



ĐỖ ĐỨC THÁI

BÀI TẬP Toán 7

TẬP HAI

$$P(x) = 3x^5 + x^4 - 2x^2 + 2x - 6$$

Cánh Diều



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI

BÀI TẬP

Toán 7

TẬP HAI

Cánh Diều

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thủy, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội

Điện thoại: 024.37547735

Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:

ĐÀO ANH TIẾN

Thiết kế sách:

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN

Trình bày bìa:

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

Sửa bản in:

LÊ HUY ĐAN – VŨ THỊ MINH THẢO – PHẠM THỊ DIỆU THUY

BÀI TẬP TOÁN 7 - TẬP HAI

Mã số:

ISBN:

In cuốn, khổ 17 x 24cm, tại

Địa chỉ:

Số xác nhận đăng ký xuất bản:

Quyết định xuất bản số:/QĐ-NXBDHSP ngày/...../2022

In xong và nộp lưu chiểu Quý năm 2022.

Chương V

MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

§1 THU THẬP, PHÂN LOẠI VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Trong các dữ liệu thống kê thu thập được, có những dữ liệu thống kê là số (số liệu) nhưng cũng có những dữ liệu thống kê không phải là số.
- Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại dữ liệu, ta cần xem xét tính hợp lí của những dữ liệu thống kê đó, đặc biệt chỉ ra những dữ liệu không hợp lí.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Kết quả thu thập thông tin về điểm thi đua các tháng trong Học kì I của lớp 7A như sau:

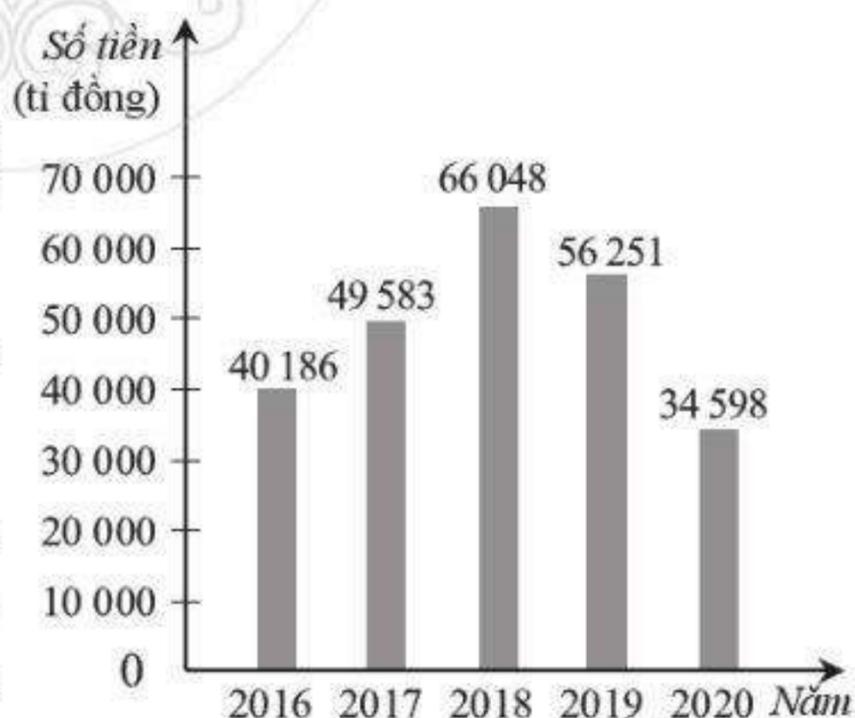
- Các tháng trong Học kì I là: tháng Tám, tháng Chín, tháng Mười, tháng Mười một, tháng Mười hai.
- Số điểm thi đua trong mỗi tháng đó lần lượt là: 40, 80, 86, 90, 72.

Trong hai loại dữ liệu thống kê thu thập được ở trên, dữ liệu thống kê nào là số liệu? Dữ liệu thống kê nào không phải là số liệu?

Giải

- Dãy dữ liệu thứ nhất là tên các tháng trong Học kì I nên không phải là dãy số liệu.
- Dãy dữ liệu thứ hai là số điểm thi đua trong mỗi tháng đó nên là dãy số liệu.

Ví dụ 2 Biểu đồ cột ở Hình 1 biểu diễn ngân sách thu được từ dầu thô (ước đạt) trong tổng thu ngân sách nhà nước của Việt Nam trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019, 2020.



Hình 1

(Nguồn: <https://ckns.mof.gov.vn>)

a) Nêu cách xác định ngân sách thu được từ dầu thô của nước ta trong mỗi năm từ năm 2016 đến 2020.

b) Hoàn thành số liệu ở bảng sau:

Năm	2016	2017	2018	2019	2020
Ngân sách thu được từ dầu thô (tỉ đồng)	?	?	?	?	?

c) Ngân sách thu được từ dầu thô trong năm 2020 ít hơn năm 2019 bao nhiêu tỉ đồng? Tìm hiểu nguyên nhân và nêu một vài lí do giải thích vì sao dẫn đến sự sụt giảm trên.

Giải

a) Nhìn vào cột biểu thị ngân sách thu được từ dầu thô của nước ta trong năm 2016 ở *Hình 1*, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 40 186 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đồng. Vậy ngân sách thu được từ dầu thô của nước ta trong năm 2016 là 40 186 tỉ đồng.

Tương tự như trên, ta xác định được ngân sách thu được từ dầu thô của nước ta trong năm 2017, 2018, 2019, 2020 lần lượt là: 49 583; 66 048; 56 251; 34 598 (tỉ đồng).

b) Ta có bảng số liệu sau:

Năm	2016	2017	2018	2019	2020
Ngân sách thu được từ dầu thô (tỉ đồng)	40 186	49 583	66 048	56 251	34 598

c) Ngân sách thu được từ dầu thô trong năm 2020 ít hơn năm 2019 là:

$$56\,251 - 34\,598 = 21\,653 \text{ (tỉ đồng).}$$

Do dịch Covid-19 bùng phát trên khắp thế giới khiến nhu cầu và giá dầu thô đều giảm nên ngân sách thu được từ dầu thô trong năm 2020 giảm so với năm 2019.

C. BÀI TẬP

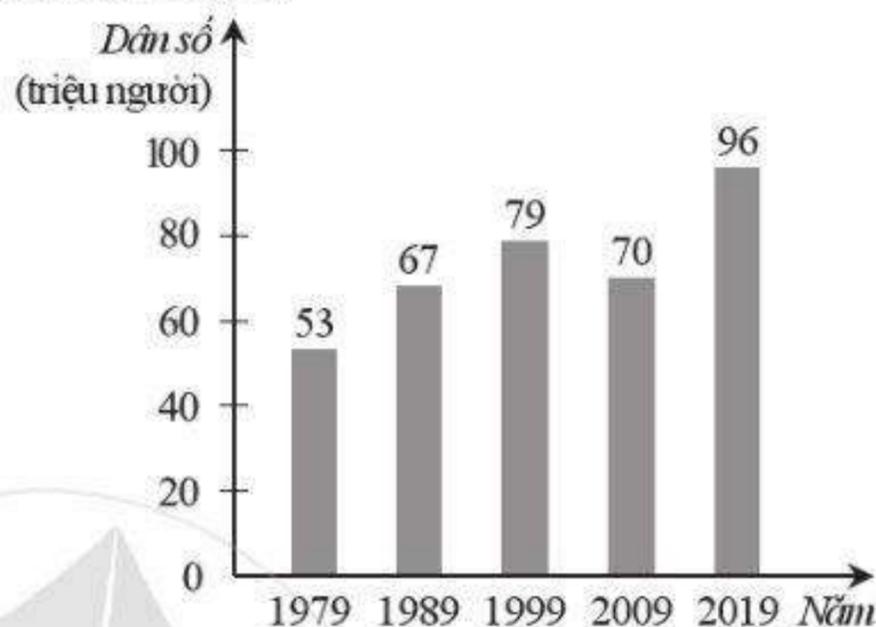
1. Sau khi tìm hiểu thông tin về diện tích sáu vùng kinh tế – xã hội của nước ta năm 2020 từ trang web <https://gso.gov.vn>, bạn Hà thu thập được những dữ liệu thống kê sau:

– Sáu vùng kinh tế – xã hội của nước ta là: Trung du và miền núi phía Bắc, Đồng bằng sông Hồng, Bắc Trung Bộ và Duyên hải miền Trung, Tây Nguyên, Đông Nam Bộ, Đồng bằng sông Cửu Long.

– Diện tích (theo đơn vị ki-lô-mét vuông) của mỗi vùng kinh tế – xã hội đó lần lượt là: 95 222; 21 261; 95 876; 54 508; 23 553; 40 816.

Trong hai loại dữ liệu thống kê thu thập được ở trên, dữ liệu thống kê nào là số liệu? Dữ liệu thống kê nào không phải là số liệu?

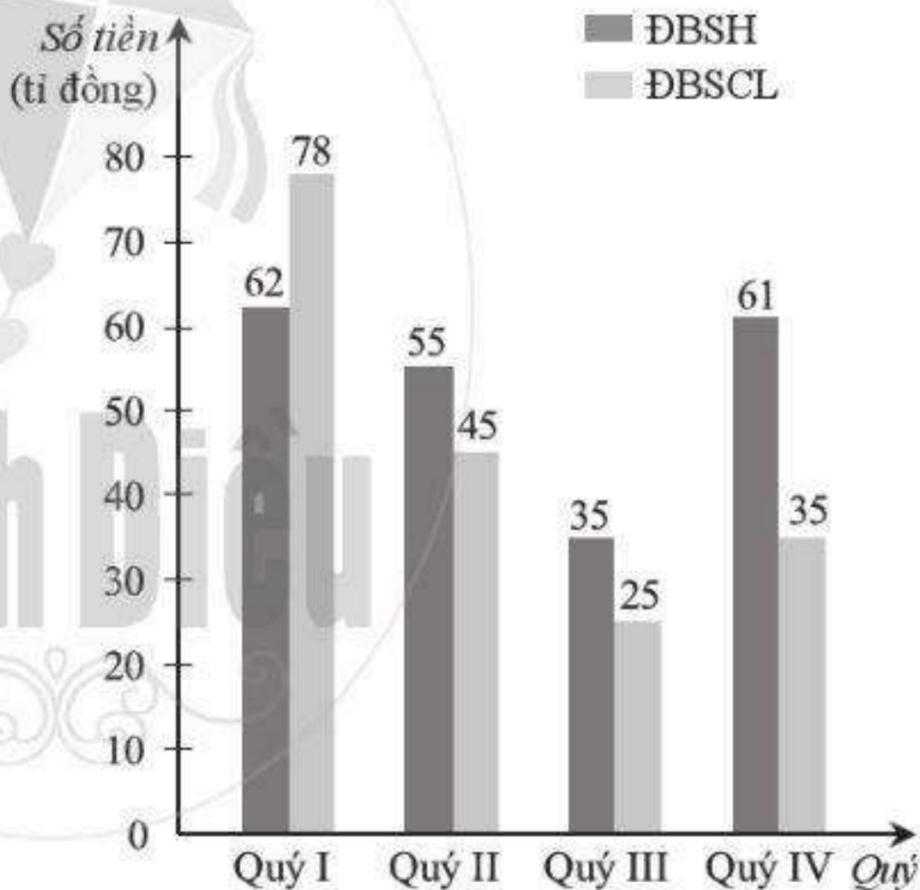
2. Việt Nam là một nước đông dân và dân số của Việt Nam tăng qua các năm. Bạn Vân lập biểu đồ ở Hình 2 biểu diễn dân số Việt Nam ở một số năm trong giai đoạn từ năm 1979 đến năm 2019.



Hình 2

Trong biểu đồ cột ở Hình 2, bạn Vân đã biểu diễn nhầm số liệu dân số Việt Nam của một năm. Theo em, bạn Vân đã biểu diễn nhầm số liệu của năm nào?

3. Biểu đồ ở Hình 3 biểu diễn số tiền đầu tư vào mỗi vùng Đồng bằng sông Hồng (ĐBSH) và Đồng bằng sông Cửu Long (ĐBSCL) của công ty An Bình trong bốn quý năm 2021.



Hình 3

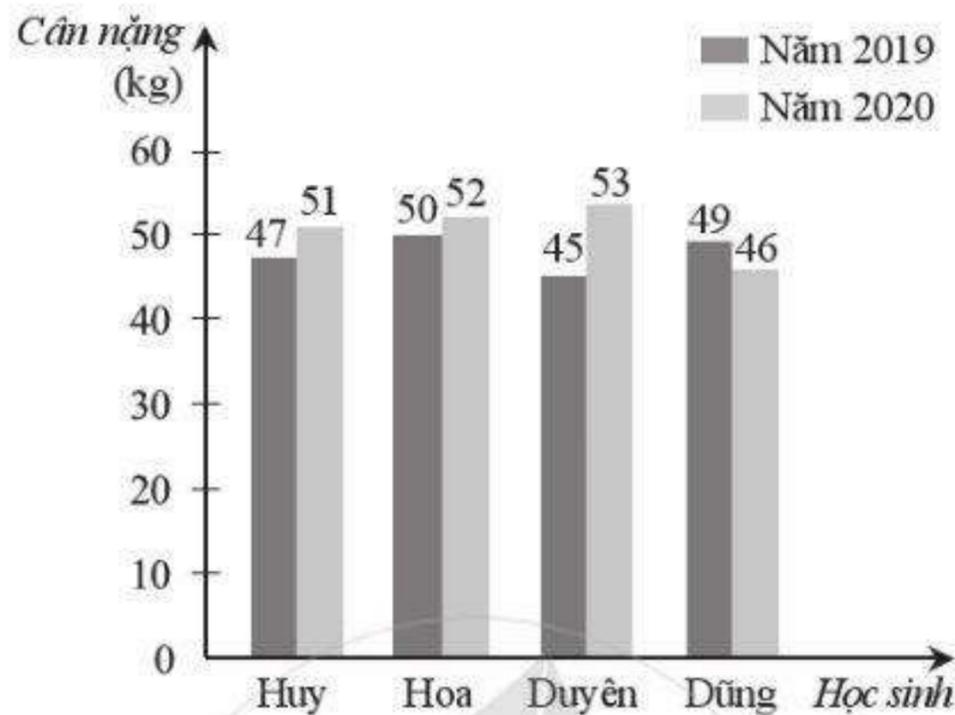
a) Nêu cách xác định số tiền đầu tư vào vùng ĐBSH của công ty An Bình ở mỗi quý năm 2021.

b) Nêu cách xác định số tiền đầu tư vào vùng ĐBSCL của công ty An Bình ở mỗi quý năm 2021.

c) Lập bảng số liệu thống kê số tiền đầu tư vào vùng ĐBSH và vùng ĐBSCL của công ty An Bình trong bốn quý năm 2021 theo mẫu sau:

Quý	Quý I	Quý II	Quý III	Quý IV
Số tiền đầu tư vào vùng ĐBSH (tỉ đồng)	?	?	?	?
Số tiền đầu tư vào vùng ĐBSCL (tỉ đồng)	?	?	?	?

4. Biểu đồ ở *Hình 4* biểu diễn cân nặng của bốn học sinh Huy, Hoa, Duyên, Dũng trong đợt kiểm tra sức khoẻ cuối năm 2019 và 2020.



Hình 4

- a) Hoàn thành số liệu ở bảng sau:

Học sinh	Huy	Hoa	Duyên	Dũng
Cân nặng cuối năm 2019 (kg)	?	?	?	?
Cân nặng cuối năm 2020 (kg)	?	?	?	?
Tỉ số của cân nặng cuối năm 2020 và cân nặng cuối năm 2019	?	?	?	?

- b) Tỉ số của cân nặng cuối năm 2020 và cân nặng cuối năm 2019 của học sinh nào lớn nhất? Nhỏ nhất?

§2 PHÂN TÍCH VÀ XỬ LÝ DỮ LIỆU

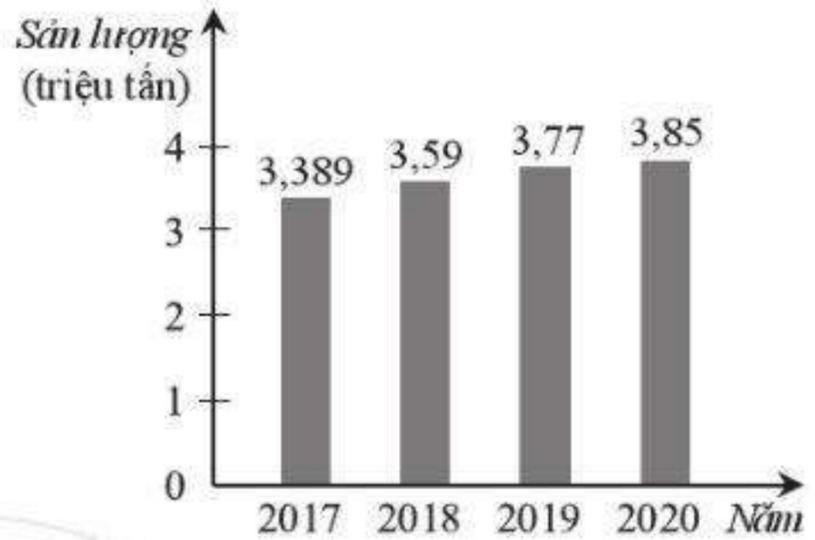
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại, biểu diễn dữ liệu bằng bảng hoặc biểu đồ, ta cần phải phân tích và xử lý dữ liệu đó để tìm ra những thông tin hữu ích và rút ra kết luận.
- Quá trình phân tích và xử lý dữ liệu giúp chúng ta có thể nhận biết được: tính hợp lí của dữ liệu thống kê, tính hợp lí của kết luận thống kê và cũng có thể bác bỏ kết luận đã nêu ra.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Biểu đồ ở Hình 5 biểu diễn sản lượng khai thác thủy sản của nước ta trong các năm 2017, 2018, 2019, 2020.

- Tính tổng sản lượng khai thác thủy sản trong giai đoạn từ năm 2017 đến năm 2020.
- Sản lượng khai thác thủy sản năm 2020 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2019 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- Tỉ số phần trăm của sản lượng khai thác thủy sản năm 2017 và tổng sản lượng khai thác thủy sản trong giai đoạn từ năm 2017 đến năm 2020 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 5

(Nguồn: Tổng cục Thủy sản)

Giải

- Tổng sản lượng khai thác thủy sản trong giai đoạn từ năm 2017 đến năm 2020 là:

$$3,389 + 3,59 + 3,77 + 3,85 = 14,599 \text{ (triệu tấn).}$$

- Tỉ số phần trăm của sản lượng khai thác thủy sản năm 2020 và sản lượng khai thác thủy sản năm 2019 là:

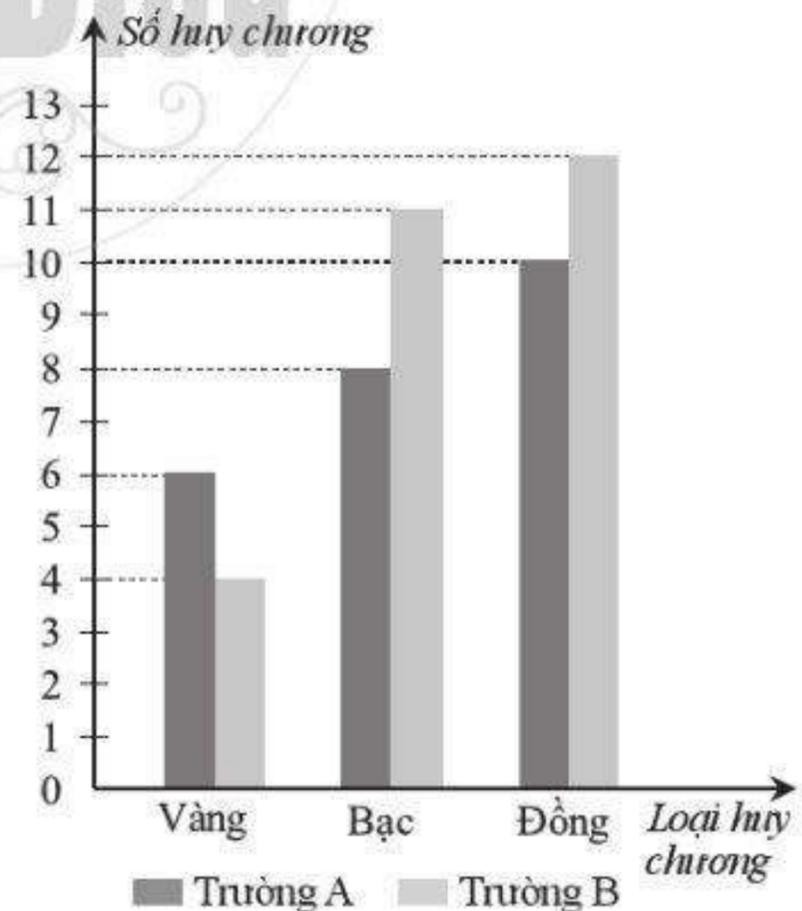
$$\frac{3,85 \cdot 100\%}{3,77} \approx 102,1\%.$$

Vậy sản lượng khai thác thủy sản năm 2020 tăng 2,1% so với năm 2019.

- Tỉ số phần trăm của sản lượng khai thác thủy sản năm 2017 và tổng sản lượng khai thác thủy sản trong giai đoạn từ năm 2017 đến năm 2020 là:

$$\frac{3,389 \cdot 100\%}{14,599} \approx 23,2\%.$$

Ví dụ 2 Hai trường A và B tổ chức ngày hội STEM nhằm tạo ra một sân chơi khoa học, lành mạnh, bổ ích và lí thú cho học sinh. Biểu đồ cột kép ở Hình 6 biểu diễn số huy chương Vàng, Bạc, Đồng của hai trường A và B.



Hình 6

a) Lập bảng số liệu thống kê số huy chương mỗi loại của hai trường A và B theo mẫu sau:

Loại huy chương	Vàng	Bạc	Đồng
Trường A	?	?	?
Trường B	?	?	?

b) Tổng số huy chương Bạc và Đồng của cả hai trường nhiều hơn tổng số huy chương Vàng của cả hai trường bao nhiêu huy chương?

