UBND PHƯỜNG YÊN HÒA
TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
MÔN TOÁN
Năm học: 2025 – 2026
Thời gian làm bài: 120 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Bài I. *(5,0 điểm)*

1) Cho hai hộp kín, hộp thứ nhất chứa 8 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 8, hộp thứ hai chứa 12 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Các thẻ có kích thước như nhau. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất chọn được hai thẻ mà tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho 7.

2) Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $\begin{cases} a^3+1=b^2+c \\ b^3+1=c^2+a \\ c^3+1=a^2+b \end{cases}$.

Tính $P=(a+1)(b+1)(c+1)$.

Bài II. *(5,0 điểm)*

1) Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn $a+b+c$ chia hết cho 7 và $a^2-2b^2+c^2$ chia hết cho $a+b+c$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca$ chia hết cho 49.

2) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2+4xy+7y=6y^2+3x+8$.

Bài III. *(3,0 điểm)*

1) Cho a,b,c là các số nguyên dương, chứng minh rằng có ít nhất 1 số trong 3 số $a^3b+1; b^3c+1; c^3a+1$ không chia hết cho $a^2+b^2+c^2$.

2) Cho x,y,z là các số không âm có tổng là 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+z^2+6xyz$.

Bài IV. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, $AB<AC$. Dựng đường cao AD, BE, CF. Kẻ AT vuông góc với EF tại T.

1) Chứng minh rằng $\frac{TE}{TF}=\frac{DB}{DC}$.

2) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BE, CF. Trên EF lấy K,L sao cho BK song song với MT, CL song song với NT. Chứng minh rằng $FK=EL$.

3) Giả sử TM, TN cắt AB, AC tương ứng tại P,Q. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của PQ.

Bài V. *(1,0 điểm)*

Giả sử các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ chứa các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(1) Mỗi tập hợp có đúng 30 phần tử.

(2) Với hai tập hợp bất kỳ, có đúng một số thực thuộc cả hai tập đó.

(3) Không số thực nào thuộc tất cả các tập hợp trên.

Chứng minh rằng $n \leq 871$.

-----------------**HẾT**-----------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Chương 1

CHỌN ĐỘI TUYỂN THCS CẦU GIẤY

Bài tập 1 **(LIM Olympic - THCS Cầu Giấy - Bài 1)**

1. Cho hai hộp kín, hộp thứ nhất chứa 8 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 8, hộp thứ hai chứa 12 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Các thẻ có kích thước như nhau. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất chọn được hai thẻ mà tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho 7.

2. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $\begin{cases} a^3 + 1 = b^2 + c \\ b^3 + 1 = c^2 + a \\ c^3 + 1 = a^2 + b \end{cases}$

   Tính $P = (a+1)(b+1)(c+1)$.

Lời giải.

1. Do ta chọn từ mỗi hộp một thẻ nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 8.12 = 96$.

   Xét biến cố A : Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ sao cho tích của hai số trên thẻ là một số chia hết cho 7.

   Để tích hai số trên thẻ là một số chia hết cho 7 thì ít nhất trong hai thẻ phải có 1 số chia hết cho 7. Mà trong mỗi hộp chỉ có một số 7 chia hết cho 7.

   - Chọn thẻ số 7 từ hộp thứ nhất, ta có 12 cách chọn một thẻ bất kỳ từ hộp thứ hai.
   - Chọn thẻ số 7 từ hộp thứ hai, ta có 8 cách chọn một thẻ bất kỳ từ hộp thứ nhất.

   Mà cách chọn hai thẻ số 7 từ cả hai hộp bị tính 2 lần nên số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 12 + 8 - 1 = 19$.

   Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{19}{96}$.

2. Cộng vế với vế các phương trình ta được $a^3 + b^3 + c^3 + 3 = a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c$

   $\Rightarrow (a^3 - a^2 - a + 1) + (b^3 - b^2 - b + 1) + (c^3 - c^2 - c + 1) = 0.$

   $\Rightarrow (a-1)^2(a+1) + (b-1)^2(b+1) + (c-1)^2(c+1) = 0.$ (*)

   Do $a, b, c \geq 0$ và $(a-1)^2,\ (b-1)^2,\ (c-1)^2$ cũng đều không âm nên vế trái của (*) luôn không âm. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$ (thỏa mãn)

   Suy ra $P = 2.2.2 = 8$.

