1^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_1^5 (x-1)\,\mathrm{d}x=\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right|_1^5=8\pi.$$

Câu 56. Thể tích vất thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ và trục hoành quay quanh Ox là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy $V_{Ox}=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\text{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 57. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ xung quanh trục Ox.

A. $\dfrac{5\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{27\pi}{10}$. **C.** $\dfrac{81\pi}{10}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ là

$-x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$. Do đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_0^3\left(-x^2+3x\right)^2\text{d}x=\dfrac{81\pi}{10}$.

Câu 58. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và trục Ox là: $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\text{d}x=\dfrac{16\pi}{5}$.

Câu 59. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{16}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{31\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{31}{30}$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y=x^2-4x+3$ và đường $y=0$ là

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\text{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 60. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bở đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=\frac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\frac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=e^2-1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\sqrt{x}.e^{x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}.e^{x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{2x^2}\mathrm{d}\left(2x^2\right)=\frac{\pi}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right).$$

Câu 61. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $V=\frac{512\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{32}{3}$. **C.** $V=\frac{32\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{512}{15}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Thể tích của khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2dx=\frac{512\pi}{15}$.

Câu 62. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x-2$ và trục hoành. Quay hình phẳng (H) quay quanh trục hoành, ta được một khối nón tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{81}{10}\pi$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành: $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Thể tích khối nón là $V=\pi\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{10}$.

Câu 63. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi^2}{30}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2-3x+2\right|=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Vậy $V=\pi\int\limits_1^2 \left|x^2-3x+2\right|^2 \mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{30}$.

Câu 64. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=2$, khi quay xung quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{32\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{5\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_0^2 \left(x^2\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\left.\left(\dfrac{1}{5}x^5\right)\right|_0^2=\dfrac{32\pi}{5}$.

Câu 65. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox là

A. $\dfrac{71\pi}{35}$. **B.** $\dfrac{81}{35}$. **C.** $\dfrac{71}{35}$. **D.** $\dfrac{81\pi}{35}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\dfrac{1}{3}x^3-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^3 \left(\dfrac{1}{3}x^3-x^2\right)^2 \mathrm{d}x=\dfrac{81\pi}{35}$.

Câu 66. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{512\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{256\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int\limits_{-2}^2 \left(4-x^2\right)^2 \mathbf{d}x=\dfrac{512\pi}{15}$.

Câu 67. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-x$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi\int\limits_0^1 \left(x^2 - x\right)^2 dx = \dfrac{\pi}{30}$.

Câu 68. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{81}{10}$. **C.** $\dfrac{81\pi}{10}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox là: $V = \pi\int\limits_1^4 \left(x^2 - 5x + 4\right)^2 dx = \dfrac{81\pi}{10}$.

Câu 69. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$ và $x = 3$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{18\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{18}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

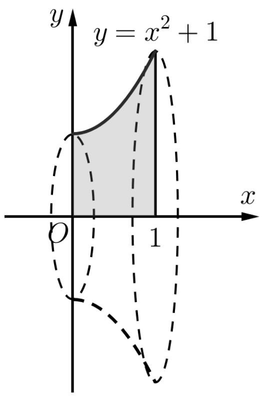
Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Khi đó $V = \pi\int\limits_0^3 \left(x^2 - 2x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^3 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left(\dfrac{x^5}{5} - x^4 + \dfrac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \dfrac{18\pi}{5}$

Câu 70. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.



Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

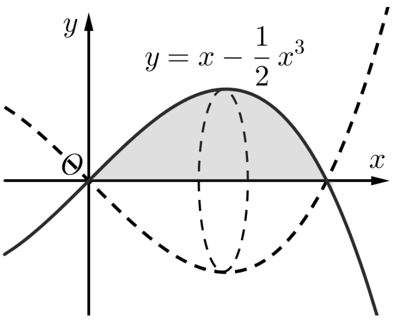
A. $V = \int_0^1 (x^2+1)\,dx$. **B.** $V = \pi\int_0^1 (x^2+1)\,dx$. **C.** $V = \int_0^1 (x^2+1)^2\,dx$. **D.** $V = \pi\int_0^1 (x^2+1)^2\,dx$.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi\int_0^1 (x^2+1)^2\,dx$

Câu 71. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường $y = x - \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.



Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^2 dx$. **B.** $V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^2 dx$.

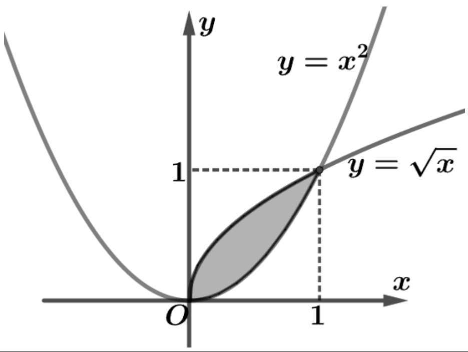
C. $V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3\right) dx$. **D.** $V = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3\right) dx$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích của vật thể là: $V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^2 dx$.

Câu 72. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2$ và đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox bằng



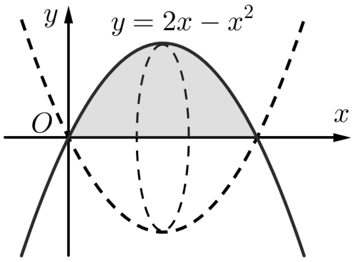
A. $V=\dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích khối tròn xoay thu được là $V=\pi\int_0^1\left|x^4-x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{10}$.

Câu 73. Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$ khi quay quanh trục Ox là:



A. $\dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{14\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

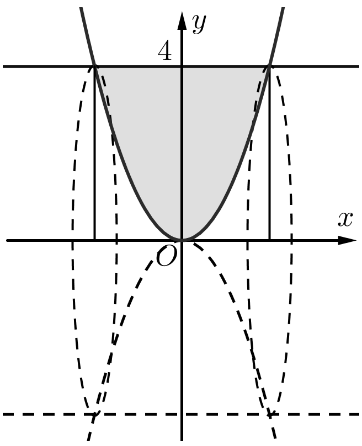
Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm là: $-x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$

Câu 74. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=4$ quay quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bằng:



A. $\dfrac{64\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{128\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{256\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{152\pi}{5}$.

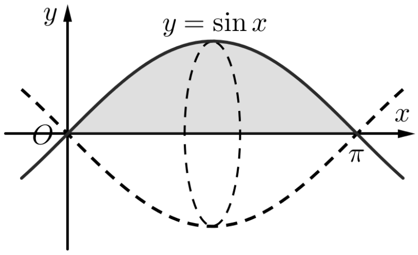
Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2=4\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_{-2}^2\left|\left(x^2\right)^2-4^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{256\pi}{5}$.

Câu 75. Biết một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin^2 x$ là $F\left(x\right)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=\pi$ khi quay quanh trục Ox là:



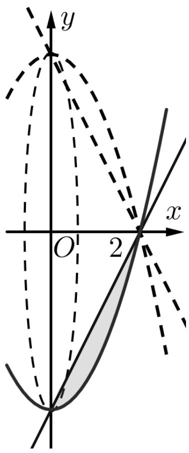
A. $\frac{\pi^2}{4}$. **B.** $\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sin x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi^2}{2}$

Câu 76. Thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4$, $y=2x-4$, $x=0$, $x=2$ quay quanh trục Ox bằng:



A. $\frac{416\pi}{15}$. **B.** $\frac{752\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2-4=2x-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Thể tích của hình khối là: $V=\pi\int_0^2\left|\left(x^2-4\right)^2-\left(2x-4\right)^2\right|\mathrm{d}x=\frac{32\pi}{5}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 77. Trong mặt phẳng Oxy, cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số sau: $y=e^{\frac{x}{2}}; y=0$ và $x=0; x=2$.

a) Đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục hoành tại một điểm.

b) Đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục tung tại một điểm.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $a.e+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+2b=-2$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng πe^{m}, với $m\in\mathbb{Z}$. Khi đó $m^{\log_{\frac{1}{2}}5}=\frac{1}{5}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) vì $e^{\frac{x}{2}}>0$ nên $e^{\frac{x}{2}}=0$ vô nghiệm

Do đó, đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ không cắt trục hoành.

b) $x=0\Rightarrow y=\sqrt{e}$

Do đó, đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục tung tại một điểm $(0;\sqrt{e})$.

c) Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=e^{\frac{x}{2}}; y=0$ và $x=0; x=2$ là:

$$S=\int_0^2\left|e^{\frac{x}{2}}\right|dx=\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^2=2\left(e^{\frac{2}{2}}-e^{\frac{0}{2}}\right)=2(e-1)=2e-2$$

$\Rightarrow a=2; b=-2\Rightarrow a+2b=-2$

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^2\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2dx=\pi\int_0^2 e^{x}dx=\pi e^{x}\Big|_0^2=\pi e^2$$

$$\Rightarrow m=2\Rightarrow m^{\log_{\frac{1}{2}}5}=2^{-\log_2 5}=2^{\log_2 5^{-1}}=\frac{1}{5}$$

Câu 78. Trong mặt phẳng Oxy, cho (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-2x$ và trục hoành

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm.

b) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục tung tại một điểm.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{4}{5}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{16\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ với trục hoành là:

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(0;0);(2;0)$

b) $x=0 \Rightarrow y=0$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục tung tại một điểm $(0;0)$.

c) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)=x^2-2x$		+	0	−	0	+	

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ và trục hoành là

$$S=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\int_2^0\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_2^0=\frac{4}{3}$$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{16\pi}{15}$$

Câu 79. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ và $y=g(x)=x-1$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(1;0);(4;3)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox bằng $\frac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(1;0);(3;0)$.

b) Xét phương trình: $x^2-4x+3=x-1 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=4 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$.

Do đó, hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(1;0);(4;3)$.

c) Xét phương trình: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox trên bằng

$$\int_1^3 \left|x^2-4x+3\right| dx = -\int_1^3 \left(x^2-4x+3\right) dx = -\left.\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\right|_1^3 = \frac{4}{3}$$

d) Xét phương trình: $x^2-4x+3=x-1 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Suy ra, diện tích hình phẳng đã cho bằng:

$$S=\int_1^4 \left|\left(x^2-4x+3\right)-(x-1)\right| dx = \int_1^4 \left|x^2-5x+4\right| dx = \int_1^4 \left(-x^2+5x-4\right) dx = \frac{9}{2}.$$

Câu 80. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ và $y=g(x)=x$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm $(-\sqrt{3};0);(\sqrt{3};0)$.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm $(0;0);(-2;2);(2;-2)$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox bằng $\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{7}{2}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm $(0;0);(-\sqrt{3};0);(\sqrt{3};0)$.

b) Xét phương trình: $x^3-3x=x \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=-2 \Rightarrow y=-2 \\ x=2 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$.

Do đó, hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm $(0;0);(-2;-2);(2;2)$.

c) Xét phương trình: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và trục Ox trên bằng

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|x^3-3x|\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{0}|x^3-3x|\,dx+\int_{0}^{\sqrt{3}}|x^3-3x|\,dx=\left|\int_{-\sqrt{3}}^{0}(x^3-3x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^3-3x)\,dx\right|=\frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Xét phương trình $x^3-3x=x \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3-3x$ và $y=x$ là

$S=\int_{-2}^{2}|x^3-4x|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}|x^3-4x|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}|x^3-4x|\mathrm{d}x=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right|=8$ (đơn vị diện tích).

Câu 81. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-x$ và $y=f(x)=2x^2-x$.

a) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm.

b) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và đường thẳng $y=0$ bằng $\frac{3}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ bằng $\frac{5}{3}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Do đó, đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm $(0;0);(-1;0);(1;0)$.

b) Xét phương trình: $x^3 - x = 2x^2 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 6 \end{array}\right.$.

Do đó, hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm $(0;0);(2;6)$.

c) Xét phương trình: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và $y = 0$ trên bằng

$\int_{-1}^{1} |x^3 - x| dx = \int_{-1}^{0} |x^3 - x| dx + \int_{0}^{1} |x^3 - x| dx = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x) dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x) dx\right| = \frac{1}{2}$ (đơn vị diện tích).

d) Xét phương trình $x^3 - x = 2x^2 - x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là: $S = \int_{0}^{2} \left|(x^3 - x) - (2x^2 - x)\right| dx = \int_{0}^{2} |x^3 - 2x^2| dx = \frac{4}{3}$.

Câu 82. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = x + \sqrt{x}$ và $y = x + x^2$.

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x = 0$ hoặc $x = -1$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ được tính theo công thức $S = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2) dx$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ được tính theo công thức $S = \int_{0}^{1} (x + \sqrt{x}) dx - \int_{0}^{1} (x + x^2) dx$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x = 0$, $x = 1$ bằng $\frac{1}{3}$ (đơn vị diện tích)

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Phương trình hoành giao độ giao điểm của hai đồ thị hàm số trên là

$x + \sqrt{x} = x + x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x = 0$ và $x = -1$

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x + \sqrt{x}$, $y = x + x^2$, $x = 0$, $x = 1$ là:

$S = \int_{0}^{1} \left|(x + \sqrt{x}) - (x + x^2)\right| dx = \int_{0}^{1} |\sqrt{x} - x^2| dx = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2) dx$.

c) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là:

$$S=\int_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right]\mathrm{d}x \text{ (vì } x+\sqrt{x}\ge x+x^2\,\forall x\in[0;1]\text{)}=\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x.$$

d) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \text{ (đơn vị diện tích)}$$

Câu 83. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y=-2x+8$ có đồ thị là (d) và các đường thẳng $x=1$, $x=3$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=5$.

a) Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là 1.

b) Hàm số $y=x^3-3x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

c) $S_1=9S_2$.

d) Tính diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng $\frac{23}{3}$(đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Xét phương trình hoành độ: $x^3-3x+2=-2x+8\Leftrightarrow x^3-x-6=0\Leftrightarrow x=2$.

Suy ra (C) cắt (d) tại duy nhất một điểm.

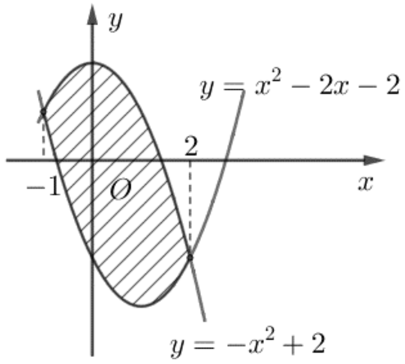
b) Ta có: $y'=3x^2-3=0\Rightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

c) Ta có $S_1=\int_1^4(8-2x)\mathrm{d}x=9$ và $S_2=-\int_4^5(8-2x)\mathrm{d}x=1$ nên suy ra $S_1=9S_2$.

d) Diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng:

$$\int_1^3\left|x^3-3x+2-(8-2x)\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\left|x^3-x-6\right|\mathrm{d}x+\int_2^3\left|x^3-x-6\right|\mathrm{d}x=\frac{15}{4}+\frac{31}{4}=\frac{46}{4}=\frac{23}{2} \text{(đơn vị diện tích).}$$

Câu 84. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



a) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$, $x = -1, x = 2$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_{-1}^{2}(2x^2 - 2x - 4)dx$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_{-1}^{0}(-2x^2 + 2x + 4)dx + \int_{0}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)dx$.

d) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{13}{2}$ (đơn vị diện tích)

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Từ đồ thị ta có: Diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$, $x = -1, x = 2$.

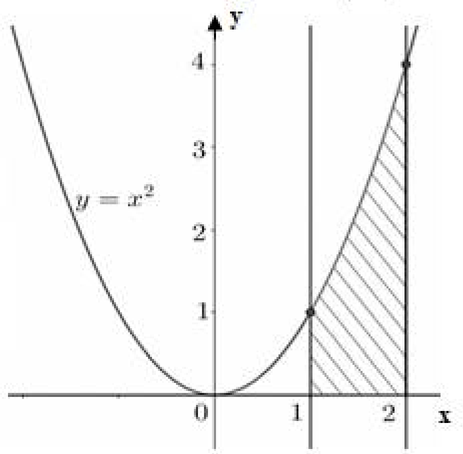
b) Diện tích hình phẳng (H) là:

$$S = \int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2 + 2\right) - \left(x^2 - 2x - 2\right)\right]dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)dx.$$

c) Ta có: $S = \int_{-1}^{0}(-2x^2 + 2x + 4)dx + \int_{0}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)dx$.

d) $S = \int_{-1}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{13}{2}$ (đơn vị diện tích)

Câu 85. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



a) Đồ thị $y = x^2$ cắt đường thẳng $x = 2$ tại điểm $(2;1)$.

b) Diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y = x^2; x = 0; x = 2$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{7}{3}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{31\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

a) $x = 2 \Rightarrow y = 4$

Đồ thị $y = x^2$ cắt đường thẳng tại điểm $(2;4)$.

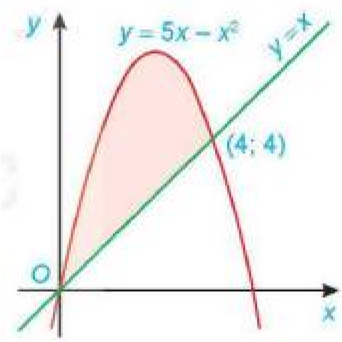
b) Diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$.

c) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$ nằm trên trục hoành nên diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{7}{3}$.

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V = \pi\int_1^2 \left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_1^2 x^4 dx = \pi\frac{1}{5}x^5\Big|_0^2 = \frac{31\pi}{5}.$$

Câu 86. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



a) Đồ thị $y=5x-x^2$ cắt đường thẳng $y=x$ tại hai điểm $(0;0);(4;4)$.

b) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=5x-x^2; y=x; x=0; x=4$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{83}{4}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\frac{153\pi}{5}$ (đơn vị thể tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Đồ thị $y=5x-x^2$ cắt đường thẳng $y=x$ tại hai điểm $(0;0);(4;4)$.

b) Đồ thị $y=5x-x^2$ cắt đường thẳng $y=x$ tại hai điểm $(0;0);(4;4)$ nên diện tích hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị $y=5x-x^2; y=x; x=0; x=4$.

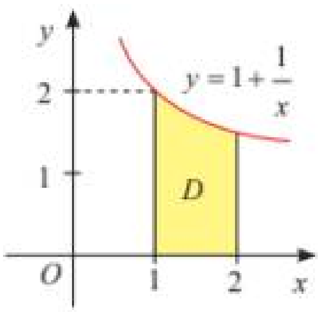
c) Hình phẳng (H) được giới hạn đồ thị $y=5x-x^2$ nằm trên đồ thị $y=x$ nên diện tích hình phẳng

(H) là $\int_1^4 \left(5x-x^2-x\right)dx=\int_1^4\left(4x-x^2\right)dx=\left.\left(2x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\right|_1^4=\frac{83}{4}$ (đơn vị diện tích).

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_1^4\left(5x-x^2\right)^2dx-\pi\int_1^4 x^2dx=\frac{153\pi}{5}$$

Câu 87. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên dưới.



a) Đồ thị hàm số $y=1+\dfrac{1}{x}$ cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

b) Hình phẳng (D) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=1+\dfrac{1}{x}; x=0; x=1; x=2$.

c) Biết diện tích hình phẳng (D) bằng $m+n\ln 2$, với $m,n\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2025m-2024n=1$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (D) quay quanh trục Ox bằng $\dfrac{a}{b}\pi+c\pi\ln 2$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+2b+3c=10$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Do $x\neq 0$ nên đồ thị hàm số $y=1+\dfrac{1}{x}$ không cắt trục tung

b) Hình phẳng (D) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=1+\dfrac{1}{x}; y=0; x=1; x=2$.

c) Hình phẳng (D) được giới hạn các đồ thị $y=1+\dfrac{1}{x}; x=0; x=1; x=4$ nằm trên trục hoành nên diện tích hình phẳng (D) là: $S=\int_1^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(x+\ln|x|\right)\Big|_1^2=1+\ln 2$ (đơn vị diện tích).

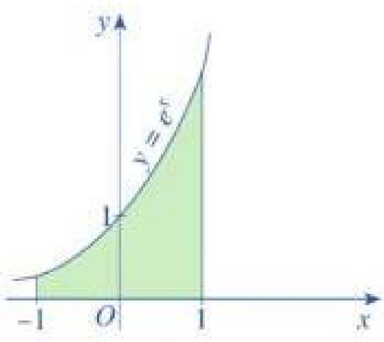
$\Rightarrow m=1; n=1 \Rightarrow 2025m-2024n=1$

d) Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (D) quay quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_1^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\left(x+2\ln|x|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}\pi+2\pi\ln 2 \text{ (đơn vị thể tích).}$$

$\Rightarrow a=3; b=2; c=2 \Rightarrow a+2b+3c=13$

Câu 88. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



a) Đồ thị hàm số $y=e^x$ cắt đường thẳng $x=-1$ tại điểm $\left(-1;\dfrac{1}{e}\right)$.

b) Đồ thị hàm số $y=e^x$ cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

c) Diện tích hình phẳng (H) là $\int_{-1}^{1} e^x dx$.

d) Biết thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng $\left(\frac{a.e^b - 1}{c.e^2}\right).\pi$, với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $3a+2b-c=11$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $x=-1 \Rightarrow y=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Do đó, đồ thị hàm số $y=e^x$ cắt đường thẳng $x=-1$ tại điểm $\left(-1;\frac{1}{e}\right)$.

b) Ta có $e^x>0$ nên $e^x=0$ vô nghiệm, do đó đồ thị hàm số $y=e^x$ không cắt trục hoành

c) Hình phẳng (H) được giới hạn các đồ thị hàm số $y=e^x; y=0; x=-1; x=1$.

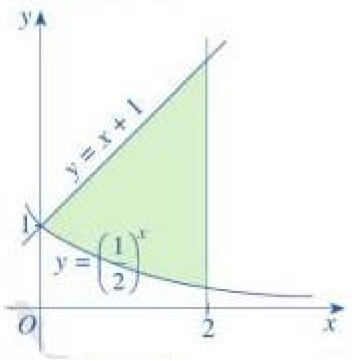
nên diện tích hình phẳng (H) là $\int_{-1}^{1} e^x dx$.

d) thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(e^x\right)^2 dx=\pi\int_{-1}^{1} e^{2x}dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^{1}=\left(\frac{e^4-1}{2e^2}\right).\pi$$

$\Rightarrow a=1; b=4; c=2 \Rightarrow 3a+2b-c=9$

Câu 89. Trong mặt phẳng Oxy, cho các đồ thị $y=x+1; y=\left(\frac{1}{2}\right)^x; x=0; x=2$ như hình bên dưới. Gọi (H_1) là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y=x+1; x=0; x=2$ và có diện tích là S_1. Gọi (H_2) là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x; x=0; x=2$ và có diện tích là S_2. Gọi (H_3) là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y=x+1; y=\left(\frac{1}{2}\right)^x; x=0; x=2$ và có diện tích là S_3.



a) $S_1 = \int_0^2 (x+1)\,dx$

b) $S_2 = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$.

c) $S_3 = S_1 + S_2$

d) $S_3 = a + \frac{b}{c\ln 2}$ (đơn vị diện tích), với $a,b,c \in \mathbb{Z}; b<0$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó, $a+b+c=5$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) (H_1) là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y = x+1; x=0; x=2$ và có diện tích là S_1 nên

$S_1 = \int_0^2 (x+1)\,dx$

b) (H_2) là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; x=0; x=2$ và có diện tích là S_2 nên

$S_2 = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$

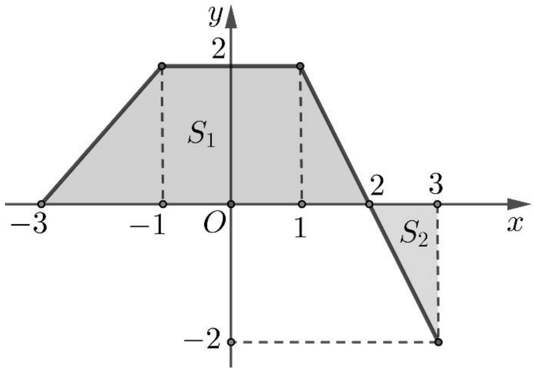
c) (H_3) là hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y = x+1; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; x=0; x=2$ và có diện tích là S_3 nên

$S_3 = S_1 - S_2$

d) Ta có $S_3 = S_1 - S_2 = \int_0^2 (x+1)\,dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^2 - \left(-\frac{1}{2^x \ln 2}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{3}{4\ln 2}$ (đơn vị diện tích).

$\Rightarrow a = 4; b = -3; c = 4 \Rightarrow a+b+c = 5$

Câu 90. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2 (S_1 là phần tô đậm nằm trên trục hoành, S_2 là phần tô đậm nằm dưới trục hoành như hình vẽ)



a) $S_2=\int\limits_2^3(2x-4)\,\mathrm{d}x$

b) $S_1=\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}2\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(-2x+4)\,\mathrm{d}x$

c) $S_{(H)}=S_1+\int\limits_2^3(-2x+4)\,\mathrm{d}x$

d) Giới hạn hình phẳng (H) có diện tích bằng 10 (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Xét hàm số $y=f(x)$, ta có: $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\in[-3;-1]\\ 2, & x\in[-1;1]\\ -2x+4, & x\in[1;3]\end{cases}$

a) Dựa vào hình vẽ, ta có: $f(x)=-2x+4\le 0, x\in[2;3]$ nên

$S_2=\int\limits_2^3|-2x+4|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_2^3(-2x+4)\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3(2x-4)\,\mathrm{d}x$.

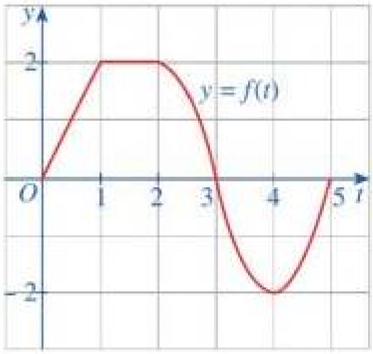
b) Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1=\int\limits_{-3}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}2\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(-2x+4)\,\mathrm{d}x$.

c) Ta có: $S_{(H)}=\int\limits_{-3}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=S_1+S_2=S_1-\int\limits_2^3(-2x+4)\,\mathrm{d}x$.

c) $S_{(H)}=\int\limits_{-3}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=S_1+S_2=\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}2\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(-2x+4)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3(2x-4)\,\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\Big|_{-3}^{-1}+2x\Big|_{-1}^{1}+\left(-x^2+4x\right)\Big|_1^2+\left(x^2-4x\right)\Big|_2^3=8$ (đơn vị diện tích).

Câu 91. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y=f(t)$ như hình vẽ.



a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=0;t=1$ là $S=\frac{1}{2}\int_0^1 tdt$.

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=1;t=2$ là $\int_1^2 2tdt$.

c) Tích phân $\int_2^3 f(x)dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t=2;t=3$.

d) Với $t\in[3;5]$ đồ thị hàm số $y=f(t)$ là một parabol có dạng: $y=f(t)=at^2+bt+c$. Khi đó, diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=3;t=5$ bằng $\frac{14}{9}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

a) đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ là $y=\frac{1}{2}t$. Do đó diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=0;t=1$ là $S=\frac{1}{2}\int_0^1 tdt$.

b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=1;t=2$ là $S=\int_1^2 2dt=2t\Big|_1^2=2$ (đơn vị diện tích).

c) Tích phân $\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 f(t)dt$ nên $\int_2^3 f(t)dt$ là cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t=2;t=3$.

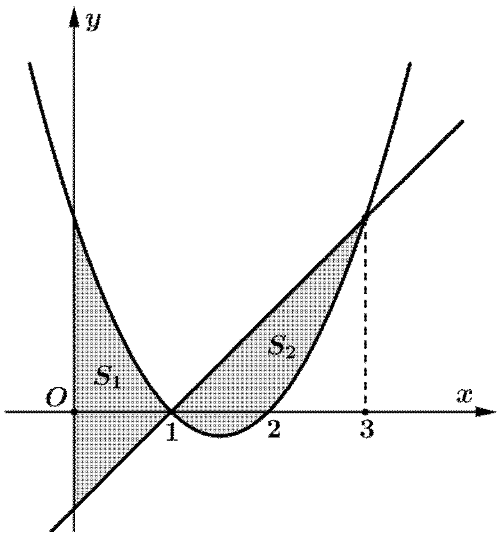
d) Với $t\in[3;5]$ đồ thị hàm số $y=f(t)$ là một parabol có dạng: $y=f(t)=at^2+bt+c$

vì các điểm $(3;0);(5;0);(2;-4)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(t)=at^2+bt+c$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}9a+3b+c=0\\25a+5b+c=0\\4a+2b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{4}{3}\\b=\dfrac{32}{3}\\c=-20\end{cases}\Rightarrow y=f(t)=-\frac{4}{3}t^2+\frac{32}{3}t-20$$

Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t=3;t=5$ là $S=\int_3^5|f(t)|dt=\int_3^5\left(-\frac{4}{3}t^2+\frac{32}{3}t-20\right)dt=\frac{16}{9}$ (đơn vị diện tích).

Câu 92. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô đậm như trong hình dưới.



a) Đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ cắt đường thẳng $y=x-1$ tại hai điểm $(1;0);(3;0)$.

b) $S_1=\int_0^1(-x^2+4x-3)\mathrm{d}x$

c) $S_1=S_2$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ bằng $\frac{10}{3}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	SAI	ĐÚNG	SAI

a) Xét phương trình: $x^2-3x+2=x-1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\x=3\Rightarrow y=2\end{array}\right.$.

Do đó, hai đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ cắt nhau tại hai điểm $(1;0);(3;2)$.

b) $S_1=\int\limits_0^1\left(x^2-3x+2-(x-1)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x$.

c) $S_1=\int\limits_0^1\left(x^2-3x+2-(x-1)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{3}-2+3=\dfrac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

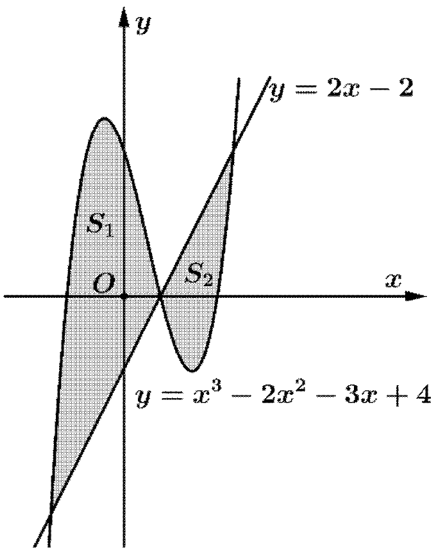
$S_2=\int\limits_1^3\left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_1^3$

$=-9+18-9-\left(-\dfrac{1}{3}+2-3\right)=\dfrac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).

