

**Bài 1: ĐƠN THỨC****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

- *Đơn thức* là biểu thức đại số chỉ gồm một số hoặc một biến, hoặc có dạng tích của những số và biến.
- *Đơn thức thu gọn* là đơn thức chỉ gồm một số, hoặc có dạng tích của một số với những biến, mỗi biến chỉ xuất hiện một lần và đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.
- Tổng số mũ của các biến trong một đơn thức thu gọn với hệ số khác 0 gọi là **bậc** của đơn thức đó.
- Trong một đơn thức thu gọn, phần số còn gọi là *hệ số*, phần còn lại gọi là *phần biến*.
- Hai *đơn thức đồng dạng* là hai đơn thức với hệ số khác 0 và có phần biến giống nhau.
- Muốn cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

B. BÀI TẬP**Dạng 1. Nhận dạng đơn thức**

1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức?

- a) $12x^2y$ b) $x(y+1)$ c) $1-2x$ d) 18 e) $\frac{5}{2x}$

2. Biểu thức nào dưới đây **không** phải là đơn thức?

- a) $x^2 - y^2$ b) $x - y + xy$ c) $2x^2y$ d) $\frac{3}{4xy}$ e) $x(y+1)$

3. Cho biết phần hệ số, phần biến của mỗi đơn thức sau :

- a) $\frac{1}{3}xy^3$ b) $-\frac{3}{4}x^2y^2$ c) $5x^2y$ d) $-\frac{1}{2}xy^3$

4. Thu gọn các đơn thức sau:

- a) $2x^2y3xy^2$ b) $2xy\frac{4}{5}x^2y^310xyz$ c) $-10y^2 \cdot (2xy)^3 \cdot (-x)^2$

5. Xác định bậc của đơn thức.

- a) $2xy^2\frac{4}{3}x^2y^36x$ b) $\frac{4}{3}x^2y^2z^2\frac{3}{4}xyz$



c) $-4a^2x(-2bxy)^2\left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right)$ với a, b là hằng số.

Dạng 2. Đơn thức đồng dạng.

6. Sắp xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng

$$\frac{5}{4}x^2y; x^2y^2; -\frac{1}{2}x^2y; -2xy^2; x^2y; -\frac{2}{5}xy^2; 6x^2y^2$$

7. Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng

$$\frac{3}{2}xy; -\frac{1}{3}x^2z; \frac{3}{4}xyz; \frac{5}{6}xy; 7xyz; \frac{5}{6}x^2z; -3xy.$$

8. Trong các đơn thức sau, đơn thức nào đồng dạng với đơn thức $-3x^2yz$?

a) $-3xyz$ b) $\frac{2}{3}x^2yz$ c) $\frac{3}{2}yzx^2$ d) $4x^2y$

9. Trong các đơn thức sau, đơn thức nào **không** đồng dạng với đơn thức $2xy^2z^3$?

a) $3x^2yz$ b) $-4y^2z^3x$ c) $5xyz$ d) $-6z^3xy^2$

Dạng 3. Cộng trừ đơn thức đồng dạng.

10. Tính

a) $2x^2y + \frac{2}{3}x^2y$; b) $3xy^3 + 5xy^3 + xy^3$
 c) $3xy^2z^3 - 7xy^2z^3$; d) $3xy^2 + \frac{1}{4}xy^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)xy^2$

11. Tính:

a) $3xy^2 + \frac{1}{3}xy^2$ b) $2x^2y^2 + 3x^2y^2 + x^2y^2$
 c) $3x^2yz^2 - 4x^2yz^2$ d) $2x^2y + \frac{2}{3}x^2y + \frac{-1}{3}x^2y$

Dạng 4: Tìm đơn thức thoả mãn đẳng thức

12. Xác định đơn thức M để

a) $2x^4y^3 + M = -3x^4y^3$ b) $2x^3y^3 - M = 4x^3y^3$



c) $3x^2y^3 + M = -x^2y^3$

d) $7x^2y^2 - M = 3x^2y^2$

13. Xác định đơn thức M để

a) $2x^4y^4 + 3M = 3x^4y^4 - 2x^4y^4$

b) $x^2 - 2M = 3x^2$

Dạng 5: Tính giá trị của đơn thức. Thu gọn rồi tính giá trị của đơn thức

14. Tính giá trị biểu thức $P = 2011x^2y + 12x^2y - 2015x^2y$ tại $x = -1; y = 2$

15. Tính giá trị biểu thức $P = 2018xy^2 + 16xy^2 - 2016xy^2$ tại $x = -2; y = \frac{1}{3}$

16. Tính giá trị của biểu thức M biết rằng.

a) $15x^2y^4 - M = 10x^2y^4 + 6x^2y^4$ tại $x = -\frac{1}{2}; y = 2$

b) $40x^3y + M = 20x^3y + 15x^3y$ tại $x = -2; y = \frac{1}{5}$

17. Cho đơn thức $A = \left(\frac{2}{3}x^2y^2\right)\left(\frac{-6}{5}x^4y^3\right)$.

a) Thu gọn rồi tìm bậc của đơn thức A .

b) Tính giá trị của đơn thức A tại $x = -1, y = -2$.

**Bài 2: ĐA THỨC****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

- Đa thức là tổng của những đơn thức; mỗi đơn thức trong một tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.
- Đa thức thu gọn là đa thức không có hai hạng tử nào đồng dạng.
- ⊗ Bậc của một đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.
- ⊗ Một số khác 0 tùy ý được coi là một đa thức bậc 0.
- ⊗ Số 0 cũng là một đa thức, gọi là đa thức không. Nó không có bậc xác định.

B. BÀI TẬP**Dạng 1. Nhận dạng đa thức**

1. Biểu thức nào là đa thức trong các biểu thức sau?

a) $x^2y - 2 + 3xy^2$; b) $\frac{x}{y} - 2x^2$; c) 2018; d) $x(x + y)$.

2. Biểu thức nào sau đây **không** phải là đa thức trong các biểu thức sau?

a) $x - 2 + \frac{3}{x}$; b) $xy - 2x^2$; c) $x^2 - 4$; d) $\frac{x^2 + 1}{xy}$.

Dạng 2. Thu gọn đa thức

3. Thu gọn các đa thức sau

a) $A = -x^2 - 2x + 2x^2 + 5x + 2$;

b) $B = -2xy + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + xy$

c) $C = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - z^2$;

d) $D = xy^2z + 2xy^2z - xyz - 3xy^2z + xy^2z$.

4. Thu gọn các đa thức sau

a) $A = 2x^2 + x - x^2 + 4x + 6$;

b) $B = 4xy + \frac{1}{2}x^2y - xy + \frac{3}{2}x^2y$;

c) $C = x^2 - y^2 + z^2 - x^2 + y^2 - z^2 + x^2 + y^2 + z^2$;

d) $D = 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz$.



Dạng 3. Thu gọn đa thức

5. Tìm bậc của các đa thức sau:

a) $A = -x^2 - 2x + 2x^2 + 5x + 2;$

b) $B = -2xy + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + xy;$

c) $C = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - z^2;$

d) $D = xy^2z + 2xy^2z - xyz - 3xy^2z + xy^2z$

6. Tìm bậc của các đa thức sau

a) $A = x^2 - y^2 + z^2 - x^2 + y^2 - z^2 + x^2 + y^2 + z^2;$

b) $B = 2x^2 + x - x^2 + 4x + 6;$

c) $C = 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz.$

d) $D = 4xy + \frac{1}{2}x^2y - xy + \frac{3}{2}x^2y;$

7. Thu gọn các đa thức sau rồi tìm bậc của chúng

a) $A = 3 + 3x^2 - 2x + 2x^2;$ b) $B = 2x^2y^3 + 3x^4 - 7x^2 + 6x^4 - x^2y^3.$

c) $C = -x^2 + 5x^2 - 4x;$ d) $D = 4x^2y^3 + x^4 - 2x^2 + 6x^4 - x^2y^3.$

Dạng 4. Tính giá trị của đa thức

8. Cho đa thức $A = x^3y^4 - 5y^8 + x^3y^4 + xy^4 - xy^4 + 5y^8$

a) Thu gọn rồi tìm bậc của đa thức A

b) Tính giá trị của đa thức A khi $x = 1; y = -1$

9. Thu gọn $B = 3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 - 3x^5y^3$ rồi tính giá trị tại $x = 1; y = -2$

10. Tính giá trị mỗi đa thức sau :

a) $A = 6xy^2 + 7xy^3 + 8x^2y^3;$ tại $x = 2; y = \frac{1}{2}$



b) $B = 7x^2y - 4x^6 + 3y^2z + 4x^6$; tại $x = 2$; $y = 1$

11. Tính giá trị của các đa thức sau:

a) $6x - 12(y + 2) + 6y$ biết $x = y - 1$.

b) $6xy - 4x^2 - 2y^2 - 3$ biết $x = y$.

c) $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4 + \dots + x^{2019}y^{2019}$ tại $x = 1$; $y = -1$.

d) $3x^4 + 5x^2y^2 + 2y^4 + 2y^2$, biết rằng $x^2 + y^2 = 2$.

12. Tính giá trị của các đa thức sau:

a) $A = x^2 + 2xy - 3x^2 + 2y^2 + 3x^2 - y^2$ tại $x = 5$; $y = 4$

b) $B = xy - x^2y^2 + x^4y^4 - x^6y^6 + x^8y^8$ tại $x = -1$; $y = -1$.

c) $C = xyz + x^2y^2z^2 + x^3y^3z^3 + \dots + x^{10}y^{10}z^{10}$ tại $x = y = z = -1$.

**Bài 3: PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

• **Cộng (hay trừ)** hai đa thức tức là thu gọn đa thức nhận được sau khi nối hai đa thức đã cho bởi dấu “+” (hay dấu “-”)

B. BÀI TẬP**Dạng 1. Tính tổng, hiệu của hai đa thức.**

1. Tính tổng $A + B$ và hiệu $A - B$ của hai đa thức A, B trong các trường hợp sau:

a) $A = 2x + 3y$ và $B = 2x - y$.

b) $A = x^2y + x^3 - xy^2 + 2$ và $B = x^3 + xy^2 - x^2y - 7$.

c) $A = 2x^2 - yz - z^2 + 1$ và $B = 4yz + 3x^2 + z^2 - 2$.

d) $A = x^2y + \frac{3}{2}xy^3 - \frac{11}{2}x^3y^2 + x^3$ và $B = \frac{1}{2}xy^3 - x^2y + \frac{9}{2}x^3y^2$.

2. Thực hiện phép tính sau:

a) $A = (x^2 - xy + y^2) - (-x^2 + 7xy - 5y^2)$.

b) $B = (xy^2 - 3x^2y) - (-2xy^2 - 5x^2y) + (x^2y - 3xy^2)$.

3. Thực hiện phép tính sau:

a) $A = (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + 2xy + y^2)$

b) $B = \left(\frac{1}{2}xy - 3xy^2\right) + (2xy^2 + 3xy) - \frac{1}{2}xy$.

4. Cho các đa thức

$$M = 2x^3 - 2x^2y + xy + 1; N = 3x^2y + 2xy - 2 \text{ và } P = x^3 - x^2y - 3xy + 1.$$

Tính: a) $M + N$ b) $M - P$ c) $M - 2P$ d) $M + N + P$

5. Cho các đa thức $M = 3x^3 - x^2y + 2xy + 3$; $N = x^2y - 2xy - 2$ và

$$P = 3x^3 - 2x^2y - xy + 3.$$

Tính: a) $M + N$ b) $M - P$ c) $M - 2P$ d) $M + N + P$



Dạng 2. Tìm đa thức thoả mãn đẳng thức

6. Tìm đa thức A, B biết

a) $6x^2 - 3xy^2 + A = x^2 + y^2 - 2xy^2$.

b) $B - (2xy - 4y^2) = 5xy + x^2 - 7y^2$.

7. Cho các đa thức $A = 4x^2 + 3y^2 - 5xy; B = 3x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2$.

Tìm đa thức C sao cho: a) $C = A + B$

b) $C + A = B$

8. Tìm đa thức A, B biết

a) $A + x^2 - y^2 = x^2 - 2y^2 + 3xy - 2$.

b) $B - (5x^2 - 2xyz) = 2x^2 + 2xyz + 1$.

9. Viết đa thức $x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x^4 + 1 - x$ thành

a) Tổng của hai đa thức;

b) Hiệu của hai đa thức

10. Viết đa thức $4x^5 + x^4 - 3x^2 - 4x^4 + 5 + x$ thành

a) Tổng của hai đa thức;

b) Hiệu của hai đa thức

11. Cho hai đa thức:

$$A = 5x^3 - 2x - 3 + x^2 + x + 4 - 2x^2 + x^4;$$

$$B = x^4 - 2x + 4 + x^3 + 3x^2 + 4x - 2 - x^2$$

Tính $A + B, A - B$

12. Cho các đa thức : $A = 5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2$;

$$B = -8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2;$$

$$C = x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2$$

Hãy tính:

a) $A - B - C$

b) $B + A - C$

c) $C - A - B$

**Bài 4: PHÉP NHÂN ĐA THỨC****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

- Muốn nhân hai đơn thức, ta nhân hai hệ số với nhau và nhân hai phần biến với nhau.
- Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.
- Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

B. BÀI TẬP**Dạng 1. Nhân hai đơn thức**

1. Tìm tích của các đơn thức và tìm bậc của đơn thức thu được.

a) $-\frac{1}{2}x^2y$ và $2xy^3$

b) $2x^3y$ và $-\frac{1}{4}x^3y^5$.

2. Tìm tích của các đơn thức và tìm bậc của đơn thức thu được.

a) $-\frac{2}{3}xy^2$ và $3x^2y$

b) $3x^2y$ và $-\frac{1}{3}xy^3$.

3. Thu gọn đơn thức rồi tìm bậc của đơn thức thu gọn.

a) $xy \cdot (-2y) \cdot 3x$

b) $-\frac{3}{2}x^2y \cdot 2xy$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2$

d) $\left(-\frac{1}{3}y\right)^2 \cdot (ax)^2$ (a là hằng số)

4. Xác định bậc của đơn thức.

a) $2xy^2 \cdot \frac{4}{3}x^2y^3 \cdot 6x$

b) $\frac{4}{3}x^2y^2z^2 \cdot \frac{3}{4}xyz$

c) $-4a^2x \cdot (-2bxy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right)$ với a, b là hằng số.

Dạng 2. Nhân đơn thức với đa thức

5. Thực hiện phép tính:

a) $(-2x^2)(x^2 - 2x + 3)\frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)\left(x^2y - xy + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$



6. Thực hiện phép tính:

a) $x(x^2 + 1) - 3x(3x - 2x^2)$

b) $(xy^2)(x - xy) - x(x + y) + yx(2x^2 - 2xy^2)$

7. Tìm giá trị biểu thức:

a) $A = 2x(3x^2 + 5) - x(3x - x^2) - x^2$ tại $x = 2$.

b) $B = 6(x^2 - x) - x^2(4x - 2) + 4x(x^2 - 2x + 3)$ tại $x = -4$

c) $C = x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$ tại $x = 5$; $y = -1$

8. Tìm biết

a) $-2x(x + 3) + x(2x - 1) = 10$

b) $\left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{9x}{2} + \frac{1}{4}\right) - (3x^2 + x + 2) = 3$

Dạng 3. Nhân đa thức với đa thức

9. Thực hiện phép tính:

a) $(-2x + 1)\left(2x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right)$

b) $(x + y^2)\left(x^2 + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}xy\right)$

c) $(-x)(2x + 2)(x^2 - x + 1)$

d) $(x + y)\left(x + \frac{1}{2}y\right)\left(1 - \frac{xy}{3}\right)$

10. Chứng minh rằng:

a) $(3x + 2y)(5x - y) - y^2 = 15x^2 + 7xy - 3y^2$;

b) $(x + y)(x - y) - 9y^2 = (x - 2y)(x + 5y) - 3xy$;

11. Các biểu thức sau biểu thức nào có giá trị không phụ thuộc vào giá trị của biến ?

a) $-5x(5x - 2) + (5x + 1)(5x - 1) - 10x$

b) $(x + 8)(x - 4) - x(x - 12) + 32$

c) $(2x + 3)(3x - 1) - 6x(x - 2) - 19(x - 5)$.



12. Tìm giá trị biểu thức

- a) $A = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ với $x = 3$.
- b) $B = (x + 1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$ với $x = 2$.
- c) $C = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ với $x = 2$.
- d) $D = 2x(10x^2 - 5x - 2) - 5x(4x^2 - 2x - 1)$ với $x = -5$.
- e) $E = (x - y)(x^2 - xy) - x(x^2 + 2y^2)$ tại $x = 2; y = -3$.

13. Tìm x , biết

- a) $(x + 2)(x + 3) - (x - 2)(x + 5) = 6$.
- b) $(3x + 2)(2x + 9) - (x + 2)(6x + 1) = (x - 1) - (x - 6)$.
- c) $3(2x - 1)(3x - 1) - (2x - 3)(9x - 1) = 0$.

14. Tìm x , biết:

- a) $(1 - 2x)(x + 3) + (x + 1)(2x - 1) = 14$
- b) $(3x^2 + x + 2) - (2x + 1)(2 + x) - (x + 4)(x - 5) = 5$
- c) $3x^2 + 4(x - 1)(x + 1) - 7x(x - 1) = x + 12$
- d) $(2x + 3)(x + 4) + (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4)$

15. a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì

$$A = (2 - n) \cdot (n^2 - 3n + 1) + n(n^2 + 12) + 8 \text{ chia hết cho } 5$$

- b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $(a - 1) \cdot (b - 1) \cdot (c - 1) = 0$.



Bài 5: PHÉP CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• Chia đơn thức cho đơn thức

☼ Đơn thức A chia hết cho đơn thức B ($B \neq 0$) khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A .

☼ Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp chia hết), ta làm như sau:

❶ Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B .

❷ Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của từng biến đó trong B

❸ Nhân các kết quả tìm được với nhau.

• Chia một đa thức cho một đơn thức

☼ Đa thức A chia hết cho đơn thức B nếu mọi hạng tử của A đều chia hết cho B .

☼ Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp chia hết), ta chia từng hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Chia đơn thức cho đơn thức.

1. Thực hiện các phép tính chia:

a) $x^{24} : (-x)^{16}$

b) $x^{581} : (-x)^{469}$

c) $19t^8 : (3t)^2$;

d) $\frac{25}{4}(-u^3)^5 : \frac{5}{8}(-u)^2$.

2. Thực hiện phép tính:

a) $(3x^3y^4) : (-5xy^2)$

b) $(-4x^3y^5) : \left(-\frac{1}{2}x^3y\right)$

c) $5x^2y^2 + 10x^2y^2 : (-5x^2y^2)$

3. Thực hiện các phép tính chia:

a) $x^{n+19} : x^{14}$ ($n \in N$)

b) $x^{94} : x^{17} : x^{65}$

4. Chứng minh rằng kết quả của biểu thức sau đây không âm với mọi giá trị của biến:

$$A = (-20x^6y^3) : (-4x^2y)$$



5. Tính giá trị biểu thức:

a) $A = 15x^5y^3 : 10xy^2$ tại $x = -3$ và $y = \frac{2}{3}$;

b) $B = -(x^3y^5z^2) : (-x^2y^3z)^3$ tại $x = 1, y = -1$ và $z = 100$.

c) $C = \frac{3}{4}(x-2)^3 : -\frac{1}{2}(2-x)$ tại $x = 3$;

d) $D = (x-y+z)^5 : (-x+y-z)^3$ tại $x = 17, y = 16$ và $z = 1$.

6. Tìm điều kiện của n để biểu thức A chia hết cho biểu thức B trong các trường hợp sau:

a) $A = 14x^8y^n$ và $B = -7x^7y^4$; b) $A = 20x^5y^{2n}$ và $B = 3x^2y^2$.

7. Tìm số nguyên dương n để $5^{n-1}y^6$ chia hết cho $3x^3y^{n+2}$

8. Tìm các giá trị nguyên của n để hai biểu thức A và biểu thức B đồng thời chia hết cho biểu thức C biết:

a) $A = x^6y^{2n-6}, B = 2x^{3n}y^{18-2n}$ và $C = 5x^2y^4$;

b) $A = 20x^n y^{2n+3}z, B = 21x^6 y^{3-n}t$ và $C = 20x^{n-1}y^2$.

Dạng 2. Chia đa thức cho đơn thức.

9. Làm tính chia:

a) $(2x^3 + 3x^4 - 12x^2) : x$

b) $(4x^2y^3 - 9x^2y^2 + 25xy^4) : 2xy^2$.

c) $(-5x^3y^3 + 14x^5y - 8x^2y^3) : 3x^2y$;

d) $(2x^3y^4z^2 - x^2y^5z - 3x^4y^4z^3) : \frac{1}{3}xy^3z$.

10. Tính đa thức M biết: $5x^3.M = 25x^6 - 30x^5 + 10x^3$

11. Tìm đa thức A, B , biết :

a) $6x^4.A = 24x^9 - 30x^8 + \frac{1}{2}x^5$;

b) $B.(-2,5x^3y^2) = 5x^6y^4 + 7,5x^5y^3 - 10x^3y^2$

12. Tính giá trị biểu thức:

a) $A = (15x^5y^3 - 10x^3y^2 + 20x^4y^4) : 5x^2y^2$ tại $x = -1; y = 2$.

b) $B = \left[(2x^2y)^2 + 3x^4y^3 - 6x^3y^2 \right] : (xy)^2$ tại $x = y = -2$.

13. Tính giá trị biểu thức



a) $A = (20x^5y^4 + 10x^3y^2 - 5x^2y^3) : 5x^2y$ tại $x = 1; y = -1$.

b) $B = (-2x^2y^2 + xy^2 - 6xy) : \frac{1}{3}xy = -6xy + 3y - 18$ tại $x = -\frac{1}{2}; y = 1$.

c) $C = \left(\frac{1}{5}x^2y^5 - \frac{2}{5}x^5y^4\right) : 2x^2y^2$ tại $x = -5; y = 10$.

d) $D = (7x^5y^4z^3 - 3x^4z^2 + 2x^2y^2z) : x^2yz$ tại $x = -1; y = 1; z = 2$.

14. Tìm x biết:

a) $(4x^4 + 3x^3) : (-x^3) + (15x^2 + 6x) : 3x = 0$

b) $(42x^3 - 12x) : (-6x) + 7x(x + 2) = 8$

c) $(25x^2 - 10x) : (-5x) - 3(x - 2) = 4$

15. Làm tính chia:

a) $\left[12(x + y)^3 - 3(x + y)^2\right] : 3(x + y)$; Hướng dẫn đặt $t = x + y$

b) $\left[15(x - y)^3 + 12(y - x)^2 - x + y\right] : (3y - 3x)$; Hướng dẫn đặt $t = y - x$

16. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \left[12(2x + 3y)^3 - 18(2x + 3y)^2\right] : (-6x - 9y)$ tại $x = \frac{3}{2}; y = 1$.

b) $B = \left[(2x - y)^4 + 8(y - 2x)^2 - 2x + y\right] : (2y - 4x)$ tại $x = 1; y = -2$.

a) Hướng dẫn đặt $t = 2x + 3y$

b) Hướng dẫn đặt $t = 2x - y$



**Bài 6: HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG. BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

• *Hằng đẳng thức* là đẳng thức mà hai vế luôn cùng nhận một giá trị khi thay các chữ trong đẳng thức bằng các số tùy ý.

• *Hiệu hai bình phương*

Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

• *Bình phương của một tổng*

Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

• *Bình phương của một hiệu*

Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

B. BÀI TẬP**Dạng 1. Nhận dạng đẳng thức**

1. Những đẳng thức nào sau đây là hằng đẳng thức

a) $2x^3y(2x^2 - 3y + 5yz) = 4x^5y - 5x^3y^2 + 10x^3y^2z$

b) $\frac{-1}{3}y^2(6y - 3) - y\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(y - 8) = -2y^3 - 4$

c) $\left(\frac{1}{3}x + 2\right)(3x - 6) = x^2 + 4x + 12$

d) $(x + 3)(x - 1) = 11 + x(x - 5)$

Dạng 2: Biến đổi các biểu thức

2. Thực hiện phép tính:

a) $(-3x + 2y)^2$

b) $(-x - xy)^2$

c) $x^2 - 4y^2$

d) $(x + y)^2 - (2 - y)^2$

3. Thực hiện phép tính:

a) $(2x + 3)^2$;

b) $(6 - 3u)^2$;

c) $(y - 4)(y + 4)$;

d) $\left(\frac{a}{2} - 4\right)^2$.

4. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(y - 2xy)^2$;

b) $16\left(\frac{-1}{4}x + \frac{4}{5}y\right)^2$;



c) $\left(-\frac{1}{3}ab^2 + c^3\right)\left(-\frac{1}{3}ab^2 - c^3\right);$

d) $\left(a + \frac{2}{3}\right)^2\left(a - \frac{2}{3}\right)^2.$

5. Tính:

a) $(a + b + c)^2$

b) $(a - b + c)^2$

Dạng 3: Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng, bình phương của một hiệu.

6. Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu:

a) $x^2 + 2x + 1;$

b) $x^2 - 8x + 16;$

c) $\frac{x^2}{4} + x + 1;$

d) $4x^2 + 4y^2 - 8xy;$

7. Viết các biểu thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc hiệu:

a) $4x^2 + 4x + 1;$

b) $9x^2 - 12x + 4;$

c) $ab^2 + \frac{1}{4}a^2b^4 + 1;$

d) $16uv^2 - 8u^2v^4 - 1;$

8. Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu.

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $25x^2 - 10xy + y^2$

c) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

d) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}xy + 25y^2.$

Dạng 4: Rút gọn biểu thức

9. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (m - n)^2 + 4mn;$

b) $B = (6z - 2)^2 + 4(3z - 1)(2 + t) + (t + 2)^2.$

c) $C = (2a + b)^2 - (b - 2a)^2;$

d) $D = (3a + 2)^2 + 2(2 + 3a)(1 - 2b) + (2b - 1)^2.$

10. Rút gọn biểu thức :

a) $(3x + 2)^2 + (4x - 1)^2 + (2 + 5x)(2 - 5x)$

b) $(x + y - z)^2 + 2(x + y - z)(z - y) + (z - y)^2$

Dạng 5. Tính nhanh, tính nhẩm

11. Tính nhanh:

a) $21^2;$

b) $62.58;$

12. Tính nhanh:

a) $199^2;$

b) $99^2;$

c) $499^2;$

d) $299.301.$



Dạng 6: Chứng minh bất đẳng thức; tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức

Phương pháp giải: Sử dụng các hằng đẳng thức và chú ý rằng $A^2 \geq 0$ và $-A^2 \leq 0$ với A là một biểu thức bất kỳ.

13. a) Chứng minh rằng các biểu thức sau dương với mọi x

$$A = x^2 + 8x + 17 ; \quad B = x^2 - 10x + 29.$$

b) Chứng minh rằng các biểu thức sau âm với mọi x .

$$C = -x^2 + 2x - 5 ; \quad D = -x^2 + x - 1.$$

14. Tìm giá trị nhỏ nhất của các đa thức:

a) $A = x^2 - 3x + 10$;

b) $B = y^2 + 8y + 15$;

c) $C = 2x^2 + 5y^2 + 4xy + 8x - 4y - 100$.

d) $D = u^2 + v^2 - 2u + 3v + 15$;

15. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau : $A = 4x^2 - 4x + 2023$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau : $B = -x^2 + 5x - 127$.

16. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $A = -x^2 - 2x + 5$

b) $B = 9x - 3x^2 + 4$

17. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = 8x^2 - 8x + 14$

b) $B = x^2 + x + 2$



Bài 7: LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• **Lập phương của một tổng**

Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

• **Lập phương của một hiệu**

Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Triển khai biểu thức

1. Thực hiện phép tính:

- | | |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $(x + 3)^3$; | b) $\left(x - \frac{2}{5}\right)^3$; |
| c) $\left(3m^2 + \frac{n}{4}\right)^3$; | d) $\left(\frac{-2}{3}u^3 - \frac{6}{5}v^2\right)^3$; |

2. Thực hiện phép tính:

- | | |
|--------------------|---------------------------------------------------|
| a) $(3a + 1)^3$ | b) $(4 - 2b)^3$; |
| c) $(2c - 3d)^3$; | d) $\left(\frac{3x}{y} - \frac{2y}{x}\right)^3$. |

3. Thực hiện phép tính:

- | | |
|--------------------------|---------------------------------------------------------|
| a) $(2x + 1)^3$ | b) $(x - y^2)^3$ |
| c) $(3x^2y^3 + z^4)^3$; | d) $\left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{y^3}{z^2}\right)^3$; |

Dạng 2. Viết các biểu thức dưới dạng lập phương của một tổng hoặc hiệu:

4. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------|
| a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ | b) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$ |
| c) $8x^3 - 12x^2y^2 + 6xy^4 - y^6$ | d) $-x^3 + 6x^2 - 12x + 8$. |

5. Viết các biểu thức dưới dạng lập phương của một tổng hoặc hiệu:

- | | |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| a) $a^3 + 12a^2 + 27a + 64$; | b) $-b^3 + 6b^2 - 12b + 8$; |
| c) $(m - n)^6 - 6(m - n)^4 + 12(m - n)^2 - 8$; | d) $\frac{8}{27}a^3 - 8a^2b + 8b^2a - 8b^3$. |

6. Viết các biểu thức dưới dạng lập phương của một tổng hoặc hiệu:

- | | |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\frac{x^3}{8} + \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{3}{2}xy^4 + y^6$; | b) $m^3 + 9m^2n + 27mn^2 + 27n^3$; |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|



c) $8u^3 - 48u^2v + 96uv^2 - (4v)^3$;

d) $(z - t)^3 + 15(z - t)^2 + 75(z - t) + 125$.

Dạng 3. Rút gọn biểu thức

7. Rút gọn biểu thức sau

a) $A = (x - 1)^3 - (x + 1)^3$

b) $B = (x + 1)^3 + 3(x + 1)^2(x - 1) + 3(x + 1)(x - 1)^2 + (x - 1)^3$

c) $C = (x - y)^3 - 3(x - y)^2x + 3(x - y)x^2 - x^3$

8. Rút gọn biểu thức:

a) $A = (a + b)^3 + (a - b)^3$;

b) $B = (x - z)^3 - 3(z - x)^2(a + b) + 3(x - z)(a + b)^2 - (a + b)^3$;

c) $C = 6(c - d)(c + d)^2 + 12(c - d)^2(c + d) + (c + d)^3 + 8(c - d)^3$;

d) $D = (m - n)^3 - (n + p)^3 - 3(n + p)^2 \cdot (n - m) + 3(n + p)(n - m)^2$.

Dạng 4. Tính giá trị của biểu thức

9. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ tại $x = -3$

b) $B = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$ tại $x = 5$

c) $C = (x - 3y)^3 + 3(x - 3y)^2(x + y) + 3(x - 3y)(x + y)^2 + (x + y)^3$ tại $x = 1; y = 1$

10. Tính giá trị biểu thức:

a) $A = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ tại $x = 48$;

b) $B = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$ tại $x = 4; y = 6$;

c) $C = \left(\frac{x}{2} - y\right)^3 - 6\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + 12\left(y - \frac{x}{2}\right) - 8$ tại $x = 206; y = 1$.

11. Tính giá trị biểu thức:

a) $M = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ tại $x = 1001$;

b) $N = (x + y)^3 - 9(x + y)^2 + 27(x + y) - 27$ tại $x = 2; y = 6$;

c) $P = 27x^3z^6 + 36xy^2z + 54x^2yz^2 - 8y^3$ tại $x = 25; y = 150; z = 2$.

Dạng 5. Tìm x .

12. Tìm x biết:

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

b) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$

c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$

d) $x^3 + 12x^2 + 48x + 72 = 0$



Dạng 6. Tính nhanh

13. Tính nhanh:

a) 101^3 ;

b) $47^3 + 6.47^2 + 12.47 + 27$;

c) 299^3 ;

d) $1008^3 - 3.1008^2.8 + 3.1008.8^2 - 2^6$.

14. Tính nhanh:

a) 99^3 ;

b) $91^3 + 3.91^2.9 + 3.91.9^2 + 9^3$;

c) 1001^3 ;

d) $102^3 - 6.102^2 + 24.102 - 8$.

Dạng 7. Chứng minh đẳng thức

15: Chứng minh đẳng thức sau:

a) Cho $a + b = 1$ chứng minh rằng $a^3 + b^3 + 3ab = 1$

b) Cho $a - b = 1$ chứng minh rằng $a^3 - b^3 - 3ab = 1$

**Bài 8: TỔNG VÀ HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****• Tổng hai lập phương**

Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

• Lập phương của một hiệu

Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

B. BÀI TẬP**Dạng 1. Triển khai biểu thức**

1. Viết các biểu thức sau dưới dạng tích.

a) $x^3 + 8y^3$

b) $a^6 - b^3$

c) $64y^3 - 125x^3$

d) $27x^3 - \frac{1}{8}$

2. Viết các biểu thức sau dưới dạng tích

a) $x^3 + 1$;

b) $x^3 - 27$;

c) $64x^3 + 1$;

d) $64m^3 - 27$.

Dạng 2: Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu các lập phương

3. Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu các lập phương

a) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$;

b) $(1 - x)(x^2 + x + 1)$;

c) $(y + 3t)(9t^2 - 3yt + y^2)$;

d) $\left(4 - \frac{u}{2}\right)\left(\frac{u^2}{4} + 2y + 16\right)$.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức

4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}xy + 4y^2\right)$

b) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right)$

c) $(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$

d) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$



5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(x - 1)^3 - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

b) $(x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 6(x + 1)^2$

c) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) - (x + 3)^3 + (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 1)^3$

d) $(3x - 2y)^3 - (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2) + (y + 2x)^3$

Dạng 4: Tìm x

6. Tìm x biết

a) $(x - 1)^3 + (2 - x)(4 + 2x + x^2) + 3x(x + 2) = 16$;

b) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 2) = 15$;

c) $(x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x + 1)^2 = 15$;

d) $x(x - 5)(x + 5) - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 3$.

7. Tìm x , biết:

a) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x + 2)(x - 2) = 5$

b) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x - 1)^2 = -10$

c) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + x(x + 2)(2 - x) = 1$

d) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2$

8. Tìm x , biết:

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 + 2) = 15$

b) $(x - 2)^3 - (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 6(x + 1)^2 = 49$

Dạng 5. Tính nhanh

9. Tính nhanh.

a) 29^3

b) 101^3

c) $17^3 + 3^3$

d) $24^3 - 64$



10. Tính hợp lí:

- a) 21^3 ; b) 199^3 ; c) $18^3 + 2^3$ d) $23^3 - 27$.

11. Tính bằng cách hợp lí

- a) 19^3 ; b) 201^3 ; c) $99^3 + 1$; d) $52^3 - 8$.

Dạng 6. Tính giá trị của biểu thức

12. Tính giá trị biểu thức

a) $A = (7 - x)(x^2 + 7x + 49) - (64 + x^3)$ với $x = 5$.

b) $B = 8a^3 - 27b^3$ biết $ab = 12$ và $2a - 3b = 5$.

13. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$ tại $x=10$;

b) $B = \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^3$ biết $xy = 4$ và $x + 2y = 8$

14. Tính giá trị biểu thức

a) $A = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9)$ tại $x = 20$

b) $B = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + 2y^3$ biết $2x + y = 0$

c) $C = (x + y)^3 + y^3$ biết $2x + y = 0$

d) $D = x^3 - y^3 - 3xy$ biết $x - y = 1$

15. a) Cho $x + y = 3$ và $x^2 + y^2 = 5$. Tính $x^3 + y^3$.

b) Cho $x - y = 3$ và $x^2 + y^2 = 15$. Tính $x^3 - y^3$.

Dạng 7. Tính giá trị của biểu thức

16. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

a) $A = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 1)$

b) $B = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (20 + x^3)$

c) $C = 3y \cdot (-3y - 2)^2 - (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1) - (-6y - 1)^2$



17. Chứng minh các đẳng thức

a) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

b) $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

18. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

19. Chứng minh các đẳng thức

a) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$;

b) $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$.

20. a) Cho a, b là các số tự nhiên. Chứng minh rằng: nếu $a^3 + b^3$ chia hết cho 3 thì $a + b$ chia hết cho 3.

b) Cho $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$. Chứng minh rằng $A : 11$

21. Cho $x + y = a + b$ (1) và $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (2)

Chứng minh rằng $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$.

Dạng 8 . Dạng toán khác.

22. Các cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài là a, b và diện tích là S .

Tìm các góc của tam giác vuông biết $(a + b)^2 = 8S$.



Bài 9: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• *Phân tích đa thức thành nhân tử* (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành tích của những đa thức

☉ *Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách đặt nhân tử chung.*

☉ *Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách đặt nhóm hạng tử.*

☉ *Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách sử dụng hằng đẳng thức.*

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách đặt nhân tử chung

❶ Phân tích đa thức thành nhân tử

1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $3x + 6$

b) $10ab - 5c$

c) $2 - 6x^2$

d) $16x - 28y$

e) $35a - 56b$

f) $10x - 2yz$

2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - x$

b) $5x^2(x - 2y) - 15x(x - 2y)$

c) $3(x - y) - 5x(y - x)$

d) $-x^3 - 2x^2$

3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $3x^3y^3 - 6x^2y^2 + 9xy$

b) $7x^2(x - 3y) + 14xy(x - 3y)$

c) $\frac{2}{5}x(y - 1) - \frac{2}{5}y(y - 1)$

c) $\frac{2}{5}x^2 + 5x^3 + x^2y$

d) $2x(x + 1) + 2(x + 1)$

e) $10x(x - y) + 8y(x - y)$

❷ Tính giá trị của biểu thức

4. Tính hợp lí

a) $A = 15.91,5 + 15.8,5$

b) $B = 65.14,6 + 5.7.14,6$

5. Tính hợp lý:

a) $A = 75.20,9 + 5^2.20,9;$

b) $B = 86.15 + 150.1,4;$

c) $C = 93.32 + 14.16;$

d) $D = 98,6.199 - 990.9,86.$



6. Tính giá trị biểu thức

a) $A = 2x(x + y) - 4(x + y)$ tại $x = 22$; $y = 88$

b) $B = x(x - 1) - y(1 - x)$ tại $x = 2001$; $y = 1999$

c) $C = x^2(2x - y) + x(y - 2x)$ tại $x = 201$; $y = 102$

7. Tính giá trị biểu thức:

a) $A = a(b + 3) - b(3 + b)$ tại $a = 2003$ và $b = 1997$;

b) $B = b^2 - 8b - c(8 - b)$ tại $b = 108$ và $c = -8$;

c) $C = xy(x + y) - 2x - 2y$ tại $xy = 8$ và $x + y = 7$;

d) $D = x^5(x + 2y) - x^3y(x + 2y) + x^2y^2(x + 2y)$ tại $x = 10$ và $y = -5$.

③ Tìm giá trị chưa biết

8. Tìm x biết

a) $5x.(x - 3) + 7.(x - 3) = 0$

b) $(2x + 5)(x - 4) = (x - 4).(x - 5)$

c) $(x + 3).(2x + 3) = 4x^2 - 9$

d) $(4x - 1).(x - 2) = (4x - 1)^2$

9. Tìm x biết

a) $x(x + 3) - 2(x + 3) = 0$

b) $(x - 2)(x^2 + 2x + 7) + 2(x^2 - 4) - 5(x - 2) = 0$

c) $5x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$

d) $x^3(x^2 - 9) - 8(x^2 - 9) = 0$

10. Tìm x biết

a) $x^2 - 15x = 0$

b) $x^2(2x + 15) + 4(2x + 15) = 0$

c) $3x(x - 10) - x + 10 = 0$

d) $2(x + 3) - x^2 - 3x = 0$

④ Chứng minh

11. Chứng minh rằng:

a) $33^{n+1} - 33^n$ chia hết cho 32 (với n là số tự nhiên);

b) $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$;

12. Chứng minh rằng:

a) $55^{n+1} - 55^n \div 54$ với $n \in \mathbb{N}$

b) $5^6 - 10^4 \div 9$



13. Cho n lẻ, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh: $n^3 - n \vdots 24$

14. Cho $n > 1$; $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh: $n^4 - n^2 \vdots 4$

Dạng 2. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách nhóm hạng tử

❶ Phân tích đa thức thành nhân tử

15. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $xy + 3x - 7y - 21$

b) $2xy - 15 - 6x + 5y$

c) $2x^2y + 2xy^2 - 2x - 2y$

d) $7x^3y - 3xyz - 21x^2 + 9z$

e) $4x^2 - 2x - y^2 - y$

f) $9x^2 - 25y^2 - 6x + 10y$

16. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

b) $x^2y + xy + x + 1$

c) $ax + by + ay + bx$

d) $x^2 - (a + b)x + ab$

e) $x^2y + xy^2 - x - y$

f) $ax^2 + ay - bx^2 - by$

17. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $ax - 2x - a^2 + 2a$

b) $x^2 + x - ax - a$

c) $2x^2 + 4ax + x + 2a$

d) $2xy - ax + x^2 - 2ay$

e) $x^3 + ax^2 + x + a$

f) $x^2y^2 + y^3 + zx^2 + yz$

18. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$

b) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$

c) $x^3 + 2x^2y - x - 2y$

d) $3x^2 - 3y^2 - 2(x - y)^2$

e) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$

f) $x^2 - y^2 - 2x - 2y$

❷. Tính giá trị của biểu thức

19. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = x^2 + xy - 5x - 5y$ với $x = 15\frac{1}{5}; y = 14\frac{4}{5}$

b) $B = 3xy - 8y - 15x + 40$ với $x = 1999, y = 5$

c) $C = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1$ với $x = 9, y = 51, z = 101$

d) $D = y^3 + 4x^2y + 4xy + 8x^3 + 2xy^2$ với $2x + y = 1$

20. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = xy - 4y - 5x + 20$ với $x = 14; y = 5,5$

b) $B = x^2 + xy - 5x - 5y$; với $x = 5\frac{1}{5}; y = 4\frac{4}{5}$



c) $C = xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$, với $x = 9$; $y = 10$; $z = 11$.

d) $D = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$, với $x = 5,75$; $y = 4,25$

21. Tính nhanh

a) $16,87.91 - 6,2.188 + 16,87.97 - 0,67.188$

b) $56^2 + 31^2 - 13^2 + 56,62$

3. Tìm x.

22. Tìm x, biết:

a) $x^2 - x - 3x + 3 = 0$

b) $x(x - 3) = 4x - 12$

c) $x^3 - 4x - 15x - 30 = 0$

d) $x^3 + 27 + (x + 3)(x - 9) = 0$

23. Tìm x, biết:

a) $5x^3 - 7x^2 - 15x + 21 = 0$

b) $(x - 3)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

c) $x + x^2 - x^3 - x^4 = 0$

d) $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$

4. Dạng toán khác

24. Tìm số dư khi chia $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8 + 5^9$ cho 31?

25. Tìm các số tự nhiên n để giá trị của biểu thức sau là số nguyên tố:

$5n^3 - 9n^2 + 15n - 27$.

Dạng 3. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách dùng hằng đẳng thức

1 Phân tích đa thức thành nhân tử

26. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $9x^4 + 16y^6 - 24x^2y^3$

b) $16x^2 - 24xy + 9y^2$

c) $36x^2 - (3x - 2)^2$

d) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

e) $y^9 - 9x^2y^6 + 27x^4y^3 - 27x^6$

f) $64x^3 + 1$

g) $27x^6 - 8x^3$

27. Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử:

a) $16(4x + 5)^2 - 25(2x + 2)^2$

b) $(x - y + 4)^2 - (2x + 3y - 1)^2$

c) $(x + 1)^4 - (x - 1)^4$

d) $x^6 - y^6$

28. Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử:

a) $(x + y)^2 + 8(x + y) + 16$

b) $(3x - 4)^2 + 2.(3x - 4).(5 - x) + (x - 5)^2$

29. Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử:



a) $4x^2 + 4x - 3$

b) $4x^2 - 12x - 7$

c) $4x^2 + 16x - 9$

d) $-x^2 - 4x - 3$

30. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $9x^2 - y^2 + 10yz - 25z^2$

b) $x^2 - y^2 + z^2 - t^2 - 2xz + 2yt$.

❷ Tìm x

31. Tìm x , biết:

a) $x^2 - 2x + 1 = 25$

b) $4x^2 - (x + 4)^2 = 0$

c) $9 - 64x^2 = 0$

d) $9(4x + 3)^2 = 16(3x - 5)^2$

32. Tìm x , biết:

a) $(x^3 - 4x^2) - (x - 4) = 0$

b) $x^5 - 9x = 0$

c) $(x^3 - x^2)^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$

❸ Tính giá trị của biểu thức.

33. Tính nhanh

a) $82^2 - 18^2$

b) $26^2 + 52 \cdot 24 + 24^2$

c) $\frac{93^3 + 78^3}{171} - 93 \cdot 78$

d) $\frac{57^2 - 18^2}{76,5^2 - 1,5^2}$

34. a) Tính giá trị của biểu thức: $A = x^2 - y^2 - 2x + 2y$ tại $x = 2345, y = 2344$.

b) Tính giá giá trị của biểu thức $B = x^2 - 2009x - y^2 + 2009y$ tại $x = 723, y = 1286$.



ÔN TẬP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

❶ Phân tích đa thức thành nhân tử

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2yz - x^3y^3z + xyz^2$

b) $4x^3 + 24x^2 - 12xy^2$

c) $x^2(m+n) - 3y^2(m+n)$

d) $4x^2(x-y) + 9y^2(y-x)$

e) $x^2(a-b) + 2(b-a)$

f) $10x^2(a-2b)^2 - (x^2+2)(2b-a)^2$

g) $50x^2(x-y)^2 - 8y^2(y-x)^2$

h) $15a^{m+2}b - 45a^mb \quad (m \in \mathbb{N}^*)$

2. Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử:

a) $36x^2 - (3x-2)^2$

b) $16(4x+5)^2 - 25(2x+2)^2$

c) $(x-y+4)^2 - (2x+3y-1)^2$

d) $(x+1)^4 - (x-1)^4$

e) $16x^2 - 24xy + 9y^2$

f) $-\frac{x^4}{4} + 2x^2y^3 - 4y^6$

g) $64x^3 + 1$

h) $x^3y^6z^9 - 125$

k) $27x^6 - 8x^3$

l) $x^6 - y^6$

m) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

n) $y^9 - 9x^2y^6 + 27x^4y^3 - 27x^6$

3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy$

b) $49 - a^2 + 2ab - b^2$

c) $a^2 - b^2 + 4bc - 4c^2$

d) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

e) $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 4c^2$

4. Tìm x , biết:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^5 - 9x = 0$

c) $(x^3 - 4x^2) - (x - 4) = 0$

d) $(4x^2 - 25)^2 - 9(2x - 5)^2 = 0$

e) $9(4x + 3)^2 = 16(3x - 5)^2$

f) $(x^3 - x^2)^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$

g) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $xy + 3x - 7y - 21$

b) $2xy - 15 - 6x + 5y$

c) $2x^2y + 2xy^2 - 2x - 2y$

d) $x^2 - (a-b)x + ab$

e) $7x^3y - 3xyz - 21x^2 + 9z$

f) $4x + 4y - x^2(x+y)$

g) $y^2 + y - x^2 + x$

h) $4x^2 - 2x - y^2 - y$

i) $9x^2 - 25y^2 - 6x + 10y$



6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x(x + 3) - 5x(x - 5) - 5(x + 3)$

b) $(5x - 4)(4x - 5) - (x - 3)(x - 2) - (5x - 4)(3x - 2)$

c) $(5x - 4)(4x - 5) + (5x - 1)(x + 4) + 3(3x - 2)(4 - 5x)$

d) $(5x - 4)^2 + (16 - 25x^2) + (5x - 4)(3x + 2)$

e) $x^4 - x^3 - x + 1$

f) $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2$

g) $a^2x + a^2y + b^2x - 2abx + b^2y - 2aby$

h) $x^{m+2} - x^m y^2 - x^2 y^n + y^{n+2}$

i) $x^{m+4} + x^{m+1} - x - 1$

7. Tìm x, biết

a) $5x^3 - 7x^2 - 15x + 21 = 0$

b) $(x - 3)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

c) $(x - 1)^2 - 5 = (x + 2)(x - 2) - x(x - 1)$

d) $(2x - 3)^3 - (2x + 3)(4x^2 - 1) = -24$

8. Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - 10x + 25 - y^2 - 4yz - 4z^2$

b) $1 - 2a + 2bc + a^2 - b^2 - c^2$

c) $x^2 + 3cd(2 - 3cd) - 10xy - 1 + 25y^2$

d) $ab^3c^2 - a^2b^2c^2 - ab^2c^3 + a^2bc^3$

e) $(2ab + 5c)^2 + (ac - 10b)^2$

f) $(ma + nb)^2 + (ax + by)^2 + (na - mb)^2 + (ay - bx)^2$

g) $\left[(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) + 4xyzt \right]^2 - \left[2xy(z^2 + t^2) + 2zt(x^2 + y^2) \right]^2$

h) $(xy + 1)^2 - (x + y)^2$

i) $16b^2c^2 - 4(b^2 + c^2 - a^2)^2$

j) $(x^2 + 4y^2 - 20)^2 - 16(xy - 4)^2$

k) $(x + y)^3 - 1 - 3(x + y)(x + y - 1)$

l) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

m) $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

n) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

o) $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc$



9. Tính giá trị của

a) $A = x^2 + xy - 5x - 5y$ với $x = 15\frac{1}{5}; y = 14\frac{4}{5}$

b) $B = 3xy - 8y - 15x + 40$ với $x = 1999, y = 5$

c) $C = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1$ với $x = 9, y = 51, z = 101$

d) $D = y^3 + 4x^2y + 4xy + 8x^3 + 2xy^2$ với $2x + y = 1$

10. Phân tích thành nhân tử

a) $4x^2 + 4x - 3$

b) $4x^2 - 12x - 7$

c) $2x^2 + x - 6$

d) $3x^2 - 11x + 6$

e) $4x^2 + 16x - 9$

f) $6x^2 + 7x + 2$

g) $-5x^2 - 29x - 20$

h) $-7x^2 + 11x + 6$

k) $x^2 + 2x - 3$

l) $-x^2 - 4x - 3$

m) $-x^2 + 4xy + 12y^2$

n) $-x^2 + 25x - 150$

11. Phân tích thành nhân tử

a) $15x^3 + 7x^2 - 2x$

b) $12x^4 + 7x^3 - 12x^2$

c) $x^2yz + 6xyz - 16yz$

d) $x^2 + 2xy - 3y^2$

e) $-x^2 + 4xy + 12y^2$

f) $-21x^2y - 12xy^2 + 9y^3$

12. Phân tích thành nhân tử

a) $x^4 - 14x^2 + 24$

b) $x^4 + 4y^4$

c) $81x^4 + 4$

d) $4x^4y^4 + 1$

e) $x^5 + x + 1$

f) $x^8 + x^7 + 1$

13. Phân tích thành nhân tử

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

b) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 2) - 6$

c) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$

d) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

e) $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) - 4$

f) $(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 10x + 21) + 15$

g) $x^4 + (x - 4)^4 - 82$

h) $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a$



Bài 10: TỨ GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **Tứ giác** $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó không có hai đoạn thẳng nào nằm trên cùng một đường thẳng.
- **Tứ giác lồi** là tứ giác mà hai đỉnh thuộc một cạnh bất kì luôn nằm về một phía của đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.
- **Tổng các góc** của một tứ giác bằng 360°

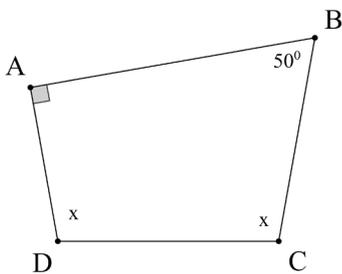
B. BÀI TẬP

1. a) Có tứ giác nào có 4 góc nhọn không?
b) Một tứ giác có nhiều nhất bao nhiêu góc nhọn, bao nhiêu góc tù, bao nhiêu góc vuông?