Bài tập 2 **(LIM Olympic - THCS Cầu Giấy - Bài 2)**

1. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a+b+c$ chia hết cho 7 và $a^2-2b^2+c^2$ chia hết cho $a+b+c$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca$ chia hết cho 49.
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2+4xy+7y=6y^2+3x+8$.

Lời giải.

1. Do $a+b+c \equiv 0 \pmod 7$ nên $a \equiv -(b+c) \pmod 7$.

Do $a^2-2b^2+c^2 \,\vdots\, a+b+c \,\vdots\, 7$ nên $a^2-2b^2+c^2 \equiv 0 \pmod 7$

$\Rightarrow (b+c)^2-2b^2+c^2 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 2c^2+2bc-b^2 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 3c^2-(b-c)^2 \equiv 0 \pmod 7$

Mà số chính phương chia 7 có các số dư là 0, 1, 2, 4 nên ta có các trường hợp sau:

- Với $c^2 \equiv 0 \pmod 7$ hay $c \equiv 0 \pmod 7$, suy ra $(b-c)^2 \equiv 0 \pmod 7$
  $\Rightarrow b-c \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow b \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow a \equiv 0 \pmod 7$.
  Từ đó ta có $ab+bc+ca$ chia hết cho 49.
- Với $c^2 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (b-c)^2 \equiv 3 \pmod 7$ (Vô lý).
- Với $c^2 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow (b-c)^2 \equiv 6 \pmod 7$ (Vô lý).
- Với $c^2 \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow (b-c)^2 \equiv 5 \pmod 7$ (Vô lý).

Vậy $ab+bc+ca$ chia hết cho 49.

2. Phương trình đã cho tương đương $2x^2+(4y-3)x+(7y-6y^2-8)=0$.

$\Delta=(4y-3)^2-8(7y-6y^2-8)=(8y-5)^2+48$.

Để phương trình đã cho có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương hay $(8y-5)^2+48$ là số chính phương. Đặt $(8y-5)^2+48=a^2 \Rightarrow (8y-a-5)(8y+a-5)=-48$.

Do $8y-a-5+8y+a-5=16y-10$ chẵn nên $8y-a-5$ và $8y+a-5$ cùng chẵn.

Xét các trường hợp có thể rồi thay a ngược lại ta có nghiệm duy nhất của phương trình là $x=y=2$.

Bài tập 3 **(LIM Olympic - THCS Cầu Giấy - Bài 3)**

1. Cho a, b, c là các số nguyên dương, chứng minh rằng có ít nhất 1 số trong 3 số a^3b+1; b^3c+1; c^3a+1 không chia hết cho $a^2+b^2+c^2$.
2. Cho x, y, z là các số không âm có tổng là 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2+y^2+z^2+6xyz$.

Lời giải.

1. Giả sử cả ba số a^3b+1; b^3c+1; c^3a+1 đều chia hết cho $a^2+b^2+c^2$.

Suy ra a^3bc+c; b^3ca+a; c^3ab+b đều chia hết cho $a^2+b^2+c^2$, từ đó ta có

$(a^3bc+b^3ca+c^3ab+a+b+c) \vdots (a^2+b^2+c^2) \Rightarrow abc(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c) \vdots (a^2+b^2+c^2)$.

$\Rightarrow a+b+c \vdots (a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a+b+c \geq a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a(1-a)+b(1-b)+c(1-c) \geq 0$.

Mà $1-a \leq 0$, $1-b \leq 0$, $1-c \leq 0$ nên $a(1-a)+b(1-b)+c(1-c) \leq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$. Thử lại không thỏa mãn.

Vậy điều giả sử sai, hay một trong ba số phải không chia hết cho $a^2+b^2+c^2$.