Giải

a) Ta có bảng số liệu sau:

Loại huy chương	Vàng	Bạc	Đồng
Trường A	6	8	10
Trường B	4	11	12

b) Tổng số huy chương Bạc và Đồng của cả hai trường A, B là:

$$8 + 11 + 10 + 12 = 41 \text{ (huy chương).}$$

Tổng số huy chương Vàng của cả hai trường A, B là:

$$6 + 4 = 10 \text{ (huy chương).}$$

Tổng số huy chương Bạc và Đồng của cả hai trường A, B nhiều hơn tổng số huy chương Vàng của cả hai trường A, B là:

$$41 - 10 = 31 \text{ (huy chương).}$$

Ví dụ 3 Số học sinh được đánh giá kết quả học tập theo bốn mức (Tốt, Khá, Đạt, Chưa đạt) trong Học kì I của mỗi lớp thuộc khối lớp 7 được thống kê ở bảng sau:

Lớp \ Mức	Tốt	Khá	Đạt	Chưa đạt
7A	10	20	8	2
7B	9	21	8	1
7C	13	19	9	0
7D	11	20	6	3
7E	16	21	5	0

- a) Khối lớp 7 có tất cả bao nhiêu học sinh?
- b) Trong buổi sơ kết cuối Học kì I, Hiệu trưởng trường thông báo: Số học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá mức Khá chiếm 50% số học sinh khối lớp 7. Thông báo đó của Hiệu trưởng trường có đúng không? Vì sao?

Giải

- a) Số học sinh của lớp 7A là:

$$10 + 20 + 8 + 2 = 40 \text{ (học sinh).}$$

Tương tự như trên, số học sinh của lớp 7B, 7C, 7D, 7E lần lượt là: 39; 41; 40; 42 (học sinh).

Số học sinh của khối lớp 7 là:

$$40 + 39 + 41 + 40 + 42 = 202 \text{ (học sinh).}$$

- b) Số học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá mức Khá là:

$$20 + 21 + 19 + 20 + 21 = 101 \text{ (học sinh).}$$

Tỉ số phần trăm của số học sinh đạt kết quả học tập Học kì I được đánh giá mức Khá và số học sinh khối lớp 7 là:

$$\frac{101 \cdot 100\%}{202} = 50\%.$$

Vậy thông báo đó của Hiệu trưởng trường là đúng.

C. BÀI TẬP

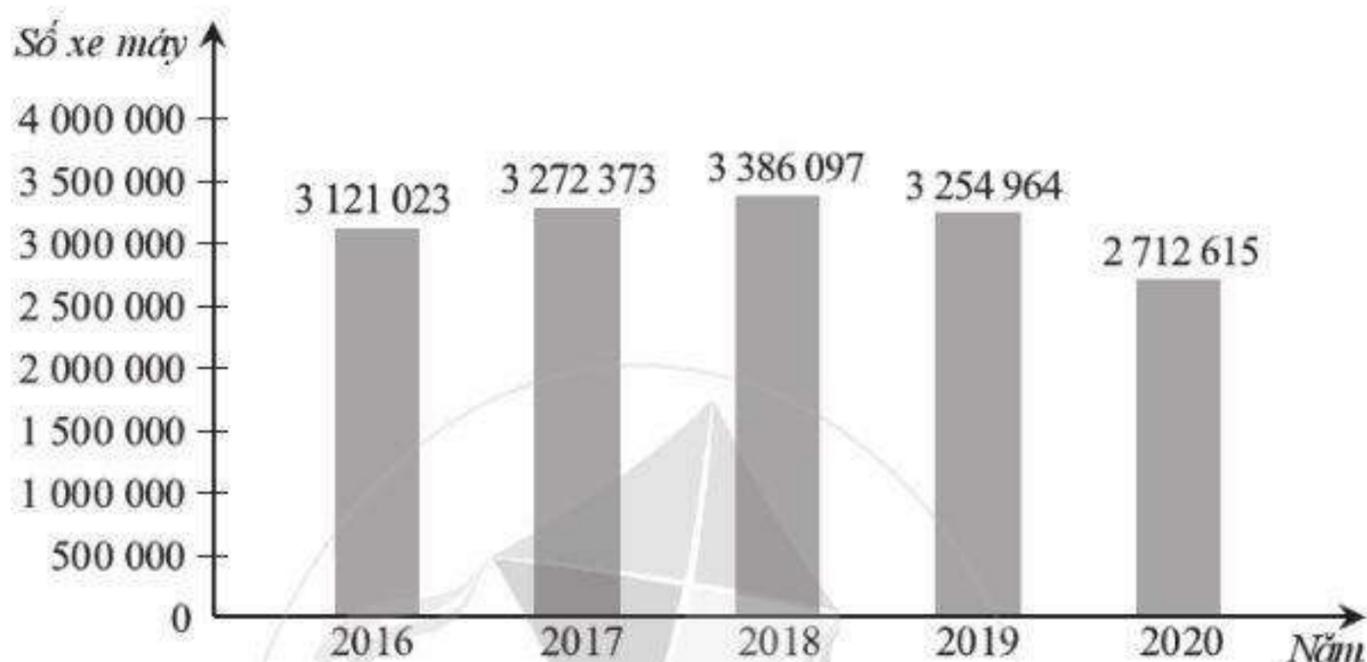
5. Theo báo cáo của Tổng cục Hải quan, số lượng và giá trị nhập khẩu phân bón các loại của nước ta trong các năm 2017, 2018, 2019, 2020 được thống kê ở bảng sau:

Năm	2017	2018	2019	2020
Số lượng nhập khẩu (nghìn tấn)	4 727,3	4 227,5	3 799,2	3 803,4
Giá trị nhập khẩu (triệu đô la Mỹ)	1 253,1	1 202,8	1 047,7	951,5

- a) Tính tổng số lượng nhập khẩu phân bón các loại của nước ta trong giai đoạn từ năm 2017 đến năm 2020.
- b) Số lượng nhập khẩu phân bón các loại năm 2019 giảm bao nhiêu phần trăm so với năm 2018 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

c) Giá trị nhập khẩu phân bón các loại năm 2017 gấp bao nhiêu lần giá trị nhập khẩu phân bón các loại năm 2020 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

6. Biểu đồ ở Hình 7 biểu diễn số xe máy bán ra của 5 thành viên VAMM (Hiệp hội Các nhà sản xuất xe máy Việt Nam) tại thị trường Việt Nam trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019, 2020.



Hình 7

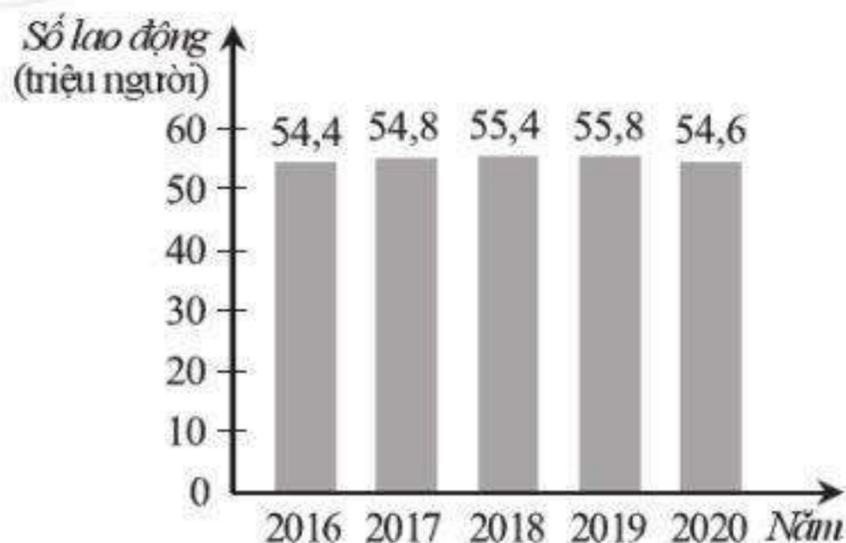
(Nguồn: <https://vammm.vn>)

- a) Lập bảng số liệu thống kê số xe máy bán ra của 5 thành viên VAMM tại thị trường Việt Nam theo mẫu sau:

Năm	2016	2017	2018	2019	2020
Số xe máy	?	?	?	?	?

- b) Tính tổng số xe máy bán ra của 5 thành viên VAMM tại thị trường Việt Nam trong giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020.

- c) Số xe máy bán ra năm 2020 giảm bao nhiêu phần trăm so với năm 2019 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Tìm hiểu nguyên nhân và nêu một vài lí do giải thích vì sao dẫn đến sự sụt giảm trên.



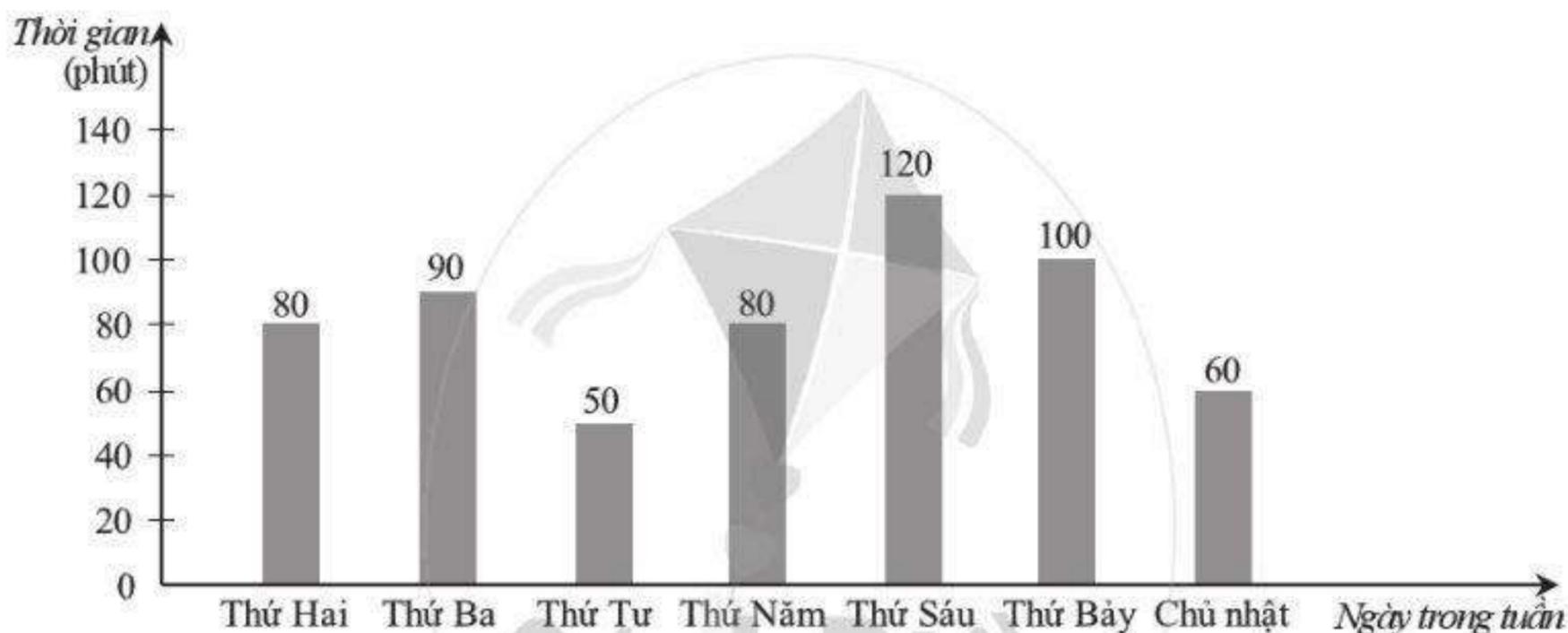
Hình 8

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

7. Biểu đồ ở Hình 8 biểu diễn lực lượng lao động từ 15 tuổi trở lên của Việt Nam giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020.

- a) Lực lượng lao động từ 15 tuổi trở lên năm 2018 nhiều hơn lực lượng lao động từ 15 tuổi trở lên năm 2017 bao nhiêu triệu người?
- b) Lực lượng lao động từ 15 tuổi trở lên năm 2020 giảm bao nhiêu phần trăm so với năm 2019 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- c) Lực lượng lao động trong độ tuổi lao động năm 2020 là bao nhiêu triệu người, biết lực lượng lao động trong độ tuổi lao động năm 2020 bằng khoảng 88,5% lực lượng lao động từ 15 tuổi trở lên năm 2020 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

8. Biểu đồ ở *Hình 9* biểu diễn thời gian tự luyện tập piano ở nhà các ngày trong tuần của bạn Nam.



Hình 9

- a) Tính tổng thời gian luyện tập piano ở nhà trong cả tuần của bạn Nam.
- b) Tính tỉ số phần trăm giữa tổng thời gian luyện tập piano ở nhà trong cả tuần của bạn Nam và tổng thời gian trong một tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Biểu đồ đoạn thẳng có các yếu tố sau:

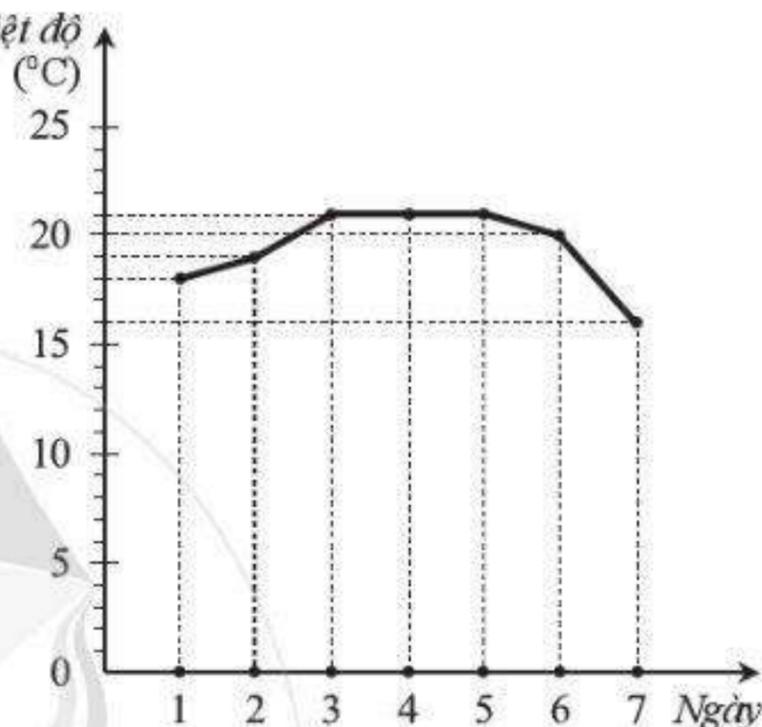
- Trục nằm ngang biểu diễn các đối tượng thống kê;
- Trục thẳng đứng biểu diễn tiêu chí thống kê và trên trục đó đã xác định độ dài đơn vị thống kê;

- Biểu đồ đoạn thẳng là đường gấp khúc nối từng điểm liên tiếp bằng các đoạn thẳng;
- Mỗi điểm đầu mút của các đoạn thẳng trong đường gấp khúc được xác định bởi một đối tượng thống kê và số liệu thống kê theo tiêu chí của đối tượng đó.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 10 biểu diễn nhiệt độ cao nhất tại Hà Nội trong 7 ngày đầu năm 2021.

- Nêu cách xác định nhiệt độ cao nhất của từng ngày tại Hà Nội trong 7 ngày đầu năm 2021.
- Hãy nhận xét về sự thay đổi nhiệt độ tại Hà Nội trong 7 ngày đầu năm 2021.



Hình 10

(Nguồn: <https://accuweather.com>)

Giải

- Để biết nhiệt độ cao nhất của từng ngày tại Hà Nội trong 7 ngày đầu năm 2021, ta làm như sau:

- Từ điểm “1” trên trục nằm ngang, dóng theo chiều thẳng đứng tới điểm đầu mút của đoạn thẳng thuộc đường gấp khúc;
- Đi tiếp chiều ngang về bên trái cho đến khi gặp trục thẳng đứng;
- Xác định chỉ số trên trục số thẳng đứng.

Ta có: Nhiệt độ cao nhất của ngày 1 là 18 (°C).

Tương tự như trên, nhiệt độ cao nhất của ngày 2, ngày 3, ngày 4, ngày 5, ngày 6, ngày 7 lần lượt là: 19 °C; 21 °C; 21 °C; 21 °C; 20 °C; 16 °C.

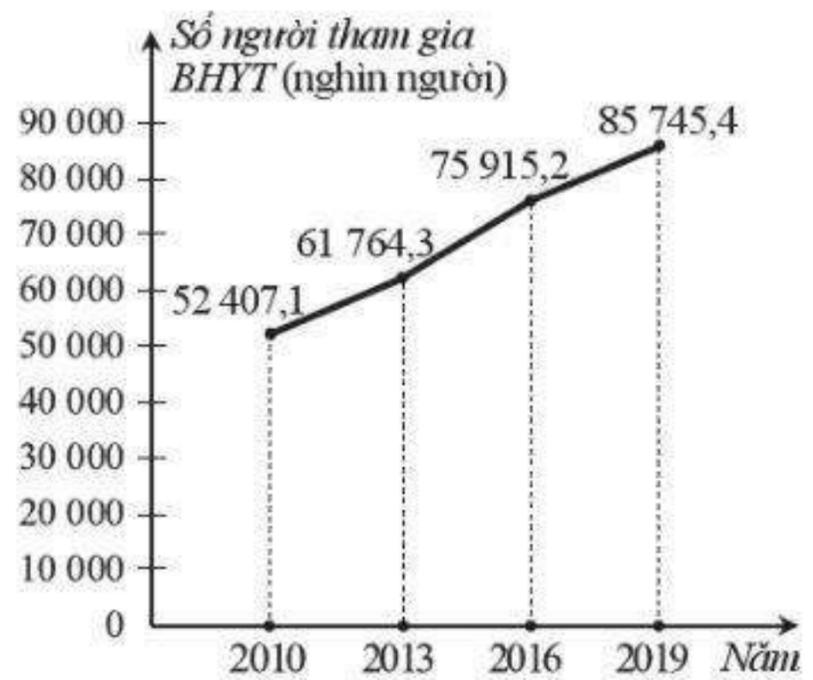
- Ta có nhận xét sau:

- Nhiệt độ tăng trong khoảng thời gian từ ngày 1 đến ngày 3;
- Nhiệt độ ổn định trong khoảng thời gian từ ngày 3 đến ngày 5;
- Nhiệt độ giảm trong khoảng thời gian từ ngày 5 đến ngày 7.

Ví dụ 2 Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 11 biểu diễn số người tham gia bảo hiểm y tế (BHYT) của nước ta ở một số năm trong giai đoạn từ năm 2010 đến năm 2019.

- Lập bảng số liệu thống kê số người tham gia BHYT của nước ta theo mẫu sau:

Năm	2010	2013	2016	2019
Số người tham gia BHYT (nghìn người)	?	?	?	?



Hình 11

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- b) Số người tham gia BHYT năm 2019 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2016 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?
- c) Dựa vào biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 11, nêu nhận xét về số người tham gia BHYT ở nước ta trong các khoảng thời gian trên biểu đồ.

Giải

- a) Ta có bảng số liệu sau:

Năm	2010	2013	2016	2019
Số người tham gia BHYT (nghìn người)	52 407,1	61 764,3	75 915,2	85 745,4

- b) Tỷ số phần trăm giữa số người tham gia BHYT năm 2019 và số người tham gia BHYT năm 2016 là:

$$\frac{85\,745,4 \cdot 100\%}{75\,915,2} \approx 112,95\%.$$

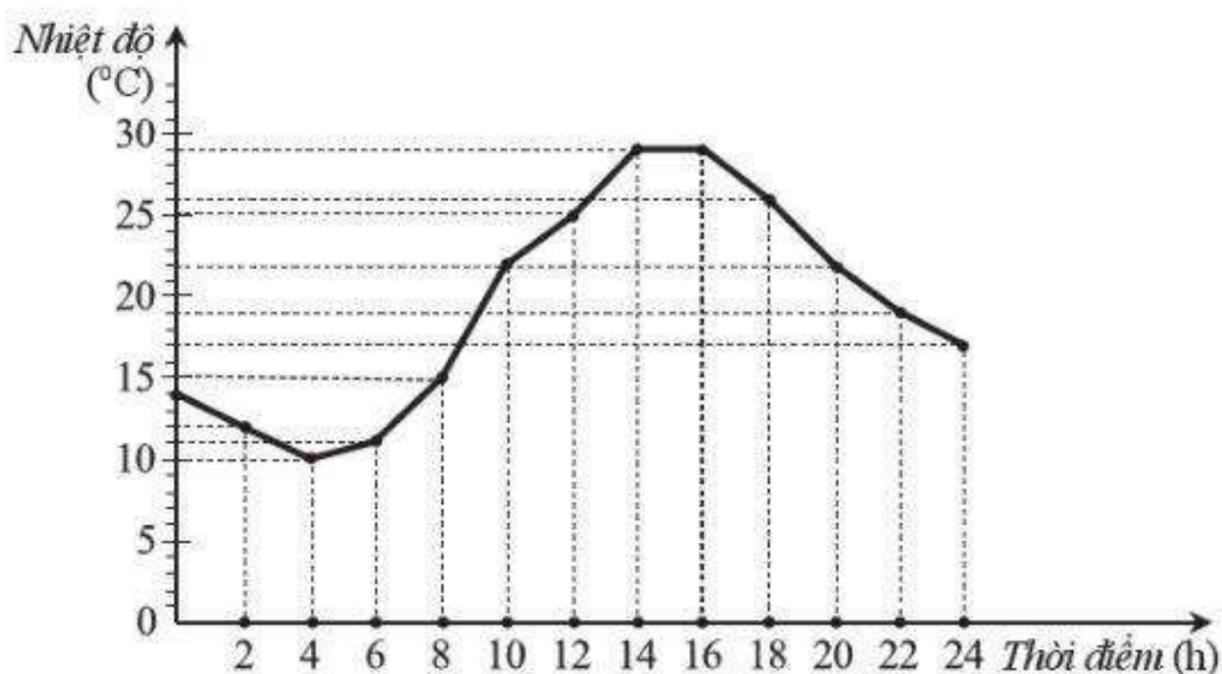
Vậy số người tham gia BHYT năm 2019 tăng khoảng 12,95% so với năm 2016.