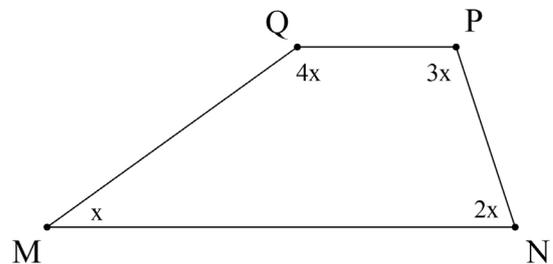
2. a) Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} = 55^\circ; \hat{B} = 110^\circ; \hat{D} = 75^\circ$. Tính số đo góc \hat{C}

b) Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} = 55^\circ; \hat{B} = 107^\circ; \hat{C} = 72^\circ$. Tính số đo góc ngoài tại đỉnh D

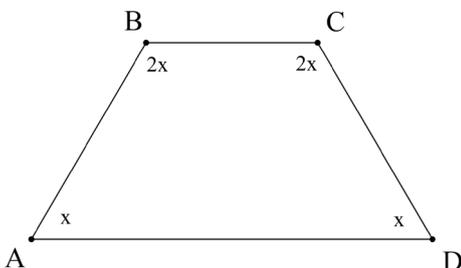
3. Tìm số đo x trong các hình sau:



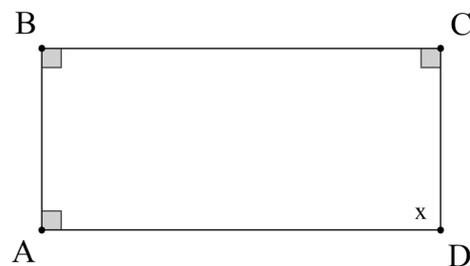
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

4. Tứ giác $ABCD$ có $\hat{C} = 100^\circ, \hat{D} = 60^\circ, \hat{A} : \hat{B} = 3 : 2$. Tính các góc A và B .



5. Cho tứ giác $ABCD$ biết $\widehat{B} + \widehat{C} = 200^\circ$, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$; $\widehat{C} + \widehat{D} = 120^\circ$
- Tính số đo các góc của tứ giác.
 - Gọi I là giao điểm của các tia phân giác của \widehat{A} và \widehat{B} của tứ giác. Chứng minh:
$$\widehat{AIB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$$
6. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} - \widehat{D} = 10^\circ$. Các tia phân giác góc A và góc B cắt nhau tại I Biết $\widehat{AIB} = 65^\circ$. Tính số đo \widehat{C}, \widehat{D} .
7. Cho tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm các tia phân giác của các góc C và D .
- Tính \widehat{COD} biết $\widehat{A} = 120^\circ, \widehat{B} = 90^\circ$.
 - Tính \widehat{COD} theo \widehat{A} và \widehat{B} .
 - Các tia phân giác của góc A và B cắt nhau ở I và cắt các tia phân giác các góc C và D thứ tự ở E và F . Chứng minh rằng tứ giác $OEIF$ có các góc đối bù nhau.
8. Cho tứ giác $ABCD$, $\widehat{A} - \widehat{B} = 50^\circ$. Các tia phân giác của góc C và góc D cắt nhau tại O . Cho biết $\widehat{COD} = 115^\circ$. Chứng minh rằng $AB \perp BC$.
9. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, $CB = CD$. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = AB$. Chứng minh:
- $\triangle ABC = \triangle EDC$.
 - AC là phân giác góc \widehat{A} .
10. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = AD, CB = CD$, $\widehat{C} = 70^\circ, \widehat{A} = 110^\circ$.
- Chứng minh AC là trung trực của BD .
 - Tính góc \widehat{B}, \widehat{D} .
11. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2$
12. Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai cạnh AD và BC cắt nhau tại E , hai cạnh DC và AB cắt nhau tại F . Kẻ tia phân giác của hai góc CED và BFC cắt nhau tại I . Tính góc EIF theo các góc trong tứ giác $ABCD$.



13. Cho tứ giác $ABCD$, biết $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 1 : 2 : 3 : 4$

a) Tính các góc của tứ giác $ABCD$.

b) Chứng minh rằng $AB \parallel CD$

c) Gọi giao điểm của AD và BC là E . Tính các góc của $\triangle CDE$

14. Cho tứ giác $ABCD$, có AC là tia phân giác của \widehat{A} , $BC = CD$, $AB < CD$

a) Lấy điểm E trên cạnh AD sao cho $AE = AB$. Chứng minh rằng: $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$

b) Chứng minh: $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$

**Bài 11: HÌNH THANG CÂN****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

- *Hình thang* là tứ giác có hai cạnh đối song song.
- *Hình thang cân* là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.
- **Tính chất của hình thang cân**
 - ❶ Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.
 - ❷ Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.
- **Dấu hiệu nhận biết:**

☉ Nếu một hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì đó là hình thang đó là hình thang cân.

B. BÀI TẬP**Dạng 1. Chứng minh tứ giác là hình thang**

1. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$ và AC là tia phân giác của góc A . Chứng minh $ABCD$ là hình thang.
2. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Trên tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Chứng minh tứ giác $BECD$ là hình thang
3. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Ở phía ngoài $\triangle ABC$ vẽ $\triangle BCD$ vuông cân tại B . Chứng minh tứ giác $ABDC$ là hình thang.
4. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{D} = 2x + 9^\circ$, $\widehat{A} = 8x - 9^\circ$ và góc ngoài tại đỉnh A là $\widehat{A_1} = 3x - 9^\circ$.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Vì sao?

b) Phân giác của \widehat{B} và \widehat{C} cắt nhau ở I . Cho biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 32^\circ$. Tính các góc của $\triangle BIC$.

Dạng 2: Giải bài toán về hình thang.

5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Các tia phân giác của góc A và góc B cắt nhau tại điểm E trên cạnh CD . Chứng minh rằng $CD = AD + BC$
6. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 2 \text{ cm}$. $CD = 4 \text{ cm}$ và $\widehat{C} = 45^\circ$

a) $\triangle BCD$ là tam giác gì? Vì sao.

b) Chứng minh DB là tia phân giác của \widehat{D}



c) Tính S_{ABCD}

7. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có M là trung điểm của BC và $\widehat{AMD} = 90^\circ$. Chứng minh: DM là phân giác của \widehat{ADC} .

8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), tia phân giác của \widehat{A} và \widehat{D} cắt nhau tại điểm I trên cạnh BC . Chứng minh: $AD = AB + CD$.

Dạng 3. Chứng minh tứ giác là hình thang cân.

9. Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

10. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D , trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Tứ giác $DECB$ là hình gì? Vì sao?

11. Cho tam giác ABC cân tại A . Đường thẳng song song với BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Chứng minh $BCNM$ là hình thang cân.

12. Cho tam giác ABC cân tại A có BH và CK là hai đường cao của tam giác. Chứng minh $BCHK$ là hình thang cân.

13. Cho tam giác ABC đều, M là điểm nằm trong tam giác đó. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC và cắt BC ở D , kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E , kẻ đường thẳng song song với BC và cắt AB ở F . Chứng minh rằng

a) Tứ giác $BFMD, CDME, AEMF$ là các hình thang cân

b) Tính số đo $\widehat{DME}, \widehat{EMF}, \widehat{DMF}$

14. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên các cạnh bên AB, AC lấy các điểm M, N sao cho $BM = CN$.

a) Tứ giác $BMNC$ là hình gì? Vì sao?

b) Tính các góc của tứ giác $BMNC$ biết rằng $\widehat{A} = 40^\circ$.

Dạng 4: Giải bài toán về hình thang cân.



15. Tính chiều cao của hình thang cân $ABCD$, biết rằng cạnh bên $BC = 25cm$, các cạnh đáy $AB = 10cm$, $CD = 24cm$.

16. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$, $AB = AD$.

a) Chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{BDC}$.

b) CA có phải là tia phân giác của góc \widehat{C} không? Vì sao?

17. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC . E là giao điểm của AC và BD . Chứng minh:

a) $\triangle AOB$ cân tại O .

b) $\triangle ABD = \triangle BAC$.

c) $EC = ED$.

d) OE là trung trực của hai đáy AB và CD .

18. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AD \parallel BC$ và $\widehat{A} = 60^\circ$, $AD = 4cm$, $BC = 2cm$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD tại E .

a) Tính ED .

b) Chứng minh $\triangle ABE$ đều.

c) Kẻ $BH \perp AD$ ở H . Tính AH .



Bài 12: HÌNH BÌNH HÀNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- *Hình bình hành* là tứ giác có các cạnh đối song song.
- **Tính chất của hình bình hành**

Trong hình bình hành

- ❶ Các cạnh đối bằng nhau.
- ❷ Các góc đối bằng nhau.
- ❸ Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

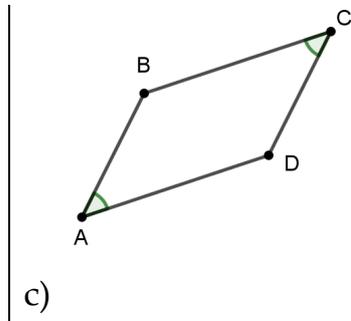
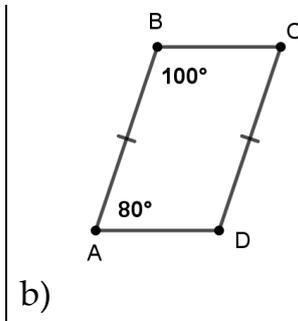
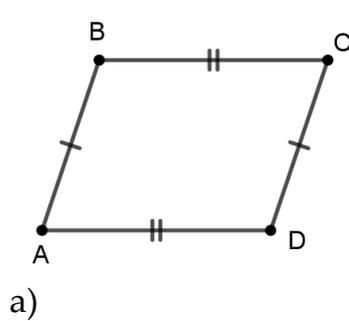
• **Dấu hiệu nhận biết:**

- ❶ Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là một hình bình hành
- ❶ Tứ giác có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau là một hình bình hành
- ❶ Tứ giác có các cặp góc đối bằng nhau là một hình bình hành.
- ❶ Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là một hình bình hành.

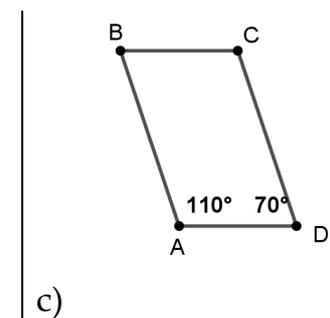
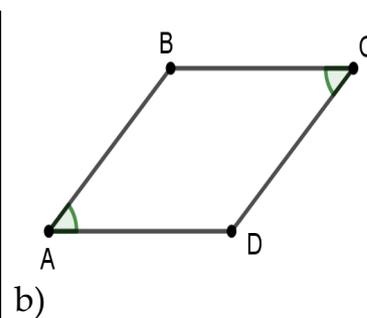
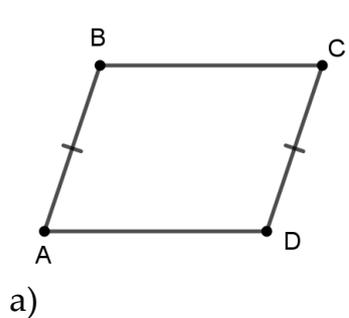
B. BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận biết hình bình hành

1. Dựa vào kí hiệu cho trước trên hình vẽ hãy chỉ ra hình nào là hình bình hành?



2. Thêm một yếu tố để có hình bình hành:





Dạng 2: Chứng minh tứ giác là hình bình hành.

3. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Từ A và C kẻ AE, CF vuông góc với BD ở H và K . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Qua điểm O , vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F . Qua điểm O vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại H, K . Chứng minh tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

5. Cho hình thang $ABCD$ có $AB // CD$ và $AB = \frac{1}{2}CD$. Gọi E là trung điểm của CD .

a) Chứng minh tứ giác $ABED$ là hình bình hành.

b) Chứng minh tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

6. Cho $\triangle ABC$ cân ở A có điểm M trên cạnh BC . Kẻ $MD // AC$ và $ME // AB$ ($D \in AB, E \in AC$).

a) Chứng minh $ADME$ là hình bình hành.

b) $\triangle EMC$ là tam giác gì?

c) So sánh $MD + ME$ với AC .

7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự ta lấy hai điểm H và G sao cho $DH = BG$ và trên các cạnh AB, CD theo thứ tự lấy các điểm E, F sao cho $AE = CF$. Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.

8. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , lấy điểm D trên AB . Lấy điểm E trên tia đối của tia CA sao cho $CE = BD$. Kẻ $DF // AC$ ($F \in BC$).

a) $\triangle DBF$ là tam giác gì?

b) Chứng minh tứ giác $DCEF$ là hình bình hành.

9. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B , vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D . Chứng minh tứ giác $BDCH$ là hình bình hành.

Dạng 3: Vận dụng tính chất hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

10. Cho hình bình hành $ABCD$. Kéo dài đường trung tuyến AM của $\triangle ABC$ và lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

a) Tứ giác $ABEC$ là hình gì?

b) Chứng minh D, C, E thẳng hàng và suy ra C là trung điểm của DE .



11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD , F là trung điểm của BC . Chứng minh:

a) $BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$; b) $BE // FD$.

12. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của AI và CK với BD . Chứng minh

a) $\triangle ADM = \triangle CBN$ b) $\widehat{MAC} = \widehat{NCA}$, $IM // CN$

c) $DM = MN = NB$

13. Cho hình bình hành $ABCD$. Kẻ $AE \perp BD$ và $CF \perp BD$.

a) Tứ giác $AECF$ là hình gì? Vì sao?

b) AE cắt CD tại I , CF cắt AB tại K . Chứng minh $AI = CK$.

c) Chứng minh $DE = BF$.

14. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên AB lấy điểm K , trên CD lấy điểm I sao cho $AK = CI$. Chứng minh rằng ba điểm K, O, I thẳng hàng và các đường thẳng AC, BD, KI đồng quy.

15. Cho hình bình hành $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E , trên cạnh CD lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .

a) Chứng minh tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

b, Chứng minh O là trung điểm của EF .

16. Cho hình bình hành $ABCD$ có A là góc tù. Kẻ AH và CK vuông góc với đường chéo BD .

a) Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

b) Gọi O là trung điểm của HK . Chứng minh ba điểm A, O, C thẳng hàng.

c) Tính diện tích hình bình hành $AHCK$ biết $AH = 4cm$, $HK = 3cm$.



Bài 13: HÌNH CHỮ NHẬT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- *Hình chữ nhật* là tứ giác có bốn góc vuông.
- **Tính chất của hình chữ nhật**
 - ➊ Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và của hình thang cân
 - ➋ Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- **Dấu hiệu nhận biết:**
 - ⊗ Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
 - ⊗ Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

Nhận xét:

- ⊗ Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.
- ⊗ Nếu tam giác có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng thì tam giác đó là tam giác vuông.

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật

1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH . Kẻ $HD \perp AB, HE \perp AC$.

- Tứ giác $ADHE$ là hình gì? Vì sao?
 - Gọi O là giao điểm của AH và DE . Chứng minh $OA = OH = OD = OE$.
2. Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC .
- Tứ giác $EAFH$ là hình gì?
 - Qua A kẻ đường vuông góc với EF , cắt BC ở I . Chứng minh I là trung điểm của BC .

3. Cho tam giác ABC vuông cân tại C . Trên các cạnh AC, BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$).

- Chứng minh $PM = CQ$.
- Chứng minh tứ giác $PCQM$ là hình chữ nhật.



4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Điểm D thuộc cạnh BC . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC .

a) Chứng minh tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật.

b) Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh A, I, D thẳng hàng.

5. Cho hình thang cân $ABCD$, $AB \parallel CD$ và $AB < CD$, có AH, BK lần lượt là đường cao.

a) Tứ giác $ABKH$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh $DH = CK$.

c) Gọi E là điểm đối xứng với D qua H . Chứng minh tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

d) Chứng minh $DH = \frac{1}{2}(CD - AB)$

6. Cho hình bình hành $ABCD$. Các tia phân giác của các góc A, B, C, D cắt nhau tại các điểm như hình. Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. (Hình 8)

a) Chứng minh $ABCD$ là hình chữ nhật.

b) Lấy điểm E sao cho B là trung điểm của AE . Chứng minh $BEDC$ là hình bình hành.

c) EM cắt BD tại K . Chứng minh $EK = 2KM$.

8. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $AD = \frac{1}{2}AC$ và $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$. Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật

Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình chữ nhật để chứng minh quan hệ bằng nhau, song song, vuông góc, đồng quy, tính độ dài các đoạn thẳng

9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HD \perp AB, HE \perp AC$ ($D \in AB, E \in AC$). Chứng minh rằng:

a) $\widehat{C} = \widehat{ADE}$



16. Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác ABC , vẽ hai tam giác vuông cân ADB ($DA = DB$) và ACE ($AE = EC$). Gọi M là trung điểm của BC , I là giao điểm của DM với AB , và K là giao điểm của EM với AC . Chứng minh:

- a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.
- b) Tứ giác $IAKM$ là hình chữ nhật.
- c) Tam giác DME là tam giác vuông cân.

17. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$. M là trung điểm của BC . Kẻ $ME \perp AB$ ($E \in AB$). Kẻ $MF \perp AC$ ($F \in AC$)

- a) Chứng minh $EF = \frac{BC}{2}$.
- b) Gọi AK là đường cao của $\triangle ABC$. Chứng minh $KMFE$ là hình thang cân.

Dạng 4: Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật

18. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC . Các đường thẳng BM, DN cắt đường chéo AC tại P, Q .

- a) Chứng minh $AP = PQ = QC$.
- b) Tứ giác $MPNQ$ là hình gì?
- c) Xác định tỉ số $\frac{CA}{CD}$ để $MPNQ$ là hình chữ nhật.

19. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi DE, BK lần lượt là đường phân giác trong của $\triangle ADB$ và $\triangle DBC$.

- a) Chứng minh $DE \parallel BK$.
- b) Tứ giác $DEBK$ là hình gì? Vì sao?
- c) Tìm điều kiện của $\triangle ADB$ để $DEBK$ là hình chữ nhật.

20. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , M là trung điểm của BC . Gọi D, E lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MB, MC .



- a) Tứ giác $DIKE$ là hình gì?
b) $\triangle ABC$ cần thêm điều kiện gì để $DIKE$ là hình chữ nhật.



Bài 14: HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• **Hình thoi** là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

• **Tính chất của hình thoi**

Trong hình thoi

❶ Hai đường chéo vuông góc với nhau.

❷ Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc trong hình thoi.

• **Dấu hiệu nhận biết:**

⊗ Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.

⊗ Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi

⊗ Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

• **Hình vuông** là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

• **Tính chất của hình vuông**

❶ Hình vuông cũng là hình chữ nhật, hình thoi nên có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

❷ Trong một hình vuông, hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau, cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và là các đường phân giác của các góc của hình vuông.

• **Dấu hiệu nhận biết:**

⊗ Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.

⊗ Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.

⊗ Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.

Chú ý:

⊗ Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.

⊗ Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

B. BÀI TẬP VỀ HÌNH THOI.

Dạng 1. Chứng minh tứ giác là hình thoi.

1. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ $AE \perp BC$ tại E , $DF \perp AB$ tại F . Biết $AE = DF$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

2. Cho $\triangle ABC$ cân ở A . Trên nửa mặt phẳng không chứa A có bờ chứa cạnh BC vẽ tia $Bm \parallel AC$, vẽ tia $Cn \parallel AB$. Gọi D là giao điểm của Bm và Cn . Chứng minh tứ giác $ACDB$ là hình thoi.



3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy $ME = MA$. Chứng minh:

a) Tứ giác $ABEC$ là hình thoi. b) C là trung điểm DE .

4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có P, Q lần lượt là trung điểm của BC và AD . Gọi M là giao điểm của AP và BQ ; N là giao điểm của CQ và DP . Chứng minh tứ giác $MPNQ$ là hình thoi.

5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm của BC và E là giao điểm của AM và DC .

a) Chứng minh: $ABEC$ là hình bình hành.

b) Gọi F là điểm đối xứng của B qua C . Chứng minh $BEFD$ là hình thoi.

6. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = DN$. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F .

a) Chứng minh E và F đối xứng với nhau qua AB ;

b) Chứng minh tứ giác $MEBF$ là hình thoi;

c) Hình bình hành $ABCD$ có thêm điều kiện gì để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân.

7. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{DAC} = 90^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Chứng minh $AM = CN$.

b) Chứng minh $AN = CM$.

c) Chứng minh tứ giác $AMCN$ là hình thoi.

Dạng 2. Vận dụng tính chất hình thoi để chứng minh.

8. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Kẻ 2 đường cao BE và BF ($E \in AD; F \in DC$)

a) Chứng minh: $BE = BF$.

b) Tính số đo \widehat{ABC} .

c) Tính số đo \widehat{EBF} . $\triangle BEF$ là tam giác đặc biệt gì? Vì sao?

9. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Kẻ $BH \perp AD$, rồi kéo dài một đoạn $HE = BH$. Nối E với A , E với D . Chứng minh:



- a) H là trung điểm của AD .
- b) Tứ giác $ABDE$ là hình thoi.
- c) D là trung điểm của CE .
- d) $AC = BE$.

10. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Một góc xBy thay đổi sao cho tia Bx cắt cạnh AD tại M , tia By cắt cạnh CD tại N và $\widehat{xBy} = 60^\circ$. Chứng minh :

- a) $AB = BD$.
- b) $\triangle ABM = \triangle DBN$.
- c) Tổng độ dài $(DM + DN)$ không đổi.

11. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$. Gọi M, N lần lượt trên AB, BC sao cho $AM = BN$.

- a) Chứng minh $\widehat{ADM} = \widehat{BDN}$.
- b) Chứng minh $\triangle MDN$ là tam giác đều.

12. Cho hình thoi $ABCD$. Lấy E và F trên BC và CD sao cho $BE = DF$. Gọi G và H lần lượt là giao điểm của AE, AF với BD . Chứng minh tứ giác $AGCH$ là hình thoi.

13. Cho hình thoi $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G, H lần lượt là chân đường vuông góc từ O xuống AB, BC, CD, DA .

- a) Chứng minh E, O, G thẳng hàng và H, O, F thẳng hàng.
- b) Chứng minh $OE = OF = OH = OG$.
- c) Tứ giác $EFGH$ là hình gì? Vì sao?

14. Cho hình thoi $ABCD$ (góc \widehat{B} tù). Từ B hạ $BM \perp AD, BN \perp CD$. Từ D hạ $DP \perp AB, DQ \perp BC$. Gọi H là giao điểm của MB và PD , K là giao điểm của BN và DQ . O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh:

- a) H là trực tâm $\triangle ABD$.
- b) A, H, K, C thẳng hàng.
- c) $\widehat{PDQ} = \widehat{MBN}$.
- d) $\widehat{PHM} = \widehat{QKN}$.
- e) Tứ giác $BHDK$ là hình thoi.

C. BÀI TẬP VỀ HÌNH VUÔNG

Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình vuông.



1. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB, BC, CD, DA , lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Chứng minh $EFGH$ là hình vuông.
2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Gọi M là giao điểm của AF và DE , N là giao điểm của BF và CE .
 - a) Tứ giác $ADFE$ là hình gì? Vì sao?
 - b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì? Vì sao?
3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AD < AB < 2AD$). Vẽ các tam giác vuông cân ABI, CDK ($\hat{I} = \hat{K} = 90^\circ$), I và K nằm trong hình chữ nhật. Gọi E là giao điểm của AI và DK , F là giao điểm của BI và CK . Chứng minh rằng:
 - a) EF song song với CD .
 - b) $EKFI$ là hình vuông.
4. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác AD . Gọi M, N là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB, AC . Chứng minh rằng tứ giác $AMDN$ là hình vuông.
5. Cho hình vuông $DEBC$. Trên cạnh CD lấy điểm A , trên tia đối của tia DC lấy điểm K , trên tia đối của tia ED lấy điểm M sao cho $CA = DK = EM$. Vẽ hình vuông $DKIH$ ($H \in DE$). Chứng minh rằng tứ giác $ABMI$ là hình vuông.

Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình vuông để chứng minh hình học

6. Cho hình bình hành $ABCD$. Ở phía ngoài hình bình hành vẽ các hình vuông $ADEF$ và $ABGH$. Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình vuông $ADEF$. Chứng minh rằng:
 - a) $\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$
 - b) $OH = OC$
 - c) $OH \perp OC$
7. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên tia đối của tia CB và DA lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho $CE = DF = CD$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho $CH = CB$. Chứng minh AE vuông góc FH .
8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F lần lượt trên cạnh AB, AD sao cho $AE = DF$. Chứng minh rằng $DE = CF$ và $DE \perp CF$.



9. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC . Từ M , vẽ một đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho: $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$. Chứng minh $\widehat{KAM} = 45^\circ$

10. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh CD , điểm F thuộc cạnh BC . Chứng minh rằng chu vi $\triangle CEF$ bằng nửa chu vi hình vuông khi và chỉ khi $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

11. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

- a) Chứng minh: $AECK$ là hình bình hành.
- b) Chứng minh $DF \perp CE$ tại M .
- c) AK cắt DF tại N . Chứng minh N là trung điểm của DM .
- d) Chứng minh $AM = AB$.

12. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M . Qua A kẻ $AN \perp AM$ (điểm N thuộc tia đối của tia DC). Gọi I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng:

- a) $AM = AN$.
- b) Ba điểm B, I, D thẳng hàng.

Dạng 3: Tìm điều kiện để tứ giác là hình vuông.

13. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC . Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC , chúng cắt các cạnh AC, AB theo thứ tự tại E và F

- a) Tứ giác $FFME$ là hình gì
- b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để tứ giác $AFME$ là hình vuông

14. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi DE, BK lần lượt là đường phân giác của $\triangle ADB, \triangle DBC$.

- a) Chứng minh $DE // BK$.
- b) Cho $DE \perp AB$. Chứng minh $DA = DB$.
- c) Trong trường hợp $DE \perp AB$. Tìm số đo \widehat{ADB} để tứ giác $DEBK$ là hình vuông.

15. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2 \cdot AD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- a) Chứng minh tứ giác $APCQ$ là hình bình hành.
- b) Chứng minh tứ giác $APQD$ là hình thoi.



c) Gọi E là giao điểm của AQ và DP , Gọi F là giao điểm của BQ và CP .
Chứng minh tứ giác $PEQF$ là hình chữ nhật.

d) Hình bình hành $ABCD$ cần có thêm điều kiện gì để $PEQF$ là hình vuông.

16. Cho $\triangle DEF$ vuông tại D có $DE > DF$, DM là đường trung tuyến. Gọi MN là đường vuông góc kẻ từ M đến DE , MK là đường vuông góc kẻ từ M đến DF . Gọi H là điểm đối xứng với M qua N .

a) Tứ giác $DKMN$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi O là trung điểm của DM . Chứng minh 3 điểm H, O, F thẳng hàng.

c) $\triangle DEF$ cần thêm điều kiện gì để tứ giác $DKMN$ là hình vuông.



Bài 15: ĐỊNH LÝ THALÈS TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- *Tỉ số của hai đoạn thẳng* là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.
- Hai đoạn thẳng AB và CD được gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$

• **Định lý Thalès :**

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

• **Định lý Thalès đảo :**

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh ấy những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

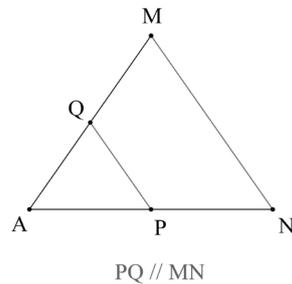
B. BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tỉ số của hai đoạn thẳng, lập tỉ số bằng nhau

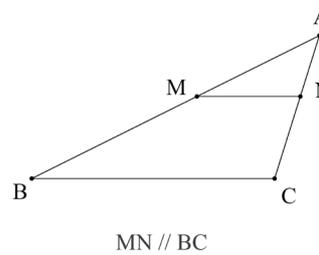
1. Trên một đường thẳng, đặt ba đoạn thẳng liên tiếp $AB = BC = CD$.

Tìm tỉ số $\frac{AB}{BD}; \frac{AB}{AD}; \frac{AC}{AD}$.

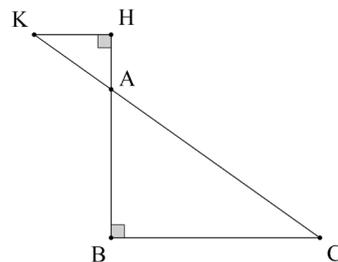
2. Lập các tỉ số trong các hình sau:



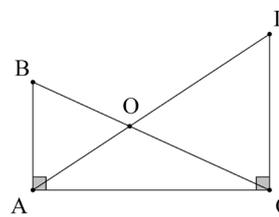
a)



b)



c)



d)

3. Cho đoạn thẳng $AB = 10(cm)$. Lấy điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho

$\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2}$. Lấy D thuộc tia đối của tia BA sao cho $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$.

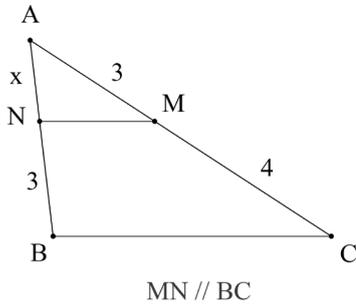
- a) Tính độ dài đoạn thẳng CB ;
- b) Tính độ dài đoạn thẳng DB ;



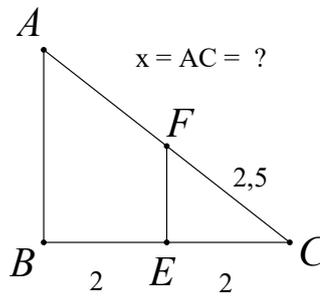
c) Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng

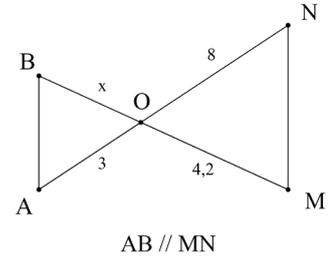
4. Tìm x trong các hình sau đây:



a)



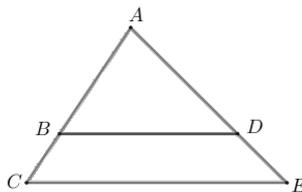
b)



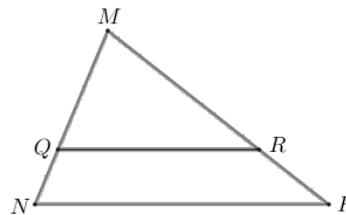
c)

5. Tìm độ dài DE trong hình dưới đây. Biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, $AD = 7,5\text{cm}$ và $BD \parallel CE$.

6. Cho hình sau, biết $QR \parallel NP$ và $MQ = 10\text{cm}$, $QN = 5\text{cm}$, $RP = 6\text{cm}$. Tính độ dài MR .



Hình bài 5



Hình bài 6

7. Cho tam giác ABC . Đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Cho biết $AM = 5\text{cm}$, $MB = 3\text{cm}$, $BC - MN = 3,6\text{cm}$. Tính MN, BC .

8. Cho tam giác ABC , trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $2MA = MB$. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại N . Qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại P . Biết rằng $PC = 6\text{cm}$. Tính BC .

9. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Một đường thẳng song song với hai đáy cắt cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở E, F . Tính FC biết $AE = 4\text{cm}$, $ED = 2\text{cm}$, $BF = 6\text{cm}$.

10. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Qua trọng tâm G kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại D, E . (Hình 8)

a) Chứng minh $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$

b) Chứng minh $AE = 2EC$.



11. Cho ΔABC có $AB = 4cm$. Lấy D trên AB sao cho $AD = 3cm$. Từ D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại E . Giả sử $AE + AC = 14cm$.

a) Tính tỉ số $\frac{AE}{AC}$.

b) Tính $AE; AC$ và EC

12. Cho ΔABC có trung tuyến BM và trọng tâm G . Qua G kẻ đường thẳng song song với AC cắt BA và BC lần lượt tại D và E . Giả sử chu vi ΔABC là 75 và $AD + EC = 16$.

a) Chứng minh $BD = 2.AD$ và $BE = 2.CE$.

b) Tính $BA + BC$ và tính AC, DE .

13. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Lấy điểm I trên cạnh AD . Từ I kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại K . AC cắt IK tại O . Chứng minh:

a) $\frac{AI}{AD} = \frac{AO}{AC}$.

b) $\frac{BK}{BC} = \frac{AO}{AC}$ rồi suy ra $AI \cdot BC = AD \cdot BK$.

14. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ tia Ax cắt đường chéo BD tại I , cắt BC tại J và cắt CD tại K .

a) Tìm các tỉ số bằng với tỉ số $\frac{ID}{IB}$ và chứng minh $IA^2 = IJ \cdot IK$.

b) Tìm các tỉ số bằng với tỉ số $\frac{AI}{AJ}$.

15. Cho ΔABC có AD là đường trung tuyến. Trọng tâm là điểm G , một đường thẳng đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm E và F . Từ B và C kẻ các đường thẳng song song với EF cắt AD lần lượt tại M và N .

Chứng minh rằng $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$.

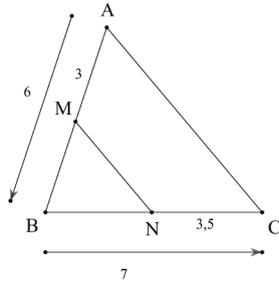
16. Cho ΔABC có trung tuyến AO . và G là trọng tâm, một đường thẳng bất kì đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M và N . Từ B và C kẻ các đường thẳng song song với MN cắt AO lần lượt tại H và K . Chứng minh

rằng $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$.

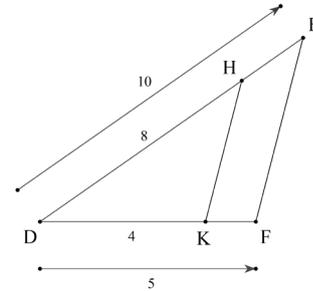


Dạng 3: Chứng minh hai đường thẳng song song.

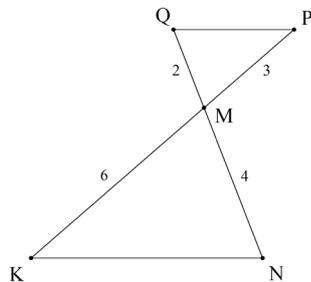
17. Tìm các đường thẳng song song có trong hình:



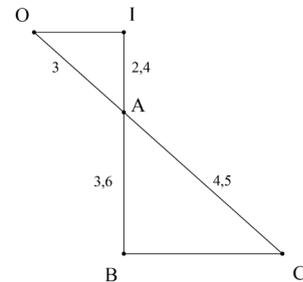
Hình a



Hình b



Hình c



Hình d

18. Cho tứ giác $ABCD$. Qua điểm E trên cạnh AD , kẻ đường thẳng song song với DC và cắt AC ở G . Qua G kẻ đường thẳng song song với CB và cắt AB ở H .

- Tìm các tỉ số bằng với tỉ số $\frac{GA}{GC}$.
- Chứng minh $HE \parallel BD$.



7. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . MD là đường phân giác trong của $\triangle MAB$. Từ D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AM và AC lần lượt tại N và E .
- MN là đường gì của $\triangle DME$.
 - $\triangle MND, \triangle MNE$ và $\triangle MDE$ là các tam giác gì?
 - Chứng minh ME là đường phân giác của $\triangle AMC$.
8. Cho hình thang $ABCD$ có $AB // CD$. Gọi M là trung điểm của CD . AM cắt BD tại I , cắt AC tại K
- Chứng minh $\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB}$.
 - Chứng minh $IK // AB // CD$.
 - IK cắt AD tại N . Chứng minh rằng I là trung điểm của KN
9. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm D . Gọi I là giao điểm của AM và BD . Qua C kẻ đường thẳng song song với AB , cắt BD ở K . Chứng minh rằng: $IB^2 = ID \cdot IK$
10. Cho tam giác ABC , I là một điểm trong tam giác. IA, IB, IC lần lượt cắt BC, CA, AB ở M, N, P . Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BN, CM tại E và F . Chứng minh rằng:
- $\frac{AE}{BM} = \frac{AF}{MC}$;
 - $\frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$.



Bài 16: ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• *Đường trung bình của tam giác* là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác

• **Tính chất:**

Đường trung bình của tam giác song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh đó.

• **Chú ý**

Trong một tam giác, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì nó đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

B. BÀI TẬP

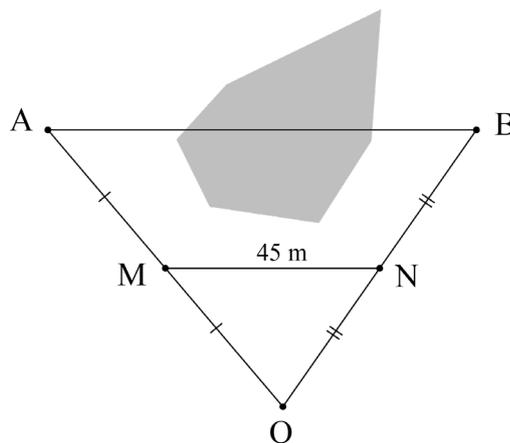
Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng, tính góc

1. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC .

Tính chu vi của tam giác MNP , biết $AB = 8cm, AC = 10cm, BC = 12cm$.

2. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 70^\circ$. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC . Xác định dạng của tứ giác $BDEC$ và tính các góc của tứ giác đó.

3. Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B bị ngăn cách bởi một hồ nước người ta đóng cọc tại các vị trí A, B, M, N, O như hình 2 và đo được $MN = 45m$. Tính khoảng cách AB biết M, N lần lượt là điểm chính giữa OA và OB .



4. Cho tam giác ABC có AH là đường cao. Lấy E và K lần lượt là trung điểm của AB và AC .

a) Chứng minh: EK là đường trung bình của tam giác ABC .



- b) Đường thẳng EK cắt AH tại I . Chứng minh: I là trung điểm AH .
- c) Biết $BC = 10$. Tính EK .

5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5\text{cm}, AC = 7\text{cm}, BC = 9\text{cm}$. Kéo dài AB lấy điểm D sao cho $BD = BA$, Kéo dài AC lấy điểm E sao cho $CE = CA$. Kéo dài đường trung tuyến AM của $\triangle ABC$ lấy $MI = MA$.

- a) Tính độ dài các cạnh của $\triangle ADE$.
- b) Chứng minh $DI \parallel BC$.
- c) Chứng minh ba điểm D, I, E thẳng hàng.

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức hình học.

6. Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ và $AB = 2AD = 2CD$. Kẻ CH vuông góc với AB tại H

- a) Tính số đo các góc của hình thang $ABCD$
- b) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông cân
- c) Tính chu vi hình thang nếu $AB = 6\text{cm}; BC = 3\sqrt{2}\text{cm}$
- d) Gọi O là giao điểm của AC và DH , O' là giao điểm của DB và CH . Chứng minh rằng $AB = 4OO'$

7. Cho tam giác ABC , có AM là trung tuyến ứng với BC . Trên cạnh AB lấy điểm D và E sao cho $AD = DE = EB$. Đoạn CD cắt AM tại I . Chứng minh:

- a) EM song song với DC ;
- b) I là trung điểm của AM ;
- c) $DC = 4DI$.

8. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có M là trung điểm của đường cao AH . CM cắt AB tại D , kẻ $Hx \parallel CD$ cắt AB tại E . Chứng minh:

- a) $AD = DE$; b) $AB = 3AD$; c) $CD = 4MD$

Dạng 3. Chứng minh tứ giác là một hình đặc biệt

9. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Có M là trung điểm của BC . Từ M kẻ hai đường thẳng song song với AC và song song với AB cắt AB và AC lần lượt tại E và F .

- a) Các tứ giác $BEFC$, $AEMF$ là hình gì? Vì sao?
- b) Gọi O là trung điểm của EF . Chứng minh A và M đối xứng qua O .



10. Cho $\triangle ABC$ có D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB .
- Chứng minh $DE // AF$ và $DE = AF$.
 - Chứng minh tứ giác $AEDF$ là hình bình hành.
11. Cho $\triangle ABC$ có các đường trung tuyến BE, CF và trọng tâm G . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG và CG .
- Chứng minh $EF // MN$ và $EF = MN$.
 - Chứng minh $MNEF$ là hình bình hành.
12. Cho $\triangle ABC$ ($AC > AB$), đường cao AH . Gọi D, E, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC . Chứng minh rằng:
- DE là đường trung trực của AH
 - $DEKH$ là hình thang cân.
13. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có ($AB < AC$), có đường cao AH và đường trung tuyến AE . Từ E vẽ $EF \perp AC$ tại E . Vẽ $ED \perp AB$ tại D .
- Chứng minh tứ giác $ADEF$ là hình chữ nhật.
 - Chứng minh tứ giác $BDFE$ là hình bình hành.
 - Chứng minh tứ giác $DFEH$ là hình thang cân.
 - Gọi L là điểm đối xứng với E qua F , K là điểm đối xứng với B qua F . Chứng minh A, L, K thẳng hàng.
14. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.
15. Cho hình thoi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .
- Chứng minh $MN \perp MQ$.
 - Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Bài 17: TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• Trong một tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề với hai đoạn ấy.

• **Chú ý**

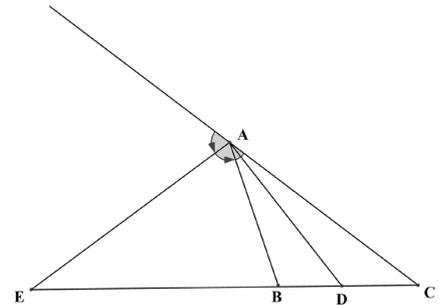
Đường phân giác của góc ngoài của một tam giác cũng có tính chất tương tự như đường phân giác trong.

AD là đường phân giác trong của góc A nên

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

AE là đường phân giác ngoài của góc A nên

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$



B. BÀI TẬP

Dạng 1: Tính tỉ số, tính độ dài đoạn thẳng.

1. Cho $\triangle ABC$ cân tại C có $AB = 3cm$, $AC = 5cm$. Đường phân giác BD cắt đường trung tuyến CM tại I .

a) Tính tỉ số $\frac{IC}{IM}$.

b) Tính tỉ số $\frac{CD}{CB}$.

2. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AM, BN, CK . Biết $AB = 30, AC = 45, BC = 50$

a) Tính KA, KB, MB, NC, NA

b) Chứng minh rằng: $\frac{KA}{KB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$

3. Cho tam giác ABC cân tại A có chu vi $80cm$. Tia phân giác góc B cắt đường cao AH tại I . Biết $AI = \frac{3}{4}AH$, tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

Dạng 2 : Chứng minh hai đường thẳng song song

4. Cho tam giác cân ABC có $AB = BC$. Đường phân giác góc A cắt BC tại M , đường phân giác góc C cắt BA tại N . Chứng minh $MN \parallel AC$.



5. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Đường phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D , đường phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở e .

a) Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

b) Gọi I là giao điểm của DE và AM . Chứng minh I là trung điểm của DE

6. Cho hình bình hành $ABCD$, các tia phân giác của các góc A và D lần lượt cắt đường chéo BD và AC tại M và N . Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.

Dạng 3. Chứng minh các đẳng thức hình học.

7. Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AD . Đường phân giác \widehat{ADB} cắt cạnh AB ở M . Đường phân giác của \widehat{ADC} cắt AC ở N Gọi K là giao điểm của AD và MN .

a) So sánh $\frac{MA}{MB}$ và $\frac{DA}{DB}$.

b) Chứng minh rằng MN song song với BC .

c) Chứng minh $AM.AC = AN.AB$

d) Chứng minh K là trung điểm của MN .

8. Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM và MD là đường phân giác trong $\triangle MAB$. Từ D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại E .

a) Chứng minh $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MB}$.

b) Chứng minh: ME là đường phân giác của $\triangle MAC$.

9. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$. Đường cao AH , trung tuyến AM . Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt đường thẳng BC tại D . Chứng minh:

a) AB là tia phân giác \widehat{DAH} .

b) $BH.CD = BD.CH$.

10. Cho tam giác ABC , các đường phân giác AD, BE, CF giao nhau tại I . Chứng minh:

a) $\frac{DI}{DA} = \frac{BC}{C_{ABC}}$

b) $\frac{DI}{DA} + \frac{EI}{EB} + \frac{FI}{FC} = 1$

11. Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AD . Gọi E là điểm đối xứng với A qua C . Đường thẳng đi qua B và song song với AC cắt ED ở K . Chứng minh rằng $\widehat{DAK} = 90^\circ$



Bài 18: THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• **Thu thập dữ liệu**

Thu thập dữ liệu có thể là trực tiếp hoặc gián tiếp

☼ Thu thập dữ liệu trực tiếp là việc thu thập dữ liệu thông qua quan sát, làm thí nghiệm, lập bảng hỏi, phỏng vấn, ...

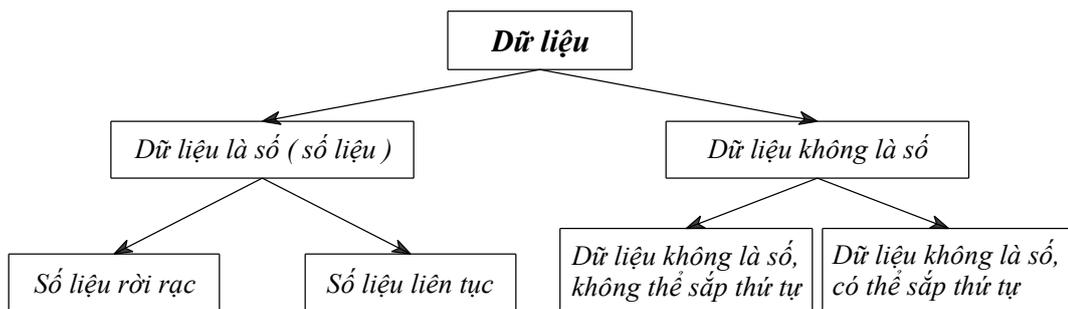
☼ Thu thập dữ liệu gián tiếp là việc thu thập dữ liệu từ những nguồn có sẵn như sách, báo, mạng internet; ...

Để có thể đưa ra các kết luận hợp lý, dữ liệu thu thập được phải đảm bảo tính đại diện cho toàn bộ đối tượng đang được quan tâm

• **Phân loại dữ liệu**

Số liệu có thể nhận ra giá trị tùy ý trong một khoảng nào đó được gọi là số liệu liên tục.

Số liệu không phải là số liệu liên tục được gọi là số liệu rời rạc.



B. BÀI TẬP

1. Em hãy thu thập các dữ liệu sau và cho biết dữ liệu mà em thu thập được là trực tiếp hay gián tiếp.

- a) Ngày sinh của các bạn trong tổ của mình.
- b) Các cầu thủ bóng đá Việt Nam chính thức tham gia AFF Cup 2022

2. Em muốn ước lượng thời gian đi học từ nhà đến trường của các bạn trong tổ.

- a) Em muốn thu thập dữ liệu này em sẽ làm gì? Đó là cách thu thập gián tiếp hay trực tiếp.
- b) Dữ liệu mà em thu thập được là số liệu hay không, nếu có thì nó có phải là liên tục không?