2. Giả sử $x = min\{x, y, z\}$. Khi đó $x \leq \dfrac{1}{3}$.

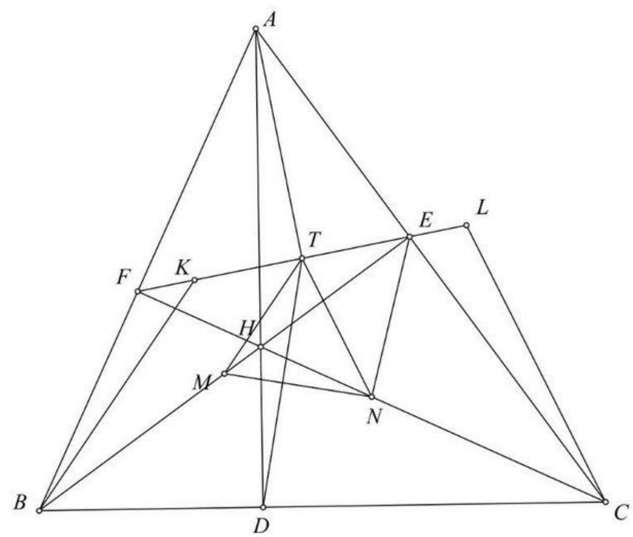
- Ta có $P = x^2+(y+z)^2-2yz+6xyz$
  $= x^2+(1-x)^2+2yz(3x-1) \geq x^2+(1-x)^2$ do $yz \geq 0$.
  Lại có $x^2+(1-x)^2 = 2x^2-2x+1 = 2x(x-1)+1 \leq 1$ do $0 \leq x < 1$.
  Hay $P \leq 1$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn tại $x=y=0, z=1$.
- Ta có $P = x^2+(y+z)^2-2yz+6xyz = x^2+(1-x)^2+2yz(3x-1)$.
  Do $3x-1<0$ và $2yz \leq \dfrac{(y+z)^2}{2} \Rightarrow 2yz(3x-1) \geq \dfrac{(1-x)^2(3x-1)}{2}$.
  Hay $P \geq \dfrac{3x^3-3x^2+x+1}{2}$.
  Ta chứng minh $\dfrac{3x^3-3x^2+x+1}{2} \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x(3x^2-3x+1) \geq 0$
  $\Leftrightarrow 3x[(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{12}] \geq 0$ (luôn đúng do $x \geq 0$).
  Hay $P \geq \dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn tại $x=0, y=z=\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 4 **(LIM Olympic - THCS Cầu Giấy - Bài 4)**

Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$. Dựng đường cao AD, BE, CF. Kẻ AT vuông góc với EF tại T.

1. Chứng minh rằng $\dfrac{TE}{TF} = \dfrac{DB}{DC}$.
2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BE, CF. Trên EF lấy K, L sao cho $BK // MT$, $CL // NT$. Chứng minh rằng $FK = EL$.
3. Giả sử TM, TN cắt AB, AC tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của PQ.

Lời giải.



1. Dễ chứng minh do $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$ và $\triangle AET \backsim \triangle ABD$.
2. Do $BK // MT$ nên T là trung điểm EK, do $CL // NT$ nên T là trung điểm FL, từ đó ta có $FK = TF - TK = TL - TE = EL$.
3. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ECF có ba điểm T, N, Q thẳng hàng ta có:

   $$\frac{NC}{NF} \cdot \frac{TF}{TE} \cdot \frac{QE}{QC} = 1 \Rightarrow \frac{QE}{QC} = \frac{DC}{DB} \cdot \frac{MB}{ME} = 1.$$

   Nên áp dụng định lý Menelaus đảo cho tam giác BCE ta có ba điểm M, D, Q thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta cũng có N, D, P thẳng hàng.

   Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác FTN có ba điểm Q, E, C thẳng hàng ta có:

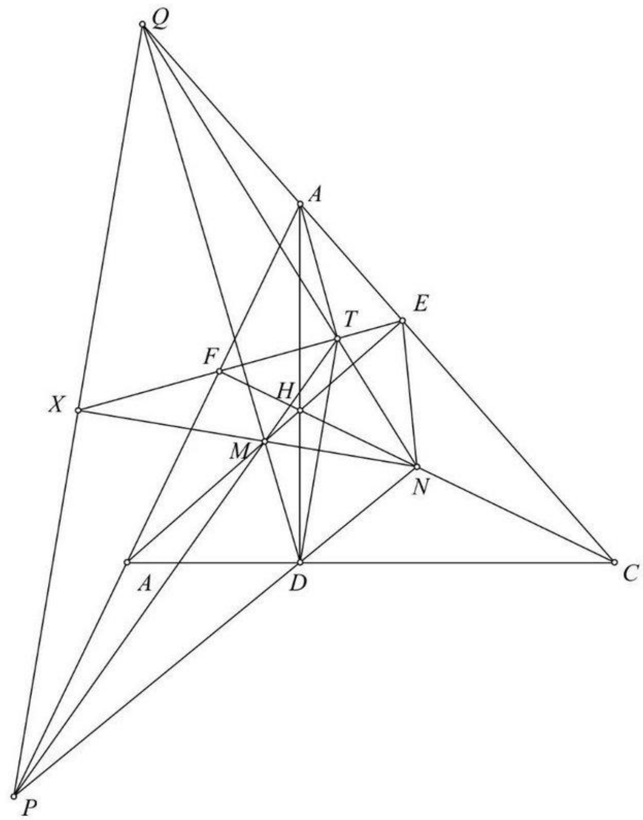
   $$\frac{QT}{QN} \cdot \frac{EF}{ET} \cdot \frac{CN}{CF} = 1 \Rightarrow \frac{QT}{QN} = \frac{2ET}{EF}. \text{ (1)}$$

   Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CDN có ba điểm F, B, P thẳng hàng ta có:

   $$\frac{PD}{PN} \cdot \frac{BC}{BD} \cdot \frac{FN}{FC} = 1 \Rightarrow \frac{PD}{PN} = \frac{2BD}{BC}. \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2), kết hợp với dễ chứng minh $\dfrac{ET}{EF} = \dfrac{BD}{BC}$ từ câu a ta có $\dfrac{QT}{QN} = \dfrac{PD}{PN}$.

$\Rightarrow TD // PQ \Rightarrow NM$ đi qua trung điểm X của PQ theo bổ đề hình thang.



Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác PDQ có ba điểm M, X, N thẳng hàng ta có:

$\dfrac{MD}{MQ} \cdot \dfrac{NP}{ND} \cdot \dfrac{XQ}{XP} = 1 \Rightarrow \dfrac{MD}{MQ} \cdot \dfrac{NP}{ND} = 1$. (*)

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ADQ có ba điểm M, H, E thẳng hàng ta có:

$\dfrac{EA}{EQ} \cdot \dfrac{HD}{HA} \cdot \dfrac{MQ}{MD} = 1 \Rightarrow \dfrac{EA}{EQ} = \dfrac{HA}{HD} \cdot \dfrac{MD}{MQ}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ADP có ba điểm F, H, N thẳng hàng ta có:

$\dfrac{FP}{FA} \cdot \dfrac{HA}{HD} \cdot \dfrac{ND}{NP} = 1 \Rightarrow \dfrac{FP}{FA} = \dfrac{HD}{HA} \cdot \dfrac{NP}{ND}$.

Từ đó ta có $\dfrac{EA}{EQ} \cdot \dfrac{FP}{FA} \cdot \dfrac{XQ}{XP} = \dfrac{HA}{HD} \cdot \dfrac{MD}{MQ} \cdot \dfrac{HD}{HA} \cdot \dfrac{NP}{ND} \cdot \dfrac{XQ}{XP} = \dfrac{MD}{MQ} \cdot \dfrac{NP}{ND} \cdot \dfrac{XQ}{XP} = 1$. (do (*))

Từ đó áp dụng định lý Menelaus đảo cho tam giác APQ ta có EF đi qua trung điểm PQ.

Bài tập 5 **(LIM Olympic - THCS Cầu Giấy - Bài 5)**

Giả sử các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ chứa các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(1) Mỗi tập hợp có đúng 30 phần tử.

(2) Với hai tập hợp bất kỳ, có đúng một số thực thuộc cả hai tập đó.

(3) Không số thực nào thuộc tất cả các tập hợp trên.

Chứng minh rằng $n \leq 871$.

Lời giải.

Gọi x là số tập lớn nhất cùng chứa chung một phần tử.

Khi đó ta sẽ chứng minh rằng $x \leq 30$. Thật vậy, giả sử rằng $x \geq 31$, khi đó ta luôn tìm được 31 tập, gọi là $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{31}}$ sao cho có chung duy nhất một phần tử. Ta gọi phần tử đó là a.

Mà theo giả thiết thì a không thể là phần tử của tất cả các tập, tức là ta luôn tìm được một tập A_j sao cho a không là phần tử của A_j.

Vì cứ mỗi 2 tập bất kì chỉ có đúng một phần tử chung nên ta gọi a_t là phần tử chung duy nhất của tập A_j với A_{i_t} (với $t \in \{1, 2, \ldots, 31\}$ và $a_t \neq a$). Mặt khác, vì tập A_j có đúng 30 phần tử nhưng lại có 31 phần tử a_t nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số nguyên dương phân biệt m, n không vượt quá 31 sao cho $a_m = a_n$. Khi đó A_{i_m} và A_{i_n} có chung phần tử a_m khác a, mâu thuẫn.

Vì vậy giả sử sai, ta có $x \leq 30$. Xét tập $A_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{30}\}$. Khi đó, với mỗi $r \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ thì chỉ có tối đa 29 tập cùng chứa phần tử b_r (loại tập A_1).

Do đó ta có được: $n \leq 1 + 30 \cdot 29 = 871$.