- c) Dựa vào biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 11, ta thấy số người tham gia BHYT ở nước ta liên tục tăng trong các khoảng thời gian trên biểu đồ.

C. BÀI TẬP

9. Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 12 biểu diễn nhiệt độ trong một ngày tại một địa điểm thuộc sa mạc Sahara.

- a) Nêu nhiệt độ của địa điểm trên lúc 0 h, 2 h, 4 h, 6 h, 8 h, 10 h, 12 h, 14 h, 16 h, 18 h, 20 h, 22 h, 24 h.



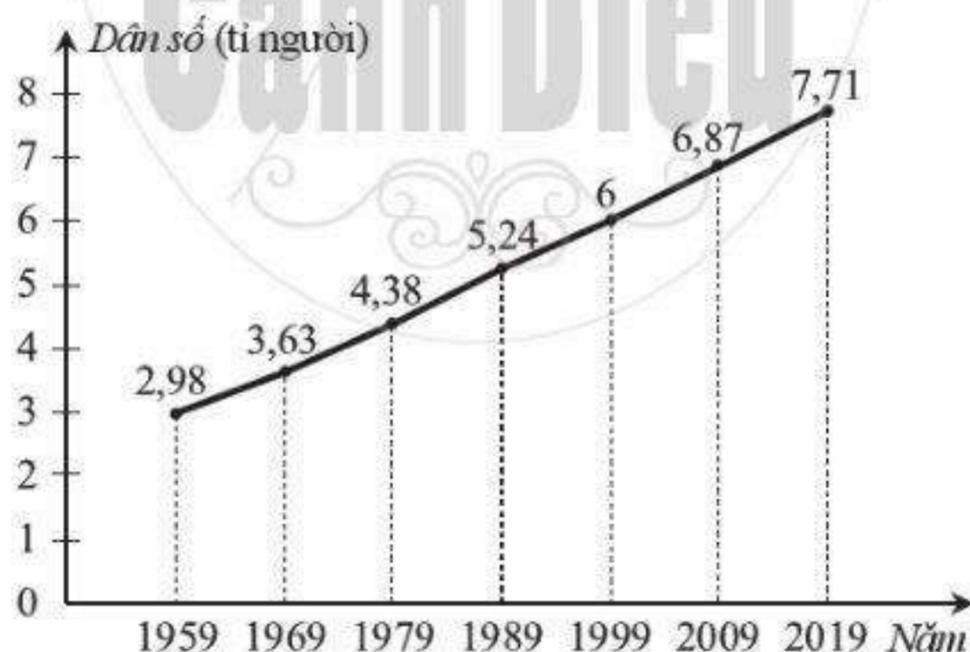
Hình 12

(Nguồn: <https://accuweather.com>)

b) Hãy nhận xét về sự thay đổi nhiệt độ trong các khoảng thời gian: 0 h – 2 h; 2 h – 4 h; 4 h – 6 h; 6 h – 8 h; 8 h – 10 h; 10 h – 12 h; 12 h – 14 h; 14 h – 16 h; 16 h – 18 h; 18 h – 20 h; 20 h – 22 h; 22 h – 24 h.

c) Tính chênh lệch nhiệt độ ngày hôm đó của địa điểm trên, biết chênh lệch nhiệt độ trong ngày bằng hiệu của nhiệt độ cao nhất và nhiệt độ thấp nhất ngày hôm đó.

10. Biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 13 biểu diễn dân số thế giới cuối các năm 1959, 1969, 1979, 1989, 1999, 2009, 2019.



Hình 13

(Nguồn: <https://danso.org>)

a) Lập bảng số liệu thống kê dân số thế giới cuối các năm 1959, 1969, 1979, 1989, 1999, 2009, 2019 theo mẫu sau:

Cuối năm	1959	1969	1979	1989	1999	2009	2019
Dân số (tỉ người)	?	?	?	?	?	?	?

b) Tính số người tăng lên trên thế giới trong mỗi thập kỉ: 1960 – 1969; 1970 – 1979; 1980 – 1989; 1990 – 1999; 2000 – 2009; 2010 – 2019.

c) Trong các thập kỉ trên, dân số thế giới trong thập kỉ nào tăng nhiều nhất? Ít nhất?

d) Dựa vào biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 13*, nêu nhận xét về dân số thế giới sau mỗi thập kỉ.

11. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 14* biểu diễn giá trị nhập khẩu hàng hoá của nước ta theo từng tháng trong năm 2020.



Hình 14

(Nguồn: Tổng cục Hải quan)

a) Lập bảng số liệu thống kê giá trị nhập khẩu hàng hoá của nước ta theo từng tháng trong năm 2020 theo mẫu sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số tiền (tỉ đô la Mỹ)	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

b) Tính tổng giá trị nhập khẩu hàng hoá của nước ta trong năm 2020.

c) Tìm hai tháng mà nước ta có giá trị nhập khẩu hàng hoá nhiều nhất trong năm 2020.

d) Tìm hai tháng mà nước ta có giá trị nhập khẩu hàng hoá ít nhất trong năm 2020.

§4 BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

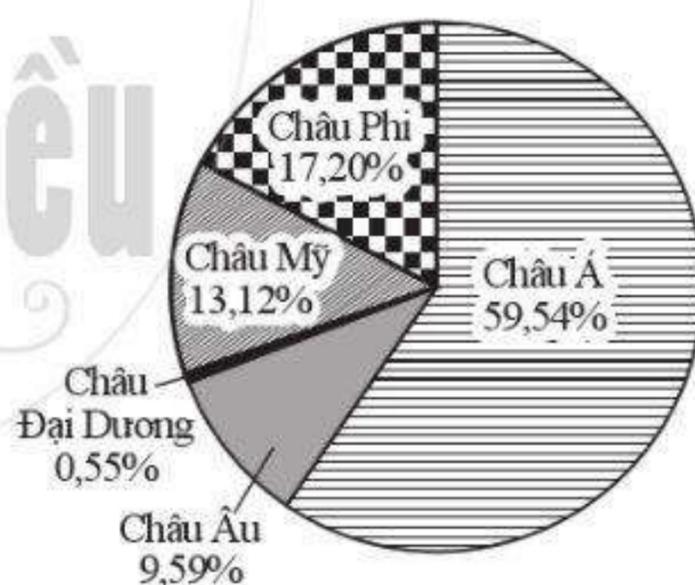
Biểu đồ hình quạt tròn có các yếu tố sau:

- Đối tượng thống kê được biểu diễn bởi các hình quạt tròn.
- Số liệu thống kê theo tiêu chí thống kê của mỗi đối tượng (thống kê) được ghi ở hình quạt tròn tương ứng. Số liệu thống kê được tính theo tỉ số phần trăm.
- Tổng các tỉ số phần trăm ghi ở các hình quạt tròn là 100%, nghĩa là tổng các tỉ số phần trăm của các số liệu thành phần phải bằng 100% (của tổng thể thống kê).

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 15 biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) dân số các châu lục trên thế giới năm 2020 (không bao gồm châu Nam Cực).

- Nêu tỉ số phần trăm của dân số mỗi châu lục so với dân số thế giới năm 2020.
- Năm 2020, dân số châu Á gấp bao nhiêu lần dân số châu Âu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 15

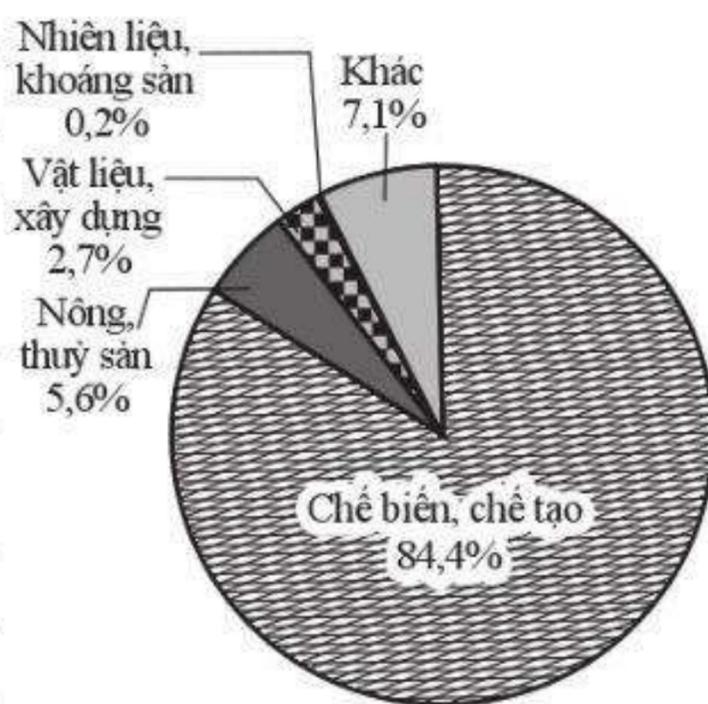
(Nguồn: <https://danso.org>)

Giải

- Tỉ số phần trăm của dân số châu Á, châu Âu, châu Đại Dương, châu Mỹ, châu Phi so với dân số thế giới năm 2020 lần lượt là: 59,54%; 9,59%; 0,55%; 13,12%; 17,20%.
- Do $59,54\% : 9,59\% \approx 6$ nên năm 2020, dân số châu Á gấp khoảng 6 lần dân số châu Âu.

Ví dụ 2 Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 16 biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) kim ngạch xuất khẩu của Việt Nam sang Hàn Quốc năm 2020 theo nhóm hàng hoá.

- Trong năm 2020, kim ngạch xuất khẩu của Việt Nam sang Hàn Quốc của nhóm hàng hoá nào nhiều nhất? Nhóm hàng hoá nào ít nhất?
- Kim ngạch xuất khẩu của Việt Nam sang Hàn Quốc năm 2020 của nhóm Nông, thủy sản là bao nhiêu tỉ đô la Mỹ, biết kim ngạch xuất khẩu của Việt Nam sang Hàn Quốc năm 2020 ước đạt 19,1 tỉ đô la Mỹ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Nêu một số biện pháp mà chính phủ Việt Nam đã đưa ra để tăng giá trị kim ngạch xuất khẩu của nhóm Nông, thủy sản.



Hình 16

(Nguồn: Báo cáo xuất nhập khẩu Việt Nam 2020, NXB Công thương, năm 2021)

Giải

- Trong năm 2020, kim ngạch xuất khẩu của Việt Nam sang Hàn Quốc của nhóm Chế biến, chế tạo là nhiều nhất, kim ngạch xuất khẩu của nhóm Nhiên liệu, khoáng sản là ít nhất.
- Kim ngạch xuất khẩu của Việt Nam sang Hàn Quốc năm 2020 của nhóm Nông, thủy sản là:

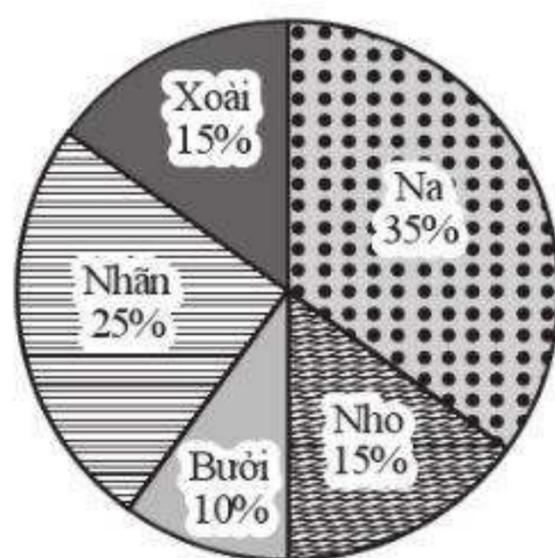
$$\frac{19,1 \cdot 5,6}{100} \approx 1,1 \text{ (tỉ đô la Mỹ).}$$
- Một số biện pháp mà chính phủ Việt Nam đã đưa ra nhằm tăng giá trị kim ngạch xuất khẩu của nhóm Nông, thủy sản như: đa dạng các mặt hàng nông, thủy sản xuất khẩu, tăng cường các mặt hàng có giá trị kim ngạch xuất khẩu cao, phát triển xuất khẩu theo mô hình tăng trưởng bền vững.

C. BÀI TẬP

- Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 17 biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) chọn loại quả yêu thích nhất trong năm loại: na, nho, bưởi, nhãn, xoài, của 400 học sinh khối lớp 7 một trường trung học cơ sở. Mỗi học sinh chỉ được chọn một loại quả khi được hỏi ý kiến.

a) Lập bảng số liệu thống kê tỉ lệ học sinh yêu thích mỗi loại quả theo mẫu sau:

Loại quả	Na	Nho	Bưởi	Nhãn	Xoài
Tỉ lệ học sinh chọn (tính theo tỉ số phần trăm)	?	?	?	?	?



Hình 17

b) Lập bảng số liệu thống kê số học sinh yêu thích mỗi loại quả theo mẫu sau:

Loại quả	Na	Nho	Bưởi	Nhãn	Xoài
Số học sinh chọn	?	?	?	?	?

c) Số học sinh yêu thích nho bằng bao nhiêu phần trăm số học sinh yêu thích nhãn?

13. Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 18 biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) kế hoạch chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Hạnh.

a) Theo kế hoạch của gia đình bác Hạnh, có bao nhiêu phần trăm chi tiêu dành cho việc học hành? Ăn uống? Mua sắm? Đi lại? Tiết kiệm?

b) Theo kế hoạch, số tiền chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Hạnh dành cho ăn uống gấp bao nhiêu lần số tiền dành cho đi lại (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

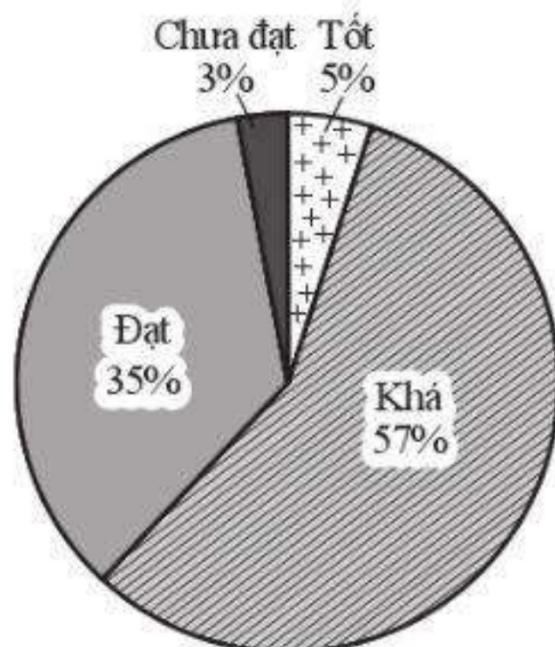
c) Tính số tiền gia đình bác Hạnh tiết kiệm hàng tháng theo kế hoạch, biết tổng thu nhập hàng tháng của gia đình bác Hạnh là 25 triệu đồng.



Hình 18

14. Kết quả học tập Học kì I của học sinh lớp 7A được đánh giá ở bốn mức: Tốt, Khá, Đạt, Chưa đạt. Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 19 biểu diễn kết quả học tập Học kì I (tính theo tỉ số phần trăm) của học sinh lớp 7A theo bốn mức trên.

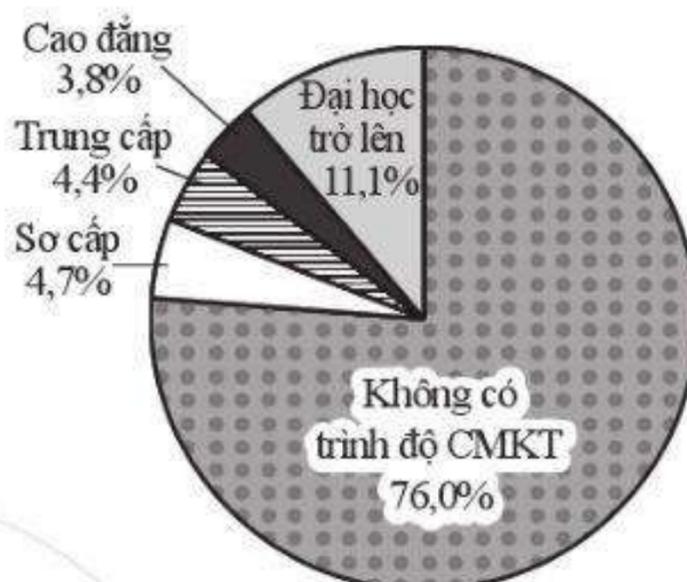
a) Có bao nhiêu phần trăm học sinh lớp 7A có kết quả học tập Học kì I được đánh giá ở mức Tốt? Mức Khá? Mức Đạt? Mức Chưa đạt?



Hình 19

b) Tổng số học sinh có kết quả học tập Học kì I được đánh giá ở mức Đạt và Chưa đạt bằng bao nhiêu phần trăm tổng số học sinh có kết quả học tập được đánh giá ở mức Tốt và Khá (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

15. Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 20 biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) lực lượng lao động (từ 15 tuổi trở lên) phân theo trình độ chuyên môn kỹ thuật (CMKT) của nước ta năm 2020.



Hình 20

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Trong năm 2020, có bao nhiêu phần trăm lực lượng lao động không có trình độ CMKT? Trình độ sơ cấp? Trình độ trung cấp? Trình độ cao đẳng? Trình độ đại học trở lên?

b) Trong năm 2020, lực lượng lao động không có trình độ CMKT gấp bao nhiêu lần lực lượng lao động có trình độ đại học trở lên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

c) Số lao động có trình độ đại học trở lên năm 2020 là bao nhiêu triệu người, biết có 54,6 triệu người từ 15 tuổi trở lên thuộc lực lượng lao động của cả nước trong năm 2020 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

§5 BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Biến cố trong trò chơi gieo xúc xắc

Trong trò chơi gieo xúc xắc, ta quy ước xúc xắc là cân đối và đồng chất. Trong trò chơi này, ta chỉ xét con xúc xắc có sáu mặt, số chấm ở mỗi mặt là một trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

– Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là:

$$A = \{\text{mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}\}.$$

– Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn” là: $B = \{\text{mặt 2 chấm; mặt 4 chấm; mặt 6 chấm}\}.$

– Trong trò chơi trên, sự kiện “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn” còn gọi là biến cố, hay gọi đầy đủ là biến cố ngẫu nhiên.

– Mỗi kết quả: mặt 2 chấm, mặt 4 chấm, mặt 6 chấm, được gọi là một kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

Biến cố trong trò chơi rút thẻ từ trong hộp

Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.

– Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là:

$$C = \{1; 2; 3; \dots; 12\}.$$

– Tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3” là: $D = \{3; 6; 9; 12\}$.

– Trong trò chơi trên, sự kiện “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3” còn gọi là biến cố (hay gọi đầy đủ là biến cố ngẫu nhiên).

– Mỗi kết quả: 3, 6, 9, 12, được gọi là một kết quả thuận lợi cho biến cố trên.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

Xét biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số không chia hết cho 3”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

Giải

Trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, có bốn số không chia hết cho 3 là: 1, 2, 4, 5.

Vậy có bốn kết quả thuận lợi cho biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số không chia hết cho 3” là: mặt 1 chấm, mặt 2 chấm, mặt 4 chấm, mặt 5 chấm (lấy ra từ tập hợp $A = \{\text{mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}\}$).

Ví dụ 2 Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 12; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.

Xét biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số lẻ”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

Giải

Trong các số 1, 2, 3, ..., 12, có sáu số lẻ là: 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Vậy có sáu kết quả thuận lợi cho biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số lẻ” là: 1, 3, 5, 7, 9, 11 (lấy ra từ tập hợp $C = \{1; 2; 3; \dots; 12\}$).

C. BÀI TẬP

16. Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

- Xét biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số không nhỏ hơn 3”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.
- Xét biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia hết cho 4”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.
- Xét biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia 5 dư 1”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

17. Một hộp có 30 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 29, 30; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.

- Viết tập hợp M gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.
- Xét biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra nhỏ hơn 15”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.
- c*) Xét biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số khi chia cho 3 và 4 đều có số dư là 2”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

18. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số lớn hơn 50.

- Viết tập hợp E gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.
- Xét biến cố “Số tự nhiên được viết ra là số chia hết cho 5”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.
- Xét biến cố “Số tự nhiên được viết ra là lập phương của một số tự nhiên”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

19. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có ba chữ số nhỏ hơn 200.

- Viết tập hợp P gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra.
- Xét biến cố “Số tự nhiên được viết ra là số chia hết cho 10”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.
- Xét biến cố “Số tự nhiên được viết ra có chữ số hàng chục là số chẵn và nhỏ hơn 4”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

20. Một nhóm thí sinh gồm 6 học sinh lớp 7 là: An, Bình, Chi, Dương, Đạt, Khánh và 4 học sinh lớp 8 là: Hà, Ngọc, Phan, Quyên, tham gia thi hùng biện tiếng Anh. Chọn ngẫu nhiên một thí sinh trong nhóm học sinh thi hùng biện tiếng Anh đó.

- a) Viết tập hợp G gồm các kết quả có thể xảy ra đối với thí sinh được chọn ra.
- b) Xét biến cố “Thí sinh được chọn ra là học sinh lớp 7”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.
- c) Xét biến cố “Thí sinh được chọn ra là học sinh lớp 8”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

21. Một nhóm hành khách quốc tế gồm 9 người đến từ các sân bay của Việt Nam: Điện Biên Phủ (Điện Biên), Nội Bài (Hà Nội), Cát Bi (Hải Phòng), Vinh (Nghệ An), Đồng Hới (Quảng Bình), Cam Ranh (Khánh Hòa), Tân Sơn Nhất (Thành phố Hồ Chí Minh), Trà Nóc (Cần Thơ), Rạch Giá (Kiên Giang), mỗi hành khách đến từ sân bay khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một hành khách trong nhóm hành khách quốc tế đó.