3. Dữ liệu thu thập được ở mỗi câu sau thuộc loại dữ liệu nào?

- a) Tên các màu sắc mà em yêu thích
- b) Thời gian làm bài tập của các bạn trong tổ.



c) Số xe đạp bán được của một cửa hàng bán xe đạp

4. Để mừng thọ các cụ vào đầu xuân. Bác tổ trưởng hội người cao tuổi trong thôn cần lên danh sách các cụ năm nay tròn 70 tuổi, 80 tuổi và 90 tuổi để mừng thọ.

a) Bác tổ trưởng có cách nào để thu thập dữ liệu trên? Cách đó là trực tiếp hay gián tiếp?

b) Trong các dữ liệu bác tổ trưởng thu được, dữ liệu nào không phải là số, dữ liệu nào là số. Dữ liệu là số có phải là dữ liệu liên tục hay không? Dữ liệu không phải là số có thể sắp thứ tự hay không?

5. Lớp trưởng lớp 8A thống kê số bạn có sở thích môn thể thao trong một lớp như sau :

- Các môn thể thao : *Bóng đá, cầu lông, cờ vua, đá cầu.*

- Số học sinh yêu thích lần lượt là : 80;19;22;10.

Mỗi dãy dữ liệu trên thuộc loại nào? Chỉ ra giá trị không hợp lí nếu có.

6. Cho các dãy dữ liệu là số liệu sau, em hãy cho biết đâu là dữ liệu liên tục, đâu là dữ liệu rời rạc

a) Nhiệt độ không khí trung bình 5 ngày trong tháng 6 / 2023 là
 $31,2^{\circ}C$; $32,1^{\circ}C$; $31,3^{\circ}C$; $34,2^{\circ}C$; $34,1^{\circ}C$.

b) Số đôi giày của các thành viên trong một gia đình: 2; 4; 6; 3.

c) Số công tơ điện của một hộ gia đình trong 5 giờ liên tiếp là
 $133,4kW.h$; $134,1kW.h$; $135,0kW.h$; $137,7kW.h$; $140,2kW.h$

d) Số học sinh vi phạm nội quy của lớp 8A trong 4 tuần của tháng Hai là:
6; 3; 7; 6.



Bài 19: BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BẢNG, BIỂU ĐỒ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Có thể dùng biểu đồ tranh, biểu đồ cột để biểu diễn số lượng các loại đối tượng khác nhau. Tuy nhiên, khi dùng biểu đồ tranh mà phải vẽ rất nhiều biểu tượng thì ta nên dùng biểu đồ cột.
- Nếu muốn biểu diễn sự thay đổi của một đại lượng theo thời gian ta dùng biểu đồ đoạn thẳng. Khi số lượng thời điểm quan sát ít ta cũng có thể biểu diễn bằng biểu đồ cột.

B. BÀI TẬP

1. Cho bảng thống kê về thời gian chạy bộ vào mỗi buổi sáng trong một tuần của bạn An như sau:

Thứ	2	3	4	5	6	7	CN
Thời gian (phút)	25	28	32	33	27	30	28

- a) Vẽ biểu đồ thích hợp cho bảng thống kê trên.
 b) Với bảng thống kê trên, có thể vẽ được những biểu đồ nào thì phù hợp.
2. Cho bảng thống kê thể hiện điểm cộng và trừ về thành tích thi đua của khối 8 trong 1 tuần.

Lớp	8A	8B	8C	8D
Điểm cộng	25	28	19	15
Điểm trừ	8	10	8	6

Vẽ biểu đồ thích hợp cho bảng thống kê trên.

3. Cho bảng thống kê thể hiện tỉ lệ phần trăm xếp loại học lực của lớp 8B trong kì 1

Học lực	Giỏi	Khá	Trung bình
Tỉ lệ phần trăm	25%	60%	15%

Vẽ biểu đồ thích hợp thể hiện bảng thống kê trên.

4. Cho bảng thống kê về tỉ lệ phần trăm yêu thích môn học của lớp 8C.

Môn học yêu thích	Toán	Văn	Anh	Khoa học
Tỉ lệ phần trăm	30%	25%	20%	25%



- a) Vẽ biểu đồ cột thể hiện bảng thống kê trên.
- b) Vẽ biểu đồ quạt tròn thể hiện bảng thống kê trên
- c) Có nhận xét gì về việc so sánh hai biểu đồ trên và việc bảng thống kê cho tỉ lệ phần trăm nhưng lại được biểu thị trên biểu đồ cột.

5. Cho bảng thống kê về số học sinh đạt học sinh giỏi cấp huyện môn Toán của bốn khối trong trường.

Khối lớp	6	7	8	9
Số học sinh	16	24	20	25

- b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng thể hiện bảng thống kê trên.
- b) Hãy tính toán và vẽ biểu đồ hình quạt tròn thể hiện biểu đồ trên.

6. Thống kê học sinh lớp 8A của một trường yêu thích các loại trái cây: *Chuôi; Cam; Lê; Mãng cụt*. Sau khi bình xét tỉ lệ phần trăm các trái cây yêu thích của học sinh lớp 8A theo mỗi loại trái cây: *Chuôi; Cam; Lê; Mãng cụt* lần lượt là : 20%; 20%; 30%; 30%. Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.

7. Thống kê số dép bán được của các cỡ dép 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40 của các khách hàng lần lượt là 62; 80; 124; 43; 21; 13; 1 (đơn vị :đôi).

- a) Hãy hoàn thiện bảng sau để nhận được bảng thống kê biểu diễn dữ liệu trên.

Cỡ dép	34	35	36	37	38	39	40
Số dép bán được (đôi)							

- b) Hãy lựa chọn bảng thống kê thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.

8. Thống kê số lượng siêu thị ở TP Hồ Chí Minh trong các năm 2015; 2018; 2019 ; 2020; 2021 lần lượt là 179; 204; 206; 237; 237. (Nguồn : Niên giám thống kê 2021).

- a) Lập bảng số liệu thống kê số lượng siêu thị ở TP Hồ Chí Minh trong các năm trên theo mẫu sau :

Năm	2015	2018	2019	2020	2021
Số lượng siêu thị					

- b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số lượng siêu thị ở TP Hồ Chí Minh trong các năm 2015; 2018; 2019; 2020; 2021.



Bài 20: PHÂN TÍCH SỐ LIỆU THỐNG KÊ DỰA VÀO BIỂU ĐỒ

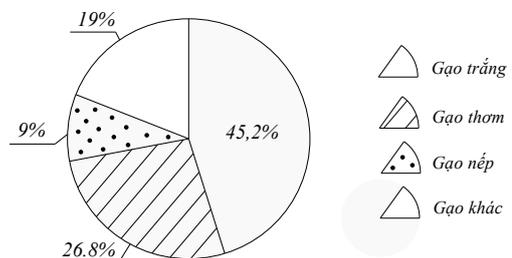
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhận xét

- Trong biểu đồ cột, khi gốc của trục đứng khác 0 thì tỉ lệ chiều cao các cột không bằng tỉ lệ số liệu mà chúng biểu diễn.
- Trong biểu đồ đoạn thẳng, khi các điểm quan sát trên trục ngang không đều nhau, không thể dựa vào độ dốc để kết luận về độ tăng, giảm của đại lượng được biểu diễn

B. BÀI TẬP

Bài 1: Cho biểu đồ xuất khẩu các loại gạo của nước ta trong năm 2020.



Hình 1

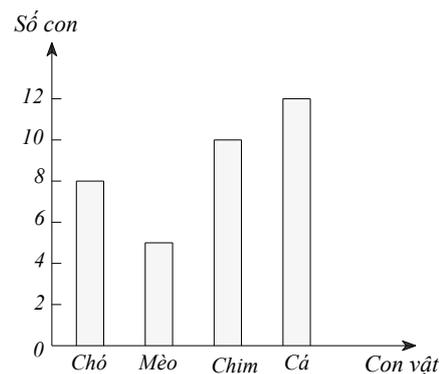
a) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

b) Loại gạo nào nước ta xuất khẩu nhiều nhất và

ít nhất chiếm bao nhiêu phần trăm.

c) Biết rằng tổng lượng gạo xuất khẩu là 6,15 triệu tấn gạo. Hãy tính xem số lượng gạo thơm nước ta xuất khẩu trong năm 2020.

Bài 2: Biểu đồ ở Hình 2 thể hiện số các con vật nuôi của các bạn trong lớp 8B



Hình 2

a) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

b) Con vật nào được nuôi nhiều nhất, ít nhất, là bao nhiêu?

c) Trong các con vật nuôi trên, số con vật nào nhiều gấp đôi con vật nào?

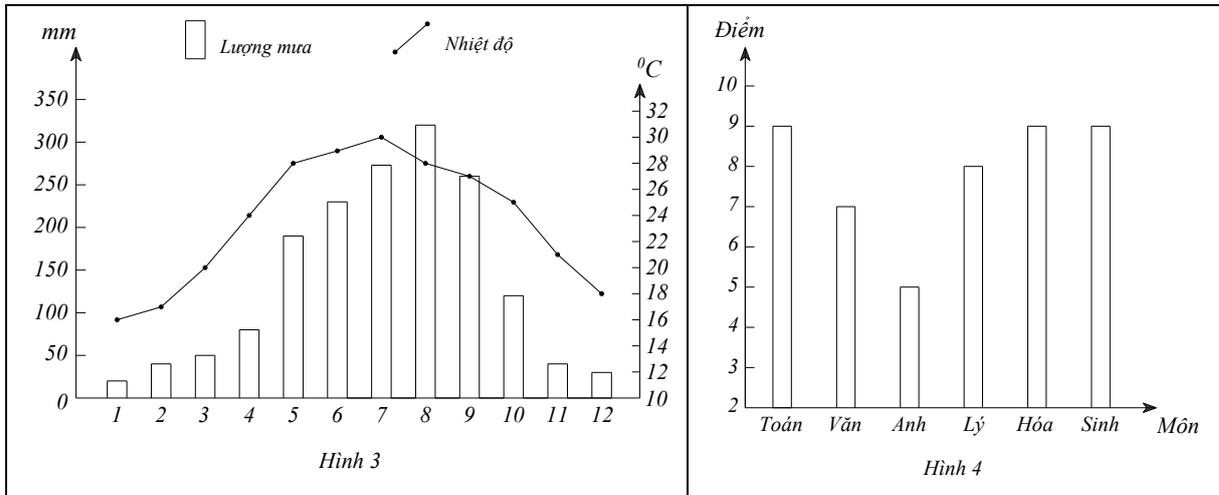
Bài 3: Cho biểu đồ về lượng mưa và nhiệt độ trong năm 2022 của Hà Nội (Hình 3).

a) Tháng nào có nhiệt độ cao nhất, thấp nhất? Vì sao lại có sự khác biệt này?

b) Tháng nào có lượng mưa nhiều nhất, ít nhất?



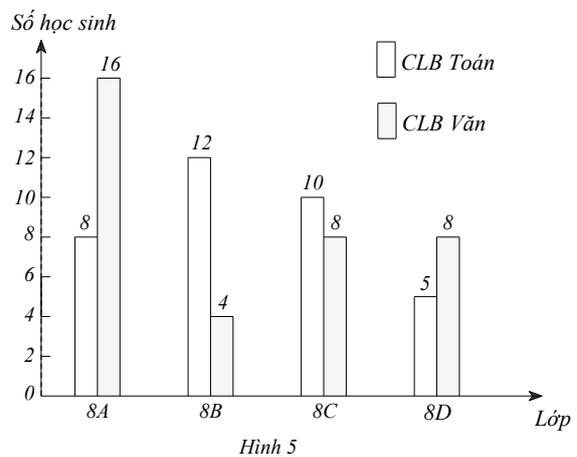
c) Em thích tháng nào nhất trong năm và tháng đó có nhiệt độ và lượng mưa như thế nào?



Bài 4: Biểu đồ Hình 4 về số điểm đạt được của một số môn trong đợt kiểm tra giữa học kì 2 của bạn Hòa.

- a) Bạn Hòa có điểm môn nào cao nhất, thấp nhất? Là bao nhiêu điểm?
- b) Bạn Hòa có bị môn nào dưới trung bình không? Có môn nào được điểm suất xác không?
- c) Lập bảng thống kê bảng điểm cho bạn Hòa và chỉ ra điểm giống và khác nhau giữa điểm của bản thân với điểm của bạn Hòa?

Bài 5: Biểu đồ ở Hình 5 thể hiện số lượng học sinh khối lớp 8 tham gia hai câu lạc bộ Toán và Văn của trường.



a) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

B) Cho biết về sự khác nhau về việc tham gia đăng kí hai câu lạc bộ Toán và Văn của hai lớp 8A và 8B.

c) Nếu lớp 8A có số lượng tham gia câu lạc bộ môn Toán chiếm 20% tổng số học sinh cả lớp. Hãy tính xem lớp 8A có bao nhiêu học sinh.



d) Hãy so sánh tỉ số học sinh tham gia CLB Toán và CLB Văn của hai lớp 8A và 8B.

Bài 6: Biểu đồ ở Hình 6 thống kê số lượng

ti vi bán được của ba cửa hàng trong tháng 5 và tháng 6 của năm 2018.

a) So sánh số lượng ti vi bán được của mỗi cửa hàng trong tháng 5 và tháng 6.

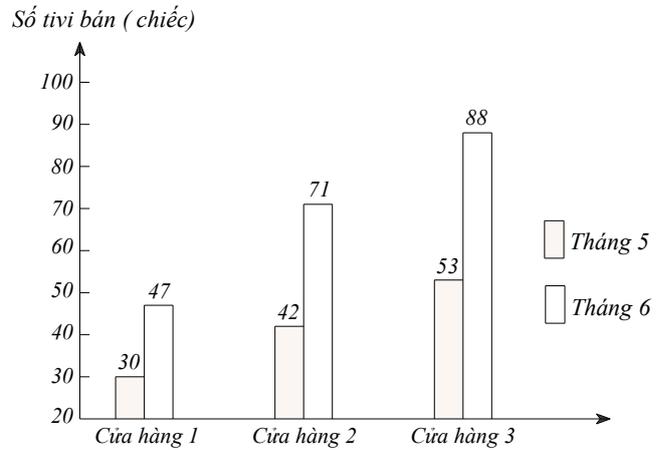
b) Cửa hàng 3 bán được nhiều ti vi nhất trong cả tháng 5 và tháng 6. Em có thể đưa ra một lí do phù hợp nhất để giải thích cho kết quả này được không? Em đồng ý với những nhận xét nào sau đây:

- + Cửa hàng 3 bán ti vi với giá rẻ nhất.
- + Cửa hàng 3 chăm sóc khách hàng tốt nhất.
- + Cửa hàng 3 có nhiều loại ti vi cho người mua hàng lựa chọn.
- + Cửa hàng 3 ở vị trí thuận lợi cho việc đi lại mua bán của người mua hàng?

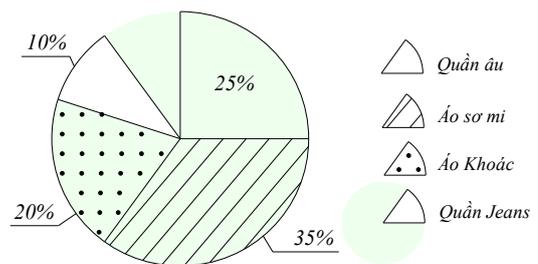
c) Số lượng ti vi mà cả ba cửa hàng bán được trong tháng 6 nhiều hơn số lượng ti vi mà cả ba cửa hàng bán được trong tháng 5 là bao nhiêu chiếc? Em có biết giải bóng đá World Cup 2018 diễn ra vào tháng nào không? Sự kiện đó có liên quan đến việc mua bán ti vi trong tháng 6 hay không?

d) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

Bài 7: Một cửa hàng bán quần áo đưa ra chương trình khuyến mại giảm giá như biểu đồ ở Hình 6



Hình 6



Hình 7



- a) Trong các mặt hàng trên, sản phẩm nào được giảm giá nhiều nhất, ít nhất với mức giảm bao nhiêu phần trăm?
- b) Hãy giải thích vì sao trong biểu đồ trên tổng các thành phần lại không phải 100%. Với các số liệu ở biểu đồ ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ nào?
- c) Cô Hải đã mua 2 chiếc áo sơ mi với giá mỗi chiếc sau khi giảm giá là 325 000 đồng và 4 chiếc quần âu. Khi đó tổng số tiền hóa đơn cô Hải thanh toán tại quầy là 1 850 000 đồng. Em hãy tính xem mỗi chiếc áo sơ mi và mỗi chiếc quần âu cô Hải mua trị giá bao nhiêu tiền nếu chưa được giảm giá?



Bài 1. ĐƠN THỨC

1. Các biểu thức là đơn thức $12x^2y$; 18 .

2. Các biểu thức không phải là đơn thức: $x^2 - y^2$; $x - y + xy$; $\frac{3}{4xy}$; $x(y + 1)$.

3. a) Phần hệ số $\frac{1}{3}$, phần biến xy^3 b) Phần hệ số $-\frac{3}{4}$, phần biến x^2y^2 .

c) Phần hệ số 5, phần biến x^2y d) Phần hệ số $-\frac{1}{2}$, phần biến xy^3 .

4. a) $2x^2y3xy^2 = 6x^3y^3$ b) $2xy\frac{4}{5}x^2y^310xyz = 16x^4y^5z$

c) $-10y^2(2xy)^3(-x)^2 = -80x^5y^5$.

5. a) $2xy^2\frac{4}{3}x^2y^36x = 16x^4y^5$; đơn thức thu được có bậc 9.

b) $\frac{4}{3}x^2y^2z^2\frac{3}{4}xyz = x^3y^3z^3$; đơn thức thu được có bậc 9.

c) $-4a^2x(-2bxy)^2\left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right) = 4a^2b^2x^5y^5$; đơn thức thu được có bậc 10.

6. Nhóm 1: $\frac{5}{4}x^2y$; $-\frac{1}{2}x^2y$; x^2y Nhóm 2: x^2y^2 ; $6x^2y^2$ Nhóm 3: $-2xy^2$; $-\frac{2}{5}xy^2$

7. Nhóm 1 : $\frac{3}{2}xy$; $\frac{5}{6}xy$; $-3xy$. Nhóm 2: $\frac{3}{4}xyz$; $7xyz$. Nhóm 3: $-\frac{1}{3}x^2z$; $\frac{5}{6}x^2z$

8. Các đơn thức đồng dạng với $-3x^2yz$ là $\frac{2}{3}x^2yz$, $\frac{3}{2}yzx^2$.

9. Đơn thức không đồng dạng với đơn thức $2xy^2z^3$ là: $3x^2yz$; $5xyz$

10. a) $2x^2y + \frac{2}{3}x^2y = \left(2 + \frac{2}{3}\right)x^2y = \frac{8}{3}x^2y$

b) $3xy^3 + 5xy^3 + xy^3 = (3 + 5 + 1)xy^3 = 9xy^3$

c) $3xy^2z^3 - 7xy^2z^3 = (3 - 7)xy^2z^3 = -4xy^2z^3$



$$d) 3xy^2 + \frac{1}{4}xy^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)xy^2 = \left[3 + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]xy^2 = \frac{11}{4}xy^2$$

$$11. a) 3xy^2 + \frac{1}{3}xy^2 = \frac{10}{3}xy^2$$

$$b) 2x^2y^2 + 3x^2y^2 + x^2y^2 = 6x^2y^2$$

$$c) 3x^2yz^2 - 4x^2yz^2 = -x^2yz^2$$

$$d) 2x^2y + \frac{2}{3}x^2y + \frac{-1}{3}x^2y = \frac{7}{3}x^2y$$

$$12. a) M = -3x^4y^3 - 2x^4y^3 = -5x^4y^3$$

$$b) M = 2x^3y^3 - 4x^3y^3 = -2x^3y^3$$

$$c) M = -x^2y^3 - 3x^2y^3 = -4x^2y^3$$

$$d) M = 7x^2y^2 - 3x^2y^2 = 4x^2y^2$$

13.

$$a) 2x^4y^4 + 3M = 3x^4y^4 - 2x^4y^4$$

$$b) x^2 - 2M = 3x^2$$

$$3M = 3x^4y^4 - 2x^4y^4 - 2x^4y^4$$

$$2M = x^2 - 3x^2$$

$$3M = -x^4y^4$$

$$2M = -2x^2$$

$$M = -\frac{1}{3}x^4y^4$$

$$M = -x^2$$

$$14. \text{Thu gọn: } P = 2011x^2y + 12x^2y - 2015x^2y = 8x^2y$$

$$\text{Thay } x = -1; y = 2 \text{ vào } P \text{ ta được } P = 8 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = 16$$

$$15. \text{Thu gọn: } P = 2018xy^2 + 16xy^2 - 2016xy^2 = 18xy^2$$

$$\text{Thay } x = -2; y = \frac{1}{3} \text{ vào } P \text{ ta được } P = 18 \cdot (-2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -4$$

$$16. a) \text{Thu gọn } M = 15x^2y^4 - 10x^2y^4 - 6x^2y^4 = -x^2y^4.$$

$$\text{Thay } x = -\frac{1}{2}; y = 2 \text{ vào } M \text{ ta được } M = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^4 = -4$$

$$b) \text{Thu gọn } M = 20x^3y + 15x^3y - 40x^3y = -5x^3y.$$

$$\text{Thay } x = -2, y = \frac{1}{5} \text{ vào } M \text{ ta được } M = -5 \cdot (-2)^3 \cdot \frac{1}{5} = 8$$

$$17. a) A = \left(\frac{2}{3}x^2y^2\right)\left(\frac{-6}{5}x^4y^3\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-6}{5} \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot y^3 = \frac{-4}{5} \cdot x^6y^5. \text{ Bậc là } 11.$$



b) Tại $x = -1, y = -2$ thì đơn thức A có giá trị là

$$A = \frac{-4}{5} \cdot (-1)^6 \cdot (-2)^5 = \frac{(-4) \cdot 1 \cdot (-32)}{5} = \frac{128}{5}$$



Bài 2. ĐA THỨC

1. Các đa thức là $x^2y - 2 + 3xy^2$; 2018; $x(x + y)$.

2. Biểu thức không phải là đa thức là $x - 2 + \frac{3}{x}$; $\frac{x^2 + 1}{xy}$.

3. a) $A = (-x^2 + 2x^2) + (-2x + 5x) + 2 = x^2 + 3x + 2$

b) $B = (-2xy + xy) + \left(\frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2\right) = -xy + 2xy^2$

c) $C = (x^2 + x^2 + x^2) + (y^2 - y^2 + y^2) + (z^2 + z^2 - z^2) = 3x^2 + y^2 + z^2$

d) $D = (xy^2z + 2xy^2z - 3xy^2z + xy^2z) - xyz = xy^2z - xyz$

4. a) $A = (2x^2 - x^2) + (4x + x) + 6 = x^2 + 5x + 6$.

b) $B = (4xy - xy) + \left(\frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2y\right) = 3xy + 2x^2y$.

c) $C = (x^2 - x^2 + x^2) + (y^2 - y^2 + y^2) + (z^2 + z^2 - z^2) = x^2 + y^2 + z^2$.

d) $D = (2x^2yz - 5x^2yz) + (4xy^2z + xy^2z) - xyz = -3x^2yz + 5xy^2z - xyz$.

5. a) $A = (-x^2 + 2x^2) + (5x - 2x) + 2 = x^2 + 3x + 2$. **Bậc của A bằng 2.**

b) $B = (-2xy + xy) + \left(\frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2\right) = -xy + 2xy^2$. **Bậc của B bằng 3.**

c) $C = (x^2 + x^2 + x^2) + (y^2 - y^2 + y^2) + (z^2 + z^2 - z^2) = 3x^2 + y^2 + z^2$. **Bậc 2.**

d) $D = (xy^2z + 2xy^2z - 3xy^2z + xy^2z) - xyz = xy^2z - xyz$. **Bậc 4.**

6. a) $A = (x^2 - x^2 + x^2) + (y^2 - y^2 + y^2) + (z^2 + z^2 - z^2) = x^2 + y^2 + z^2$. **Bậc 2.**

b) $B = (2x^2 - x^2) + (4x + x) + 6 = x^2 + 5x + 6$. **Bậc 2.**

c) $C = (2x^2yz - 5x^2yz) + (4xy^2z + xy^2z) - xyz = -3x^2yz + 5xy^2z - xyz$. **Bậc 4.**



d) $D = (4xy - xy) + \left(\frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2y\right) = 3xy + 2x^2y$. **Bậc 3.**

7. a) $A = (3x^2 + 2x^2) - 2x + 3 = 5x^2 - 2x + 3$. **Bậc của A bằng 2.**

b) $B = (2x^2y^3 - x^2y^3) + (3x^4 + 6x^4) - 7x^2 = x^2y^3 + 9x^4 - 7x^2$. **Bậc bằng 5.**

c) $C = (-x^2 + 5x^2) - 4x = 4x^2 - 4x$. **Bậc bằng 2.**

d) $D = (4x^2y^3 - x^2y^3) + (x^4 + 6x^4) - 2x^2 = 3x^2y^3 + 7x^4 - 2x^2$. **Bậc bằng 5.**

8. Ta có $A = x^3y^4 - 5y^8 + x^3y^4 + xy^4 - xy^4 + 5y^8$
 $= (x^3y^4 + x^3y^4) + (-5y^8 + 5y^8) + (xy^4 - xy^4) = 2x^3y^4$. **Bậc của A là 7.**

b) Thay $x = 1; y = -1$ vào A ta có $A = 2$.

9. $B = 3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 - 3x^5y^3 = (3x^5y^3 - 3x^5y^3) + (-4x^4y^3 + 2x^4y^3) = -2x^4y^3$

Tại $x = 1; y = -2$ thì $B = -2 \cdot 1^4 \cdot (-2)^3 = 16$.

10. a) $A = 6xy^2 + 7xy^3 + 8x^2y^3$; tại $x = 2; y = \frac{1}{2}$

Thay $x = 2; y = \frac{1}{2}$ vào $A = 6xy^2 + 7xy^3 + 8x^2y^3$ ta được :

$$A = 6 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8 \cdot (2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{35}{4}$$

b) $B = 7x^2y - 4x^6 + 3y^2z + 4x^6$; tại $x = 2; y = 1; z = 4$

Thay $x = 2; y = 1; z = 4$ vào $C = 7x^2y - 4x^6 + 3y^2z + 4x^6$ ta được :

$$7 \cdot 2^2 \cdot 1 - 4 \cdot 2^6 + 3 \cdot 1^2 \cdot 4 + 4 \cdot 2^6 = 40$$

11. a) Khi $x = y - 1$ ta có $6x - 12(y + 2) + 6y = 6(y - 1) - 12(y + 2) + 6y = -30$.

b) Khi $x = y$ ta có $6xy - 4x^2 - 2y^2 - 3 = 6x^2 - 4x^2 - 2x^2 - 3 = -3$.

c) Khi $x = 1; y = -1$ thì $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4 + \dots + x^{2019}y^{2019}$

$$= \underbrace{-1 + 1 - 1 + 1 - \dots + 1}_{2018 \text{ số hạng}} - 1 = -1$$



$$\begin{aligned} \text{d) } 3x^4 + 5x^2y^2 + 2y^4 + 2y^2 &= (3x^4 + 3x^2y^2) + (2x^2y^2 + 2y^4) + 2y^2 \\ &= 3x^2(x^2 + y^2) + 2y^2(x^2 + y^2) + 2y^2 = 6x^2 + 4y^2 + 2y^2 = 6(x^2 + y^2) = 12 \end{aligned}$$

12. a) $A = x^2 + 2xy - 3x^2 + 2y^2 + 3x^2 - y^2$ tại $x = 5; y = 4$.

Ta có $A = x^2 + 2xy - 3x^2 + 2y^2 + 3x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

Với $x = 5; y = 4$ thì $A = 5^2 + 4^2 + 2.5.4 = 81$

b) $B = xy - x^2y^2 + x^4y^4 - x^6y^6 + x^8y^8$ tại $x = -1; y = -1$.

Với $x = -1; y = -1$ thì $x.y = 1$, khi đó $B = 1 - 1^2 + 1^4 - 1^6 + 1^8 = 1$.

c) $C = xyz + x^2y^2z^2 + x^3y^3z^3 + \dots + x^{10}y^{10}z^{10}$ tại $x = y = z = -1$.

Với $x = y = z = -1$ thì $x.y.z = -1$, khi đó $B = -1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{10} = 0$.



Bài 3: PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC

1. $A + B = (2x + 3y) + (2x - y) = 2x + 3y + 2x - y = 4x + 2y.$

Và $A - B = (2x + 3y) - (2x - y) = 2x + 3y - 2x + y = 4y.$

b) $A + B = (x^2y + x^3 - xy^2 + 2) + (x^3 + xy^2 - x^2y - 7)$
 $= x^2y + x^3 - xy^2 + 2 + x^3 + xy^2 - x^2y - 7 = 2x^3 - 5.$

Và $A - B = (x^2y + x^3 - xy^2 + 2) - (x^3 + xy^2 - x^2y - 7)$
 $= x^2y + x^3 - xy^2 + 2 - x^3 - xy^2 + x^2y + 7$
 $= 2x^2y - xy^2 + 9.$

c) $A + B = (2x^2 - yz - z^2 + 1) + (4yz + 3x^2 + z^2 - 2)$
 $= 2x^2 - yz - z^2 + 1 + 4yz + 3x^2 + z^2 - 2$
 $= 5x^2 + 3yz - 1$

Và $A - B = (2x^2 - yz - z^2 + 1) - (4yz + 3x^2 + z^2 - 2)$
 $= 2x^2 - yz - z^2 + 1 - 4yz - 3x^2 - z^2 + 2$
 $= -x^2 - 5yz - 2z^2 + 3$

d) $A + B = \left(x^2y + \frac{3}{2}xy^3 - \frac{11}{2}x^3y^2 + x^3\right) + \left(\frac{1}{2}xy^3 - x^2y + \frac{9}{2}x^3y^2\right)$
 $= x^2y + \frac{3}{2}xy^3 - \frac{11}{2}x^3y^2 + x^3 + \frac{1}{2}xy^3 - x^2y + \frac{9}{2}x^3y^2 = 2xy^3 - x^3y^2 + x^3$

Và $A - B = \left(x^2y + \frac{3}{2}xy^3 - \frac{11}{2}x^3y^2 + x^3\right) - \left(\frac{1}{2}xy^3 - x^2y + \frac{9}{2}x^3y^2\right)$
 $= x^2y + \frac{3}{2}xy^3 - \frac{11}{2}x^3y^2 + x^3 - \frac{1}{2}xy^3 + x^2y - \frac{9}{2}x^3y^2 = 2x^2y + 2xy^3 - 10x^3y^2 + x^3$



$$\begin{aligned} 2. \quad A &= (x^2 - xy + y^2) - (-x^2 + 7xy - 5y^2) = x^2 - xy + y^2 + x^2 - 7xy + 5y^2 \\ &= 2x^2 - 8xy + 6y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad B &= (xy^2 - 3x^2y) - (-2xy^2 - 5x^2y) + (x^2y - 3xy^2) \\ &= xy^2 - 3x^2y + 2xy^2 + 5x^2y + x^2y - 3xy^2 = 3x^2y. \end{aligned}$$

3.

$$a) \quad A = (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + 2xy + y^2) = x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$$

$$\begin{aligned} b) \quad B &= \left(\frac{1}{2}xy - 3xy^2\right) + (2xy^2 + 3xy) - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}xy - 3xy^2 + 2xy^2 + 3xy - \frac{1}{2}xy \\ &= -xy^2 + 3xy \end{aligned}$$

$$4. \quad a) \quad M + N = 2x^3 - 2x^2y + xy + 1 + 3x^2y + 2xy - 2 = 2x^3 + x^2y + 3xy - 1.$$

$$\begin{aligned} b) \quad M - P &= 2x^3 - 2x^2y + xy + 1 - (x^3 - x^2y - 3xy + 1) \\ &= 2x^3 - 2x^2y + xy + 1 - x^3 + x^2y + 3xy - 1 \\ &= x^3 - x^2y + 4xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad M - 2P &= 2x^3 - 2x^2y + xy + 1 - 2 \cdot (x^3 - x^2y - 3xy + 1) \\ &= 2x^3 - 2x^2y + xy + 1 - 2x^3 + 2x^2y + 6xy - 2 = 7xy - 1. \end{aligned}$$

$$d) \quad M + N + P = 2x^3 - 2x^2y + xy + 1 + 3x^2y + 2xy - 2 + x^3 - x^2y - 3xy + 1 = 3x^3$$

$$5. \quad a) \quad M + N = 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 + x^2y - 2xy - 2 = 3x^3 + 1$$

$$\begin{aligned} b) \quad M - P &= 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 - (3x^3y - 2x^2y - xy + 3) \\ &= 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 - 3x^3y + 2x^2y + xy - 3 = 3x^2y + 3xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad M - 2P &= 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 - 2 \cdot (3x^3y - 2x^2y - xy + 3) \\ &= 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 - 6x^3y + 4x^2y + 2xy - 6 = -3x^3 + 3x^2y + 4xy - 3. \end{aligned}$$

$$d) \quad M + N + P = 3x^3 - x^2y + 2xy + 3 + x^2y - 2xy - 2 + 3x^3y - 2x^2y - xy + 3$$



$$= 6x^3 - 2x^2y - xy + 4$$

6. a) $6x^2 - 3xy^2 + A = x^2 + y^2 - 2xy^2 \Rightarrow A = x^2 + y^2 - 2xy^2 - 6x^2 + 3xy^2$

$$= y^2 - 5x^2 + xy^2$$

b) $B - (2xy - 4y^2) = 5xy + x^2 - 7y^2 \Rightarrow B = 5xy + x^2 - 7y^2 + 2xy - 4y^2$

$$= x^2 + 7xy - 11y^2$$

7. a) $C = A + B = 4x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 = 7x^2 + 5y^2 - 5xy + 2x^2y^2$

b) $C + A = B \Rightarrow C = B - A = 3x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 - (4x^2 + 3y^2 - 5xy)$

$$= 3x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 - 4x^2 - 3y^2 + 5xy = -x^2 - y^2 - 5xy + 2x^2y^2 + 5xy$$

8. a) $A + x^2 - y^2 = x^2 - 2y^2 + 3xy - 2 \Rightarrow A = x^2 - 2y^2 + 3xy - 2 - x^2 + y^2$

$$= -y^2 + 3xy - 2$$

b) $B - (5x^2 - 2xyz) = 2x^2 + 2xyz + 1 \Rightarrow B = 2x^2 + 2xyz + 1 + 5x^2 - 2xyz = 7x^2 + 1$

9. Có nhiều cách viết, ví dụ:

a) $x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x^4 + 1 - x = (x^5 + 3x^4 - 2x^2) + (-2x^4 + 1 - x)$.

b) $x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x^4 + 1 - x = (x^5 + 3x^4 + 1) - (2x^2 + 2x^4 + x)$.

10. HS tự làm

11. Thu gọn A và B.

$$A = x^4 + 5x^3 + (x^2 - 2x^2) + (-2x + x) + (-3 + 4) = x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 1$$

$$B = (2x^4 - x^4) + 2x^3 + (-3x^2 + x^2) + (-5x + 2x) + 2 = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$$

- $A + B = x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 1 + x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

$$= 2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 4x + 3$$

- $A - B = x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 1 - (x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2)$

$$= x^4 + 5x^3 - x^2 - x + 1 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 3x^3 + x^2 + 2x - 1.$$



12.

$$\begin{aligned}A - B - C &= (5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2) - (-8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2) - (x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2) \\&= 5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2 + 8xy^3 - xy^2 + 4x^2y^2 - x^3 - 4x^3y + 6xy^3 + 4xy^2 - 5x^2y^2 \\&= x^3y - xy^2 - 7x^2y^2 + 14xy^3 - x^3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}B + A - C &= (-8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2) + (5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2) - (x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2) \\&= -8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2 + 5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2 - x^3 - 4x^3y + 6xy^3 + 4xy^2 - 5x^2y^2 \\&= -2xy^3 + xy^2 - 15x^2y^2 + x^3y - x^3\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}C - A - B &= (x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2) - (5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2) - (-8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2) \\&= x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2 - 5x^3y + 4xy^2 + 6x^2y^2 + 8xy^3 - xy^2 + 4x^2y^2 \\&= x^3 - x^3y + 2xy^3 - xy^2 + 15x^2y^2\end{aligned}$$



Bài 4: PHÉP NHÂN ĐA THỨC

1. a) $-\frac{1}{2}x^2y \cdot 2xy^3 = -x^3y^4$; đơn thức thu được có bậc 7.

b) $2x^3y \cdot \left(-\frac{1}{4}x^3y^5\right) = -\frac{1}{2}x^6y^6$; đơn thức thu được có bậc 12.

2. a) $-\frac{2}{3}xy^2 \cdot 3x^2y = -2x^3y^3$; đơn thức thu được có bậc 6.

b) $3x^2y \cdot \left(-\frac{1}{3}xy^3\right) = -x^3y^4$; đơn thức thu được có bậc 7.

3. a) $xy \cdot (-2y) \cdot 3x = -6x^2y^2$; bậc của đơn thức là 4.

b) $-\frac{3}{2}x^2y \cdot 2xy = -3x^3y^2$; bậc của đơn thức là 5.

c) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2 = \frac{1}{4}x^4y^6$; bậc của đơn thức là 10.

d) $\left(-\frac{1}{3}y\right)^2 \cdot (ax)^2 = \frac{a^2}{9}x^2y^2$; bậc của đơn thức là 4.

4. a) $2xy^2 \cdot \frac{4}{3}x^2y^3 \cdot 6x = 16x^4y^5$; đơn thức thu được có bậc 9.

b) $\frac{4}{3}x^2y^2z^2 \cdot \frac{3}{4}xyz = x^3y^3z^3$; đơn thức thu được có bậc 9.

c) $-4a^2x \cdot (-2bxy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right) = 4a^2b^2x^5y^5$; đơn thức thu được có bậc 10.

5. a) $(-2x^2)(x^2 - 2x + 3) = (-2x^2) \cdot x^2 - (-2x^2) \cdot 2x + (-2x^2) \cdot 3 = -2x^4 + 4x^3 - 6x^2$.

b) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)\left(x^2y - xy + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}xy^2\right)x^2y - \left(\frac{2}{3}xy^2\right)xy + \left(\frac{2}{3}xy^2\right)\frac{x}{2} + \left(\frac{2}{3}xy^2\right)\frac{1}{4}$

$$= \frac{2}{3}x^3y^3 - \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{1}{6}xy^2$$

6. a) $x(x^2 + 1) - 3x(3x - 2x^2) = x \cdot x^2 + x \cdot 1 - 3x \cdot 3x + 2x^2 \cdot 3x$



$$= x^3 + x - 9x^2 + 6x^3 = 7x^3 - 9x^2 + x$$

b) $(xy^2)(x - xy) - x(x + y) + yx(2x^2 - 2xy^2)$

$$= xy^2 \cdot x - xy^2 \cdot xy - x \cdot x - x \cdot y + yx \cdot 2x^2 - yx \cdot 2xy^2 = x^2y^2 - x^2y^3 - x^2 - xy + 2x^3y - 2x^2y^3$$

$$= x^2y^2 - x^2 - xy + 2x^3y - 3x^2y^3$$

7. a) Ta có:

$$A = 2x(3x^2 + 5) - x(3x - x^2) - x^2 = 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot 5 - x \cdot 3x + x \cdot x^2 - x^2$$

$$= 6x^3 + 10x - 3x^2 + x^3 - x^2 = 7x^3 - 4x^2 + 10x$$

Tại $x = 2$ thay vào ta được: $A = 7 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 56 - 16 + 20 = 60$

b) Ta có: $B = 6(x^2 - x) - x^2(4x - 2) + 4x(x^2 - 2x + 3)$

$$= 6x^2 - 6x - 4x^3 + 2x^2 + 4x^3 - 8x^2 + 12x$$

$$= 6x^2 - 6x - 4x^3 + 2x^2 + 4x^3 - 8x^2 + 12x = 12x - 6x = 6x$$

Tại $x = 4$ thay vào ta được: $B = 6(-4) = -24$

d) Ta có: $C = x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$

$$= x^3 + x^2y + xy^2 - y^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$$

Tại $x = 5$; $y = -1$; thay vào ta được: $C = 5^3 - (-1)^3 = 125 - (-1) = 126$

8. a) $-2x(x + 3) + x(2x - 1) = 10 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x + 2x^2 - x = 10 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$

b) $\left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{9x}{2} + \frac{1}{4}\right) - (3x^2 + x + 2) = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{9x}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}x\right)\frac{1}{4} - (3x^2 + x + 2) = 3$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + \frac{x}{6} - 3x^2 - x - 2 = 3 \Leftrightarrow -\frac{5x}{6} - 2 = 3 \Leftrightarrow -\frac{5x}{6} = 5 \Leftrightarrow x = -6$$

9. a) $(-2x + 1)\left(2x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right) = -2x \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right) + 1 \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right)$



$$= -4x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 4x + 2x^2 - \frac{1}{3}x + 2 = -4x^3 + \frac{8x^2}{3} - \frac{13x}{3} + 2$$

$$\text{b) } (x + y^2) \left(x^2 + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}xy \right) = (x + y^2)x^2 + (x + y^2)\frac{1}{2}y + (x + y^2)\frac{3}{2}xy$$

$$= x.x^2 + x^2.y^2 + x.\frac{1}{2}y + y^2.\frac{1}{2}y + x.\frac{3}{2}xy + y^2.\frac{3}{2}xy$$

$$= x^3 + x^2y^2 + \frac{xy}{2} + \frac{y^3}{2} + \frac{3x^2y}{2} + \frac{3xy^3}{2}$$

$$\text{c) } (-x)(2x + 2)(x^2 - x + 1) = ((-x).2x + (-x)2)(x^2 - x + 1)$$

$$= (-2x^2 - 2x)(x^2 - x + 1) = -2x^2(x^2 - x + 1) - 2x(x^2 - x + 1)$$

$$= (-2x^2)x^2 - (-2x^2)x + (-2x^2) - (2x.x^2 - 2x.x + 2x)$$

$$= -2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 2x = -2x^4 - 2x$$

$$\text{d) } (x + y) \left(x + \frac{1}{2}y \right) \left(1 - \frac{xy}{3} \right) = \left(x(x + y) + \frac{1}{2}y(x + y) \right) \left(1 - \frac{xy}{3} \right)$$

$$= \left(x^2 + xy + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2} \right) \left(1 - \frac{xy}{3} \right) = \left(x^2 + xy + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2} \right) - \frac{xy}{3} \left(x^2 + xy + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2} \right)$$

$$= \left(x^2 + xy + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2} \right) - \left(x^2 \cdot \frac{xy}{3} + xy \cdot \frac{xy}{3} + \frac{xy}{2} \cdot \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{2} \cdot \frac{xy}{3} \right)$$

$$= \left(x^2 + xy + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2} \right) - \left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{3} + \frac{x^2y^2}{6} + \frac{xy^3}{6} \right)$$

$$= x^2 + xy + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^3y}{3} - \frac{x^2y^2}{3} - \frac{x^2y^2}{6} - \frac{xy^3}{6}$$

$$= x^2 + \frac{3xy}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^3y}{3} - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{xy^3}{6}$$

$$\text{10. a) } (3x + 2y)(5x - y) - y^2 = 15x^2 - 3xy + 10xy - 2y^2 - y^2 = 15x^2 + 7xy - 3y^2;$$

$$\text{b) } (x + y)(x - y) - 9y^2 = x^2 - xy + xy - y^2 - 9y^2 = x^2 - 10y^2$$

$$(x - 2y)(x + 5y) - 3xy = x^2 + 5xy - 2xy - 10y^2 - 3xy = x^2 - 10y^2.$$

$$\text{11. a) } -1.$$

$$\text{b) } 16x.$$

$$\text{c) } 92.$$



12. a) $A = x^5 - 32$. Với $x = 3$ thì $A = 3^5 - 32 = 211$.

b) $B = x^8 - 1$. Với $x = 2$ thì $B = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$.

c) $C = x^7 + 1$. Với $x = 2$ thì $C = 2^7 + 1 = 128 + 1 = 129$.

d) $D = x$. Với $x = -5$ thì $D = -5$.

e) $E = (x - y)(x^2 - xy) - x(x^2 + 2y^2) = x(x^2 - xy) - y(x^2 - xy) - x.x^2 - x.2y^2$
 $= x.x^2 - x.xy - y.x^2 + y.xy - x^3 - 2xy^2$
 $= x^3 - x^2y - x^2y + xy^2 - x^3 - 2xy^2 = -2x^2y - xy^2$.

Tại $x = 2$; $y = -3$ thay vào ta được: $E = -2.2^2.(-3) - 2.(-3)^2 = 24 - 18 = 6$.

13. a) $(x + 2)(x + 3) - (x - 2)(x + 5) = 6 \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 6) - (x^2 + 3xx - 10) = 6$
 $\Leftrightarrow 2x + 16 = 6 \Leftrightarrow 2x = -10 \Leftrightarrow x = -5$.

b) $(3x + 2)(2x + 9) - (x + 2)(6x + 1) = (x + 1) - (x - 6)$
 $\Leftrightarrow (6x^2 + 31x + 18) - (6x^2 + 13x + 2) = 7 \Leftrightarrow 18x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

c) $3(2x - 1)(3x - 1) - (2x - 3)(9x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow 3(6x^2 - 5x + 1) - (18x^2 - 29x - 3) = 0 \Leftrightarrow (18x^2 - 15x + 3) - (18x^2 - 29x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow 14x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

14. a) $(1 - 2x)(x + 3) + (x + 1)(2x - 1) = 14$
 $\Leftrightarrow (1)(x + 3) - (2x)(x + 3) + (x)(2x - 1) + (1)(2x - 1) = 14$
 $\Leftrightarrow x + 3 - 2x^2 - 6x + 2x^2 - x + 2x - 1 = 14 \Leftrightarrow -4x = 12 \Leftrightarrow x = -3$

b) $(3x^2 + x + 2) - (2x + 1)(2 + x) - (x + 4)(x - 5) = 5$
 $\Leftrightarrow (3x^2 + x + 2) - ((2x)(2 + x) + 1(2 + x)) - (x(x - 5) + 4(x - 5)) = 5$
 $\Leftrightarrow (3x^2 + x + 2) - (4x + 2x^2 + 2 + x) - (x^2 - 5x + 4x - 20) = 5$
 $\Leftrightarrow 3x^2 + x + 2 - 2x^2 - 2 - 5x - x^2 + x + 20 = 5$
 $\Leftrightarrow -3x + 20 = 5 \Leftrightarrow x = 5$

c) $3x^2 + 4(x - 1)(x + 1) - 7x(x - 1) = x + 12$



$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4(x^2 - x + x - 1) - 7x^2 + 7x = x + 12$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4 - 7x^2 + 7x = x + 12$$

$$\Leftrightarrow -4 + 7x = x + 12 \Leftrightarrow 6x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{6}$$

$$\text{b) } (2x + 3)(x + 4) + (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 8x + 12 + x^2 - 5x - 2x + 10 = 3x^2 - 5x - 12x + 20$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 22 = 3x^2 - 17x + 20 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 22 - 3x^2 + 17x - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 21x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{21}$$

15. a) Biến đổi: $A = 5n^2 + 5n + 10 : 5$ (t/c chia hết của một tổng)

$$\text{b) } (a - 1) \cdot (b - 1) \cdot (c - 1) = (a - 1)(bc - b - c + 1) = abc - ab - ac + a - bc + b + c - 1$$

$$= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 = abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1$$

$$= abc - abc + 1 - 1 = 0 \text{ (điều phải chứng minh)}$$



Bài 5: PHÉP CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

1. a) $x^{24} : (-x)^{16} = x^{24} : x^{16} = x^{24-16} = x^8$

b) $x^{581} : (-x)^{469} = x^{581} : (-x^{469}) = -x^{581-469} = -x^{112}$

c) $19z^8 : (3z)^2 = 19z^8 : 9z^2 = \frac{19}{9}z^{8-2} = \frac{19}{9}z^6$.

d) $\frac{25}{4}(-x^3)^5 : \frac{5}{8}(-x)^2 = \left(\frac{25}{4} : \frac{5}{8}\right)(-x)^{15} : (-x)^2 = -10x^{13}$.

2. a) $-\frac{3}{5}x^2y^2$; b) $8y^4$; c) $5x^2y^2 - 2$.

3. a) $x^{n+19} : x^{14} = x^{n+19-14} = x^{n+5}$ b) $x^{94} : x^{17} : x^{65} = x^{77} : x^{65} = x^{12}$

4. $A = 5x^4y^2$ lấy giá trị không âm với mọi giá trị của x và y .

5. a) $A = \frac{3}{2}x^4y$. Thay $x = -3; y = \frac{2}{3}$ vào A ta tìm được $A = 81$.

b) $B = yz$. Thay $x = 1; y = -1; z = 100$ vào B ta được $B = -100$.

c) $C = \frac{3}{2}(x-2)^2$, thay $x = 3$ tính được $C = \frac{3}{2}$.

d) $D = -(x-y+z)^2$, thay $x = 17; y = 16; z = 1$ tính được $D = -4$.

6. a) $A : B \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}; n \geq 4$. b) $A : B \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}; n \geq 1$.

7. Ta phải có $\begin{cases} n-1 \geq 3 \\ 6 \geq n+2 \end{cases}$. Đáp số: $n = 4$

8. a) $\begin{cases} A : C \\ B : C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ 3n \geq 2 \\ 2n-6 \geq 4 \\ 18-2n \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ 7 \geq n \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{5; 6; 7\}$.

b) $\begin{cases} A : C \\ B : C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq n-1 \\ 2n+3 \geq 2 \\ 3-n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ 1 \geq n \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow n = 1$.

9. a) $(2x^3 : x) + (3x^4 : x) + (-12x^2 : x) = 2x^2 + 3x^3 - 12x$.

b) $2xy^2 - \frac{9}{2}x + \frac{25}{2}y^2$.



c) $\frac{-5}{3}xy^2 + \frac{14}{3}x^3 - \frac{8}{3}y^2$.

d) $6x^2yz - 3xy^2 - 9x^3yz^2$.