Vậy $S_1=S_2$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int\limits_0^3\left|-x^2+4x-3\right|dx=S_1+S_2=\dfrac{8}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 93. Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-3x+4$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d):y=2x-2$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô đậm như trong hình dưới.



a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6),B(1;0),C(3;4)$.

b) $S_1=\int\limits_{-2}^1\left(-x^3+2x^2+5x-6\right)dx$

c) $S_2=\int\limits_3^1\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C), đường thẳng (d) và hai đường thẳng $x=-2$; $x=3$ bằng $\dfrac{253}{12}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-2x^2-3x+4=2x-2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\Rightarrow y=-6 \\ x=1\Rightarrow y=0 \\ x=3\Rightarrow y=4 \end{array}\right. .$$

Vậy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6),B(1;0),C(3;4)$.

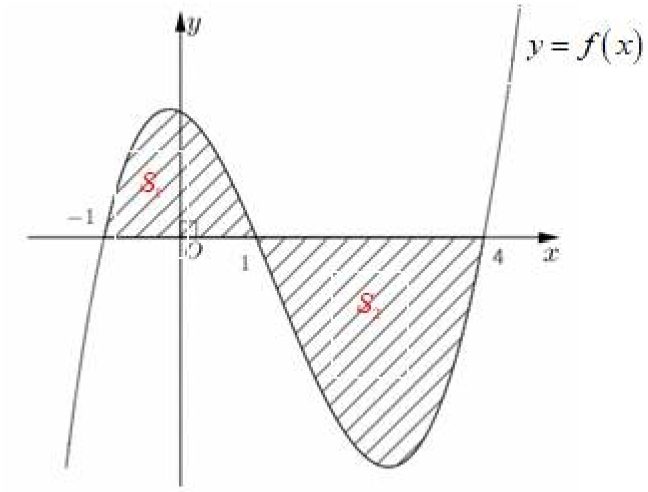
b) $S_1=\int_{-2}^{1}\left[x^3-2x^2-3x+4-(2x-2)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$

c) $S_2=\int_{1}^{3}\left[2x-2-\left(x^3-2x^2-3x+4\right)\right]dx=\int_{1}^{3}\left(-x^3+2x^2+5x-6\right)dx=-\int_{3}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$

$=\int_{3}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C), đường thẳng (d) và hai đường thẳng $x=-2$; $x=3$ là: $S=S_1+S_2=\int_{-2}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx+\int_{3}^{1}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)dx=\frac{63}{4}+\frac{16}{3}=\frac{253}{12}$.

Câu 94. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới. Gọi $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được gạch chéo như trong hình dưới.



a) Đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $y=0$ tại ba điểm phân biệt.

b) $S_1=-\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{dx}$

c) $S_2=\int_{4}^{1}f(x)\,\mathrm{dx}$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$; trục Ox; $x=-1$; $x=4$ bằng $\dfrac{259}{24}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

a) Dựa vào đồ thị, ta có: Đồ thị hàm số $\left(C\right)$ cắt đường thẳng $y=0$ tại ba điểm phân biệt.

b) Ta có: hàm số $f(x)\ge 0\,\forall x\in\left[-1;1\right]$, nên: $S_1=\int\limits_{-1}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{dx}$

c) Ta có: hàm số $f(x)\le 0\,\forall x\in\left[1;4\right]$, nên: $S_2=\int\limits_{1}^{4}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{dx}=-\int\limits_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{dx}=\int\limits_{4}^{1}f\left(x\right)\mathrm{dx}$

d) vì các điểm $\left(-1;0\right);\left(1;0\right);\left(4;0\right)$ thuộc đồ thị hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+2$ nên ta có hệ:

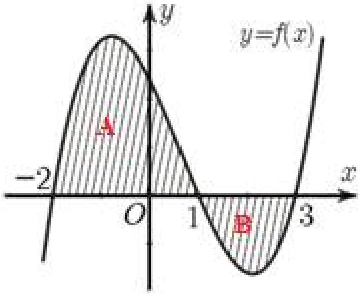
$$\begin{cases}-a+b-c+2=0\\ a+b+c+2=0\\ 64a+16b+4c+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-2\\ c=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+2$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$; trục Ox; $x=-1$; $x=4$ là:

$$S=S_1+S_2=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{dx}+\int\limits_{4}^{1}f\left(x\right)\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{dx}+\int\limits_{4}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{dx}$$

$$\left.\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+2x\right)\right|_{-1}^{1}+\left.\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+2x\right)\right|_{4}^{1}=\frac{8}{3}+\frac{63}{8}=\frac{253}{24}$$ (đơn vị diện tích).

Câu 95. Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+\dfrac{5}{2}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ bên dưới. Gọi $A;B$ là phần diện tích phần được gạch chéo như trong hình dưới.



a) Đồ thị hàm số $\left(C\right)$ cắt đường thẳng $y=0$ tại một điểm phân biệt.

b) $A=\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x<\int\limits_{3}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$; trục Ox; $x=-2$; $x=3$ bằng $\dfrac{1265}{144}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Dựa vào đồ thị, ta có: Đồ thị hàm số $\left(C\right)$ cắt đường thẳng $y=0$ tại ba điểm phân biệt.

b) Ta có: hàm số $f(x)\ge 0\,\forall x\in\left[-2;1\right]$, nên: $A=\int\limits_{-2}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

c) Ta có: hàm số $f(x)\le 0\,\forall x\in\left[1;3\right]$, nên: $B=\int\limits_{1}^{3}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{3}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Mà từ đồ thị : $A>B\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x>\int\limits_{3}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

d) Vì các điểm $\left(-2;0\right);\left(1;0\right);\left(3;0\right)$ thuộc đồ thị hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+\dfrac{5}{2}$ nên ta có hệ:

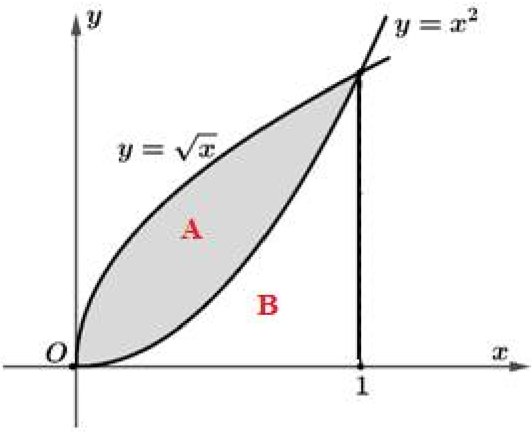
$$\begin{cases}-8a+4b-2c+\dfrac{5}{2}=0\\ a+b+c+\dfrac{5}{2}=0\\ 27a+9b+3c+\dfrac{5}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{12}\\ b=-\dfrac{5}{6}\\ c=-\dfrac{25}{12}\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{5}{12}x^3-\dfrac{5}{6}x^2-\dfrac{25}{12}x+\dfrac{5}{2}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$; trục Ox; $x=-2$; $x=3$ là:

$$S=A+B=\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left(\frac{5}{12}x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{25}{12}x+\frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{1}\left(\frac{5}{12}x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{25}{12}x+\frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\left.\left(\frac{5}{48}x^4-\frac{5}{18}x^3-\frac{25}{24}x^2+\frac{5}{2}x\right)\right|_{-2}^{1}+\left.\left(\frac{5}{48}x^4-\frac{5}{18}x^3-\frac{25}{24}x^2+\frac{5}{2}x\right)\right|_{3}^{1}=\frac{105}{16}+\frac{20}{9}=\frac{1265}{144}$$ (đơn vị diện tích).

Câu 96. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai hàm số $y=f\left(x\right)=\sqrt{x}$, $y=g\left(x\right)=x^2$ và hai đường thẳng $x=0, x=1$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là phần diện tích được tô đậm và B là phần diện tích không tô đậm như trong hình dưới.



a) Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại một điểm.

b) $B=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

c) $A-B=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

d) $A=\frac{2}{3}$ (đơn vị diện tích).

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Từ đồ thị, ta có: Hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $(0;0)$ và $(1;1)$.

b) B là phần diện tích giới hạn bởi các đường $g(x)=x^2, x=0, x=1$ nên $B=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

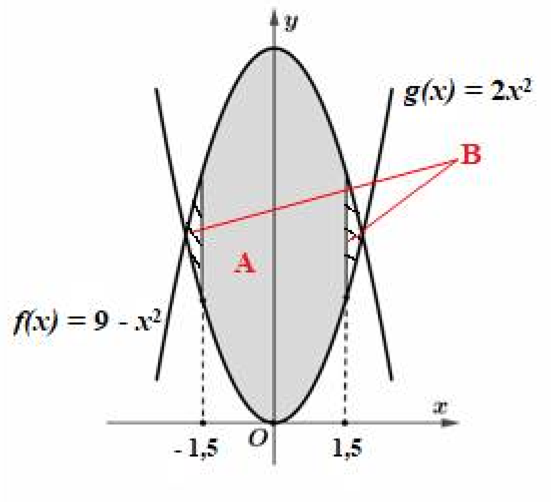
c) phần diện tích giới hạn bởi các đường $f(x)=\sqrt{x}, x=0, x=1$ nên $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Do đó, từ đồ thị ta có: $A+B=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$A=\int_0^1\left|\sqrt{x}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1-\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\text{(đơn vị diện tích).}$$

Câu 97. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai hàm số $f(x)=9-x^2$, $g(x)=2x^2$ và hai đường thẳng $x=-1,5, x=1,5$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi A là phần diện tích được tô đậm và B là phần diện tích được gạch chéo như trong hình dưới.



a) Hai đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ cắt nhau tại hai điểm $\left(-3;9\right)$ và $\left(3;9\right)$.

b) $A=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) $B=2\int\limits_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

d) $A+B=12\sqrt{a}$ (đơn vị diện tích), với $a\in\mathbb{Z}$. Khi đó a là nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-5\right)=2$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$9-x^2=2x^2\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{3}\Rightarrow y=6\\x=\sqrt{3}\Rightarrow y=6\end{array}\right..$$

Hai đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ cắt nhau tại hai điểm $\left(-\sqrt{3};6\right)$ và $\left(\sqrt{3};6\right)$.

b) Từ đồ thị, ta có: $A=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2-2x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) Do hai đồ thị $f\left(x\right)=9-x^2$, $g\left(x\right)=2x^2$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên:

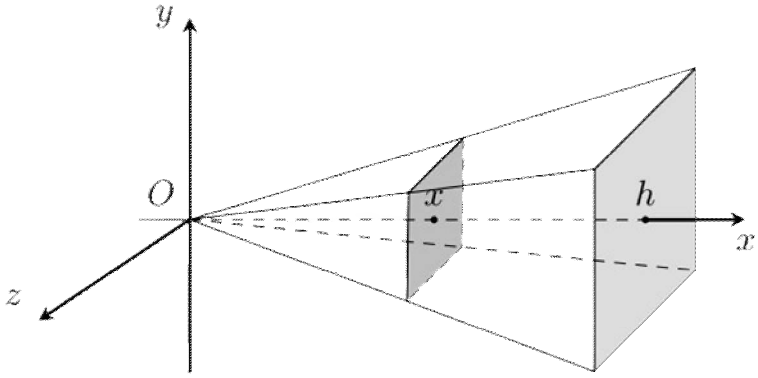
$$B=\int\limits_{-1,5}^{-\sqrt{3}}\left(9-x^2-2x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-x^2-2x^2\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-3x^2\right)\mathrm{d}x$$

d) $A+B=\int\limits_{-1,5}^{1,5}\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x+2\int\limits_{1,5}^{\sqrt{3}}\left(9-3x^2\right)\mathrm{d}x=12\sqrt{3}$ (đơn vị diện tích) $\Rightarrow a=3$

$$\log_2\left(x^2-5\right)=2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5>0\\x^2-5=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5>0\\x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5>0\\\left[\begin{array}{l}x=-3\left(L\right)\\x=3\left(N\right)\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy $a=3$ là nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-5\right)=2$

Câu 98. Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy (như hình dưới).



a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

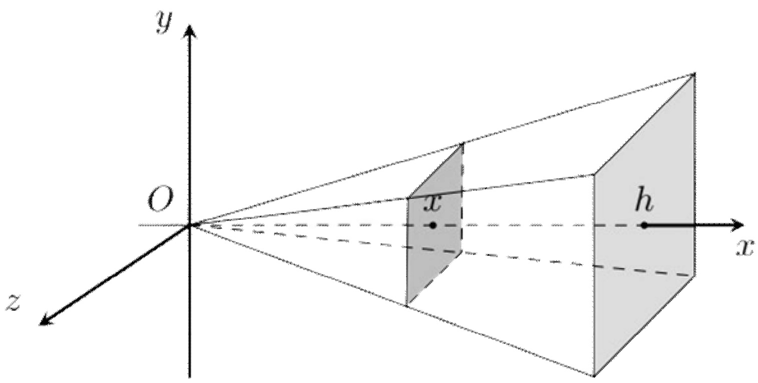
b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

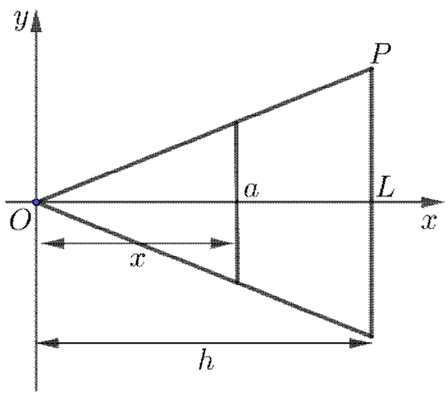
c) Diện tích mặt cắt là $S\left(x\right)=\dfrac{L}{h}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}L^2h$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG





a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x=h$.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là a.

c) Theo định lí Thales, ta có $\dfrac{x}{h}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{L}{2}}$ suy ra $a=\dfrac{L}{h}x$.

Do đó, diện tích của mặt cắt này là $S\left(x\right)=\dfrac{L^2}{h^2}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp này là $V=\int\limits_0^h S\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^h \dfrac{L^2}{h^2}.x^2\mathrm{d}x=\dfrac{L^2}{h^2}\dfrac{x^3}{3}\Bigg|_0^h=\dfrac{1}{3}L^2h$.

Câu 99. Khối chỏm cầu với bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ có thể tích V và được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox.

a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V được tính theo công thức $V=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V=\dfrac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_1 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V}{V_1}=\dfrac{7}{115}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng $5-1=4$.

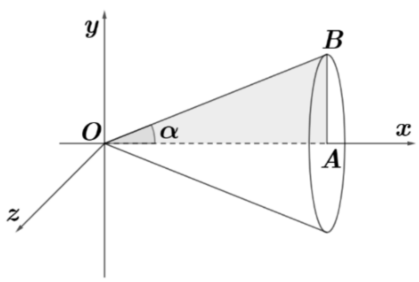
b) Thể tích của khối chỏm cầu được tính theo công thức : $V=\pi\int\limits_4^5\sqrt{25-x^2}^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(25x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_4^5=\dfrac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_1 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5.

Ta có $V_1=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi.5^3=\dfrac{250}{3}\pi$ nên suy ra $\dfrac{V}{V_1}=\dfrac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{250}{3}\pi}=\dfrac{7}{125}$.

Câu 100. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $\widehat{AOB}=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



a) Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{2}$ (đvtt).

b) Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Khi thể tích V của khối β là $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha<\dfrac{1}{2}$.

d) Khi $\tan\alpha=\cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\dfrac{\pi}{4}$ nên $OB: y=\tan\dfrac{\pi}{4}x=x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int\limits_0^a x^2\mathrm{d}x=\left.\dfrac{\pi x^3}{3}\right|_0^a=\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt)

b) Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\dfrac{\pi}{6}$ nên $OB: y=\tan\dfrac{\pi}{6}x=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int\limits_0^a\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^a\dfrac{x^2}{3}\mathrm{d}x=\left.\dfrac{\pi x^3}{9}\right|_0^a=\dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y=\tan\alpha.x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int\limits_0^a(\tan\alpha.x)^2\mathrm{d}x=\left.\dfrac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a=\dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}\Leftrightarrow\dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}=\dfrac{4\pi a^3}{3}\Leftrightarrow\tan^2\alpha=4\Rightarrow\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+1=5\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\pm1}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

d) Ta có: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y=\tan\alpha.x$.

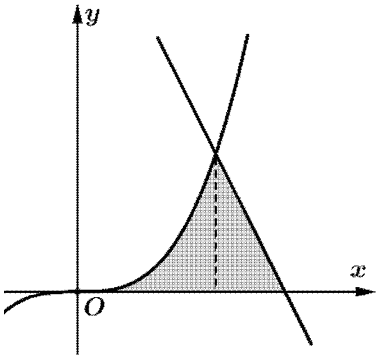
Khi đó thể tích của khối β theo $V=\pi\int\limits_0^a(\tan\alpha.x)^2\mathrm{d}x=\left.\dfrac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a=\dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $\tan\alpha=\cot\alpha\Rightarrow\tan^2\alpha=\cot\alpha.\tan\alpha=1\Leftrightarrow\tan\alpha=\pm1$.

Mặt khác $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\tan\alpha=1\Rightarrow V=\dfrac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}=\dfrac{\pi.a^3}{3}$ (đvtt).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3$, đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng (H) bằng bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

Lời giải

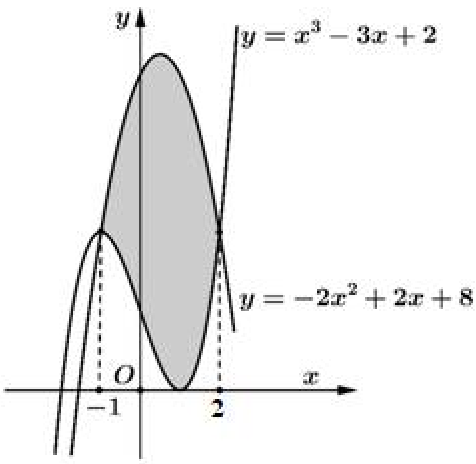
Đáp án: 0,5

Ta có $x^3 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Đường cong $y = x^3$ đi qua $O(0;0)$ và $y = -2x + 3$ cắt Ox tại điểm có hoành độ $x = \frac{3}{2}$.

Vậy $S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (-2x+3) dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.(3x - x^2)\right|_1^{\frac{3}{2}} = 0,5$

Câu 102. Tính diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất).



Trả lời: ………………..

Lời giải

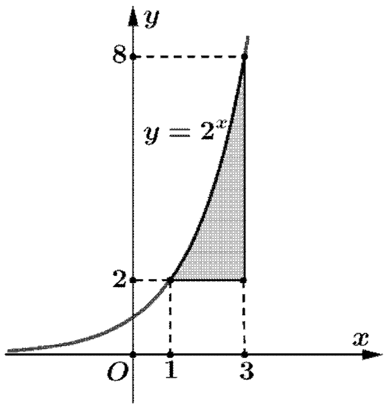
Đáp án: 15,8

Từ đồ thị, ta có diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[\left(-2x^2 + 2x + 8\right) - \left(x^3 - 3x + 2\right)\right] dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^3 - 2x^2 + 5x + 6\right) dx = \frac{63}{4} \approx 15,8.$$

Câu 103. Biết diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bên dưới bằng bằng $\dfrac{a}{\ln 2}+b$, với $a,b\in\mathbb{Z}$.

Tính $a+b$.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

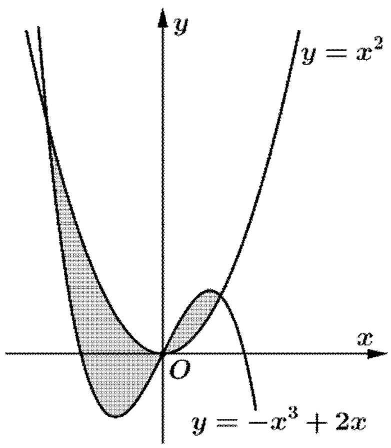
Hình phẳng tô đậm trong hình vẽ được giới hạn bởi các đường $y=2^x, y=2, x=1$ và $x=3$.

Do đó diện tích hình phẳng tô đậm trong hình vẽ bằng:

$$S=\int_1^3\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-2x\right)\Bigg|_1^3=\frac{6}{\ln 2}-4.$$

$\Rightarrow a=6; b=-4\Rightarrow a+b=2$

Câu 104. Tính diện tích của phần hình phẳng tô đậm trong hình bên dưới (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Trả lời: ………………..

Lời giải

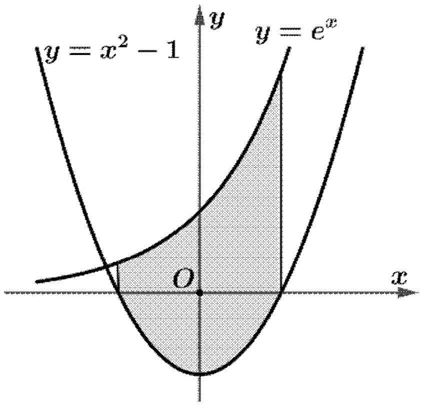
Đáp án: 3,08

Giải phương trình $x^2=-x^3+2x \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-2.\end{array}\right.$.

Diện tích của phần hình phẳng tô đậm bằng:

$S=\int_{-2}^{0}\left[x^2-\left(x^3-2x\right)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left[x^3-2x-x^2\right]\mathrm{d}x=\dfrac{37}{12}\approx 3,08$

Câu 105. Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=x^2-1, x=-1, x=1$ và được minh họa phần tô đậm trong hình vẽ sau đây:



Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a.e^2+b.e+c}{3e}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

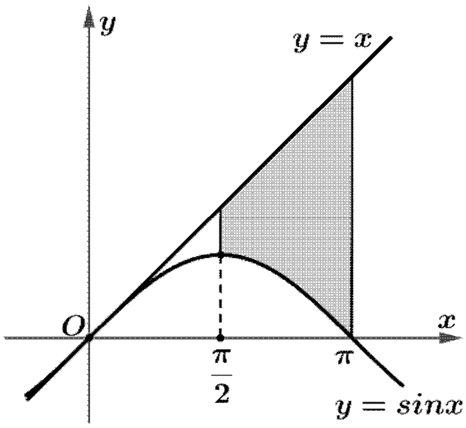
Đáp án: 4

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$S=\int_{-1}^{1}\left|e^x-\left(x^2-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(e^x-x^2+1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)\mathrm{d}x=e-\dfrac{1}{e}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{3e^2+4e-3}{3e}$

$\Rightarrow a=3; b=4; c=-3\Rightarrow a+b+c=4$

Câu 106. Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sin x, y=x, x=\dfrac{\pi}{2}, x=\pi$ và được minh họa phần tô đậm trong hình vẽ sau đây:



Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{a.\pi^2}{b}+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$, và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ………………..

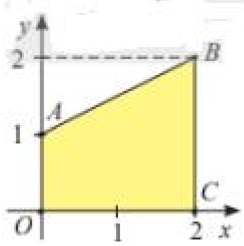
Lời giải

Đáp án: 10

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\sin x-x\right|\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left.\cos x\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3\pi^2}{8}-1$$

$\Rightarrow a=3;b=8;c=-1\Rightarrow a+b+c=10$

Câu 107. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Trả lời: ………………..

Lời giải

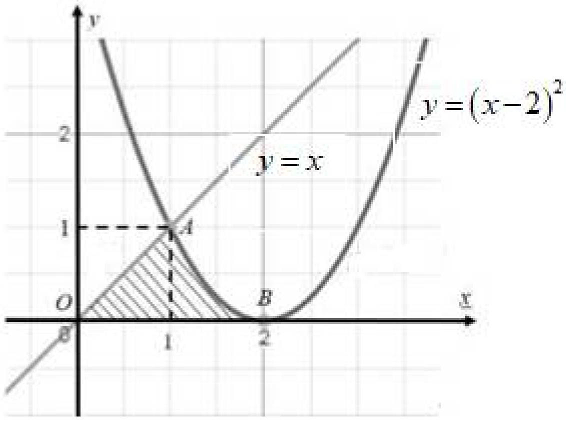
Đáp án: 3

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(0;1)$ và $B(2;2)$ nên: $y=\frac{1}{2}x+1$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{2}x+1, y=0$, $x=0, x=2$ nên:

$$S=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{1}{4}x^2+x\right)\right|_0^2=3$$

Câu 108. Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.



Trả lời: ………………..

Lời giải

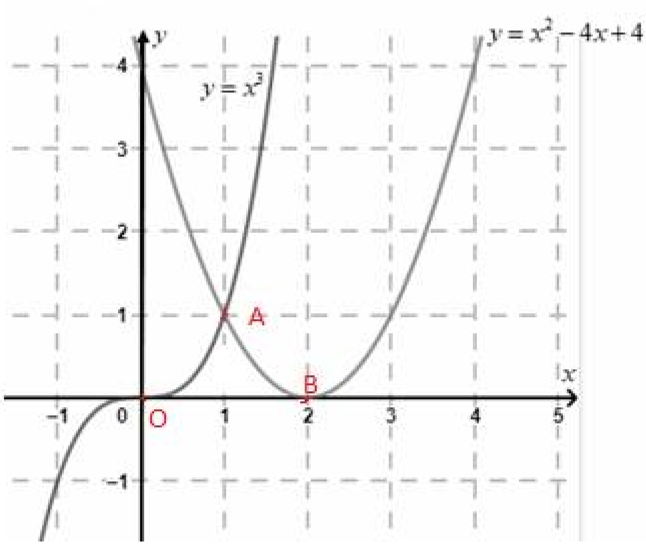
Đáp án: 11

Dựa vào đồ thị, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^1 xdx+\int_1^2(x-2)^2\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

$\Rightarrow a=5;b=6\Rightarrow a+b=11$

Câu 109. Tính diện tích phần hình phẳng là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $0,58$

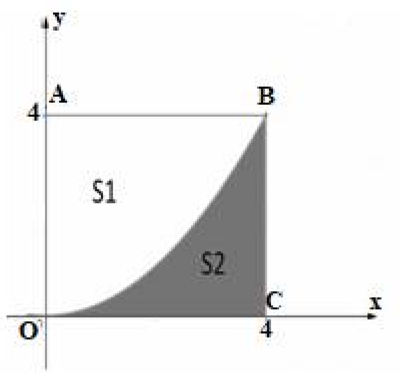
Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục Ox, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là $S=\int_0^1\left|x^3\right|dx+\int_1^2\left|x^2-4x+4\right|dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)dx=\dfrac{7}{12}\approx 0,58$.

Câu 110. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=\dfrac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

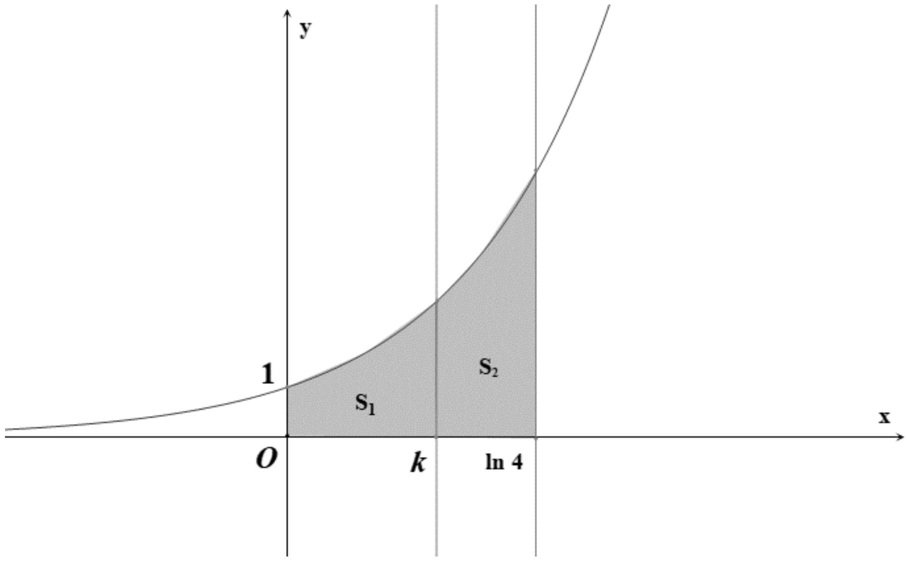
Lời giải

Đáp án: 2

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng S_1+S_2.

$$S_2=\int_0^4 \frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{12}\right|_0^4=\frac{16}{3}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{16-S_2}{S_2}=\frac{16-\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}}=2$$

Câu 111. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0, x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Biết khi $S_1=2S_2$ thì $k=\ln a$, với $a\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị a.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0, x=\ln 4$ là

$$S=\int_0^{\ln 4} e^x\mathrm{d}x=\left.e^x\right|_0^{\ln 4}=e^{\ln 4}-e^0=4-1=3 \text{ (đvdt).}$$

Ta có $S=S_1+S_2=S_1+\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{2}S_1$.

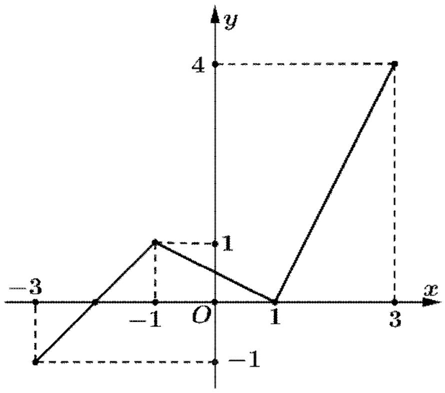
Suy ra $S_1=\frac{2S}{3}=\frac{2.3}{3}=2$ (đvdt).

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0, x=k$ nên

$$2=S_1=\int_0^k e^x\mathrm{d}x=\left.e^x\right|_0^k=e^k-e^0=e^k-1.$$

Do đó $e^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3\Rightarrow a=3$.

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

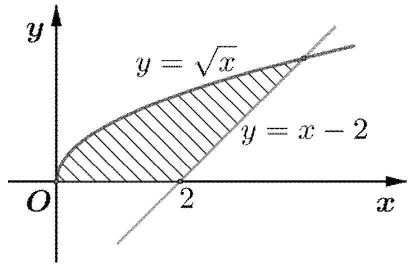
Lời giải

Đáp án: 5

Ta có:

$$\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = -S_{\Delta ABC} + S_{\Delta CDE} + S_{\Delta EFG} = -\frac{1}{2}.1.1 + \frac{1}{2}.1.3 + \frac{1}{2}.2.4 = 5$$

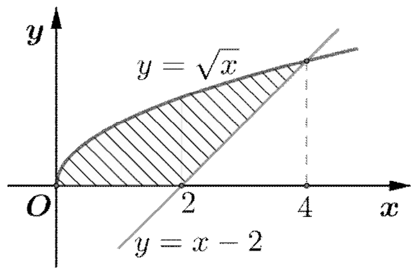
Câu 113. Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $3,33$



Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x},\ y = x - 2$:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

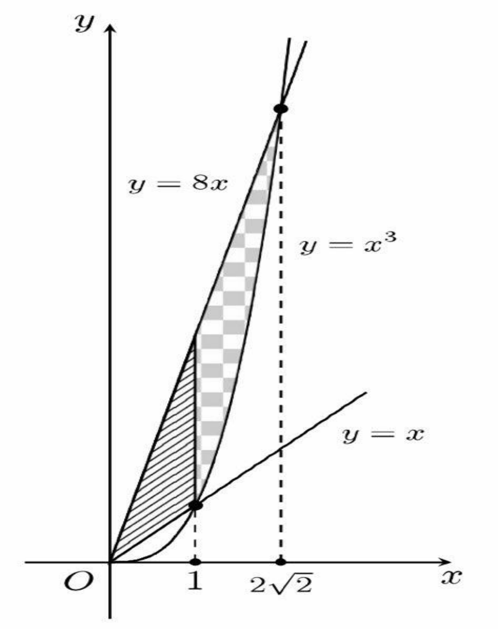
Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_2^4 (x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{10}{3} \approx 3,33$ (đvdt)

Câu 114. Cho hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x, y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ có diện tích là $S=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $I=a-b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 59



Đồ thị của ba hàm số đã cho được minh họa như hình vẽ bên.