- a) Viết tập hợp Q gồm các kết quả có thể xảy ra đối với hành khách được chọn đến từ các sân bay của Việt Nam trên.
- b) Xét biến cố “Hành khách được chọn ra đến từ sân bay ở miền Bắc”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.
- c) Xét biến cố “Hành khách được chọn ra đến từ sân bay ở miền Trung”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.
- d) Xét biến cố “Hành khách được chọn ra đến từ sân bay ở miền Nam”. Nêu những kết quả thuận lợi cho biến cố đó.

SỐ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Xác suất của biến cố trong trò chơi gieo xúc xắc

Xác suất của một biến cố trong trò chơi gieo xúc xắc bằng tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố và số các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

Xác suất của biến cố trong trò chơi rút thẻ từ trong hộp

Xác suất của một biến cố trong trò chơi rút thẻ từ trong hộp bằng tỉ số của số các kết quả thuận lợi cho biến cố và số các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần.

- Tìm số phần tử của tập hợp A gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.
- Xét biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia hết cho 3”. Tính xác suất của biến cố đó.

Giải

- Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là:

$$A = \{\text{mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; mặt 3 chấm; mặt 4 chấm; mặt 5 chấm; mặt 6 chấm}\}.$$

Số phần tử của tập hợp A là 6.

- Có hai kết quả thuận lợi cho biến cố “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia hết cho 3” là: mặt 3 chấm, mặt 6 chấm.

Vì thế, xác suất của biến cố đó là $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2 Một hộp có 16 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 15, 16; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp.

- Tìm số phần tử của tập hợp B gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.
- Xét biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5”. Tính xác suất của biến cố đó.

Giải

- Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là:

$$B = \{1; 2; 3; \dots; 15; 16\}.$$

Số phần tử của tập hợp B là 16.

- Có ba kết quả thuận lợi cho biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5” là: 5, 10, 15.

Vì thế, xác suất của biến cố đó là $\frac{3}{16}$.

C. BÀI TẬP

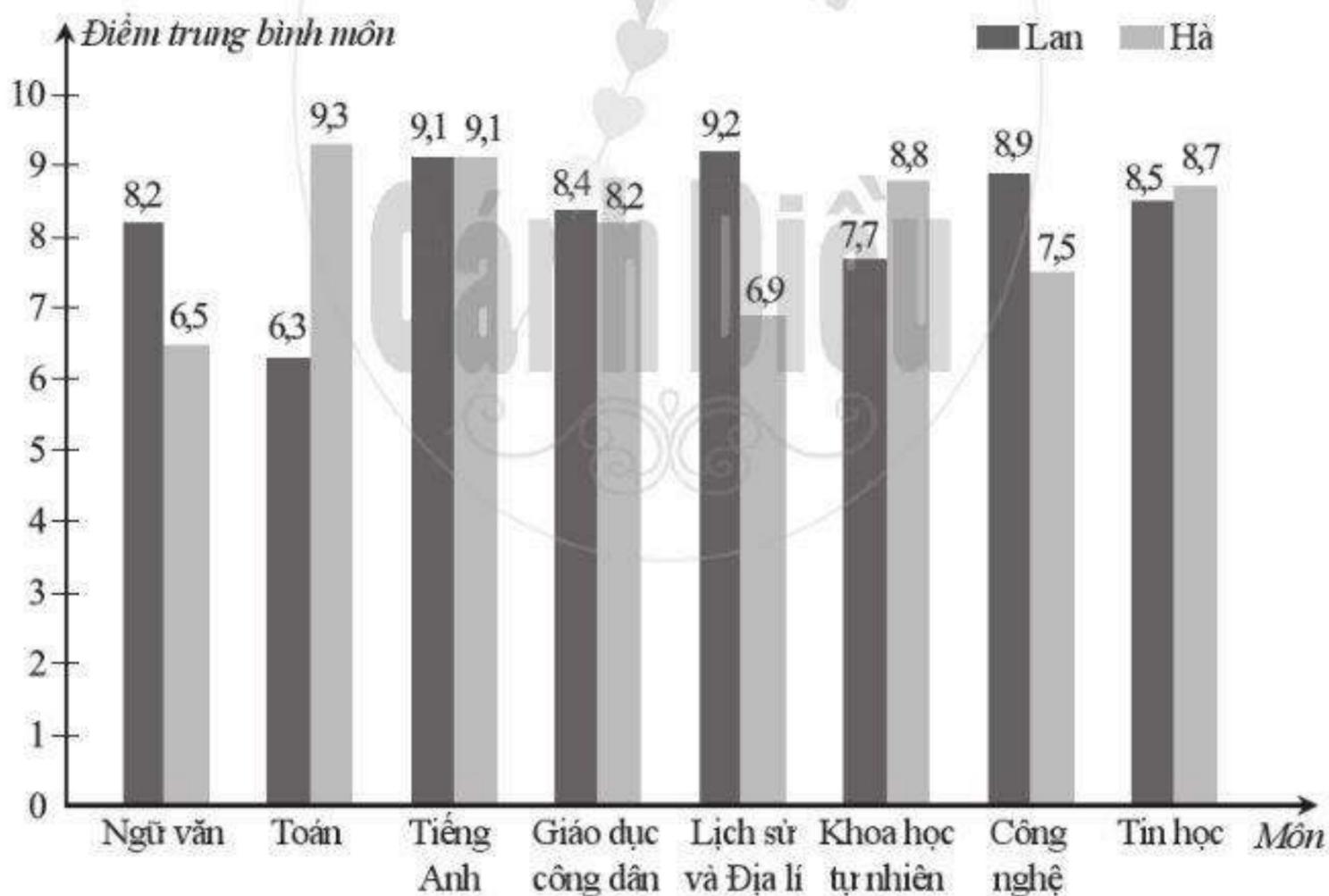
22. Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:
- “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ và chia hết cho 3”;
 - “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chia 5 dư 2”
23. Một hộp có 60 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 59, 60; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tìm số phần tử của tập hợp C gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra. Sau đó, hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:
- “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số lớn hơn 25”;
 - “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 7”;
 - “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho cả 3 và 5”;
 - “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chữ số hàng chục gấp hai lần chữ số hàng đơn vị”.
24. Danh sách đội dự thi trực tuyến về “An toàn giao thông” của học sinh lớp 7A được đánh số thứ tự từ 1 đến 25, trong đó bạn Minh có số thứ tự là 15. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong đội đó. Tìm số phần tử của tập hợp D gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số thứ tự của học sinh được chọn ra. Sau đó, hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:
- “Số thứ tự của học sinh được chọn ra là số thứ tự của bạn Minh”;
 - “Số thứ tự của học sinh được chọn ra nhỏ hơn số thứ tự của bạn Minh”.
25. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số lớn hơn 40. Tìm số phần tử của tập hợp M gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra. Sau đó, hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:
- “Số tự nhiên được viết ra là bội của 9”;
 - “Số tự nhiên được viết ra là ước chung của 200 và 300”;
 - “Số tự nhiên được viết ra có tổng các chữ số hàng chục và hàng đơn vị bằng 9”;
 - “Số tự nhiên được viết ra là tổng của hai số tự nhiên liên tiếp”.
26. Một đội tình nguyện tham gia chống dịch Covid-19 gồm 26 thành viên đến từ các tỉnh: Điện Biên, Hà Giang, Sơn La, Lai Châu, Hà Nội, Thái Bình, Vĩnh Phúc, Hưng Yên, Nam Định, Hải Dương, Hải Phòng, Ninh Bình, Gia Lai, Kon Tum,

Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng, Cần Thơ, Long An, Bến Tre, Trà Vinh, Hậu Giang, Kiên Giang, Bạc Liêu, Cà Mau, Đồng Tháp; mỗi tỉnh chỉ có đúng một thành viên trong đội. Chọn ngẫu nhiên một thành viên của đội tình nguyện đó. Tìm số phần tử của tập hợp G gồm các kết quả có thể xảy ra đối với thành viên được chọn ra. Sau đó, hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- “Thành viên được chọn ra đến từ vùng Trung du và miền núi phía Bắc”;
- “Thành viên được chọn ra đến từ vùng Đồng bằng sông Hồng”;
- “Thành viên được chọn ra đến từ vùng Tây Nguyên”;
- “Thành viên được chọn ra đến từ vùng Đồng bằng sông Cửu Long”.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

27. Biểu đồ cột kép ở Hình 21 biểu diễn kết quả điểm trung bình Học kì II của các môn: Ngữ văn, Toán, Tiếng Anh, Giáo dục công dân, Lịch sử và Địa lí, Khoa học tự nhiên, Công nghệ, Tin học, của hai học sinh Lan và Hà ở một trường trung học cơ sở.

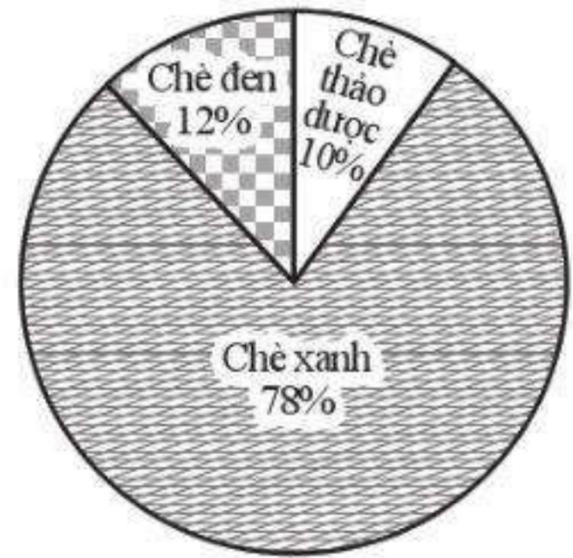


Hình 21

Chênh lệch tổng số điểm trung bình Học kì II các môn trên của hai học sinh Lan và Hà là:

- 1,5 điểm.
- 1,1 điểm.
- 0,8 điểm.
- 1,3 điểm.

28. Trong năm 2020, công ty chè Phú Minh thu được 25 tỉ đồng từ việc xuất khẩu chè. Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 22 biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) các loại chè xuất khẩu trong năm 2020 của công ty Phú Minh. Bảng nào sau đây là bảng số liệu thống kê số tiền công ty chè Phú Minh thu được ở mỗi loại chè năm 2020?



Hình 22

- A.
- | Loại chè | Chè thảo dược | Chè xanh | Chè đen |
|-------------------|---------------|----------|---------|
| Số tiền (tỉ đồng) | 2,5 | 19,1 | 3,2 |
- B.
- | Loại chè | Chè thảo dược | Chè xanh | Chè đen |
|-------------------|---------------|----------|---------|
| Số tiền (tỉ đồng) | 2,5 | 19,5 | 3 |
- C.
- | Loại chè | Chè thảo dược | Chè xanh | Chè đen |
|-------------------|---------------|----------|---------|
| Số tiền (tỉ đồng) | 2,2 | 19,2 | 3 |
- D.
- | Loại chè | Chè thảo dược | Chè xanh | Chè đen |
|-------------------|---------------|----------|---------|
| Số tiền (tỉ đồng) | 2,4 | 19 | 3,6 |

29. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số nhỏ hơn 70. Xét biến cố “Số tự nhiên được viết ra là số chia hết cho cả 2 và 9”. Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố đó?

- A. 3. B. 2. C. 23. D. 22.

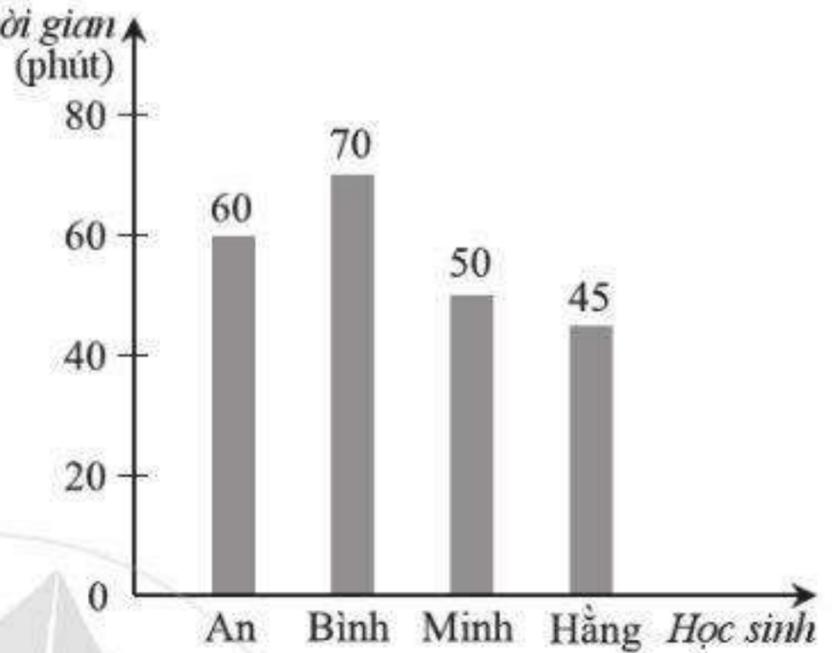
30. Một hộp có 50 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 150, 151, 152, ..., 198, 199; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Xác suất của biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có tổng ba chữ số bằng 12” là:

- A. $\frac{2}{25}$. B. $\frac{7}{50}$. C. $\frac{4}{25}$. D. $\frac{1}{10}$.

31. Bốn học sinh An, Bình, Minh, Hằng đã sắp xếp thời gian luyện tập cho giải Bóng rổ năng khiếu. Biểu đồ ở *Hình 23* biểu diễn thời gian luyện tập trong ngày của bốn bạn đó.

a) Lập bảng số liệu thống kê thời gian luyện tập của bốn học sinh trên theo mẫu sau:

Học sinh	An	Bình	Minh	Hằng
Thời gian (phút)	?	?	?	?



Hình 23

b) Tính tỉ số giữa thời gian luyện tập của bạn Bình với tổng thời gian luyện tập của ba bạn An, Minh, Hằng.

c) Thời gian luyện tập của bạn Hằng bằng bao nhiêu phần trăm thời gian luyện tập của bạn An?

32. Biểu đồ cột kép ở *Hình 24* biểu diễn kim ngạch xuất nhập khẩu của Việt Nam với Indonesia trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019, 2020.



Hình 24

(Nguồn: Báo cáo xuất nhập khẩu Việt Nam 2020, NXB Công thương, năm 2021)

a) Lập bảng số liệu thống kê kim ngạch xuất nhập khẩu của Việt Nam với Indonesia theo mẫu sau:

Năm	2016	2017	2018	2019	2020
Kim ngạch nhập khẩu (triệu đô la Mỹ)	?	?	?	?	?
Kim ngạch xuất khẩu (triệu đô la Mỹ)	?	?	?	?	?

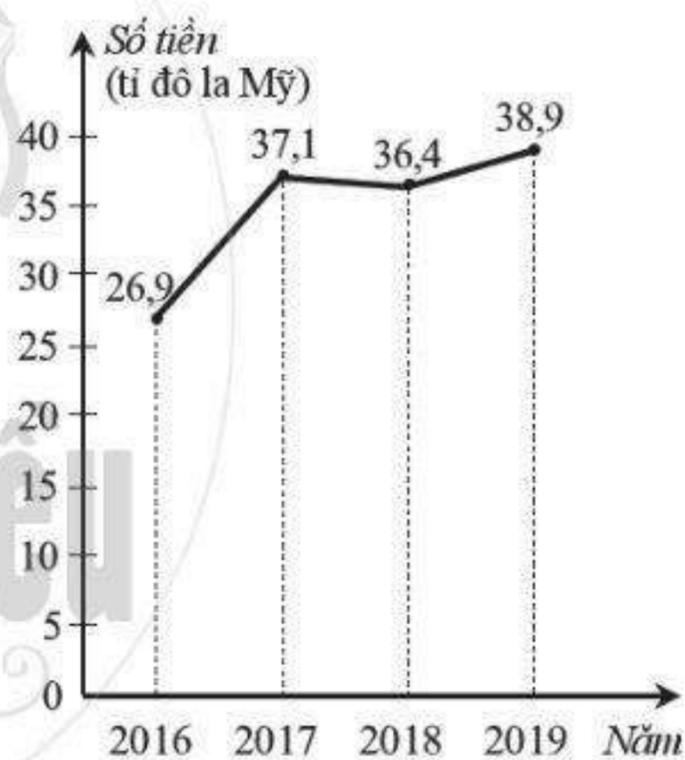
b) Trong năm 2020, kim ngạch nhập khẩu của Việt Nam từ Indonesia gấp bao nhiêu lần kim ngạch xuất khẩu của Việt Nam sang Indonesia (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

c) Tổng kim ngạch xuất khẩu của Việt Nam sang Indonesia trong giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020 bằng bao nhiêu phần trăm tổng kim ngạch nhập khẩu của Việt Nam từ Indonesia trong giai đoạn từ năm 2016 đến năm 2020 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

33. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 25* biểu diễn số vốn đầu tư nước ngoài vào Việt Nam trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019.

a) Số vốn đầu tư nước ngoài vào Việt Nam năm 2018 giảm bao nhiêu phần trăm so với năm 2017 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

b) Số vốn đầu tư nước ngoài vào Việt Nam năm 2019 tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2016 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 25
(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

34. Gieo ngẫu nhiên xúc xắc một lần. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là ước số của 5”;

b) “Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn không chia hết cho 4”.

35. Một hộp có 50 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 49, 50; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số lớn hơn 25”;

- b) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chứa chữ số 3”;
- c) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số khi chia cho 11 dư 2 và chia cho 5 dư 3”.

36. Một hộp có 10 quả bóng được đánh số từ 1 đến 10, đồng thời các quả bóng từ 1 đến 6 được sơn màu vàng và các quả bóng còn lại được sơn màu xanh; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a) “Quả bóng được chọn ra màu vàng”;
- b) “Quả bóng được chọn ra màu xanh”;
- c) “Quả bóng được chọn ra ghi số chẵn”;
- d) “Quả bóng được chọn ra màu vàng và ghi số chẵn”.

37. Một câu lạc bộ ngoại ngữ có 60 học sinh trong đó có 40 học sinh học tiếng Anh, 30 học sinh học tiếng Pháp, 20 học sinh học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong câu lạc bộ. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) “Học sinh được chọn học tiếng Anh”;
- b) “Học sinh được chọn học tiếng Pháp”;
- c) “Học sinh được chọn học cả tiếng Anh và tiếng Pháp”.

Cánh Diều

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

- Học sinh tự làm.
- Ta thấy $70 < 79$ mà dân số Việt Nam tăng qua các năm nên bạn Vân đã biểu diễn nhầm số liệu dân số Việt Nam năm 2009.
- a) Nhìn vào cột (màu đậm) của biểu đồ cột kép ở *Hình 3* biểu thị số tiền đầu tư vào vùng ĐBSH của công ty An Bình ở Quý I, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 62 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đồng. Vậy số tiền đầu tư vào vùng ĐBSH của công ty An Bình ở Quý I là 62 tỉ đồng.

Tương tự như trên, ta xác định được số tiền đầu tư vào vùng ĐBSH của công ty An Bình ở Quý II, Quý III, Quý IV lần lượt là: 55; 35; 61 (tỉ đồng).

b) Nhìn vào cột (màu nhạt) của biểu đồ cột kép ở *Hình 3* biểu thị số tiền đầu tư vào vùng ĐBSCL của công ty An Bình ở Quý I, ta thấy trên đỉnh cột đó ghi số 78 và đơn vị tính ghi trên trục thẳng đứng là tỉ đồng. Vậy số tiền đầu tư vào vùng ĐBSCL của công ty An Bình ở Quý I là 78 tỉ đồng.

Tương tự như trên, ta xác định được số tiền đầu tư vào vùng ĐBSCL của công ty An Bình ở Quý II, Quý III, Quý IV lần lượt là: 45; 25; 35 (tỉ đồng).

c) Ta có bảng số liệu sau:

Quý	Quý I	Quý II	Quý III	Quý IV
Số tiền đầu tư vào vùng ĐBSH (tỉ đồng)	62	55	35	61
Số tiền đầu tư vào vùng ĐBSCL (tỉ đồng)	78	45	25	35

4. a) Ta có bảng số liệu sau:

Học sinh	Huy	Hoa	Duyên	Dũng
Cân nặng cuối năm 2019 (kg)	47	50	45	49
Cân nặng cuối năm 2020 (kg)	51	52	53	46
Tỉ số của cân nặng cuối năm 2020 và cân nặng cuối năm 2019	$\frac{51}{47}$	$\frac{26}{25}$	$\frac{53}{45}$	$\frac{46}{49}$

b) Tỷ số của cân nặng cuối năm 2020 và cân nặng cuối năm 2019 của bạn Duyên là lớn nhất, của bạn Dũng là nhỏ nhất.

5. a) 16 557,4 nghìn tấn. b) 10,1%. c) 1,3 lần.

6. Học sinh tự làm.

7. a) 0,6 triệu người. b) 2,2%. c) 48,3 triệu người.

8. a) 580 phút. b) 6%.