10. $5x^3.M = 25x^6 - 30x^5 + 10x^3 \Leftrightarrow M = (25x^6 - 30x^5 + 10x^3) : (5x^3)$

$\Leftrightarrow M = 5x^3 - 6x^2 + 2$

11. a) $A = 4x^5 - 5x^4 + \frac{1}{12}x$

b) $B = -2x^3y^2 - 3x^2y + 4$

12. a) Thực hiện phép chia được $A = 3x^3y - 2x + 4x^2y^2$.

Thay $x = -1; y = 2$ vào biểu thức tính được kết quả $A = 12$.

b) Rút gọn được $B = 4x^2 + 3x^2y - 6x$

Thay $x = y = -2$ vào biểu thức tính được kết quả $B = 4$.

13. a) $A = (20x^5y^4 + 10x^3y^2 - 5x^2y^3) : 5x^2y^2 = 4x^3y^2 + 2x - y$

Thay $x = 1; y = -1$ vào A ta được $A = 7$.

b) $B = (-2x^2y^2 + xy^2 - 6xy) : \frac{1}{3}xy = -6xy + 3y - 18$.

Thay $x = -\frac{1}{2}; y = 1$ vào B ta được $B = -12$.

b) $C = \left(\frac{1}{5}x^2y^5 - \frac{2}{5}x^5y^4\right) : 2x^2y^2 = \frac{1}{10}y^3 - \frac{1}{5}x^3y^2$.

Thay $x = -5; y = 10$ vào C ta được $C = 2600$.

c) $D = (7x^5y^4z^3 - 3x^4z^2 + 2x^2y^2z) : x^2yz = 7x^3y^3z^2 - 3x^2z + 2y$. Thay

$x = -1; y = 1; z = 2$ vào D ta được $D = -32$.

14. a) $(4x^4 + 3x^3) : (-x^3) + (15x^2 + 6x) : 3x = 0$

$\Leftrightarrow (-4x - 3) + (5x + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b) $(42x^3 - 12x) : (-6x) + 7x(x + 2) = 8$

$\Leftrightarrow (-7x^2 + 2) + (7x^2 + 14x) - 8 = 0 \Leftrightarrow 14x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{14}$

c) $(25x^2 - 10x) : (-5x) - 3(x - 2) = 4$



$$\Leftrightarrow (-5x + 2) - (3x - 6) - 4 = 0 \Leftrightarrow -8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

15. Đặt $t = x + y$ ta được kết quả $A = \frac{2}{3}(x + y)^2 - (x + y)$.

b) Tương tự a) chú ý $(y - x)^2 = (x - y)^2$; $-x + y = -(x - y)$.

Kết quả : $B = 5(x - y)^2 + 4(x - y) - \frac{1}{3}$.

16. a) Thực hiện phép chia được $A = -4(2x + 3y)^2 + 6(2x + 3y)$

Thay $x = \frac{3}{2}$; $y = 1$ vào biểu thức tính được kết quả bằng -108 .

b) Tương tự a) thu được kết quả bằng $B = -\frac{95}{2}$.



Bài 6: HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG. BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

1. Các đẳng thức là hằng đẳng thức là

a) $2x^3y(2x^2 - 3y + 5yz) = 4x^5y - 5x^3y^2 + 10x^3y^2z$

b) $\frac{-1}{3}y^2(6y - 3) - y\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(y - 8) = -2y^3 - 4$

2.

a) $(-3x + 2y)^2 = (-3x)^2 + 2(-3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

b) $(-x - xy)^2 = (-x)^2 - 2(-x)(xy) + (xy)^2 = x^2 + 2x^2y + x^2y^2$

c) $x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x - 2y)(x + 2y)$

d) $(x + y)^2 - (2 - y)^2 = ((x + y) - (2 - y))((x + y) + (2 - y)) = (x + 2y - 2)(x + 2)$

3. a) $4x^2 + 12x + 9.$

b) $36 - 36u + 9u^2.$

c) $y^2 - 16.$

d) $\frac{a^2}{4} - 4a + 16.$

4. a) $y^2 - 4xy^2 + 4x^2y^2.$

b) $x^2 - \frac{32}{5}xy + \frac{256}{25}y^2.$

c) $\frac{1}{9}a^2b^4 - c^6.$

d) $a^4 - \frac{8}{9}a + \frac{16}{81}.$

5.

a) $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

b) $(a - b + c)^2 = (a - b)^2 + 2(a - b)c + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

6. a) $(x + 1)^2.$

b) $(x - 4)^2.$

c) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2.$

d) $(2x - 2y)^2.$

7. a) $(2x + 1)^2.$

b) $(3x - 2)^2.$

c) $\left(\frac{1}{2}ab^2 + 1\right)^2.$

d) $(4uv^2 - 1)^2.$

8. a) $(x + 3)^2$

b) $(5x - y)^2$

c) $(x + \frac{1}{2})^2$

d) $(\frac{2}{3}x + 5y)^2.$

9. a) $A = (m + n)^2.$

b) $B = (6z + t)^2.$



c) $C = 8ab$.

d) $D = [(3a + 2) + (1 - 2b)]^2 = (3a - 2b + 3)^2$.

10. a) $(3x + 2)^2 + (4x - 1)^2 + (2 + 5x)(2 - 5x)$
 $= 9x^2 + 12x + 4 + 16x^2 - 8x + 1 + 4 - 25x^2$
 $= 4x + 9$

b) $(x + y - z)^2 + 2(x + y - z)(z - y) + (z - y)^2 = [(x + y - z) + (z - y)]^2$
 $= (x + y - z + z - y)^2 = x^2$

11. a) $21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 + 1 = 441$.

b) $62 \cdot 58 = (60 + 2)(60 - 2) = 60^2 - 2^2 = 3600 - 4 = 3596$.

12. Thực hiện tương tự bài 11. tính được

a) 39601.

b) 9801.

c) 249001.

d) 89999.

13. a) $A = (x + 4)^2 + 1$,

$B = (x - 5)^2 + 4$

b) $C = -(x^2 - 2x + 5) = -[(x - 1)^2 + 4]$,

$D = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$.

14. a) Từ $A = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} \geq \frac{31}{4} \Rightarrow A_{\min} = \frac{31}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

b) $B = y^2 + 8y + 15 = (y + 4)^2 - 1 \geq -1$. $B_{\min} = -1 \Leftrightarrow y = -4$.

c) Ta có $C = (x + 2y)^2 + (y - 2)^2 + (x + 4)^2 - 120 \geq -120$.

Tìm được $C_{\min} = -120 \Leftrightarrow x = -4$ và $y = 2$.

d) $D_{\min} = \frac{47}{4} \Leftrightarrow u = 1$ và $v = -\frac{3}{2}$.

15. a) $A = 4x^2 - 4x + 2023 = (2x)^2 - 2(2x) \cdot 1 + 1 + 2022$

$= (2x - 1)^2 + 2022 \geq 2022$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $B = -(x^2 - 5x + 127) = -\left[x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 127\right] = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 120 \frac{3}{4}\right]$.

B lớn nhất khi $x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

16.

a) $A = -x^2 - 2x + 5 = -x^2 - 2x - 1 + 6 = 6 - (x + 1)^2 \leq 6$



Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là 6 khi $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

b) Ta có:

$$B = 9x - 3x^2 + 4 = 3\left(-\frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x - x^2\right) + \frac{27}{4} + 4 = \frac{43}{4} - 3\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 \leq \frac{43}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức B là $\frac{43}{4}$ khi $\frac{3}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

17. a) $A = 8x^2 - 8x + 14 = 2(4x^2 - 4x + 1) + 12 = 2(2x - 1)^2 + 12 \geq 12$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 12 khi $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

b) $B = x^2 + x + 2 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là $\frac{7}{4}$ khi $x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.



Bài 7: LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

1. a) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.

b) $x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{12}{25}x - \frac{8}{125}$.

c) $27m^6 + \frac{27}{4}m^4n + \frac{9}{16}m^2n^2 + \frac{n^3}{64}$.

d) $-\frac{8}{27}u^9 - 2u^6v^2 - \frac{9}{2}u^3v^4 - \frac{27}{8}v^6$.

2. a) $27a^3 + 27a^2 + 9a + 1$.

b) $64 - 96b + 48b^2 - 8b^3$.

c) $8c^3 - 36c^2d + 54cd^2 - 27d^3$.

d) $\frac{27x^3}{y^3} - \frac{54x}{y} + \frac{36y}{x} - \frac{8y^3}{x^3}$.

3. a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

b) $x^3 - 3x^2y^2 + 3xy^4 - y^6$

c) $27x^6y^9 + 27x^4y^6z^4 + 9x^2y^3z^8 + z^{12}$.

d) $\frac{x^6}{y^9} - \frac{3x^4}{y^3z^2} + \frac{3x^2y^3}{z^4} - \frac{y^9}{z^6}$.

4. a) $(x + 2)^3$

b) $(2 - x)^3$

c) $(2x - y^2)^3$

d) $(-x + 2)^3$.

5. a) $(a + 4)^3$.

b) $(2 - b)^3$.

c) $\left[(m - n)^2 - 2 \right]^3$.

d) $\left(\frac{2a}{3} - 2b \right)^3$.

6. a) $\left(\frac{x}{2} + y^2 \right)^3$.

b) $(m + 3n)^3$.

c) $(2u - 4v)^3$.

d) $(z - t + 5)^3$.

7.

a) $A = (x - 1)^3 - (x + 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$
 $= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = -6x^2 - 2$

b) $B = (x + 1)^3 + 3(x + 1)^2(x - 1) + 3(x + 1)(x - 1)^2 + (x - 1)^3$
 $= \left((x + 1) + (x - 1) \right)^3 = (x + 1 + x - 1)^3 = (2x)^3 = 8x^3$

c) $C = (x - y)^3 - 3(x - y)^2x + 3(x - y)x^2 - x^3$
 $= \left((x - y) - x \right)^3 = (x - y - x)^3 = (-y)^3$

8. a) $A = 2a^3 + 6ab^2$.

b) $B = (x - z - a - b)^3$.

c) $C = [c + d + 2(c - d)]^3 = (3c - d)^3$.

d) $D = [m - n - (n + p)]^3 = (m - 2n - p)^3$.



9. Ta có $A = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 3.x^2.3 + 3.x.3^2 + 3^3 = (x + 3)^2$

Thay $x = -3$ vào $A = (x + 3)^3$ ta có $A = (-3 + 3)^3 = 0$. Vậy $A = 0$ với $x = -3$

b) Ta có $B = x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = x^3 - 3.x^2.4 + 3.x.4^2 - 4^3 = (x - 4)^3$

Thay $x = 5$ vào $B = (x - 4)^3$ ta có $B = (5 - 4)^3 = 1^3 = 1$

Vậy $B = 0$ với $x = 5$

c) Ta có

$$\begin{aligned} C &= (x - 3y)^3 + 3(x - 3y)^2(x + y) + 3(x - 3y)(x + y)^2 + (x + y)^3 \\ &= [(x - 3y) + (x + y)]^3 = [x - 3y + x + y]^3 = [2x - 2y]^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 1; y = 1$ vào $C = [2x - 2y]^3$ ta có $A = [2.1 - 2.1]^3 = [2 - 2]^3 = 0$

Vậy $C = 0$ với $x = 1; y = 1$

10. a) $A = (x + 2)^3$ nên $x = 48$ thì $A = 125000$.

b) $B = (3x - 2y)^3$ nên $x = 4; y = 6$ thì $B = 0$.

c) $C = \left(\frac{x}{2} - y - 2\right)^3$ nên $x = 206; y = 1$ thì $C = 10^6$.

11. a) $M = (x - 1)^3$ với $x = 1001$ thì $M = 10^9$.

b) $N = (x + y - 3)^3$ với $x = 2; y = 6$ thì $N = 125$.

c) $P = (3xz^2 - 2y)^3$ với $x = 25; y = 150; z = 2$ thì $P = 0$.

12.

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

b) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^3 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^3 = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 1^3 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

d) $x^3 + 12x^2 + 48x + 72 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 12x^2 + 48x + 64 + 8 = 0$



$$\Leftrightarrow x^3 + 3.x^2.4 + 3.x.4^2 + 4^3 = -8 \Leftrightarrow (x + 4)^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow x = -6$$

13. a) $(100 + 1)^3 = 100^3 + 3.100^2 + 3.100 + 1 = 1030301.$

b) $(47 + 3)^3 = 50^3 = 125000.$

c) $(300 - 1)^3 = 26730899.$

d) $(1008 - 2^3)^3 = 1000^3 = 10^9.$

14. a) $(100 - 1)^3 = 970299.$

b) $(91 + 1)^3 = 100^3.$

c) $(1000 + 1)^3 = 1003003001.$

d) $(102 - 2)^3 = 100^3.$

15. Ta có $a + b = 1 \Rightarrow VT = a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = 1^3 = 1 = VP$$

Vậy $a^3 + b^3 + 3ab = 1$ khi $a + b = 1$

b) Ta có $a - b = 1 \Rightarrow VT = a^3 - b^3 - 3ab = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 = 1^3 = 1 = VP$$

Vậy $a^3 - b^3 - 3ab = 1$ khi $a - b = 1$



Bài 8: TỔNG VÀ HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG

1. a) $x^3 + 8y^3 = x^3 + (2y)^3 = (x + 2y)\left[x^2 - 2xy + (2y)^2\right] = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

b) $a^6 - b^3 = (a^2)^3 - b^3 = (a^2 - b)\left[(a^2)^2 + a^2b + b^2\right] = (a^2 - b)(a^4 + a^2b + b^2)$

c) $64y^3 - 125x^3 = (4y)^3 - (5x)^3 = (4y - 5x)\left[(4y)^2 + 4y \cdot 5x + (5x)^2\right]$
 $= (4y - 5x)(16y^2 + 20xy + 25x^2)$

d) $27x^3 - \frac{1}{8} = (3x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(3x - \frac{1}{2}\right)\left[(3x)^2 + 3x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$
 $= \left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

2.

a) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1);$

b) $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9);$

c) $64x^3 + 1 = (4x + 1)(16x^2 - 4x + 1);$

d) $64m^3 - 27 = (4m - 3)(16m^2 + 12m + 9)$

3. a) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) = 5^3 + x^3;$

b) $(1 - x)(x^2 + x + 1) = 1 - x^3$

c) $(y + 3t)(9t^2 - 3yt + y^2) = y^3 + 27t^3;$

d) $\left(4 - \frac{u}{2}\right)\left(\frac{u^2}{4} + 2y + 16\right) = 4^3 - \frac{u^3}{8}$

4. a) $\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}xy + 4y^2\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + (2y)^3 = \frac{1}{27}x^3 + 8y^3$

b) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) = (x^2)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = x^6 - \frac{1}{27}$

c) $(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$

$= [(x - 2)(x^2 + 2x + 4)] \cdot [(x + 2)(x^2 - 2x + 4)] = (x^3 - 2^3) \cdot (x^3 + 2^3) = (x^3)^2 - (2^3)^2 = x^6 - 64$

d) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

$= (2x)^3 + y^3 - [(2x)^3 - y^3] = 8x^3 + y^3 - 8x^3 + y^3 = 2y^3$



$$\begin{aligned} 5. \text{ a)} & (x-1)^3 - (x-1)(x^2+x+1) \\ & = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 - 1^3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 1 = -3x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} & (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 6(x+1)^2 \\ & = x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3 - (x^3 - 3^3) + 6 \cdot (x^2 + 2x + 1) \\ & = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 6x^2 + 12x + 6 = -3x^2 + 39x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} & (x+5)(x^2-5x+25) - (x+3)^3 + (x-2)(x^2+2x+4) - (x-1)^3 \\ & = x^3 + 5^3 - (x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3) + x^3 - 2^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ & = x^3 + 125 - x^3 - 9x^2 - 27x - 27 + x^3 - 8 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \\ & = -6x^2 - 30x + 91 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} & (3x-2y)^3 - (4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2) + (y+2x)^3 \\ & = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 - \left[(4x)^3 - (5y)^3 \right] + y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 2x + 3y \cdot (2x)^2 + (2x)^3 \\ & = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 - 64x^3 + 125y^3 + y^3 + 6xy^2 + 12x^2y + 8x^3 \\ & = -29x^3 - 42x^2y + 42xy^2 + 118y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \text{ a)} & (x-1)^3 + (2-x)(4+2x+x^2) + 3x(x+2) = 16 \\ & \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2^3 - x^3 + 3x^2 + 6x = 16 \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{b)} (x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2-2) = 15 \Leftrightarrow x^3 + 8 - x^3 + 2x = 15 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} & (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15 \\ & \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - (x^3 - 27) + 9(x^2 + 2x + 1) = 15 \Leftrightarrow 45x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} & x(x-5)(x+5) - (x+2)(x^2-2x+4) = 3 \\ & \Leftrightarrow x(x^2-25) - (x^3+8) = 3 \Leftrightarrow x^3 - 25x - x^3 - 8 = 3 \Leftrightarrow -25x = 11 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \text{ a)} & (x-1)(x^2+x+1) - x(x+2)(x-2) = 5 \\ & \Leftrightarrow x^3 - 1 - x(x^2-4) = 5 \Leftrightarrow x^3 - 1 - x^3 + 4x = 5 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



$$\text{b) } (x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 6(x^2 - 2x + 1) = -10$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 6x^2 + 12x - 6 = -10$$

$$\Leftrightarrow 12x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$\text{c) } (x-3)(x^2 + 3x + 9) + x(x+2)(2-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3^3 + x(2^2 - x^2) = 1 \Leftrightarrow x^3 - 27 + 4x - x^3 = 1 \Leftrightarrow 4x = 28 \Leftrightarrow x = 7$$

$$\text{d) } (x-1)^3 - (x+3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 3^3) + 3x^2 - 12 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 3^3 + 3x^2 - 12 = 2 \Leftrightarrow 3x = 42 \Leftrightarrow x = 14.$$

8.

$$\text{a) } (x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 + 2) = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2^3 - x^3 - 2x = 15 \Leftrightarrow 2x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{2}$$

$$\text{b) } (x-2)^3 - (x-4)(x^2 + 4x + 16) + 6(x+1)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3.x^2.2 + 3.x.2^2 - 2^3 - (x^3 - 4^3) + 6.(x^2 + 2x + 1) = 49$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 64 + 6x^2 + 12x + 6 = 49 \Leftrightarrow 24x = -13 \Leftrightarrow x = \frac{-13}{24}$$

$$\text{9. a) } 29^3 = (30-1)^3 = 30^3 - 1^3 - 3.30.1.(30-1)$$

$$= 27000 - 1 - 90.29 = 27000 - 1 - 2610 = 24389$$

$$\text{b) } 101^3 = (100+1)^3 = 100^3 + 1^3 + 3.100.1.(100+1)$$

$$= 1000000 + 1 + 300.101 = 1000000 + 1 + 30300 = 1030301$$

$$\text{c) } 17^3 + 3^3 = (17+3)^3 - 3.17.3.(17+3) = 20^3 - 153.20 = 8000 - 3060 = 4940$$



$$\begin{aligned} \text{d) } 24^3 - 64 &= 24^3 - 4^3 = (24 - 4)^3 + 3 \cdot 24 \cdot 4 \cdot (24 - 4) \\ &= 20^3 + 288 \cdot 20 = 8000 + 5760 = 13760 \end{aligned}$$

$$\mathbf{10. a) } 21^3 = (20 + 1)^3 = 20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1^2 + 1^3 = 8000 + 1200 + 60 + 1 = 9261$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 199^3 &= (200 - 1)^3 = 200^3 - 3 \cdot 200^2 + 3 \cdot 200 \cdot 1^2 - 1^3 \\ &= 8000000 - 120000 + 600 - 1 = 7880599 \end{aligned}$$

$$\text{c) } 18^3 + 2^3 = (18 + 2)(18^2 - 18 \cdot 2 + 2^2) = 20 \cdot 292 = 5840$$

$$\text{d) } 23^3 - 27 = (23 - 3)(23^2 + 23 \cdot 3 + 3^2) = 20 \cdot 607 = 12140$$

$$\mathbf{11. a) } 19^3 = (20 - 1)^3 = 20^3 - 3 \cdot 20^2 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1^2 - 1^3 = 8000 - 1200 + 60 - 1 = 6859 ;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 201^3 &= (200 + 1)^3 = 200^3 + 3 \cdot 200^2 \cdot 1 + 3 \cdot 200 \cdot 1^2 + 1^3 \\ &= 8000000 + 120000 + 600 + 1 = 8120601 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 99^3 + 1 &= (99 + 1)(99^2 - 99 + 1^2) = 100[(100 - 1)^2 - 99 + 1] \\ &= 100(100^2 - 200 + 1 - 99 + 1) = 100 \cdot 9703 = 970300 ; \end{aligned}$$

$$\text{d) } 52^3 - 8 = 52^3 - 2^3 = (52 - 2)(52^2 + 52 \cdot 2 + 2^2) = 50 \cdot 2812 = 140600 .$$

$$\mathbf{12.a) } A = (7 - x)(x^2 + 7x + 49) - (64 - x^3) \text{ với } x = 5 .$$

$$\begin{aligned} A &= (7 - x)(x^2 + 7x + 49) - (64 - x^3) \\ &= 7^3 - x^3 - 64 - x^3 = 343 - 64 - 2x^3 = 279 - 2x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 5$ vào biểu thức trên ta được: $A = 279 - 2 \cdot 5^3 = 29$

$$\text{b) } B = 8a^3 - 27b^3 \text{ biết } ab = 12 \text{ và } 2a - 3b = 5 .$$

$$\begin{aligned} B &= 8a^3 - 27b^3 = (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2) \\ &= (2a - 3b)[(2a - 3b)^2 + 18ab] \end{aligned}$$

Thay $ab = 12$ và $2a - 3b = 5$. vào biểu thức trên ta được:

$$B = 5(5^2 + 18 \cdot 12) = 1205 .$$

13:

$$\text{a) } A = (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2) \text{ tại } x = 10 ;$$

$$\begin{aligned} A &= (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - (1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2) \\ &= 27x^3 + 1 - (1 - 27x^3) = 27x^3 + 1 - 1 + 27x^3 = 54x^3 \end{aligned}$$

Thay $x = 10$ vào biểu thức trên ta được: $A = 54x^3 = 54 \cdot 10^3 = 54000$

$$\text{b) } B = \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^3 \text{ biết } xy = 4 \text{ và } x + 2y = 8$$



$$B = \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^3 = \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x^2}{16} - \frac{xy}{8} + \frac{y^2}{4}\right)$$
$$= \frac{x+2y}{4} \left[\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{3xy}{8} \right] = \frac{x+2y}{4} \left[\left(\frac{x+2y}{4}\right)^2 - \frac{3xy}{8} \right]$$

Thay $xy = 4$ và $x + 2y = 8$ vào biểu thức trên ta được:

$$B = \frac{8}{4} \cdot \left[\left(\frac{8}{4}\right)^2 - \frac{3 \cdot 4}{8} \right] = 2 \cdot \left(2^2 - \frac{3}{2} \right) = 5$$

14. a) $A = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9)$ tại $x = 20$

Rút gọn được $A = 9x^3$. Thay $x = 20$ vào A ta được: $A = 72000$

b) $B = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + 2y^3$ biết $2x + y = 0$

Rút gọn được $B = 8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$.

Thay $2x + y = 0$ vào B ta được: $B = 0$

c) $C = (x + y)^3 + y^3$ biết $2x + y = 0$

$$C = (x + y)^3 + y^3 = (x + 2y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

d) $D = x^3 - y^3 - 3xy$ biết $x - y = 1$

$$D = x^3 - y^3 - 3xy = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 1$$

15. a) Ta có: $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 3^2 - 5 = 4 \Rightarrow xy = 2$.

Ta lại có: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 27 - 18 = 9$.

b) Ta có $2xy = (x^2 + y^2) - (x - y)^2 = 15 - 3^2 = 6 \Rightarrow xy = 3$.

Ta lại có $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 3^3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 + 27 = 54$.

16.

a) $A = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 1)$

$$A = (2x)^3 + 3^3 - 8x^3 + 2 = 8x^3 + 27 - 8x^3 + 2 = 29.$$



$$b) B = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (20 + x^3)$$

$$B = x^3 + 3^3 - 20 - x^3 = 27 - 20 = 7$$

$$c) C = 3y \cdot (-3y - 2)^2 - (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1) - (-6y - 1)^2$$

$$C = 3y \cdot (-3y - 2)^2 - (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1) - (-6y - 1)^2$$

$$= 3y \cdot (9y^2 + 12y + 4) - (27y^3 - 1) - (36y^2 + 12y + 1)$$

$$= 27y^3 + 36y^2 + 12y - 27y^3 + 1 - 36y^2 - 12y - 1 = 0.$$

17.

$$a) VP = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3 = VT$$

$$b) VP = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2 = a^3 - b^3 = VT$$

18.

Cách 1: Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -(b + c)$

$$\Rightarrow a^3 = -(b + c)^3 = -[b^3 + c^3 + 3bc(b + c)] = -b^3 - c^3 + 3abc$$

Thay vào $VT = 3abc = VP$

Cách 2: Từ giả thiết $a + b + c = 0 \Rightarrow c = -(a + b)$, thay vào đẳng thức cần chứng minh ta được $a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3ab(a + b)$

$$\Leftrightarrow -3ab^2 - 3a^2b = -3ab^2 - 3a^2b \text{ (luôn đúng)}$$

19. a) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$;

$$VT = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3 = VP$$

b) $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$.

$$VT = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2 = a^3 - b^3 = VP$$

20.

a) Ta có $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$



Vì $a^3 + b^3$ chia hết cho 3 và $3ab(a + b)$ chia hết cho 3 nên $(a + b)^3$ chia hết cho 3

Do đó $a + b$ chia hết cho 3 (đpcm).

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } A &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 \\ &= (1^3 + 10^3) + (2^3 + 9^3) + \dots + (5^3 + 6^3) \\ &= (1 + 10)(1^2 + 10 \cdot 1 + 10^2) + (2 + 9)(2^2 + 2 \cdot 9 + 9^2) + \dots + (5 + 6)(5^2 + 5 \cdot 6 + 6^2) \\ &= 11 \cdot 111 + 11 \cdot 103 + \dots + 11 \cdot 91 \\ &= 11 \cdot (111 + 103 + \dots + 91) : 11 \end{aligned}$$

$$\text{21. Ta có } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad (3)$$

Từ (1) suy ra $(x + y)^2 = (a + b)^2$

Tức là $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Do $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ nên $2xy = 2ab$, suy ra $xy = ab$ (4)

Thay các kết quả (1), (2), (4) vào (3) ta được

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = a^3 + b^3.$$

22. Ta có $S = \frac{1}{2}ab$ mà

$$(a + b)^2 = 8S \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$$

Vậy tam giác đã cho là tam giác vuông cân nên tam giác có các góc bằng $45^\circ; 45^\circ$ và 90° .



Bài 9: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

1. a) $3x + 6 = 3(x + 2)$ b) $10ab - 5c = 5(2ab - c)$ c) $2 - 6x^2 = 2(1 - 3x^2)$

d) $16x - 28y = 4(4x - 7y)$ e) $35a - 56b = 7(5a - 8b)$ f) $10x - 2yz = 2(5x - yz)$

2.

a) $x^2 - x = x(x - 1)$

b) $5x^2(x - 2y) - 15x(x - 2y) = 5x(x - 3)(x - 2y)$

c) $3(x - y) - 5x(y - x) = 3(x - y) + 5x(x - y) = (3 + 5x)(x - y)$

d) $-x^3 - 2x^2 = -x^2(x + 1)$

3.

a) $3x^3y^3 - 6x^2y^2 + 9xy = 3xy(x^2y^2 - 2xy + 3)$

b) $7x^2(x - 3y) + 14xy(x - 3y) = 7x(1 + 2y)(x - 3y)$

c) $\frac{2}{5}x(y - 1) - \frac{2}{5}y(y - 1) = \frac{2}{5}(x - y)(y - 1)$

d) $\frac{2}{5}x^2 + 5x^3 + x^2y = x\left(\frac{2}{5}x + 5x^2 + xy\right)$

e) $2x(x + 1) + 2(x + 1) = 2(x + 1)^2$

f) $10x(x - y) + 8y(x - y) = 2(5x + 4y)(x - y)$

4. a) $A = 15.91,5 + 15.8,5 = 15.(91,5 + 8,5) = 15.100 = 1500$

b) $B = 65.14,6 + 5.7.14,6 = 14,6.(65 + 5.7) = 14,6.100 = 1460$

5. a) $A = 20,9.(75 + 5^2) = 2090.$

b) $B = 86.15 + 150.1,4 = 15(86 + 14) = 1500$

c) $C = 93.32 + 14.16 = 32(93 + 7) = 3200$

d) $D = 98,6.199 - 990.9,86 = 98,6(199 - 99) = 9860$

6. a) $A = 2x(x + y) - 4(x + y) = 2(x - 2)(x + y)$



tại $x = 22$; $y = 88$ ta có $A = 2 \cdot (22 - 2) \cdot (22 + 88) = 2 \cdot 20 \cdot 110 = 4400$

$$b) B = x(x - 1) - y(1 - x) = x(x - 1) + y(x - 1) = (x + y)(x - 1)$$

tại $x = 2001$; $y = 1999$ ta có $B = (2001 - 1)(2001 + 1999) = 2000 \cdot 4000 = 8000000$

$$c) C = x^2(2x - y) + x(y - 2x) = x^2(2x - y) - x(2x - y) = x(x - 1)(2x - y)$$

tại $x = 201$; $y = 102$ ta có:

$$C = 201(2 \cdot 201 - 102)(201 - 1) = 201 \cdot 300 \cdot 200 = 201 \cdot 60000 = 12060000$$

7. a) $A = (b + 3)(a - b)$. Thay $N = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, và $15 \cdot 64 + 25 \cdot 100 + 36 \cdot 15 + 60 \cdot 100$ vào biểu thức $A = 12000$.

b) $B = (b - 8)(b + c)$. Thay $b = 108$ và $47^2 + 48^2 - 25 + 94 \cdot 48$ vào biểu thức $= (47^2 + 2 \cdot 47 \cdot 48 + 48^2) - 5^2$.

c) $C = (x + y)(xy - 2)$. Thay $= (9^3 + 9^2) - (9 \cdot 11 + 1 \cdot 11)$ vào biểu thức $C = 42$.

d) $D = (x + 2y)(x^5 - x^3y + x^2y^2)$. Với $x = 10$; $y = -5 \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow D = 0$.

$$8. a) x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$b) 2x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$c) x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$d) 3x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x^2 + 3) \Leftrightarrow x = 0$$

$$9. a) x(x + 3) - 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$b) (x - 2)(x^2 + 2x + 7) + 2(x^2 - 4) - 5(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 7 + 2x + 4 - 5) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 4x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ do } x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2 > 0$$



$$c) 5x(x-2) - 3(x-2) = 0 \Leftrightarrow (5x-3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$d) x^3(x^2-9) - 8(x^2-9) = 0 \Leftrightarrow (x^3-8)(x^2-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-8=0 \\ x^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=8 \\ x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\pm 3 \end{cases}$$

10.

$$a) x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow x(x-15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=15 \end{cases}$$

$$b) x^2(2x+15) + 4(2x+15) = 0 \Leftrightarrow (x^2+4)(2x+15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4=0 \\ 2x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=-4 \\ 2x=-15 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-15}{2}$$

$$c) 3x(x-10) - x + 10 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 10 \end{cases}$$

$$d) 2(x+3) - x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 2(x+3) - x(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(2-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ 2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases}$$

11. a) $33^{n+1} - 33^n$ chia hết cho 32 (với n là số tự nhiên);

Ta có: $33^{n+1} - 33^n = 33^n \cdot 33 - 33^n = 33^n \cdot (33 - 1) = 33^n \cdot 32$

Vì $33^n \cdot 32 : 32$ với mọi số tự nhiên n nên $33^{n+1} - 33^n : 32$ với mọi số tự nhiên n .

b) $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$;

Ta có: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n \cdot (n+1)(n-1)$

Vì $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ chia hết cho 2 và chia hết cho 3.

Nên $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ chia hết cho 6.

Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 6.

12.

a) Ta có: $55^{n+1} - 55^n = 55^n(55-1) = 54 \cdot 55^n : 54 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Ta có: $5^6 - 10^4 = 5^6 - 5^4 \cdot 2^4 = 5^4(5^2 - 2^4) = 5^4(25 - 16) = 5^4 \cdot 9 : 9$



13. Ta có: $P = n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$

Vì n lẻ, $n \in \mathbb{N}$ nên $(n - 1)n(n + 1)$ là tích ba số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow P : 3$ (1)

Vì n lẻ nên $n - 1$; $n + 1$ là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp

Đặt $n - 1 = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$

Ta có: $(n - 1)(n + 1) = 2k \cdot 2(k + 1) = 4 \cdot k(k + 1) : 8$ (do $k(k + 1) : 2; \forall k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow P : 8$ (2)

Từ (1); (2) và $(3; 8) = 1$ suy ra $P : 24$ (đpcm)

14. $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot n(n + 1) : 4$ (tích của hai số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 2)

15.

a) $xy + 3x - 7y - 21 = xy - 7y + 3x - 21 = y(x - 7) + 3(x - 7) = (x - 7)(y + 3)$

b) $2xy - 15 - 6x + 5y = 2xy - 6x + 5y - 15 = 2x(y - 3) + 5(y - 3) = (2x + 5)(y - 3)$

c) $2x^2y + 2xy^2 - 2x - 2y = 2xy(x + y) - 2(x + y) = 2(xy - 1)(x + y)$

d) $7x^3y - 3xyz - 21x^2 + 9z = xy(7x^2 - 3z) - 3(7x^2 - 3z) = (xy - 3)(7x^2 - 3z)$

e) $4x^2 - 2x - y^2 - y = 4x^2 - y^2 - (2x + y) = (2x - y)(2x + y) - (2x + y) = (2x + y)(2x - y - 1)$

f) $9x^2 - 25y^2 - 6x + 10y = (3x - 5y)(3x + 5y) - 2(3x - 5y) = (3x - 5y)(3x + 5y - 2)$.

16.

a) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x^3 - 1) - (2x^2 - 2x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 2x(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1 - 2x) = (x - 1)(x^2 - x + 1)$

b) $x^2y + xy + x + 1 = xy(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(xy + 1)$

c) $ax + by + ay + bx = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$

d) $x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a) = (x - a)(x - b)$

e) $x^2y + xy^2 - x - y = (x^2y - x) + (xy^2 - y) = x(xy - 1) + y(xy - 1) = (xy - 1)(x + y)$

f) $ax^2 + ay - bx^2 - by = (ax^2 - bx^2) + (ay - by) = x^2(a - b) + y(a - b) = (a - b)(x^2 + y)$

17.



$$\text{a) } ax - 2x - a^2 + 2a = (ax - a^2) - (2x - 2a) = a(x - a) - 2(x - a) = (x - a)(a - 2)$$

$$\text{b) } x^2 + x - ax - a = (x^2 + x) - (ax + a) = x(x + 1) - a(x + 1) = (x + 1)(x - a)$$

$$\text{c) } 2x^2 + 4ax + x + 2a = 2x(x + 2a) + (x + 2a) = (x + 2a)(2x + 1)$$

$$\text{d) } 2xy - ax + x^2 - 2ay = (2xy - 2ay) + (x^2 - ax) = 2y(x - a) + x(x - a) = (x - a)(2y + x)$$

$$\text{e) } x^3 + ax^2 + x + a = (x^3 + x) + (ax^2 + a) = x(x^2 + 1) + a(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x + a)$$

$$\text{f) } x^2y^2 + y^3 + zx^2 + yz = (x^2y^2 + zx^2) + (y^3 + yz)$$

$$= x^2(y^2 + z) + y(y^2 + z) = (y^2 + z)(x^2 + y)$$

18.

$$\text{a) } x^2 - 2x - 4y^2 - 4y = (x^2 - 4y^2) - (2x + 4y) = (x + 2y)(x - 2y) - 2(x + 2y) \\ = (x + 2y)(x - 2y - 2)$$

$$\text{b) } x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = (x^4 - 4) + (2x^3 - 4x) = (x^2 + 2)(x^2 - 2) + 2x(x^2 - 2) \\ = (x^2 - 2)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$\text{c) } x^3 + 2x^2y - x - 2y = (x^3 - x) + (2x^2y - 2y) = x(x^2 - 1) + 2y(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x + 2y)$$

$$\text{d) } 3x^2 - 3y^2 - 2(x - y)^2 \\ = 3(x^2 - y^2) - 2(x - y)^2 = 3(x + y)(x - y) - 2(x - y)^2 \\ = (x - y)[3(x + y) - 2(x - y)] = (x - y)(x + 5y)$$

$$\text{e) } x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = (x^3 - 9x) - (4x^2 - 36) = x(x^2 - 9) - 4(x^2 - 9) \\ = (x^2 - 9)(x - 4) = (x + 3)(x - 3)(x - 4)$$

$$\text{f) } x^2 - y^2 - 2x - 2y = (x^2 - y^2) - (2x + 2y) = (x + y)(x - y) - 2(x + y) \\ = (x + y)(x - y - 2)$$

$$\text{19. a) } A = x(x + y) - 5(x + y) = (x - 5)(x + y)$$

Thay $x = 15\frac{1}{5}; y = 14\frac{4}{5}$ vào biểu thức A ta có:

$$A = \left(15\frac{1}{5} - 5\right) \left(15\frac{1}{5} + 14\frac{4}{5}\right) = \frac{51}{5} \cdot 30 = 306$$

$$\text{b) } B = 3x(y - 5) - 8(y - 5) = (y - 5)(3x - 8)$$

Thay $x = 1999, y = 5$ vào biểu thức B ta có:

$$B = (5 - 5)(3 \cdot 1999 - 8) = 0$$

$$\text{c) } C = xy(z - 1) - x(z - 1) - y(z - 1) + (z - 1) = (z - 1)(xy - x - y + 1) \\ = (z - 1)[x(y - 1) - (y - 1)] = (z - 1)(y - 1)(x - 1)$$



Thay $x = 9, y = 51, z = 101$ vào biểu thức C ta có:

$$C = (101 - 1)(51 - 1)(9 - 1) = 40000$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= y^3 + 8x^3 + 2xy(2x + y + 2) = (y + 2x)(y^2 - 2yx + 4x^2) + 2xy(2x + y + 2) \\ &= (2x + y)(y^2 + 4x^2) + 4xy = (2x + y)\left[(y + 2x)^2 - 4xy\right] + 4xy \end{aligned}$$

Thay $2x + y = 1$ vào D ta có: $D = 1$

20.

a) $A = xy - 4y - 5x + 20$ với $x = 14 ; y = 5,5$

Ta có $A = xy - 4y - 5x + 20 = y(x - 4) - 5(x - 4) = (x - 4)(y - 5)$

Với $x = 14 ; y = 5,5$, ta có $A = (14 - 4)(5,5 - 5) = 10 \cdot 0,5 = 5$

b) $B = x(x + y) - 5(x + y) = (x + y)(x - 5)$

Với $x = 5\frac{1}{5} ; y = 4\frac{4}{5}$ ta có: $B = \left(5\frac{1}{5} + 4\frac{4}{5}\right)\left(5\frac{1}{5} - 5\right) = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$

c) $C = xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$

$$= (xyz - xy) - (yz - y) - (zx - x) + (z - 1)$$

$$= (xyz - xy) - (yz - y) - (zx - x) + (z - 1)$$

$$= (xyz - xy) - (yz - y) - (zx - x) + (z - 1) = xy(z - 1) - y(z - 1) - x(z - 1) + (z - 1)$$

$$= (z - 1)(xy - y - x + 1) .$$

Với $x = 9; y = 10; z = 11$, ta có

$$C = (11 - 1)(9 \cdot 10 - 10 - 9 + 1) = 10 \cdot 72 = 720$$

d) $D = (x^3 + y^3) - xy(x + y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy)$

$$= (x + y)\left[x(x - y) - y(x - y)\right] = (x + y)(x - y)^2$$

Với $x = 5,75 ; y = 4,25$, ta có :

$$D = (5,75 + 4,25)(5,75 - 4,25)^2 = 10 \cdot 1,5^2 = 10 \cdot 2,25 = 22,5$$

21. a) $16,87 \cdot 91 - 6,2 \cdot 188 + 16,87 \cdot 97 - 0,67 \cdot 188$

$$= (16,87 \cdot 91 + 16,87 \cdot 97) - (6,2 \cdot 188 + 0,67 \cdot 188)$$

$$= 16,87 \cdot (91 + 97) - 188 \cdot (6,2 + 0,67) = 16,87 \cdot 188 - 188 \cdot 6,87 = 1880$$

b) $56^2 + 31^2 - 13^2 + 56 \cdot 62$

$$= (56^2 + 56 \cdot 62 + 31^2) - 13^2 = (56^2 + 2 \cdot 56 \cdot 31 + 31^2) - 13^2$$

$$= (56 + 31)^2 - 13^2 = 87^2 - 13^2 = (87 + 13) \cdot (87 - 13) = 100 \cdot 74 = 7400.$$

22. a) $x^2 - x - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - 3(x - 1) = 0$



$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

b) $x(x-3) = 4x-12 \Leftrightarrow x(x-3) - 4(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases}$$

c) $x^3 - 4x - 15x - 30 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) - 15(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x+2) - 15(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 + 3x - 5x - 15) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+3=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-3 \\ x=5 \end{cases}$$

d) $x^3 + 27 + (x+3)(x-9) = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 3^3) + (x+3)(x-9) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 3x + 9) + (x+3)(x-9) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3).x.(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+3=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x=2 \end{cases}$$

23.

a) $5x^3 - 7x^2 - 15x + 21 = 0 \Leftrightarrow 5x(x^2 - 3) - 7(x^2 - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow 5x(x^2 - 3) - 7(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow (5x - 7)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

b) $(x-3)^2 = 4x^2 - 20x + 25 \Leftrightarrow (x-3)^2 - (2x-5)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (3x-8)(-x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

c) $x + x^2 - x^3 - x^4 = 0$

$$\Leftrightarrow x(1+x) - x^3(1+x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)(x-x^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1+x)(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1+x)(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1-x=0 \\ 1+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

d) $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x^3 + 2x) + (3x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 1) + 3(x^2 + 1) = 0$$



$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}. \quad (\text{do } x^2 + 1 > 0 \forall x)$$

24. $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8 + 5^9$

$$A = 1 + (5 + 5^2 + 5^3) + (5^4 + 5^5 + 5^6) + (5^7 + 5^8 + 5^9)$$

$$A = 1 + 5 \cdot (1 + 5 + 5^2) + 5^4 \cdot (1 + 5 + 5^2) + 5^7 \cdot (1 + 5 + 5^2)$$

$$A = 1 + 5 \cdot 31 + 5^4 \cdot 31 + 5^7 \cdot 31. \text{ Do đó } A \text{ chia cho } 31 \text{ dư } 1.$$

25. $5n^3 - 9n^2 + 15n - 27 = (5n^3 - 9n^2) + (15n - 27) = n^2(5n - 9) + 3(5n - 9)$

$= (5n - 9)(n^2 + 3)$ là số nguyên tố. Mà $n^2 + 3 > 1$. Do vậy phải có

$$5n - 9 = 1 \Leftrightarrow 5n = 10 \Leftrightarrow n = 2.$$

Với $n = 2$ thì $5n^3 - 9n^2 + 15n - 27 = 7$, là số nguyên tố.