Trong góc phần tư thứ nhất, xét các phương trình hoành độ giao điểm:

+ $x^3=x\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

+ $x^3=8x\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2\sqrt{2}$

Hình phẳng cần tính diện tích là phần gạch sọc, được chia ra làm hai vùng. Theo hình vẽ ta có

$$S=\int_0^1(8x-x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{2\sqrt{2}}\left(8x-x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{63}{4}.$$

Suy ra $a=63, b=4$.

Vậy $I=a-b=59$.

Câu 115. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=t$ $(t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có: $S(t)=\int_1^t|2x+1|\,\mathrm{d}x=\int_1^t(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $S(t)=\left(x^2+x\right)\Big|_1^t=t^2+t-2$.

Do đó $S(t)=10 \Leftrightarrow t^2+t-2=10 \Leftrightarrow t^2+t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4\ (L) \end{array}\right.$.

Vậy $t=3$.

Câu 116. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2\ (m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 3

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} my=x^2 & (1) \\ mx=y^2 & (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được: $mx=\left(\dfrac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3x-x^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m>0 \end{array}\right.$

Vì $y=\dfrac{x^2}{m}>0$ nên $mx=y^2 \Rightarrow y=\sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^m\left|\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right|dx=\left|\int_0^m\left(\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right)dx\right|=\left|\left.\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3m}\right)\right|_0^m\right|=\left|\frac{1}{3}m^2\right|=\frac{1}{3}m^2$$

Yêu cầu bài toán $S=3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}m^2=3 \Leftrightarrow m^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3(L) \\ m=3(N) \end{array}\right.$

Câu 117. Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2$, $mx=\dfrac{1}{2}y^2$, $(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $1,5$

Do $m>0$ nên suy ra $x>0,\ y>0$.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2my=x^2 \\ mx=\dfrac{1}{2}y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2my=x^2 \\ 2mx=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Ta có $S=\displaystyle\int_0^{2m}\left|\sqrt{2mx}-\frac{x^2}{2m}\right|\mathrm{d}x=3$ hay $\dfrac{4m^2}{3}=3 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}=1,5$.

Câu 118. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0, x=0, x=m$ bằng 10 là bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2

Vì $m>0$ nên $2x+3>0, \forall x \in [0;m]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0, x=0, x=m$ là:

$$S=\int_0^m (2x+3).\mathrm{d}x = \left(x^2+3x\right)\Big|_0^m = m^2+3m.$$

Theo giả thiết ta có:

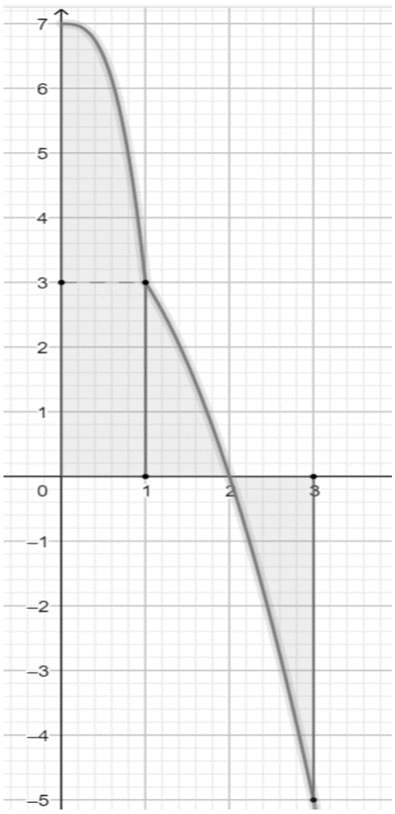
$$S=10 \Leftrightarrow m^2+3m=10 \Leftrightarrow m^2+3m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=2 \ (\text{do } m>0).$$

Câu 119. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 7-4x^3 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4-x^2 & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

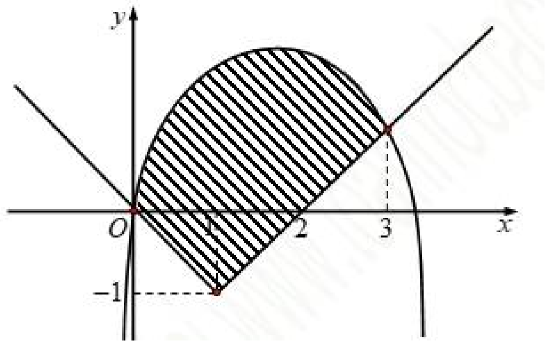
Đáp án: 10



Ta có: $S=\int_0^1 \left(7-4x^3\right)dx+\int_1^2 \left(4-x^2\right)dx+\int_2^3 \left(x^2-4\right)dx$

$$=\left(7x-x^4\right)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_2^3=6+4-\frac{7}{3}-3-\frac{8}{3}+8=10.$$

Câu 120. Cho (H) là hình phẳng được được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 6,5

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=-x$ và $y=x-2$ là: $-x=x-2\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

$=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^3=\frac{13}{2}=6,5$.

Câu 121. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=0$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Biết thể tích vật thể (T) bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 135

Diện tích thiết diện là $S(x)=\sqrt{x^3}.\sqrt{x^3}=x^6$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 x^6dx=\frac{128}{7}$.

$\Rightarrow a+b=128+7=135$

Câu 122. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1; x=3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1\le x\le 3$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45^0 và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}$. Biết thể tích vật thể trên bằng $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 17

Diện tích tam giác vuông cân là: $S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}.\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}x^2\right)$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int\limits_1^3\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{11}{6}$

$\Rightarrow a+b=17$

Câu 123. Biết thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 116

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{81}{35}\pi.$$

$\Rightarrow a+b=116$

Câu 124. Biết thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=2$ bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 31

Khi đó:

$$V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{15}\pi.$$

$\Rightarrow a+b=31$

Câu 125. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Biết thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bằng $a.\pi+\frac{b}{c}\pi^2$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a.b.c$.

Câu 126.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -4

Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right).\mathrm{d}x=\pi\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-\frac{1}{4}\pi^2.$$

$\Rightarrow a.b.c=-4$

Câu 127. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=2x-x^2, y=0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)$ với a,b là các số tự nhiên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó ab bằng bao nhiêu?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 15

Xét phương trình $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\frac{16}{15}\pi=\left(1+\frac{1}{15}\right)\pi\Rightarrow a=1,b=15\Rightarrow ab=15.$$

Câu 128. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Biết $V=\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+5b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 305

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

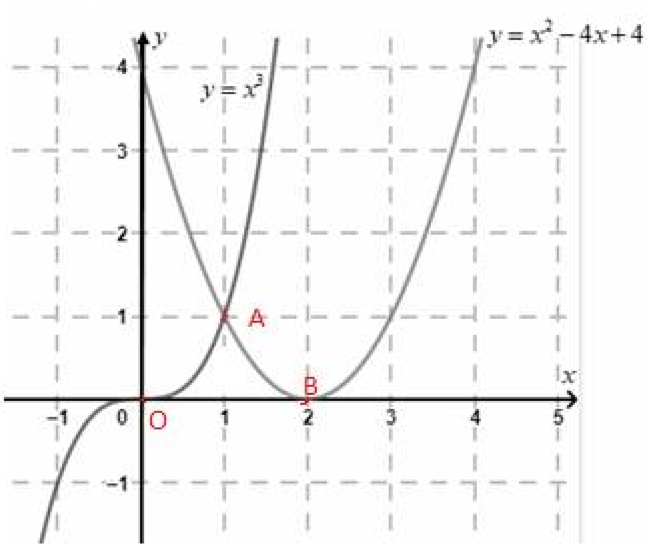
$$H=\left\{y=4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}, y=0, x=-5, x=5\right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)dx=\pi\left(16x-\frac{16x^3}{75}\right)\Big|_{-5}^{5}=\frac{320\pi}{3}$

$\Rightarrow a+5b=305$

Câu 129. Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $3a-b$.

Trả lời: ………………..

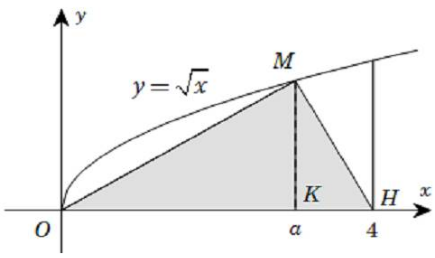
Lời giải

Đáp án: 1

$V=\pi\int_0^1\left(x^3\right)^2dx+\pi\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)^2dx=\frac{12}{35}\pi$

$\Rightarrow 3a-b=1$

Câu 130. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó giá trị a bằng bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

Lời giải

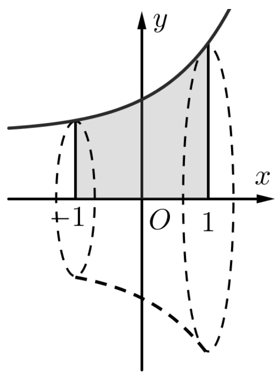
Đáp án: $a=3$

Ta có: $V=\pi\int_0^4 xdx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4=8\pi$. Mà $V=2V_1\Rightarrow V_1=4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên Ox $\Rightarrow OK=a,\ KH=4-a,\ MK=\sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác $OMK,\ MHK$, hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH=4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1=\frac{1}{3}.\pi.4.\left(\sqrt{a}\right)^2=\frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a=3$.

Câu 131. Biết thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{e^x}{2},\ y=0$ và $x=-1,\ x=1$ quanh trục hoành bằng $\left(\frac{a.e^4+b}{c.e^2}\right)\pi$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-b+c$.



Trả lời: ………………..

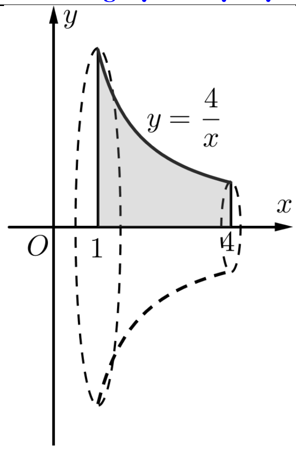
Lời giải

Đáp án: 10

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{4}dx=\left.\frac{\pi}{8}e^{2x}\right|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{8}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)=\left(\frac{e^4-1}{8e^2}\right)\pi$.

$\Rightarrow a=1;b=-1;c=8\Rightarrow a-b+c=10$

Câu 132. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{4}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4$ quanh trục Ox là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất)



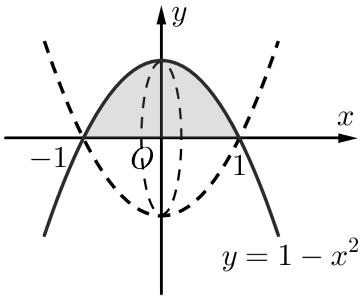
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 37,7

Thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 12\pi \approx 37,7$.

Câu 133. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $S = a + b$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ………………..

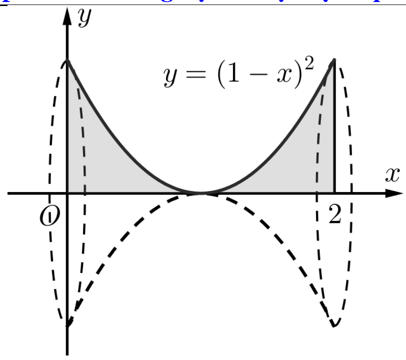
Lời giải

Đáp án: 31

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$

$\Rightarrow a = 16,\ b = 15 \Rightarrow S = a + b = 31$

Câu 134. Biết thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (1 - x)^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ có dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S = 24a + 12b$.



Trả lời: ………………..

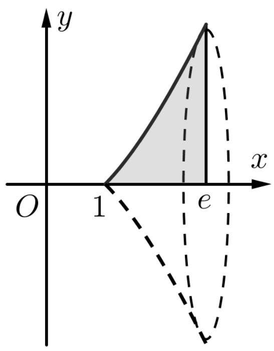
Lời giải

Đáp án: 108

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_0^2(1-x)^4\,dx=\frac{2\pi}{5}$.

$\Rightarrow a=2,\ b=5\Rightarrow S=24a+12b=108$

Câu 135. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\ln x,\ y=0,\ x=e$ quay xung quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng $\frac{\pi}{a}\left(be^3-2\right)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a^2-b^2$, biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x\ln x)^2$ là $F(x)=\frac{x^3}{27}\left(9\ln^2x-6\ln x+2\right)$.



Trả lời: ………………..

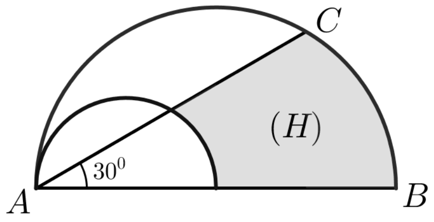
Lời giải

Đáp án: 704

Thể tích của khối tròn xoay là: $V=\pi\int_1^e y^2dx=\pi.F(x)\Big|_1^e=\frac{\pi}{27}\left(5e^3-2\right)$.

;$\Rightarrow a=27,\ b=5\Rightarrow P=a^2-b^2=704$

Câu 136. Cho các nửa đường tròn như hình vẽ sau, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $\widehat{BAC}=30^\circ$. Biết thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB bằng $\frac{a\pi}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a-50b$.

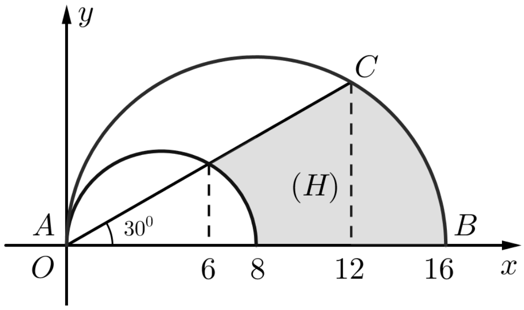


Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 634

Chọn hệ trục Oxy thích hợp như hình sau:



Phương trình nửa đường tròn lớn: $f(x)=\sqrt{16x-x^2}$.

Phương trình nửa đường tròn nhỏ: $g(x)=\sqrt{8x-x^2}$.

Phương trình đường thẳng $AC: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Khi đó $V=\pi\int_6^8\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2-\left(8x-x^2\right)\right|dx+\pi\int_8^{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2dx+\pi\int_{12}^{16}\left(16x-x^2\right)dx=\frac{784\pi}{3}$.

$\Rightarrow a=784; b=3 \Rightarrow a-50b=634$

Câu 137. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 18

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2-x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_{-|m|}^{|m|}\left(m^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(m^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$

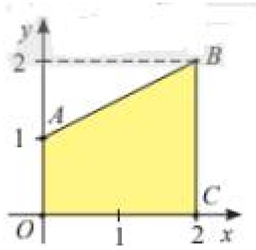
Ta có: $V<1000\pi \Leftrightarrow \frac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi \Leftrightarrow |m|^3<750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9,08$ và $m\neq 0$.

Suy ra, các giá trị m nguyên là $m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

Câu 138. Cho diện tích hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

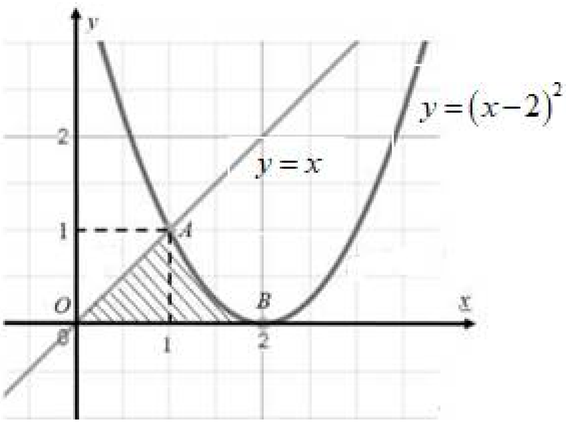
Đáp án: 17

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(0;1)$ và $B(2;2)$ nên: $y=\frac{1}{2}x+1$

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{2}x+1, y=0, x=0, x=2$ nên thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là: $V=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 dx=\frac{14}{3}\pi$

$\Rightarrow a+b=17$

Câu 139. Diện tích phần hình phẳng (H) được gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên dưới.



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a+b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

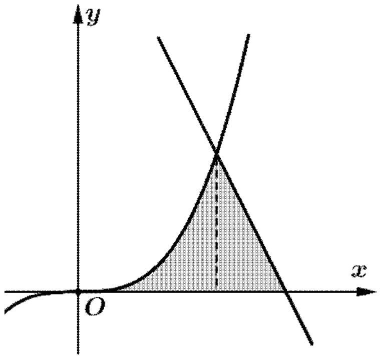
Đáp án: 23

Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^1 x^2dx+\pi\int_1^2 (x-2)^4\,dx=\frac{8}{15}\pi$$

$\Rightarrow a=8;b=15\Rightarrow a+b=23$

Câu 140. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3$, đường thẳng $y=-2x+3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox bằng $\frac{a}{b}\pi$, với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $3a-b$.

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: -3

Ta có $x^3=-2x+3\Leftrightarrow x^3+2x-3=0\Leftrightarrow x=1$

Đường cong $y=x^3$ đi qua $O(0;0)$ và $y=-2x+3$ cắt Ox tại điểm có hoành độ $x=\frac{3}{2}$.

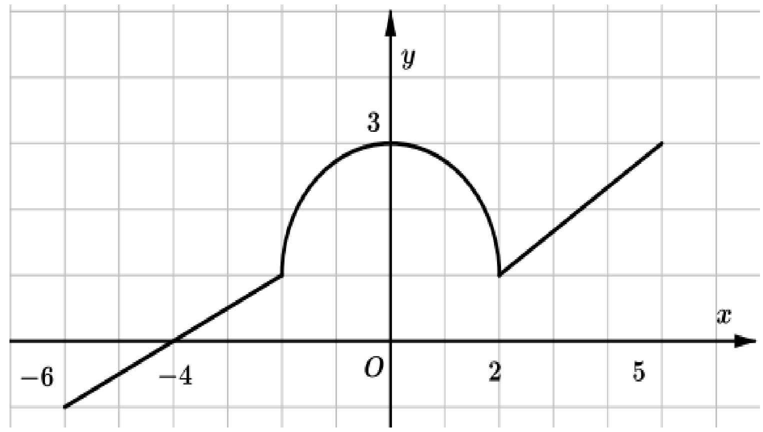
Thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^1 x^6\mathrm{d}x+\pi\int_1^{\frac{3}{2}} (-2x+3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{13}{42}\pi$$

$\Rightarrow 3a-b=-3$

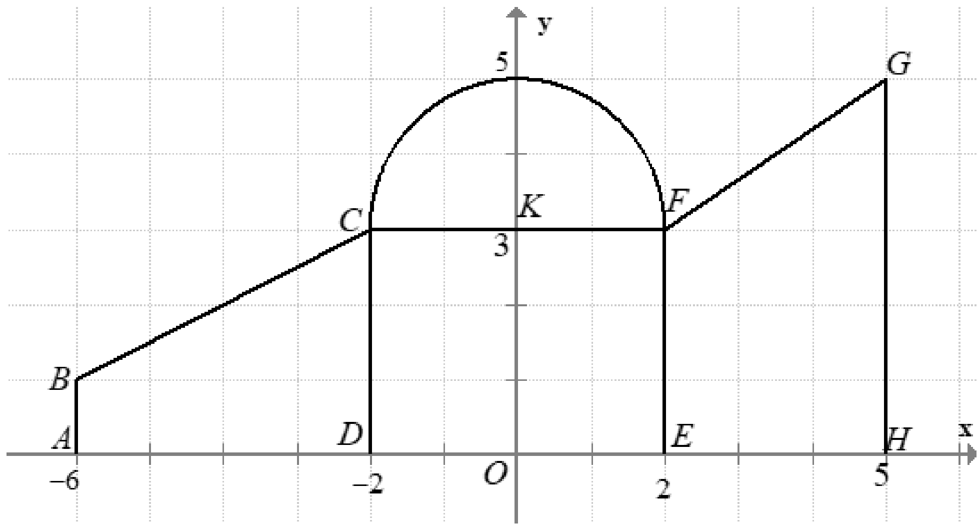
PHẦN IV. Câu tự luận. Mỗi câu hỏi thí sinh trình bày cách giải tự luận.

Câu 141. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]dx$ (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất).



Lời giải

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên phía trên trục hoành 2 đơn vị ta được đồ thị $f(x)+2$ như hình vẽ: $28,3$



$I=\int_{-6}^{5}\left[f(x)+2\right]dx=\int_{-6}^{5}g(x)dx$ với $g(x)=f(x)+2$ có đồ thị như hình vẽ.

Có $I=S_1+S_2+S_3+S_4$ trong đó:

S_1 là diện tích hình thang vuông $ABCD$ $\Rightarrow S_1=\dfrac{(AB+CD).AD}{2}=\dfrac{(1+3).4}{2}=8$,

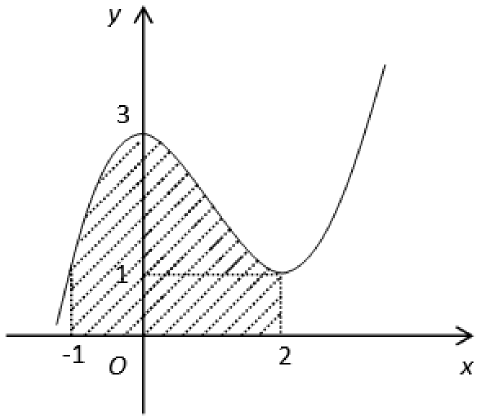
S_2 là diện tích hình chữ nhật $CDEF$ $\Rightarrow S_2=3.4=12$,

S_3 là diện tích hình tròn tâm I, bán kính $R=2$ $\Rightarrow S_3=\dfrac{\pi.2^2}{2}=2\pi$,

S_4 là diện tích hình thang vuông $EFGH$ $\Rightarrow S_4=\dfrac{(EF+GH).EH}{2}=\dfrac{(5+3).3}{2}=12$.

Suy ra $I=8+12+2\pi+12=2\pi+32\approx 28,3$.

Câu 142. Diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1, x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



Lời giải

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

+ Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và 3 $\Rightarrow S_1=3$.

+ Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f\left(x\right)=ax^3+bx^2+c \\ y=1 \\ x=-1; x=2 \end{cases}$.

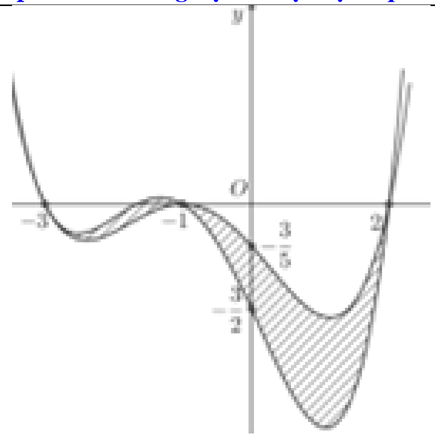
Dễ thấy $\left(C\right)$ đi qua 3 điểm $A\left(-1;1\right)$, $B\left(0;3\right)$, $C\left(2;1\right)$ nên đồ thị $\left(C\right)$ có phương trình $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$.

$\Rightarrow S_2=\int\limits_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3-1\right)\mathrm{d}x=\frac{27}{8}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_1+S_2=\frac{51}{8}$

$\Rightarrow m+n=59$

Câu 143. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;\ 2$. Diện tích của hình phẳng $\left(H\right)$ (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m-3n$.



Lời giải

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=(ax+3a)(x^2-x-2)=ax^3-ax^2-2ax+3ax^2-3ax-6a$

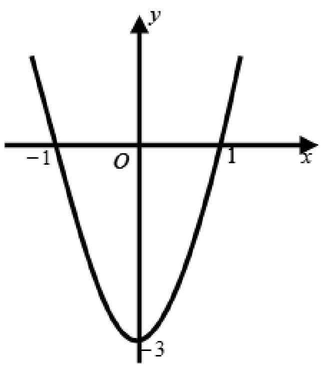
$=ax^3+2ax^2-5ax-6a$

$f(0)-g(0)=-6a$, quan sát hình vẽ ta có $f(0)-g(0)=-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Nên $-6a=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-3}{20}$ $S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{2}\left|\frac{-3}{20}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{80}$

$\Rightarrow m=253;n=80\Rightarrow m-3n=13$

Câu 144. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=9x-18$ tại điểm có hoành độ dương. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.



Lời giải

Từ đồ thị suy ra $f'(x)=3x^2-3$.

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2-3)\mathrm{d}x=x^3-3x+C$.

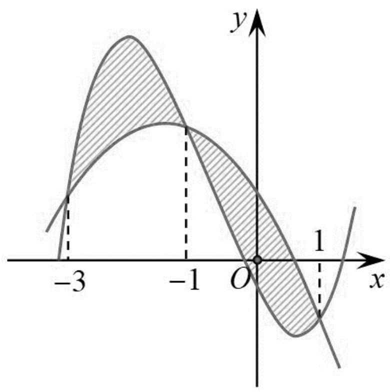
Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=9x-18$ tại điểm có hoành độ x_0 dương nên $f'(x_0)=9\Leftrightarrow 3x_0^2-3=9\Leftrightarrow x_0=2$.

Suy ra $f(2)=0\Leftrightarrow C=-2$ $\Rightarrow(C):y=x^3-3x-2$

Xét phương trình $x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_{-1}^{2}\left|x^3-3x-2\right|\mathrm{d}x=\frac{27}{4}=6,75$.

Câu 145. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng bao nhiêu?



Lời giải

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là -3; -1; 1 nên suy ra $\begin{cases} -27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0 \\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0 \\ a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-d=\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \\ c-e=\frac{-1}{2} \end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng $S=\int\limits_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int\limits_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$

$\Leftrightarrow S=\int\limits_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4$.

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

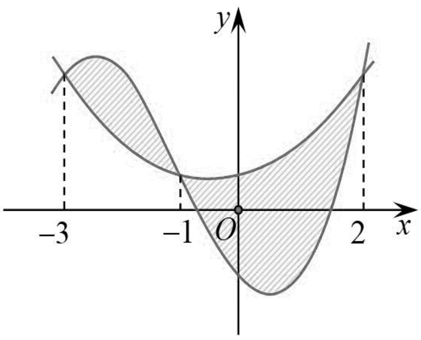
Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng:

$$S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]dx+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]dx$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)dx=4.$$

Câu 146. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+2n$.

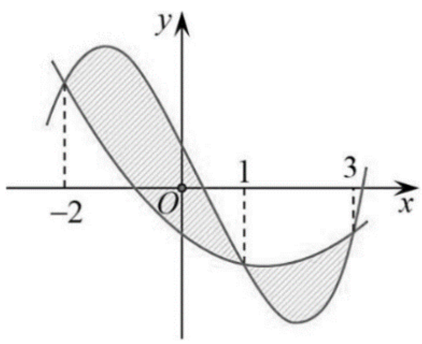
Lời giải

Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên $f(x)-g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1)$.

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow a=\frac{1}{4}$. Do đó $S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{48}$.

$\Rightarrow m=253;n=48\Rightarrow m+2n=349$

Câu 147. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng $\frac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m-3n$.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0$.

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2; x=1; x=3$

Với $x=-2$ ta có $-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}$, (1).

Với $x=1$ ta có $a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}$, (2).

Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}$, (3).

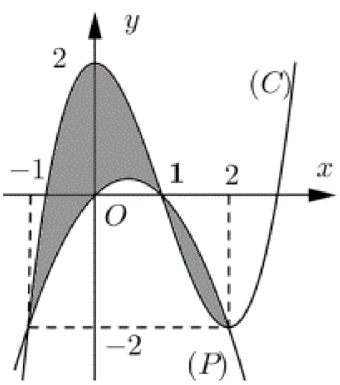
Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b-d=-\frac{1}{2}\\ c-e=-\frac{5}{4}\end{cases}$.

Hay ta có

$$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|dx+\int_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|dx=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

$\Rightarrow m=253; n=48\Rightarrow m-5n=13$

Câu 148. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai)



Lời giải

Cách 1:

Gọi hàm số bậc ba là $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị (C) đi qua các điểm $(1;0),(2;-2)$ và đạt cực trị tại $x = 0; x = 2$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = a + b + c + d \\ -2 = 8a + 4b + 2c + d \\ 0 = c \\ 0 = 12a + 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc ba là $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Gọi hàm bậc hai là $y = mx^2 + nx + p$. Đồ thị (P) đi qua các điểm $(1;0)$, $(2;-2)$, $(-1;-2)$nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} 0 = m + n + p \\ -2 = 4m + 2n + p \\ -2 = m - n + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ p = 0 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc hai là $y = -x^2 + x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C)và

(P)là : $x^3 - 3x^2 + 2 = -x^2 + x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích phần tô đậm là :

$S = \int_{-1}^{2} \left|\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)\right| dx$. $S = \left|\int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx\right| + \left|\int_{1}^{2} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \approx 3,08$.

Cách 2:

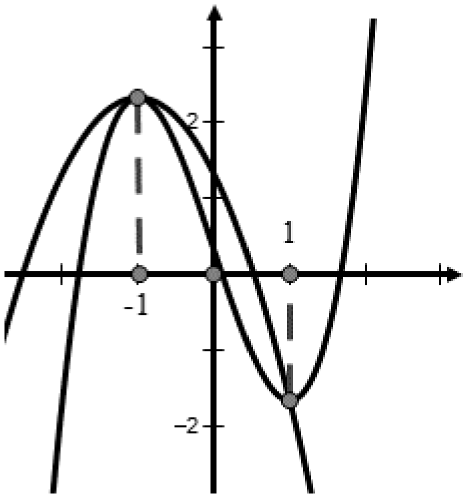
Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2, y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$.

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1; x = 1; x = 2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2) = 0$. Với $x = 0$ ta được $2a = 2 \to a = 1$.

*Vậy diện tích phần tô đậm là: $S = \int_{-1}^{2} \left|(x+1)(x-1)(x-2)\right| dx = \frac{37}{12}$.

Câu 149. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p$ $(m,n,p \in \mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).