9. a) Nhiệt độ tại địa điểm trên lúc 0 h, 2 h, 4 h, 6 h, 8 h, 10 h, 12 h, 14 h, 16 h, 18 h, 20 h, 22 h, 24 h lần lượt là: 14 °C; 12 °C; 10 °C; 11 °C; 15 °C; 22 °C; 25 °C; 29 °C; 29 °C; 26 °C; 22 °C; 19 °C; 17 °C.

b) Ta có nhận xét sau:

– Nhiệt độ tăng trong các khoảng thời gian: 4 h – 6 h; 6 h – 8 h; 8 h – 10 h; 10 h – 12 h; 12 h – 14 h;

– Nhiệt độ ổn định trong khoảng thời gian: 14 h – 16 h;

– Nhiệt độ giảm trong các khoảng thời gian: 0 h – 2 h; 2 h – 4 h; 16 h – 18 h; 18 h – 20 h; 20 h – 22 h; 22 h – 24 h.

c) Chênh lệch nhiệt độ ngày hôm đó của địa điểm trên là:

$$29 - 10 = 19 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

10. a) Ta có bảng số liệu sau:

Cuối năm	1959	1969	1979	1989	1999	2009	2019
Dân số (tỉ người)	2,98	3,63	4,38	5,24	6	6,87	7,71

b) Số người tăng lên trên thế giới trong thập kỉ 1960 – 1969 là:

$$3,63 - 2,98 = 0,65 \text{ (tỉ người)}.$$

Tương tự như trên, số người tăng lên trên thế giới trong mỗi thập kỉ 1970 – 1979; 1980 – 1989; 1990 – 1999; 2000 – 2009; 2010 – 2019 lần lượt là: 0,75; 0,86; 0,76; 0,87; 0,84 (tỉ người).

c) Trong các thập kỉ trên, dân số thế giới tăng nhiều nhất trong thập kỉ 2000 – 2009 và tăng ít nhất trong thập kỉ 1960 – 1969.

d) Dựa vào biểu đồ đoạn thẳng ở Hình 13, ta thấy dân số thế giới sau mỗi thập kỉ đều tăng.

11. Học sinh tự làm.

12. a) Ta có bảng số liệu sau:

Loại quả	Na	Nho	Bưởi	Nhãn	Xoài
Tỉ lệ học sinh chọn (tính theo tỉ số phần trăm)	35%	15%	10%	25%	15%

b) Số học sinh chọn na là:

$$\frac{400 \cdot 35}{100} = 140 \text{ (học sinh).}$$

Tương tự như trên, số học sinh chọn nho, bưởi, nhãn, xoài lần lượt là: 60; 40; 100; 60 (học sinh).

Ta có bảng số liệu sau:

Loại quả	Na	Nho	Bưởi	Nhãn	Xoài
Số học sinh chọn	140	60	40	100	60

c) Tỉ số phần trăm của số học sinh yêu thích nho và số học sinh yêu thích nhãn là:

$$\frac{60 \cdot 100\%}{100} = 60\%.$$

13. a) Theo kế hoạch của gia đình bác Hạnh, tỉ số phần trăm chi tiêu dành cho học hành, ăn uống, mua sắm, đi lại, tiết kiệm lần lượt là: 25%, 32%, 17%, 18%, 8%.

b) 1,8 lần.

c) 2 triệu đồng.

14. a) Tỉ số phần trăm học sinh lớp 7A có kết quả học tập Học kì I được đánh giá ở mức Tốt, mức Khá, mức Đạt, mức Chưa đạt lần lượt là: 5%, 57%, 35%, 3%.

b) 61,3%.

15. a) Trong năm 2020, tỉ số phần trăm lực lượng lao động không có trình độ CMKT, trình độ sơ cấp, trình độ trung cấp, trình độ cao đẳng, trình độ đại học trở lên lần lượt là: 76,0%; 4,7%; 4,4%; 3,8%; 11,1%.

b) 7 lần.

c) 6,06 triệu người.

16. a) Mặt 3 chấm, mặt 4 chấm, mặt 5 chấm, mặt 6 chấm.

b) Mặt 4 chấm.

c) Mặt 1 chấm, mặt 6 chấm.

17. a) $M = \{1; 2; 3; \dots; 29; 30\}$.

b) 1, 2, 3, ..., 13, 14.

c*) *Nhận xét:* Nếu a chia cho 3 và 4 đều có số dư là 2 thì $a - 2$ chia hết cho cả 3 và 4 hay $a - 2$ chia hết cho 12.

Trong các số 1, 2, 3, ..., 29, 30 có ba số khi chia cho 3 và 4 đều có số dư là 2 là: 2, 14, 26.

Vậy có ba kết quả thuận lợi cho biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số khi chia cho 3 và 4 đều có số dư là 2” là: 2, 14, 26 (lấy ra từ tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; 29; 30\}$).

18. a) $E = \{51; 52; 53; \dots; 98; 99\}$.

b) 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95.

c) 64.

19. a) $P = \{100; 101; 102; \dots; 198; 199\}$.

b) 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190.

c) 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129.

20. a) $G = \{\text{An; Bình; Chi; Dương; Đạt; Khánh; Hà; Ngọc; Phan; Quyên}\}$.

b) An, Bình, Chi, Dương, Đạt, Khánh.

c) Hà, Ngọc, Phan, Quyên.

21. a) $Q = \{\text{Điện Biên Phủ; Nội Bài; Cát Bi; Vinh; Đồng Hới; Cam Ranh; Tân Sơn Nhất; Trà Nóc; Rạch Giá}\}$, trong đó Điện Biên Phủ, Nội Bài, Cát Bi, Vinh, Đồng Hới, Cam Ranh, Tân Sơn Nhất, Trà Nóc, Rạch Giá lần lượt kí hiệu cho kết quả hành khách được chọn đến từ từng sân bay đó.

b) Điện Biên Phủ, Nội Bài, Cát Bi.

c) Vinh, Đồng Hới, Cam Ranh.

d) Tân Sơn Nhất, Trà Nóc, Rạch Giá.

22. a) $\frac{1}{6}$.

b) $\frac{1}{6}$.

23. a) $\frac{7}{12}$.

b) $\frac{2}{15}$.

c) $\frac{1}{15}$.

d) $\frac{1}{30}$.

24. a) $\frac{1}{25}$.

b) $\frac{14}{25}$.

25. Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số tự nhiên được viết ra là: $M = \{41; 42; 43; \dots; 98; 99\}$. Số phần tử của tập hợp M là 59.

a) Có bảy kết quả thuận lợi cho biến cố “Số tự nhiên được viết ra là bội của 9” là: 45; 54; 63; 72; 81; 90; 99.

Vì thế xác suất của biến cố đó là $\frac{7}{59}$.

b) Có một kết quả thuận lợi cho biến cố “Số tự nhiên được viết ra là ước chung của 200 và 300” là: 50.

Vì thế xác suất của biến cố đó là $\frac{1}{59}$.

c) Có sáu kết quả thuận lợi cho biến cố “Số tự nhiên được viết ra có tổng các chữ số hàng chục và hàng đơn vị bằng 9” là: 45; 54; 63; 72; 81; 90.

Vì thế xác suất của biến cố đó là $\frac{6}{59}$.

d) Ta có: $19 + 20 = 39$; $20 + 21 = 41$; $21 + 22 = 43$; $22 + 23 = 45$; ...; $44 + 45 = 99$.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố “Số tự nhiên được viết ra là tổng của hai số tự nhiên liên tiếp” là: 41; 43; 45; ...; 99.

Số các kết quả thuận lợi của biến cố đó là: $(99 - 41) : 2 + 1 = 30$ (kết quả).

Vì thế xác suất của biến cố đó là $\frac{30}{59}$.

26. Tập hợp G có 26 phần tử.

a) $\frac{2}{13}$.

b) $\frac{4}{13}$.

c) $\frac{5}{26}$.

d) $\frac{9}{26}$.

27. D.

28. B.

29. A.

30. D.

31. a) Học sinh tự làm.

b) $\frac{14}{31}$.

c) 75%.

32. a) Học sinh tự làm.

b) 2 lần.

c) 67%.

33. a) 1,89%.

b) 44,61%.

34. a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{3}$.

35. a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{7}{25}$.

c) $\frac{1}{50}$.

36. a) $\frac{3}{5}$.

b) $\frac{2}{5}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{3}{10}$.

37. a) $\frac{2}{3}$.

b) $\frac{1}{2}$.

c) $\frac{1}{3}$.

Chương VI

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1 BIỂU THỨC SỐ. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Biểu thức số

- Các số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa tạo thành một biểu thức số. Đặc biệt, mỗi số đều được coi là một biểu thức số.
- Trong biểu thức số có thể có các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.
- Khi thực hiện các phép tính trong một biểu thức số, ta nhận được một số. Số đó được gọi là giá trị của biểu thức số đã cho.

Biểu thức đại số

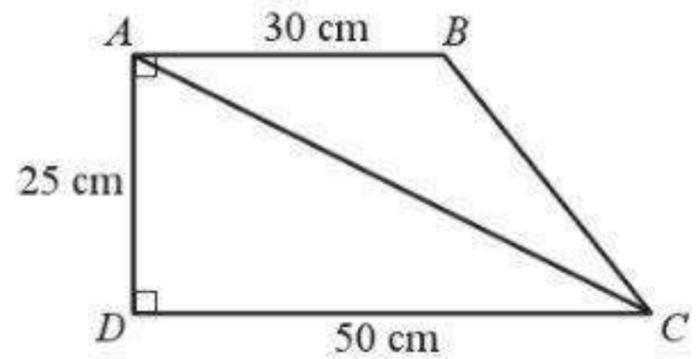
- Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa làm thành một biểu thức đại số. Đặc biệt, biểu thức số cũng là biểu thức đại số.
- Trong biểu thức đại số có thể có các dấu ngoặc để chỉ thứ tự thực hiện các phép tính.
- Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay những giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Viết biểu thức số biểu thị:

- Quãng đường bay được của một con chim ưng, biết vận tốc bay của nó là 96 km/h và thời gian bay là $\frac{3}{4}$ giờ;
- Quãng đường bay được của một con ong mật, biết vận tốc bay của nó là 8 km/h và thời gian bay là 15 phút;

- c) Diện tích của hình thang $ABCD$ và diện tích của tam giác ABC với các kích thước như Hình 1.



Hình 1

Giải

- a) Biểu thức số biểu thị quãng đường bay được của con chim ưng đó là:

$$96 \cdot \frac{3}{4} \text{ (km)}.$$

- b) Biểu thức số biểu thị quãng đường bay được của con ong mật đó là: $8 \cdot \frac{15}{60}$ (km).

- c) Biểu thức số biểu thị diện tích của hình thang $ABCD$ là: $\frac{(30 + 50) \cdot 25}{2}$ (cm²).

Biểu thức số biểu thị diện tích của tam giác ABC là: $\frac{30 \cdot 25}{2}$ (cm²).

Ví dụ 2 Mạng điện thoại di động mà bác Khôi sử dụng có cước phí nhắn tin nội mạng là 200 đồng/tin nhắn, ngoại mạng là 250 đồng/tin nhắn.

- a) Viết biểu thức biểu thị số tiền bác Khôi phải trả khi nhắn t tin nhắn nội mạng và l tin nhắn ngoại mạng.
 b) Tính số tiền bác Khôi phải trả khi nhắn 33 tin nhắn nội mạng và 27 tin nhắn ngoại mạng.

Giải

- a) Biểu thức biểu thị số tiền bác Khôi phải trả khi nhắn t tin nhắn nội mạng và l tin nhắn ngoại mạng là:

$$200 \cdot t + 250 \cdot l \text{ (đồng)}.$$

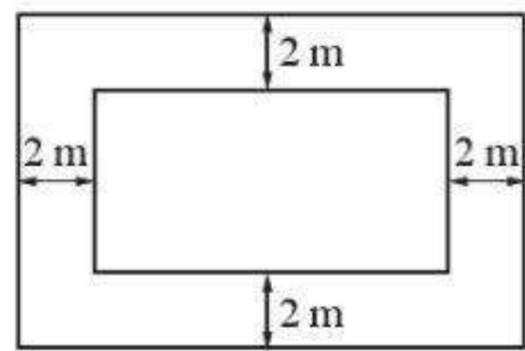
- b) Thay $t = 33$ và $l = 27$ vào biểu thức trên, ta có số tiền bác Khôi phải trả khi nhắn 33 tin nhắn nội mạng và 27 tin nhắn ngoại mạng là:

$$200 \cdot 33 + 250 \cdot 27 = 13\,350 \text{ (đồng)}.$$

Ví dụ 3 Viết biểu thức đại số biểu thị:

- a) Tích của tổng hai số x, y và tổng các bình phương của hai số đó;
 b) Hiệu các bình phương của hai số x và y .
 c) Tổng của tích hai số x và y với 5 lần bình phương của tổng hai số đó.

10. Trên mảnh đất có dạng hình chữ nhật với chiều dài là x (m), chiều rộng là y (m), người ta dự định làm một vườn hoa hình chữ nhật và bớt ra một phần đường đi rộng 2 m như ở Hình 2.



Hình 2

a) Viết biểu thức biểu thị chu vi và diện tích của vườn hoa trên mảnh đất đó.

b) Tính chu vi và diện tích của vườn hoa trên mảnh đất đó, biết $x = 15, y = 10$.

11. Viết biểu thức đại số biểu thị:

a) Khối lượng của một vật có thể tích V (m^3) và khối lượng riêng D (kg/m^3);

b) Diện tích của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là a (cm) và b (cm);

c) Sản lượng lúa thu hoạch được trên một ruộng lúa có diện tích là x (ha) và năng suất lúa là y (tạ/ha).

12. Một ngôi nhà có ba phòng: sàn phòng khách có dạng hình vuông cạnh a (m), sàn phòng ngủ và sàn phòng bếp có dạng hình chữ nhật với cùng chiều dài a (m) và cùng chiều rộng b (m) ($a > b$). Viết biểu thức biểu thị tổng diện tích ba mặt sàn trên của ngôi nhà đó.

13. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $A = 3,2x^2y^3$ tại $x = 1, y = -1$;

b) $B = 3m - 2n$ tại $m = -1, n = 2$;

c) $C = 7m + 2n - 5$ tại $m = -2, n = -\frac{1}{2}$;

d) $D = 3x^2 - 5y + 1$ tại $x = \sqrt{3}, y = -1$.

14*. Tìm số nguyên x để biểu thức:

a) $A = \frac{1}{50 - x}$ (với $x \neq 50$) đạt giá trị lớn nhất;

b) $B = \frac{4}{x - 8}$ (với $x \neq 8$) đạt giá trị nhỏ nhất.

15. Để đánh giá thể trạng của một người, người ta thường dùng chỉ số BMI. Chỉ số BMI được tính bằng công thức: $BMI = \frac{m}{h^2}$ (chỉ số này thường được làm tròn đến hàng phần mười) với m là cân nặng (tính theo ki-lô-gam) và h là chiều cao (tính theo mét). Nếu $18,5 \leq BMI \leq 22,9$ thì được coi là thể trạng bình thường đối với

người trên 20 tuổi. Hai chị Hằng và Bình (25 tuổi) có các số đo cân nặng và chiều cao như sau:

	Hằng	Bình
Cân nặng (kg)	50	72
Chiều cao (cm)	152	160

Trong hai chị Hằng và Bình, người nào đạt thể trạng bình thường?

16. Bạn Nguyễn đã mua 5 quyển vở, giá mỗi quyển là 7 000 đồng và mua x chiếc bút chì, giá mỗi chiếc là 4 000 đồng.

a) Viết biểu thức biểu thị số tiền bạn Nguyễn phải trả.

b) Bạn Đức chỉ mua bút chì và mua nhiều hơn bạn Nguyễn 5 chiếc bút chì cùng loại với giá 4 000 đồng/chiếc. Viết biểu thức biểu thị số tiền bạn Đức phải trả.

§2 ĐA THỨC MỘT BIẾN. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Đơn thức một biến

– Đơn thức một biến là biểu thức đại số chỉ gồm một số hoặc tích của một số với lũy thừa có số mũ nguyên dương của biến đó.

– Mỗi đơn thức (một biến x) nếu không phải là một số thì có dạng ax^k , trong đó a là số thực khác 0 và k là số nguyên dương. Lúc đó, số a được gọi là hệ số của đơn thức ax^k .

– Đặc biệt, một số thực khác 0 được coi là đơn thức với số mũ của biến bằng 0.

– Để cộng (hay trừ) hai đơn thức có cùng số mũ của biến, ta cộng (hay trừ) hai hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến:

$$ax^k + bx^k = (a + b)x^k, \quad ax^k - bx^k = (a - b)x^k \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Đa thức một biến

– Đa thức một biến là tổng những đơn thức của cùng một biến.

– Mỗi số được xem là một đa thức (một biến). Số 0 được gọi là đa thức không. Mỗi đơn thức cũng là một đa thức.

- Thông thường ta kí hiệu đa thức một biến x là $P(x), Q(x), R(x)$ hoặc $A(x), B(x), \dots$
- Thu gọn đa thức một biến là làm cho đa thức đó không còn hai đơn thức nào có cùng số mũ của biến.
- Sắp xếp đa thức (một biến) theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến là sắp xếp các đơn thức trong dạng thu gọn của đa thức đó theo mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến.
- Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ cao nhất của biến trong đa thức đó. Đặc biệt, một số khác 0 là đa thức bậc 0, đa thức không (số 0) là đa thức không có bậc.
- Trong dạng thu gọn của đa thức, hệ số của lũy thừa với số mũ cao nhất của biến còn gọi là hệ số cao nhất của đa thức; số hạng không chứa biến còn gọi là hệ số tự do của đa thức.

Nghiệm của đa thức một biến

- Giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = a$ được kí hiệu là $P(a)$.
- Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.
- Ta có $x = a$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ nếu $P(a) = 0$.
- Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm. Số nghiệm của một đa thức không vượt quá bậc của đa thức đó.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Biểu thức nào sau đây là đa thức một biến? Tìm biến và bậc của đa thức đó.

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $x^2 + 2$. | b) $2t^5 - 25t^4 + 2t + 1$. |
| c) $\sqrt{2}x^4 - \sqrt{3}x^3 + \sqrt{5} + 1$. | d) $4x + 2y$. |
| e) $\frac{1}{x-2}$. | g) $\frac{-3x^2y^3}{5}$. |
| h) $5x^3 - 4x^2 + 2$. | i) $-6t^7 + 4t + 8t^9 - 1$. |

Giải

- Các đa thức $x^2 + 2; \sqrt{2}x^4 - \sqrt{3}x^3 + \sqrt{5} + 1; 5x^3 - 4x^2 + 2$ đều là đa thức một biến x .
Bậc của các đa thức một biến x đó lần lượt là: 2; 4; 3.
- Các đa thức $2t^5 - 25t^4 + 2t + 1; -6t^7 + 4t + 8t^9 - 1$ đều là đa thức một biến t .
Bậc của các đa thức một biến t đó lần lượt là: 5; 9.

Ví dụ 2 Cho hai đa thức:

$$P(x) = x - 2x^2 + 3x^5 + x^4 + x; Q(x) = 3 - 2x - 2x^2 + x^4 - 3x^6 - x^4 + 4x^2.$$

- Thu gọn và sắp xếp mỗi đa thức trên theo số mũ giảm dần của biến.
- Xác định bậc, hệ số cao nhất và hệ số tự do của mỗi đa thức đó.
- Chứng tỏ $x = 0$ là nghiệm của $P(x)$ nhưng không là nghiệm của $Q(x)$.

Giải

a) Ta có:
$$\begin{aligned} P(x) &= x - 2x^2 + 3x^5 + x^4 + x \\ &= 3x^5 + x^4 - 2x^2 + x + x \\ &= 3x^5 + x^4 - 2x^2 + (x + x) \\ &= 3x^5 + x^4 - 2x^2 + 2x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 3 - 2x - 2x^2 + x^4 - 3x^6 - x^4 + 4x^2 \\ &= -3x^6 + x^4 - x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x + 3 \\ &= -3x^6 + (x^4 - x^4) + (-2x^2 + 4x^2) - 2x + 3 \\ &= -3x^6 + 2x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

- b) Bậc của đa thức $P(x)$ là 5 vì số mũ cao nhất của x trong đa thức $P(x)$ là 5.

Tương tự như trên, bậc của đa thức $Q(x)$ là 6.

Hệ số cao nhất của đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ lần lượt là 3 và -3 .

Hệ số tự do của đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ lần lượt là 0 và 3.

- c) Vì $P(0) = 3 \cdot 0^5 + 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm của $P(x)$.

Vì $Q(0) = -3 \cdot 0^6 + 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0$ nên $x = 0$ không là nghiệm của $Q(x)$.

C. BÀI TẬP

- 17.** Lực F (N) của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc v (m/s) của gió, ta có công thức $F = 30v^2$.

a) Tính lực F khi $v = 15$; $v = 20$.

b) Biết cánh buồm chỉ có thể chịu được áp lực tối đa là 12 000 N, hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc gió 90 km/h hay không?

- 18.** Dung tích phổi của mỗi người phụ thuộc vào một số yếu tố, trong đó có hai yếu tố quan trọng là chiều cao và độ tuổi. Các nhà khoa học đã đưa ra công thức ước tính dung tích chuẩn phổi của mỗi người theo giới tính như sau:

Nam: $P = 0,057h - 0,022a - 4,23$;

Nữ: $Q = 0,041h - 0,018a - 2,69$.

Trong đó: h là chiều cao tính bằng xăng-ti-mét; a là tuổi tính bằng năm; P và Q là dung tích chuẩn của phổi tính bằng lít.

(Nguồn: Toán 7, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2020)

a) Theo công thức trên, nếu bạn Chi (nữ) 13 tuổi, cao 150 cm và bạn Hùng (nam) 13 tuổi, cao 160 cm thì dung tích chuẩn phổi của mỗi bạn là bao nhiêu?

b) Em hãy tính dung tích chuẩn phổi của mình theo công thức trên.

19. Cho đa thức $R(x) = x^2 + 5x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x^4 + 3x^3 - x + 5$.

a) Thu gọn và sắp xếp đa thức $R(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.

b) Tìm bậc của đa thức $R(x)$.

c) Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức $R(x)$.

d) Tính $R(-1)$, $R(0)$, $R(1)$, $R(-a)$ (với a là một số).

20. Cho đa thức $P(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^4 - x^2$.

a) Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức $P(x)$.

b) Mỗi phần tử của tập hợp $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$ có là nghiệm của đa thức $P(x)$ không?

Vi sao?

21. Tìm bậc của mỗi đa thức sau:

a) $2 - 3x^2 + 5x^4 - x - x^2 - 5x^4 + 3x^3$;

b) $2x^3 - 6x^7$;

c) $1 - x$;

d) -3 ;

e) 0 .

22. Kiểm tra xem:

a) $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ có là nghiệm của đa thức $P(x) = 2x - 1$ hay không;

b) $x = 2$, $x = -\frac{1}{2}$ có là nghiệm của đa thức $Q(x) = -3x + 6$ hay không;

c) $t = 0$, $t = 2$ có là nghiệm của đa thức $R(t) = t^2 + 2t$ hay không;

d) $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$ có là nghiệm của đa thức $H(t) = t^3 - t$ hay không.