26.

a) $9x^4 + 16y^6 - 24x^2y^3 = (3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot 4y^3 + (4y^3)^2 = (3x^2 - 4y^3)^2$

b) $16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = (4x - 3y)^2$

c) $36x^2 - (3x - 2)^2 = (6x - 3x + 2)(6x + 3x - 2)$

d) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x(2y)^2 + (2y)^3 = (3x + 2y)^3$

e) $y^9 - 9x^2y^6 + 27x^4y^3 - 27x^6 = (y^3)^3 - 3(y^3)^2 \cdot 3x^2 + 3(3x^2)^2 y^3 - (3x^2)^3 = (y^3 - 3x^2)^3$

f) $64x^3 + 1 = (4x)^3 + 1 = (4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$

g) $27x^6 - 8x^3 = (3x^2)^3 - (2x)^3 = (3x^2 - 2x)(9x^4 + 6x^3 + 4x^2)$

27.

a) $16(4x + 5)^2 - 25(2x + 2)^2$

$$= [4(4x + 5) - 5(2x + 2)][4(4x + 5) + 5(2x + 2)]$$

$$= (16x + 20 - 10x - 10)(16x + 20 + 10x + 10)$$

$$= (6x + 10)(26x + 30) = 2(3x + 5)2(13x + 15) = 4(3x + 5)(13x + 15)$$

b) $(x - y + 4)^2 - (2x + 3y - 1)^2$

$$= (x - y + 4 - 2x - 3y + 1)(x - y + 4 + 2x + 3y - 1) = (5 - x - 4y)(3x + 2y + 3)$$

c) $(x + 1)^4 - (x - 1)^4 = [(x + 1)^2]^2 - [(x - 1)^2]^2 = [(x + 1)^2 - (x - 1)^2][(x + 1)^2 + (x - 1)^2]$



$$= (x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1) = 4x(2x^2 + 2) = 8x(x^2 + 1)$$

d) $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$$= (x - y)(x + y)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2) = (x - y)(x + y)\left[(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2\right]$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

28. a) $(x + y)^2 + 8(x + y) + 16 = (x + y)^2 + 2 \cdot 4(x + y) + 4^2 = (x + y + 4)^2$

b) $(3x - 4)^2 + 2 \cdot (3x - 4) \cdot (5 - x) + (x - 5)^2$

$$= (3x - 4)^2 + 2 \cdot (3x - 4) \cdot (5 - x) + (5 - x)^2 = [(3x - 4) + (5 - x)]^2 = (2x + 1)^2$$

29.

a) $4x^2 + 4x - 3 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1 - 1 - 3 = (2x + 1)^2 - 4 = (2x + 3)(2x - 1)$

b) $4x^2 - 12x - 7 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 9 - 7 = (2x - 3)^2 - 16 = (2x - 7)(2x + 1)$

c) $4x^2 + 16x - 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4 + 4^2 - 16 - 9 = (2x + 4)^2 - 25 = (2x + 9)(2x - 1)$

d) $-x^2 - 4x - 3 = -(x^2 + 4x + 3) = -(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 4 + 3) = -\left[(x + 2)^2 - 1\right]$

$$= -(x + 3)(x + 1)$$

30.

a) $9x^2 - y^2 + 10yz - 25z^2 = 9x^2 - (y^2 - 10yz + 25z^2)$

$$= (3x^2) - (y - 5z)^2 = (3x + y - 5z) \cdot (3x - y + 5z).$$

b) $x^2 - y^2 + z^2 - t^2 - 2xz + 2yt$

$$= (x^2 + z^2 - 2xz) - (y^2 + t^2 - 2yt) = (x - z)^2 - (y - t)^2$$

$$= (x - z + y - t) \cdot (x - z - y - t).$$

31. a) $x^2 - 2x + 1 = 25 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = (\pm 5)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 5 \\ x - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -4 \end{cases}$

b) $9 - 64x^2 = 0 \Leftrightarrow (3 + 8x)(3 - 8x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ x = \frac{3}{8} \end{cases}$



$$c) 4x^2 - (x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow [2x + x + 4][2x - (x + 4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 4)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 4 \end{cases}$$

$$d) 9(4x + 3)^2 = 16(3x - 5)^2 \Leftrightarrow 9(4x + 3)^2 - 16(3x - 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [3(4x + 3) - 4(3x - 5)][3(4x + 3) + 4(3x - 5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (12x + 9 - 12x + 20)(12x + 9 + 12x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow 29(24x - 11) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{24}$$

$$32. a) (x^3 - 4x^2) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 4) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$b) x^5 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = -3(l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$c) (x^3 - x^2)^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - x^2)^2 - (4x^2 - 8x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - x^2)^2 - (2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^4(x - 1)^2 - 4(x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x^4 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = -2(l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$33. a) 82^2 - 18^2 = (82 + 18)(82 - 18) = 100.64 = 6400$$

$$b) 26^2 + 52.24 + 24^2 = 26^2 + 2.26.24 + 24^2 = (26 + 24)^2 = 50^2 = 2500$$

$$c) \frac{93^3 + 78^3}{171} - 93.78 = \frac{(93 + 78)(93^2 - 93.78 + 78^2)}{171} - 93.78$$

$$= \frac{171.(93^2 - 93.78 + 78^2)}{171} - 93.78 = 93^2 - 93.78 + 78^2 - 93.78 = 93^2 - 2.93.78 + 78^2$$



$$= (93 - 78)^2 = 15^2 = 225$$

$$\text{d) } \frac{57^2 - 18^2}{76,5^2 - 1,5^2} = \frac{(57 + 18)(57 - 18)}{(76,5 + 1,5)(76,5 - 1,5)} = \frac{75 \cdot 39}{78 \cdot 75} = \frac{39}{78} = \frac{1}{2}$$

$$\text{34. a) } A = x^2 - y^2 - 2x + 2y = (x^2 - y^2) - (2x - 2y)$$

$$= (x + y)(x - y) - 2(x - y) = (x - y)(x + y - 2).$$

Tại $x = 2345, y = 2344$ ta có $A = 4687$

$$\text{b) } B = x^2 - 2009x - y^2 + 2009y = (x^2 - y^2) - (2009x - 2009y)$$

$$= (x + y)(x - y) - 2009(x - y) = (x - y)(x + y - 2009).$$

Tại $x = 723, y = 1286$ ta có $(x + y - 2009) = 0 \Rightarrow B = 0.$



ÔN TẬP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

1. a) $x^2yz - x^3y^3z + xyz^2 = xyz(x - x^2y^2 + z)$

b) $4x^3 + 24x^2 - 12xy^2 = 4x(x^2 + 6x - 3y^2)$

c) $x^2(m+n) - 3y^2(m+n) = (m+n)(x^2 - 3y^2) = (m+n)(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)$

d) $4x^2(x-y) + 9y^2(y-x) = 4x^2(x-y) - 9y^2(x-y) = (x-y)(4x^2 - 9y^2)$
 $= (x-y)(2x-3y)(2x+3y)$

e) $x^2(a-b) + 2(b-a) = x^2(a-b) - 2(a-b) = (a-b)(x^2 - 2)$
 $= (a-b)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

f) $10x^2(a-2b)^2 - (x^2+2)(2b-a)^2 = 10x^2(a-2b)^2 - (x^2+2)(a-2b)^2$
 $= (a-2b)^2(10x^2 - x^2 - 2) = (a-2b)^2(9x^2 - 2) = (a-2b)^2(3x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2})$

g) $50x^2(x-y)^2 - 8y^2(y-x)^2 = 50x^2(x-y)^2 - 8y^2(x-y)^2$
 $= (x-y)^2(50x^2 - 8y^2) = 2(x-y)^2(25x^2 - 4y^2) = 2(x-y)^2(5x-2y)(5x+2y)$

h) $15a^{m+2}b - 45a^mb = 15a^m \cdot a^2b - 45a^mb = 15a^mb(a^2 - 3) = 15a^mb(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3})$
 $(m \in \mathbb{N}^*)$

2. a) $36x^2 - (3x-2)^2 = (6x-3x+2)(6x+3x-2) = (3x+2)(9x-2)$

b) $16(4x+5)^2 - 25(2x+2)^2 = [4(4x+5) - 5(2x+2)][4(4x+5) + 5(2x+2)]$
 $= (16x+20-10x-10)(16x+20+10x+10) = (6x+10)(26x+30)$
 $= 2(3x+5)2(13x+15) = 4(3x+5)(13x+15)$

c) $(x-y+4)^2 - (2x+3y-1)^2 = (x-y+4-2x-3y+1)(x-y+4+2x+3y-1)$
 $= (5-x-4y)(3x+2y+3)$

d) $(x+1)^4 - (x-1)^4 = [(x+1)^2]^2 - [(x-1)^2]^2$
 $= [(x+1)^2 - (x-1)^2][(x+1)^2 + (x-1)^2]$
 $= (x^2+2x+1-x^2+2x-1)(x^2+2x+1+x^2-2x+1)$
 $= 4x(2x^2+2) = 8x(x^2+1)$

e) $16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = (4x-3y)^2$



$$f) -\frac{x^4}{4} + 2x^2y^3 - 4y^6 = -\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2y^3 + 4y^6\right)$$

$$= -\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 2\frac{x^2}{2} \cdot 2y^3 + (2y^3)^2\right] = -\left(\frac{x^2}{2} - 2y^3\right)^2$$

$$g) 64x^3 + 1 = (4x)^3 + 1 = (4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$$

$$h) x^3y^6z^9 - 125 = (xy^2z^3)^3 - 5^3 = (xy^2z^3 - 5)(x^2y^4z^6 + 5xy^2z^3 + 25)$$

$$k) 27x^6 - 8x^3 = (3x^2)^3 - (2x)^3 = (3x^2 - 2x)(9x^4 + 6x^3 + 4x^2)$$

$$l) x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$$

$$= (x - y)(x + y)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2)$$

$$= (x - y)(x + y)\left[(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2\right]$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

$$m) 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 = (3x - 2y)^3$$

$$n) y^9 - 9x^2y^6 + 27x^4y^3 - 27x^6 = (y^3)^3 - 3(y^3)^2 \cdot 3x^2 + 3(3x^2)^2 \cdot y^3 - (3x^2)^3$$

$$= (y^3 - 3x^2)^3$$

$$3. a) x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4x^2y^2$$

$$= (x + y)^2 - (2xy)^2 = (x + y - 2xy)(x + y + 2xy)$$

$$b) 49 - a^2 + 2ab - b^2 = 49 - (a^2 - 2ab + b^2) = 7^2 - (a - b)^2 = (7 - a + b)(7 + a - b)$$

$$c) a^2 - b^2 + 4bc - 4c^2 = a^2 - (b^2 - 4bc + 4c^2) = a^2 - [b^2 - 2b \cdot 2c + (2c)^2]$$

$$= a^2 - (b - 2c)^2 = (a - b + 2c)(a + b - 2c)$$

$$d) 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$= (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = [a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)](b^2 + 2bc + c^2 - a^2)$$

$$= [a^2 - (b - c)^2] [(b + c)^2 - a^2] = (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)$$

$$e) (a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 4c^2$$

$$= (a + b + c)^2 + (a + b - c - 2c)(a + b - c + 2c)$$



$$\begin{aligned}
 &= (a + b + c)^2 + (a + b - 3c)(a + b + c) \\
 &= (a + b + c)(a + b + c + a + b - 3c) \\
 &= (a + b + c)(2a + 2b - 2c) \\
 &= 2(a + b + c)(a + b - c)
 \end{aligned}$$

$$4. a) x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$b) x^5 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 9) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = -3(l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$c) (x^3 - 4x^2) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 4) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$d) (4x^2 - 25)^2 - 9(2x - 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [4x^2 - 25 - 3(2x - 5)][4x^2 - 25 + 3(2x - 5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 25 - 6x + 15)(4x^2 - 25 + 6x - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 6x - 10)(4x^2 + 6x - 40) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + 4x - 10x - 10)(4x^2 + 16x - 10x - 40) = 0$$

$$\Leftrightarrow [4x(x + 1) - 10(x + 1)][4x(x + 4) - 10(x + 4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(4x - 10)(x + 4)(4x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(4x - 10)^2(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ (4x - 10)^2 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \\ x = -4 \end{cases}$$

$$e) 9(4x + 3)^2 = 16(3x - 5)^2 \Leftrightarrow 9(4x + 3)^2 - 16(3x - 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [3(4x + 3) - 4(3x - 5)][3(4x + 3) + 4(3x - 5)] = 0$$



$$\Leftrightarrow (12x + 9 - 12x + 20)(12x + 9 + 12x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow 29(24x - 11) = 0 \Leftrightarrow 24x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{24}.$$

$$f) (x^3 - x^2)^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - x^2)^2 - (4x^2 - 8x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - x^2)^2 - (2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^4(x - 1)^2 - 4(x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x^4 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = -2(l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$g) x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad (\forall x^4 + x^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$5. a) xy + 3x - 7y - 21 = xy - 7y + 3x - 21$$

$$= y(x - 7) + 3(x - 7) = (x - 7)(y + 3)$$

$$b) 2xy - 15 - 6x + 5y = 2xy - 6x + 5y - 15$$

$$= 2x(y - 3) + 5(y - 3) = (2x + 5)(y - 3)$$

$$c) 2x^2y + 2xy^2 - 2x - 2y = 2xy(x + y) - 2(x + y) = 2(xy - 1)(x + y)$$

$$d) x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a) = (x - a)(x - b)$$

$$e) 7x^3y - 3xyz - 21x^2 + 9z = xy(7x^2 - 3z) - 3(7x^2 - 3z) = (xy - 3)(7x^2 - 3z)$$

$$f) 4x + 4y - x^2(x + y) = 4(x + y) - x^2(x + y) = (4 - x^2)(x + y)$$

$$= (2 - x)(2 + x)(x + y)$$

$$g) y^2 + y - x^2 + x = y^2 - x^2 + y + x = (y - x)(y + x) + (y + x)$$

$$= (y + x)(y - x + 1)$$

$$h) 4x^2 - 2x - y^2 - y = 4x^2 - y^2 - (2x + y) = (2x - y)(2x + y) - (2x + y)$$

$$= (2x + y)(2x - y - 1)$$

$$i) 9x^2 - 25y^2 - 6x + 10y = (3x - 5y)(3x + 5y) - 2(3x - 5y) = (3x - 5y)(3x + 5y - 2).$$

$$6. a) x(x + 3) - 5x(x - 5) - 5(x + 3) = (x + 3)(x - 5) - 5x(x - 5) = (x - 5)(3 - 4x)$$

$$b) (5x - 4)(4x - 5) - (x - 3)(x - 2) - (5x - 4)(3x - 2)$$



$$= (5x - 4)(4x - 5 - 3x + 2) - (x - 3)(x - 2) = (5x - 4)(x - 3) - (x - 3)(x - 2)$$

$$= (x - 3)(4x - 2)$$

c) $(5x - 4)(4x - 5) + (5x - 1)(x + 4) + 3(3x - 2)(4 - 5x)$

$$= (5x - 4)(4x - 5) - 3(3x - 2)(5x - 4) + (5x - 1)(x + 4)$$

$$= (5x - 4)(1 - 5x) + (5x - 1)(x + 4) = (5x - 4)(1 - 5x) - (1 - 5x)(x + 4)$$

$$= (1 - 5x)(4x - 8)$$

d) $(5x - 4)^2 + (16 - 25x^2) + (5x - 4)(3x + 2)$

$$= (5x - 4)(5x - 4 + 3x + 2) + [4^2 - (5x)^2] = (5x - 4)(8x - 2) + (4 - 5x)(4 + 5x)$$

$$= (5x - 4)(8x - 2 - 4 - 5x) = (5x - 4)(3x - 6)$$

e) $x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x - 1) - (x - 1) = (x^3 - 1)(x - 1)$

f) $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 = x^4(x^2 - 1) + 2x^2(x + 1) = x^4(x - 1)(x + 1) + 2x^2(x + 1)$

$$= x^2(x + 1)[x^2(x - 1) + 2] = x^2(x + 1)(x^3 - x^2 + 2)$$

g) $a^2x + a^2y + b^2x - 2abx + b^2y - 2aby$

$$= a^2(x + y) + b^2(x + y) - 2ab(x + y) = (x + y)(a^2 - 2ab + b^2) = (x + y)(a - b)^2$$

h) $x^{m+2} - x^m y^2 - x^2 y^n + y^{n+2} = x^m(x^2 - y^2) - y^n(x^2 - y^2) = (x^m - y^n)(x^2 - y^2)$

i) $x^{m+4} + x^{m+1} - x - 1 = x^{m+1}(x^3 + 1) - (x + 1)$

$$= x^{m+1}(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x + 1) = (x + 1)[x^{m+1}(x^2 - x + 1) - 1]$$

$$= (x + 1)(x^{m+3} - x^{m+2} + x^{m+1} - 1)$$

7. a) $5x^3 - 7x^2 - 15x + 21 = 0 \Leftrightarrow 5x(x^2 - 3) - 7(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow (5x - 7)(x^2 - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

b) $(x - 3)^2 = 4x^2 - 20x + 25 \Leftrightarrow (x - 3)^2 - (2x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = 2 \end{cases}$

c) $(x - 1)^2 - 5 = (x + 2)(x - 2) - x(x - 1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 + x(x - 1) - 5 = x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 - x - 5 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$



$$d) (2x - 3)^3 - (2x + 3)(4x^2 - 1) = -24$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 - 8x^3 + 2x - 12x^2 + 3 = -24 \Leftrightarrow -48x^2 + 56x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{7}{6} \end{cases}$$

8.

$$a) x^2 - 10x + 25 - y^2 - 4yz - 4z^2 = (x - 5)^2 - (y + 2z)^2$$

$$= (x - y - 2z - 5)(x + y + 2z - 5)$$

$$b) 1 - 2a + 2bc + a^2 - b^2 - c^2 = a^2 - 2a + 1 - (b^2 - 2bc + c^2)$$

$$= (a - 1)^2 - (b - c)^2 = (a + b - c - 1)(a - b + c - 1)$$

$$c) x^2 + 3cd(2 - 3cd) - 10xy - 1 + 25y^2$$

$$= x^2 - 10xy + 25y^2 + 3cd(2 - 3cd) - 1$$

$$= (x - 5y)^2 + 6cd - 9c^2d^2 - 1 = (x - 5y)^2 - (1 - 6cd + 9c^2d^2)$$

$$= (x - 5y)^2 - (1 - 3cd)^2 = (x - 5y + 1 - 3cd)(x - 5y - 1 + 3cd)$$

$$d) ab^3c^2 - a^2b^2c^2 - ab^2c^3 + a^2bc^3$$

$$= ab^2c^2(b - a) - abc^3(b - a) = abc^2(b - a)(b - c)$$

$$e) (2ab + 5c)^2 + (ac - 10b)^2 = 4a^2b^2 + 20abc + 25c^2 + a^2c^2 - 20abc + 100b^2$$

$$= 4a^2b^2 + 25c^2 + a^2c^2 + 100b^2 = 4a^2b^2 + 100b^2 + 25c^2 + a^2c^2$$

$$= 4b^2(a^2 + 25) + c^2(25 + a^2) = (25 + a^2)(4b^2 + c^2)$$

$$f) (ma + nb)^2 + (ax + by)^2 + (na - mb)^2 + (ay - bx)^2$$

$$= m^2a^2 + 2abmn + n^2b^2 + a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + n^2a^2 - 2abmn + m^2b^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$$

$$= m^2a^2 + n^2b^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + n^2a^2 + m^2b^2 + a^2y^2 + b^2x^2$$

$$= a^2(m^2 + x^2 + n^2 + y^2) + b^2(m^2 + x^2 + n^2 + y^2) = (m^2 + x^2 + n^2 + y^2)(a^2 + b^2)$$

$$g) \left[(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) + 4xyzt \right]^2 - \left[2xy(z^2 + t^2) + 2zt(x^2 + y^2) \right]^2$$

Đặt $x^2 + y^2 = u, z^2 + t^2 = v$. Khi đó, ta có: $(uv + 4xyzt)^2 - (2xyv + 2ztu)^2$

$$= (uv + 4xyzt - 2xyv - 2ztu)(uv + 4xyzt + 2xyv + 2ztu)$$

$$= [v(u - 2xy) - 2zt(u - 2xy)][v(u + 2xy) + 2zt(u + 2xy)].$$



$$= (v - 2zt)(u - 2xy)(v + 2zt)(u + 2xy)$$

$$= (z^2 + t^2 - 2zt)(x^2 + y^2 - 2xy)(z^2 + t^2 + 2zt)(x^2 + y^2 + 2xy)$$

$$= (z + t)^2(z - t)^2(x - y)^2(x + y)^2 = (z^2 - t^2)^2 \cdot (x^2 - y^2)^2$$

h) $(xy + 1)^2 - (x + y)^2 = (xy + 1 - x - y)(xy + 1 + x + y)$

$$= [x(y - 1) - (y - 1)][x(y + 1) + (y + 1)] = (x - 1)(y - 1)(y + 1)(x + 1)$$

$$= (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

i) $16b^2c^2 - 4(b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4[2bc - (b^2 + c^2 - a^2)][2bc + (b^2 + c^2 - a^2)]$

$$= 4[a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2]$$

j) $(x^2 + 4y^2 - 20)^2 - 16(xy - 4)^2 = (x^2 + 4y^2 - 20 - 4xy + 16)(x^2 + 4y^2 - 20 + 4xy - 16)$

$$= [(x - 2y)^2 - 4][(x + 2y)^2 - 36] = (x - 2y - 2)(x - 2y + 2)(x + 2y - 6)(x + 2y + 6)$$

k) $(x + y)^3 - 1 - 3(x + y)(x + y - 1) = (x + y)^3 - 3(x + y)^2 + 3(x + y) - 1$

$$= (x + y - 1)^3$$

l) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$

$$= b(a^2 + bc) - c(a^2 + bc) - a(b^2 - c^2) = (b - c)(a^2 + bc) - a(b - c)(b + c)$$

$$= (b - c)(a^2 + bc - ab - ac) = (b - c)[a(a - b) - c(a - b)] = (b - c)(a - c)(a - b)$$

m) $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

$$= a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2 = b(a^2 + bc) - c(a^2 + bc) - a(b^2 - c^2)$$

$$= (a^2 + bc)(b - c) - a(b - c)(b + c) = (b - c)(a^2 + bc - ab - ac)$$

$$= (b - c)[a(a - b) - c(a - b)] = (b - c)(a - c)(a - b)$$

n) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

$$= a^3b - a^3c + b^3c - b^3a + c^3a - c^3b$$

$$= ab(a^2 - b^2) - c(a^3 - b^3) + c^3(a - b)$$

$$= (a - b)[ab(a + b) - c(a^2 + ab + b^2) + c^3]$$

$$= (a - b)(a^2b + ab^2 - a^2c - abc - b^2c + c^3)$$

$$= (a - b)[a^2(b - c) + ab(b - c) - c(b^2 - c^2)]$$



$$= (a-b)(b-c)(a^2 + ab - cb - c^2) = (a-b)(b-c)[b(a-c) + (a-c)(a+c)]$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$$

o) $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$

$$= a(b^2 + 2bc + c^2) + b(c^2 + 2ac + a^2) + c(a^2 + 2ab + b^2) - 4abc$$

$$= ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 2abc$$

$$= ab(b+c) + ac(c+b) + a^2(b+c) + bc(b+c)$$

$$= (b+c)(ab+ac+a^2+bc) = (b+c)[b(a+c) + a(a+c)]$$

$$= (b+c)(a+c)(a+b)$$

9. a) $A = x(x+y) - 5(x+y) = (x-5)(x+y)$

Thay $x = 15\frac{1}{5}; y = 14\frac{4}{5}$ vào biểu thức A ta có:

$$A = \left(15\frac{1}{5} - 5\right) \left(15\frac{1}{5} + 14\frac{4}{5}\right) = \frac{51}{5} \cdot 30 = 306$$

b) $B = 3x(y-5) - 8(y-5) = (y-5)(3x-8)$

Thay $x = 1999, y = 5$ vào biểu thức B ta có: $B = (5-5)(3 \cdot 1999 - 8) = 0$

c) $C = xy(z-1) - x(z-1) - y(z-1) + (z-1) = (z-1)(xy - x - y + 1)$

$$= (z-1)[x(y-1) - (y-1)] = (z-1)(y-1)(x-1)$$

Thay $x = 9, y = 51, z = 101$ vào biểu thức C ta có

$$C = (101-1)(51-1)(9-1) = 40000$$

d) $D = y^3 + 8x^3 + 2xy(2x+y+2) = (y+2x)(y^2 - 2yx + 4x^2) + 2xy(2x+y+2)$

$$= (2x+y)(y^2 + 4x^2) + 4xy = (2x+y)[(y+2x)^2 - 4xy] + 4xy$$

Thay $2x+y=1$ vào D ta có: $D=1$

10.

a) $4x^2 + 4x - 3 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1 - 1 - 3 = (2x+1)^2 - 4 = (2x+3)(2x-1)$

b) $4x^2 - 12x - 7 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 9 - 7 = (2x-3)^2 - 16 = (2x-7)(2x+1)$

c) $2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x+2) - 3(x+2) = (2x-3)(x+2)$



$$d) 3x^2 - 11x + 6 = 3x^2 - 9x - 2x + 6 = 3x(x - 3) - 2(x - 3) = (3x - 2)(x - 3)$$

$$e) 4x^2 + 16x - 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4 + 4^2 - 16 - 9 = (2x + 4)^2 - 25 = (2x + 9)(2x - 1)$$

$$f) 6x^2 + 7x + 2 = 6x^2 + 3x + 4x + 2 = 3x(2x + 1) + 2(2x + 1) = (2x + 1)(3x + 2)$$

$$g) -5x^2 - 29x - 20 = -5x^2 - 25x - 4x - 20 = -5x(x + 5) - 4(x + 5) \\ = (x + 5)(-5x - 4)$$

$$h) -7x^2 + 11x + 6 = -7x^2 + 14x - 3x + 6 = -7x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(-7x - 3)$$

$$k) x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4 = (x + 3)(x - 1)$$

$$l) -x^2 - 4x - 3 = -(x^2 + 4x + 3) = -(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 4 + 3) = -[(x + 2)^2 - 1] \\ = -(x + 3)(x + 1)$$

$$m) -x^2 + 4xy + 12y^2 = -(x^2 - 4xy - 12y^2) = -[x^2 - 2x \cdot 2y + (2y)^2 - 4y^2 - 12y^2] \\ = 16y^2 - (x - 2y)^2 = (4y - x + 2y)(4y + x - 2y) = (6y - x)(2y + x)$$

$$n) -x^2 + 25x - 150 = -x^2 + 10x + 15x - 150 = -x(x - 10) + 15(x - 10) \\ = (15 - x)(x - 10)$$

$$11. a) 15x^3 + 7x^2 - 2x = x(15x^2 + 7x - 2) = x(15x^2 + 10x - 3x - 2) \\ = x[3x(5x - 1) + 2(5x - 1)] = x \cdot (5x - 1)(3x + 2).$$

$$b) 12x^4 + 7x^3 - 12x^2 = x^2(12x^2 + 7x - 12) = x^2(12x^2 + 16x - 9x - 12) \\ = x[3x(4x - 3) + 4(4x - 3)] = x(3x + 4)(4x - 3).$$

$$c) x^2yz + 6xyz - 16yz = yz(x^2 + 6x - 16) = yz(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 9 - 16). \\ = yz[(x + 3)^2 - 25] = yz(x - 2)(x + 8)$$

$$d) x^2 + 2xy - 3y^2 = x^2 - xy + 3xy - 3y^2 = x(x - y) + 3y(x - y) = (x + 3y)(x - y)$$

$$e) -x^2 + 4xy + 12y^2 = -(x^2 - 4xy) + 12y^2 = -(x^2 - 4xy + 4y^2 - 4y^2) + 12y^2 \\ = -(x - 2y)^2 + 16y^2 = (4y - x + 2y)(4y + x - 2y) = (6y - x)(2y + x)$$

$$f) -21x^2y - 12xy^2 + 9y^3 = -3y(7x^2 + 4xy - 3y^2) = -3y(7x^2 + 7xy - 3xy - 3y^2) \\ = -3y[7x(x + y) - 3y(x + y)] = -3y(x + y)(7x - 3y)$$

12.



$$\text{a) } x^4 - 14x^2 + 24 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 7 + 7^2 - 49 + 24 = (x^2 - 7)^2 - 25 = (x^2 - 12)(x^2 - 2)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^4 + 4y^4 &= (x^2)^2 + (2y^2)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2y^2 + (2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 81x^4 + 4 &= (9x^2)^2 + 2^2 = (9x^2)^2 + 2 \cdot 9x^2 \cdot 2 + 2^2 - 36x^2 = (9x^2 + 2)^2 - (6x)^2 \\ &= (9x^2 + 2 - 6x)(9x^2 + 2 + 6x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 4x^4y^4 + 1 &= (2x^2y^2)^2 + 1 = (2x^2y^2)^2 + 2 \cdot 2x^2y^2 + 1 - (2xy)^2 \\ &= (2x^2y^2 + 1)^2 - (2xy)^2 = (2x^2y^2 + 1 - 2xy)(2x^2y^2 + 1 + 2xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^5 + x + 1 &= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } x^8 + x^7 + 1 &= x^8 + x^7 + x^6 - x^6 - x^5 - x^4 + x^5 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1 \\ &= x^6(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1) \end{aligned}$$

13. a) Đặt $t = x^2 + x + 2$. Khi đó,

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 &= (t - 1)t - 12 = t^2 - t - 12 = t^2 - 4t + 3t - 12 \\ &= t(t - 4) + 3(t - 4) = (t - 4)(t + 3) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5) \end{aligned}$$

b) Đặt $t = x^2 + 3x + 2$. Khi đó,

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 2) - 6 &= (t - 1)t - 6 = t^2 - t - 6 = t^2 - 3t + 2t - 6 \\ &= t(t - 3) + 2(t - 3) = (t - 3)(t + 2) = (x^2 + 3x - 1)(x^2 + 3x + 4) \end{aligned}$$

c) Đặt $t = x^2 + 3x + 2$. Khi đó,

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 = (t - 2) \cdot t + 1 = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

d) Đặt $t = x^2 + 7x + 10$. Khi đó,

$$\begin{aligned} (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24 &= t(t + 2) - 24 = t^2 + 2t - 24 \\ &= t^2 + 2t + 1 - 1 - 24 = (t + 1)^2 - 25 = (t - 4)(t + 6) \end{aligned}$$

$$\text{e) } (4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) - 4 = (12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 11x - 1) - 4$$

Đặt $t = 12x^2 + 11x + 2$. Khi đó,



$$\begin{aligned} & (12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 11x - 1) - 4 = t \cdot (t - 3) - 4 = t^2 - 3t - 4 \\ & = t^2 - 4t + t - 4 = t(t - 4) + (t - 4) = (t - 4)(t + 1) \\ & = (12x^2 + 11x - 2)(12x^2 + 11x + 3) \end{aligned}$$

f) $(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 10x + 21) + 15$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 & = x^2 + x + 5x + 5 = x(x + 1) + 5(x + 1) = (x + 1)(x + 5) \\ x^2 + 10x + 21 & = x^2 + 3x + 7x + 21 = x(x + 3) + 7(x + 3) = (x + 3)(x + 7) \\ (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 10x + 21) + 15 & = (x + 1)(x + 5)(x + 3)(x + 7) + 15 \\ & = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 8x + 15$. Khi đó,

$$\begin{aligned} (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15 & = (t - 8)t + 15 = t^2 - 8t + 15 \\ & = t^2 - 3t - 5t + 15 = t(t - 3) - 5(t - 3) = (t - 5)(t - 3) \\ & = (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) \end{aligned}$$

g) $x^4 + (x - 4)^4 - 82 = x^4 - 81 + (x - 4)^4 - 1$

$$\begin{aligned} & = (x^2 - 9)(x^2 + 9) + [(x - 4)^2 - 1][(x - 4)^2 + 1] \\ & = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) + (x - 5)(x - 3)[(x - 4)^2 + 1] \\ & = (x - 3)[(x + 3)(x^2 + 9) + (x - 5)(x^2 - 8x + 17)] \\ & = (x - 3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27 + x^3 - 13x^2 + 57x - 85) \\ & = (x - 3)(2x^3 - 10x^2 + 66x - 58) \\ & = 2(x - 3)(x^3 - 5x^2 + 33x - 29) = 2(x - 3)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x^2 + 30x - 28) \\ & = 2(x - 3)[(x - 1)^3 - 2(x^2 - 15x + 14)] = 2(x - 3)[(x - 1)^3 - 2(x^2 - x - 14x + 14)] \\ & = 2(x - 3)[(x - 1)^3 - 2(x(x - 1) - 14(x - 1))] \\ & = 2(x - 3)[(x - 1)^3 - 2(x - 1)(x - 14)] = 2(x - 3)(x - 1)(x^2 - 2x + 1 - 2x + 28) \\ & = 2(x - 3)(x - 1)(x^2 - 4x + 29) \end{aligned}$$

h) $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a$

$$= x^4 - 2ax^2 + a^2 - 6x^2 + 4x + 2a$$



$$= a^2 - 2a(x^2 - 1) + x^4 - 6x^2 + 4x = a^2 - 2a(x^2 - 1) + x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 + 4x - 1$$

$$= a^2 - 2a(x^2 - 1) + (x^2 - 1)^2 - (2x - 1)^2$$

$$= (a - x^2 + 1)^2 - (2x - 1)^2 = (a - x^2 + 2x)(a - x^2 - 2x + 2)$$



Bài 10 : TỨ GIÁC

1. a) Không có tứ giác nào có 4 góc nhọn.
 b) Tổng các góc của một tứ giác bằng 360° . Do đó, một tứ giác có nhiều nhất ba góc nhọn, có nhiều nhất ba góc tù, nhiều nhất bốn góc vuông.

2. a) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 120^\circ$

b) Tương tự tính được $\widehat{D} = 126^\circ$. Vậy góc ngoài đỉnh D có số đo là 54° .

3.

Hình 1: $90^\circ + 50^\circ + x + x = 360^\circ \Rightarrow x = 110^\circ$

Hình 2: $x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$

Hình 3: $x + 2x + 2x + x = 360^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$

Hình 4: $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$

4. $\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{5} = \frac{360^\circ - (100^\circ + 60^\circ)}{5} = 40^\circ$.

Từ đó tính được $\widehat{A} = 120^\circ$. $\widehat{B} = 80^\circ$.

5.

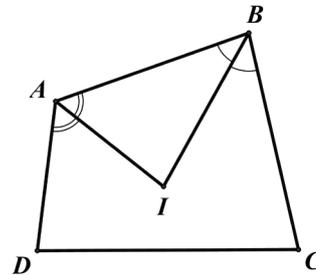
a) Từ giả thiết ta có: $2\widehat{B} + 2\widehat{C} + 2\widehat{D} = 200^\circ + 180^\circ + 120^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 250^\circ$

Vì $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 110^\circ$.

$\widehat{B} = 250^\circ - (\widehat{C} + \widehat{D}) = 250^\circ - 120^\circ = 130^\circ$

$\widehat{C} = 200^\circ - \widehat{B} = 200^\circ - 130^\circ = 70^\circ$.

$\widehat{D} = 120^\circ - \widehat{C} = 120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$.



b) Trong tam giác ABI : $\widehat{AIB} = 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = \frac{360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})}{2} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$.

6.

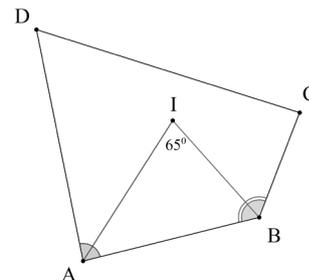
Xét $\triangle AIB$ có:

$\widehat{AIB} + \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = 180^\circ$ (Tổng 3 góc trong tam giác).

Mà $\widehat{AIB} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = 115^\circ$

Do đó $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 2 \cdot (\widehat{IAB} + \widehat{IBA}) = 230^\circ$

Xét tứ giác $ABCD$ có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$





$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{D} = 130^\circ. \text{ Mặt khác } \widehat{C} - \widehat{D} = 10^\circ \text{ nên } \widehat{C} = (130^\circ + 10^\circ) : 2 = 70^\circ$$

$$\text{Từ đó } \widehat{D} = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ.$$

7.

a) Tứ giác $ABCD$ có

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$$

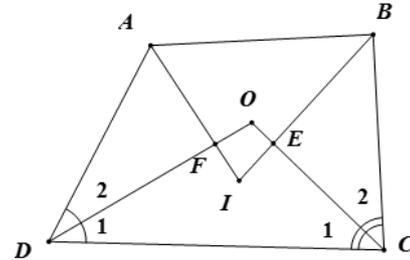
$$\Rightarrow 120^\circ + 90^\circ + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{D} = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = (\widehat{C} + \widehat{D}) : 2 = 150^\circ : 2 = 75^\circ$$

ΔCOD có $\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 75^\circ$ nên

$$\widehat{COD} = 180^\circ - (\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$



b) Giải tương tự như câu a. Đáp số: $\widehat{COD} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$.

c) Chứng minh tương tự như câu b, ta được $\widehat{EIF} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$.

$$\text{Do đó: } \widehat{COD} + \widehat{EIF} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{OEI} + \widehat{OFI} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

8. Xét ΔCOD có $\widehat{COD} = 180^\circ - (\widehat{C}_2 + \widehat{D}_2) = 180^\circ - \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$ (vì $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$; $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$).

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})$, do đó

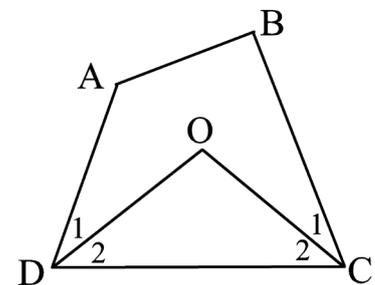
$$\widehat{COD} = 180^\circ - \frac{360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})}{2} = 180^\circ - 180^\circ + \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{COD} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$$

Theo đề bài $\widehat{COD} = 115^\circ$ nên $\widehat{A} + \widehat{B} = 230^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{A} - \widehat{B} = 50^\circ$ nên $\widehat{B} = (230^\circ - 50^\circ) : 2 = 90^\circ$.

Do đó $AB \perp BC$.





9. a) Do $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ (gt)

$$\widehat{EDC} + \widehat{D} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{EDC}$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EDC$ có:

$$AB = ED; BC = CD; \widehat{B} = \widehat{EDC}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle EDC \text{ (cgc)}$$

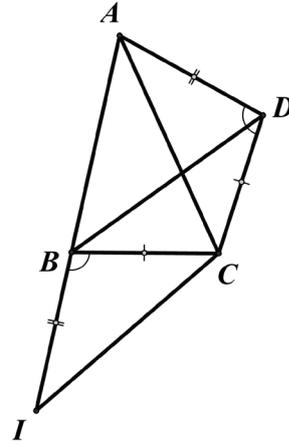
b) Do $\triangle ABC = \triangle EDC$ (câu a)

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CED} \text{ (hai góc tương ứng) (1)}$$

$$AC = EC \text{ (hai cạnh tương ứng) (2)}$$

Từ (1) suy ra $\triangle ECA$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CAD}$

Mà từ (2) có $\widehat{CAD} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CAD}$. Vậy AC là phân giác góc \widehat{A} .



10.

a) Ta có $AB = AD$ (gt) $\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BD .

$CB = CD$ (gt) $\Rightarrow C$ thuộc đường trung trực của BD .

Vậy AC là đường trung trực của BD .

b) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ có $AB = AD$ (gt); $BC = DC$ (gt); AC cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC \text{ (c-c-c)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{B} = \widehat{D}$$

Xét tứ giác $ABCD$ có

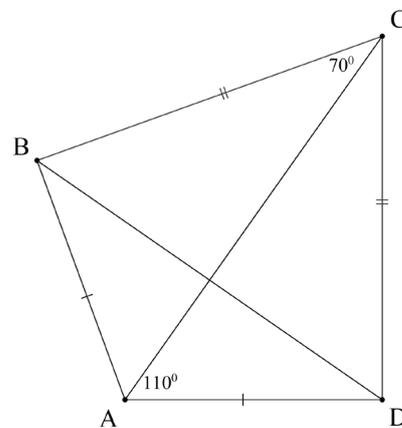
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$$

$$110^\circ + \widehat{B} + 70^\circ + \widehat{D} = 360^\circ$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{B} = \widehat{D} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ.$$



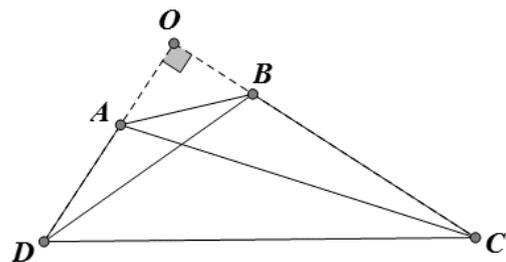
11. Bài này bên sách CD cho vào $B1$, thầy cô có thể bỏ qua khi sử dụng

Gọi O là giao điểm AD và BC .

$$\text{Ta có } \widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{O} = 90^\circ$$

Áp dụng định lí Py - ta - go,

$$\text{Ta có } AC^2 = OA^2 + OC^2.$$





$$BD^2 = OB^2 + OD^2$$

Nên $AC^2 + BD^2 = (OA^2 + OB^2) + (OC^2 + OD^2) = AB^2 + CD^2$

12.

FI cắt BC tại K , suy ra K thuộc đoạn

BC

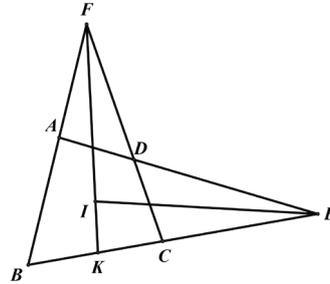
$$\Rightarrow \widehat{EIF} = \widehat{EKI} + \widehat{IEK} \quad (\widehat{EIF} \text{ là góc ngoài của } \triangle IKE)$$

$$= \widehat{B} + \widehat{BFK} + \widehat{IEK} \quad (\widehat{CKF} \text{ là góc ngoài của } \triangle FBK)$$

$$\widehat{BFC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) \Rightarrow \widehat{BFK} = 90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$$

$$\widehat{AEB} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \Rightarrow \widehat{IEK} = 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$$

$$\text{Vậy } \widehat{EIF} = \widehat{B} + 90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} + 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2}$$



13.

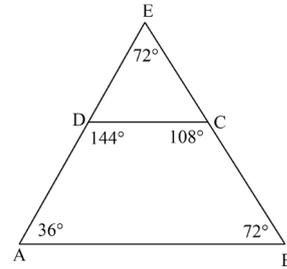
a)

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{D}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 36^\circ; \widehat{B} = 72^\circ; \widehat{C} = 108^\circ; \widehat{D} = 144^\circ$$

$$\text{b) } \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$$

$$\text{c) } \widehat{EDC} = 36^\circ; \widehat{ECD} = 72^\circ$$



14. a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AEC$ có:

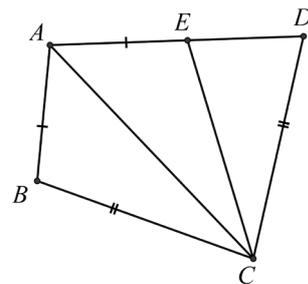
$$AB = AE \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{EAC} \text{ (vì } AC \text{ là tia phân giác của góc A)}$$

AC chung.

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle AEC \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEC} \text{ (đpcm) (1)}$$





b) Ta có $\triangle ABC = \triangle AEC$ (cmt)

$\Rightarrow CB = CE$, mà $CB = CD$ (giả thiết) $\Rightarrow CE = CD$

$\Rightarrow \triangle CED$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CDE}$ hay $\widehat{CED} = \widehat{D}$ (2)

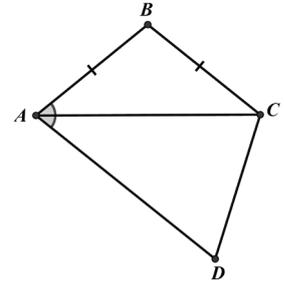
Mà $\widehat{AEC} + \widehat{CED} = 180^\circ$ (hai góc kề bù), nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$



Bài 11 : HÌNH THANG CÂN

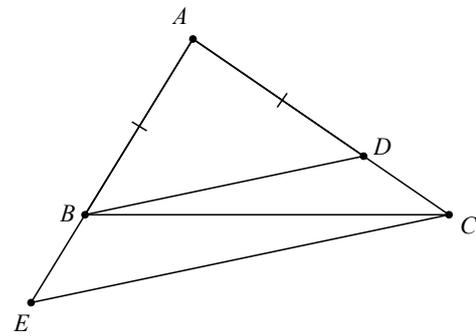
1.

Ta có $\triangle ABC$ cân tại B (gt) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$
 Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$ (AC là tia phân giác của \widehat{BAD})
 $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DAC} \Rightarrow BC // AD$
 $\Rightarrow ABCD$ là hình thang.



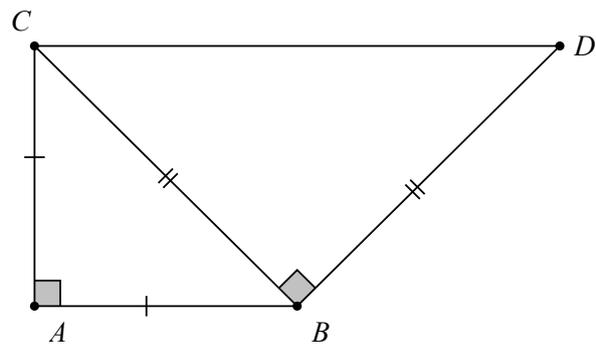
2.

$AB = AD \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A
 $\Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{180^\circ - \widehat{BAD}}{2}$ (1)
 $AE = AC \Rightarrow \triangle AEC$ cân tại A
 $\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{AEC} = \frac{180^\circ - \widehat{EAC}}{2}$ (2)
 Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ABD}$
 Mà hai góc này ở vị trí đồng vị
 $\Rightarrow BD // EC$
 $\Rightarrow BDCE$ là hình thang.



3.

$\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow$
 $\begin{cases} \widehat{BAC} = 90^\circ \\ \widehat{ABC} = 45^\circ \end{cases}$
 $\triangle BCD$ vuông cân tại $B \Rightarrow$
 $\widehat{BCD} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BCD} (= 45^\circ)$
 $\Rightarrow AB // CD$
 $\Rightarrow ABDC$ là hình thang
 Mà $\widehat{BAC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow ABDC$ là hình thang.



☞ Hình thang $ABDC$ còn được gọi là hình thang vuông

☼ Hình thang có một góc vuông được gọi là hình thang vuông.

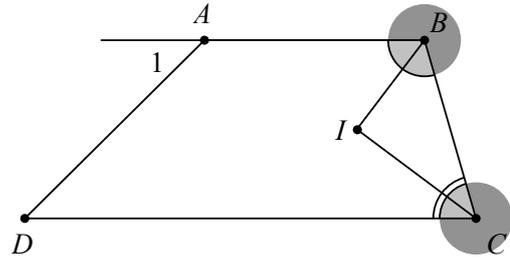


4.

a) Ta có $\widehat{A} + \widehat{A}_1 = 180^\circ$

$$\Rightarrow 8x - 9^\circ + 3x - 9^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{D} = 45^\circ \\ \widehat{A} = 135^\circ \\ \widehat{A}_1 = 45^\circ \end{cases}$$



$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{A}_1 \Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ là hình thang

b) $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ mà $\widehat{B} = \widehat{C} + 32^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{C} + 32^\circ + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 74^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 106^\circ$$

BI là tia phân giác của $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC} = 53^\circ$

CI là tia phân giác của $\widehat{DCB} \Rightarrow \widehat{DCI} = \widehat{ICB} = \frac{\widehat{DCB}}{2} \Rightarrow \widehat{DCI} = \widehat{ICB} = 37^\circ$

Xét $\triangle BIC$ có: $\widehat{BIC} + \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^\circ - (53^\circ + 37^\circ) = 90^\circ$$

5.

Ta có $\widehat{A}_2 = \widehat{E}_1$ (hai góc so le trong của $AB \parallel CD$)

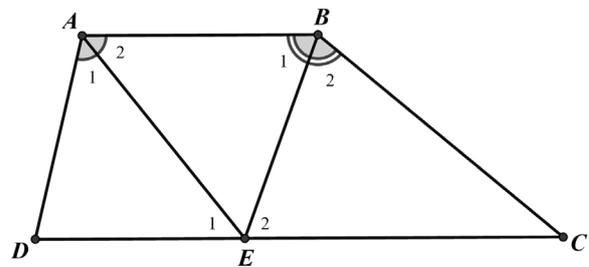
Mà $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$ (AE là tia phân giác của \widehat{A})

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{A}_1 \Rightarrow \triangle DAE \text{ cân tại } D$$

$$\Rightarrow DA = DE$$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow \triangle BCE$ cân tại C nên $CB = CE$.

Vậy $CD = AD + BC$



6. a) Kẻ $BH \perp DC (H \in DC)$ (1)

Ta có $DH = AB$ ($\triangle ABD = \triangle HDB$ (g.c.g))

$$\Rightarrow DH = AB = 2cm \Rightarrow HC = 2cm \Rightarrow DH = HC$$
 (2)

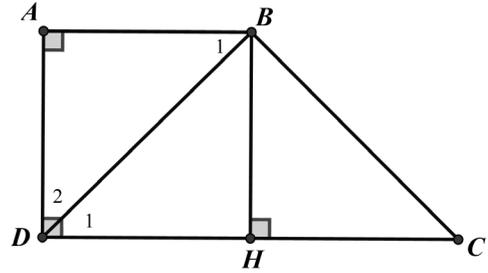


Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BCD$ cân tại B

Mặt khác $\triangle BDH = \triangle BCH$ ($c - g - c$)

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BCD$ vuông cân tại B



b) Ta có $\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D}_2 = 45^\circ \Rightarrow DB$ là tia phân giác của \widehat{D}

c) Ta có $\triangle ADB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AD = 2\text{cm}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD = \frac{(2 + 4) \cdot 2}{2} = 6\text{cm}^2$$

7. Gọi E là giao điểm của AB và DM

$$\text{Có } AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AEM} = \widehat{MDC} \\ \widehat{EBM} = \widehat{DCM} \end{cases}$$

Xét $\triangle BEM$ và $\triangle CDM$ có:

$$\widehat{BME} = \widehat{CMD} \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$BM = CM \text{ (M là trung điểm BC)}$$

$$\widehat{EBM} = \widehat{DCM} \text{ (so le trong)}$$

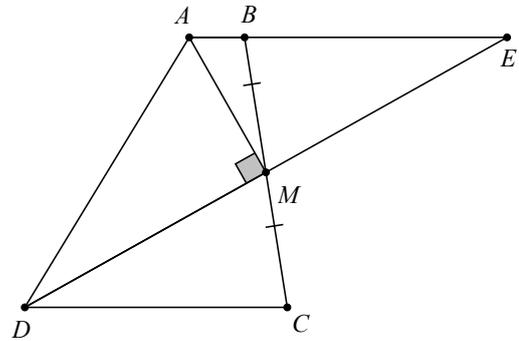
$$\Rightarrow \triangle BEM = \triangle CDM \text{ (g.c.g)}$$

$\Rightarrow EM = MD \Rightarrow M$ là trung điểm của ED

$$\triangle AMD = \triangle AME \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ADM}$$

$$\text{Mà } \widehat{AEM} = \widehat{MDC} \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{CDM} (= \widehat{AEM})$$

$\Rightarrow DM$ là phân giác của \widehat{ADC} .



8. a) Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $\widehat{AIE} = \widehat{AIB}$

$$\Rightarrow \triangle AEI = \triangle ABI \text{ (g.c.g)}$$

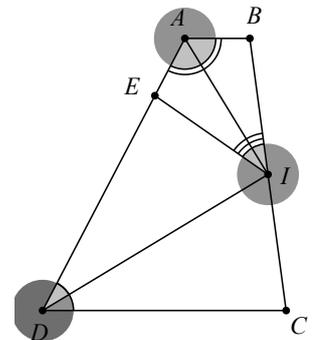
$$\Rightarrow AE = AB \text{ (1)}$$

Có $\widehat{BAD} + \widehat{CDA} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

$$\text{Suy ra } \widehat{DAI} + \widehat{ADI} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{AID} = \widehat{AIE} + \widehat{EID} = 90^\circ$$

$$\widehat{BIA} + \widehat{CID} = 90^\circ.$$

Theo cách dựng $\widehat{AIE} = \widehat{AIB}$ nên $\widehat{EID} = \widehat{CID}$





Ta có $\triangle DEI = \triangle DCI (g.c.g) \Rightarrow DE = DC (2)$

Mà $AD = AE + DE$ nên từ (1) và (2) $\Rightarrow AD = AB + DC$

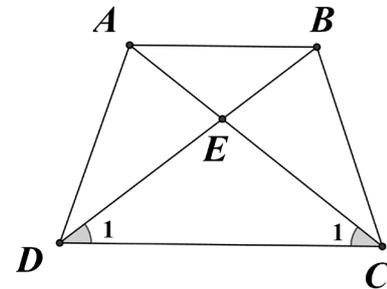
9. Gọi E là giao điểm của AC và BD .

$\triangle ECD$ có $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ nên là tam giác cân
 $\Rightarrow EC = ED (1)$

Chứng minh tương tự có $EA = EB (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AC = BD$.

Hình thang $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.



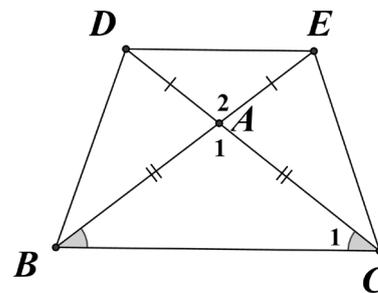
10.

$\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{C}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}_1}{2}$

$\triangle DAE$ cân tại A nên

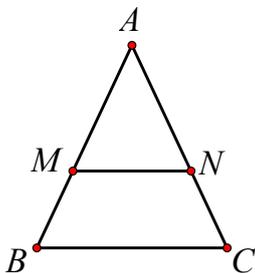
$$\widehat{ADE} = \frac{180^\circ - \widehat{A}_2}{2}$$

Do $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{ADE}$, suy ra $DE \parallel BC$.

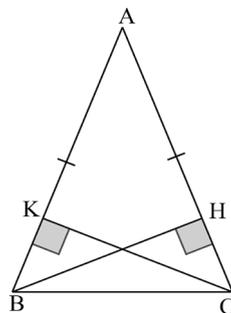


Hình thang $BDEC$ có $BE = CD$ nên là hình thang cân

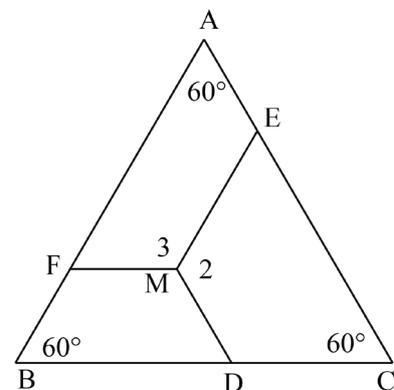
Hình bài 10



Hình bài 11



Hình bài 12.



11. Ta có $MN \parallel BC$ (gt) nên $BCNM$ là hình thang. Mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ (tam giác ABC cân tại A) nên $BCNM$ là hình thang cân.



12. Chứng minh $\triangle BKC = \triangle CHB(ch - gn) \Rightarrow CK = BH; AK = AH$

$$\Rightarrow \widehat{AHK} = \frac{180^\circ - \widehat{KHA}}{2} = \widehat{ACB} \Rightarrow HK // BC$$

13. a) Chứng minh hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

b) Ta có: $\widehat{DME}, \widehat{EMF}, \widehat{DMF} = 120^\circ$

14.

a) $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$

Vì $AB = AC$ và $BM = CN$ nên

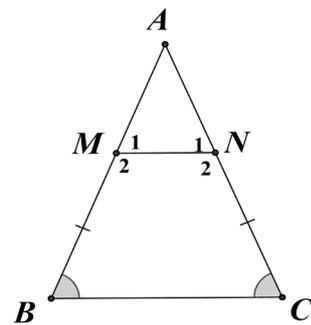
$AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A .

Suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$

Từ đó suy ra $\widehat{B} = \widehat{M}_1$, do đó $MN // BC$.

Tứ giác $BMNC$ là hình thang, lại có $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên là hình thang cân

b) $\widehat{B} = \widehat{C} = 70^\circ, \widehat{M}_2 = \widehat{N}_2 = 110^\circ$.



15.

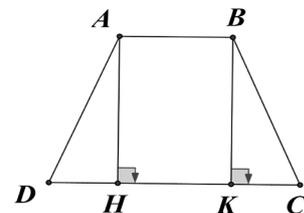
Kẻ AH, BK vuông góc với CD .

Ta chứng minh được $HK = AB = 10cm$.

Do đó $DH = CK = \frac{24 - 10}{2} = 7cm$.

Dùng định lí Pythagore ta tính được

$BK = 24cm$.

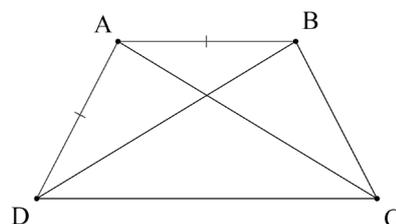


16.

Ta có $AB // CD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong)

Lại có $AB = AD \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ADB}$





$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CDB}$$

b) Ta có $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow BC = AD$ mà $AB = AD$

$$\Rightarrow AB = BC \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } B \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$$

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACD} \text{ hay } CA \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{C}.$$

17.

a) Ta có $ABCD$ là hình thang cân

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD} \text{ hay } \widehat{ODC} = \widehat{OCD}$$

$$\Rightarrow \Delta AOB \text{ cân tại } O.$$

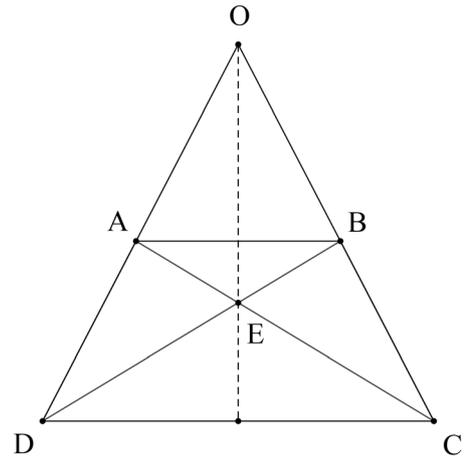
b) Xét ΔABD và ΔBAC , có:

AB chung

$$\widehat{BAD} = \widehat{ABC} \text{ (} ABCD \text{ là hình thang cân)}$$

$$AD = BC \text{ (} ABCD \text{ là hình thang cân)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta BAC \text{ (c.g.c)}$$



c) Ta có: $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ ($ABCD$ là hình thang cân)

$$\widehat{ADB} = \widehat{BCA} \text{ (} \Delta ABD = \Delta BAC \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{BCD} - \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ACD} \text{ hay } \widehat{EDC} = \widehat{ECD}$$

$$\Rightarrow \Delta EDC \text{ cân tại } E \Rightarrow EC = ED.$$

d) Ta có: $AD = BC$ ($ABCD$ là hình thang cân)

$$OA = OB \text{ (} \Delta AOB \text{ cân tại } O \text{)}$$

$$\Rightarrow OA + AD = OB + BC \text{ hay } OD = OC // \Rightarrow O \text{ nằm trên đường trung trực của } CD \text{ (1)}$$

+) $EC = ED \Rightarrow E$ nằm trên đường trung trực của CD (2)

+) $AC = BD$ ($ABCD$ là hình thang cân)

$$EC = ED \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow AC - EC = BD - ED \Rightarrow EA = EB \Rightarrow E \text{ nằm trên đường trung trực của } AB \text{ (3)}$$

+) ΔAOB cân tại $O \Rightarrow OA = OB \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của AB (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) $\Rightarrow OE$ là trung trực của hai đáy AB và CD .



18.

a) Ta có $\triangle BCE = \triangle DEC$ (g.c.g)

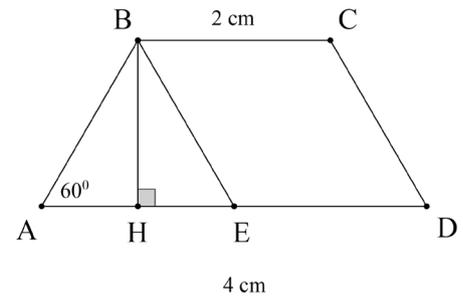
$\Rightarrow ED = BC = 2\text{ cm}$, và $BE = CD$

b) Ta có : $AB = CD$ (Vì $ABCD$ là hình thang cân)

$BE = CD$ (cmt)

$\Rightarrow BA = BE \Rightarrow \triangle ABE$ cân tại B , lại có $\hat{A} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABE$ đều.



c) Ta có $AE = AD - ED = 4 - 2 = 2\text{ cm}$

$\triangle ABE$ đều nên đường cao BH đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow AH = \frac{AE}{2} = \frac{2}{2} = 1\text{ cm}$



Bài 12 : HÌNH BÌNH HÀNH

1. Hình a) là hình bình hành.

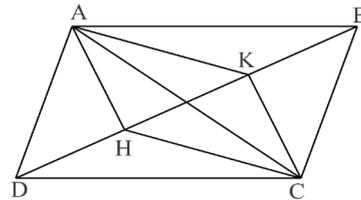
2. a) $AB // CD$ b) $\widehat{B} = \widehat{D}$ c) $\widehat{B} = 70^\circ$

3.

Ta có: $AH \perp BD, CK \perp BD \Rightarrow AH // CK$

$\triangle AHD = \triangle CKB(ch - gn) \Rightarrow AH = CK$.

Vậy tứ giác $AHCK$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)



4.

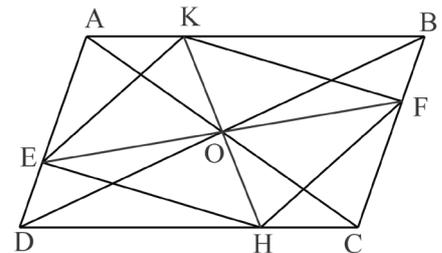
Ta có $\triangle AOK = \triangle COH \Rightarrow OK = OH$

Lại có $\triangle DOE = \triangle BOF \Rightarrow OE = OF$

Xét tứ giác $EKFH$, có

$OK = OH, OE = OF \Rightarrow EKFH$ là hình bình hành

(dấu hiệu nhận biết)



5.

a) Vì E là trung điểm của CD nên

$DE = CE = \frac{1}{2}CD$ mà $AB = \frac{1}{2}CD$ nên $AB = DE = CE$

.

Do đó $AB = DE$ (1)

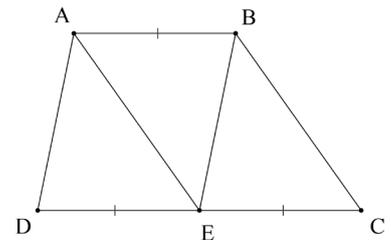
Mặt khác ta có $AB // CD$ nên $AB // DE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ABED$ là hình bình hành.

b) Xét tứ giác $ABCE$ có: $AB = CE$ (chứng minh trên)

$AB // CE$ (vì $AB // CD$)

Do đó tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.





6.

a) Xét tứ giác $ADME$ có: $DM \parallel AE$ (vì $MD \parallel AC$, $E \in AC$)

$$ME \parallel AD \text{ (vì } ME \parallel AB, D \in AB)$$

Do đó tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

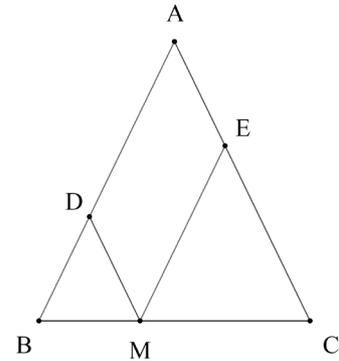
b) Vì $\triangle ABC$ cân ở A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$ mà $ME \parallel AB$ nên $\widehat{EMC} = \widehat{B}$ (hai góc đồng vị).

Do đó $\widehat{EMC} = \widehat{C}$ suy ra $\triangle EMC$ là tam giác cân tại E .

c) Ta có $MD = AE$ (vì tứ giác $ADME$ là hình bình hành)

Mặt khác, $ME = EC$ (vì $\triangle EMC$ là tam giác cân tại E).

$$\text{Suy ra } MD + ME = AE + EC = AC$$



7.

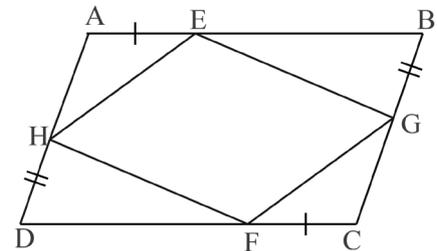
Theo giả thiết ta có: $AE = CF \Rightarrow EB = DF$

$$DH = BG \Rightarrow AH = CG$$

$$\triangle AHE = \triangle CGF \Rightarrow HE = GF;$$

$$\triangle EBD = \triangle FDH \Rightarrow HF = EG$$

$\Rightarrow EGFH$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)



8.

a) Vì $\triangle ABC$ cân ở A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ mà $DF \parallel AC$ nên $\widehat{BFD} = \widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị).

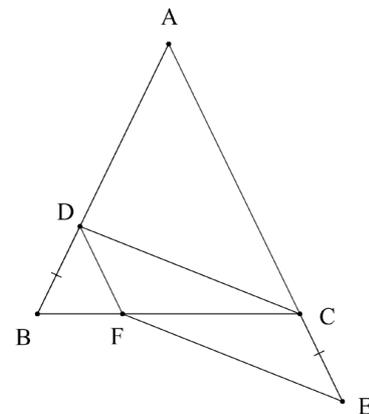
$$\text{Do đó } \widehat{BFD} = \widehat{ABC}$$

suy ra $\triangle DBF$ là tam giác cân tại D .

b) Vì $\triangle DBF$ là tam giác cân tại D nên $DF = BD$ mà $CE = BD$ do đó $CE = DF$.

Mặt khác $CE \parallel DF$ (vì $DF \parallel AC$)

Vậy tứ giác $DCEF$ là hình bình hành.





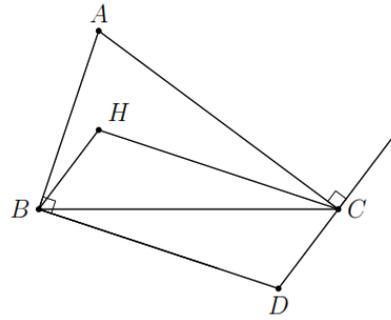
9.

Xét $\triangle ABC$ có H là trực tâm,
suy ra $CH \perp AB$; $BH \perp AC$.

$$\text{Vì } \begin{cases} BD \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH // BD \quad (1).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} BH \perp AC \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH // CD \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.



10.

a) Tứ giác $ABEC$ có $MA = ME$ (gt) và
 $MB = MC$ (AM là trung tuyến của $\triangle ABC$)

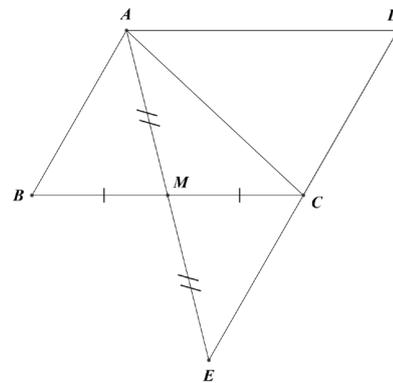
Suy ra tứ giác $ABEC$ là hình bình hành
(hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm
của mỗi đường)

b) Ta có: $ABEC$ là hình bình hành
 $\Rightarrow AB // CE$ và $AB = CE$ (1)

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành nên
 $AB // CD$ và $AB = CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra D, C, E thẳng hàng và $AB = CE = CD$.

Do đó D, C, E thẳng hàng và C là trung điểm của DE .



11.

a) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \begin{cases} AB // CD; AB = CD \\ \widehat{ABC} = \widehat{ADC} \end{cases} \Rightarrow ED // BF \quad (1).$$

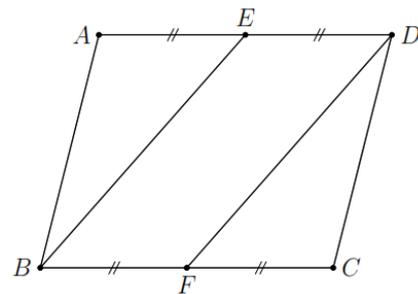
Vì E là trung điểm của
 $AD \Rightarrow AE = ED = \frac{AD}{2}$.

Vì F là trung điểm của $BC \Rightarrow BF = FC = \frac{BC}{2}$.

Do đó $ED = BF$ (2).

Từ (1) và (2) \Rightarrow Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = DF$.

Vì $BEDF$ là hình bình hành nên $\widehat{EBF} = \widehat{EDF}$.





Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CDF}$.

b) Vì tứ giác $BEDF$ là hình bình hành suy ra $BE // DF$.

12.

a) Ta có $AKCI$ là hình bình hành

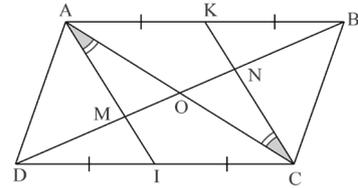
$\Rightarrow \Delta ADI = \Delta CBK (ccc) \Rightarrow \Delta ADM = \Delta CBN (gcg)$

b) Vì $AKCI$ là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NCA}, IM // CN$

c) Theo câu a

$\Rightarrow DM = NB, MN = NB \Rightarrow DM = MN = NB$



13.

a) Ta có: $ABCD$ hình bình hành $\Rightarrow AD // BC \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CBF}$ (hai góc so le trong)

Xét hai tam giác vuông ADE và CBF có

$\widehat{AED} = \widehat{CFB} = 90^\circ$

$AD = BC$ ($ABCD$ là hình bình hành)

$\widehat{ADE} = \widehat{CBF}$ (cmt)

Do đó $\Delta ADE = \Delta CBF$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AE = CF$ (cặp cạnh tương ứng)

$\begin{cases} AE \perp BD \\ CF \perp BD \end{cases} \Rightarrow AE // CF$

Xét tứ giác $AECF$ có: $\begin{cases} AE = CF \text{ (cmt)} \\ AE // CF \text{ (cmt)} \end{cases}$

\Rightarrow Tứ giác $AECF$ là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

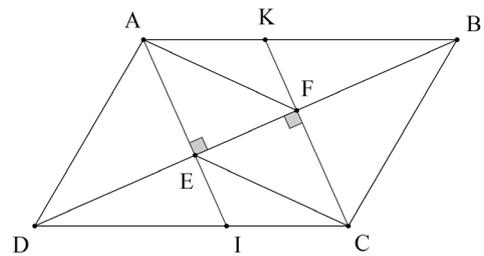
b) Ta có: $ABCD$ hình bình hành $\Rightarrow AB // CD$ hay $AK // HI$ (vì $K \in AB, I \in CD$)

Xét tứ giác $AICK$ có $AK // IC$ (cmt) và $AI // CK$ (vì $AE // CF$)

Suy ra tứ giác $AICK$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AI = CK$.

c) Từ câu a) ta có $\Delta ADE = \Delta CBF \Rightarrow DE = BF$ (cặp cạnh tương ứng)





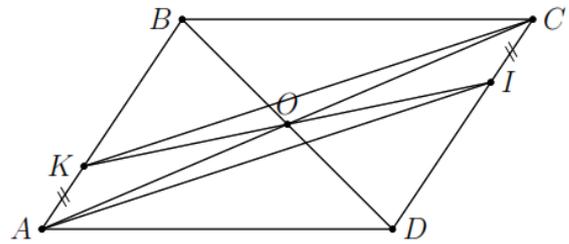
14.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD \Rightarrow AK // CI$.

Xét tứ giác $AKCI$ có $\begin{cases} AK = CI \\ AK // CI. \end{cases}$

\Rightarrow Tứ giác $AKCI$ là hình bình hành.

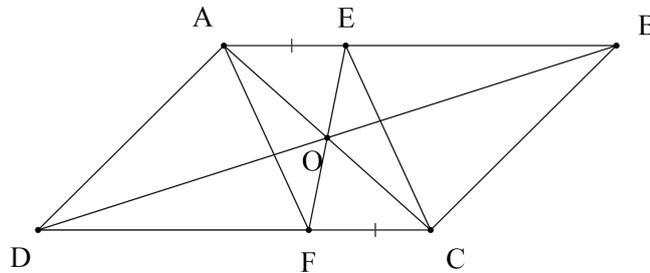
Xét hình bình hành $AKCI$ có O là trung điểm AC



Suy ra O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $AKCI \Rightarrow K, O, I$ thẳng hàng.

Hay AC, BD, KI đồng quy.

15.



a) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AB // CD; AD // BC; AB = CD; BC = AD$

Xét tứ giác $AECF$ có $AE = CF$ và $AE // CF \Rightarrow$ Tứ giác $AECF$ là hình bình hành

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có AC cắt BD tại $O \Rightarrow O$ là trung điểm của AC .

Vì tứ giác $AECF$ là hình bình hành $\Rightarrow EF$ cắt AC tại trung điểm của mỗi đường
Mà O là trung điểm của $AC \Rightarrow O$ là trung điểm của EF .

16.

a) * Xét $\triangle ADH$ và $\triangle CBK$ có:

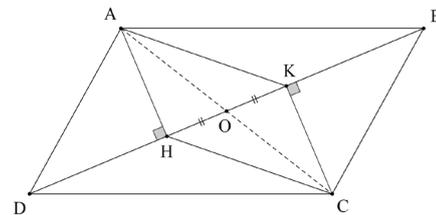
$$\widehat{AHD} = \widehat{CKB} (= 90^\circ).$$

$AD = BC$ (hai cạnh đối của hình bình hành $ABCD$).

$$\widehat{ADH} = \widehat{CBK} \text{ (hai góc so le trong, } AD // BC).$$

$$\Rightarrow \triangle ADH = \triangle CBK \text{ (ch - gn).}$$

$$\Rightarrow AH = CK$$





* Tứ giác $AHCK$ có: $AH = CK$ (c/m trên).

$AH \parallel CK$ (vì cùng vuông góc với BD).

$\Rightarrow AHCK$ là hình bình hành.

b) Gọi O là trung điểm của HK . Chứng minh ba điểm A, O, C thẳng hàng.

* Hình bình hành $AHCK$ có O là trung điểm của $HK \Rightarrow O$ là trung điểm của AC .

$\Rightarrow A, O, C$ thẳng hàng.

c) Tính diện tích hình bình hành $AHCK$ biết $AH = 4\text{cm}$, $HK = 3\text{cm}$.

$$* S_{AHK} = \frac{1}{2} AH \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 (\text{cm}^2).$$

* Xét $\triangle AHK$ và $\triangle CKH$ có:

$$AH = CK \text{ (hai cạnh đối của hình bình hành } AHCK \text{)}.$$

$$\widehat{AHK} = \widehat{CKH} (= 90^\circ).$$

HK là cạnh chung.

$$\Rightarrow \triangle ADH = \triangle CBK \text{ (ch - gn)}.$$

$$\Rightarrow S_{AHK} = S_{CKH}$$

$$* S_{AHCK} = 2 \cdot S_{AHK} = 2 \cdot 6 = 12 (\text{cm}^2)$$



Bài 13 : HÌNH CHỮ NHẬT

1.

a) Vì $\triangle ABC$ vuông tại A

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{DAE} = 90^\circ$$

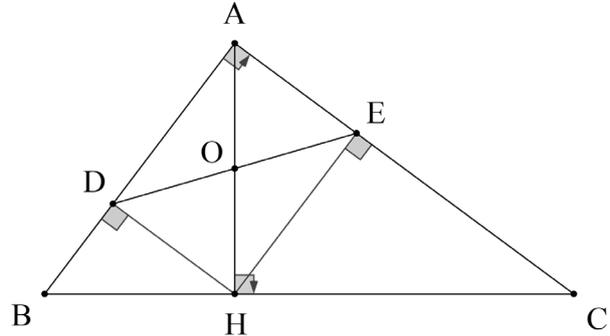
Vì $HD \perp AB$ tại $D \Rightarrow \widehat{ADH} = 90^\circ$

Vì $HE \perp AC$ Tại $E \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ADHE$ có:

$$\widehat{DAE} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$$

\Rightarrow Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật



b) Vì tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật

\Rightarrow hai đường chéo AH và DE cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (T/c hình chữ nhật)

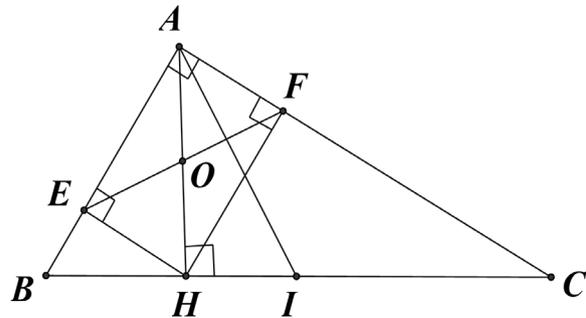
Mà O là giao điểm hai đường chéo AH và DE

$$\Rightarrow OA = OH = OD = OE$$

2.

a) Ta có:
$$\begin{cases} \widehat{A} = 90^\circ \\ \widehat{AFH} = 90^\circ \text{ (gt)} \\ \widehat{AEH} = 90^\circ \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow EAFH \text{ là}$$

hình chữ nhật (vì tứ giác có ba góc vuông)



b) Trong tam giác AHB ta có $\widehat{B} + \widehat{BAH} = 90^\circ$, mà $\widehat{BAH} + \widehat{HAF} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{B} = \widehat{HAF}$ (1).

Gọi O là giao điểm hai đường chéo EF và AH của hình chữ nhật $AEHF$ thì

$$OA = OF, \text{ do đó } \triangle OAF \text{ cân ở } O \text{ nên } \widehat{OAF} = \widehat{OFA} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B} = \widehat{AFE}$



Mặt khác ta lại có $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ và $\widehat{IAC} + \widehat{AFE} = 90^\circ$, từ đó ta có $\widehat{IAC} = \widehat{ICA}$, do đó ΔAIC cân tại I nên $IA = IC$.

Tương tự $IB = IA$, do đó $IB = IC$.

3.

a) Ta có: $\widehat{A} = \widehat{B}$ (vì ΔABC vuông cân tại C) (1)

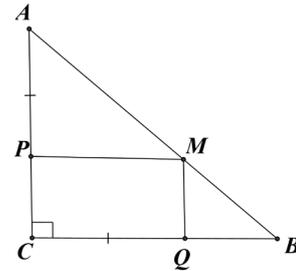
Vì $PM // BC$ nên $\widehat{PMA} = \widehat{B}$ (hai góc đồng vị) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{A} = \widehat{PMA}$ (vì cùng bằng \widehat{B})

$\Rightarrow \Delta APM$ cân tại P

$\Rightarrow AP = PM$ hai cạnh bên bằng nhau)

Ta có: $\begin{cases} AP = CQ \text{ (gt)} \\ AP = PM \end{cases} \Rightarrow PM = CQ$



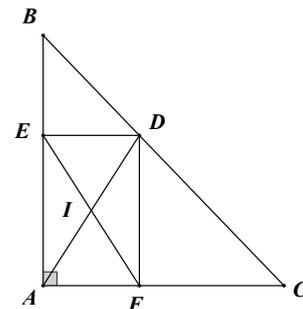
b) Ta có: $\begin{cases} PM // CQ \\ PM = CQ \end{cases} \Rightarrow PCQM$ là hình bình hành (tứ giác có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

Lại có $\widehat{C} = 90^\circ$. Vậy $PCQM$ là hình chữ nhật.

4.

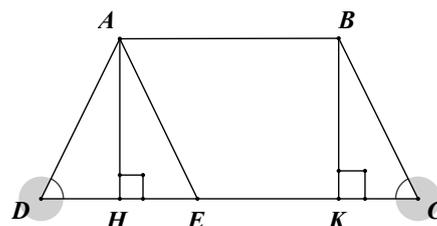
a) Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật vì có $\widehat{EAF} = \widehat{AED} = \widehat{AFD} = 90^\circ$

b) Vì $AEDF$ là hình chữ nhật mà I là trung điểm của EF nên I là trung điểm của AD
 Vậy A, I, D thẳng hàng.



5.

a) Tứ giác $ABKH$ là hình chữ nhật vì:
 + $AH // BK$ và $AH = BK \Rightarrow ABKH$ là hình bình hành.
 + $\widehat{AHK} = 90^\circ$.



b) Vì $ABKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = BK$



Ta có $AD = BC$ ($ABCD$ là hình thang cân)

Nên $\triangle AHD = \triangle BKC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). $\Rightarrow DH = CK$

c) E là điểm đối xứng với D qua $H \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{AEH}$,

mà $\widehat{ADH} = \widehat{BCK}$ (giả thiết) $\Rightarrow AE // BC$.

Mặt khác $AB // EC \Rightarrow$ tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

d) $ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = EC$

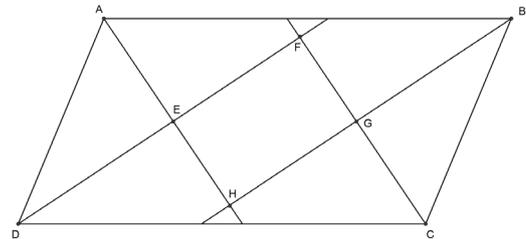
Theo câu c) $\triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow DH = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}(CD - EC) = \frac{1}{2}(CD - AB)$

6.

Xét hình bình hành $ABCD$, $AB // CD$

$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ (2 góc trong cùng phía)

Xét hình bình hành $ABCD$, có phân giác \widehat{A} cắt phân giác \widehat{D} tại E .



$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{DAE} = \frac{\widehat{DAB}}{2} \\ \widehat{ADE} = \frac{\widehat{ADC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{ADE} = \frac{\widehat{ADC}}{2} + \frac{\widehat{DAB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Xét $\triangle ADE$: $\widehat{DAE} + \widehat{ADE} = 90^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AED} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FEH} = 90^\circ$

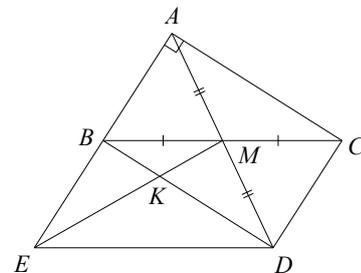
Tương tự, ta có $\widehat{F} = \widehat{G} = \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật

7.

a) Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AD, BC cắt nhau tại

Trung điểm M của mỗi đường nên là $ABCD$ hình bình hành

Lại có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.



b) Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AB // CD$, $AB = CD$

Mà $BE = AB \Rightarrow BE = CD$ và $BE // CD$



Tứ giác $BEDC$ là hình bình hành

c) $\triangle AED$ có hai đường trung tuyến EM, DB cắt nhau tại K nên K là trọng tâm

Vậy $EK = 2KM$.

8. Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có: $OA = OC$

Vì $AD = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AD = 2AO$. Vẽ $AH \perp OD, OK \perp AB$

Xét $\triangle AOD$ cân tại A , AH là đường cao $\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến, đường phân giác

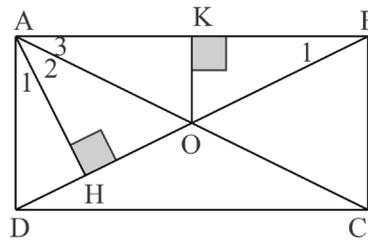
Do đó $HO = HD$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

Vì $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$

$\triangle AOK = \triangle AOH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

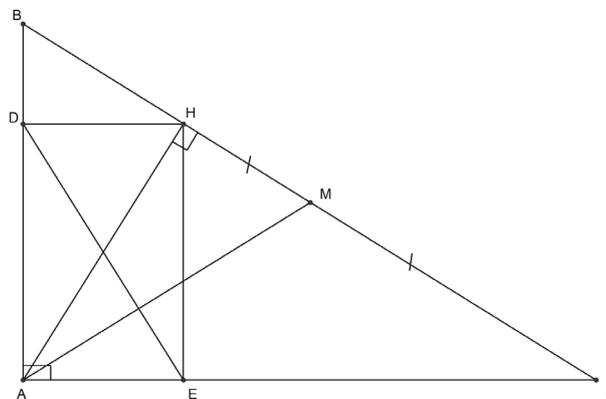
$\Rightarrow OK = OH = \frac{1}{2}OD \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OB \Rightarrow \widehat{B}_1 = 30^\circ$ Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , có

$\widehat{B}_1 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{HAB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = 90^\circ$



Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

9.



a) Xét tứ giác $DHEA$, có $DH \perp AB; HE \perp AC(gt) \Rightarrow \widehat{HDA} = \widehat{AEH} = \widehat{DAE} = 90^\circ$



Vậy $DHEA$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (t/c hcn)

Mà $\widehat{AHE} + \widehat{EHC} = \widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{EHC} = 90^\circ$ (1)

Xét $\triangle HEC$, $\widehat{HEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{EHC} = 90^\circ$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $\widehat{C} = \widehat{ADE}$

b) Vì $AEHD$ là hình chữ nhật (câu a)

$\Rightarrow AE // DH \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{HDE}$ (2 góc so le trong) (3)

Xét $\triangle ABC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$, có M là trung điểm của BC (gt)

$\Rightarrow AM = MB = MC = \frac{BC}{2}$ (t/c đường trung tuyến ứng cạnh huyền trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{C}$, mà $\widehat{C} = \widehat{ADE}$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ADE}$ (4)

Ta có $\widehat{EDH} + \widehat{ADE} = 90^\circ$ (5)

Từ (3),(4),(5) suy ra $\widehat{MAE} + \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BE$

10.

a) Tứ giác $APNM$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow AM = NP, AP = MN$.

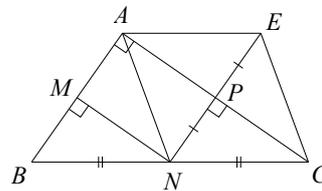
Vì $AB // NP$ (cùng vuông góc với AC) nên $\widehat{B} = \widehat{PNC}$ (đồng vị)

Xét $\triangle MBN$ và $\triangle PNC$ có:

$$\widehat{M} = \widehat{P} = 90^\circ$$

$$BN = CN \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{B} = \widehat{PNC} \text{ (chứng minh trên)}$$



$\Rightarrow \triangle MBN = \triangle PNC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BM = NP, MN = PC$ (hai cạnh tương ứng)

Khi đó $BM = AM$ (cùng bằng NP), $AP = PC$ (cùng bằng MN)

b) Tứ giác $ANCE$ có hai đường chéo AC, NE cắt nhau tại trung điểm P của mỗi đường nên là hình bình hành.



11.

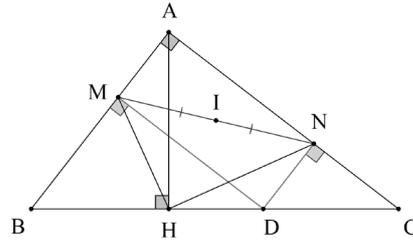
Xét tứ giác $AMDN$ có $\widehat{MAN} = 90^\circ$ vì (

$$\widehat{BAC} = 90^\circ)$$

$$\widehat{AMD} = 90^\circ \text{ vì } (DM \perp AB)$$

$$\widehat{AND} = 90^\circ \text{ vì } (DN \perp AC)$$

Suy ra $AMDN$ là hình chữ nhật



b) Tính diện tích tứ giác $AMDN$ biết $AM = 3\text{cm}, MD = 4\text{cm}$.

Diện tích hình chữ nhật $AMDN$ là $S = AM.MD = 3.4 = 12\text{cm}^2$

c) Gọi AH là đường cao của ΔABC . Tính góc \widehat{MHN} .

Gọi I là giao điểm của AD và MN , mà $AMDN$ là hình chữ nhật nên suy ra I là trung điểm của AD và MN (tính chất hình chữ nhật)

ΔAHD vuông tại H có I là trung điểm của cạnh huyền AD suy ra

$$HI = ID = IA = \frac{AD}{2}$$

$$\Rightarrow HI = IM = IN = \frac{MN}{2} \Rightarrow \Delta HMN \text{ vuông tại } H \Rightarrow \widehat{MHN} = 90^\circ$$

12.

a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

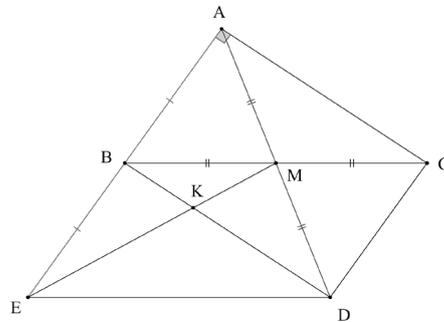
Xét tứ giác $ABCD$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AM = AD (M \in AD) \\ BM = MC (M \in BC) \end{array} \right\}$$

\Rightarrow Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

Lại có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (gt)

\Rightarrow Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật (đpcm).



b) Có tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật (chứng minh câu a)

Suy ra: $AB = CD$ và $AB \parallel CD$ (t/c hình chữ nhật)

Do E đối xứng với A qua B .

Nên B, A, E thẳng hàng và $AB = BE$

Có $AB \parallel CD$ hay $BE \parallel CD$



$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AB = EB \end{array} \right\} \Rightarrow CD = EB$$

Xét tứ giác $BEDC$ có $\left. \begin{array}{l} BE // CD \\ BE = CD \end{array} \right\}$

\Rightarrow Tứ giác $BEDC$ là hình bình hành (theo dấu hiệu nhận biết)

c) Xét $\triangle AED$ có hai đường trung tuyến EM và DB cắt nhau tại K

Nên K là trọng tâm tam giác $\triangle AED \Rightarrow EK = \frac{2}{3}EM$ hay $EK = 2KM$

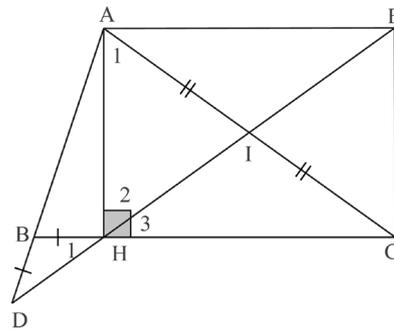
13.

Đặt $\widehat{C} = \alpha \Rightarrow \widehat{B} = 2\alpha$

a) Từ giả thiết $BD = BH \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{H}_1$ (1)

Vì $\widehat{B} = 2\alpha$ là góc ngoài của $\triangle BDH$

nên $\widehat{B} = 2\alpha = \widehat{D} + \widehat{H} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{H} = \alpha$



Trong tam giác vuông AHC ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (2), vì cùng phụ với α

Từ (1)(2) $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} IC = IH \\ IH = IA \end{array} \right. \Rightarrow IA = IC$

b) $\widehat{AED} = \widehat{H}_3 = \widehat{H}_1 = \widehat{ADE}$ nên $\triangle ADE$ cân tại A suy ra $AD = HC$.

14.

a) Tam giác DCB là tam giác vuông vì :

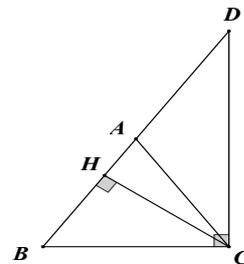
$$CA = AB = \frac{1}{2}BD$$

b) Ta có $\widehat{DCA} = \widehat{HCB}$ vì:

Ta có $\triangle ADC$ cân tại A nên $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$.

Mà $\widehat{ADC} + \widehat{HBC} = 90^\circ$

Và $\widehat{HCB} + \widehat{HBC} = 90^\circ$





15.

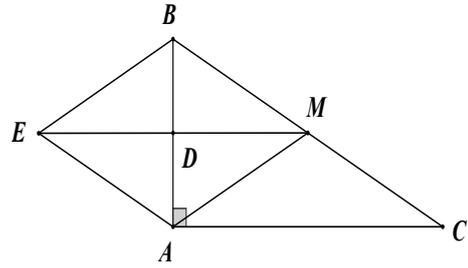
a) Chứng minh MD là trung trực của $\triangle BMA$

$\Rightarrow DM \perp AB$ và $DM = DE$ nên E đối xứng với M qua AB .

b) Chứng minh $AMBE$ là hình bình hành,

$AM = \frac{1}{2}BC = BM = 2$ cm. Nên

chu vi tứ giác $AMBE$ bằng 8 cm.



16.

a) Chứng minh $\widehat{DEA} = 180^\circ$

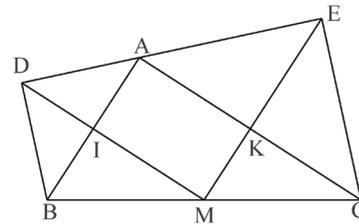
b) Chứng minh $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = \widehat{IAK} = 90^\circ$

($MA = MB = MC$).

c) Chứng minh $\triangle DME$ có

$\widehat{EDM} = \widehat{DEM} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle DME$ vuông cân ở M .



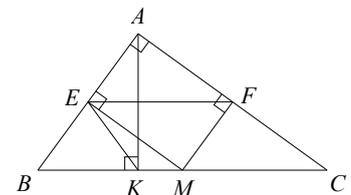
17.

a) Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Khi đó hai đường chéo $AM = EF$

$\triangle ABC$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến

Nên $AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow EF = \frac{BC}{2}$.



b) Vì $AB \parallel MF \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{FMC}$ (đồng vị)

Xét $\triangle EBM$ và $\triangle FMC$ có: $\widehat{BEM} = \widehat{MFC} = 90^\circ$; $BM = CM$ (giả thiết);

$\widehat{B} = \widehat{FMC}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle EBM = \triangle FMC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow EM = FC$ (hai cạnh tương ứng) mà $EM \parallel FC$ nên $EFCM$ là hình bình hành

$\Rightarrow EF \parallel MC \Rightarrow KMFE$ là hình thang.

Vì $EM = AF$, $EM = FC \Rightarrow AF = FC$ hay F là trung điểm của AC .



Lại có $\triangle KAC$ vuông tại K có KF là đường trung tuyến nên $KF = \frac{AC}{2}$ mà

$$EM = \frac{AC}{2} \text{ nên } KF = EM.$$

Vậy hình thang $KMFE$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân
18.

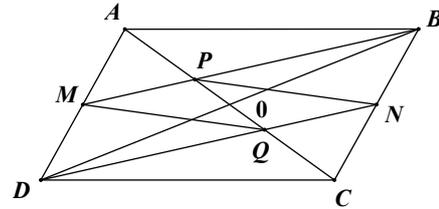
a) Chứng minh $AP = PQ = QC$.

Chứng minh P, Q lần lượt là trọng tâm

$$\triangle ABD, \triangle CBD \Rightarrow OP = \frac{1}{3}AO, OQ = \frac{1}{3}CO$$

Hay O là trung điểm PQ và

$$AP = PQ = QC$$



b) Tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành vì: O là trung điểm PQ và đồng thời là trung điểm MN

c) Xác định tỉ số $\frac{CA}{CD}$ để $MPNQ$ là hình chữ nhật.

Để $MPNQ$ là hình chữ nhật thì $PQ = MN$ hay $DC = \frac{1}{3}AC$ (theo câu a).

$$\text{Tức } \frac{CA}{CD} = 3$$

19.

a) Chứng minh $DE // BK$.

Có tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$$\Rightarrow AD // BC$$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CBD} \text{ (hai góc so le trong)}$$

Có DE là tia phân giác của \widehat{ADB}

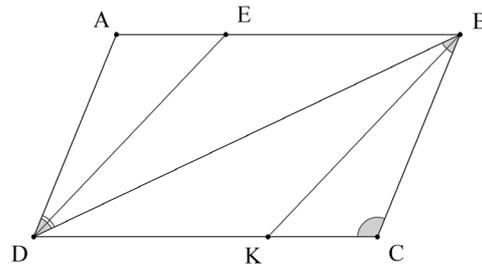
$$\text{nên } \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \frac{\widehat{ADB}}{2}$$

Có BK là tia phân giác của \widehat{DBC} nên $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{DBC}}{2}$

Mà $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ (cmt). Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$

Mà \widehat{D}_1 và \widehat{B}_1 là hai góc so le trong của đường thẳng BD cắt hai đường thẳng DE và BK

$$\Rightarrow DE // BK \text{ (đpcm)}$$





b) Ta có $AB // CD$ (do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành) hay $BE // DK$

Xét tứ giác $DEBK$ có $\left. \begin{array}{l} BE // DK \\ DE // BK \end{array} \right\} \Rightarrow$ Tứ giác $DEBK$ là hình bình hành

c) Có tứ giác $DEBK$ là hình bình hành.

Để tứ giác $DEBK$ là hình chữ nhật thì $\widehat{DEB} = 90^\circ$ hay $DE \perp BE$ tại E

Xét $\triangle ABD$ có DE vừa là đường cao, vừa là đường phân giác

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại D

Vậy khi $\triangle ABD$ cân tại D thì tứ giác $DEBK$ là hình chữ nhật.

20.

a) Ta có $\left\{ \begin{array}{l} MD \perp AB \\ CE \perp AB \end{array} \right. \Rightarrow MD // CE$

$\Rightarrow \widehat{IMD} = \widehat{KCE}$ (đồng vị) (1)

$\triangle DBM, \triangle EMC$ là các tam giác vuông có các

đường trung tuyến ứng với cạnh huyền DI, EK

nên $DI = \frac{BM}{2}; EK = \frac{MC}{2}$ mà $BM = MC$

$\Rightarrow DI = EK$

Lại có $\widehat{DIM} = 180^\circ - 2\widehat{IMD}, \widehat{EKC} = 180^\circ - 2\widehat{C}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{EKC}$ mà $\widehat{DIM}, \widehat{EKC}$ đồng vị nên $DI // EK$.

Tứ giác $DIKE$ có $DI // EK, DI = EK$ nên là hình bình hành.

b) $\triangle AMC$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên

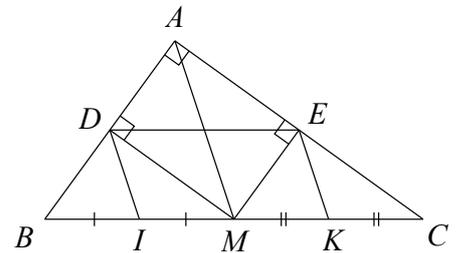
$AM = MC = MB \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{AMC} = 180^\circ - 2\widehat{C}$ (3)

Từ (2), (3) $\Rightarrow \widehat{EKM} = \widehat{AMC}$ mà $\widehat{EKM}, \widehat{AMC}$ đồng vị nên $AM // EK$.

Để hình bình hành $DEKI$ là hình chữ nhật thì cần $EK \perp IK$ mà

$AM // EK \Rightarrow AM \perp MK$.

Khi đó AM là đường cao $\triangle ABC$ hay $\triangle ABC$ cân tại A .



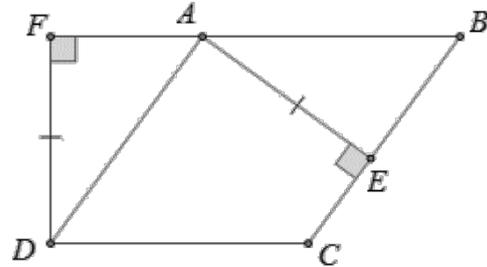


Bài 14 : HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

C. BÀI TẬP VỀ HÌNH THOI

1.

Ta có: $\widehat{FAD} = \widehat{ABE}$ (vì $AD \parallel BC$)
 $\Rightarrow \triangle AFD = \triangle BEA$ (cgv - gn)
 $\Rightarrow AD = AB$ (hai cạnh tương ứng).
 Xét hình bình hành $ABCD$ có
 $AD = AB$ nên $ABCD$ là hình thoi.



2.

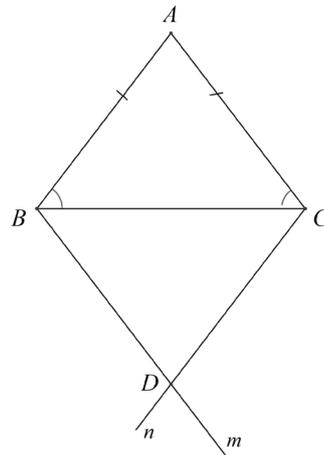
Xét tứ giác $ACDB$, ta có:
 $CD \parallel AB$ ($Cn \parallel AB$; $D \in Cn$)
 $BD \parallel AC$ ($Bm \parallel AC$; $D \in Bm$)

Vậy tứ giác $ACDB$ là hình bình hành (tứ giác có các cạnh đối song song)

Ta có: $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

Mà $ACDB$ là hình bình hành (cmt)

Vậy $ACDB$ là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau)



3. a) Tứ giác $ABEC$ là hình thoi.

Xét tứ giác $ABEC$, ta có:

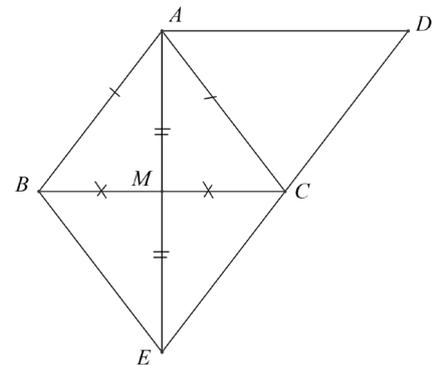
M là trung điểm AE (gt)

M là trung điểm BC (gt)

Nên tứ giác $ABEC$ là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Mà $AB = AC$ (gt)

Vậy $ABEC$ là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh bên bằng nhau)



b) Ta có: $DC \parallel AB$ ($ABCD$ là hình bình hành)



$$EC // AB \text{ (} ABEC \text{ là hình bình hành)}$$

Nên ba điểm D, E, C thẳng hàng (1)

Ta có: $DC = AB$ ($ABCD$ là hình bình hành)

$$EC = AB \text{ (} ABEC \text{ là hình bình hành)}$$

Nên $EC = DC$ (2)

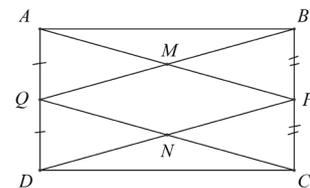
Từ (1) và (2) suy ra C là trung điểm ED .

4.

Ta có: P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC

Nên $AQ = QD = BP = PC$ và $AQ // CP; QD // BP$

+ Xét tứ giác $APCQ$, có: $AQ = CP$ và $AQ // CP$
(cmt)



Nên tứ giác $APCQ$ là hình bình hành (tứ giác có cặp cạnh đối song song và bằng nhau) $\Rightarrow AP // QC$ hay $MP // QN$

+ Xét tứ giác $BPDQ$, có: $DQ = BP$ và $DQ // BP$ (cmt)

Nên tứ giác $BPDQ$ là hình bình hành (tứ giác có cặp cạnh đối song song và bằng nhau) $\Rightarrow QB // DP$ hay $QM // NP$

+ Xét tứ giác $MPNQ$ có: $MP // QN$ và $QM // NP$ (cmt)

Nên tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành (tứ giác có các cạnh đối song song)

Ta lại có: $AQ = BP, AQ // BP$

Nên tứ giác $ABPQ$ là hình bình hành

Mà $\widehat{DAB} = 90^\circ$ ($ABCD$ là hình chữ nhật)

Nên $ABPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow QM = MP$

Mà $MPNQ$ là hình bình hành (cmt)

Vậy $MPNQ$ là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau)

5. Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ECM$, có

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCE} = 90^\circ$$

$$BM = MC \text{ (} M \text{ là trung điểm } BC \text{)}$$



$$\widehat{AMB} = \widehat{CME} \text{ (đối đỉnh)}$$

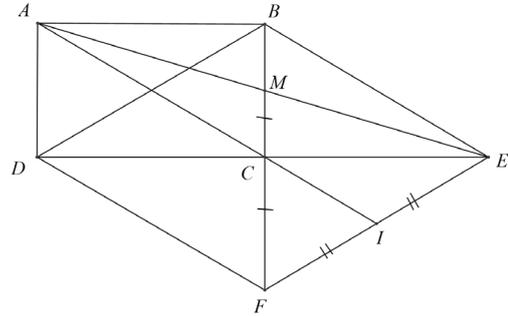
$$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ECM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = EC$$

Xét tứ giác $ABEC$ có:

$$AB = EC \text{ (cmt)}$$

$$AB // EC \text{ (} AB // DC, E \in DC \text{)}$$

Vậy tứ giác $ABEC$ là hình bình hành (tứ giác có cặp cạnh đối song song và bằng nhau)



b) Xét tứ giác $BEFD$ có:

$$DC = EC \text{ (vì cùng bằng } AB \text{)}$$

$$BC = CF \text{ (vì } F \text{ đối xứng với } B \text{ qua } C \text{)}$$

Nên tứ giác $BEFD$ là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

$$\text{Mà } BC \perp DC \text{ hay } BF \perp DE$$

Vậy $BEFD$ là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc)

6.

a) Gọi H là giao điểm của EF và MB .

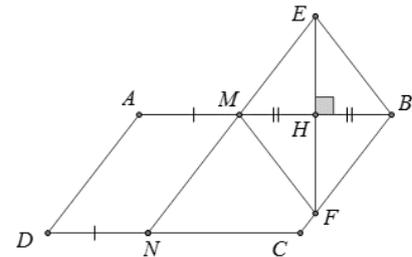
Ta có: $AMND$ là hình bình hành ($AM = ND$ và $AM // ND$) $\Rightarrow AD // NM$.