Lời giải

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=\pm 1$ nên ta có

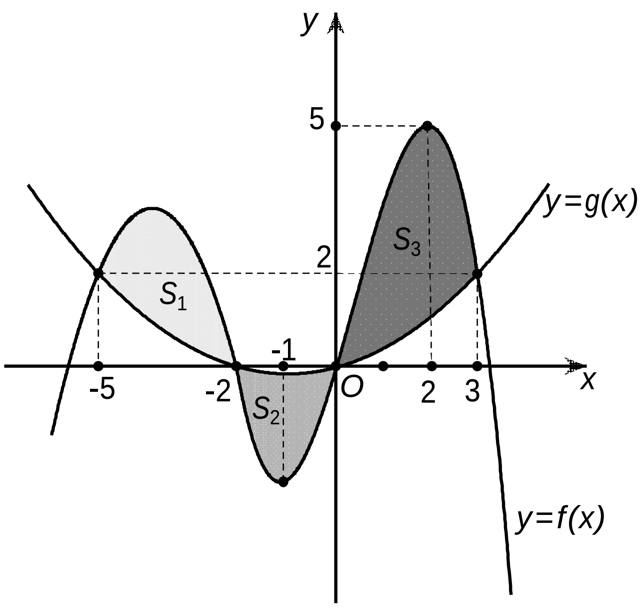
$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y'(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+3=0 \\ -2a+b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}.$$

+ Hàm số $y=mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại $x=-1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 1$ nên ta có

$$\begin{cases} -2m+n=0 \\ 1+a+b+c=m+n+p \\ -1+a-b+c=m-n+p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-2 \\ m=-1 \\ p-c=1 \end{cases}$$

Suy ra $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(mx^2+nx+p-x^3-ax^2-bx-x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3-x^2+x+1\right)dx=\dfrac{4}{3}\approx 1,33$

Câu 150. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m, n, p.



Biết tích phân $\int\limits_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{242}{45}$, tính giá trị của $m-n+p$.

Lời giải

$S_1 = \int\limits_{-5}^{-2}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_{-5}^{-2} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{-5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-5}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = S_1 + \int\limits_{-5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x$.

$S_2 = \int\limits_{-2}^{0}[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} g(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} g(x)\mathrm{d}x - S_2$.

$S_3 = \int\limits_{-5}^{-2}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{3} g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = S_1 + \int\limits_{0}^{3} g(x)\mathrm{d}x$.

Do vậy: $\int\limits_{-5}^{3} f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 + \int\limits_{-5}^{3} g(x)dx \Leftrightarrow \dfrac{242}{45} = m-n+p+\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx \Leftrightarrow m-n+p = \dfrac{242}{45} - \int\limits_{-5}^{3} g(x)dx$

Tính $\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx$ như sau:

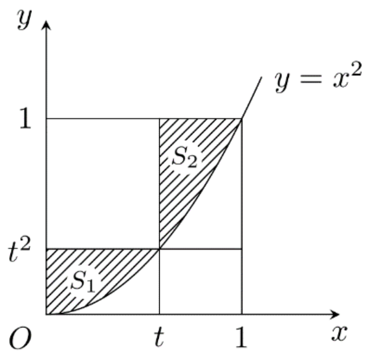
Từ đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta thấy nó đi qua các điểm $(-5;2)$, $(-2;0)$, $(0;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 25a-5b+c=2 \\ 4a-2b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{2}{15},\ b=\frac{4}{15},\ c=0.$$

Do đó: $\int\limits_{-5}^{3} g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-5}^{3}\left(\dfrac{2}{15}x^2+\dfrac{4}{15}x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{208}{45}$.

$\Rightarrow m-n+p = \dfrac{242}{45}+\dfrac{208}{45} = 10$

Câu 151. Cho hàm số $y=x^2$ xác định trên đoạn $[0;1]$. Giả sử t là một số bất kì thuộc đoạn $[0;1]$. Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0$, $y=t^2$ và $y=x^2$, còn S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $x=t$ và $y=1$. Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S_1+S_2 bằng $\dfrac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



Lời giải

Ta có

$S_1 = t^3 - \int\limits_0^t x^2\,dx = \frac{2t^3}{3}$,

$S_2 = \int\limits_t^1 x^2\,dx - t^2(t-1) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}$.

Suy ra $f(t) = S_1 + S_2 = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}$.

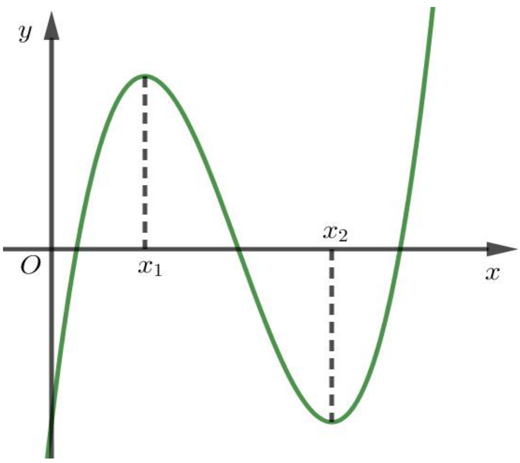
Ta có $f'(t) = 4t^2 - 2t, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{2}$, ta lập bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{2}$		1
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S_1 + S_2$ lần lượt là $\frac{1}{4}$ và $\frac{2}{3}$, do đó tổng của chúng là $\frac{11}{12}$.

$\Rightarrow m + n = 23$

Câu 152. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$; $f(x_1) + f(x_2) = 0$ và $\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x)\,dx = \frac{5}{4}$. Tính $L = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - 2}{(x - x_1)^2}$.



Lời giải

Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

Có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 = x_1 + 2 \end{array}\right.$.

Suy ra: $f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)$

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Khi đó $f(x_1)=C$ và $f(x_2)=a(x_2-x_1)^3-3a(x_2-x_1)^2+C=8a-12a+C=C-4a$.

Mà $f(x_1)+f(x_2)=0$, nên $C+C-4a=0\Leftrightarrow C=2a$.

Suy ra $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a$.

Mặt khác $\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \int\limits_{x_1}^{x_1+1}\left[a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a\right]\mathrm{d}x=\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{a}{4}(x-x_1)^4-a(x-x_1)^3+2ax\right]\Bigg|_{x_1}^{x_1+1}=\dfrac{5}{4}$

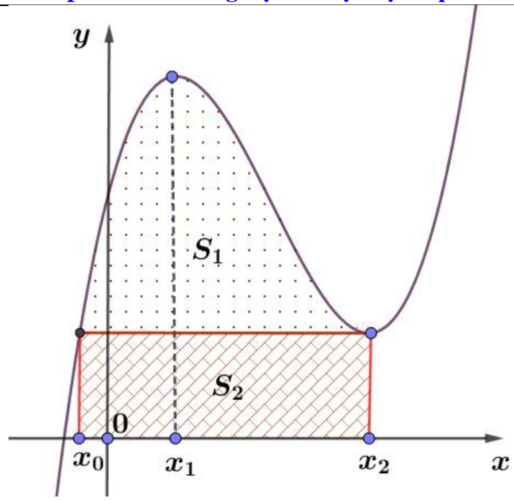
$\Leftrightarrow \left[\dfrac{a}{4}-a+2a(x_1+1)\right]-2ax_1=\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow a=1$.

Do đó: $f(x)=(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2$.

Vậy $L=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-2}{(x-x_1)^2}=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2}{(x-x_1)^2}=\lim\limits_{x\to x_1}\left[(x-x_1)-3\right]=-3$.

Câu 153. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)-3f(x_2)=0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1=x_0+1$. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới. Biết tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{m}{n}$, với $m,n\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $m+n$.



Lời giải

+) Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

+) Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0 \Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

+) Ta có $f(x_1)-3f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)-3f(x_1+2)=0$

$\Leftrightarrow C-3(8a-12a+C)=0 \Leftrightarrow -2C+12a=0 \Leftrightarrow C=6a$.

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+6a$.

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh bằng 3 và và $f(x_2)=8a-12a+6a=2a$

+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=x_0=x_1-1, x=x_2=x_1+2$, $y=f(x_2)=2a$ và $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+6a$ nên suy ra

$$S_1=\int_{x_1-1}^{x_1+2}\left[f(x)-2a\right]\mathrm{d}x=\int_{x_1-1}^{x_1+2}\left[a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+4a\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{a(x-x_1)^4}{4}-3a\frac{(x-x_1)^3}{3}+4ax\right]\Bigg|_{x_1-1}^{x_1+2}=\frac{27a}{4}.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{27}{8} \Rightarrow m+n=35$

Câu 154. Biết $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x); y=G(x); x=0; x=4$. Khi $S=8$ thì a bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $F(x)=G(x)+c$

$S=\int_0^4 \left|F(x)-G(x)\right|dx \Rightarrow \left|F(x)-G(x)\right|=2 \ hay\ |c|=2$

$\int_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a$

$\Leftrightarrow F(4)-F(0)=F(4)-G(0)+a$

$\Leftrightarrow -G(0)-c=-G(0)+a$

$\Leftrightarrow a=-c$

$\Rightarrow a=\pm 2$

Mà $a>0 \Rightarrow a=2$

Câu 155. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-G(0)+a,\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $G(x)=F(x)+C$ (C là hằng số).

$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-F(0)=F(5)-\left(G(0)-C\right)=F(5)-G(0)+C$

Suy ra $C=a$.

$S=\int_0^5 \left|F(x)-G(x)\right|\mathrm{d}x=\int_0^5 |a|\mathrm{d}x=\int_0^5 a\mathrm{d}x=5a$.

Theo giả thiết $5a=20 \Leftrightarrow a=4$

Câu 156. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=2$, Khi $S=6$ thì a bằng bao nhiêu?

Lời giải

$F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$\forall x\in\mathbb{R}: F(x)=G(x)+C$ (với C là hằng số).

Do đó $F(0)=G(0)+C$ (1).

Lại có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)$

$\Leftrightarrow F(2)-G(0)+a=F(2)-F(0) \Leftrightarrow F(0)=G(0)-a$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $C=-a$.

Khi đó $F(x)=G(x)-a$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left|F(x)-G(x)\right|=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=2$ là

$$S=\int_0^2\left|F(x)-G(x)\right|.\mathrm{d}x=\int_0^2 a.\mathrm{d}x=2a=6\Rightarrow a=3.$$

Câu 157. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

Lời giải

Ta có

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Vì $y=g(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 nên $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với $g(x_1)=-5,g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)+6}=0.$$

Phương trình này cũng có hai nghệm phân biệt x_1,x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln|2+6|-\ln|-5+6|\right|=3\ln 2\approx 2,08.$$

Câu 158. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai).

Lời giải

Ta có: $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $g(x_1)=-4,\ g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

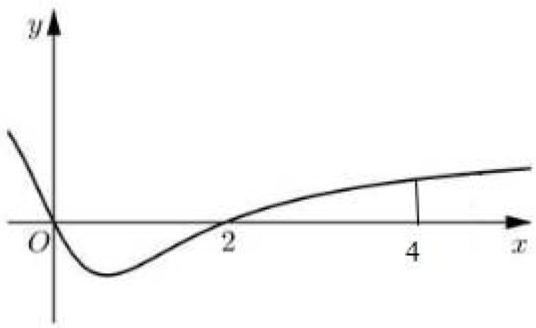
$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1 \Leftrightarrow \frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0 \Leftrightarrow \frac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)+6}=0$$

Phương trình này cũng có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln|2+6|-\ln|-4+6|\right|=\ln 2\approx 0,69.$$

Câu 159. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(4)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(a), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(b)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Cách 1:

Căn cứ đồ thị của $y=f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$$S_1=\int_0^2\left|f'(x)\right|dx=\int_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2) \text{ và } S_2=\int_2^4\left|f'(x)\right|dx=\int_2^4 f'(x)dx=f(2)-f(4).$$

Theo giả thiết, ta có:

$$f(0)+f(3)=f(2)+f(4)\Rightarrow f(4)-f(3)=f(0)-f(2).$$

Suy ra $S_2=\int_2^4\left|f'(x)\right|dx>\int_3^4\left|f'(x)\right|dx=f(4)-f(3)=S_1$.

Suy ra $S_2>S_1>0\Rightarrow f(4)>f(0)>f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(4)$.

$\Rightarrow a+b=6$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ lập bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)$

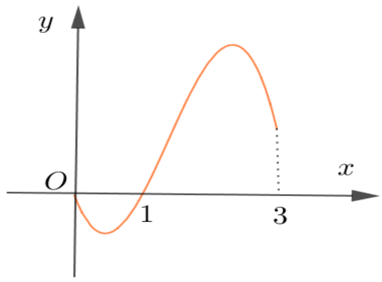
Và $\max\limits_{[0;4]} f(x) = \max\left\{ f(0), f(4) \right\}$.

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;4]$ nên

$f(3) > f(2) \Rightarrow f(4) - f(2) > f(4) - f(3) = f(0) - f(2)$.

Do đó $f(4) > f(0)$, vậy $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\left\{ f(0), f(4) \right\} = f(4)$.

Câu 160. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ lần lượt là $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(a)$; $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(b)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $2a + 3b$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	0		1		3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(3)$

Khi đó: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(1)$.

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có $-\int\limits_0^1 f'(x)dx < \int\limits_1^3 f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(1) < f(3) - f(1) \Leftrightarrow f(0) < f(3)$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3)$.

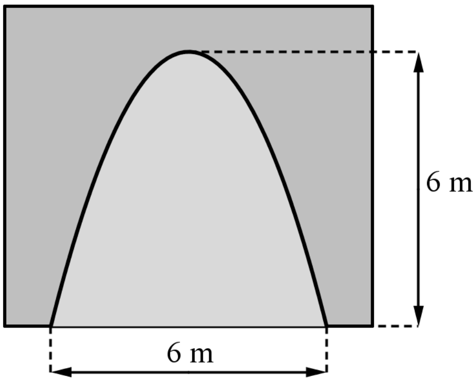
$\Rightarrow 2a + 3b = 2 + 3.3 = 11$

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

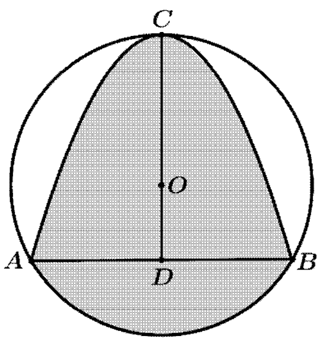
PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

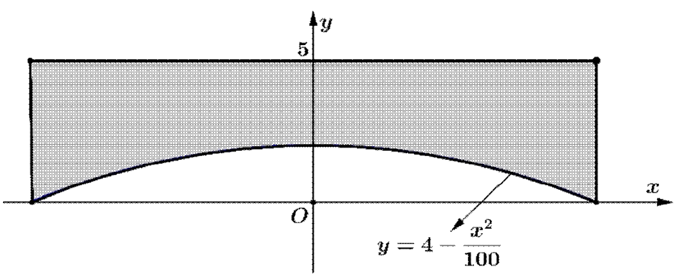
Bài 1. Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như hình sau. Tính diện tích của cửa hầm.



Bài 2. Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$. Đường cong qua ba điểm: A, B, C là một phần của parabol. Tính diện tích phần tô đậm trong hình vẽ.

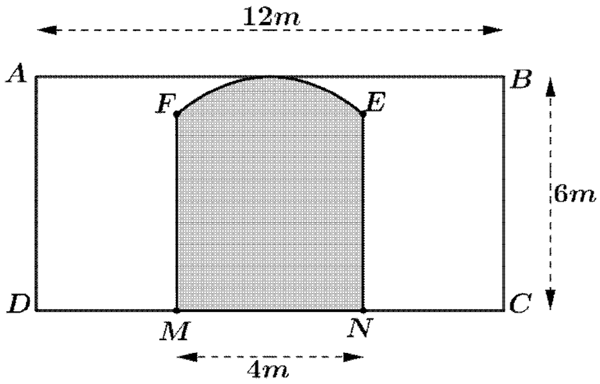


Bài 3. Hình bên dưới là mặt cắt dọc của một chiếc cầu bê tông (phần tô đậm, các đơn vị đều đo bằng mét)



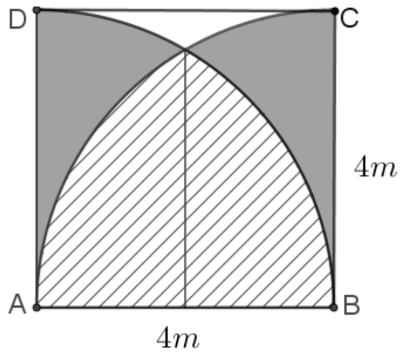
Biết chiều rộng của cầu bằng 9m. Thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu bằng bao nhiêu?

Bài 4. Bác Tùng muốn làm một bức tranh trang trí như phần $MNEIF$ được tô đậm trong hình vẽ bên dưới ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 6\text{m}$, $CD = 12\text{m}$



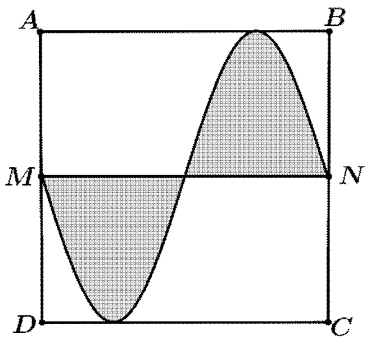
Biết $MN = 4\text{m}$; cung EIF có hình parabol với đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là $1,2$ triệu đồng/m^2. Hỏi Bác Tùng cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh?

Bài 5. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 4\text{m}$. Trên tấm biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R = 4\text{m}$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ.

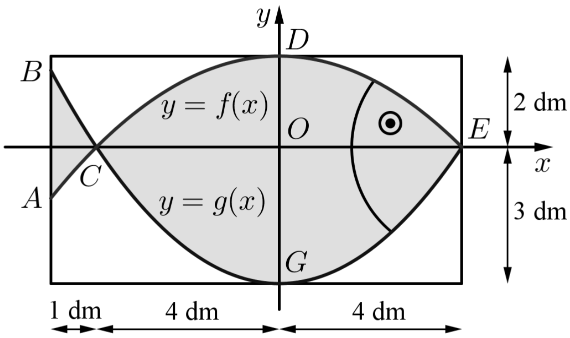


Chi phí để sơn phần gạch chéo là $150\ 000$ đồng/m^2, chi phí sơn phần màu đen là $100\ 000$ đồng/ m^2 và chi phí để sơn phần còn lại là $250\ 000$ đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên bằng bao nhiêu triệu đồng?

Bài 6. Cô Thúy có mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$, chiều dài $AB = 2\pi(m)$, chiều rộng $BC = 3(m)$. Cô Thúy muốn trồng hoa trên dải đất (phần tô đậm) được giới hạn bởi đường MN (với M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC) và một đường hình sin (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích đất trồng hoa.



Bài 7. Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét).

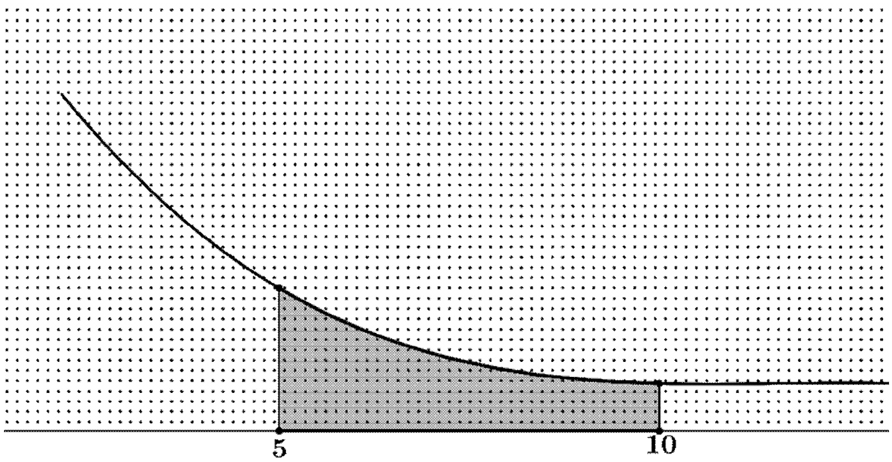


a) Lập phương trình các parabol $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$.

b) Tính diện tích của logo.

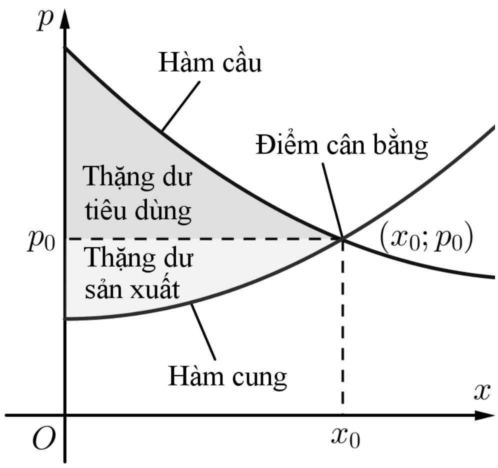
c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bài 8. Trong xác suất thống kê thì một biến ngẫu nhiên X được gọi là có hàm mật độ $f\left(x\right)$ nếu xác suất để X nhận giá trị trong $\left[a,b\right]$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, đường thẳng $y = a$ và $y = b$. Đặc biệt, khi $f\left(x\right) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ trong đó λ là số thực cho trước thì X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ. Chẳng hạn, tuổi thọ của một bóng đèn (đơn vị năm) là một biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối mũ với hệ số $\lambda = \dfrac{1}{5}$. Hãy tính xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm.



Bài 9. Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $\left(x_0; p_0\right)$ của đồ thị hàm cầu $p = D\left(x\right)$ và đồ thị hàm cung $p = S\left(x\right)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong hình bên dưới.



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

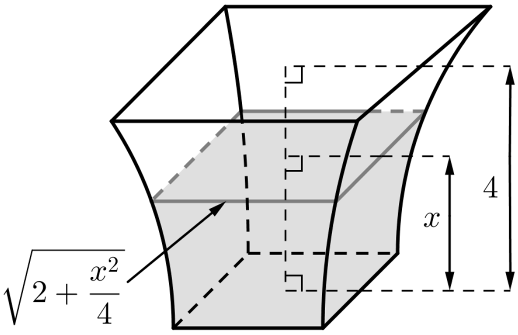
Hàm cầu: $p = 5 - 0,2x$ và hàm cung: $p = 1 + 0,02x^2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Bài 10. Đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là khoảng 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và khoảng 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc. Hàm cung được cho bởi $p = 0,0275x$, trong đó x là số lượng máy điều hoà được bán với giá p USD một chiếc. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất (giả sử hàm cầu là hàm bậc nhất).

Bài 11. Người ta sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số: $y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2, 0 \le x \le 100$, trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

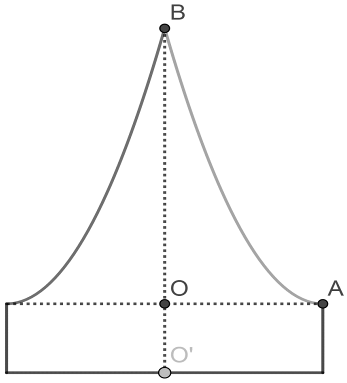
DẠNG 2
ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài 1. Một bình chứa nước có hình dạng như hình sau. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) ($0 \le x \le 4$) thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.

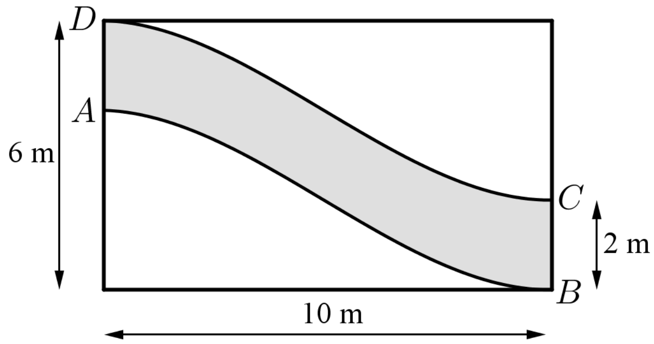


Bài 2. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu triệu đồng từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể và kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai của triệu đồng.

Bài 3. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng bao nhiêu cm^3? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm^3)



Bài 4. Bác Công đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong hình sau. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra, Bác Công quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền Bác Công cần dùng để đổ bê tông con đường đó.



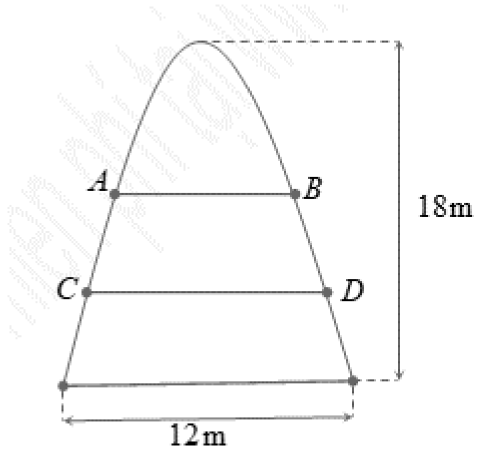
Bài 5. Từ một quả cầu bằng đá trắng sứ đường kính bằng 2 dm, người ta khoan rút lõi ngay “chính giữa” quả cầu (trục đối xứng của lõi và quả cầu trùng nhau) như hình sau với đường kính mũi khoan là 1 dm được một vật thể có thể tích V là bao nhiêu dm^3 (bỏ qua độ dày mũi khoan)? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^3)?

PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

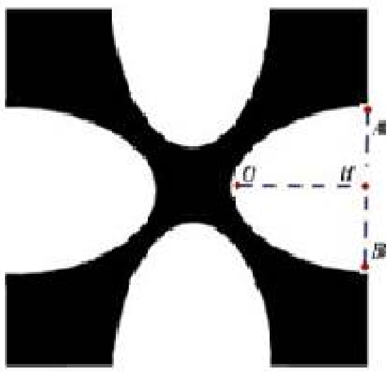
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao $18\,\text{m}$, chiều rộng chân đế $12\,\text{m}$. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng



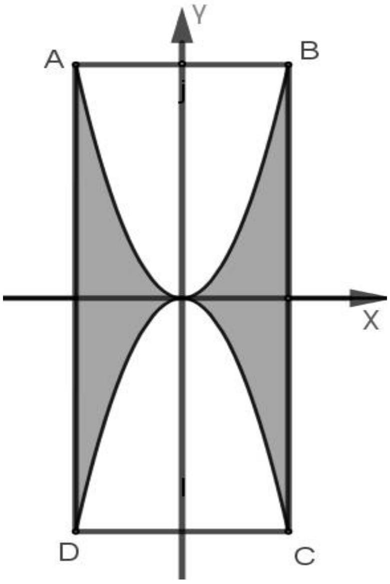
A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 2. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5\,\text{cm}$, $OH = 4$ cm. Biết giá trang trí hoa văn 1cm^2 là 50.000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



A. 2553333 đồng. **B.** 2333333 đồng. **C.** 2780333 đồng. **D.** 2123333 đồng.

Câu 3. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.

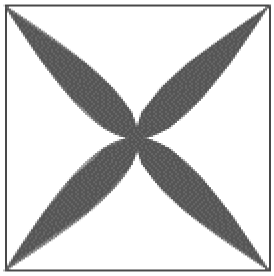


Phần tô đậm được đính đá với giá thành $500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB = 4dm; BC = 8dm.$ Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

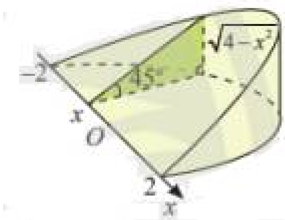
Câu 4. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh $40cm$. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,cm^2$. **B.** $\dfrac{800}{3}cm^2$. **C.** $\dfrac{400}{3}cm^2$. **D.** $250\,cm^2$.

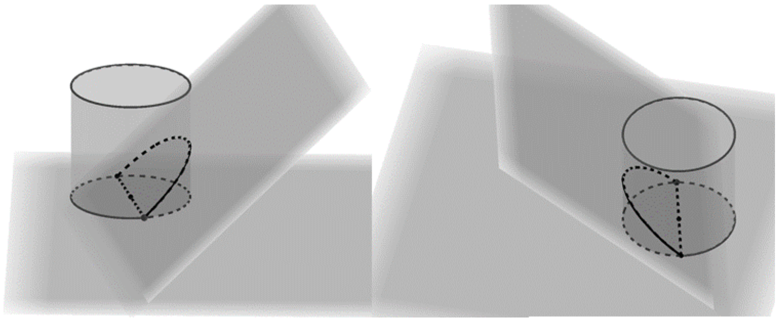
Câu 5. Khi cắt một vật thể hình chiếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2 \le x \le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45^0 và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14-3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chiếc niêm trên.



A. $V = 20$ **B.** $V = 20\pi$ **C.** $V = 10$ **D.** $V = 10\pi$

Câu 6. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30^0 ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2, với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng?

A. $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. **B.** $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **C.** $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. **D.** $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

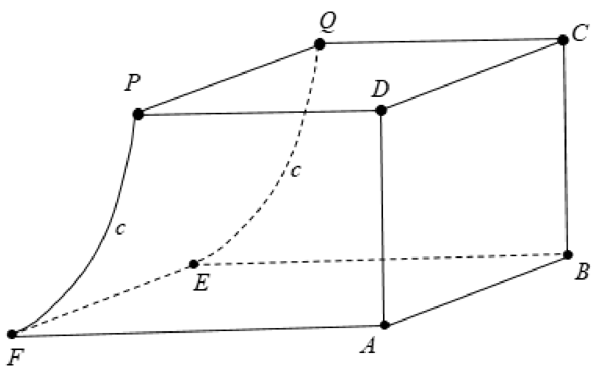


Câu 7. Cho một mô hình 3D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên dưới.

Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài $5(\text{cm})$; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

A. 29. **B.** 27. **C.** 31. **D.** 33.

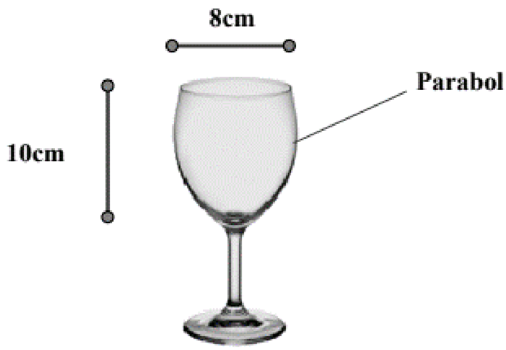
Câu 8. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng

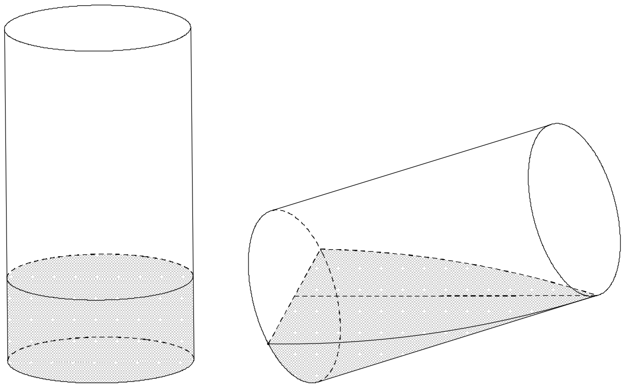
A. $\frac{395}{24}cm^3$. **B.** $\frac{50}{3}cm^3$. **C.** $\frac{125}{8}cm^3$. **D.** $\frac{425}{24}cm^3$.