23*. Chứng tỏ các đa thức sau không có nghiệm:

a) $x^2 + 4$;

b) $10x^2 + \frac{3}{4}$;

c) $(x - 1)^2 + 7$.

24. Đố?

Tác phẩm “TRUYỆN” là một truyện thơ của đại thi hào Nguyễn Du. Tác phẩm đó được xem là một trong những truyện thơ nổi tiếng nhất và xét vào hàng kinh điển trong văn học Việt Nam, nó được viết theo thể thơ lục bát, gồm 3 254 câu.

Em sẽ biết từ còn thiếu của tên truyện thơ trên bằng cách thu gọn mỗi đa thức sau rồi viết các chữ tương ứng với kết quả tìm được vào các ô trống trong bảng dưới đây:

I. $3x^3 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3$;

Ê. $2021x + (-2021x)$;

K. $-\frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^4$;

U. $6x^2 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{5}x^2$.

$-\frac{39}{70}x^4$	$\frac{17}{6}x^3$	0	$\frac{179}{30}x^2$

§3 PHÉP CỘNG, PHÉP TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cộng hai đa thức một biến

- Để cộng hai đa thức một biến (theo cột dọc), ta có thể làm như sau:
 - + Thu gọn mỗi đa thức và sắp xếp hai đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến;
 - + Đặt hai đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột;
 - + Cộng hai đơn thức trong từng cột, ta có tổng cần tìm.
- Để cộng hai đa thức một biến (theo hàng ngang), ta có thể làm như sau:
 - + Thu gọn mỗi đa thức và sắp xếp hai đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến;
 - + Viết tổng hai đa thức theo hàng ngang;
 - + Nhóm các đơn thức có cùng số mũ của biến với nhau;
 - + Thực hiện phép tính trong từng nhóm, ta được tổng cần tìm.

Trừ hai đa thức một biến

- Để trừ đa thức $P(x)$ cho đa thức $Q(x)$ (theo cột dọc), ta có thể làm như sau:

- + Thu gọn mỗi đa thức và sắp xếp hai đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến;
 - + Đặt đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột sao cho đơn thức của $P(x)$ ở trên và đơn thức của $Q(x)$ ở dưới;
 - + Trừ hai đơn thức trong từng cột, ta có hiệu cần tìm.
- Để trừ đa thức $P(x)$ cho đa thức $Q(x)$ (theo hàng ngang), ta có thể làm như sau:
- + Thu gọn mỗi đa thức và sắp xếp hai đa thức đó cùng theo số mũ giảm dần (hoặc tăng dần) của biến;
 - + Viết hiệu $P(x) - Q(x)$ theo hàng ngang, trong đó đa thức $Q(x)$ được đặt trong dấu ngoặc;
 - + Sau khi bỏ dấu ngoặc và đổi dấu mỗi đơn thức trong dạng thu gọn của đa thức $Q(x)$, nhóm các đơn thức có cùng số mũ của biến với nhau;
 - + Thực hiện phép tính trong từng nhóm, ta được hiệu cần tìm.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Cho hai đa thức:

$$M(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 1 \text{ và } N(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1.$$

- a) Tính $M(x) + N(x)$; $M(x) - N(x)$ theo cột dọc.
- b) $x = 0$, $x = -1$ có là nghiệm của đa thức $M(x) + N(x)$ hay không?
- c) Tính giá trị của biểu thức $M(x) + N(x)$ tại $x = -\frac{3}{2}$.

Giải

$\begin{array}{r} \text{a) } \quad M(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 1 \\ \quad + \quad N(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1 \\ \hline M(x) + N(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} M(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 1 \\ - \quad N(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1 \\ \hline M(x) - N(x) = \qquad \qquad \qquad 8x \end{array}$
--	--

- b) Gọi $P(x) = M(x) + N(x)$. Suy ra $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 2$.

Ta có:

$$P(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 2 = 0 - 0 + 0 - 2 = -2 \neq 0;$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 2 = -2 - 4 - 6 - 2 = -14 \neq 0.$$

Do đó $x = 0$, $x = -1$ không là nghiệm của đa thức $M(x) + N(x)$.

c) Ta có:

$$\begin{aligned}P\left(-\frac{3}{2}\right) &= 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \\&= 2 \cdot \left(-\frac{27}{8}\right) - 4 \cdot \frac{9}{4} + (-9) - 2 = -\frac{27}{4} - 9 - 9 - 2 \\&= -\frac{27}{4} - \frac{36}{4} - \frac{36}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{107}{4}.\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức $M(x) + N(x)$ tại $x = -\frac{3}{2}$ là $-\frac{107}{4}$.

Ví dụ 2 Kết quả của phép tính $(x^5 - 3x^4 + x^2 - 5) - (2x^4 + 7x^3 - x^2 + 6)$ là:

A. $x^5 + 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 11$.

B. $-x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 11$.

C. $x^5 + 5x^4 - 7x^3 - 2x^2 - 11$.

D. $x^5 - 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11$.

Giải

$$\begin{aligned}(x^5 - 3x^4 + x^2 - 5) - (2x^4 + 7x^3 - x^2 + 6) &= x^5 - 3x^4 + x^2 - 5 - 2x^4 - 7x^3 + x^2 - 6 \\&= x^5 - (3x^4 + 2x^4) - 7x^3 + (x^2 + x^2) - (5 + 6) \\&= x^5 - 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11.\end{aligned}$$

Vậy ta chọn **D**.

C. BÀI TẬP

25. Cho đa thức $F(x) = x^7 - \frac{1}{2}x^3 + x + 1$.

a) Tìm đa thức $Q(x)$ sao cho $F(x) + Q(x) = x^5 - x^3 + 2$.

b) Tìm đa thức $R(x)$ sao cho $F(x) - R(x) = 2$.

26. Tìm các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$, biết $P(x) + Q(x) = x^2 + 1$ và $P(x) - Q(x) = 2x$.

27. Cho hai đa thức:

$$F(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 9 \text{ và } G(x) = -x^4 + 2x^2 - x + 8.$$

a) Tìm đa thức $H(x)$ sao cho $H(x) = F(x) + G(x)$.

b) Tìm bậc của đa thức $H(x)$.

c) Kiểm tra xem $x = 0, x = 1, x = -1$ có là nghiệm của đa thức $H(x)$ hay không.

d) Tìm đa thức $K(x)$ sao cho $H(x) - K(x) = \frac{1}{2}x^2$.

28. a) Cho các đa thức:

$$A(x) = x^2 - 0,45x + 1,2; B(x) = 0,8x^2 - 1,2x; C(x) = 1,6x^2 - 2x.$$

Tính $A(x) + B(x) - C(x)$.

b) Cho các đa thức:

$$M(y) = y^2 - 1,75y - 3,2; N(y) = 0,3y^2 + 4; P(y) = 2y - 7,2.$$

Tính $M(y) - N(y) - P(y)$.

29. Mỗi chiếc bút bi được bán với giá x (đồng). Mỗi kẹp tóc có giá đắt hơn mỗi chiếc bút bi là 7 000 đồng, mỗi quyển truyện tranh có giá đắt gấp 5 lần mỗi chiếc bút bi. Bạn Khanh mua 4 chiếc kẹp tóc và 5 chiếc bút bi. Bạn Dung mua 1 quyển truyện tranh, 3 chiếc kẹp tóc và 10 chiếc bút bi.

a) Tính số tiền mỗi bạn phải trả theo x .

b) Tính tổng số tiền mà cửa hàng nhận được từ hai bạn Khanh và Dung theo x .

c) Nếu bạn Minh chỉ có 70 000 đồng và muốn mua hàng sao cho có đủ cả ba món đồ (bút bi, kẹp tóc, truyện tranh) thì bạn Minh có thể mua được nhiều nhất bao nhiêu chiếc kẹp tóc, biết giá mỗi chiếc bút bi là 5 000 đồng?

30. Cho hai đa thức:

$$F(x) = 2x^4 - x^3 + x - 3; G(x) = -x^3 + 5x^2 + 4x + 2.$$

a) Tìm đa thức $H(x)$ sao cho $F(x) + H(x) = 0$.

b) Tìm đa thức $K(x)$ sao cho $K(x) - G(x) = F(x)$.

§4 PHÉP NHÂN ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhân đơn thức với đơn thức

Muốn nhân đơn thức A với đơn thức B , ta làm như sau:

- + Nhân hệ số của đơn thức A với hệ số của đơn thức B ;
- + Nhân lũy thừa của biến trong A với lũy thừa của biến đó trong B ;
- + Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

Tức là, với $a \neq 0; b \neq 0; m, n \in \mathbb{N}$, ta có: $ax^m \cdot bx^n = a \cdot b \cdot x^m \cdot x^n = abx^{m+n}$.

Nhân đơn thức với đa thức

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức đó với từng đơn thức của đa thức rồi cộng các tích với nhau:

$$A(B + C) = AB + AC; \quad A(B - C) = AB - AC.$$

Nhân đa thức với đa thức

Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi đơn thức của đa thức này với từng đơn thức của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau:

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD.$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Tính:

a) $5x^5 \cdot \frac{1}{5}x^7$;

b) $-3x^3 \cdot 7x^7$;

c) $-x^m \cdot 7x^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$);

d) $\left(-\frac{1}{2}x^5\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}x^8\right)$.

Giải

a) $5x^5 \cdot \frac{1}{5}x^7 = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot x^5 \cdot x^7 = x^{5+7} = x^{12}$.

b) $-3x^3 \cdot 7x^7 = (-3) \cdot 7 \cdot x^3 \cdot x^7 = -21x^{3+7} = -21x^{10}$.

c) $-x^m \cdot 7x^n = (-1) \cdot 7 \cdot x^m \cdot x^n = -7x^{m+n}$.

d) $\left(-\frac{1}{2}x^5\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}x^8\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot x^5 \cdot x^8 = \frac{1}{7}x^{5+8} = \frac{1}{7}x^{13}$.

Ví dụ 2 Một mảnh vườn có dạng hình thang với độ dài hai đáy bằng x (m) và $\frac{2}{7}x$ (m), chiều cao bằng $\frac{8}{63}x$ (m).

a) Tính diện tích của mảnh vườn đó theo x .

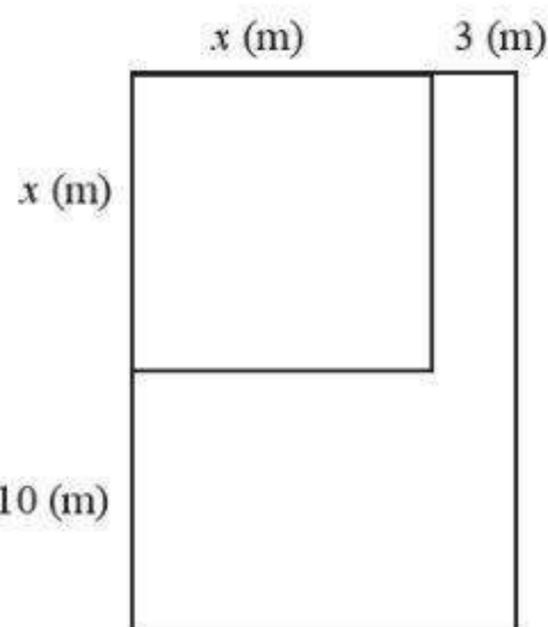
b) Tính diện tích của mảnh vườn đó khi $x = 63$.

Giải

a) Diện tích của mảnh vườn đó là: $\left(x + \frac{2}{7}x\right) \cdot \frac{8}{63}x : 2 = \frac{9}{7}x \cdot \frac{4}{63}x = \frac{4}{49}x^2$ (m²).

b) Khi $x = 63$ thì diện tích của mảnh vườn đó là: $\frac{4}{49} \cdot 63^2 = 324$ (m²).

Ví dụ 3 Khu vườn trồng hoa của nhà bác Lan ban đầu có dạng một hình vuông cạnh x (m) sau đó được mở rộng bên phải thêm 3 m, phía dưới thêm 10 m nên trở thành một hình chữ nhật (xem Hình 3).



Hình 3

- a) Tính diện tích của khu vườn sau khi được mở rộng theo x .
- b) Tính diện tích của khu vườn sau khi được mở rộng khi $x = 20$.

Giải

- a) Chiều rộng của khu vườn sau khi được mở rộng là: $x + 3$ (m).

Chiều dài của khu vườn sau khi được mở rộng là: $x + 10$ (m).

Diện tích của khu vườn sau khi được mở rộng là:

$$(x + 3)(x + 10) = x^2 + 10x + 3x + 30 = x^2 + 13x + 30 \text{ (m}^2\text{)}.$$

- b) Khi $x = 20$ thì diện tích của khu vườn sau khi được mở rộng là:

$$20^2 + 13 \cdot 20 + 30 = 400 + 260 + 30 = 690 \text{ (m}^2\text{)}.$$

C. BÀI TẬP

31. Tính:

- a) $\frac{1}{4}x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}x^3\right)$; b) $0,5x^{m+1} \cdot 0,8x^{m-1}$ ($m \in \mathbb{N}, m \geq 1$);
- c) $\left(x^2 - 3x + \frac{1}{4}\right)(-3x^3)$; d) $(x - 2)(x^2 + x - 1) - x(x^2 - 1)$.

32. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $(x + 0,5)(x^2 + 2x - 0,5) = x^3 + 2,5x^2 - 0,5x - 0,25$.

b) $(x + 0,5)(x - 0,5) = x^2 - 0,25$.

c) $\frac{1}{2}x^3(2x - 1)\left(\frac{1}{4}x + 1\right) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$.

33. Chứng tỏ rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

a) $x(2x + 1) - x^2(x + 2) + (x^3 - x + 3)$;

b) $0,2(5x - 3) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + 6\right) + \frac{2}{3}(3 - x)$;

- c) $(2x - 9)(2x + 9) - 4x^2$;
 d) $(x^2 + 3x + 9)(x - 3) - (x^3 + 23)$.

34. Chứng minh:

- a) $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 1$;
 b) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^4 - 1$;
 c) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (với a, b là số thực).

35. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

- a) $3(2x - 1) + 5(3 - x)$ tại $x = -\frac{3}{2}$;
 b) $2x(6x - 1) - 3x(4x - 1)$ tại $x = -2022$;
 c) $(x - 2)(x^2 + x + 1) - x(x^2 - 1)$ tại $x = 0,25$;
 d) $2x^2 + 3(x - 1)(x + 1)$ tại $x = \frac{1}{3}$.

36. Xét đa thức $P(x) = (2x^2 + a)(2x^3 - 3) - 5a(x + 3) + 1$ (với a là một số).

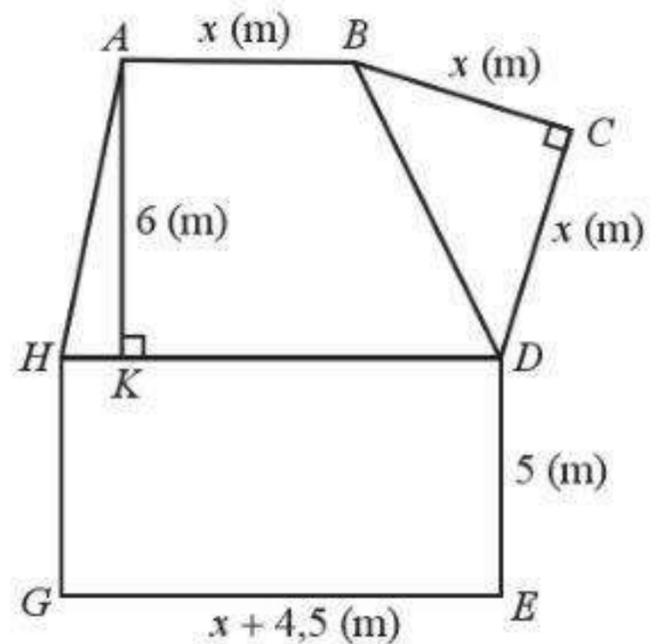
- a) Thu gọn và sắp xếp đa thức $P(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.
 b) Tìm a sao cho tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ bằng -37 .

37. Bể cá cảnh nhà bạn Khôi có dạng hình lập phương với độ dài cạnh x (dm). Ban đầu mực nước ở bể cao $x - 1$ (dm), bạn Khôi đặt một khối đá dạng núi cảnh chìm vào nước trong bể thì mực nước ở bể cao thêm $0,5$ dm.

- a) Tính thể tích nước có ở bể lúc đầu theo x .
 b) Tính thể tích khối đá mà bạn Khôi thả chìm vào nước trong bể theo x .
 c) Tính thể tích nước và khối đá mà bạn Khôi thả chìm vào nước trong bể theo x .

38. Bác Na có mảnh đất được mô tả như Hình 4.

Bác chia mảnh đất đó thành các khu vực: khu trồng rau là hình thang $ABDH$ ($AB \parallel DH$, $AK \perp HD$), khu trồng cây ăn quả là tam giác BCD và khu chăn nuôi là hình chữ nhật $HDEG$. Tính diện tích của mảnh đất đó theo các kích thước $AB = x$ (m), $BC = x$ (m), $CD = x$ (m), $DE = 5$ (m), $EG = x + 4,5$ (m), $AK = 6$ (m).



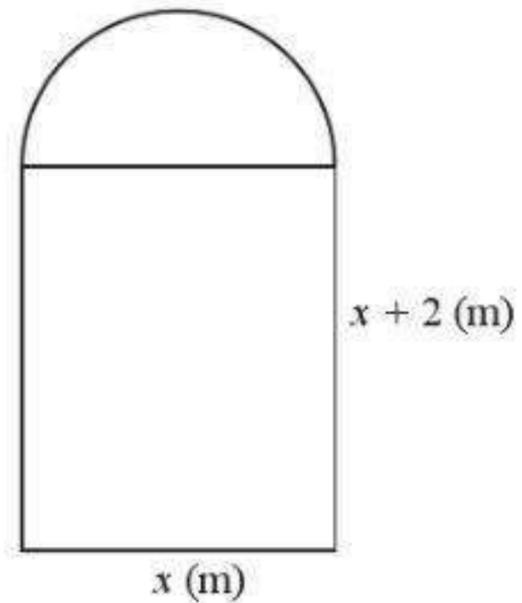
Hình 4

39. Từ một tấm bìa có dạng hình chữ nhật với độ dài các cạnh là 37 cm và 27 cm, người ta cắt đi ở bốn góc của tấm bìa bốn hình vuông cạnh là x cm và xếp phần còn lại thành một hình hộp chữ nhật không nắp.

a) Tính diện tích xung quanh $S(x)$ của hình hộp chữ nhật trên theo x .

b) Tính giá trị của $S(x)$ tại $x = 2$.

40. Một ngôi nhà có 4 ô cửa sổ, mỗi ô cửa sổ được mô tả như *Hình 5* gồm một hình chữ nhật có độ dài các cạnh là x (m), $x + 2$ (m) và một nửa hình tròn. Người ta muốn ốp kính cường lực cho các ô cửa sổ đó. Hỏi cần bao nhiêu mét vuông kính (lấy $\pi = 3,14$)? Biết diện tích của phần khung gỗ là $0,42 \text{ m}^2$.



Hình 5

§5 PHÉP CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Chia đơn thức cho đơn thức

Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B ($B \neq 0$) khi số mũ của biến trong A lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong B , ta làm như sau:

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B ;
- Chia lũy thừa của biến trong A cho lũy thừa của biến đó trong B ;
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

Chia đa thức cho đơn thức

Muốn chia đa thức P cho đơn thức Q ($Q \neq 0$) khi số mũ của biến ở mỗi đơn thức của P lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong Q , ta chia mỗi đơn thức của đa thức P cho đơn thức Q rồi cộng các thương với nhau.

Chia đa thức một biến đã sắp xếp

- Để chia một đa thức cho một đa thức khác đa thức không (cả hai đa thức đều đã thu gọn và sắp xếp các đơn thức theo số mũ giảm dần của biến) khi bậc của đa thức bị chia lớn hơn hoặc bằng bậc của đa thức chia, ta làm như sau:

Bước 1

+ Chia đơn thức bậc cao nhất của đa thức bị chia cho đơn thức bậc cao nhất của đa thức chia

+ Nhân kết quả trên với đa thức chia và đặt tích dưới đa thức bị chia sao cho hai đơn thức có cùng số mũ của biến ở cùng cột

+ Lấy đa thức bị chia trừ đi tích đặt dưới để được đa thức mới

Bước 2. Tiếp tục quá trình trên cho đến khi nhận được đa thức không hoặc đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức chia.

– Người ta chứng minh được rằng đối với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B \cdot Q + R$, trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B . Như vậy, đa thức A chia hết cho đa thức B khi và chỉ khi $R = 0$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Tính:

a) $(75x^5) : (3x^3)$;

b) $\left(-\frac{5}{2}x^4\right) : \left(\frac{1}{2}x\right)$;

c) $(-9x^3) : \left(-\frac{2}{5}x^2\right)$;

d) $(8x^{n+2}) : (3x^4)$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

Giải

a) $(75x^5) : (3x^3) = (75 : 3) \cdot (x^5 : x^3) = 25 \cdot x^{5-3} = 25x^2$.

b) $\left(-\frac{5}{2}x^4\right) : \left(\frac{1}{2}x\right) = \left[\left(-\frac{5}{2}\right) : \frac{1}{2}\right] \cdot (x^4 : x) = -5x^{4-1} = -5x^3$.

c) $(-9x^3) : \left(-\frac{2}{5}x^2\right) = \left[(-9) : \left(-\frac{2}{5}\right)\right] \cdot (x^3 : x^2) = \frac{45}{2}x$.

d) $(8x^{n+2}) : (3x^4) = \frac{8}{3} \cdot (x^{n+2} : x^4) = \frac{8}{3}x^{n+2-4} = \frac{8}{3}x^{n-2}$.