Lại có $AD // BC$, nên suy ra $MN // BC$

$$\Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{HFB}$$

Ta có: $\Delta EHM = \Delta FHB$ (cgv - gn) $\Rightarrow HE = HF$.

Mà $EF \perp AB$ nên E và F đối xứng với nhau qua AB .



b) Xét tứ giác $MEBF$ có $HE = HF$, $HB = HM$, $EF \perp MB$ nên $MEBF$ là hình thoi.

c) Để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân thì $\widehat{ENC} = \widehat{NEB}$.

Ta có: $\widehat{ENC} = \widehat{EMB}$ (vì $AB // CD$); $\widehat{FBH} = \widehat{HBE}$ (vì ΔFBE cân tại B);

$$\widehat{MNC} = \widehat{MBC} \text{ (vì } MBCN \text{ là hình bình hành).}$$



Xét $\triangle EMB$ có: $\widehat{EMB} = \widehat{MBE} = \widehat{BEM}$ nên suy ra $\widehat{EMB} = \widehat{MBE} = \widehat{BEM} = 60^\circ$.

Vậy để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân thì $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

7.

a) Vì M là trung điểm của AB nên

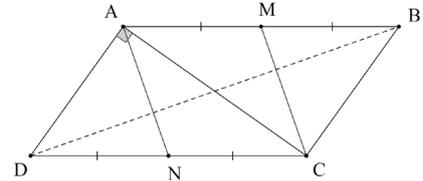
$$AM = MB = \frac{1}{2}AB \quad (1)$$

Vì N là trung điểm của CD nên

$$ND = CN = \frac{1}{2}CD \quad (2)$$

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$

(3)



Từ (1), (2) và (3) suy ra $AM = MB = ND = CN$. Vậy $AM = CN$

b) Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD \Rightarrow AM \parallel NC$

Xét tứ giác $AMCN$ ta có $\begin{cases} AM = CN \\ AM \parallel CN \text{ (cmt)} \end{cases}$

\Rightarrow Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành

$\Rightarrow AN = CM$ (hai cạnh đối của hbh).

c) Xét tứ giác $AMND$, ta có $\begin{cases} AM = ND \\ AM \parallel ND \end{cases}$

\Rightarrow Tứ giác $AMND$ là hình bình hành (vì tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau)

$\Rightarrow AD \parallel NM$ (cặp cạnh đối)

Mà $AD \perp AC$ (giả thiết) nên $NM \perp AC$

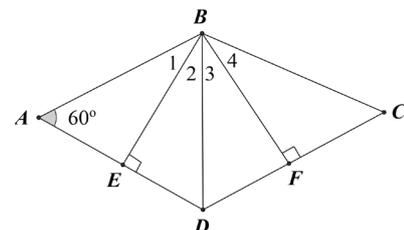
Do đó tứ giác $AMND$ là hình bình hành có hai đường chéo NM và AC vuông góc với nhau nên $AMND$ là hình thoi.

8.

a) Vì $ABCD$ là hình thoi nên

$$AB = AD = CB = CD$$

Mặt khác $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD, \triangle CBD$ đều (vì tam giác cân có một góc bằng 60°)





$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{ABD}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \text{ và}$$

$$\widehat{B}_3 = \widehat{B}_4 = \frac{\widehat{DBC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

(trong tam giác đều thì đường cao cũng là đường phân giác).

Xét tam giác vuông BED và tam giác vuông BFD có:

$$\widehat{B}_2 = \widehat{B}_3 = 30^\circ ; BD \text{ cạnh chung}$$

$$\Rightarrow \triangle BED = \triangle BFD \text{ (cạnh huyền- góc nhọn) } \Rightarrow BE = BF \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

c) Ta có: $\widehat{EBF} = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

Xét tam giác $\triangle BEF$ có: $BE = BF ; \widehat{EBF} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BEF$ là tam giác đều.

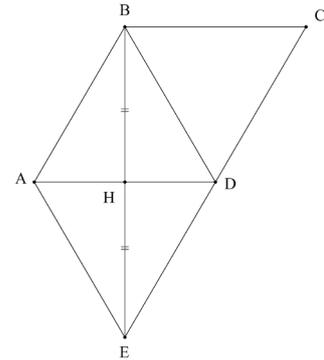
9.

a) Xét $\triangle ABD$ ta có $\begin{cases} AB = AD \\ \widehat{BAD} = 60^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều

Mà BH là đường cao $\Rightarrow BH$ đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow H$ là trung điểm của AD



b) Xét $\triangle BAE$ ta có AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên

$\triangle BAE$ cân tại A

$$\Rightarrow AB = AE \text{ (1)}$$

Xét $\triangle BDE$ ta có DH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle BDE$ cân tại $D \Rightarrow DB = DE$ (2)

Mà $\triangle ABD$ là tam giác đều nên $AB = DB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AB = AE = DB = DE$

$\Rightarrow ABDE$ là hình thoi (vì có 4 cạnh bằng nhau)



c) Theo câu b thì tứ giác $ABDE$ là hình thoi và $\widehat{ABD} = 60^\circ$ nên suy ra $\widehat{BDE} = 120^\circ$

Lại có $\widehat{ADB} = \widehat{DBC} = 60^\circ$ (cặp góc so le trong do $BC \parallel AD$)

$\Rightarrow \triangle DBC$ có $\begin{cases} BD = BC = AB \\ \widehat{DBC} = 60^\circ \end{cases}$ nên $\triangle DBC$ là tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{BDC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{BDE} + \widehat{BDC} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow E, D, C$ thẳng hàng

Có $DE = DA = DB = DC$. Vậy D là trung điểm của EC

d) Ta có $AB \parallel ED \Rightarrow AB \parallel EC \Rightarrow$ tứ giác $ABCE$ là hình thang

Lại có $\begin{cases} \widehat{DBC} = \widehat{DCB} = 60^\circ \\ \widehat{BCD} = 60^\circ \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BCD} = 60^\circ$

\Rightarrow hình thang $ABCE$ có hai góc ở đáy bằng nhau nên $ABCE$ là hình thang cân

\Rightarrow hai đường chéo bằng nhau, tức là $AC = BE$.

10.

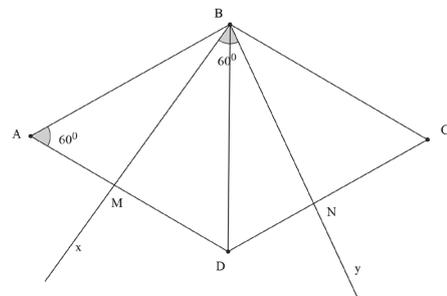
a) Chứng minh $AB = BD$

Ta có $ABCD$ là hình thoi nên:

$AB = AD \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A

Mà $\widehat{A} = 60^\circ$ (giả thiết) nên suy ra $\triangle ABD$ đều

$\Rightarrow AB = BD$.



b) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBN$ có:

$\widehat{BAM} = \widehat{BDN} = 60^\circ$ (gt); $AB = AD$ (cmt)

$\widehat{ABM} = \widehat{DBN}$ (cùng cộng với \widehat{MBD} tạo thành góc có số đo 60°)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBN$ (g.c.g).

c) Do $\triangle ABM = \triangle DBN$ (cmt) nên $AM = DN$ (1)

Từ (1) suy ra: $DM + DN = DM + AM \Rightarrow DM + DN = AD$.

Vì AD không đổi nên $(DM + DN)$ không đổi.



11. a) $\triangle ABD$ có $AB = BD \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{BAD}$.

Ta có: $BC \parallel AD$ ($ABCD$ là hình thoi) $\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{BDA}$.

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CBD}$ hay $\widehat{MAD} = \widehat{NBD}$.

$ABCD$ là hình thoi nên $AD = AB$ mà $AB = BD$ nên $AD = BD$.

Xét $\triangle AMD$ và $\triangle BND$ có:

$$AM = BN \text{ (gt);}$$

$$\widehat{MAD} = \widehat{NBD} \text{ (cmt);}$$

$$AD = BD \text{ (cmt).}$$

$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle BND$ (c - g - c). $\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{BDN}$ (cặp góc tương ứng).

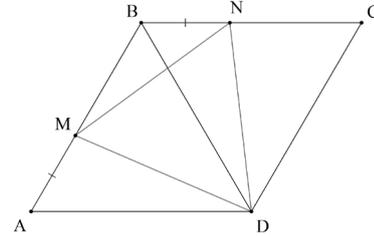
b) $\triangle AMD = \triangle BND \Rightarrow DM = DN \Rightarrow \triangle MDN$ cân tại D . (1)

$\triangle ABD$ có $AB = AD = BD \Rightarrow \triangle ABD$ đều $\Rightarrow \widehat{ADB} = 60^\circ$.

Ta có: $\widehat{ADM} + \widehat{MDB} = 60^\circ$, mà $\widehat{ADM} = \widehat{BDN}$ (chứng minh ở câu a).

$\Rightarrow \widehat{MDB} + \widehat{BDN} = 60^\circ$. Hay $\widehat{MDN} = 60^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MDN$ là tam giác đều.



12.

$ABCD$ là hình thoi nên: $AB = BC = CD = DA$

$$; \widehat{ABC} = \widehat{ADC}; \widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \frac{\widehat{ABC}}{2};$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{CDB} = \frac{\widehat{ADC}}{2}.$$

+ Xét $\triangle ABG$ và $\triangle CBG$ có:

$AB = CB$; $\widehat{ABG} = \widehat{CBG}$; BG là cạnh chung.

Vậy $\triangle ABG = \triangle CBG$ (c-g-c) $\Rightarrow GA = GC$ (1)

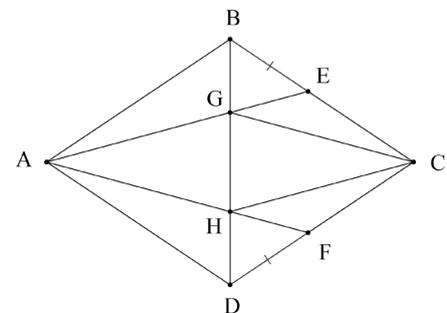
+ Xét $\triangle ADH$ và $\triangle CDH$ có: $AD = CD$; $\widehat{ADH} = \widehat{CDH}$; DH là cạnh chung.

Vậy $\triangle ADH = \triangle CDH$ (c-g-c) $\Rightarrow HA = HC$ (2)

+ Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADF$ có: $AB = AD$; $\widehat{ABE} = \widehat{ADF}$; $BE = DF$ (gt).

Vậy $\triangle ABE = \triangle ADF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DAF}$ (cặp góc tương ứng).

+ Xét $\triangle ABG$ và $\triangle ADH$ có: $AB = AD$; $\widehat{ABG} = \widehat{ADH}$; $\widehat{BAG} = \widehat{DAH}$.





Vậy $\triangle ABG = \triangle ADH$ (g-c-g) $\Rightarrow GA = HA$. (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow AG = GC = CH = HA \Rightarrow AGCH$ là hình thoi.

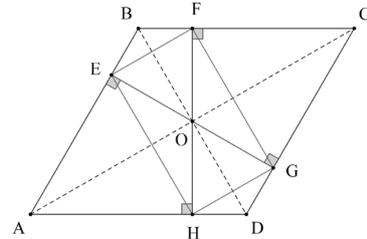
13.

a) $\triangle EOA$ có $\widehat{AEO} + \widehat{EOA} + \widehat{EAO} = 180^\circ$; (1)

$\triangle OGC$ có $\widehat{OGC} + \widehat{COG} + \widehat{GCO} = 180^\circ$; (2)

$\widehat{AEO} = \widehat{OGC} = 90^\circ$ (3)

$\widehat{EAO} = \frac{\widehat{A}}{2}$, $\widehat{COG} = \frac{\widehat{C}}{2}$, mà $\widehat{A} = \widehat{C}$ ($ABCD$ là hình



thoi).

$\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{GCO}$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $\widehat{EOA} = \widehat{GOC}$ (5)

Vì A, O, C thẳng hàng nên $\widehat{AOG} + \widehat{GOC} = 180^\circ$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{EOA} + \widehat{AOG} = 180^\circ$. Suy ra E, O, G thẳng hàng.

$\triangle AOH$ có $\widehat{AOH} + \widehat{AHO} + \widehat{OAH} = 180^\circ$; (7)

$\triangle COF$ có $\widehat{COF} + \widehat{CFO} + \widehat{OCF} = 180^\circ$; (8)

$\widehat{AHO} = \widehat{CFO} = 90^\circ$ (9)

$\widehat{OAH} = \frac{\widehat{A}}{2}$, $\widehat{OCF} = \frac{\widehat{C}}{2}$, mà $\widehat{A} = \widehat{C}$ ($ABCD$ là hình thoi).

$\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{OCF}$. (10)

Từ (7), (8), (9) và (10) suy ra $\widehat{AOH} = \widehat{COF}$ (11)

Vì A, O, C thẳng hàng nên $\widehat{AOH} + \widehat{HOC} = 180^\circ$ (12)

Từ (11) và (12) suy ra $\widehat{HOC} + \widehat{COF} = 180^\circ$. Suy ra H, O, F thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{EAO} = \widehat{HAO} = \frac{\widehat{A}}{2}$, $\widehat{FCO} = \widehat{GCO} = \frac{\widehat{C}}{2}$ mà $\widehat{A} = \widehat{C}$ ($ABCD$ là hình thoi)

Suy ra $\widehat{EAO} = \widehat{FCO} = \widehat{GCO} = \widehat{HAO}$.

Xét các tam giác vuông: $\triangle OEA$, $\triangle OFC$, $\triangle OGC$ và $\triangle OHA$ có:

$OA = OC$; $\widehat{EAO} = \widehat{FCO} = \widehat{GCO} = \widehat{HAO}$ (cmt).



$\Rightarrow \triangle OEA = \triangle OFC = \triangle OGC = \triangle OHA$ (c.huyền – g.nhọn).

$\Rightarrow OE = OF = OG = OH$ (các cạnh tương ứng).

c) Tứ giác $EFGH$ có $OE = OG$; $OF = OH \Rightarrow EFGH$ là hình bình hành.

Hình bình hành $EFGH$ có $EG = FH \Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật.

14.

a) Xét $\triangle ABD$ có: $BM \perp AD$, $DP \perp AB$ và $BM \cap DP \equiv H \Rightarrow H$ là trực tâm $\triangle ABD$

b) H là trực tâm $\triangle ABD \Rightarrow AH \perp BD$. (1)

Xét $\triangle CBD$ có: $BN \perp CD$, $DQ \perp BC$ và $BN \cap DQ \equiv K$.

$\Rightarrow K$ là trực tâm $\triangle CBD$.

$\Rightarrow CK \perp BD$. (2)

$ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ tại O . (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra A, H, K, C thẳng hàng.

c) Xét $\triangle APD$ vuông tại P và $\triangle BMA$ vuông tại M , có:

$AD = AB$ ($ABCD$ là hình thoi);

\widehat{A} là góc chung.

$\Rightarrow \triangle APD = \triangle BMA$ (c.huyền – g.nhọn).

$\Rightarrow \widehat{ADP} = \widehat{ABM}$ (cặp góc tương ứng).

Xét $\triangle CQD$ vuông tại Q và $\triangle CNB$ vuông tại N , có:

$CD = CB$ ($ABCD$ là hình thoi); \widehat{C} là góc chung.

$\Rightarrow \triangle CQD = \triangle CNB$ (c.huyền – g.nhọn).

$\Rightarrow \widehat{CDQ} = \widehat{CBN}$ (cặp góc tương ứng).

Trong hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

Hay $\widehat{ABM} + \widehat{MBN} + \widehat{NBC} = \widehat{ADP} + \widehat{PDQ} + \widehat{QDC}$.

Mà $\widehat{ADP} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{CDQ} = \widehat{CBN}$ nên $\widehat{MBN} = \widehat{PDQ}$.

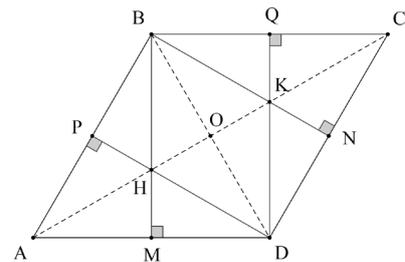
d) Ta có: $\widehat{PAM} + \widehat{AMH} + \widehat{APH} + \widehat{PHM} = 360^\circ$ (Tổng bốn góc trong một tứ giác).

$\widehat{QCN} + \widehat{CNK} + \widehat{CQK} + \widehat{QKN} = 360^\circ$ (Tổng bốn góc trong một tứ giác).

Lại có: $\widehat{PAM} = \widehat{QCN}$ (Hai góc đối của hình thoi $ABCD$).

$\widehat{AMH} = \widehat{APH} = \widehat{CNK} = \widehat{CQK}$ (Vì cùng bằng 90°).

$\Rightarrow \widehat{PHM} = \widehat{QKN}$.





e) Ta có: $\widehat{PHM} = \widehat{QKN}$ (câu d);

$$\widehat{PHM} = \widehat{BHD} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$\widehat{QKN} = \widehat{BKD} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BKD};$$

Lại có: $\widehat{MBN} = \widehat{PDQ}$ (câu c) $\Rightarrow BHDK$ là hình bình hành.

Vì A, H, K, C thẳng hàng mà $AC \perp BD$ tại $O \Rightarrow HK \perp BD$ tại O .

Vậy hình bình hành $BHDK$ là hình thoi.

C. BÀI TẬP VỀ HÌNH VUÔNG

1.

Chỉ ra $AH = BE = CF = DG$. Từ đó suy ra:

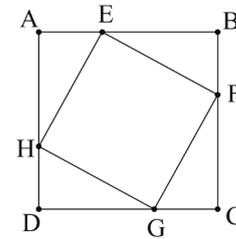
$$\triangle AEH = \triangle BFE = \triangle CGF = \triangle DHG \text{ (c-g-c).}$$

Do đó $HE = EF = FG = GH$ (1).

Mặt khác, vì $\triangle AEH = \triangle BFE \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{AHE}$

$$\text{Suy ra } \widehat{AEH} + \widehat{BEF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FEH} = 90^\circ \text{ (2).}$$

Từ (1), (2) suy ra $EFGH$ là hình vuông.

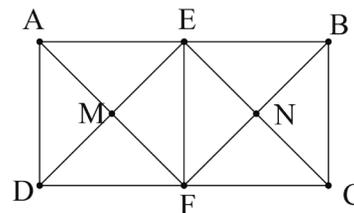


2.

a) E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD nên ta có $EF \parallel AD \parallel BC$, do đó dễ thấy $ADFE$ là hình chữ nhật.

Mặt khác $AD = AE = \frac{1}{2} AB$. Vậy $ADFE$

là hình vuông.



b) Chứng minh tương tự câu a, ta có $BCFE$ cũng là hình vuông. Do đó hai tam giác MEF và NEF là hai tam giác vuông cân tại M, N . từ đó suy ra $EMFN$ là hình vuông.

3.



a) Tam giác KCD cân tại K nên $KD = KC$
(1).

$\triangle EAD = \triangle FBC$ (g.c.g) nên $DE = CF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$KD - DE = KC - CF \Leftrightarrow KE = KF.$$

Tam giác vuông KEF có $KE = KF$ nên

$$\widehat{E}_1 = 45^\circ.$$

Ta lại có: $\widehat{D}_2 = 45^\circ \Rightarrow EF // CD$ (2 góc đồng vị bằng nhau).

b) Tam giác EAD có $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 = 45^\circ$ nên $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Tứ giác $EKFI$ có $\widehat{E} = \widehat{K} = \widehat{I} = 90^\circ$ nên $EKFI$ là hình chữ nhật.

Lại có $KE = KF \Rightarrow EKFI$ là hình vuông.

4. Tứ giác $AMDN$ là hình chữ nhật.

Lại có đường chéo AD là đường phân giác của \widehat{A}

Vậy hình chữ nhật $AMDN$ là hình vuông

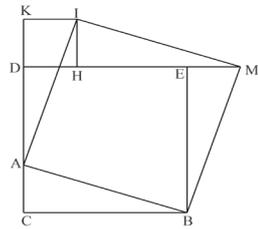
5.

Ta có: $\triangle ABC = \triangle BEM = \triangle HIM = \triangle AKI$

$$\Rightarrow AI = MI = AB = BM$$

$$\triangle ACB = \triangle BEM \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{EBM} \Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{EBM} = 90^\circ$$

$\Rightarrow ABMI$ là hình vuông (dấu hiệu nhận biết)



6.

a) Ta có: $OA \perp OD$ (tính chất đường chéo hình vuông); $AH \perp DC$ (vì $AH \perp AB, AB // CD$). Vậy $\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

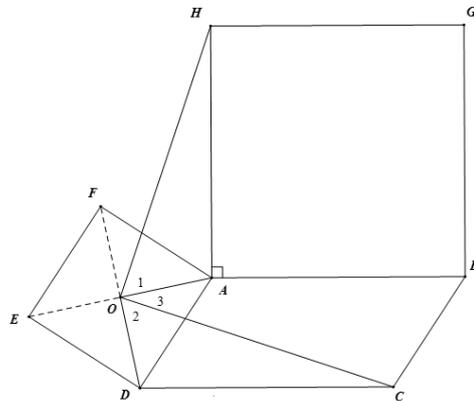
b) Xét $\triangle OAH$ và $\triangle ODC$:

$OA = OD$ (tính chất đường chéo hình vuông)

$$\widehat{OAH} = \widehat{ODC} \text{ (câu a)}$$

$$AH = DC \text{ (cùng bằng AB)}$$

Vậy $\triangle OAH = \triangle ODC$ (c.g.c)





suy ra $OH = OC$.

c) $\triangle OAH = \triangle ODC \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ mà $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ$ (tính chất đường chéo hình vuông), nên $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = 90^\circ$. Vậy $OH \perp OC$.

7.

Tứ giác $CDFE$ có $CE = DF = CD, DF \parallel CE, \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow CDFE$ là hình vuông

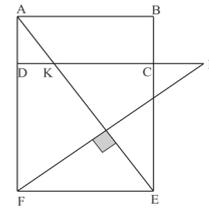
Ta có: $AF = HD, \widehat{HDF} = \widehat{AFE} = 90^\circ, FE = DF$

$\Rightarrow \triangle AFE = \triangle HDF \Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{FHD}$

Gọi K là giao điểm của AE và CD

$\widehat{AKD} = \widehat{HKE}, \widehat{AKD} + \widehat{FAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{FAE} = 90^\circ$

Mà $\widehat{EAF} = \widehat{FHD} \Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{FHD} = 90^\circ$. Vậy AE vuông góc với HF



8.

Gọi I là giao điểm của DE và CF .

Xét hai tam giác ADE và DCF có:

$AD = DC$ (vì $ABCD$ là hình vuông).

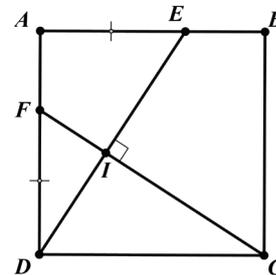
$\widehat{EAD} = \widehat{FDC} = 90^\circ$.

$AE = DF$ (theo giả thiết)

Vậy $\triangle ADE = \triangle DCF$, khi đó ta có:

$DE = CF$ và $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$.

Mặt khác $\widehat{DCF} + \widehat{DFC} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{ADE} + \widehat{DFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DIF} = 90^\circ$. Vậy $DE \perp CF$.



9. MA là phân giác góc BMK nên MA là trục đối xứng của hai đường thẳng MK và MB .

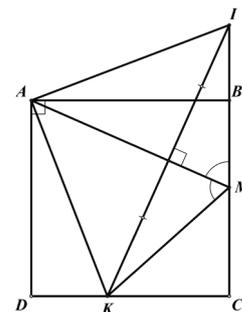
Gọi I là điểm đối xứng của K qua MA , suy ra I thuộc đường thẳng BC .

Ta có $AI = AK$, $AB = AD$.

Hai tam giác vuông ABI và ADK có hai cạnh bằng nhau nên $\triangle ABI = \triangle ADK$.

Từ đó ta có $\widehat{IAB} = \widehat{KAD}$.

$\widehat{IAK} = \widehat{IAB} + \widehat{BAK} = \widehat{KAD} + \widehat{BAK} = 90^\circ$.





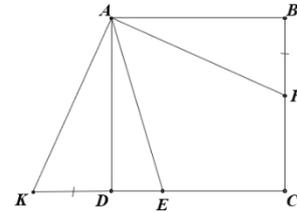
Vậy ta có: $\widehat{MAK} = \frac{1}{2}\widehat{IAK} = 45^\circ$.

10. Trên tia đối của tia DC lấy $DK = BF$, $\triangle ADK = \triangle ABF$ (c.g.c) nên $AK = AF$, $\widehat{KAF} = 90^\circ$.

*Ta chứng minh mệnh đề " $\widehat{EAF} = 45^\circ$ thì chu vi CEF bằng nửa chu vi hình vuông".

$\widehat{EAF} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EAK} = 45^\circ \Rightarrow \triangle EAK = \triangle EAF$
(c.g.c)

$\Rightarrow EK = EF$



Do đó chu vi $\triangle CEF$ bằng

$CE + CF + EF = CE + CF + EK = CE + CF + ED + DK = CE + CF + ED + FB$
(bằng nửa chu vi hình vuông).

*Ta chứng minh mệnh đề "Chu vi CEF bằng nửa chu vi hình vuông thì $\widehat{EAF} = 45^\circ$ "

$CE + CF + EF = CB + CD \Rightarrow EF = ED + BF \Rightarrow EF = ED + DK = EK$
 $\triangle EAK = \triangle EAF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{EAF} \Rightarrow \widehat{EAF} = 45^\circ$

11.

a) Ta có: $AE = EB = \frac{AB}{2}$ (gt); $CK = KD = \frac{CD}{2}$ (gt)

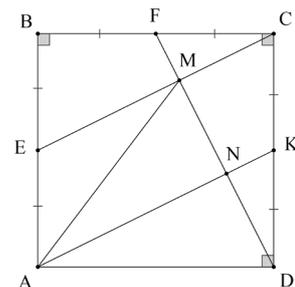
Mà $AB = CD$ (gt) ($ABCD$ là hình vuông)

$\Rightarrow AE = CK = EB = KD$

Xét tứ giác $AECK$ có: $AE = CK$

$AE \parallel CK$ (do $AB \parallel CD$ tính chất hình vuông $ABCD$)

$\Rightarrow AECK$ là hình bình hành.



b) Chứng minh $DF \perp CE$ tại M

Xét $\triangle BCE$ và $\triangle CDF$ có: $BE = CF$ (chứng minh trên)

$\widehat{CBE} = \widehat{DCF} = 90^\circ$ (gt)

$BC = CD$ (gt)

Vậy: $\triangle BCE = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{CFD}$

Mà trong $\triangle BCE$ có $\widehat{CBE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCE} + \widehat{BEC} = 90^\circ$



$$\Rightarrow \widehat{BCE} + \widehat{CFD} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{FCM} + \widehat{CFM} = 90^\circ$$

Trong $\triangle FCM$ có $\widehat{FMC} = 180^\circ - (\widehat{FCM} + \widehat{CFM}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$$\Rightarrow FM \perp MC \text{ hay } DF \perp CE$$

c) Xét $\triangle DMC$ có: $NK // MC$ (do $AK // CE$); $KC = KD$ (gt)

Suy ra: $MN = ND$. Hay N là trung điểm MD

d) Ta có: $\left. \begin{array}{l} CE \perp DF \\ EC // AK \end{array} \right\} \Rightarrow AK \perp DF \Rightarrow AN \perp DM$

Trong $\triangle ADM$ có AN vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle ADM$ cân tại $A \Rightarrow AD = AM$, mà $AD = AB$ (gt). Vậy: $AB = AM$

12.

a) Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{MAN} = 90^\circ$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{BAM} + \widehat{MAD} = \widehat{MAD} + \widehat{DAN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DAN}$$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ADN$ có: $\widehat{ABM} = \widehat{ADN} = 90^\circ$ (gt)

$$AB = AD \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BAM} = \widehat{DAN} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Vậy: } \triangle ABM = \triangle ADN \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = AN$$

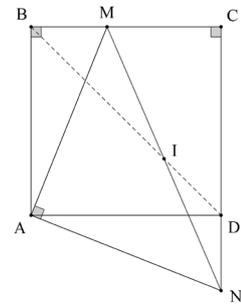
b) Ta có: $\triangle AMN$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, $IM = IN \Rightarrow AI = \frac{MN}{2}$

$$\triangle CMN \text{ có } \widehat{C} = 90^\circ, IM = IN \Rightarrow CI = \frac{MN}{2}$$

$$\Rightarrow AI = CI \Rightarrow I \text{ thuộc đường trung trực của } AC$$

Mặt khác BD là đường trung trực của AC (tính chất hình vuông $ABCD$)

$$\Rightarrow I \in BD \text{ hay } B, I, D \text{ thẳng hàng.}$$



13. a) Tứ giác $AFME$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

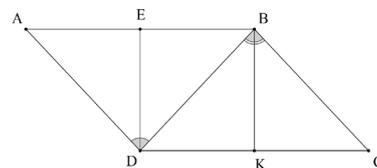
b) Để tứ giác $AFME$ là hình vuông thì đườn chéo AM trở thành đường phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow M$ là giao điểm của đường phân giác của \widehat{BAC} và \widehat{A}

14.

a) Ta có: $ABCD$ là hình bình hành

$$\Rightarrow AD // BC \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DBC} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{ADB}}{2} = \frac{\widehat{DBC}}{2}$$





$$\Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{KBD} \text{ (2 góc so le trong)}$$

$$\Rightarrow DE // BK$$

b) Xét $\triangle DAB$ có DE vừa là đường cao vừa là đường phân giác $\Rightarrow \triangle DAB$ cân tại $D \Rightarrow DA = DB$

c) Xét tứ giác $DEBK$ có: $DE // BK, EB // DK \Rightarrow DEBK$ là hình bình hành

Mà $\widehat{E} = 90^\circ \Rightarrow DEBK$ là hình chữ nhật.

Để $DEBK$ là hình vuông thì $DE = EB$

Mà $\triangle DAB$ cân tại $D \Rightarrow DE$ là trung tuyến của $\triangle DAB$

$$\Rightarrow DE = EB = \frac{AB}{2} \Rightarrow \triangle DAB \text{ vuông tại } D \text{ hay } \widehat{ADB} = 90^\circ.$$

15.

a) Vì P là trung điểm của AB nên

$$PA = PB = \frac{1}{2} AB \quad (1)$$

Vì Q là trung điểm của CD nên

$$QC = QD = \frac{1}{2} CD \quad (2)$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow QC = QD = PA = PB$

Xét tứ giác $APCQ$ ta có $\begin{cases} AP = QC \text{ (cmt)} \\ AP // QC \end{cases}$

Suy ra tứ giác $APCQ$ là hình bình hành (vì có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

b) Xét tứ giác $APQD$ ta có $\begin{cases} AD = DQ \text{ (cmt)} \\ AD // DQ \end{cases}$. Suy ra $APQD$ là hình bình hành

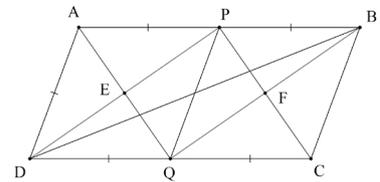
$$\text{Mặt khác } AB = 2 \cdot AD \Leftrightarrow AD = \frac{AB}{2} = AP$$

$\Rightarrow APQD$ là hình thoi (vì là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau)

c) Xét tứ giác $BPDQ$ ta có $\begin{cases} BP = DQ \\ BP // DQ \end{cases}$

$\Rightarrow BPDQ$ là hình bình hành (vì có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

$\Rightarrow BQ // DP$ (cặp cạnh đối) $\Rightarrow FQ // PE \quad (4)$





Lại có $APCQ$ là hình bình hành (cm câu a) nên $AQ // PC$ (cặp cạnh đối)
 $\Rightarrow EQ // PF$ (5)

Từ 4) và (5) suy ra tứ giác $PEQF$ là hình bình hành (vì có hai cặp cạnh đối song song)

Mặt khác theo câu a) thì tứ giác $APQD$ là hình thoi nên $AQ \perp PD$
 $\Rightarrow \widehat{PEQ} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $PEQF$ là hình bình hành có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

d) Để tứ giác $PEQF$ là hình vuông thì $PE = QE \Leftrightarrow 2PE = 2QE \Leftrightarrow PD = AQ$
 $\Leftrightarrow APQD$ là hình vuông (vì $APQD$ đã là hình thoi)
 $\Leftrightarrow \widehat{DAP} = 90^\circ \Leftrightarrow ABCD$ là hình chữ nhật

Vậy để tứ giác $PEQF$ là hình vuông thì tứ giác $ABCD$ phải là hình chữ nhật có $AB = 2AD$

16.

a) Tứ giác $DKMN$ có $\widehat{KDN} = 90^\circ$; $\widehat{MKD} = 90^\circ$; $\widehat{MND} = 90^\circ$ nên $DKMN$ là hình chữ nhật.

b) $\triangle DEF$ vuông tại D , DM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $MD = ME$.

$\Rightarrow \triangle MDE$ cân tại M .

Ta lại có: $MN \perp DE$ tại $N \Rightarrow ND = NE = \frac{DE}{2}$.

Tứ giác $DHEM$ có: $ND = NE = \frac{DE}{2}$;

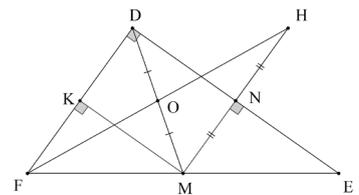
$NH = NM = \frac{HM}{2}$ (H là điểm đối xứng với M qua N).

$\Rightarrow DHEM$ là hình bình hành $\Rightarrow DH // ME$ và $DH = ME$.

Mà M là trung điểm EF nên $DH // MF$ và $DH = MF$.

$\Rightarrow DHMF$ là hình bình hành.

Mà O là trung điểm của DM cũng là trung điểm của HF . Vậy H, O, F thẳng hàng.





c) Hình chữ nhật $DKMN$ là hình vuông khi DM là phân giác \widehat{KDN} , hay DM là phân giác \widehat{FDE} .

Khi đó DM là trung tuyến cũng là phân giác xuất phát từ D .

$\Rightarrow \triangle DEF$ vuông cân tại D .

Vậy $\triangle DEF$ vuông cân tại D thì $DKMN$ là hình vuông.



Bài 15: ĐỊNH LÝ THALÈS TRONG TAM GIÁC

1. $\frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}; \frac{AB}{AD} = \frac{1}{3}; \frac{AC}{AD} = \frac{2}{3}$.

2.

a) Vì $MN // BC$ nên ta lập được các tỉ số sau: $\frac{AP}{AN} = \frac{AQ}{AM}; \frac{PN}{AN} = \frac{QM}{AM}; \frac{AP}{PN} = \frac{AQ}{QM}$

b) Vì $MN // BC$ nên ta lập được các tỉ số sau: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}; \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC};$

$$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}$$

c) Theo hình vẽ ta có: $\begin{cases} KH \perp BH \\ BC \perp BH \end{cases} \Rightarrow KH // BC$

Ta lập được các tỉ số sau: $\frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AC}$

Từ $\frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{AH}{AH + AB} = \frac{AK}{AK + AC}$ hay $\frac{HA}{HB} = \frac{KA}{KC}$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{KC}$

d) Theo hình vẽ ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB // CD.$

Ta lập được các tỉ số sau: $\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OC};$

Từ $\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OC} \Rightarrow \frac{OA}{OA + OD} = \frac{OB}{OB + OC}$ hay $\frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BC}$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{OD}{AD} = \frac{OC}{BC}$

3.

a) Ta có: $\frac{CA + CB}{CB} = \frac{5}{2};$

Suy ra $CB = 4(cm).$



b) $\frac{DA - DB}{DB} = \frac{1}{2}$, suy ra $DB = 20(cm).$

c) $CD = CB + BD = 24(cm).$



4. a) Ta có $MN // BC$ nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC}$ (định lí Thalès) hay

$$\frac{x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 3}{4} = 2,25$$

b) Theo hình vẽ, ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ FE \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB // FE$

Suy ra $\frac{EC}{CB} = \frac{CF}{CA}$ (định lí Thalès) hay $\frac{2}{2+2} = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 2,5}{2} = 5$

c) Vì $AB // MN$ nên $\frac{OA}{ON} = \frac{OB}{OM}$ (định lí Thalès) hay $\frac{3}{8} = \frac{x}{4,2} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 4,2}{8} = 1,575$

5. Áp dụng định lí Thalès ta có: $DE = \frac{1 \cdot 7,5}{5} = 1,5(cm)$.

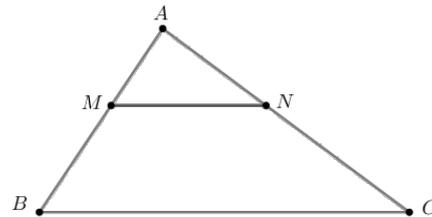
6. Áp dụng định lí Thalès ta có: $MR = \frac{10 \cdot 6}{5} = 12(cm)$.

7.

Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ (định lí Thalès)

$$\text{nên } \frac{AM}{AB - AM} = \frac{MN}{BC - MN}$$

suy ra $MN = 6cm, BC = 9,6cm$.



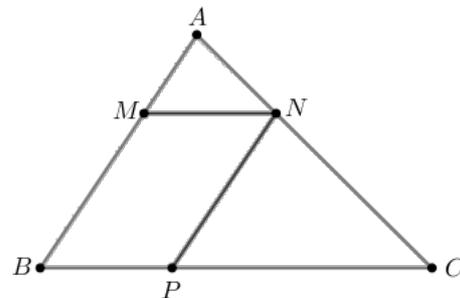
8.

$MN // BC, \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$ (định lí

Thalès) $NP // AB$ nên

$$\frac{AN}{NC} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow BP = 3(cm)$$

Vậy $BC = BP + PC = 9(cm)$.



9.

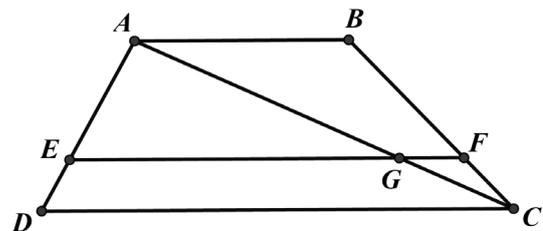
Xét $\triangle ACD$ có $EG // DC$ (vì $EF // DC$)

$$\Rightarrow \frac{DE}{EA} = \frac{CG}{GA} \text{ (định lí Thalès)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{CG}{GA} \Rightarrow \frac{CG}{GA} = \frac{1}{2}$$

Xét $\triangle CAB$ có $FG // AB$ (vì $EF // AB$)

$$\Rightarrow \frac{CF}{FB} = \frac{CG}{GA} \text{ (định lí Thalès)} \Rightarrow \frac{CF}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = 3(cm)$$



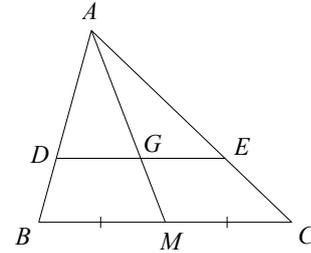


10.

a) $\triangle ABM$ có $DG \parallel BM \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$

b) $\triangle AMC$ có

$$GE \parallel MC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow AE = 2EC.$$



11.

a) Theo giả thiết $DE \parallel BC$ nên $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$

(định lí Thalès)

b) Theo câu a ta có $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}$

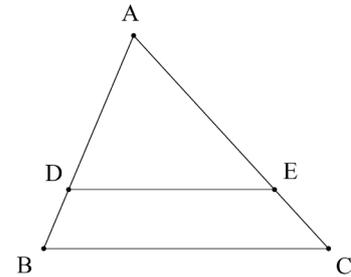
Theo giả thiết $AE + AC = 14$

Do đó: $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AE}{AE + AC} = \frac{3}{3 + 4}$ hay $\frac{AE}{14} = \frac{3}{7}$

$$\Rightarrow AE = \frac{14 \cdot 3}{7} = 6 \text{ (cm)}$$

$$AC = 14 - 6 = 8 \text{ (cm)}$$

Suy ra $EC = AC - AE = 8 - 6 = 2 \text{ (cm)}$



12.

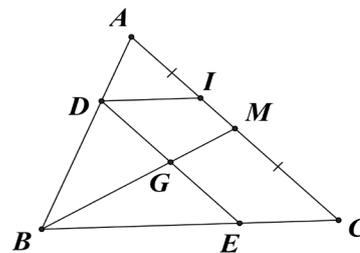
a) Ta có BM là trung tuyến, G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $BG = 2.GM$

Áp dụng định lí Thalès: $DG \parallel AM$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{BG}{GM} = \frac{2.GM}{GM} = 2 \Rightarrow BD = 2.DA$$

$EG \parallel CM$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{BG}{GM} = \frac{2.GM}{GM} = 2 \Rightarrow BE = 2.EC$$



b) Theo câu a, ta có $BD = 2.DA \Rightarrow BA = 3.DA \Rightarrow \frac{BA}{DA} = 3$

Do $DE \parallel AC$, áp dụng định lí Thalès và tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$3 = \frac{BA}{DA} = \frac{BC}{EC} = \frac{BA + BC}{DA + EC} = \frac{BA + BC}{16} \Rightarrow BA + BC = 16 \cdot 3 = 48$$



*) Chu vi của ΔABC là 75 nên ta có:

$$AC + BA + BC = 75 \Rightarrow AC = 75 - (BA + BC) = 75 - 48 = 27$$

Dựng $DI // BC$ ($I \in AC$), khi đó tứ giác $DICE$ là hình bình hành, nên $DE = IC$.

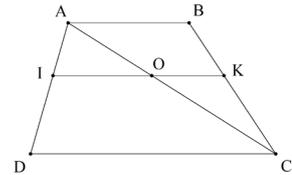
Do $DI // BC$, áp dụng định lí Thalès ta có:

$$\frac{AC}{AI} = \frac{AB}{AD} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{AI + IC}{AI} = 3 \Rightarrow 1 + \frac{IC}{AI} = 3 \Rightarrow \frac{IC}{AI} = 2$$

$$\text{Khi đó } \frac{IC}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow IC = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18 \text{ cm hay } DE = 18 \text{ cm}$$

14.

a) Do $IK // AB$, mà $AB // CD$ nên $IK // CD$, do đó $OI // CD$



Áp dụng định lí Thalès ta có: $\frac{AI}{AD} = \frac{AO}{AC}$

b) Do $OK // AB$ nên áp dụng định lí Thalès ta có $\frac{BK}{BC} = \frac{AO}{AC}$.

Theo câu a, ta có $\frac{AI}{AD} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{BK}{BC} \Rightarrow AI \cdot BC = AD \cdot BK$

14. a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD$; $AD // BC$

Áp dụng định lí Thalès ta có:

$$\Delta AID \text{ có } AD // BJ \text{ (} AD // BC \text{)} \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{IA}{IJ} \quad (1)$$

$$\Delta AIB \text{ có } AB // DK \text{ (} AB // CD \text{)} \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{IK}{IA} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{IA}{IJ} = \frac{IK}{IA}$$

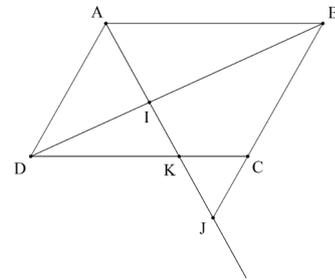
$$\text{Vì } \frac{IA}{IJ} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow IA^2 = IJ \cdot IK.$$

b) ΔAID có $AD // BJ$. Áp dụng định lí Thalès ta có: $\frac{AI}{AJ} = \frac{DI}{DB}$

$$\text{Từ } \frac{AI}{IJ} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow \frac{IA}{IJ + IA} = \frac{IK}{IK + IA} \Rightarrow \frac{AI}{AJ} = \frac{IK}{AK}$$

$$\text{Vậy } \frac{AI}{AJ} = \frac{DI}{DB} = \frac{KI}{AK}.$$

15.





Ta có: $BM // EF$; $CN // EF \Rightarrow BM // CN$

Xét $\triangle BDM$ và $\triangle CDN$ có

$DB = DC$ (AD là đường trung tuyến)

$\widehat{BDM} = \widehat{CDN}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{DBM} = \widehat{DCN}$ (hai góc so le trong;

$BM // CN$)

$\Rightarrow \triangle BDM = \triangle CDN$ (g.c.g)

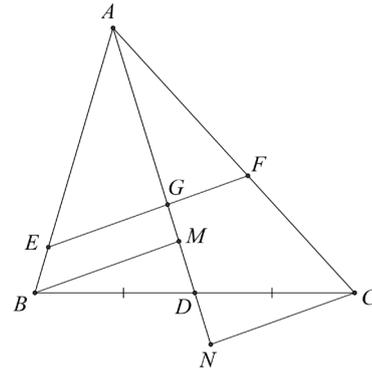
$\Rightarrow MD = DN$

Vì $BM // EF \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{GM}{AG}$ (Định lý Thalès)

Vì $CN // EF \Rightarrow \frac{CF}{AF} = \frac{GN}{AG}$ (Định lý Thalès)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} &= \frac{GM}{AG} + \frac{GN}{AG} = \frac{GM + GN}{AG} \\ &= \frac{GD - MD + DN + GD}{AG} = \frac{2GD}{AG} = \frac{AG}{AG} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$.



16. Ta có: $BH // MN$; $CK // MN \Rightarrow BH // CK \Rightarrow \widehat{HBO} = \widehat{OCK}$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle BHO$ và $\triangle CKO$ có :

$OB = OC$ (AO là trung tuyến của $\triangle ABC$)

$\widehat{BOH} = \widehat{COK}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{HBO} = \widehat{OCK}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle BHO = \triangle CKO$ (g.c.g)

$\Rightarrow OH = OK$

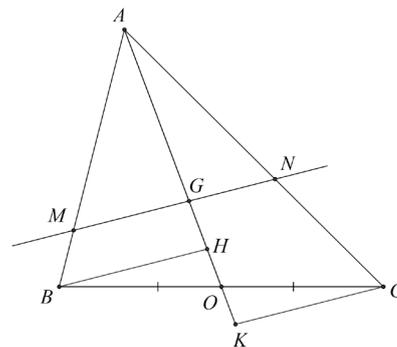
Vì $BH // MG \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AH}{AG}$ (1)

Vì $CK // GN \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{AK}{AG}$ (2)

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AH}{AG} + \frac{AK}{AG} = \frac{AG + GH + AG + GH + HK}{AG} = \frac{2AG + 2GO}{AG} = \frac{2AO}{AG}$$

Mà $\triangle ABC$ có trung tuyến AO và G là trọng tâm





$$\Rightarrow AG = \frac{2AO}{3} \Rightarrow 2AO = 3AG$$

Nên $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{2AO}{AG} = \frac{3AG}{AG} = 3$

Vậy $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$

17. a) Ta có: $\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \frac{CN}{CB} = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow MN // AC \text{ (định lý Thalès đảo)}$

b) Ta có: $\left. \begin{array}{l} \frac{DH}{DE} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\ \frac{DK}{DF} = \frac{4}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DH}{DE} = \frac{DK}{DF} \Rightarrow HK // EF \text{ (định lý Thalès đảo)}$

c) Ta có: $\left. \begin{array}{l} \frac{MQ}{MN} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{MP}{MK} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MQ}{MN} = \frac{MP}{MK} \Rightarrow PQ // KN \text{ (định lý Thalès đảo)}$

d) Ta có: $\left. \begin{array}{l} \frac{AO}{AC} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3} \\ \frac{AI}{AB} = \frac{2,4}{3,6} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow IO // BC \text{ (định lý Thalès đảo)}$

18.

a) Xét $\triangle ACD$ có $GE // CD$, áp dụng định lý Thalès ta có: $\frac{GA}{GC} = \frac{EA}{ED}$ (1).

Xét $\triangle ACB$ có $GH // CB$, áp dụng định lý Thalès ta có: $\frac{GA}{GC} = \frac{HA}{HB}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{GA}{GC} = \frac{EA}{ED} = \frac{HA}{HB}$.

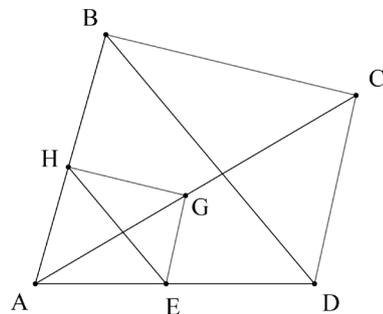
Vậy các tỉ số bằng tỉ số $\frac{GA}{GC}$ là $\frac{EA}{ED}; \frac{HA}{HB}$.

b) Theo phần a,

ta có $\frac{EA}{ED} = \frac{HA}{HB}$ (vì cùng bằng $\frac{GA}{GC}$).

Xét $\triangle HBD$ có $E \in AD, H \in AB$ mà $\frac{EA}{ED} = \frac{HA}{HB}$

Áp dụng định lý Thalès đảo ta có $HE // BD$.





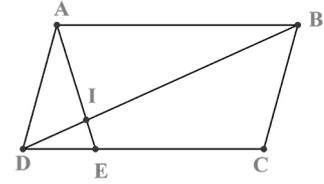
Bài 15: HỆ QUẢ ĐỊNH LÍ THALÈS TRONG TAM GIÁC

1.