Câu 9. Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



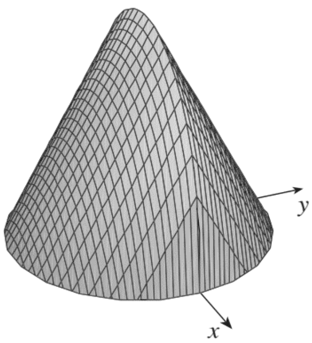
A. $V \approx 320cm^3$. **B.** $V \approx 1005,31cm^3$. **C.** $V \approx 251,33cm^3$. **D.** $V \approx 502,65cm^3$.

Câu 10. Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



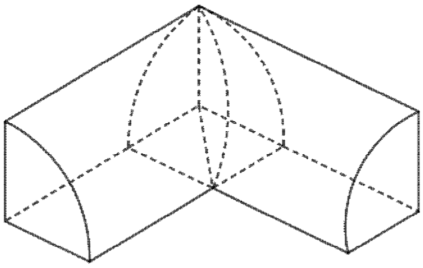
A. 240cm^3. **B.** $240\pi\text{ cm}^3$. **C.** 120cm^3. **D.** $120\pi\text{ cm}^3$.

Câu 11. Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-1 \le x \le 1\right)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



A. $V = \sqrt{3}$. **B.** $V = 3\sqrt{3}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \pi$.

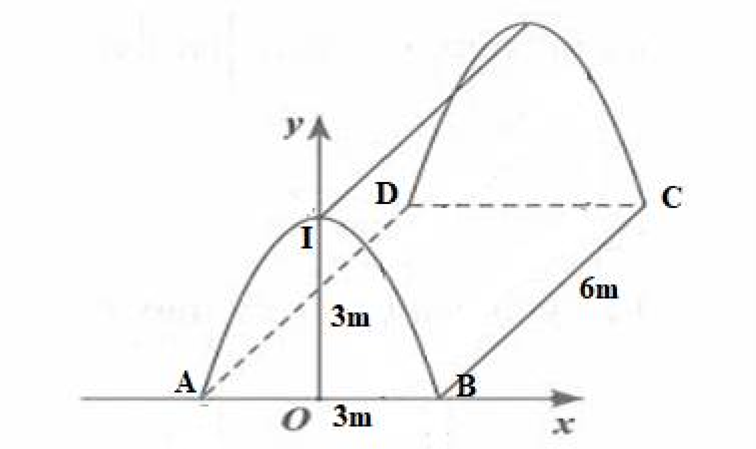
Câu 12. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H).



A. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$. **D.** $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Để kỷ niệm ngày $26-3-2024$, chi đoàn $12C_4$ Trường Nguyễn Văn Trỗi dự định dựng một lều trại dạng parabol, với kích thước: Nền trại là một hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng AB là 3 mét, chiều sâu BC là 6 mét, mặt trước và sau có dạng parabol (P) đỉnh có đỉnh I cách mặt đất là 3 mét. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AB như hình vẽ



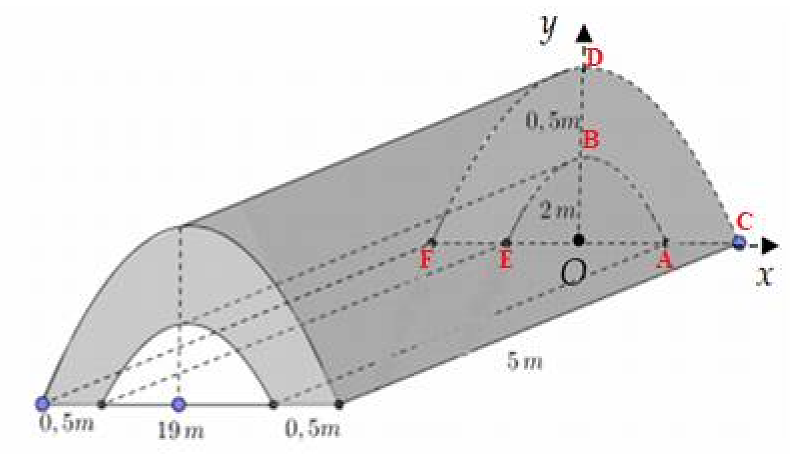
a) Đỉnh của parabol (P) là $I(0;3)$ và hai điểm A,B có tọa độ $A\left(-\frac{3}{2};0\right);B\left(\frac{3}{2};0\right)$.

b) Parabol (P) có phương trình là: $y=\frac{4}{3}x^2+3$

c) Diện tích mặt trước của lều trại bằng $3\left(m^2\right)$

d) Thể tích phần không gian phía bên trong trại của lớp $12C_4$ bằng $18\left(m^3\right)$.

Câu 14. Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông có kích thước: $AC=EF=0,5m;AE=19m;OB=2m,BD=0,5m$, đường cong Parabol (P_1) đi qua điểm A,B,E và đường cong Parabol (P_2) đi qua điểm C,D,F như hình vẽ bên dưới. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AE như hình vẽ.



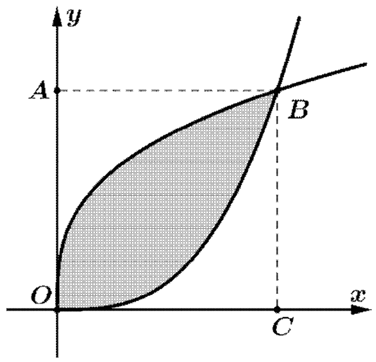
a) Parabol (P_1) có phương trình là $y=-\frac{8}{361}x^2+2$.

b) Parabol (P_2) có phương trình là $y=\frac{1}{40}x^2-\frac{5}{2}$.

c) Diện tích được giới hạn bởi hai Parabol (P_1) và (P_2) là $8\left(\mathrm{m}^2\right)$

d) Biết $1\mathrm{m}^3$ khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Khi đó, Tỉnh Phú Yên cần bỏ 100 triệu đồng để xây cây cầu trên.

Câu 15. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$



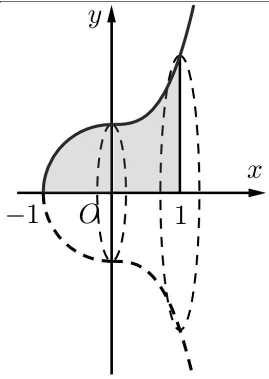
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, trục Ox, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1 |\sqrt[3]{x}|\,\mathrm{d}x$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox ,đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ (đvdt).

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1\left(-x^3+\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$.

d) Diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men có giá trị bằng $\frac{3}{4}$ (đvdt).

Câu 16. Giả sử chiếc nón rộng vành sau có thể mô hình hóa bằng cách cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\begin{cases} x^3+1 & \text{khi } 0<x\le 1 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1\le x\le 0 \end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên trục là dm).



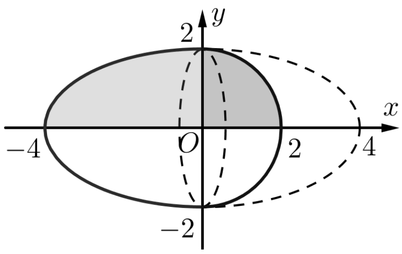
a) Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức $S=\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{1-x^2}+x^3+1\right|dx$.

b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Công thức tính thể tích của chiếc nón trên là $V=\pi\int_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Biết thể tích của chiếc nón bằng $\frac{a\pi}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b=139$.

Câu 17. Một cái trứng khủng long đồ chơi là một khối tròn xoay được tạo thành từ 2 mảnh ghép lại. Biết mảnh trên được tạo thành khi xoay một phần tư đường elip với trục lớn là 8 và trục nhỏ là 4 quanh trục Ox và mảnh dưới được tạo thành khi xoay một phần tư đường tròn bán kính 2 quanh trục Ox như hình sau (bỏ qua độ dày của vỏ trứng).



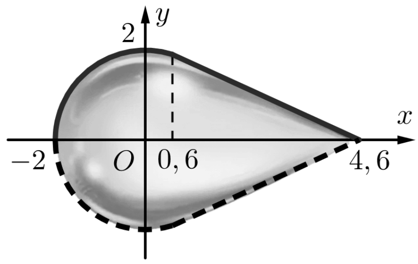
a) Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$.

b) Thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là 16π.

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 4π.

Câu 18. Người ta chế tác một giọt nước bằng thủy tinh. Biết giọt nước thủy tinh này là vật thể tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & (-2\le x\le 0{,}6)\\ -\frac{\sqrt{91}}{20}x+\frac{23\sqrt{91}}{100} & (0{,}6<x\le 4{,}6)\end{cases}$ và trục Ox quanh trục Ox (đơn vị trên trục là centimet).



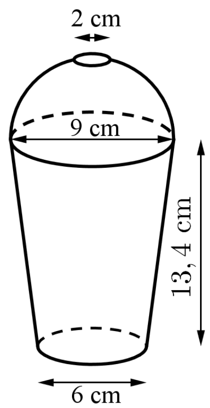
a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0,6$.

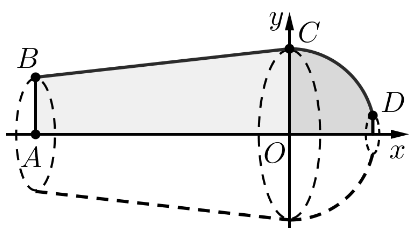
b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S = \int_{-2}^{4,6} f(x)dx$ cm^2.

c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này lớn hơn 41 cm^3.

d) Biết khối lượng riêng của thủy tinh là $\rho = 2,6$ g/cm^3, khối lượng của giọt nước thủy tinh này là 102,22g (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của gam).

Câu 19. Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 cm, đường kính miệng ly 9 cm, chiều cao 13,4 cm, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).





Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên trục là centimet) với trục Ox đi qua tâm của 2 đáy hình nón cụt và gốc tọa độ O trùng với tâm của đáy lớn như hình vẽ trên.

a) Phương trình đường thẳng BC là: $1,5x - 13,4y + 60,3 = 0$.

b) Tọa độ điểm D là $D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$.

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là 500 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là 780 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 20. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị “sự bất bình đẳng về thu nhập” của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2, 0\le x\le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất

a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]dx$$

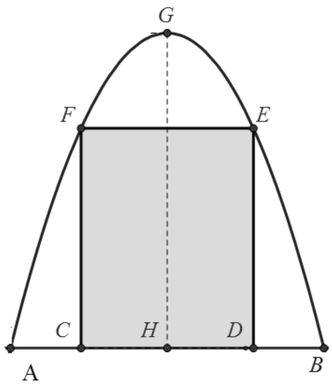
d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 21. Trường Lê Hồng Phong – Tây Hòa muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê công nhân làm mỗi mét vuông là $1,5$ triệu đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả bao nhiêu triệu đồng ?

Trả lời: ………………..

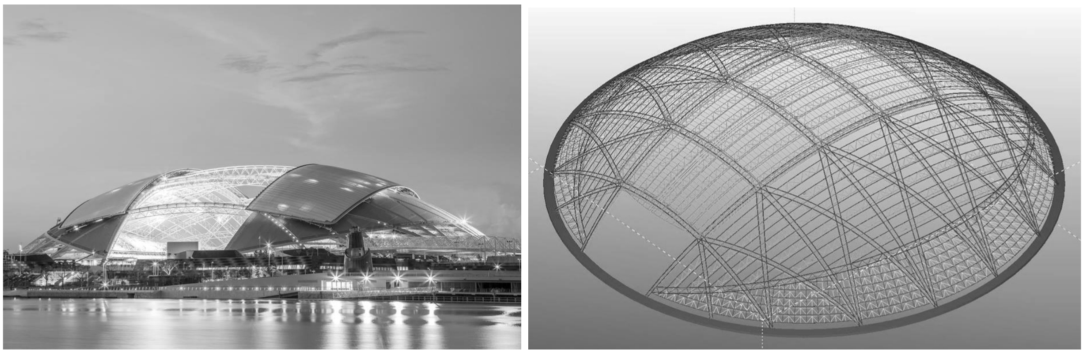
Câu 22. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol cho ngôi nhà của mình như hình vẽ bên dưới.

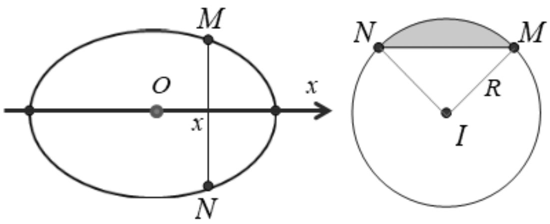


Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1,2$ triệu đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là $1,0$ triệu đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm cái cổng trên mà chị Minh Hiền phải trả là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất của triệu đồng)

Trả lời: ………………..

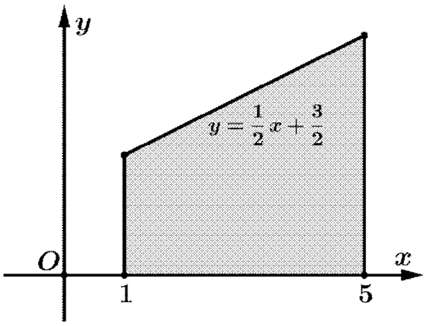
Câu 23. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E)và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích phần không gian bên trong sân vận động bằng nhiêu kilômét vuông? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của kilômét vuông).





Trả lời: ………………..

Câu 24. Một khối gỗ khi cắt một bề mặt ta thu được thiết diện được cho bởi hình vẽ bên (đơn vị m^2). Diện tích của thiết diện đó bằng bao nhiêu m^2?

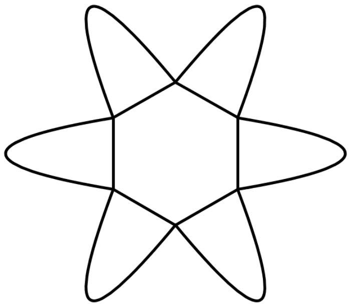


Trả lời: ………………..

Câu 25. Khu vực trung tâm một quảng trường có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 200 nghìn đồng 1 mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 800 nghìn đồng 1 mét vuông. Tính tổng chi phí (triệu đồng) để hoàn thành khu vực này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của triệu đồng) ?

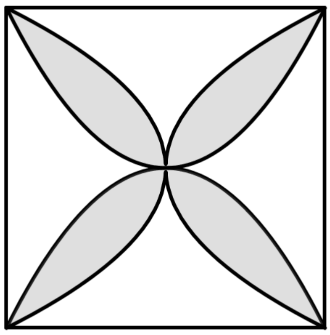
Trả lời: ………………..

Câu 26. Để trang trí cho một phòng trong một tòa nhà, người ta vẽ lên tường một hình như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng 2 dm có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh 3 dm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình sau). Hãy tính diện tích của hình nói trên (kể cả hình lục giác đều) để mua sơn trang trí cho phù hợp (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất của dm^2)



Trả lời: ………………..

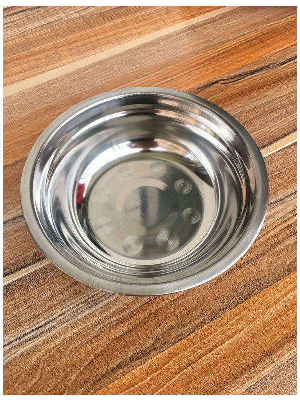
Câu 27. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh $60\,\text{cm}$. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).

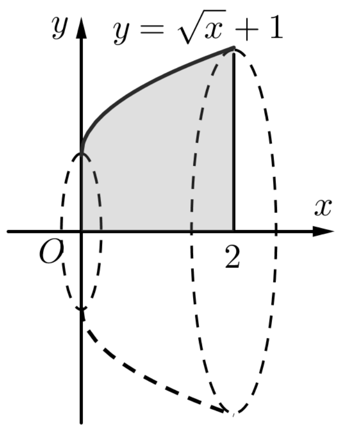


Tính diện tích phần cánh hoa của viên gạch (đơn vị cm^2).

Trả lời: ………………..

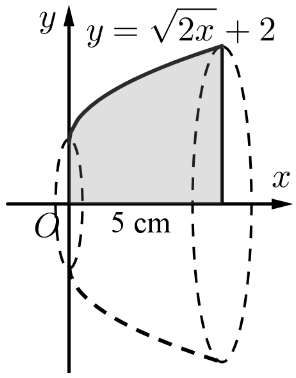
Câu 28. Tính thể tích chứa được của một cái chậu inox to mà khách hàng đặt theo kích thước yêu cầu, biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{x}+1$, trục Ox và các đường thẳng $x=0,\ x=2$ quanh trục Ox, đơn vị trên trục là decimet (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của dm^3).





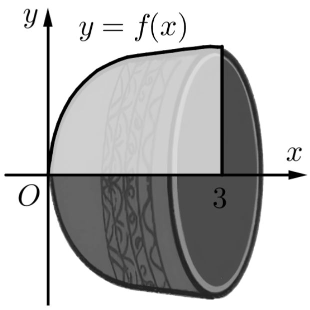
Trả lời: ………………..

Câu 29. Tính thể tích chứa được (dung tích) của một cái chén (bát), biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{2x}+2$ và trục Ox (như hình vẽ), bát có độ sâu 5 cm, đơn vị trên trục là centimet (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của cm^3).



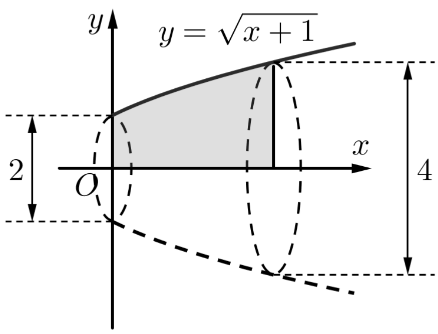
Trả lời: ………………..

Câu 30. Xét chiếc chén trong một bộ ấm chén uống trà, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)=0,14x^3-0,87x^2+1,92x+0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét). Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến phần chục của centimét khối).



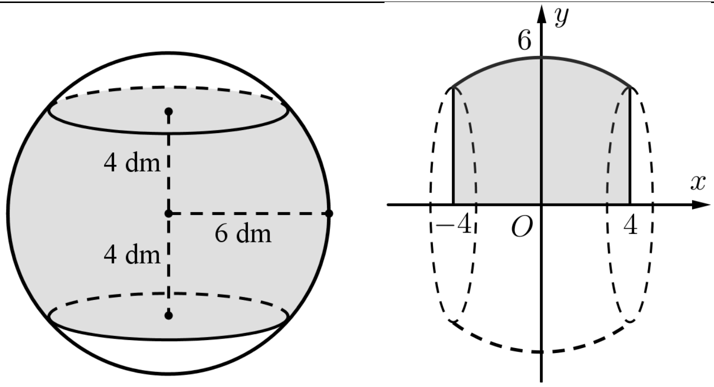
Trả lời: ………………..

Câu 31. Bác Hùng đặt người thợ gốm làm một cái chậu trồng cây, phần trong chậu cây có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng được tô đậm như hình sau quanh trục Ox (đơn vị trên trục là decimet), biết đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x+1}$, đáy chậu và miệng chậu có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Dung tích của chậu là bao nhiêu dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của dm^3)?



Trả lời: ………………..

Câu 32. Một hình cầu có bán kính 6 dm, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng song song và cùng vuông góc với đường kính để làm mặt xung quanh của một chiếc lu chứa nước (như hình vẽ). Tính thể tích V (lít) mà chiếc lu chứa được, biết mặt phẳng cách tâm mặt cầu 4 dm (làm tròn đến hàng đơn vị của lít).

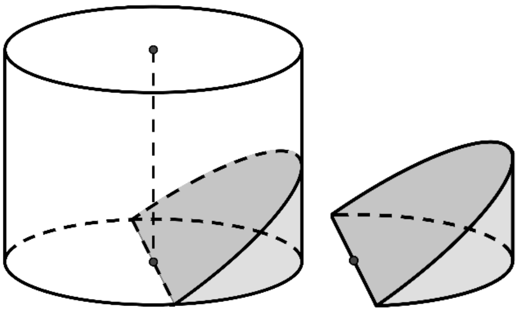


Trả lời: ………………..

Câu 33. Xét phần bên trong của một thùng rượu: là một khối tròn xoay có 2 đáy là hình tròn bằng nhau và có chiều cao là 60 cm, đường cong (bên trong) của thùng là một cung tròn của đường tròn bán kính là 36 cm. Thùng rượu này chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của lít)

Trả lời: ………………..

Câu 34. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45°$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới). Tính thể tích (cm^3) của hình nêm.

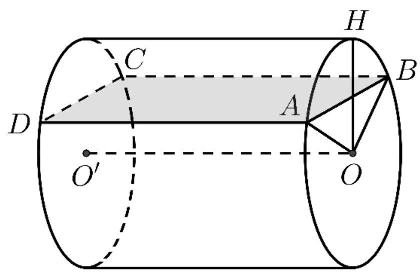


Trả lời: ………………..

Câu 35. Một thùng rượu (xét phần bên trong) có 2 đáy là các hình tròn với bán kính là 30 cm, thiết diện (P) vuông góc với trục nối tâm của 2 đáy và cách đều 2 đáy có bán kính là 40 cm (bên trong), chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh (bên trong) thùng rượu theo các đường parabol có đỉnh nằm trên mặt phẳng (P), hỏi dung tích của thùng rượu (đơn vị: lít) là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của lít)?

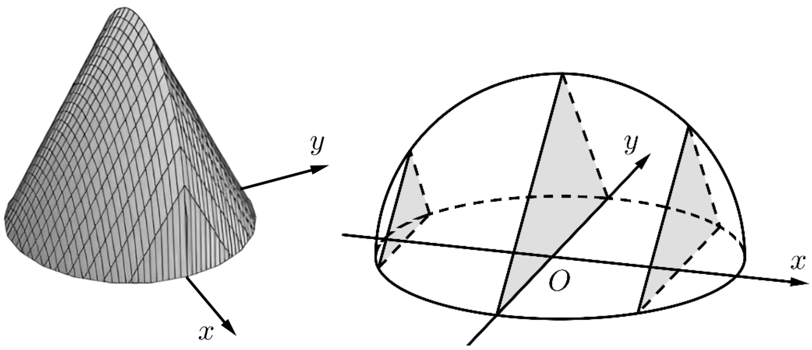
Trả lời: ………………..

Câu 36. Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích (theo đơn vị m^3) của lượng dầu còn lại trong bồn (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của m^3).



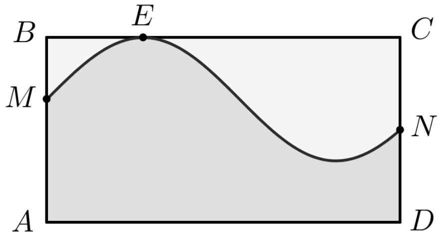
Trả lời: ………………..

Câu 37. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Khi đó thể tích của vật thể có dạng $\dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.



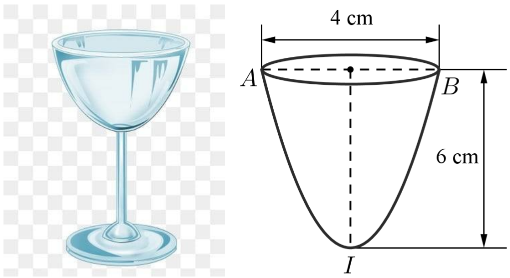
Trả lời: ………………..

Câu 38. Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30$ cm, $AD = \dfrac{55\pi}{3}$ cm. Người ta cắt tấm tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn. Biết $AM = 20$ cm, $CN = 15$ cm, $BE = 5\pi$ cm. Tính thể tích (đơn vị: lít) của khối tròn xoay được tạo thành khi xoay miếng tôn lớn quanh trục AD (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của lít).



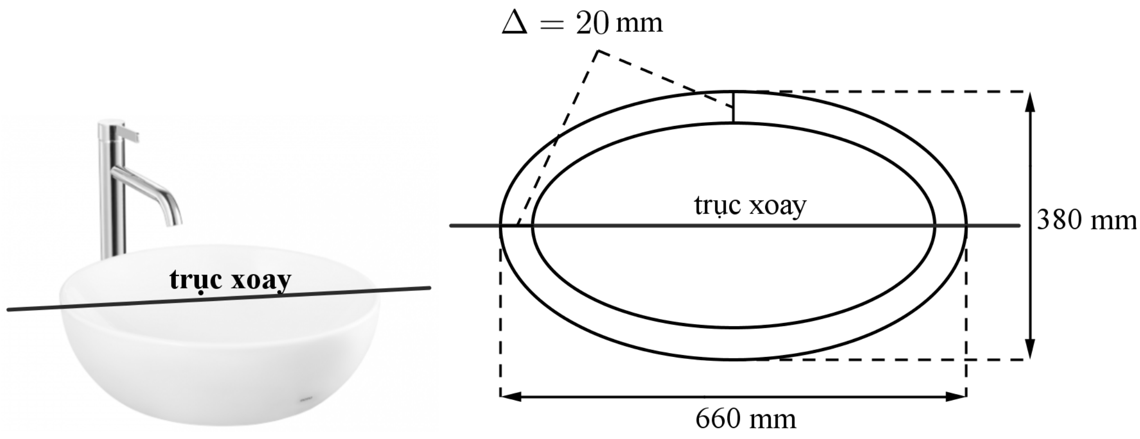
Trả lời: ………………..

Câu 39. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích V (cm^3) của vật thể đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của cm^3).



Trả lời: ………………..

Câu 40. Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài × rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (đơn vị: lít) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



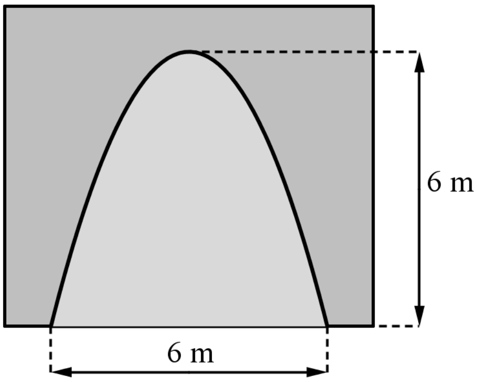
Trả lời: ………………..

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

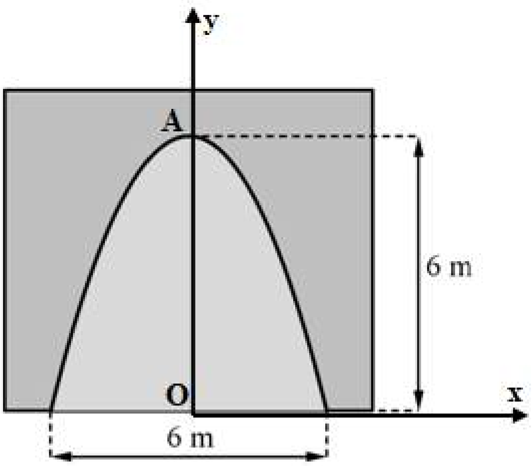
PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài 1. Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang và có kích thước như hình sau. Tính diện tích của cửa hầm.



Lời giải



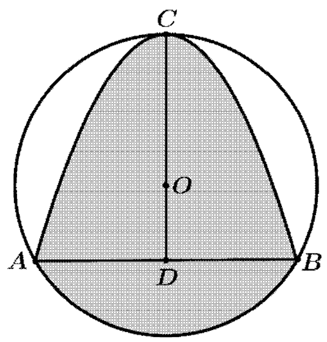
Gắn trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có:

Ta dễ dàng tìm được parabol là $y=-\frac{1}{6}x^2+6$ và đường thẳng nằm ngang là $y=0$

Phương trình hoành độ giao điểm là: $-\frac{1}{6}x^2+6=0 \Leftrightarrow x^2=36 \Leftrightarrow x=\pm 6$

Diện tích của cửa hầm là: $S=\int_{-6}^{6}\left(-\frac{1}{6}x^2+6\right)dx=\left(-\frac{1}{18}x^3+6x\right)\Big|_{-6}^{6}=48\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Bài 2. Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB=4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Đường cong qua ba điểm: A,B,C là một phần của parabol. Tính diện tích phần tô đậm trong hình vẽ.

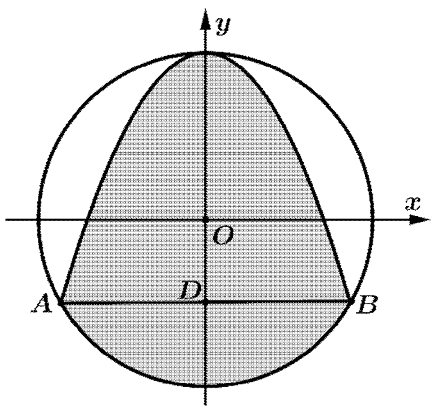


Lời giải

Do tam giác ABC là tam giác đều có cạnh $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ nên ta có:

$CD=4\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=6(\mathrm{cm})\Rightarrow OC=\frac{2}{3}CD=4(\mathrm{cm})$ và $OD=2(cm)$.

Gắn trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có: $A\left(-2\sqrt{3};-2\right),B\left(2\sqrt{3};-2\right),C(0;4)$



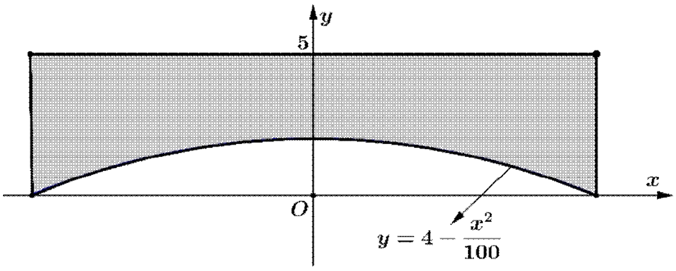
Phương trình đường Parapol đi qua 3 điểm A,B,C có đỉnh C có dạng $y=ax^2+4\ (P)$.

Thay toạ độ điểm $B\left(2\sqrt{3};-2\right)$ vào (P) suy ra $a=-\frac{1}{2}\Rightarrow(P):y=-\frac{1}{2}x^2+4$

Phương trình đường tròn tâm O bán kính $OA=4$ là $x^2+y^2=16$ $\Rightarrow$ Phương trình một phần cung nhỏ AB có dạng $y=-\sqrt{16-x^2}$

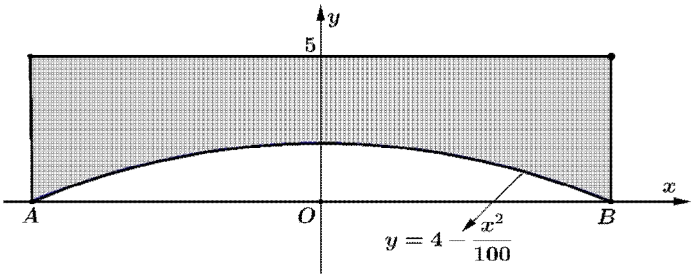
Vậy diện tích phần tô đậm bằng $\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left[\left(-\frac{1}{2}x^2+4\right)-\left(-\sqrt{16-x^2}\right)\right]dx\approx 37,54\left(\mathrm{cm}^2\right)$

Bài 3. Hình bên dưới là mặt cắt dọc của một chiếc cầu bê tông (phần tô đậm, các đơn vị đều đo bằng mét)



Biết chiều rộng của cầu bằng 9m. Thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu bằng bao nhiêu?