Ví dụ 2 Kết quả của phép tính $(8x^9 - 4x^6 + 10x^3) : (2x^3)$ là:

A. $4x^3 - 2x^2 + 5x$.

B. $4x^3 - 2x^2 + 5$.

C. $4x^6 - 2x^3 + 5$.

D. $4x^6 - 2x^3 + 5x$.

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} & (8x^9 - 4x^6 + 10x^3) : (2x^3) \\ &= (8x^9) : (2x^3) - (4x^6) : (2x^3) + (10x^3) : (2x^3) \\ &= (8 : 2) \cdot (x^9 : x^3) - (4 : 2) \cdot (x^6 : x^3) + (10 : 2) \cdot (x^3 : x^3) \\ &= 4x^6 - 2x^3 + 5. \end{aligned}$$

Vậy ta chọn C.

Ví dụ 3 Tính:

a) $(x^3 + 27) : (x^2 - 3x + 9);$

b) $(2x^2 - 6x + 5) : (x + 3).$

Giải

a)
$$\begin{array}{r|l} x^3 & + 27 \\ - x^3 - 3x^2 + 9x & \\ \hline & - 3x^2 - 9x + 27 \\ & - 3x^2 - 9x + 27 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - 3x + 9 \\ x + 3 \end{array}$$

Vậy $(x^3 + 27) : (x^2 - 3x + 9) = x + 3.$

b)
$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 6x + 5 & \\ - 2x^2 + 6x & \\ \hline & - 12x + 5 \\ & - -12x - 36 \\ \hline & 41 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3 \\ 2x - 12 \end{array}$$

Vậy $(2x^2 - 6x + 5) : (x + 3) = 2x - 12$ (dư 41).

C. BÀI TẬP

41. Tính:

a) $\left(\frac{3}{4}x^3\right) : \left(-\frac{1}{2}x^2\right);$

b) $(5x^n) : (4x^2) \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2);$

c) $(x^3 - 3x^2 + 6x) : \left(-\frac{1}{3}x\right);$

d) $\left(x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{2}x^3\right) : (5x).$

42. a) Cho đa thức $P(x) = \left(6x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right) : (2x^3)$. Rút gọn rồi tính giá trị của $P(x)$ tại $x = -2$.

b) Cho đa thức $Q(x) = 3\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1)$. Rút gọn rồi tính giá trị của $Q(x)$ tại $x = \frac{1}{3}$.

43. Khi giải bài tập “Xét xem đa thức $A(x) = -12x^4 + 5x^3 + 15x^2$ có chia hết cho đơn thức $B(x) = 3x^2$ hay không”, bạn Hồng nói “Đa thức $A(x)$ không chia hết cho đơn thức $B(x)$ vì 5 không chia hết cho 3”, còn bạn Hà nói “Đa thức $A(x)$ chia hết cho đơn thức $B(x)$ vì số mũ của biến ở mỗi đơn thức của $A(x)$ đều lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong $B(x)$ ”. Theo em, bạn nào nói đúng?

44. Tính:

a) $(3x^3 - 7x^2 + 4x - 4) : (x - 2)$;

b) $(x^5 + x + 1) : (x^3 - x)$.

45. Cho đa thức $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$. Chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $Q(x)$ ($Q(x) \neq 0$) được thương là đa thức $S(x) = 3x - 2$ và dư là đa thức $R(x) = 3x + 3$. Tìm đa thức $Q(x)$.

46. a) Tìm số dư của phép chia đa thức $4x^4 - 2x^2 + 7$ cho $x + 3$.

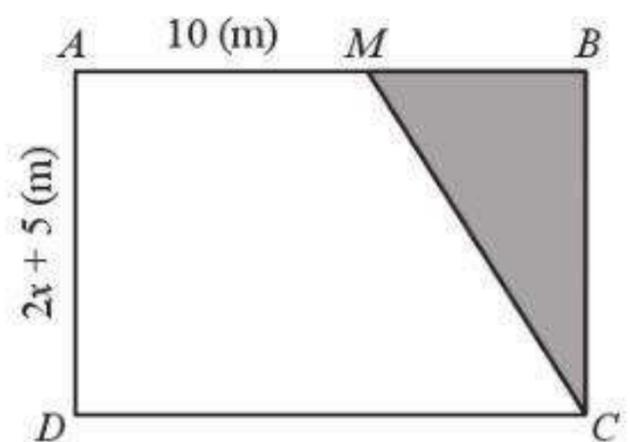
b) Tìm đa thức bị chia, biết đa thức chia là $x^2 - 2x + 3$, thương là $x^2 - 2$, dư là $9x - 5$.

47. a) Tìm số a sao cho $10x^2 - 7x + a$ chia hết cho $2x - 3$.

b) Tìm số a sao cho $x^3 - 10x + a$ chia hết cho $x - 2$.

48*. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $2n^2 - n$ chia hết cho $n + 1$.

49. Một mảnh đất có dạng hình thang vuông với đáy bé là 10 m, chiều cao là $2x + 5$ (m). Người ta mở rộng mảnh đất đó để được mảnh đất có dạng hình chữ nhật như Hình 6. Biết diện tích của phần đất mở rộng (phần tô đậm) là $6x^2 + 13x - 5$ (m²), tính diện tích của mảnh đất lúc ban đầu.



Hình 6

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

50. Giá trị của biểu thức $(x^2 - 8)(x + 3) - (x - 2)(x + 5)$ tại $x = 3$ là:

- A. -2 . B. 16 . C. -10 . D. 10 .

51. Biểu thức nào sau đây là đa thức một biến? Tìm biến và bậc của đa thức đó.

- a) $-2022x$. b) $-6x^2 - 4x + 2$.
c) $3u^n - 8u^2 - 20$ ($n \in \mathbb{N}, n > 2$). d) $\frac{1}{x} + x^3 - 2x^2 + 1$.

52. Tính giá trị của biểu thức:

- a) $A = 56 - 5a + 6b$ tại $a = 22, b = 23$;
b) $B = 6xyz - 3xy - 19z$ tại $x = 11, y = 32, z = 0$;
c) $C = x^{2021}y - 2022x^2 + 2023y^3 + 7$ tại $x = -1$ và $y = 1$;
d) $D = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 21$ tại $x = 16$.

53. Một bể đang chứa 500 l nước. Người ta mở một vòi nước cho chảy vào bể đó, mỗi phút vòi nước đó chảy vào bể được 50 l nước. Viết biểu thức biểu thị lượng nước có trong bể sau khi đã mở vòi nước đó được x phút, biết rằng sau x phút bể nước đó chưa đầy.

54. Viết đa thức biến x trong mỗi trường hợp sau:

- a) Đa thức bậc nhất có hệ số của biến bằng -7 và hệ số tự do bằng 0 ;
b) Đa thức bậc ba có hệ số của lũy thừa bậc hai và bậc nhất của biến đều bằng 5 ;
c) Đa thức bậc bốn có tổng hệ số của lũy thừa bậc ba và bậc hai của biến bằng 6 và hệ số tự do bằng -1 ;
d) Đa thức bậc tám trong đó tất cả các hệ số của lũy thừa bậc lẻ của biến đều bằng 0 .

55*. Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc ba theo biến x :

$$P(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 17x^2 - 23.$$

56. Cho đa thức $A(x) = -11x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 11x^5 + 13x^2 - 7x + 2$.

- a) Thu gọn và sắp xếp đa thức $A(x)$ theo số mũ giảm dần của biến.
b) Tìm bậc của đa thức $A(x)$.
c) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = -1; x = 0; x = 2$.

57. Tính:

- a) $(-4x^3 - 13x^2 + 2x^5) + (13x^2 + 2x^3 - 12x - 1)$;
- b) $(12x^6 - 11x^2 + 3x^3 + 9) - (13x^6 + 2x^3 - 11x^2 - 11x)$;
- c) $(8x^3 - x^2 + 1)(x^2 - 1)$;
- d) $(8x^3 + 6x^2 + 3x + 1) : (2x + 1)$.

58. Tìm đa thức $C(x)$ sao cho $A(x) - C(x) = B(x)$, biết:

- a) $A(x) = x^3 + x^2 + x - 2$, $B(x) = 9 - 2x + 11x^3 + x^4$.
- b) $A(x) = -12x^5 + 2x^3 - 2$, $B(x) = 9 - 2x - 11x^2 + 2x^3 - 11x^5$.

59. Tìm đa thức $Q(x)$ sao cho $P(x) \cdot Q(x) = R(x)$, biết:

- a) $P(x) = x - 2$, $R(x) = -x^3 + 8$;
- b) $P(x) = x^2 - 3x + 2$, $R(x) = 10 - 13x + 2x^2 + x^3$.

60. Tìm hệ số a sao cho đa thức $G(x) = x^4 + x^2 + a$ chia hết cho đa thức $M(x) = x^2 - x + 1$.

61. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

- a) $x = 2$ và $x = -3$ là nghiệm của đa thức $P(x) = x^2 - 5x + 6$.
- b) Đa thức bậc bốn luôn có nhiều hơn bốn nghiệm.
- c) Mỗi phần tử của tập hợp $\{0; 1; -1\}$ là nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 - x$.

62. Cho đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$) với $a + b + c + d + e = 0$. Chứng tỏ rằng $x = 1$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

63. Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng nếu $Q(x)$ nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là hai số đối nhau.

64. Một cửa hàng bán hoa sau khi tăng giá 50 nghìn đồng mỗi chậu hoa so với giá bán ban đầu là $3x$ (nghìn đồng) thì số tiền thu được là $3x^2 + 53x + 50$ (nghìn đồng). Tính số chậu hoa mà cửa hàng đã bán theo x .

65. Tháng 5 năm 2019, nhiều đại biểu trên cả nước đã “hội quân” trên một tàu kiểm ngư rời cảng biển quốc tế Cam Ranh để bắt đầu hải trình nổi tình yêu đất liền với biển đảo Trường Sa. Do thời tiết xấu, tàu kiểm ngư đã giảm 15% tốc độ so với tốc

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Biểu thức số biểu thị diện tích của mặt chiếc trống đồng Ngọc Lũ là:

$$(79,3 : 2)^2 \cdot 3,14 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2. $2 \cdot (15 + 10) \cdot 1,2 + 15 \cdot 10 \text{ (m}^2\text{)}.$

3. a) $23 \cdot 0,03 + \frac{15+105}{30} \cdot 0,335 \text{ (l)}.$

b) Học sinh tự làm.

4. a) $t + 3 - y \text{ (}^\circ\text{C)}.$

b) $28 \text{ }^\circ\text{C}.$

5. a) $x^2 + y^2.$

b) $x + y^2.$

c) $x^3 + y^3.$

d) $(x + y)^3.$

6. a) C.

b) B.

7. a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x \text{ (kg)}.$

b) $16,5 \text{ kg}.$

8. a) $S = x \cdot \frac{3}{5}x - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 3,14 \text{ (m}^2\text{)}.$

b) $S = 722,44 \text{ (m}^2\text{)}.$

9. a) $S = a(a - 8) - b^2 \text{ (m}^2\text{)}.$

b) $S = 2\,000 \text{ (m}^2\text{)}.$

10. a) Chiều dài của vườn hoa trên mảnh đất đó là: $x - 4 \text{ (m)}.$

Chiều rộng của vườn hoa trên mảnh đất đó là: $y - 4 \text{ (m)}.$

Biểu thức biểu thị chu vi của vườn hoa trên mảnh đất đó là:

$$C = 2[(x - 4) + (y - 4)] = 2(x + y - 8) \text{ (m)}.$$

Biểu thức biểu thị diện tích của vườn hoa trên mảnh đất đó là:

$$S = (x - 4)(y - 4) \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Thay $x = 15, y = 10$ vào hai biểu thức trên, ta tính được: $C = 34 \text{ (m)}; S = 66 \text{ (m}^2\text{)}.$

11. a) $V \cdot D \text{ (kg)}.$

b) $\frac{1}{2}ab \text{ (cm}^2\text{)}.$

c) $xy \text{ (tạ)}.$

12. $a^2 + 2ab \text{ (m}^2\text{)}.$

13. a) $-3,2$. b) -7 . c) -20 . d) 15 .

14. a) Xét $x \leq 49$, ta có $A > 0$. Phân số A có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên A lớn nhất nếu mẫu $50 - x$ nhỏ nhất, tức là $50 - x = 1$. Vậy $x = 49$, $A = 1$.

Xét $x \geq 51$, ta có $A < 0$.

Kết luận: Với các số x nguyên ($x \neq 50$) thì giá trị lớn nhất của A bằng 1 khi $x = 49$.

b) Xét $x \leq 7$, ta có $B < 0$. Số âm B có giá trị nhỏ nhất khi số đối của nó là $\frac{4}{8-x}$

lớn nhất, lập luận tương tự câu a ta có $x = 7$ và $B = -4$.

Xét $x \geq 9$, ta có $B > 0$.

Kết luận: Với các số x nguyên ($x \neq 8$) thì giá trị nhỏ nhất của B là -4 khi $x = 7$.

15. Chỉ số BMI của chị Hằng và chị Bình (làm tròn đến hàng phần mười) lần lượt là 21,6 và 28,1. Vậy chị Hằng đạt thể trạng bình thường.

16. a) $35\,000 + 4\,000x$ (đồng). b) $4\,000(x + 5)$ (đồng).

17. a) Khi $v = 15$ thì $F = 30 \cdot 15^2 = 6\,750$ (N).

Khi $v = 20$ thì $F = 30 \cdot 20^2 = 12\,000$ (N).

b) Gió bão có vận tốc 90 km/h hay $\frac{90\,000}{3\,600}$ m/s = 25 m/s. Mà cánh buồm chỉ có thể chịu được áp lực tối đa 12 000 N nên theo câu a cánh buồm chỉ chịu được sức gió 20 m/s. Vậy khi có cơn bão với vận tốc gió 90 km/h thì thuyền không thể đi được.

18. a) Dung tích chuẩn phổi của bạn Chi và Hùng lần lượt là 3,226 (l); 4,604 (l).

b) Học sinh tự làm.

19. a) $R(x) = 9x^4 + 2x^2 - x + 5$.

b) Bậc của đa thức $R(x)$ là 4.

c) Đa thức $R(x)$ có hệ số cao nhất là 9 và hệ số tự do là 5.

d) $R(-1) = 17$; $R(0) = 5$; $R(1) = 15$; $R(-a) = 9a^4 + 2a^2 + a + 5$.

20. a) Ta có $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2$.

Bậc của đa thức là 4, hệ số cao nhất là 3, hệ số tự do là 0.

b) $P(-1) = 0$ nên -1 là nghiệm của đa thức $P(x)$.

$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} \neq 0$ nên $\frac{1}{2}$ không là nghiệm của đa thức $P(x)$.

c) $x = 1$ là nghiệm của $H(x)$; $x = 0, x = -1$ không là nghiệm của $H(x)$.

d) $K(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - 1$.

28. a) $A(x) + B(x) - C(x) = 0, 2x^2 + 0,35x + 1, 2$.

b) $M(y) - N(y) - P(y) = 0, 7y^2 - 3, 75y$.

29. Giá tiền một kẹp tóc là: $x + 7\,000$ (đồng).

Giá tiền một quyển truyện tranh là: $5x$ (đồng).

a) Số tiền bạn Khanh phải trả là:

$$4(x + 7\,000) + 5x = 4x + 28\,000 + 5x = 9x + 28\,000 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền bạn Dung phải trả:

$$5x + 3(x + 7\,000) + 10x = 5x + 3x + 21\,000 + 10x = 18x + 21\,000 \text{ (đồng)}.$$

b) Tổng số tiền mà cửa hàng nhận được từ hai bạn Khanh và Dung là:

$$(9x + 28\,000) + (18x + 21\,000) = 27x + 49\,000 \text{ (đồng)}.$$

c) Do giá mỗi chiếc bút bi là $5\,000$ đồng nên giá mỗi chiếc kẹp tóc là $12\,000$ đồng và giá mỗi quyển truyện tranh là $25\,000$ đồng.

Giá của 1 chiếc bút bi, 1 chiếc kẹp tóc, 1 quyển truyện tranh là:

$$5\,000 + 12\,000 + 25\,000 = 42\,000 \text{ (đồng)}.$$

Ta có: $70\,000 - 42\,000 = 28\,000$ và $28\,000 : 12\,000 = 2, (3)$ nên bạn Minh có thể mua nhiều nhất 3 chiếc kẹp tóc.

30. a) $H(x) = -2x^4 + x^3 - x + 3$.

b) $K(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 5x - 1$.

31. a) $-\frac{1}{10}x^6$.

b) $0,4x^{2m}$.

c) $-3x^5 + 9x^4 - \frac{3}{4}x^3$.

d) $-x^2 - 2x + 2$.

32. a) Sai.

b) Đúng.

c) Sai.

33. a) $x(2x + 1) - x^2(x + 2) + (x^3 - x + 3) = 2x^2 + x - x^3 - 2x^2 + x^3 - x + 3 = 3$.

Giá trị của biểu thức là hằng số (bằng 3) nên không phụ thuộc vào biến.

Các câu b, c, d, học sinh làm tương tự.

34. a) $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1.$

b) Học sinh tự làm.

c) $(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (b+a)x + ab = x^2 + (a+b)x + ab.$

35. a) Ta có: $3(2x-1) + 5(3-x) = 6x - 3 + 15 - 5x = x + 12.$

Với $x = -\frac{3}{2}$ thì giá trị của biểu thức là: $-\frac{3}{2} + 12 = \frac{21}{2}.$

b) Ta có: $2x(6x-1) - 3x(4x-1) = 12x^2 - 2x - 12x^2 + 3x = x.$

Với $x = -2022$ thì giá trị của biểu thức là $-2022.$

c) Ta có: $(x-2)(x^2+x+1) - x(x^2-1) = x^3 + x^2 + x - 2x^2 - 2x - 2 - x^3 + x = -x^2 - 2.$

Với $x = 0,25$ thì giá trị của biểu thức là:

$$-(0,25)^2 - 2 = -0,0625 - 2 = -2,0625.$$

d) Ta có: $2x^2 + 3(x-1)(x+1) = 2x^2 + 3(x^2 + x - x - 1) = 2x^2 + 3(x^2 - 1) = 2x^2 + 3x^2 - 3 = 5x^2 - 3.$

Với $x = \frac{1}{3}$ thì giá trị của biểu thức là: $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3 = \frac{5}{9} - 3 = -\frac{22}{9}.$

36. a) $P(x) = (2x^2 + a)(2x^3 - 3) - 5a(x+3) + 1$
 $= 4x^5 - 6x^2 + 2ax^3 - 3a - 5ax - 15a + 1$
 $= 4x^5 + 2ax^3 - 6x^2 - 5ax - 18a + 1.$

b) Tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ tính theo a là: $-21a - 1.$

Do đó $-21a - 1 = -37.$ Suy ra $a = \frac{12}{7}.$

37. a) $x^3 - x^2$ (dm³).

b) $0,5x^2$ (dm³).

c) $x^3 - 0,5x^2$ (dm³).

38. Diện tích của hình thang $ABDH$ là:

$$\frac{[x + (x + 4,5)] \cdot 6}{2} = (2x + 4,5) \cdot 3 = 6x + 13,5 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích của tam giác BCD là: $\frac{x \cdot x}{2} = \frac{1}{2}x^2$ (m²).

Diện tích của chữ nhật $HDEG$ là: $5 \cdot (x + 4,5) = 5x + 22,5$ (m²).

Diện tích của mảnh đất là:

$$(6x + 13,5) + \frac{1}{2}x^2 + (5x + 22,5) = \frac{1}{2}x^2 + 11x + 36 \text{ (m}^2\text{)}.$$

39. a) $S(x) = 2[(37 - 2x) + (27 - 2x)] \cdot x = 2(64 - 4x) \cdot x = -8x^2 + 128x \text{ (m}^2\text{)}.$

b) $S(2) = 224 \text{ (m}^2\text{)}.$

40. Diện tích của phần cửa có dạng hình chữ nhật là: $x(x + 2) = x^2 + 2x \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích của phần cửa có dạng nửa hình tròn là:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 3,14 = 0,3925x^2 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích của một ô cửa sổ là: $(x^2 + 2x) + 0,3925x^2 = 1,3925x^2 + 2x \text{ (m}^2\text{)}.$

Số mét vuông kính cần sử dụng là: $4(1,3925x^2 + 2x - 0,42) \text{ (m}^2\text{)}.$

41. a) $-\frac{3}{2}x.$

c) $-3x^2 + 9x - 18.$

b) $\frac{5}{4}x^{n-2}.$

d) $\frac{7}{10}x^2 + \frac{1}{15}x + \frac{1}{5}.$

42. a) $P(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}; P(-2) = \frac{38}{3}.$

b) $Q(x) = -4x; Q\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$

43. Bạn Hà nói đúng.

44. a) $(3x^3 - 7x^2 + 4x - 4) : (x - 2) = 3x^2 - x + 2.$

b) $(x^5 + x + 1) : (x^3 - x) = x^2 + 1 \text{ (dư } 2x + 1\text{)}.$

45. Dựa vào quy tắc phép chia ta có:

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x) \text{ hay } P(x) - R(x) = Q(x) \cdot S(x).$$

Suy ra $Q(x) = [P(x) - R(x)] : S(x) = [(3x^3 - 2x^2 + 5) - (3x + 3)] : (3x - 2)$

$$= (3x^3 - 2x^2 - 3x + 2) : (3x - 2) = x^2 - 1.$$

46. a) Thực hiện phép chia $4x^4 - 2x^2 + 7$ cho $x + 3$, ta được thương là

$$4x^3 - 12x^2 + 34x - 102 \text{ và dư là } 313.$$

Vậy số dư cần tìm là 313.

b) Đa thức bị chia bằng:

$$(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2) + (9x - 5) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 13x - 11.$$

47. a) Thực hiện phép tính chia $10x^2 - 7x + a$ cho $2x - 3$, ta được dư cuối cùng là $a + 12$. Suy ra $a + 12 = 0$ hay $a = -12$.

b) Làm tương tự câu a, ta được $a = 12$.

48*. Thực hiện phép chia $2n^2 - n$ cho $n + 1$ ta có $2n^2 - n = (n + 1)(2n - 3) + 3$.