Xét $\triangle IAB$, có: $DE \parallel AB$ ($D \in IB, E \in IA$)

$$\Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{DE}{AB} \text{ (Hệ quả Thalès)}$$

$$\Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DI}{DI + IB} = \frac{1}{1 + 4} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{5}$$



2.

a) Xét $\triangle OED$ và $\triangle OBC$: Có $ED \parallel BC$ (gt)

Suy ra: $\frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OC}$ (Hệ quả Thalès)

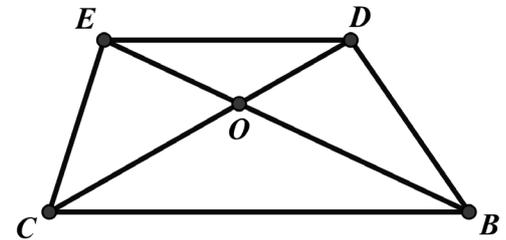
$$\Rightarrow OE \cdot OC = OB \cdot OD \text{ (t/c tỉ lệ thức)}$$

b) Xét $\triangle OED$ và $\triangle OBC$ có $ED \parallel BC$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{ED}{BC} \text{ (hệ quả Thalès)} \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{OE}{OE + OB} = \frac{4}{4 + 5}$$

$$\Rightarrow \frac{OE}{EB} = \frac{4}{9} \text{ hay } \frac{OE}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow OE = 4 \Rightarrow OB = 5$$

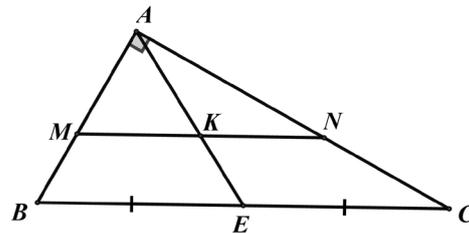


3.

a) Có $AN = \frac{3}{5} AC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{3}{5}$

Xét $\triangle ABC$ có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (vì $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$)

$$\Rightarrow MN \parallel BC \text{ (Thalès đảo)}$$



b) Xét $\triangle ABE$ có: $MK \parallel BE \Rightarrow \frac{MK}{BE} = \frac{AK}{AE}$ (hệ quả Thalès) (1)

Xét $\triangle AEC$ có: $KN \parallel EC \Rightarrow \frac{KN}{EC} = \frac{AK}{AE}$ (hệ quả Thalès) (2)

Từ (1); (2) suy ra: $\frac{MK}{BE} = \frac{KN}{EC}$, mà $BE = EC \Rightarrow MK = KN$



4.

a) Xét $\triangle AMO$ và $\triangle ADC$ có $MO \parallel DC$ (vì $MN \parallel DC$)

$$\Rightarrow \frac{MO}{DC} = \frac{AO}{AC} \quad (\text{hệ quả Thalès}) \quad (1)$$

Xét $\triangle BON$ và $\triangle BCD$ có $ON \parallel CD$ (vì $MN \parallel DC$)

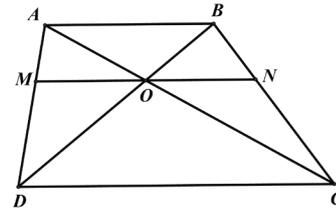
$$\Rightarrow \frac{ON}{DC} = \frac{OB}{BD} \quad (\text{hệ quả Thalès}) \quad (2)$$

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ có $AB \parallel CD$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad (\text{hệ quả Thalès})$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OA+OC} = \frac{OB}{OB+OD} \quad \text{hay} \quad \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow \frac{OM}{DC} = \frac{ON}{DC} \Rightarrow OM = ON$$



b) Xét $\triangle ADC$ có $MO \parallel DC$ (vì $MN \parallel DC$)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AO}{AC} \quad (\text{hệ quả Thalès}) \quad (4)$$

Xét $\triangle CAB$ có $ON \parallel AB$ (vì $MN \parallel AB$)

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CO}{CA} \quad (\text{hệ quả Thalès}) \quad (5)$$

$$\text{Từ (4);(5)} \Rightarrow \frac{AM}{AD} + \frac{CN}{CB} = \frac{AO}{AC} + \frac{CO}{CA} = \frac{AO+OC}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$$

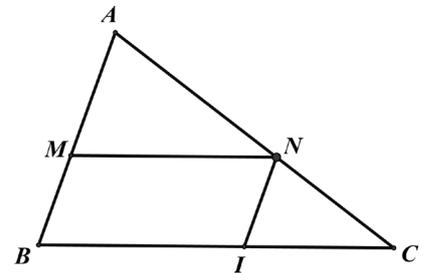
5.

Xét $\triangle ABC$ có: $MN \parallel BC$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA} \quad (\text{định lí Thalès})$$

Xét $\triangle ABC$ có: $NI \parallel AB$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{BI}{BC} = \frac{AN}{CA} \quad (\text{hệ quả Thalès})$$



$$\text{Suy ra:} \quad \frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = \frac{CN}{CA} + \frac{NA}{CA} = \frac{AC}{AC} = 1$$



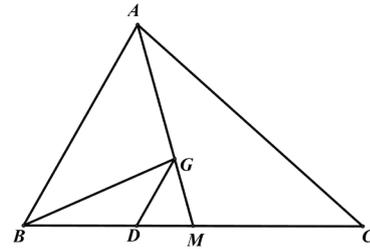
6.

Gọi AG cắt BC tại M , G trọng tâm (gt)

$$\Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}, M \text{ trung điểm } BC.$$

Xét $\triangle MGD$ và $\triangle MAB$ có $GD \parallel AB$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{BD}{BM} = \frac{2}{3} \text{ (hệ quả Thalès)}$$



$$\text{Có } \frac{BD}{BM} = \frac{2}{3} \text{ mà } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BD}{BM} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \text{ hay } \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$$

7.

a) Từ D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AM và AC lần lượt tại N và E .

$$\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow DN \parallel BM, NE \parallel MC$$

Xét $\triangle ABM$ có $DN \parallel BM$.

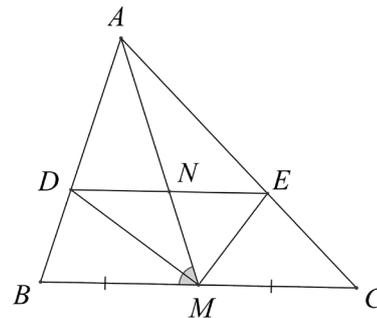
Theo hệ quả Thalès ta có:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AM} = \frac{DN}{BM} \quad (1)$$

Xét $\triangle ACM$ có $NE \parallel MC$.

Theo hệ quả Thalès ta có:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AN}{AM} = \frac{NE}{MC} \quad (2)$$



Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC} \Rightarrow DN = EN$ vì $BM = CM$, hay MN là đường trung tuyến của $\triangle DME$.

b) + Ta có $DN \parallel BM \Rightarrow \widehat{NDM} = \widehat{BMD}$ (3) (so le trong)

Mà $\widehat{NMD} = \widehat{BMD}$ (4) (MD là đường phân giác của \widehat{NMB})

Từ (3)(4) $\Rightarrow \widehat{NMD} = \widehat{NDM}$. Hay $\triangle MND$ là tam giác cân tại N .

+ $\triangle MND$ là tam giác cân $\Rightarrow ND = NM$, mà $DN = EN \Rightarrow NE = NM$

$\Rightarrow \triangle NEM$ cân tại N .

Cách 1:

Ta có $NE \parallel MC \Rightarrow \widehat{NEM} = \widehat{EMC}$ (so le trong)

Mặt khác $\triangle NEM$ cân tại N nên $\widehat{NEM} = \widehat{NME}$. Lại có $\widehat{NMD} = \widehat{BMD}$

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BMD} + \widehat{DMN} + \widehat{NME} + \widehat{EMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BMC} = 2\widehat{DMN} + 2\widehat{NME} = 180^\circ$$



$$\Rightarrow 2(\widehat{DMN} + \widehat{NME}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DMN} + \widehat{NME} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DME} = 90^\circ.$$

Hay $\triangle MDE$ vuông tại M .

Cách 2: Ta có $DN = EN$, lại có $\triangle MND$ là tam giác cân tại $N \Rightarrow NM = ND$

Xét $\triangle MDE$ có: $DN = EN \Rightarrow MN$ là đường trung tuyến ứng với cạnh DE (*)

$$\text{Mà } \left. \begin{array}{l} DN = EN = MN \\ DN + NE = DE \end{array} \right\} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}DE (**)$$

Từ (*)(**) $\Rightarrow \triangle MDE$ vuông tại M (trong một tam giác đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng một nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông)

c) Ta có $\widehat{NME} = \widehat{EMC}$ ($= \widehat{NEM}$) (theo câu b). Suy ra ME là phân giác \widehat{NMC} hay ME là phân giác \widehat{AMC} . Vậy ME là đường phân giác của $\triangle AMC$.

8.

a) Vì $AB // CD$ hay $AB // DM$

$$\Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{DM}{AB} \text{ (hệ quả của định lý Thalès)}$$

$$\text{hay } \frac{IM}{IA} = \frac{MC}{AB} \text{ (vì } DM = MC \text{) (1)}$$

$$\text{Vì } AB // CD \text{ hay } AB // CM \Rightarrow \frac{KM}{KB} = \frac{CM}{AB} \text{ (2)}$$

(hệ quả của định lý Thalès)

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB}$$

b) Xét $\triangle MAB$ có $\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB}$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow IK // AB \text{ (định lý Thalès đảo)} \text{ mà } AB // CD \text{ (gt)} \Rightarrow IK // AB // CD$$

c) Xét $\triangle MAC$ có $IK // MC$ (chứng minh trên)

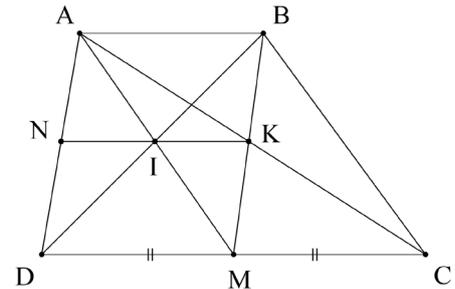
$$\Rightarrow \frac{IA}{AM} = \frac{IK}{MC} \text{ (hệ quả của định lý Thalès) (3)}$$

Xét $\triangle MAD$ có $IN // MD$ (Vì $IK // CD$)

$$\Rightarrow \frac{IA}{AM} = \frac{IN}{MD} \text{ (hệ quả của định lý Thalès) (4)}$$

$$\text{Từ (3) và (4) } \frac{IN}{MD} = \frac{IK}{MC} \text{ mà } MD = MC \Rightarrow IN = IK$$

Hay I là trung điểm của NK .





9.

Từ D kẻ $DH // AM$ (H thuộc BC)

$$\text{Xét } \triangle BDH, \text{ có } IM // DK \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{MB}{MH}$$

(Hệ quả Thalès) (1)

$$\text{Xét } \triangle ACM, \text{ có } DH // AM \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{AC}{AD}$$

(Hệ quả Thalès)

$$\Rightarrow \frac{MB}{MH} = \frac{AC}{AD} \quad (MB = MC) \quad (2)$$

$$\text{Xét } \triangle ABD, \text{ có } CK // AB \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DK} \quad (\text{Hệ quả Thalès})$$

$$\Rightarrow \frac{AD + DC}{DC} = \frac{BD + DK}{DK} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BK}{DK}$$

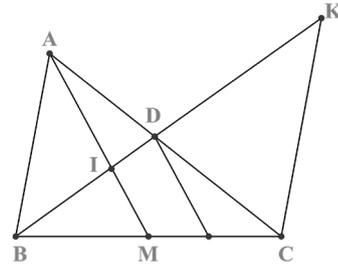
$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BK}{BD} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{AC}{AD} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3)(4)} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{BK}{BD} \Rightarrow IB \cdot BD = ID \cdot BK \Rightarrow IB(IB + ID) = ID(IB + IK)$$

$$\Rightarrow IB^2 + IB \cdot ID = ID \cdot IB + ID \cdot IK$$

$$\Rightarrow IB^2 = ID \cdot IK \quad (\text{đpcm})$$

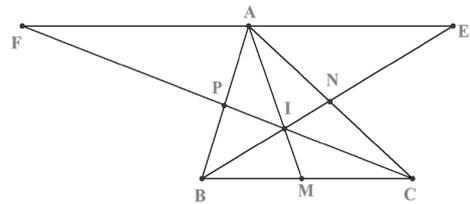


10.

$$\text{a) Ta có: } AE // BM \Rightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{AE}{BM}$$

Lại có:

$$FA // MC \Rightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{FA}{MC} \Rightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{AF}{MC}$$



$$\text{b) Cách 1: Xét } \triangle NBC, \text{ có: } AE // BC \Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{AE}{BC} \quad (\text{hệ quả Thalès}) \quad (1)$$



Xét $\triangle PBC$, có: $AF \parallel BC \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{AF}{BC} \Rightarrow \frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{AE}{BC} + \frac{AF}{BC} = \frac{EF}{BC}$ (3)

Xét $\triangle IBC$, có: $EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{IE}{IB}$ (4)

Xét $\triangle IBM$, có: $AE \parallel BM \Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{IA}{IM}$ (5) $\Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{IA}{IM}$ (6)

Từ (3);(6) $\Rightarrow \frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$ (đpcm)

Cách 2: Ta có: $\frac{AE}{MB} = \frac{AF}{MC} = \frac{AE + AF}{MB+MC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AI}{IM}$ (1)

Ta chứng minh được: $\frac{AP}{PB} = \frac{AF}{BC}$ (2); $\frac{AN}{NC} = \frac{AE}{BC}$ (3) $\Rightarrow \frac{AN}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$



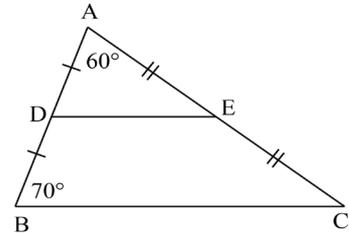
Bài 16: ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

1. Chu vi $\Delta MNP = MN + NP + PM = 4 + 5 + 6 = 15(cm)$

2.

Ta có ED là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow DE // BC \Rightarrow BDEC$ là hình thang

$$\widehat{C} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BDE} = 110^\circ; \widehat{DEC} = 130^\circ$$



3. MN là đường trung bình của tam giác OAB

$$\text{Suy ra: } MN = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 2.45 = 90(m)$$

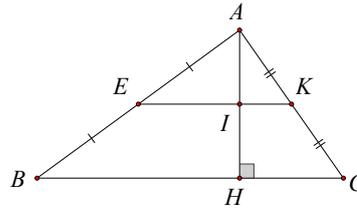
4.

a) Xét ΔABC có:

$$\left. \begin{array}{l} EA = EB(gt) \\ KA = KC(gt) \end{array} \right\} \Rightarrow EK \text{ là đường trung}$$

bình của ΔABC

$$\Rightarrow EK // BC \Rightarrow EI // BH.$$



b) Xét ΔABH có:

$$\left. \begin{array}{l} EA = EB(gt) \\ EI // BH(cmt) \end{array} \right\} \Rightarrow IA = IH \Rightarrow I \text{ là trung điểm của } AH.$$

c) Ta có: EK là đường trung bình của $\Delta ABC(cmt) \Rightarrow EK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.10 = 5$

5.

a) $AD = AB + BD = 2AB = 2.5 = 10(cm)$ (vì $BD = AB$)

$AE = AC + CE = 2AC = 2.7 = 14(cm)$ (vì $AC = CE$)

Xét ΔADE có:

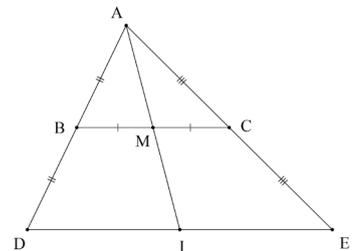
B là trung điểm AD (gt)

C là trung điểm AE (gt)

Nên BC là đường trung bình của ΔADE

Suy ra $BC = \frac{1}{2}DE$ (tính chất đường trung bình trong tam giác)

Nên: $DE = 2BC = 2.9 = 18(cm)$





b) Xét $\triangle ADI$ có:

B là trung điểm AD (gt)

M là trung điểm AI (gt)

Nên BM là đường trung bình của $\triangle ADI$

Suy ra : $BM \parallel DI$ (tính chất đường trung bình trong tam giác)

Vậy $BC \parallel DI$ (1)

c) CM là đường trung bình của $\triangle AEI$

Suy ra : $CM \parallel EI$ (tính chất đường trung bình trong tam giác)

Vậy $BC \parallel EI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra D, I, E thẳng hàng (theo tiên đề O-clit)

6.

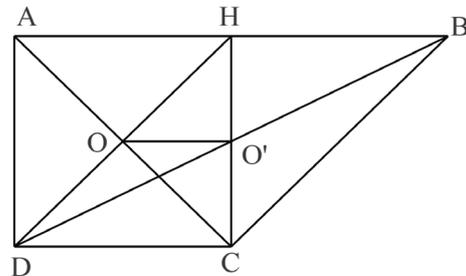
a) $AHCD$ là hình vuông.

$\triangle BCH$ vuông cân tại H , suy ra

$$\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{BCH} = 45^\circ,$$

$$\widehat{C} = \widehat{BCH} + \widehat{DCH} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 135^\circ$$



b) $\triangle ABC$ có H là trung điểm của AB và $CH \perp AB \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại C

Lại có $\widehat{B} = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại C

c) Ta có $AB = 6\text{cm}, AD = CD = \frac{1}{2}AB = 3\text{cm}, BC = 3\sqrt{2}\text{cm}$

Chu vi hình thang $ABCD$ là:

$$AB = BC + CD + DA = 6 + 3\sqrt{2} + 3 + 3 = 12 + 3\sqrt{2}(\text{cm})$$

d) Để thấy $\widehat{ACD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{HDC} = 45^\circ \Rightarrow DH \parallel BC \Rightarrow DH \perp AC$

Vì $\triangle ACD$ vuông cân tại O nên O là trung điểm của AC

Ta có $\triangle DO'C = \triangle BO'H$ (gcg) $\Rightarrow OC = O'H$ hay O' là trung điểm của CH



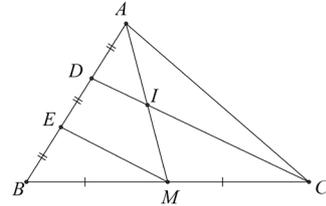
Xét $\triangle AHC$ có $O'O$ là đường trung bình nên $AH = 2O'O$

Mà $AB = 2AH \Rightarrow AB = 4O'O$.

7.

a) Ta có EM là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow EM // DC$

b) DC đi qua trung điểm D của AE và song song với $EM \Rightarrow DC$ đi qua trung điểm I của AM .



c) Vì DI là đường trung bình của tam giác AEM nên $DI = \frac{1}{2}EM$. (1)

Tương tự, ta được: $EM = \frac{1}{2}DC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DC = 4DI$

8.

a) Trong $\triangle AHE$ có M là trung điểm AH và $DM // EH$ (do $Hx // CD$)

nên DM đi qua trung điểm của cạnh AE

$\Rightarrow D$ là trung điểm của AE

$\Rightarrow DA = DE$

b) Do $\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao đồng thời là trung tuyến

$\Rightarrow H$ là trung điểm của BC

Trong $\triangle BDC$ có H là trung điểm của BC và $Hx // DC$ cắt BD tại E

nên Hx đi qua trung điểm của cạnh BD

$\Rightarrow E$ là trung điểm của $BD \Rightarrow BE = ED$

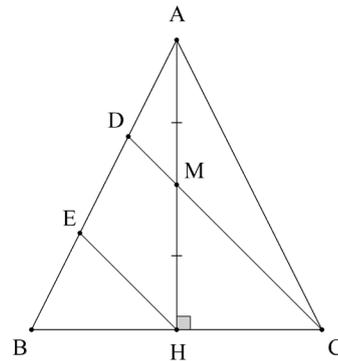
Mà $DA = DE$ (câu a)

$\Rightarrow BE = ED = DA$ và $AB = DA + DE + EB \Rightarrow AB = 3AD$

c)

Trong $\triangle AHE$ có $D; M$ lần lượt là trung điểm của $AE; AH$ nên DM là đường

trung bình của $\triangle AHE \Rightarrow DM = \frac{1}{2}EH$





Trong $\triangle BDC$ có $H; E$ lần lượt là trung điểm của $BC; BD$ nên HE là đường trung bình của $\triangle BDC \Rightarrow HE = \frac{1}{2}CD$

$$\Rightarrow CD = 2HE \text{ và } HE = 2DM$$

$$\Rightarrow CD = 2HE = 2 \cdot 2DM = 4MD$$

9.

a) Xét $\triangle ABC$ có:

$$\begin{cases} MB = MC \\ ME // AB \end{cases} \Rightarrow EA = EB \quad (1) \text{ (Tính chất đường trung bình của tam giác)}$$

$$\begin{cases} MB = MC \\ MF // AC \end{cases} \Rightarrow FA = FC \quad (2) \text{ (Tính chất đường trung bình của tam giác)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow EF // BC$

Xét tứ giác $BEFC$ có: $EF // BC$

\Rightarrow Tứ giác $BEFC$ là hình thang (Dấu hiệu nhận biết hình thang)

Xét tứ giác $AEMF$ có:

$$MF // AE \text{ (Vì } MF // AB, E \in AB \text{)}$$

$$ME // AF \text{ (Vì } ME // AC, F \in AC \text{)}$$

\Rightarrow Tứ giác $AEMF$ là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Mà $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (Vì $\triangle ABC$ vuông tại A)

\Rightarrow hình bình hành $AEMF$ là hình chữ nhật (Dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật)

b) Vì tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật (chứng minh trên)

\Rightarrow 2 đường chéo AM và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (Tính chất hình chữ nhật)

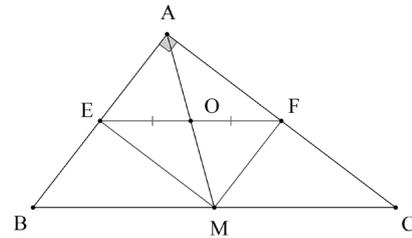
Mà O là trung điểm của EF

$\Rightarrow O$ là trung điểm của AM

$\Rightarrow A$ và M đối xứng qua O .

10.

a) Xét $\triangle ABC$ có D, E lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC nên DE là đường trung bình.



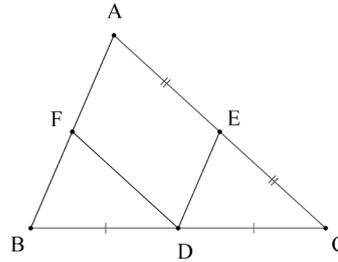


Do đó $DE // AB$ và $DE = \frac{1}{2} AB$.

Mà F là trung điểm của AB nên

$$AF = BF = \frac{1}{2} AB$$

Vậy $DE // AF$ và $DE = AF$.



b) Xét tứ giác $AEDF$ có: $DE // AF$ (Chứng minh trên)

$$DE = AF \text{ (Chứng minh trên)}$$

Do đó tứ giác $AEDF$ là hình bình hành.

11.

a) Vì $\triangle ABC$ có BE, CF là các đường trung tuyến nên F, E lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC nên FE là đường trung bình.

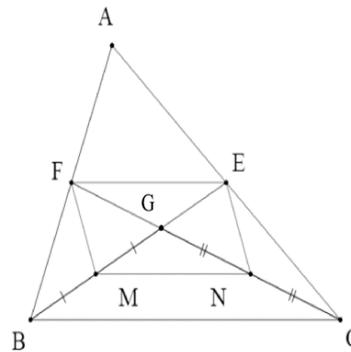
$$\text{Do đó } FE // BC \text{ và } FE = \frac{1}{2} BC. \quad (1)$$

Vì M, N lần lượt là trung điểm của BG và CG nên MN là đường trung bình của $\triangle GBC$

$$\text{Do đó } MN // BC \text{ và } MN = \frac{1}{2} BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EF // MN$ và $EF = MN$.

b) Theo câu a) ta có $EF // MN$ và $EF = MN$ do đó $MNEF$ là hình bình hành.



12.

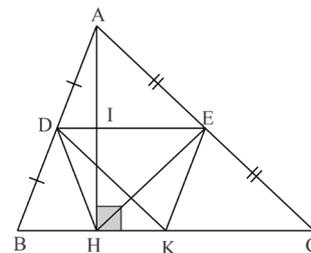
a) Ta có DE là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow DE // BC \Rightarrow DE \perp AH$ (1)

Gọi I là giao điểm của DE và AH

$\triangle ABH$ có $AD = DB$ và

$$DI // BC \Rightarrow AI = IH \quad (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow DE$ là đường trung trực của AH





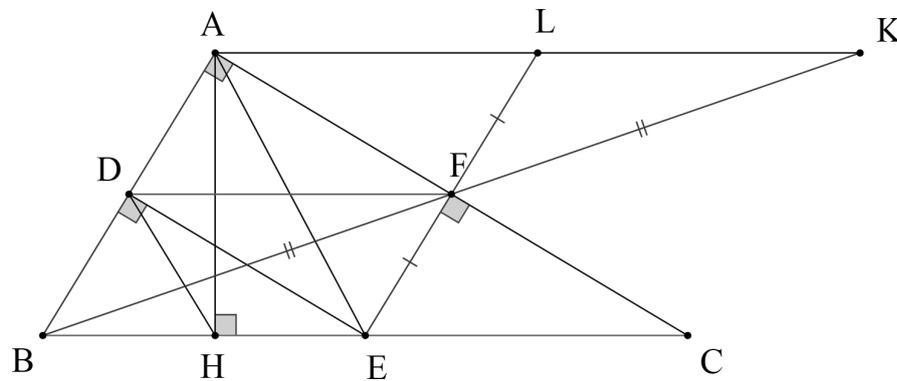
DE là đường trung trực của $AH \Rightarrow EH = EA = \frac{1}{2}AC$ (3)

DK là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow DK = \frac{1}{2}AC$ (4)

Từ (3)(4) $\Rightarrow EH = DK$

Hình thang $DEKH$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

13.



a) Xét tứ giác $ADEF$ có: $\widehat{ADE} = \widehat{DAF} = \widehat{AFE} (= 90^\circ, gt)$

$\Rightarrow ADEF$ là hình chữ nhật (đpcm).

b) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có AE là đường trung tuyến

$\Rightarrow AE = BE = EC = \frac{BC}{2}$ (t/c đường trung tuyến trong tam giác vuông).

$\Rightarrow \triangle AEB$ cân tại E , mà $DE \perp AB \Rightarrow D$ là trung điểm của AB (t/c tam giác cân).

- Xét $\triangle ABC$ có:

$\left\{ \begin{array}{l} EF // AB (\perp AC, gt) \\ EB = EC \left(= \frac{BC}{2}, gt \right) \end{array} \right. \Rightarrow EF$ là đường trung bình trong $\triangle ABC$ (dnhb).

$\Rightarrow EF = \frac{AB}{2} = BD = AD$.

- Xét tứ giác $BDEF$ có: $\left\{ \begin{array}{l} EF // BD \\ EF = BD \end{array} \right. \Rightarrow BDEF$ là hình bình hành (dnhb).

c) Xét tứ giác $DHEF$ có $HE // DF$ (vì $BDEF$ là hbh, cmt)



$\Rightarrow DHEF$ là hình thang.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có

$$\begin{cases} DE // AC (\perp AB) \\ BE = EC \left(= \frac{BC}{2}; gt \right) \end{cases} \Rightarrow DE \text{ là đường trung bình trong tam giác } \triangle ABC$$

$$\Rightarrow DE = \frac{AC}{2} \text{ (t/c đường trung bình trong tam giác).}$$

- Nối H với F . Xét tam giác $\triangle AHC$ vuông tại H có:

HF là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC (vì F là trung điểm AC , cmt)

$$\Rightarrow HF = \frac{AC}{2} \text{ (t/c).}$$

- Xét là hình thang $DHEF$ có đường chéo:

$$HF = DE \left(= \frac{AC}{2}, cmt \right). \text{ Vậy } DHEF \text{ là hình thang cân (dhnb).}$$

d) Xét tứ giác $AKCB$ có: AC, BK là đường chéo

F là trung điểm của AC (cmt)

F là trung điểm của BK (gt)

$$AC \cap BK = \{F\}$$

$AKCB$ là hình bình hành (dhnb)

$$\Rightarrow AK // BC \text{ (tc) hay } \Rightarrow LK // BC \text{ (} L \in AK \text{)} \quad (1)$$

- Xét tứ giác $ALCE$ có:

AC, EL là đường chéo

F là trung điểm của AC (cmt)

F là trung điểm của EL (gt)

$$AC \cap EL = \{F\}$$

$\Rightarrow ALCE$ là hình bình hành (dhnb)

$$\Rightarrow AL // EC \text{ (tc) hay } \Rightarrow AL // BC \text{ (} E \in BC \text{)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: A, L, K thẳng hàng (tiên đề O-Clit).

14.

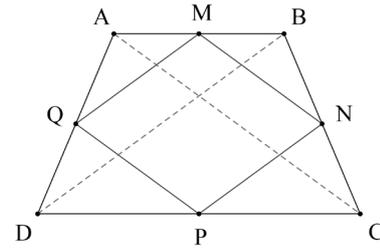


Vì M là trung điểm AB , Q là trung điểm AD nên MQ là đường trung bình $\triangle ABD$.

$$\Rightarrow MQ // BD \text{ và } MQ = \frac{BD}{2} \quad (1)$$

Vì N là trung điểm BC , P là trung điểm DC nên NP là đường trung bình $\triangle CBD$.

$$\Rightarrow NP // BD \text{ và } NP = \frac{BD}{2} \quad (2)$$



Vì M là trung điểm AB , N là trung điểm BC nên MN là đường trung bình $\triangle BAC$.

$$\Rightarrow MN = \frac{AC}{2} \quad (3)$$

Mà $AC = BD$ (Vì $ABCD$ là hình thang cân) (4)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MQ // NP$ và $MQ = NP$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Từ (1), (3) và (4) $\Rightarrow MQ = MN$.

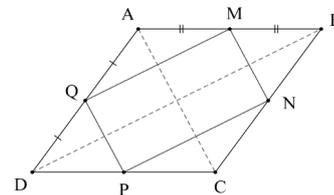
Hình bình hành $MNPQ$ có $MQ = MN \Rightarrow MNPQ$ là hình thoi.

15.

a) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ (1)

Vì M là trung điểm AB , Q là trung điểm AD nên MQ là đường trung bình $\triangle ABD$.

$$\Rightarrow MQ // BD \quad (2) \text{ và } MQ = \frac{BD}{2} \quad (3)$$



Vì M là trung điểm AB , N là trung điểm BC nên MN là đường trung bình $\triangle BAC$.

$$\Rightarrow MN // AC \quad (4) \text{ và } MN = \frac{AC}{2} \quad (5)$$

Từ (1), (2) và (4) suy ra $MN \perp MQ$.

b) Vì N là trung điểm BC , P là trung điểm DC nên NP là đường trung bình $\triangle CBD$.

$$\Rightarrow NP // BD \quad (6) \text{ và } NP = \frac{BD}{2} \quad (7)$$

Từ (2), (3), (6) và (7) $\Rightarrow MQ // NP$ và $MQ = NP$.

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Hình bình hành $MNPQ$ có $MN \perp MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.



Bài 17: TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

1.

a) Ta có $MA = MB = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$. và

$\triangle ABC$ cân tại C nên

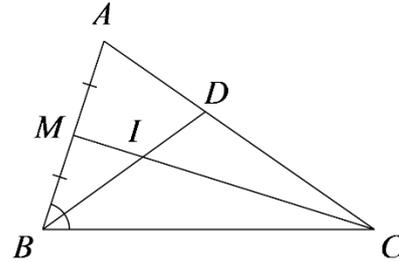
$$AC = BC = 5\text{cm}$$

$\triangle BMC$ có BI là đường phân giác nên

$$\frac{IC}{BC} = \frac{IM}{BM} \Rightarrow \frac{IC}{5} = \frac{BM}{5} = 5 : \frac{3}{2} = \frac{10}{3}.$$

b) $\triangle ABC$ có BD là đường phân giác nên

$$\frac{DC}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{5} = \frac{AD}{3} = \frac{DC + AD}{5 + 3} = \frac{5}{8}$$



2.

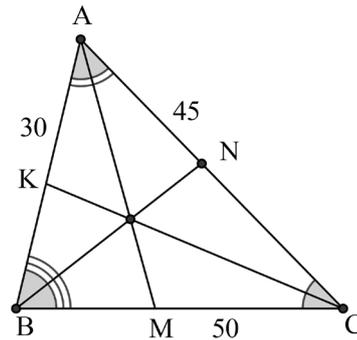
a) $\frac{KA}{KB} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{KA}{9} = \frac{KB}{10} = \frac{KA + KB}{19} = \frac{35}{19}$

$$\Rightarrow KA = \frac{315}{19}, KB = \frac{350}{19}$$

Tương tự: $MB = 20, MC = 30,$

$$NC = \frac{225}{8}, NA = \frac{135}{8}$$

b) $\frac{KA}{KB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1$



3. Tam giác ABC cân tại A , có AH là đường cao thì AH là đường trung tuyến

$$\Rightarrow BH = CH .$$

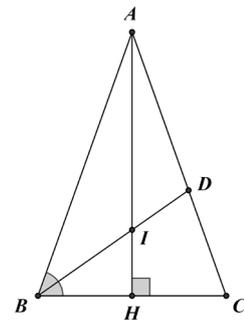
$$AI = \frac{3}{4} AH \Rightarrow \frac{AI}{IH} = 3.$$

Tam giác ABH có BI là đường phân giác

$$\frac{AB}{BH} = \frac{AI}{IH} \Rightarrow \frac{AB}{BH} = 3 \Rightarrow AB = 3.BH .$$

Vì chu vi tam giác ABC bằng $80(\text{cm})$

$$\text{nên } AB + BC + AC = 80$$





$$\Rightarrow 3BH + 3BH + 2BH = 80 \Rightarrow BH = 10(cm).$$

Từ đó ta có: $AB = AC = 30(cm)$, $BC = 20(cm)$.

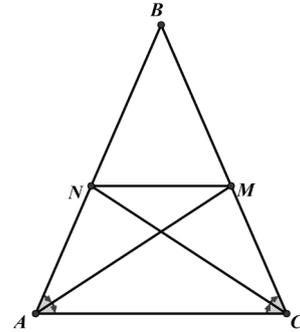
4.

AM là phân giác của \widehat{A} nên $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$.

CN là phân giác của \widehat{C} nên $\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AC}$.

Lại có: $AB = BC$.

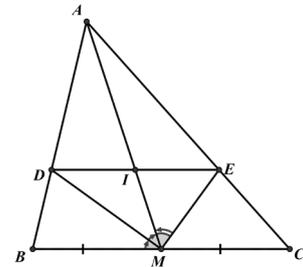
Suy ra: $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{BM}{CM} \Rightarrow MN \parallel AC$.



5.

a) Ta có: $BM = CM \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{CM} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
 $\Rightarrow DE \parallel BC$.

b) $\frac{ID}{BM} = \frac{IA}{MA} = \frac{IE}{CM} \Rightarrow ID = IE$.



6.

Vì AM là phân giác của \widehat{BAD} nên

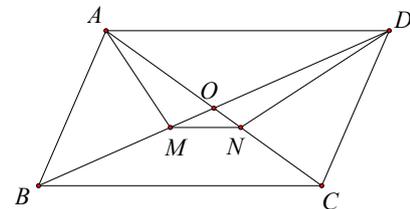
$$\frac{DM}{BM} = \frac{DA}{AB}.$$

Vì DN là phân giác của \widehat{ADC} nên

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AD}{DC}. \text{ Vì } \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{DM}{BM} = \frac{AN}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{BO + OM}{BM} = \frac{OC + ON}{NC} \Rightarrow \frac{BM + OM + OM}{BM} = \frac{NC + ON + ON}{NC}$$

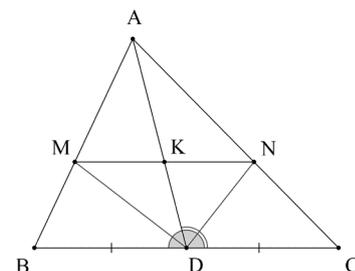
$$\Rightarrow \frac{OM}{BM} = \frac{ON}{CN} \Rightarrow MN \parallel BC.$$



7.

a) Xét ADB có: DM là tia phân giác \widehat{ADB}

$\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$ (t/c đường phân giác của tam giác)





b) Xét $\triangle ADC$ có: DN là tia phân giác \widehat{ADC}

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{NA}{NC} \text{ (t/c đường phân giác của tam giác)}$$

Mà $DB = DC$ (AD là đường trung tuyến của $\triangle ABC$)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} \Rightarrow NM // BC \text{ (định lý Thalès đảo)}$$

c) Ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (cmt) $\Rightarrow AM.AC = AN.AB$

d) Ta có: $MM // BC \Rightarrow \widehat{NMD} = \widehat{MDB}$ (slt) mà $\widehat{BDM} = \widehat{MDK}$ (DM là tia phân giác \widehat{ADB})

$$\Rightarrow \widehat{NMD} = \widehat{KDM} \Rightarrow \triangle KMD \text{ cân tại } K \Rightarrow KM = KD \text{ (1)}$$

Ta có: $MM // BC \Rightarrow \widehat{MND} = \widehat{NDC}$ (slt) mà $\widehat{CDN} = \widehat{NDK}$ (DN là tia phân giác \widehat{ADC})

$$\Rightarrow \widehat{MND} = \widehat{KDN} \Rightarrow \triangle KND \text{ cân tại } K \Rightarrow KN = KD \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KN$ mà $K \in MN \Rightarrow K$ là trung điểm của MN .

8.

a) Xét $\triangle AMB$ có: MD là tia phân giác \widehat{AMB}

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{DA}{DB} \text{ (t/c đường phân giác của tam giác)}$$

(1)

Mặt khác, ta có: $DE // BC$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (định lý Thalès)} \text{ (2)}$$

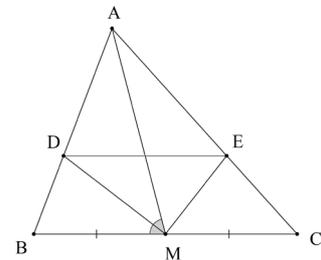
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AE}{EC}$$

b) Kẻ ME' là tia phân giác của \widehat{AMC} .

$$\text{Ta có: } \frac{MA}{MB} = \frac{AE}{EC} \text{ mà } MB = MC \text{ (AM là đường trung tuyến)} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{Xét } \triangle AMC \text{ có } ME' \text{ là tia phân giác của } \widehat{AMC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{E'A}{E'C} \text{ mà } \frac{MA}{MC} = \frac{AE}{EC}$$

(cmt)





$$\Rightarrow \frac{E'A}{E'C} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow \frac{E'A}{E'C + E'A} = \frac{EA}{EA + EC} \Rightarrow \frac{E'A}{AC} = \frac{EA}{AC} \Rightarrow E'A = EA$$

$\Rightarrow E' \equiv E \Rightarrow ME$ là tia phân giác của \widehat{AMC} hay ME là đường phân giác của $\triangle MAC$.

9.

a) $\triangle ABC$ vuông tại A có đường trung tuyến

$$AM \Rightarrow AM = BM \left(= \frac{BC}{2} \right)$$

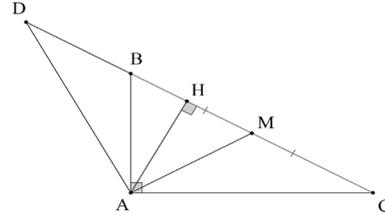
$\Rightarrow \triangle MAB$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAB}$ (tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Vậy AB là tia phân giác \widehat{DAH} (đpcm)

b) Vì $\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow AB \perp AC$ nên AC là đường phân giác ngoài tại đỉnh A của $\triangle ADH$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BH} = \frac{AD}{AH} = \frac{CD}{CH} \Rightarrow BH \cdot CD = BD \cdot CH \text{ (đpcm)}$$

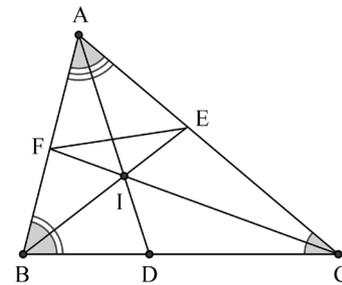


10.

a) Xét $\triangle ABD$, có BI là đường phân giác

$$\widehat{ABD} \Rightarrow \frac{DI}{AI} = \frac{DC}{AC} \text{ (tính chất đường phân giác)}$$

Tương tự ta có:



$$\frac{DI}{AI} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{DI}{AI} = \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC}$$

$$\Rightarrow \frac{DI}{AI + DI} = \frac{BC}{AB + AC + BC} \Leftrightarrow \frac{DI}{AD} = \frac{BC}{P_{ABC}}$$

b) Sử dụng kết quả câu a, ta có $\frac{DI}{DA} + \frac{EI}{EB} + \frac{FI}{FC} = 1$.

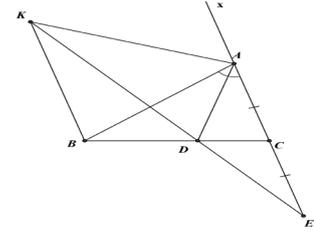
11.



Vẽ Ax là tia đối của tia AC .

Vì $BK // AC$ nên $\frac{BK}{CE} = \frac{DB}{DC}$ (1) (Theo định lí Thalès)

Vì AD là đường phân giác của $\triangle ABC$ nên $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$
(2) (tính chất đường phân giác)



Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BK}{CE} = \frac{AB}{AC}$ mà $CE = AC$ (gt) $\Rightarrow BK = AB \Rightarrow \triangle ABK$ cân tại B .

$\Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{BAK}$ (tính chất tam giác cân)

Mà $\widehat{BKA} = \widehat{KAx}$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow AK$ là đường phân giác của \widehat{BAx}

Do AD và AK là hai đường phân giác trong và ngoài của \widehat{A} nên $AK \perp AD$
(đpcm)



Bài 16: THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

1.

a) Học sinh tự thu thập bằng cách hỏi các bạn cùng tổ, cách thu thập này là trực tiếp.

b) Học sinh truy cập trên trang <https://nhandan.vn/danh-sach-chinh-thuc-23-tuyen-thu-viet-nam-tham-du-aff-cup-2022-post730954.html#:~:text=N%C4%83m%20nay%2C%20t%E1%BA%ADp%20th%E1%BB%83%20d%C6%B0%E1%BB%9Bi,To%C3%A0n%20v%C3%A0%20Nguy%E1%BB%85n%20Ti%E1%BA%BFn%20Linh>.

Đây là cách thu thập gián tiếp.

2. a) Để thu thập dữ liệu về thời gian đi học từ nhà đến trường của các bạn, em có thể đến hỏi trực tiếp từng bạn. Đây là cách thu thập trực tiếp.

b) Dữ liệu thu thập được là số liệu và nó là số liệu liên tục.

3. a) Tên các màu sắc mà em thích là dữ liệu không phải là số, không thể sắp thứ tự.

b) Thời gian làm bài tập của các bạn trong tổ là số liệu liên tục.

c) Số xe đạp bán được của một cửa hàng bán xe đạp là số liệu rời rạc.

4. a) Bác tổ trưởng có thể tham khảo danh sách các thành viên trong hội người cao tuổi ở trong thôn. Đây là cách thu thập dữ liệu gián tiếp.

b) Trong các dữ liệu thu thập được, dữ liệu về họ và tên không là số liệu và có thể sắp thứ tự, còn dữ liệu về năm sinh hay tuổi là số liệu và nó là số liệu rời rạc.

5. Dữ liệu không là số : *Bóng đá, cầu lông, cờ vua, đá cầu*. Dữ liệu có thể sắp xếp thứ tự.

Dữ liệu thu được là số liệu liên tục: 80;19;22;10. Giá trị 80 không hợp lí vì lớp 8A không thể có 80 học sinh.

6. a) Nhiệt độ không khí là số liệu liên tục.

b) Số đôi giày các thành viên trong gia đình là số liệu rời rạc.

c) Số công tơ điện là số liệu liên tục.

d) Số học sinh vi phạm nội quy là số liệu rời rạc.



Bài 16: THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

1.

a) Ta có bảng thống kê

Loại gạo	Gạo trắng	Gạo thơm	Gạo nếp	Gạo khác
Tỉ lệ phần trăm	45,2%	26,8%	9%	19%

b) Gạo trắng được nước ta xuất khẩu nhiều nhất với 45,2%

Còn gạo nếp được nước ta xuất khẩu ít nhất với 9%

c) Vì gạo thơm chiếm 26,8% tổng lượng gạo xuất khẩu nên số lượng gạo thơm

xuất khẩu nước ta trong năm 2020 là $6,15 \cdot \frac{26,8}{100} = 1,6482$ triệu tấn gạo.

2.

a) Ta có bảng thống kê

Con vật	Chó	Mèo	Chim	Cá
Số lượng	8	5	10	12

b) Trong các con vật nuôi của các bạn lớp 8B thì con cá được nuôi nhiều nhất với 12 con. Và con mèo được nuôi ít nhất với chỉ 5 con.

c) Trong các con vật trên, nhận thấy số con chim là 10 gấp đôi số con mèo là 5 con.

3.

a) Tháng có nhiệt độ cao nhất là tháng 7 với nhiệt độ khoảng $30^{\circ}C$ và tháng có nhiệt độ thấp nhất là tháng 1 với nhiệt độ trung bình vào khoảng $16^{\circ}C$.

Sự khác biệt này là do Hà Nội có 4 mùa Xuân, Hạ, Thu, Đông, Khi đó tháng 7 là tháng nằm trong mùa hè, nên nhiệt độ trung bình sẽ cao, ngược lại tháng 1 vẫn chịu ảnh hưởng của mùa đông nên nhiệt độ sẽ thấp.

b) Tháng có lượng mưa nhiều nhất là tháng 8, tháng có lượng mưa ít nhất là tháng 1

c) Học sinh tự trả lời.

4.

a) Bạn Hòa có điểm các môn Toán, Hóa, Sinh cao nhất với 9 điểm và môn Tiếng anh có điểm thấp nhất với 5 điểm.



b) Bạn Hòa không có môn nào bị điểm dưới trung bình, và cũng không có điểm nào tuyệt đối là 10.

c) Ta có bảng thống kê sau

Môn	Toán	Văn	Anh	Lý	Hóa	Sinh
Điểm	9	7	5	8	9	9

5.

a) Ta có bảng thống kê

Lớp	8A	8B	8C	8D
CLB Toán	8	12	10	5
CLB Văn	16	4	8	8

b) Ở lớp 8A số lượng đăng kí CLB Văn nhiều gấp 2 lần CLB Toán. Trong khi đó ở lớp 8B số học sinh tham gia CLB Toán nhiều hơn CLB Văn đến gấp 3 lần.

c) Lớp 8A có 8 bạn tham gia CLB Toán chiếm 20% tổng số học sinh cả lớp, nên lớp 8A có số học sinh là $8 : 20\% = 8 : \frac{1}{5} = 40$ (học sinh)

d) Ở lớp 8A tỉ số tham gia CLB Toán và Văn là $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Còn ở lớp 8B thì tỉ số đó là $\frac{12}{4} = 3$.

6.

a) Nhận thấy ở cả ba cửa hàng thì số lượng ti vi bán ra ở tháng 5 ít hơn so với tháng 6

Tại cửa hàng 1 số lượng bán ra ở tháng 6 hơn tháng 5 là 17 chiếc.

Còn ở cửa hàng 2 tháng 6 bán được nhiều hơn tháng 5 là 29 chiếc.

Và tại cửa hàng số 3 tháng 6 bán được nhiều hơn tháng 5 là 35 chiếc.

b) Cửa hàng 3 kể cả tháng 5 và tháng 6 số lượng bán ra đều hơn hai cửa hàng còn lại.

Có thể do nhiều yếu tố như các nhận xét trên.

c) Trong tháng 6 tổng số ti vi bán được của cả ba cửa hàng là $(47 + 71 + 88) = 206$ chiếc.

Trong khi đó tháng 5 tổng số ti vi bán được của cả ba cửa hàng là $(30 + 42 + 53) = 125$ chiếc.

Như vậy trong tháng 6 cả ba cửa hàng bán được nhiều hơn tháng 5 là $206 - 125 = 81$ chiếc.

Các thông tin về World Cup 2018 để học sinh tự tìm hiểu (kiến thức mở rộng)



d) Ta có bảng thống kê sau

	Cửa hàng 1	Cửa hàng 2	Cửa hàng 3
Tháng 5	30	42	53
Tháng 6	47	71	88

7.

a) Trong các mặt hàng được giảm giá thì áo sơ mi được giảm giá nhiều nhất với 35% và quần Jeans được giảm giá ít nhất với 10%

b) Vì mức giảm phần trăm là trên mỗi sản phẩm chứ không phải trên tổng sản phẩm, nên tổng giá trị các thành phần không bằng 100%. Với số liệu trong biểu đồ ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ cột, hoặc biểu đồ đường

c) Cô Hải đã mua hai chiếc áo sơ mi với giá 325 000 đồng mỗi chiếc, nên số tiền mua 4 chiếc quần âu là $1\ 850\ 000 - 2 \cdot 325\ 000 = 1\ 200\ 000$ đồng.

Vì mỗi chiếc áo sơ mi sau khi giảm giá 35% thì chỉ còn 65% giá trị khi chưa giảm giá.

Nên giá mỗi chiếc áo khi chưa giảm giá là $325\ 000 : \frac{65}{100} = 500\ 000$ đồng.

Mỗi chiếc quần âu sau khi giảm giá là $1\ 200\ 000 : 4 = 300\ 000$ đồng

Và giá này đã được giảm 25% nên 300 000 ứng với 75% giá trị khi chưa giảm giá.

Vậy giá mỗi chiếc quần âu khi chưa giảm giá là $300\ 000 : \frac{75}{100} = 400\ 000$ đồng.