Lời giải



Parapol $y = 4 - \frac{x^2}{100}$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B. Cho $y = 0 \Rightarrow 4 - \frac{x^2}{100} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = -20 \end{array}\right.$

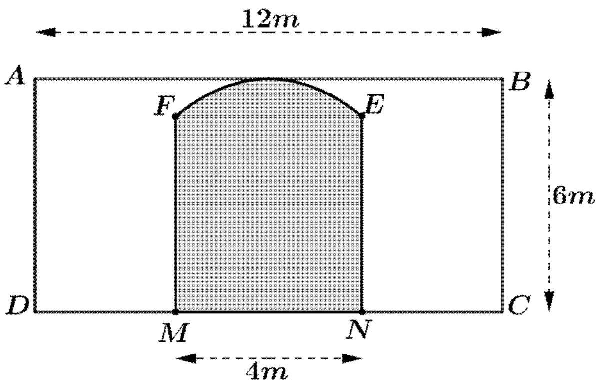
Do đó $A(-20;0)$ và $B(20;0)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parapol và trục hoành là $S = \int\limits_{-20}^{20} \left(4 - \frac{x^2}{100}\right) \mathrm{d}x = \frac{320}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần tô đậm bằng $40.5 - \frac{320}{3} = \frac{280}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Khi đó thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu là $\frac{280}{3}.9 = 840\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Bài 4. Bác Tùng muốn làm một bức tranh trang trí như phần $MNEIF$ được tô đậm trong hình vẽ bên dưới ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 6\mathrm{m}$, $CD = 12\mathrm{m}$



Biết $MN = 4\mathrm{m}$; cung EIF có hình parabol với đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là $1,2$ triệu đồng/m^2. Hỏi Bác Tùng cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh?

Lời giải

Gọi O là trung điểm cạnh MN và trùng với gốc toạ độ $\Rightarrow M(-2;0); N(2;0)$.

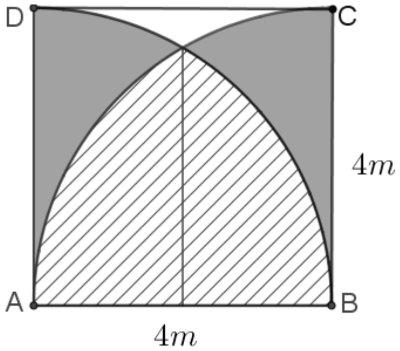
Phương trình parapol đỉnh $I(0;6)$ và đi qua hai điểm $D(-6;0); C(6;0)$ là $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$.

Diện tích giới hạn bởi $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$; $y = 0; x = -2; x = 2$.

Khi đó: $S = \int_{-2}^{2} \left| -\frac{1}{2}x^2 + 6 \right| dx = \frac{208}{9}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy Bác Tùng để làm bức tranh cần tiền $\frac{208}{9}.1,2 \approx 27,73$ triệu đồng.

Bài 5. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 4\mathrm{m}$. Trên tấm biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R = 4\mathrm{m}$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ.



Chi phí để sơn phần gạch chéo là 150 000 đồng/m^2, chi phí sơn phần màu đen là 100 000 đồng/ m^2 và chi phí để sơn phần còn lại là 250 000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên bằng bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

Gọi I là giao điểm của 2 cung tròn $\overset{\frown}{AC}; \overset{\frown}{BD}$. Chọn gốc toạ độ $A(0;0) \Rightarrow B(4,0)$

Xét cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$

Phần diện tích gạch chéo $S = 2.\int_{2}^{4} \sqrt{16 - x^2} dx = 16\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

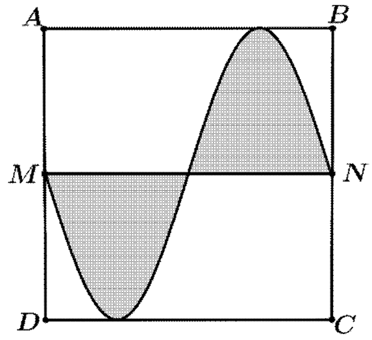
Phần diện tích màu đen: $2.\left(\frac{1}{4}\pi.4^2 - \frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3}\right) = \frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3}$

Phần diện tích còn lại: $16 - \left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} + \frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3}\right) = 16 - \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Số tiền để sơn biển quảng cáo:

$\left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right).150\,000 + \left(\frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3}\right).100\,000 + \left(16 - \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right).250\,000 \approx 2,195$ triệu đồng.

Bài 6. Cô Thúy có mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$, chiều dài $AB = 2\pi(m)$, chiều rộng $BC = 3(m)$. Cô Thúy muốn trồng hoa trên dải đất (phần tô đậm) được giới hạn bởi đường MN (với M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC) và một đường hình sin (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích đất trồng hoa.



Lời giải

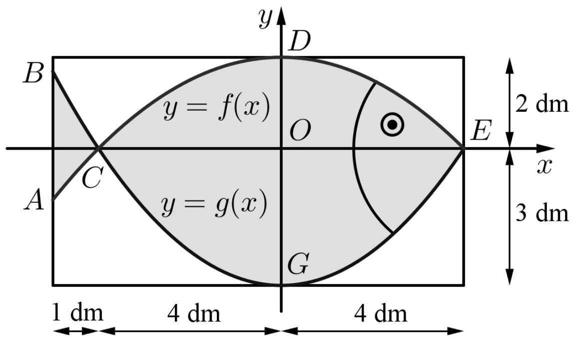
Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Vì phần đường cong là một đồ thị hình sin đi qua các điểm $(0;0),\left(-\frac{\pi}{2};1,5\right),(-\pi;0),\left(\frac{\pi}{2};1,5\right),(\pi;0)$ nên đường cong có phương trình $y=\frac{3}{2}\sin x$

Khi đó phần diện tích đất trồng hoa giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $\begin{cases} y=\frac{3}{2}\sin x \\ y=0 \\ x=-\pi; x=\pi \end{cases}$

Do đó diện tích đất trồng hoa là $S=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{3}{2}\sin x\right|dx=6\text{m}^2$.

Bài 7. Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét).



a) Lập phương trình các parabol $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

b) Tính diện tích của logo.

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) Từ đồ thị ta thấy parabol $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đỉnh tại điểm $O(0;0)$ nên $c=0$ và đi qua điểm $A(2;4)$ nên $4=4a+2b$

Giả sử $b=0$ (do parabol đối xứng quá trục tung) nên $4a=4\Rightarrow a=1$ nên $y=f\left(x\right)=x^2$

Parabol $y=g\left(x\right)=mx^2+nx+p$ có đỉnh tại điểm $E\left(2;0\right)$ nên $y=-m\left(x-2\right)^2+0$ và đi qua điểm $C\left(3;1\right)$ nên $m=-1$ nên $y=g\left(x\right)=-\left(x-2\right)^2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ là $x^2=-\left(x-2\right)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Diện tích của logo là:

$$S=\int_1^2\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^2+\left(x-2\right)^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2+4x\right)\right|_1^2=\frac{20}{3}\left(\mathrm{dm}^3\right)$$

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Diện tích cửa sổ là $2.4=8\left(\mathrm{dm}^3\right)$

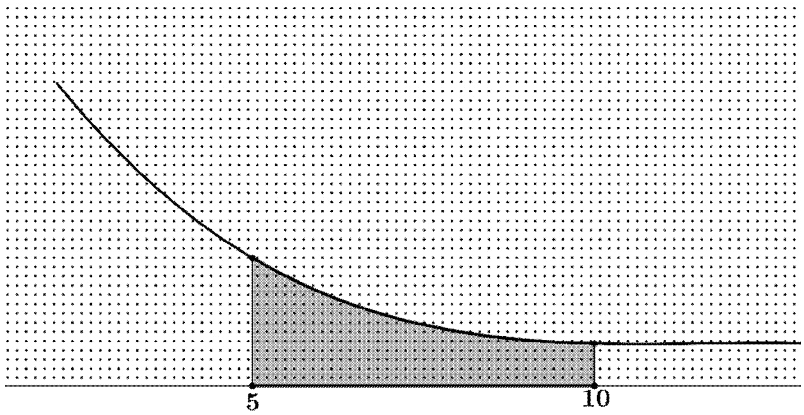
Lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là: 100% ánh sáng $=8\left(\mathrm{dm}^3\right)$

Lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo là: $50\%.\frac{20}{3}=\frac{10}{3}\ \left(\mathrm{dm}^3\right)$

Tổng lượng ánh sáng đi qua sau khi làm là: $8-\frac{10}{3}=\frac{14}{3}\ \left(\mathrm{dm}^3\right)$

Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm $\frac{8-\frac{14}{3}}{8}.100=41,6\ \left(\%\right)$.

Bài 8. Trong xác suất thống kê thì một biến ngẫu nhiên X được gọi là có hàm mật độ $f\left(x\right)$ nếu xác suất để X nhận giá trị trong $\left[a,b\right]$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, đường thẳng $y=a$ và $y=b$. Đặc biệt, khi $f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\\0 \quad ,x<0\end{cases}$ trong đó λ là số thực cho trước thì X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ. Chẳng hạn, tuổi thọ của một bóng đèn (đơn vị năm) là một biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối mũ với hệ số $\lambda=\frac{1}{5}$. Hãy tính xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm.

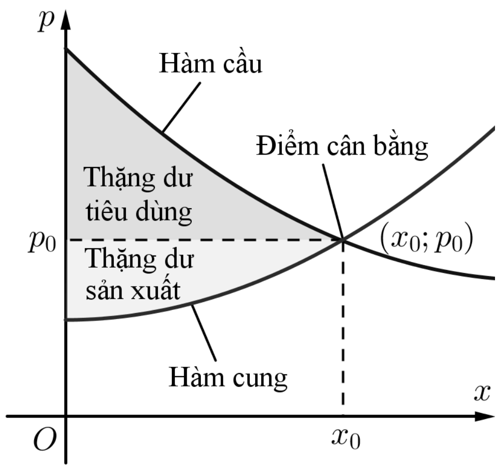


Lời giải

Hàm mật độ xác suất của X là: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}, x\ge 0\\ 0 \quad ,x<0\end{cases}$. Xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm là: $P[5\le X\le 10]=\int_5^{10}\frac{1}{5}e^{\frac{-1}{5}x}\,dx=-e^{-\frac{1}{5}x}\Big|_5^{10}=\frac{e-1}{e^2}$.

Bài 9. Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0;p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p=D(x)$ và đồ thị hàm cung $p=S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p=p_0$ và đường thẳng đứng $x=0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p=p_0$ và đường thẳng đứng $x=0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong hình bên dưới.



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

Hàm cầu: $p=5-0,2x$ và hàm cung: $p=1+0,02x^2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm là: $5-0,2x=1+0,02x^2$

$\Leftrightarrow 0,02x^2+0,2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=-20\end{array}\right.$

Với $x=10$ thỏa mãn khi đó $x_0=10;\ p_0=5-0,2.10=3$

Thặng dư tiêu dùng là $\int_0^{10}(5-0,2x-3)dx=\int_0^{10}(2-0,2x)dx=10$.

Thặng dư sản suất là $\int_0^{10}\left(3-1-0,02x^2\right)dx=\int_0^{10}\left(2-0,02x^2\right)dx=\frac{40}{3}$.

Bài 10. Đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là khoảng 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và khoảng 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc. Hàm cung được cho bởi $p = 0,0275x$, trong đó x là số lượng máy điều hoà được bán với giá p USD một chiếc. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất (giả sử hàm cầu là hàm bậc nhất).

Lời giải

Hàm cầu có dạng $p = ax + b$. Do đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc nên ta có:

$$\begin{cases} 331 = 6000a + b \\ 303 = 8000a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,014 \\ b = 415. \end{cases}$$

Vậy hàm cầu là $p = -0,014x + 415$.

Xét phương trình $-0,014x + 415 = 0,0275x \Leftrightarrow x = 10000$ khi đó $p = 275$.

Thặng dư tiêu dùng là: $\int\limits_0^{10000} \left(-0,014x + 415 - 275\right) \mathrm{d}x = 700000$ (USD)

Thặng dư sản xuất là: $\int\limits_0^{10000} \left(275 - 0,0275x\right) \mathrm{d}x = 1375000$ (USD).

Bài 11. Người ta sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số: $y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2, 0 \le x \le 100$, trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

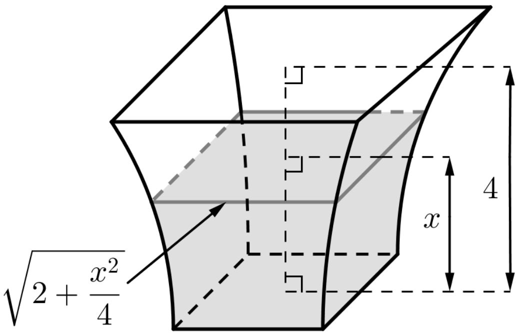
Lời giải

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 \\ x = 0; x = 100 \end{cases} \Rightarrow S = \int\limits_0^{100} \left|\left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 - x\right| \mathrm{d}x \approx 2086.$$

DẠNG 2
ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài 1. Một bình chứa nước có hình dạng như hình sau. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) ($0 \le x \le 4$) thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.



Lời giải

Mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm) nên có diện tích là $\left(\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}\right)^2 = 2+\frac{x^2}{4}\left(\text{dm}^2\right)$

Thể tích của bình chứa nước là: $V = \int_0^4 \left(2+\frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{40}{3}\left(\text{dm}^3\right)$

Bài 2. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu triệu đồng từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể và kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ hai của triệu đồng.

Lời giải

Đường elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$ có phương trình

$$\frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1 \Leftrightarrow y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y=\pm\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}.$$

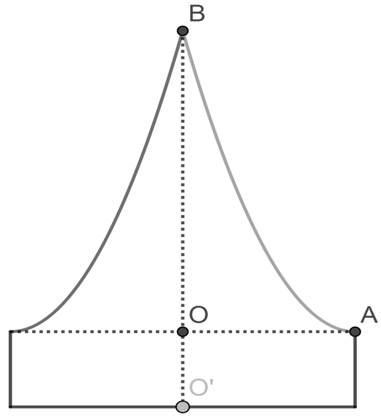
Do đó thể tích quả dưa là

$$V=\pi\int_{-14}^{14}\left(\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\int_{-14}^{14}\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2.\left(x-\frac{x^3}{3.14^2}\right)\Bigg|_{-14}^{14}=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2.\frac{56}{3}$$

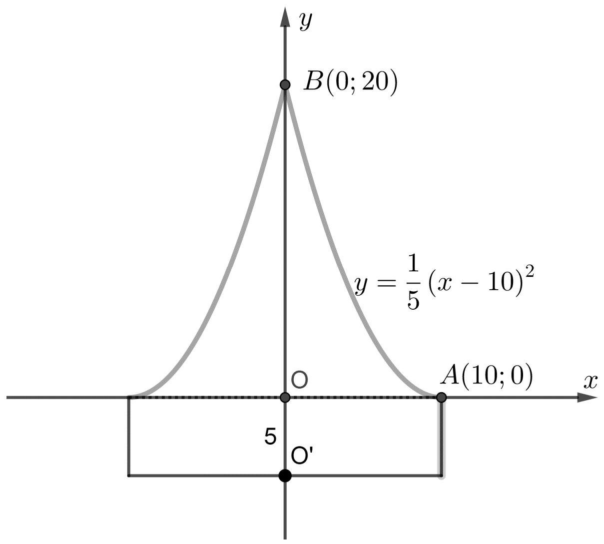
$$=\frac{8750\pi}{3}\mathrm{cm}^3.$$

Do đó tiền bán nước thu được là $\dfrac{8750\pi.20000}{3.1000}\approx 0{,}18$ triệu đồng

Bài 3. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng bao nhiêu cm^3? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm^3)



Lời giải



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA=10$ cm và đường cao $OO'=5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V=V_1+V_2$

$V_1=5.10^2\pi=500\pi\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.

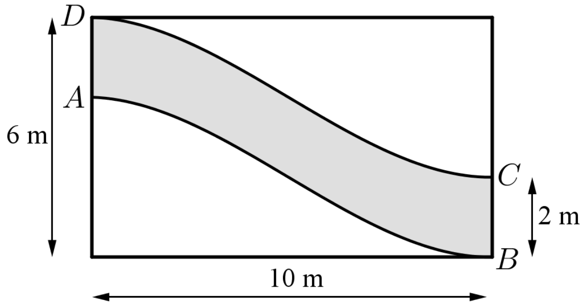
Do đó, $(P): y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$.

Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

Suy ra $V_2 = \pi\int\limits_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2 \mathrm{d}y = \pi\left(3000 - \dfrac{8000}{3}\right) = \dfrac{1000}{3}\pi \; \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi \approx 2618 \; \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Bài 4. Bác Công đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong hình sau. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra, Bác Công quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền Bác Công cần dùng để đổ bê tông con đường đó.



Lời giải

Để tính diện tích phần đổ bê tông, ta cần xác định diện tích giữa hai đường cong AB và DC

Đường cong DC là kết quả của việc tịnh tiến đường cong AB lên trên 2 m.

Giả sử hàm số của đường cong AB là $f(x)$ thì hàm số của đường cong DC là $f(x)+2$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong là: $S = \int\limits_0^{10}\left[f(x)+2-f(x)\right]\mathrm{d}x = 20\,\mathrm{m}^2$

Lớp bê tông có độ dày là $15\,\mathrm{cm}$ tức là $0{,}15\,\mathrm{m}$ thì có thể tích là: $20.0{,}15 = 3\mathrm{m}^3$

Chi phí tổng cộng để đổ bê tông con đường đó là: $3.1080000 = 3240000$ (đồng).

Bài 5. Từ một quả cầu bằng đá trắng sứ đường kính bằng 2 dm, người ta khoan rút lõi ngay “chính giữa” quả cầu (trục đối xứng của lõi và quả cầu trùng nhau) như hình sau với đường kính mũi khoan là 1 dm được một vật thể có thể tích V là bao nhiêu dm^3 (bỏ qua độ dày mũi khoan)? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm^3)?



Lời giải

Gọi V_1 là thể tích của khối trụ và V_2 là thể tích của chỏm cầu

Nửa chiều cao của khối trụ là: $l=\sqrt{1^2-(0,5)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên ta có thể suy ra chiều cao của chỏm cầu là: $h=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối trụ là: $V_1=\pi R^2.H=\pi.R^2.2l=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$

Thể tích chỏm cầu: $V_2=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx \Leftrightarrow V_2=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx \Leftrightarrow V_2=\pi\left(R^2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-h}^{R}$

$\Leftrightarrow V_2=\pi\left[\left(R^3-\dfrac{R^3}{3}\right)-\left(R^2(R-h)-\dfrac{(R-h)^3}{3}\right)\right] \Leftrightarrow V_2=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$.

Thay số ta suy ra được thể tích của chỏm cầu là $V_2=\pi\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

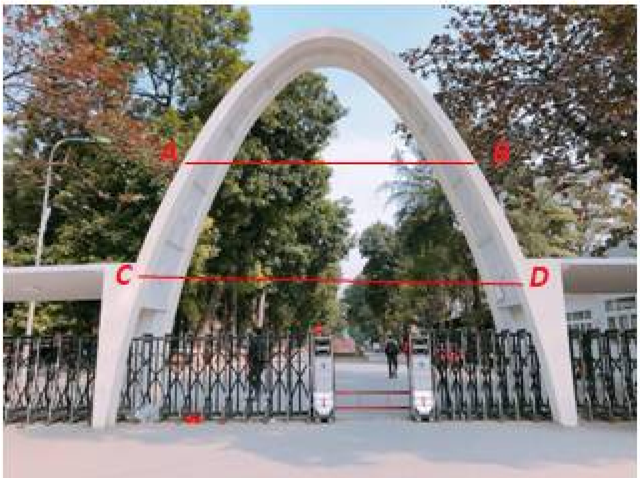
Khi đó thể tích của khối cần tìm là $V=V_1+2V_2=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}+\pi\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}\pi\approx 1,47\ \text{dm}^3$

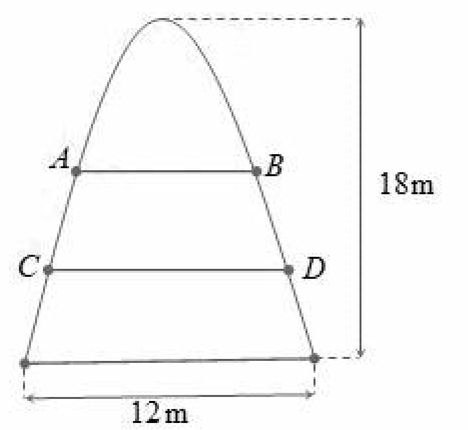
PHẦN B

TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN TỔNG HỢP GỒM BỐN PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao $18\,\text{m}$, chiều rộng chân đế $12\,\text{m}$. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng



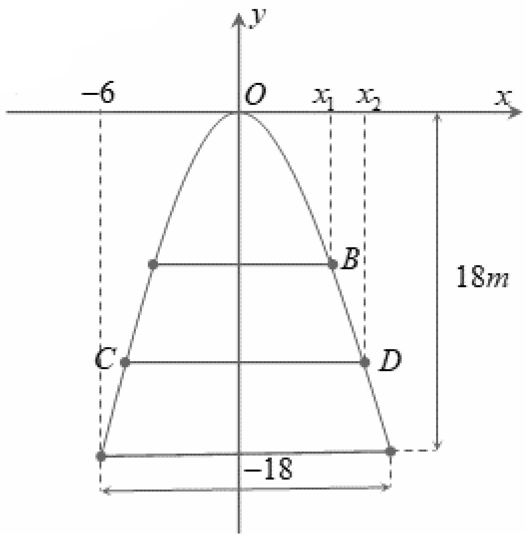


A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD}=\frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y=-\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1=2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2-\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x=2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x_1^2x\right)\Bigg|_0^{x_1}=\frac{2}{3}x_1^3.$$

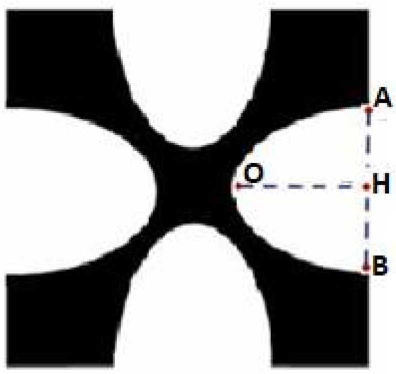
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD\ \ y=-\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2=2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2-\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]\mathrm{d}x=2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x_2^2x\right)\Bigg|_0^{x_2}=\frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2=2S_1 \Leftrightarrow x_2^3=2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $\frac{AB}{CD}=\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

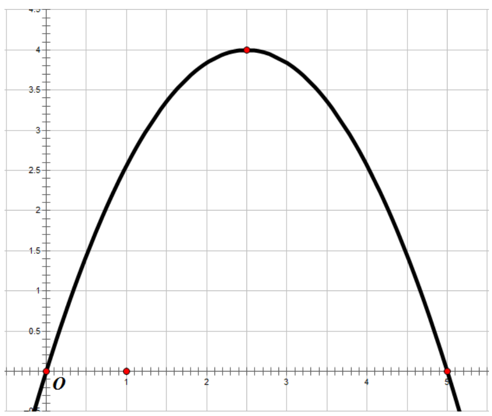
Câu 2. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5$ cm, $OH=4$ cm. Biết giá trang trí hoa văn 1cm^2 là 50.000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



A. 2553333 đồng. **B.** 2333333 đồng. **C.** 2780333 đồng. **D.** 2123333 đồng.

Lời giải

Chọn B



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$

là: $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x\right)\mathrm{d}x = \frac{40}{3}$.

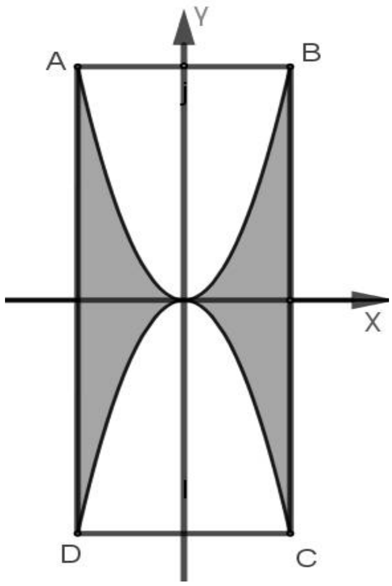
Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3}\ \text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100\ \text{cm}^2$.

diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}\ \text{cm}^2$.

Vậy số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó là: $\frac{140}{3}.50000 \approx 2333333$ đồng

Câu 3. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đính đá với giá thành $500.000đ/\text{m}^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB = 4dm; BC = 8dm.$ Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

Lời giải

Chọn B

Vì $AB = 4dm; BC = 8dm. \Rightarrow A(-2;4),\ B(2;4), C(2;-4), D(-2;-4)$.

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

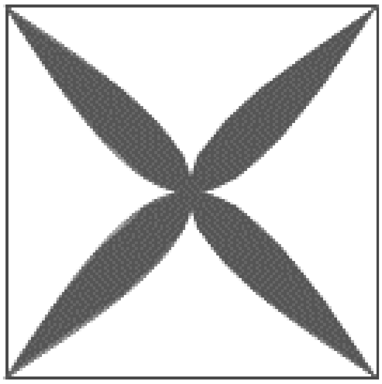
Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4\int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3}\ (dm^2)$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32\ (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}\ \ (dm^2)$

Tổng chi phí trang chí là: $T = \left(\frac{32}{3}.5000 + \frac{64}{3}.2500\right).1000 \approx 106666667đ$

Câu 4. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới).

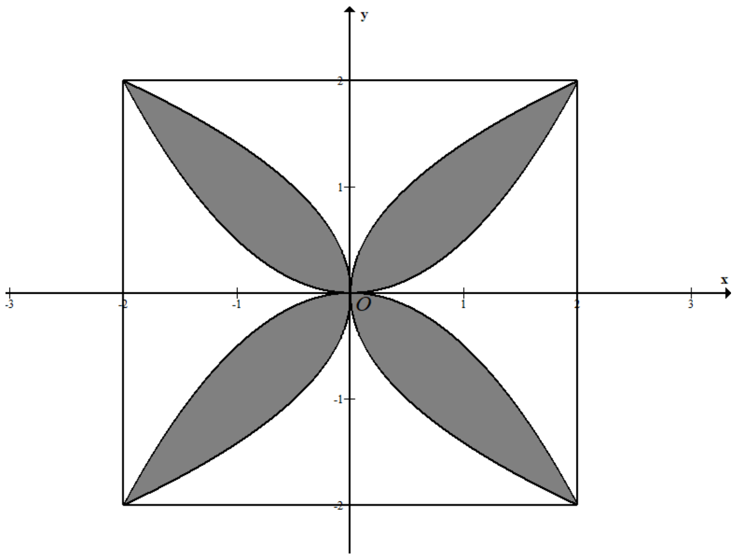


Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn C



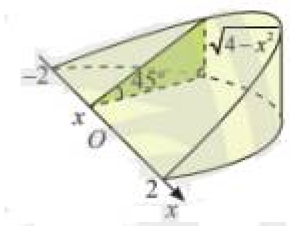
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm = 1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}, x = -\frac{y^2}{2}, x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}, y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)=\frac{400}{3}\left(\mathrm{cm}^2\right).$$

Câu 5. Khi cắt một vật thể hình chiếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-2\le x\le 2$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45^0 và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14-3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chiếc niêm trên.



A. $V=20$ **B.** $V=20\pi$ **C.** $V=10$ **D.** $V=10\pi$

Lời giải

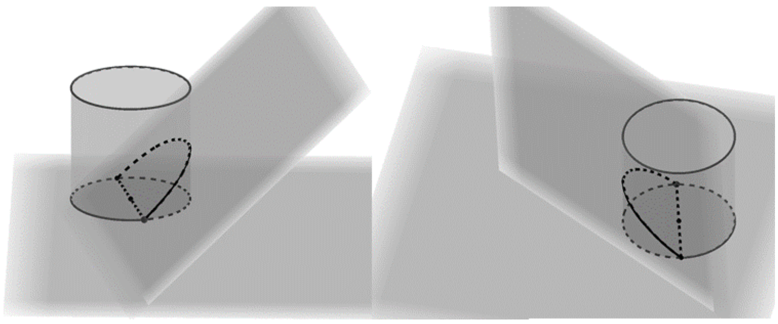
Chọn A.

Diện tích tam giác vuông cân là: $S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{14-3x^2}.\sqrt{14-3x^2}=\frac{1}{2}\left(14-3x^2\right)$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}\left(14-3x^2\right)dx=20$

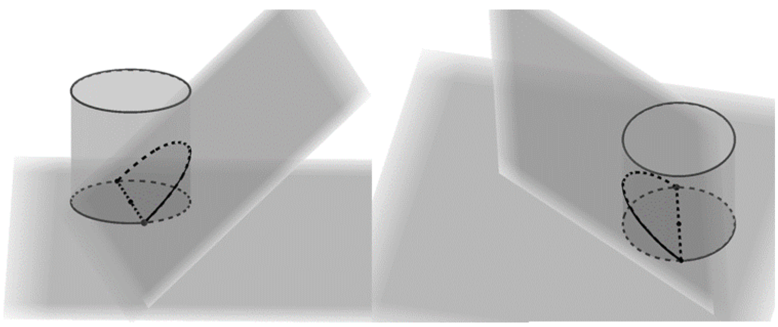
Câu 6. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30^0 ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2, với $V_1<V_2$. Thể tích V_1 bằng?

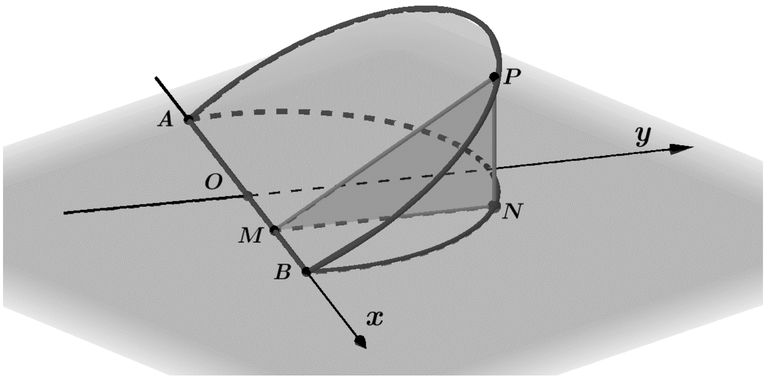
A. $V_1=\frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. **B.** $V_1=\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **C.** $V_1=\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. **D.** $V_1=\frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.



Lời giải

Chọn A





Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R;R]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x, cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP vuông tại N và có $\widehat{PMN}=30^0$.

Ta có $NM=y=\sqrt{R^2-x^2}\Rightarrow NP=MN.\tan 30^0=\dfrac{\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{3}}$.

ΔMNP có diện tích $S(x)=\dfrac{1}{2}NM.NP=\dfrac{1}{2}.\dfrac{R^2-x^2}{\sqrt{3}}$.

Thể tích hình nêm là $V_1=\int\limits_{-R}^{R}S(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-R}^{R}\dfrac{R^2-x^2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(R^2x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^{R}=\dfrac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.

Chú ý: Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm:

$V_1=\dfrac{2}{3}R^2h=\dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha$, trong đó $R=\dfrac{AB}{2}$, $\alpha=\widehat{PMN}$.

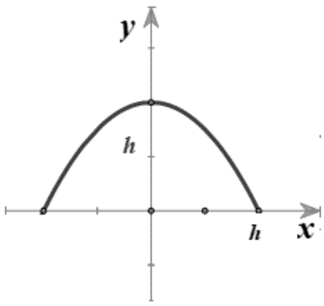
Câu 7. Cho một mô hình 3D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên dưới.

Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài $5(\text{cm})$; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parobol cho bởi công thức $y=3-\dfrac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

A. 29. **B.** 27. **C.** 31. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, \ (a < 0)$

Có $B(h;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h}$ $(do\, h > 0)$

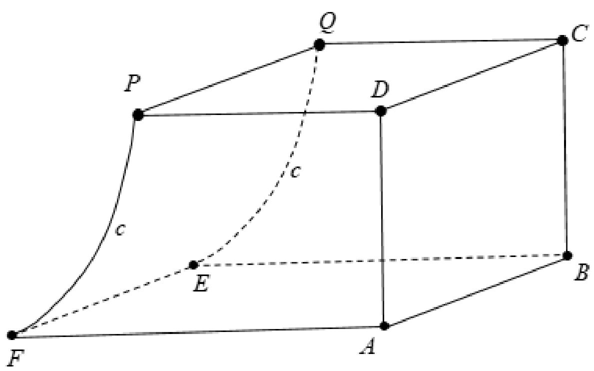
Diện tích S của thiết diện: $S = \int\limits_{-h}^{h}\left(-\frac{1}{h}x^2 + h\right)\mathrm{dx} = \frac{4h^2}{3}, h = 3 - \frac{2}{5}x$, $h = 3 - \frac{2}{5}x$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2$$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$\Rightarrow V = \int\limits_0^5 S(x)\mathrm{dx} = \int\limits_0^5 \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2 \mathrm{dx} \approx 28{,}888 \Rightarrow V \approx 29\ (\mathrm{cm}^3)$$

Câu 8. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.

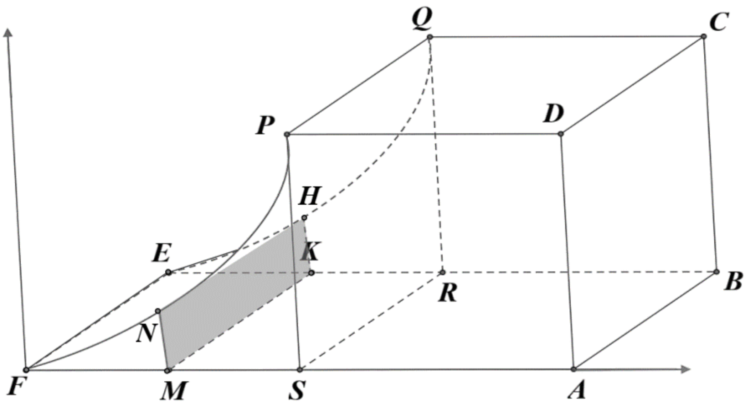


Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2{,}5cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3{,}5cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng

A. $\frac{395}{24}cm^3$. **B.** $\frac{50}{3}\,cm^3$. **C.** $\frac{125}{8}cm^3$. **D.** $\frac{425}{24}cm^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi hình chiếu của P,Q trên AF và BE là R và S.

Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5cm$, thể tích $V_1 = \frac{125}{8}cm^3$ và phần còn lại có thể tích V_2. Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F, Ox trùng với FA, Oy trùng với tia Fy song song với AD.

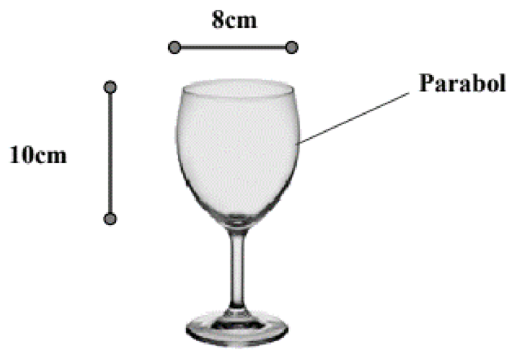
Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1;\frac{5}{2}\right)$ do đó $a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x;0;0), 0 \le x \le 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4}x^2dx = \frac{25}{12}$

Từ đó $V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24}\left(cm^3\right)$

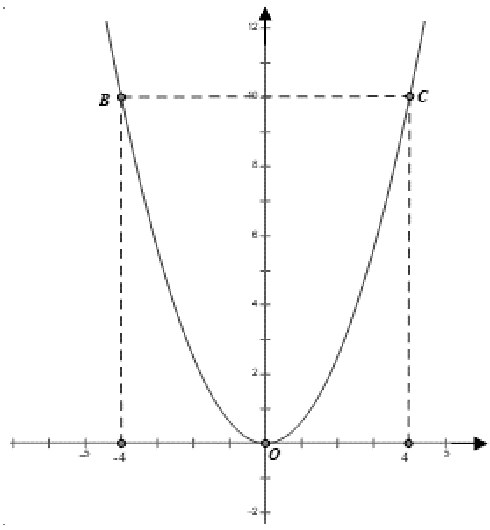
Câu 9. Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



A. $V \approx 320cm^3$. **B.** $V \approx 1005,31cm^3$. **C.** $V \approx 251,33cm^3$. **D.** $V \approx 502,65cm^3$.

Lời giải

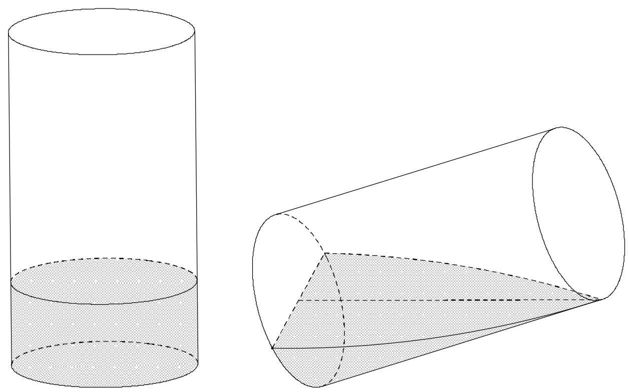
Chọn C



Parabol có phương trình $y=\dfrac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc: $V=\pi\int_0^{10}\left(\dfrac{8}{5}y\right).dy \approx 251,33$.

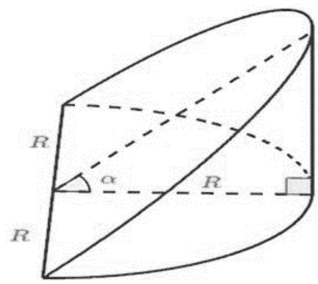
Câu 10. Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. $240\,\text{cm}^3$. **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $120\,\text{cm}^3$. **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

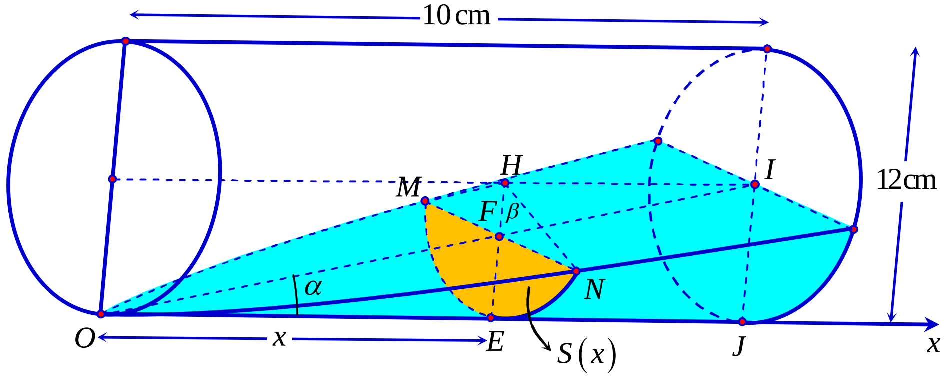
$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}.\sqrt{R^2-x^2}.\tan\alpha \Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha$.

Thể tích hình cái nêm là: $V=\frac{1}{2}\tan\alpha\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

$\Rightarrow V_{kn}=\frac{2}{3}R^3.\frac{h}{R}=240\,\text{cm}^3$.

Cách 2. Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h\ge x\ge 0$.

Gọi $\widehat{IOJ}=\alpha, \widehat{FHN}=\beta, OE=x$

$\tan\alpha=\frac{IJ}{OJ}=\frac{6}{10}=\frac{EF}{OE}\Rightarrow EF=\frac{6x}{10}\Rightarrow HF=6-\frac{6x}{10}$.

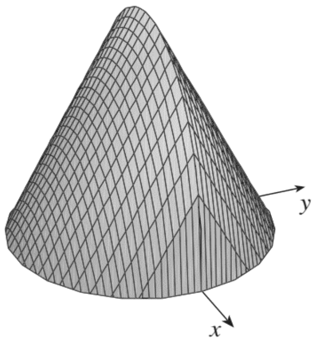
$\cos\beta=\frac{HF}{HN}=\frac{6-\frac{6x}{10}}{6}=1-\frac{x}{10}$; $\beta=\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)$

$S(x)=S_{(hinh\,quat)}-S_{HMN}=\frac{1}{2}HN^2.2\beta-\frac{1}{2}HM.HN.\sin 2\beta$

$\Rightarrow S(x)=6^2\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)-\frac{1}{2}.6.6.2\left(1-\frac{x}{10}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{10}\right)^2}$

$\Rightarrow V=\int\limits_0^{10}S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{10}\left(36\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)-36\left(1-\frac{x}{10}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{10}\right)^2}\right)\mathrm{d}x=240$.

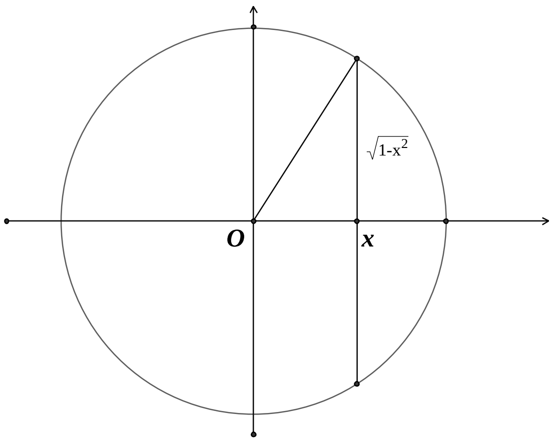
Câu 11. Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(-1\le x\le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



A. $V = \sqrt{3}$. **B.** $V = 3\sqrt{3}$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \pi$.

Lời giải

Chọn C



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O.

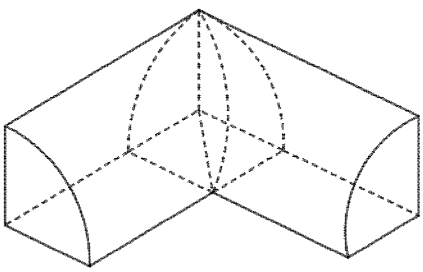
Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \left(1 - x^2\right)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2\int_0^1 S dx = 2\int_0^1 \sqrt{3}\left(1 - x^2\right) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

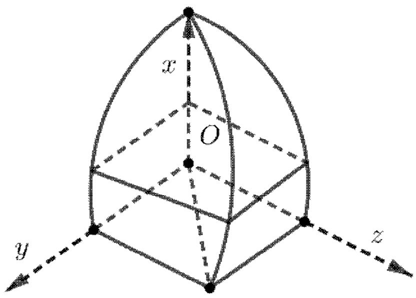
Câu 12. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\dfrac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H).



A. $V_{(H)}=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{(H)}=\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V_{(H)}=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



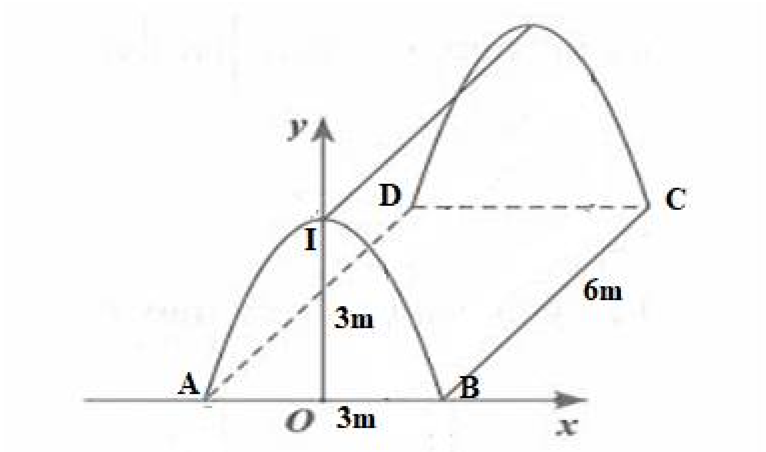
• Đặt hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp (Oyz) cắt trục Ox tại x: thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh $\sqrt{a^2-x^2}$ $(0\le x\le a)$.

• Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích: $S(x)=a^2-x^2$.

• Vậy $V_{(H)}=\int_0^a S(x)\mathrm{d}x=\int_0^a (a^2-x^2)\mathrm{d}x=\left.\left(a^2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\right|_0^a=\dfrac{2a^3}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Để kỷ niệm ngày $26-3-2024$, chi đoàn $12C_4$ Trường Nguyễn Văn Trỗi dự định dựng một lều trại dạng parabol, với kích thước: Nền trại là một hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng AB là 3 mét, chiều sâu BC là 6 mét, mặt trước và sau có dạng parabol (P) đỉnh có đỉnh I cách mặt đất là 3 mét. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AB như hình vẽ



a) Đỉnh của parabol (P) là $I(0;3)$ và hai điểm A,B có tọa độ $A\left(-\frac{3}{2};0\right);B\left(\frac{3}{2};0\right)$.

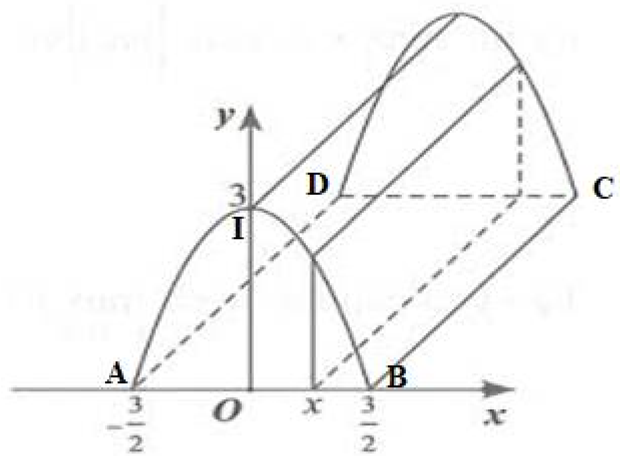
b) Parabol (P) có phương trình là: $y=\frac{4}{3}x^2+3$

c) Diện tích mặt trước của lều trại bằng $3\left(m^2\right)$

d) Thể tích phần không gian phía bên trong trại của lớp $12C_4$ bằng $18\left(m^3\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



a) Theo đề bài ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=3m; BC=6m$.

Đỉnh của parabol (P) là $I(0;3)$ và $A\left(-\frac{3}{2};0\right);B\left(\frac{3}{2};0\right)$

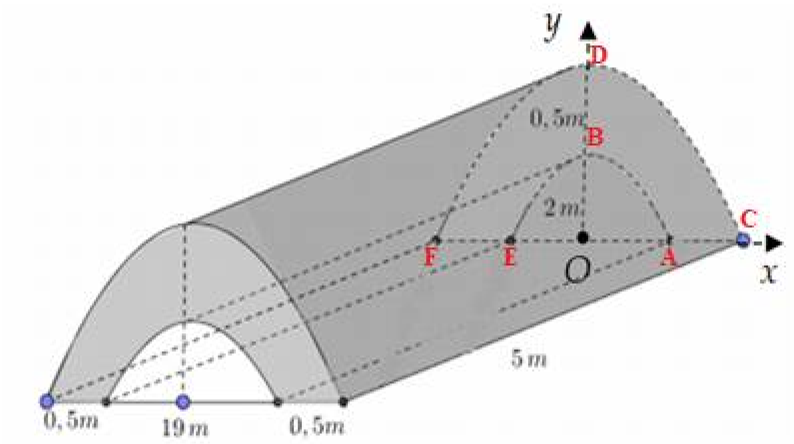
b) Phương trình của parabol (P) có dạng $y=ax^2+b, a\neq 0$.

Do I, A, B thuộc parabol (P) nên ta có: $\begin{cases} a.0^2+b=3 \\ a.\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{4}{3} \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow y=-\dfrac{4}{3}x^2+3$

c) Diện tích mặt trước của lều trại là: $S=2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(-\dfrac{4}{3}x^2+3\right)dx=2\left(-\dfrac{4}{3}x^3+3x\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}=6\left(m^2\right)$

d) Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là: $V=6.2\int_0^{\frac{3}{2}}\left(-\dfrac{4}{3}x^2+3\right)dx=12\left(-\dfrac{4}{3}x^3+3x\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}=36\left(m^3\right)$

Câu 14. Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông có kích thước: $AC=EF=0,5m; AE=19m; OB=2m, BD=0,5m$, đường cong Parabol (P_1) đi qua điểm A, B, E và đường cong Parabol (P_2) đi qua điểm C, D, F như hình vẽ bên dưới. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AE như hình vẽ.



a) Parabol (P_1) có phương trình là $y=-\dfrac{8}{361}x^2+2$.

b) Parabol (P_2) có phương trình là $y=\dfrac{1}{40}x^2-\dfrac{5}{2}$.

c) Diện tích được giới hạn bởi hai Parabol (P_1) và (P_2) là $8\left(\mathrm{m}^2\right)$

d) Biết $1\mathrm{m}^3$ khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Khi đó, Tỉnh Phú Yên cần bỏ 100 triệu đồng để xây cây cầu trên.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ hình vẽ ta có: $A\left(\dfrac{19}{2};0\right), B(0;2), C(10;0), D\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$

a) Phương trình của parabol (P_1) có dạng $y=a_1x^2+b_1$

(P_1) đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}0=a.\left(\frac{19}{2}\right)^2+2\\ 2=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1=-\frac{8}{361}\\ b_1=2\end{cases} \Rightarrow (P_1): y=-\frac{8}{361}x^2+2$.

b) Phương trình của parabol (P_2) có dạng: $y=a_2x^2+b_2$

(P_2) đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}0=a_2.(10)^2+\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}=b_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_2=-\frac{1}{40}\\ b_2=\frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow (P_2): y=-\frac{1}{40}x^2+\frac{5}{2}$.

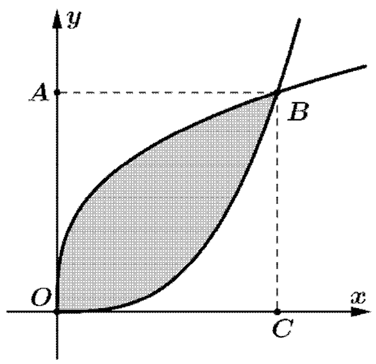
c) Diện tích được giới hạn bởi hai Parabol (P_1) và (P_2) là

$$S=2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2+\frac{5}{2}\right)dx-\int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2+2\right)dx\right]=8\left(\text{m}^2\right)$$

d) Ta có thể tích của bê tông là: $V=5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2+\frac{5}{2}\right)dx-\int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2+2\right)dx\right]=40\,\text{m}^3$.

Số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu là: $5.40=200$ triệu đồng

Câu 15. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, trục Ox, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1|\sqrt[3]{x}|dx$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ (đvdt).

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1\left(-x^3+\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$.

d) Diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men có giá trị bằng $\frac{3}{4}$ (đvdt).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, đường thẳng $x=a, x=b$ được tính bằng công thức $S=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục Ox ,đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$.

Ta có $S=\int_0^1\left|x^3\right|\mathrm{d}x=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}$ (đvdt).

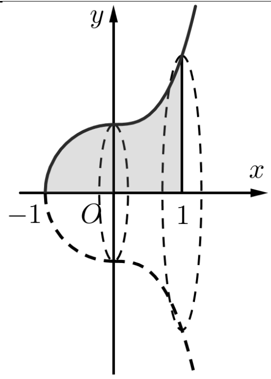
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ được tính bằng công thức $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$, vì phần đồ thị của hàm số $y=x^3$ nằm dưới phần đồ thị của hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1\left(-x^3+\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S=1^2=1$ (đvdt)

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm: $S_1=\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}-x^3\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1=\frac{1}{2}$ (đvdt),

Vậy diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men bằng $S-S_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (đvdt).

Câu 16. Giả sử chiếc nón rộng vành sau có thể mô hình hóa bằng cách cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{khi } 0<x\le 1\\ \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1\le x\le 0\end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên trục là dm).



a) Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức $S=\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{1-x^2}+x^3+1\right|dx$.

b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Công thức tính thể tích của chiếc nón trên là $V=\pi\int_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Biết thể tích của chiếc nón bằng $\frac{a\pi}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b=139$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Diện tích hình phẳng (H) được tính bằng công thức: $S=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x^3+1\right)dx$

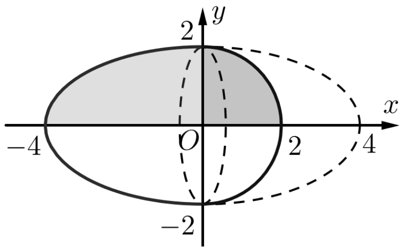
b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Công thức tính thể tích của chiếc nón trên là $V=\pi\int_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Thể tích của chiếc nón:

$V=\pi\int_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx=\frac{97\pi}{42}$ nên $a=97$ và $b=42\Rightarrow a+b=139$.

Câu 17. Một cái trứng khủng long đồ chơi là một khối tròn xoay được tạo thành từ 2 mảnh ghép lại. Biết mảnh trên được tạo thành khi xoay một phần tư đường elip với trục lớn là 8 và trục nhỏ là 4 quanh trục Ox và mảnh dưới được tạo thành khi xoay một phần tư đường tròn bán kính 2 quanh trục Ox như hình sau (bỏ qua độ dày của vỏ trứng).



a) Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\left(16 - x^2\right)dx$.

b) Thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là 16π.

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 4π.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Mảnh trên được biểu diễn bởi elip: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$

Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1 = \pi\int_{-4}^{0}\left[4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)\right]dx = \frac{\pi}{4}\int_{-4}^{0}\left(16 - x^2\right)dx$.

b) Thể tích phần trong mảnh trên là: $V_1 = \frac{\pi}{4}\int_{-4}^{0}\left(16 - x^2\right)dx = \frac{32\pi}{3}$

Mảnh dưới được biểu diễn bởi đường tròn: $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$

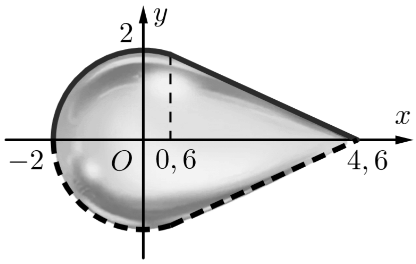
Thể tích phần trong dưới là: $V_2 = \pi\int_{0}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \frac{16\pi}{3}$.

Vậy thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là: $V = V_1 + V_2 = \frac{32\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} = 16\pi$

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 4π.

Câu 18. Người ta chế tác một giọt nước bằng thủy tinh. Biết giọt nước thủy tinh này là vật thể tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & (-2 \le x \le 0,6) \\ -\frac{\sqrt{91}}{20}x + \frac{23\sqrt{91}}{100} & (0,6 < x \le 4,6) \end{cases}$ và trục Ox quanh trục Ox (đơn vị trên trục là centimet).



a) Hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục tại $x = 0,6$.

b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S = \int\limits_{-2}^{4,6} f\left(x\right)dx$ cm^2.

c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này lớn hơn 41 cm^3.

d) Biết khối lượng riêng của thủy tinh là $\rho = 2,6$ g/cm^3, khối lượng của giọt nước thủy tinh này là 102,22g (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của gam).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $\lim\limits_{x \to 0,6^-} f\left(x\right) = \sqrt{4 - \left(0,6\right)^2} = \sqrt{4 - 0,36} = \sqrt{3,64} \approx 1,907$ $\lim\limits_{x \to 0,6^+} f\left(x\right) = -\dfrac{\sqrt{91}}{20}.0,6 + \dfrac{23\sqrt{91}}{100} \approx 1,907$

Vậy hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục tại $x = 0,6$

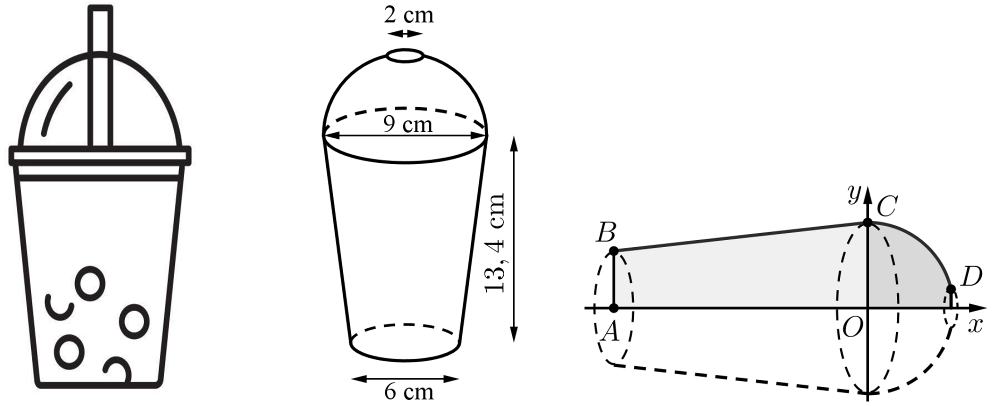
b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S = 2\int\limits_{-2}^{4,6} f\left(x\right)dx$ cm^2.

c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này là:

$$V = V_1 + V_2 = \pi\int\limits_{-2}^{0,6}\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 dx + \pi\int\limits_{0,6}^{4,6}\left(-\frac{\sqrt{91}}{20}x + \frac{23\sqrt{91}}{100}\right)^2 dx = \frac{4693\pi}{375} \approx 39,32 \text{ cm}^3$$

d) Khối lượng của giọt nước thủy tinh này là: $m = \rho.V = 2,6.\dfrac{4693\pi}{375} \approx 102,22$ g.

Câu 19. Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 cm, đường kính miệng ly 9 cm, chiều cao 13,4 cm, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).



Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên trục là centimet) với trục Ox đi qua tâm của 2 đáy hình nón cụt và gốc tọa độ O trùng với tâm của đáy lớn như hình vẽ trên.

a) Phương trình đường thẳng BC là: $1,5x-13,4y+60,3=0$.

b) Tọa độ điểm D là $D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$.

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là 500 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là 780 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $B=(-13,4;3)$ và $C=(0;4,5)$ nên $\overrightarrow{BC}=(13,4;1,5)$ nên đường thẳng BC có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{BC}}=(-1,5;13,4)$

Phương trình đường thẳng BC là: $-1,5(x-13,4)+13,4(y-3)=0 \Leftrightarrow 1,5x-13,4y+60,3=0$

b) Hoành độ của điểm D là: $x_D=\sqrt{(4,5)^2-1}=\frac{\sqrt{77}}{2} \Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là: $V_1=\pi\int\limits_{-13,4}^{0}\left(\frac{1,5x+60,3}{13,4}\right)^2dx \approx 600\text{ cm}^3$

d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là: $V=V_1+(V_2-V_3)$ trong đó V_2 là nửa thể tích của khối cầu và V_3 là thể tích của chỏm cầu.

Nửa thể tích khối cầu là: $V_2=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.R^3=\frac{243\pi}{4}$

Thể tích chỏm cầu: $V_3=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx \Leftrightarrow V_3=\pi\int\limits_{R-h}^{R}(R^2-x^2)dx \Leftrightarrow V_3=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}$

$$\Leftrightarrow V_3=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(R^2(R-h)-\frac{(R-h)^3}{3}\right)\right] \Leftrightarrow V_3=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

Thay số ta có: $h = 4,5 - \dfrac{\sqrt{77}}{2}$; $R = 4,5 \Rightarrow V_3 = \dfrac{\left(729 - 83\sqrt{77}\right)\pi}{12}$

Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là:

$$V = 600 + \left[\frac{243\pi}{4} - \frac{\left(729 - 83\sqrt{77}\right)\pi}{12}\right] \approx 790\,\text{ml}.$$

Câu 20. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị “sự bất bình đẳng về thu nhập” của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = \left(0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723\right)^2, 0 \le x \le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất

a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100} \left[x - \left(0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723\right)^2\right] dx$$

d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập của 60% các gia đình của đầu tiên chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập là: $f(60) = 27,321529(\%)$.

b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo đến giàu, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau, mỗi nhóm chiếm 10% số gia đình của Hoa Kỳ.

Tổng thu nhập của 30% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2,3$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là: $f\left(30\right)=8,561476\left(\%\right)$.

Tổng thu nhập của 20% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là: $f\left(20\right)=5,774409\ \left(\%\right)$.

$\Rightarrow$ Tỷ lệ của tổng thu nhập các gia đình nhóm thứ 3 so với toàn bộ các gia đình là:

$f\left(30\right)-f\left(20\right)=2,787067(\%)$.

c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x.$$

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2005 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y=x \\ y=\left(0,00061x^2+0,0218+1,723\right)^2 \\ x=0;x=100 \end{cases} \Rightarrow S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x.$$

Cách 1:

Sử dụng máy tính cầm tay, ta thấy phương trình $\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x=0$ có hai ngiệm $x=a;x=b\ \left(a<b\right)$ thuộc $\left[0;100\right]$.

Xét dấu biểu thức $g\left(x\right)=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x$ ta được:

x	0		a		b		100
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra: $S=\int_0^{100}\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_0^{a}\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_a^{b}\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_b^{100}\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

$$=\left|\int_0^{a}g\left(x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^{b}g\left(x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_b^{100}g\left(x\right)\mathrm{d}x\right|=\int_0^{a}g\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_a^{b}g\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_b^{100}g\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Cách 2:

Sử dụng máy tính cầm tay ta được: $S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x\approx 2068,9$.

Kiểm tra phép tính của đề bài, ta có: $\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x=2059,3131$.

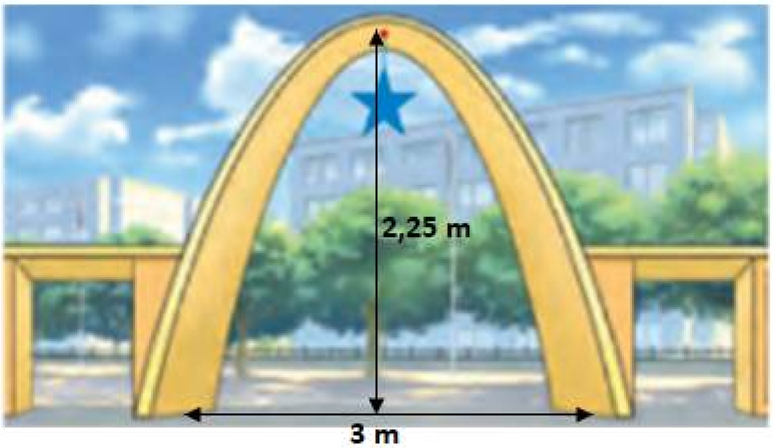
d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 là:

$$S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x\approx 2068,9.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 21. Trường Lê Hồng Phong – Tây Hòa muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê công nhân làm mỗi mét vuông là $1,5$ triệu đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả bao nhiêu triệu đồng ?

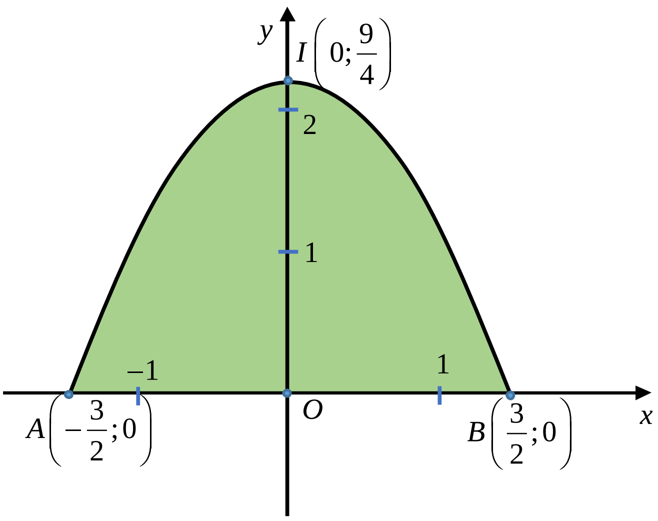


Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $6,75$

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

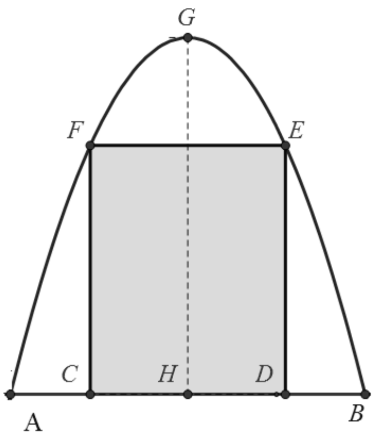
Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{9}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2}.1,5=6,75$ đồng.

Câu 22. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol cho ngôi nhà của mình như hình vẽ bên dưới.



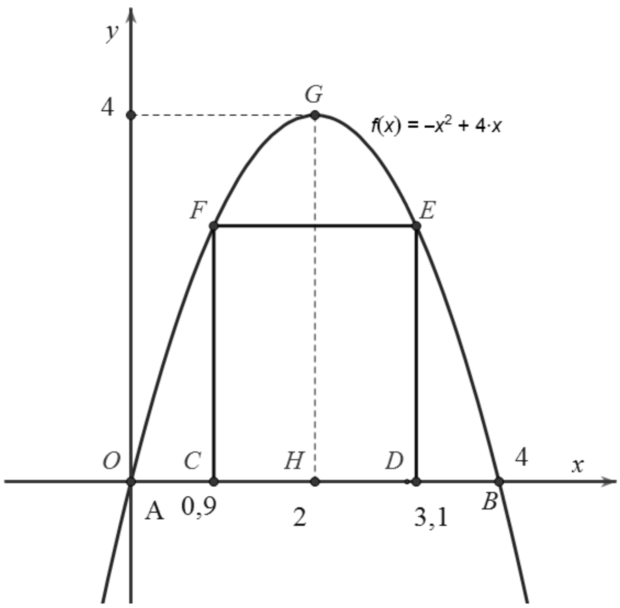
Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1,2$ triệu đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là $1,0$ triệu đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm cái cổng trên mà chị Minh Hiền phải trả là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất của triệu đồng)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $11,9$

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có $\begin{cases} c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \\ a.2^2+b.2+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y=f(x)=-x^2+4x$.

Diện tích của cả cổng là $S=\int_0^4 \left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_0^4=\dfrac{32}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

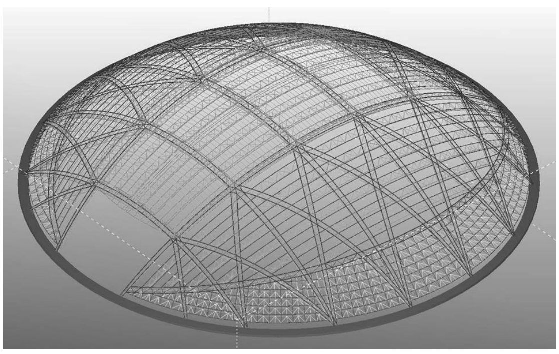
Mặt khác chiều cao $CF=DE=f(0,9)=2,79(\mathrm{m})$; $CD=4-2.0,9=2,2\ (\mathrm{m})$.

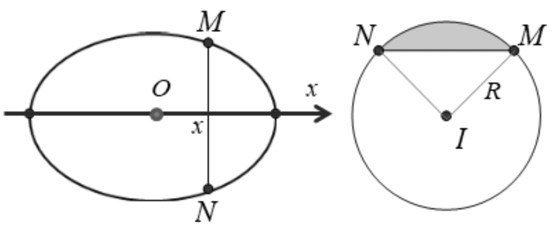
Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF}=CD.CF=6,138\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh}=S-S_{CDEF}=\dfrac{32}{3}-6,14=\dfrac{6793}{1500}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1,2+\dfrac{6793}{1500}.1\approx 11,9$ triệu đồng

Câu 23. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M,N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích phần không gian bên trong sân vận động bằng nhiêu kilômét vuông? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của kilômét vuông).

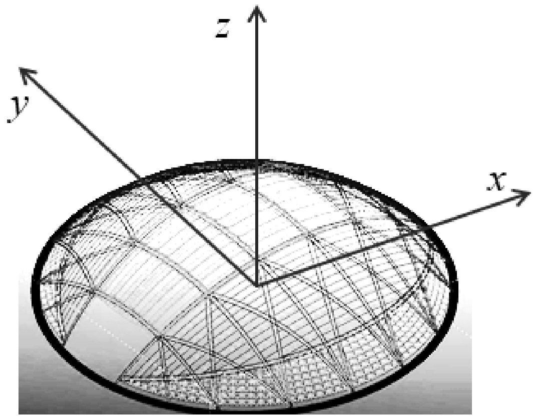


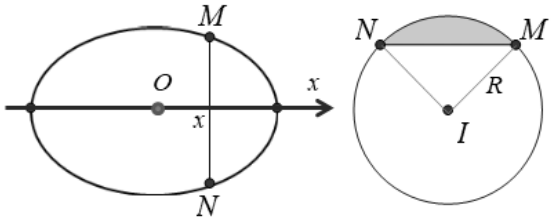


Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 116





Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O, MN) = x$

$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$

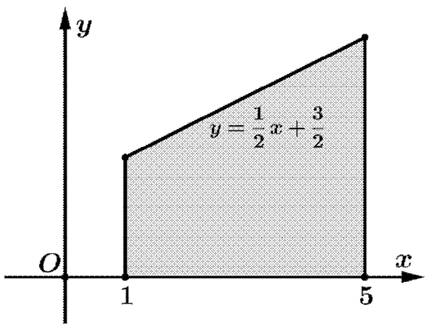
Lúc đó $MN = 2y = 2\sqrt{45^2\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$

$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2}.\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$

$S(x) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\frac{2025}{2}.\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$

Thể tích khoảng không cần tìm là: $V = \int_{-75}^{75}(\pi - 2)\frac{2025}{2}.\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586\left(m^3\right) \approx 116\left(km^3\right)$

Câu 24. Một khối gỗ khi cắt một bề mặt ta thu được thiết diện được cho bởi hình vẽ bên (đơn vị m^2). Diện tích của thiết diện đó bằng bao nhiêu m^2?



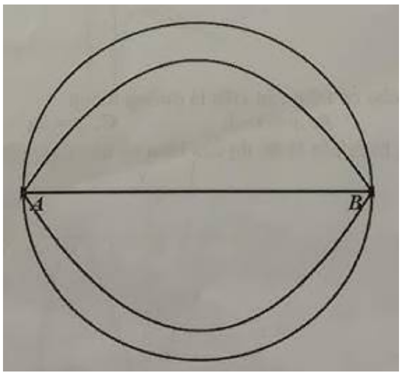
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 12

Diện tích của thiết diện đó là: $S=\int_1^5\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=12\left(m^2\right)$

Câu 25. Một khu vực công viên có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 400000 đồng một mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 1200000 đồng một mét vuông. Tính tổng chi phí (triệu đồng) để hoàn thành khu vực này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất của triệu đồng) ?

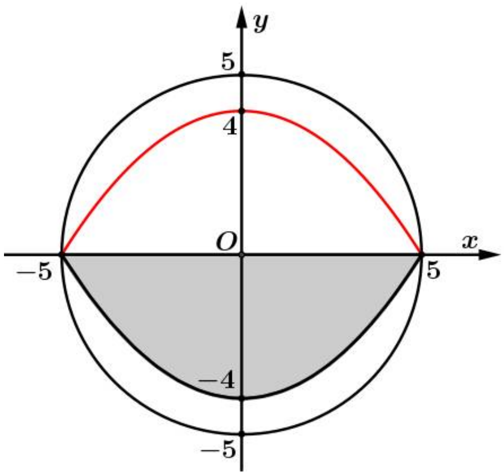


Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $51,6$

Xét hệ trục độ như hình vẽ.



Phương trình đường tròn là: $x^2+y^2=25$

Phương trình của Parabol có bề lõm hướng lên là: $y=\frac{4}{25}x^2-4$

Diện tích phần trồng hoa giới hạn bởi 2 parabol là:

$$S_1=2\int_{-5}^{5}\left|\left(\frac{4}{25}x^2-4\right)\right|\mathrm{d}x=4\int_0^5\left|\left(\frac{4}{25}x^2-4\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{160}{3}\left(m^2\right).$$

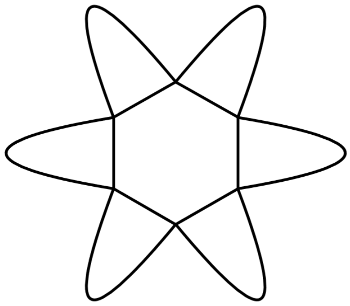
Diện tích toàn bộ phần hình tròn là: $S_2=25\pi\left(m^2\right)$

Diện tích phần còn lại để trang trí gốm sứ là: $S = S_2 - S_1 = 25\pi - \dfrac{160}{3}\left(m^2\right)$.

Vậy tổng chi phí để làm khu vực công viên là:

$\dfrac{160}{3}.0,4 + \left(25\pi - \dfrac{160}{3}\right).1,2 \approx 51,6$ (triệu đồng).

Câu 26. Để trang trí cho một phòng trong một tòa nhà, người ta vẽ lên tường một hình như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng 2 dm có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh 3 dm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình sau). Hãy tính diện tích của hình nói trên (kể cả hình lục giác đều) để mua sơn trang trí cho phù hợp (kết quả làm tròn đến hàng thập phân thứ nhất của dm^2)



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $34,4$

Hình lục giác đều có cạnh bằng $2\mathrm{dm}$.

Diện tích của hình lục giác đều có thể được tính bằng công thức: $S_{\text{Luc giac}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}.a^2$ với $a = 2\mathrm{dm}$

Thay vào công thức ta có: $S_{\text{Luc giac}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}.2^2 = 6\sqrt{3}\left(\mathrm{dm}^2\right)$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trung điểm của cạnh là AB, với $A(1,0), B(-1,0)$ và đỉnh $I(0,3)$ của parabol.

Phương trình của parabol có dạng: $y = ax^2 + b$

Do parabol đi qua các điểm A và B nên ta có: $y = -3x^2 + 3$

Diện tích mỗi cánh hoa được tính bằng tích phân: $S_{\text{Cánh hoa}} = \int_{-1}^{1}\left(-3x^2 + 3\right)\mathrm{d}x$

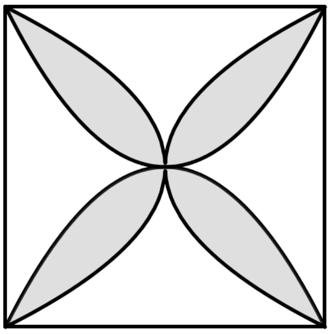
Tính tích phân: $S_{\text{cánh hoa}} = \left[-x^3 + 3x\right]\Big|_{-1}^{1} = (-1+3) - (1-3) = 4\mathrm{dm}^2$

Hình có 6 cánh hoa nên tổng diện tích của các cánh hoa là: $S_{\text{Tong cánh hoa}} = 6.4 = 24\ \mathrm{dm}^2$

Tổng diện tích của hình bao gồm cả hình lục giác và các cánh hoa là:

$$S_{\text{Tong}} = S_{\text{Luc giác}} + S_{\text{Tong cánh hoa}} = 6\sqrt{3} + 24 \approx 34,4\left(\mathrm{dm}^2\right)$$

Câu 27. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh $60\,\text{cm}$. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).

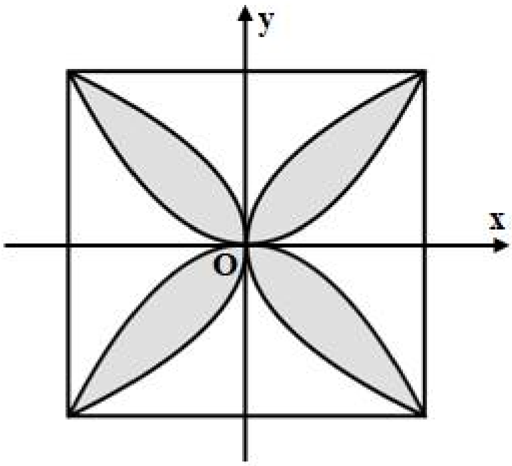


Tính diện tích phần cánh hoa của viên gạch (đơn vị cm^2).

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 1200



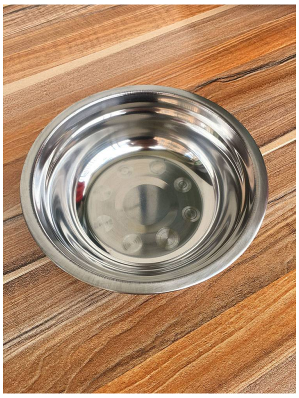
Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho tâm viên gạch trùng O như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10\,\text{cm} = 1\text{dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{3}$, $y = -\frac{x^2}{3}$, $x = -\frac{y^2}{3}$, $x = \frac{y^2}{3}$.

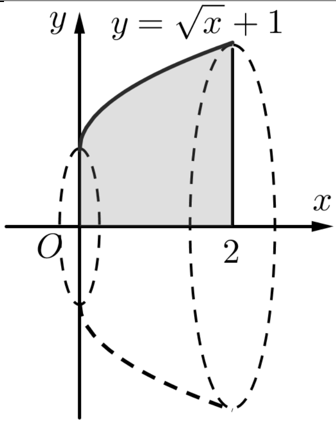
Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{3}$, $y = \sqrt{3x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng: $\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{x^2}{3}\right)\text{d}x = 3\left(\text{dm}^2\right) = 300\left(\text{cm}^2\right)$.

Vậy diện tích 4 cánh hoa trong viên gạch bằng: $4.300 = 1200\left(\text{cm}^2\right)$

Câu 28. Tính thể tích chứa được của một cái chậu inox to mà khách hàng đặt theo kích thước yêu cầu, biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y = \sqrt{x} + 1$, trục Ox và các đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox, đơn vị trên trục là decimet (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của dm^3).





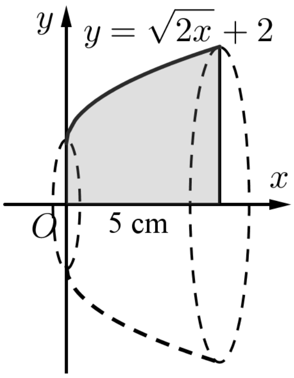
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $24,4$

Thể tích của chậu inox là: $V=\pi\int_0^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{2}+4\right)\approx 24,4\ (\mathrm{dm}^3)$.

Câu 29. Tính thể tích chứa được (dung tích) của một cái chén (bát), biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{2x}+2$ và trục Ox (như hình vẽ), bát có độ sâu 5 cm, đơn vị trên trục là centimet (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của cm^3).



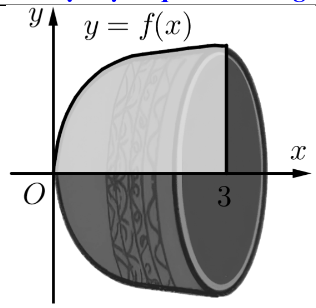
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 274

Thể tích của chén là: $V=\pi\int_0^5\left(\sqrt{2x}+2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{40}{3}\sqrt{10}+45\right)\approx 274\ (\mathrm{cm}^3)$

Câu 30. Xét chiếc chén trong một bộ ấm chén uống trà, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=0,14x^3-0,87x^2+1,92x+0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét). Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến phần chục của centimét khối).



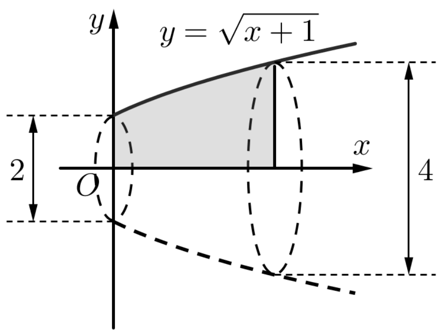
Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: $41{,}9$

Thể tích của chiếc chén là: $V = \pi\int\limits_0^3 \left(0{,}14x^3 - 0{,}87x^2 + 1{,}92x + 0{,}85\right)^2 dx \approx 41{,}9\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 31. Bác Hùng đặt người thợ gốm làm một cái chậu trồng cây, phần trong chậu cây có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng được tô đậm như hình sau quanh trục Ox (đơn vị trên trục là decimet), biết đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x+1}$, đáy chậu và miệng chậu có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Dung tích của chậu là bao nhiêu dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của dm^3)?



Trả lời: ………………..

Lời giải

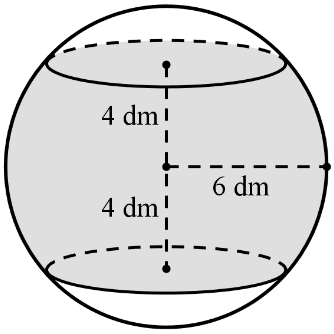
Đáp án: $23{,}6$

Với bán kính đáy chậu là 1dm thì $y = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

Với bán kính đáy chậu là 2 dm thì $y = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

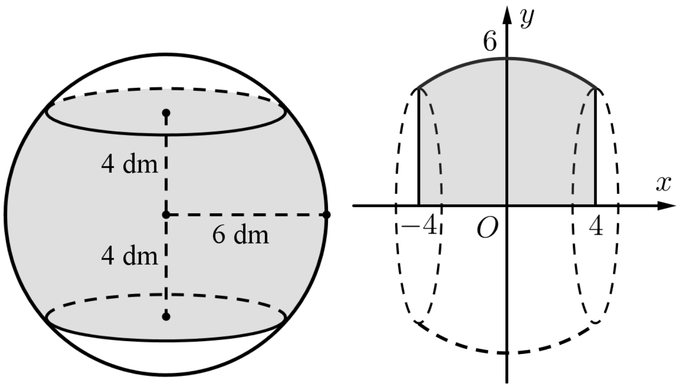
Thể tích của khối chậu là: $V = \pi\int\limits_0^2 \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 dx = \dfrac{15\pi}{2} \approx 23{,}6\left(\text{ dm}^3\right)$.

Câu 32. Một hình cầu có bán kính 6 dm, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng song song và cùng vuông góc với đường kính để làm mặt xung quanh của một chiếc lu chứa nước (như hình vẽ). Tính thể tích V (lít) mà chiếc lu chứa được, biết mặt phẳng cách tâm mặt cầu 4 dm (làm tròn đến hàng đơn vị của lít).



Trả lời: ………………..

Lời giải



Đáp án: 771

Thể tích cần tìm là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt{36-x^2}$, trục hoành và các đường thẳng $x=-4,\ x=4$ quanh trục hoành.

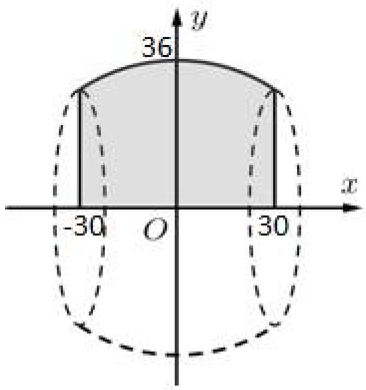
Do đó: $V=\pi\int_{-4}^{4}\left(36-x^2\right)dx=\dfrac{736\pi}{3}\approx 771$ lít.

Câu 33. Xét phần bên trong của một thùng rượu: là một khối tròn xoay có 2 đáy là hình tròn bằng nhau và có chiều cao là 60 cm, đường cong (bên trong) của thùng là một cung tròn của đường tròn bán kính là 36 cm. Thùng rượu này chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của lít)

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 188

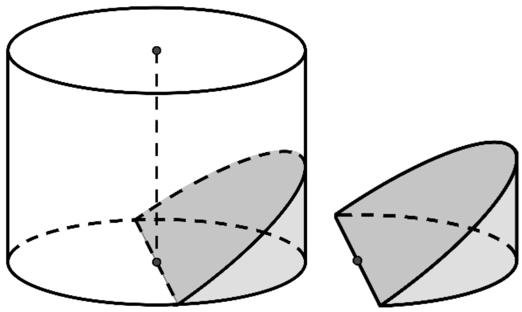


Phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 = 36^2 \Rightarrow y^2 = 36^2 - x^2$

Thể tích của thùng rượu là: $V = \pi \int_{-30}^{30} \left(\sqrt{36^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-30}^{30} \left(1296 - x^2\right) dx = 59760\pi \left(cm^3\right) \approx 188$ lít

Vậy thùng rượu chứa được tối ta 188 lít rượu.

Câu 34. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45°$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới). Tính thể tích (cm^3) của hình nêm.

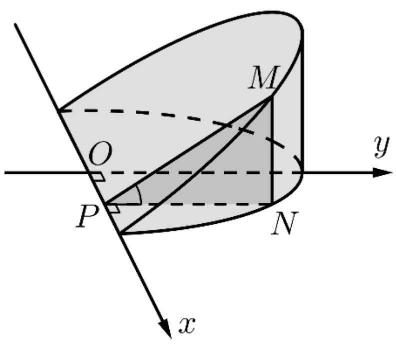


Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 2250

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y = \sqrt{225 - x^2}$, $x \in [-15;15]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [-15;15]$ cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

Ta có $NP = y$, $MN = NP.\tan 45° = y = \sqrt{225 - x^2}$. Khi đó $S(x) = \frac{1}{2}MN.NP = \frac{1}{2}(225 - x^2)$.

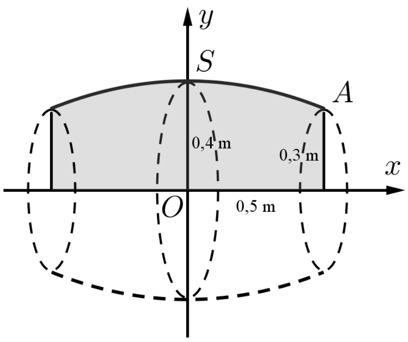
Suy ra thể tích hình nêm là: $V = \int_{-15}^{15} S(x)dx = 2250 \text{ cm}^3$.

Câu 35. Một thùng rượu (xét phần bên trong) có 2 đáy là các hình tròn với bán kính là 30 cm, thiết diện (P) vuông góc với trục nối tâm của 2 đáy và cách đều 2 đáy có bán kính là 40 cm (bên trong), chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh (bên trong) thùng rượu theo các đường parabol có đỉnh nằm trên mặt phẳng (P), hỏi dung tích của thùng rượu (đơn vị: lít) là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của lít)?

Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 425

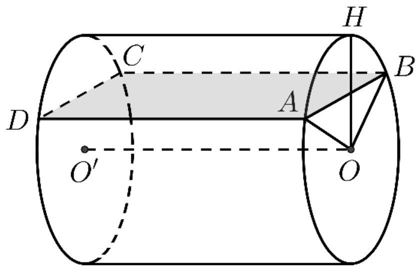


Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5; 0,3)$ và có đỉnh $S(0; 0,4)$ (hình vẽ). Khi đó, dung tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0,5$; $x = -0,5$ quay quanh trục Ox.

Tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$.

Suy ra $V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \text{ m}^3 \approx 425$ lít.

Câu 36. Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích (theo đơn vị m^3) của lượng dầu còn lại trong bồn (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của m^3).



Trả lời: ………………..

Lời giải

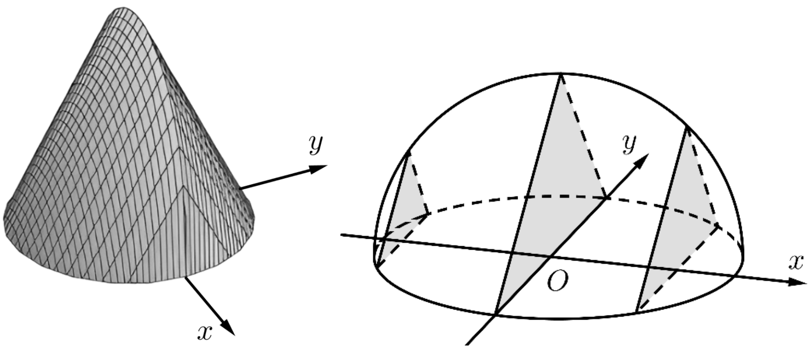
Đáp án: $12,6$

Dung tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V = \pi r^2 h = \pi.1^2.5 = 5\pi\ \text{m}^3$.

Thể tích phần đã rút dầu ra (phần trên mặt phẳng $(ABCD)$) là: $V_1 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).5\ \text{m}^3$.

Vậy thể tích lượng dầu còn lại là: $V_2 = V - V_1 \approx 12,6\ \text{m}^3$.

Câu 37. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Khi đó thể tích của vật thể có dạng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 259

Ta có $x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$.

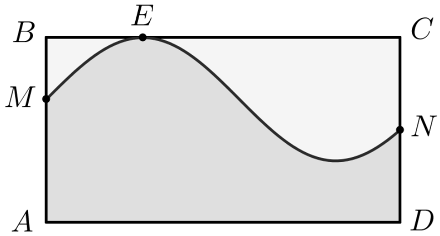
Suy ra thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{16 - x^2}$.

Do đó diện tích thiết diện là $S(x) = \left(2\sqrt{16 - x^2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\left(16 - x^2\right)$.

Thể tích cần tìm là $V = \int_{-4}^{4} S(x)dx = \sqrt{3}\int_{-4}^{4}\left(16 - x^2\right)dx = \frac{256\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\Rightarrow a = 256,\ b = 3 \Rightarrow S = a + b = 259$.

Câu 38. Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30$ cm, $AD = \dfrac{55\pi}{3}$ cm. Người ta cắt tấm tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn. Biết $AM = 20$ cm, $CN = 15$ cm, $BE = 5\pi$ cm. Tính thể tích (đơn vị: lít) của khối tròn xoay được tạo thành khi xoay miếng tôn lớn quanh trục AD (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của lít).

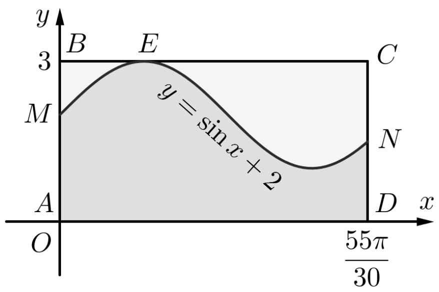


Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 83,8

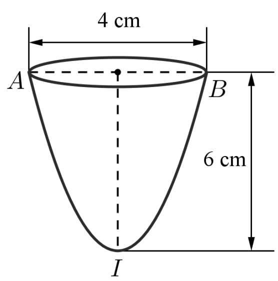
Chọn hệ trục Oxy với đơn vị trên trục là 10 cm như hình sau.



Khi đó đường cắt miếng tôn hình sin trên là đồ thị của hàm số $y = \sin x + 2$, $0 \le x \le \dfrac{55\pi}{30}$.

Thể tích cần tìm là $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{55\pi}{30}} (\sin x + 2)^2 \, dx \approx 83{,}8$ lít.

Câu 39. Một chiếc ly hình dạng tròn xoay, có đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích của chiếc ly đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của cm^3).

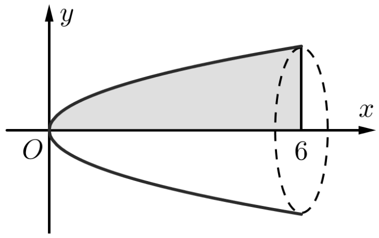


Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 37,7

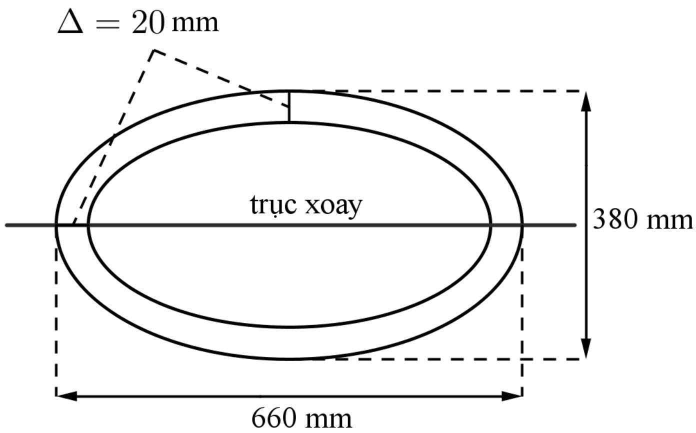
Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



Ta được phương trình parabol là $(P): y^2 = \frac{2}{3}x$ với $0 \le x \le 6$

Thể tích vật thể đã cho là: $V = \pi\int_0^6 \frac{2}{3}x\,dx = 12\pi \approx 37,7$ cm^3.

Câu 40. Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài × rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (đơn vị: lít) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Trả lời: ………………..

Lời giải

Đáp án: 18,8

Chọn hệ trục tọa độ Oxy thích hợp với đơn vị trên trục là decimet.

Phương trình elip lọt lòng: $(E): \frac{x^2}{3,1^2} + \frac{y^2}{1,7^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1,7\sqrt{1 - \frac{x^2}{3,1^2}}$.

Thể tích chứa nước của bồn rửa: $V = \frac{1}{2}.\pi\int_{-3,1}^{3,1} 1,7^2\left(1 - \frac{x^2}{3,1^2}\right)dx \approx 18,8$ lít.