Do đó: Nếu $2n^2 - n$ chia hết cho $n + 1$ thì $n + 1$ là ước của 3 mà $U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$.

Ta có bảng sau:

$n + 1$	-3	-1	1	3
n	-4	-2	0	2

Vậy $n \in \{-4; -2; 0; 2\}$ (thỏa mãn điều kiện $n + 1 \neq 0$).

49. Theo bài ra $S_{\Delta BMC} = 6x^2 + 13x - 5$ (m²). Chiều cao BC của tam giác BMC cũng là chiều cao của hình thang vuông $ADCM$.

Ta có: $S_{\Delta BCM} = \frac{BC \cdot BM}{2}$, suy ra $BM = 2S_{\Delta BMC} : BC$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } BM &= 2(6x^2 + 13x - 5) : (2x + 5) = (12x^2 + 26x - 10) : (2x + 5) \\ &= 6x - 2 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

Đáy CD của hình thang $ADCM$ là: $6x - 2 + 10 = 6x + 8$ (m).

Vậy diện tích của mảnh đất lúc ban đầu là:

$$\frac{(10 + 6x + 8)(2x + 5)}{2} = 6x^2 + 33x + 45 \text{ (m}^2\text{)}.$$

50. A.

51. a) $-2022x$ là đa thức một biến x , có bậc là 1.

b) $-6x^2 - 4x + 2$ là đa thức một biến x , có bậc là 2.

c) $3u^n - 8u^2 - 20$ là đa thức một biến u , có bậc là n ($n \in \mathbb{N}, n > 2$).

d) $\frac{1}{x} + x^3 - 2x^2 + 1$ không phải là đa thức một biến.

52. a) 84.

b) -1056.

c) 7.

d) 5.

53. $500 + 50x$ (l).

54. a) $-7x$.

b) $ax^3 + 5x^2 + 5x + b$ với a, b là các số cho trước ($a \neq 0$).

c) $ax^4 + bx^3 + (6-b)x^2 + cx - 1$ với a, b, c là các số cho trước ($a \neq 0$).

d) $ax^8 + bx^6 + cx^4 + dx^2 + e$ với a, b, c, d, e là các số cho trước ($a \neq 0$).

55*. Để đa thức $P(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 17x^2 - 23$ là đa thức bậc ba theo biến x thì $m^2 - 25 = 0$ và $20 + 4m \neq 0$. Suy ra $m = \pm 5$ và $m \neq -5$. Do đó $m = 5$.

56. a) $A(x) = 4x^3 + x^2 - 7x + 2$.

b) Bậc của đa thức $A(x)$ là 3.

c) $A(-1) = 6; A(0) = 2; A(2) = 24$.

57. a) $2x^5 - 2x^3 - 12x - 1$.

b) $-x^6 + x^3 + 11x + 9$.

c) $8x^5 - x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 1$.

d) $4x^2 + x + 1$.

58. a) $C(x) = -x^4 - 10x^3 + x^2 + 3x - 11$.

b) $C(x) = -x^5 + 11x^2 + 2x - 11$.

59. a) $Q(x) = -x^2 - 2x - 4$.

b) $Q(x) = x + 5$.

60. Chia đa thức $G(x) = x^4 + x^2 + a$ cho đa thức $M(x) = x^2 - x + 1$, ta được thương là đa thức $K(x) = x^2 + x + 1$ và dư là $a - 1$. Như vậy đa thức $G(x) = x^4 + x^2 + a$ chia hết cho đa thức $M(x) = x^2 - x + 1$ khi $a - 1 = 0$ hay $a = 1$.

61. a) Sai.

b) Sai.

c) Đúng.

62. Ta có $P(1) = a + b + c + d + e = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

63. Do $x = 1$ là nghiệm của $Q(x)$ nên $Q(1) = 0$ hay $a + b + c = 0$ (1)

Do $x = -1$ là nghiệm của $Q(x)$ nên $Q(-1) = 0$ hay $a - b + c = 0$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $(a + b + c) + (a - b + c) = 0$ hay $2a + 2c = 0$, tức là $a + c = 0$ hay $a = -c$. Vậy a và c là hai số đối nhau.

- 64.** Giá một chậu hoa sau khi tăng giá 50 nghìn đồng mỗi chậu là: $3x + 50$ (nghìn đồng).
Số chậu hoa mà cửa hàng đã bán là:

$$(3x^2 + 53x + 50) : (3x + 50) = x + 1 \text{ (chậu).}$$

- 65.** a) $0,85x$ (hải lí). b) $3,4x$ (hải lí). c) $0,85xy$ (hải lí).

- 66.** Nhiệt độ trung bình của bề mặt Trái Đất vào năm 1965 là:

$$T = 0,02 \cdot (1\ 965 - 1\ 960) + 15 = 15,1 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Nhiệt độ trung bình của bề mặt Trái Đất vào năm 2023 là:

$$T = 0,02 \cdot (2\ 023 - 1\ 960) + 15 = 16,26 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

- 67.** Do nếu mua từ 4 lốc sữa trở lên thì cứ mua 2 lốc sữa được tặng 1 hộp nên mua $2a$ lốc sữa được tặng a hộp.

Tổng số hộp sữa bác Hoa nhận được là: $2a \cdot 4 + a = 9a$ (hộp).

Số tiền bác Hoa mua $2a$ lốc sữa là: $26\ 000 \cdot 2a = 52\ 000a$ (đồng).

Số tiền bác Hoa phải trả nếu mua lẻ từng hộp số sữa trên là:

$$9a \cdot 7\ 000 = 63\ 000a \text{ (đồng).}$$

Số tiền bác Hoa sẽ tiết kiệm là:

$$63\ 000a - 52\ 000a = 11\ 000a \text{ (đồng).}$$

- 68.** Giá tiền của mỗi sản phẩm bán lần đầu là:

$$x - \frac{10}{100}x = 0,9x \text{ (đồng).}$$

Số tiền cửa hàng thu được sau lần bán đầu là: $0,9x \cdot 15 = 13,5x$ (đồng).

Giá tiền của mỗi sản phẩm bán lần sau là:

$$0,9x - \frac{5}{100} \cdot 0,9x = 0,855x \text{ (đồng).}$$

Số tiền cửa hàng thu được khi bán hết 85 sản phẩm còn lại là:

$$0,855x \cdot 85 = 72,675x \text{ (đồng).}$$

Số tiền cửa hàng thu được sau khi đã bán hết 100 sản phẩm trên là:

$$13,5x + 72,675x = 86,175x \text{ (đồng).}$$

- 69.** $x^2 + \frac{11}{2}x$ (dm^2).

Chương VII

TAM GIÁC

§1 TỔNG CÁC GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .
- Tổng hai góc nhọn trong một tam giác vuông bằng 90° .
- Tam giác có ba góc nhọn gọi là tam giác nhọn. Tam giác có một góc vuông gọi là tam giác vuông. Tam giác có một góc tù gọi là tam giác tù.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Tháp nghiêng Pisa ở Italy nghiêng 5° so với phương thẳng đứng. Tính độ nghiêng của tháp đó so với phương nằm ngang.

Giải

Ta vẽ tam giác DEG vuông tại G và $\widehat{E} = 5^\circ$ (Hình 1) để mô tả hình ảnh tháp nghiêng Pisa.

Trong tam giác DEG vuông tại G , ta có $\widehat{D} + \widehat{E} = 90^\circ$.

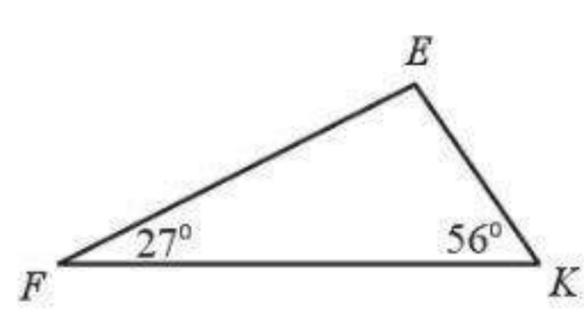
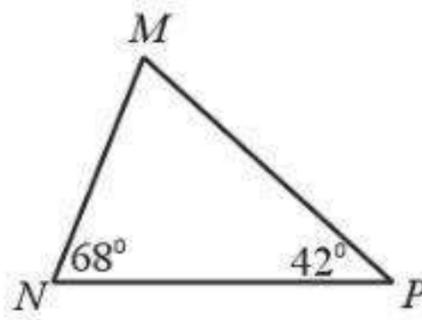
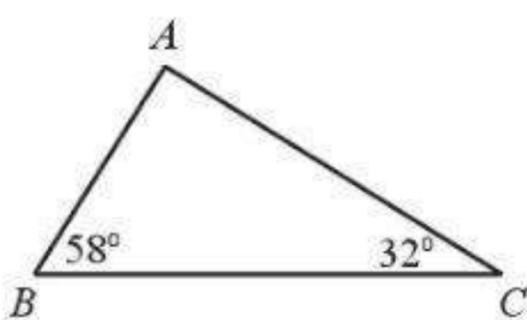
Suy ra $\widehat{D} = 90^\circ - \widehat{E} = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Vậy độ nghiêng của tháp đó so với phương nằm ngang là 85° .



Hình 1

Ví dụ 2 Trong các tam giác ở Hình 2, tam giác nào là tam giác nhọn, tam giác vuông, tam giác tù? Vì sao?



Hình 2

Giải

Trong tam giác ABC , ta có $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (58^\circ + 32^\circ) = 90^\circ$.

Trong tam giác MNP , ta có $\widehat{M} = 180^\circ - (\widehat{N} + \widehat{P}) = 180^\circ - (68^\circ + 42^\circ) = 70^\circ$.

Trong tam giác EFK , ta có $\widehat{E} = 180^\circ - (\widehat{F} + \widehat{K}) = 180^\circ - (27^\circ + 56^\circ) = 97^\circ$.

Vậy tam giác ABC vuông; tam giác MNP nhọn; tam giác EFK tù.

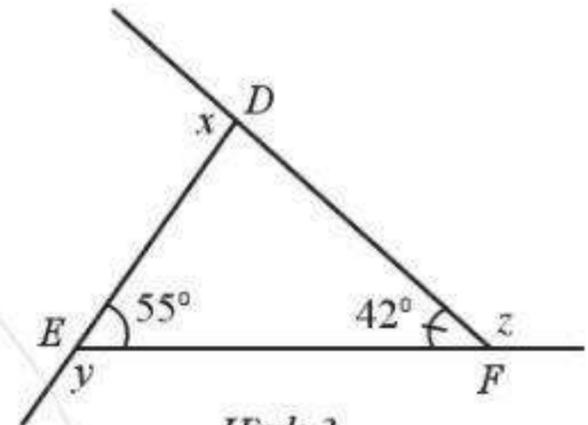
C. BÀI TẬP

1. Cho tam giác MHK vuông tại H . Ta có:

- A. $\widehat{M} + \widehat{K} > 90^\circ$. B. $\widehat{M} + \widehat{K} = 90^\circ$.
 C. $\widehat{M} + \widehat{K} < 90^\circ$. D. $\widehat{M} + \widehat{K} = 180^\circ$.

2. Quan sát Hình 3.

- a) Tính các số đo x, y, z .
 b) Hãy nhận xét về tổng các số đo $x + y + z$.



Hình 3

3. a) Cho biết một góc nhọn của tam giác vuông bằng 40° . Tính số đo góc nhọn còn lại.
 b) Cho một tam giác vuông có hai góc nhọn bằng nhau. Tính số đo mỗi góc nhọn đó.

4. Bạn Bình phát biểu: “Không có tam giác ABC nào mà $\widehat{A} = 3\widehat{B}$, $\widehat{B} = 3\widehat{C}$ và $\widehat{C} = 14^\circ$ ”. Phát biểu của bạn Bình có đúng không? Vì sao?

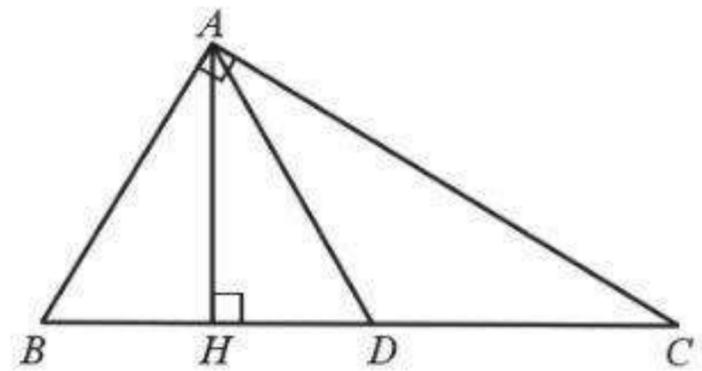
5. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$. Tia phân giác của góc C cắt cạnh AB tại M . Tính số đo của \widehat{AMC} và \widehat{BMC} .

6. Tính số đo các góc của tam giác ABC trong mỗi trường hợp sau:

- a) $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$;
 b) $\widehat{A} = 70^\circ$ và $\widehat{C} - \widehat{B} = 20^\circ$;
 c) Số đo của \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 3.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ AH vuông góc với BC tại H , AD là tia phân giác của \widehat{HAC} (Hình 4).

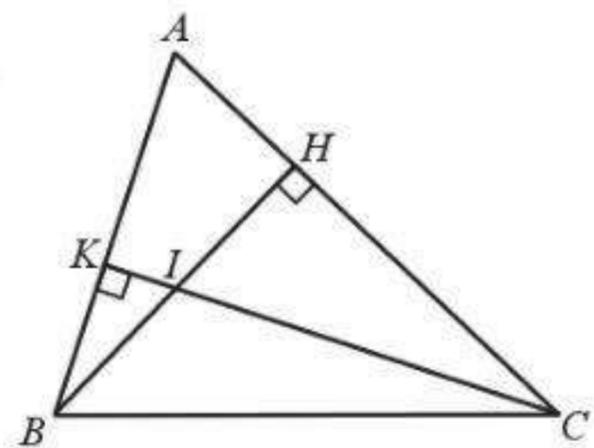
- a) Tìm các cặp góc có tổng số đo bằng 90° .
 b) Cho $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính số đo của \widehat{B} , \widehat{BDA} , \widehat{DAC} .
 c) Chứng minh: $\widehat{BAH} = \widehat{C}$; $\widehat{CAH} = \widehat{B}$;
 $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$.



Hình 4

8. Cho tam giác ABC . Kẻ BH vuông góc với AC tại H . Kẻ CK vuông góc với AB tại K , BH cắt CK tại I (Hình 5). Nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ thì khi đó ta có:

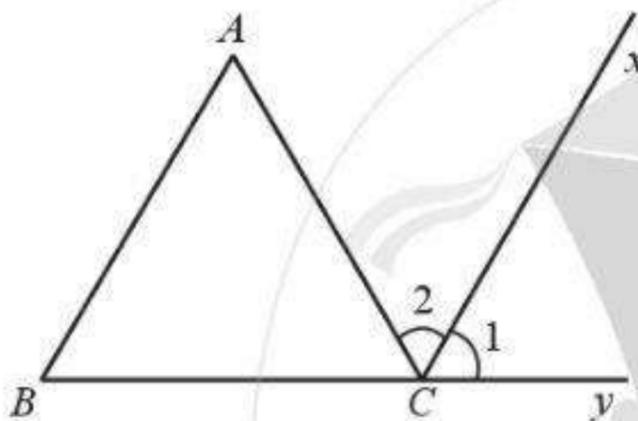
- A. $\widehat{ABH} < \widehat{ACK}$. B. $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.
 C. $\widehat{ABH} > \widehat{ACK}$. D. $\widehat{ABH} = 90^\circ + \widehat{ACK}$.



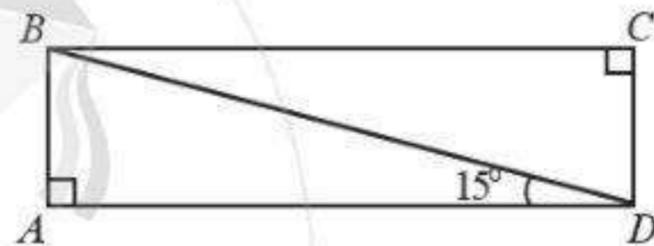
Hình 5

9. Cho tam giác ABC , tia phân giác của \widehat{BAC} cắt cạnh BC tại D . Tính số đo mỗi góc của tam giác ABC , biết $\widehat{ADB} = 80^\circ$ và $\widehat{B} = 1,5\widehat{C}$.

10. Ở Hình 6 có $\widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ$ và Cx là tia phân giác của góc ACy . Chứng minh Cx song song với AB .



Hình 6



Hình 7

11. Ở Hình 7 có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$, $\widehat{ADB} = 15^\circ$, AD song song với BC . Chứng minh AB song song với DC .

§2 QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Trong một tam giác:
 - + Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn;
 - + Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Nhận xét: Trong tam giác vuông, cạnh huyền là cạnh lớn nhất.

Trong tam giác tù, cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất.

- *Bất đẳng thức tam giác:* Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} + \widehat{B} = 120^\circ$ và $\widehat{A} - \widehat{B} = 30^\circ$.

a) So sánh các cạnh của tam giác.

b) Tia phân giác của \widehat{A} cắt cạnh BC tại D . So sánh \widehat{ADB} và \widehat{ADC} .

Giải. (Hình 8)

a) Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} = 120^\circ$ và $\widehat{A} - \widehat{B} = 30^\circ$.

Suy ra $2\widehat{A} = 150^\circ$ hay $\widehat{A} = 75^\circ$. Do đó:

$$\widehat{B} = 120^\circ - \widehat{A} = 45^\circ;$$

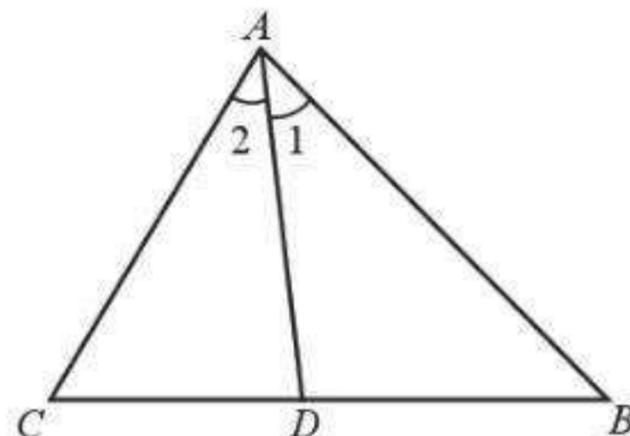
$$\widehat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ.$$

Vì $\widehat{B} < \widehat{C} < \widehat{A}$ nên $AC < AB < BC$.

b) Tam giác ABD có $\widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{A}_1 - \widehat{B}$.

Tam giác ACD có $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{A}_2 - \widehat{C}$.

Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{B} < \widehat{C}$ do đó $\widehat{ADC} < \widehat{ADB}$.



Hình 8

Ví dụ 2 Hai cạnh AB và AC của tam giác ABC có độ dài lần lượt là 8 cm và 3 cm. Tính độ dài cạnh BC , biết độ dài của nó (theo đơn vị xăng-ti-mét) là số tự nhiên chẵn.

Giải

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $BC < AB + AC$ và $AB < AC + BC$. Suy ra

$$BC < 8 + 3 = 11 \text{ (cm)} \text{ và } BC > 8 - 3 = 5 \text{ (cm)}.$$

Vì độ dài cạnh BC (theo đơn vị xăng-ti-mét) là một số tự nhiên chẵn nên BC có thể là 6 cm, 8 cm, 10 cm.

C. BÀI TẬP

12. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 3\widehat{B} = 6\widehat{C}$.

a) Tìm số đo góc lớn nhất, góc bé nhất của tam giác ABC .

b) Kẻ AD vuông góc với BC tại D . Chứng minh $AD < BD$.

13. Cho tam giác ABC có góc A tù. Trên cạnh AC lấy điểm D và E (D nằm giữa A và E). Chứng minh $BA < BD < BE < BC$.

14. a) Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm, $BC = 8$ cm. Tính độ dài cạnh AC , biết độ dài của nó (theo đơn vị xăng-ti-mét) là một số nguyên tố lớn hơn bình phương của 4.

b) Độ dài ba cạnh của tam giác MNP tỉ lệ với 2; 3; 4. Tính độ dài cạnh lớn nhất, biết tổng độ dài hai cạnh còn lại là 20 cm.

15. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, AD là tia phân giác của \widehat{BAD} ($D \in BC$). Chứng minh $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.

16. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 110^\circ$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{ADC} = 105^\circ$. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD cắt tia BA tại E . Chứng minh:

a) $AE < CE$;

b) $EC < BC < BE$.

17. Cho tam giác ABC , điểm D nằm giữa hai điểm B và C . Chứng minh AD nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ABC .

18*. Chứng minh rằng trong một tam giác, độ dài cạnh lớn nhất sẽ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ chu vi của tam giác nhưng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác đó.

§3 HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.

Quy ước: Khi viết hai tam giác bằng nhau, tên đỉnh của hai tam giác đó phải viết đúng theo thứ tự tương ứng với sự bằng nhau.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Chỉ ra:

a) Các cặp góc tương ứng bằng nhau;

b) Các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

Giải

a) Các cặp góc tương ứng bằng nhau: \widehat{A} và \widehat{M} , \widehat{B} và \widehat{N} , \widehat{C} và \widehat{P} .

b) Các cặp cạnh tương ứng bằng nhau: AB và MN , BC và NP , AC và MP .

Ví dụ 2 Cho biết $\Delta ABC = \Delta MNP$. Chứng minh chu vi của tam giác ABC bằng chu vi của tam giác MNP .

Giải

Từ $\Delta ABC = \Delta MNP$ suy ra $AB = MN, BC = NP, AC = MP$, do đó

$$AB + BC + AC = MN + NP + MP.$$

Vậy chu vi của tam giác ABC bằng chu vi của tam giác MNP .

Ví dụ 3 Cho $\Delta ABC = \Delta OPQ$ có $BC = 10$ cm, $AB : AC = 7 : 8$ và $AB + AC = 15$ cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác OPQ .

Giải

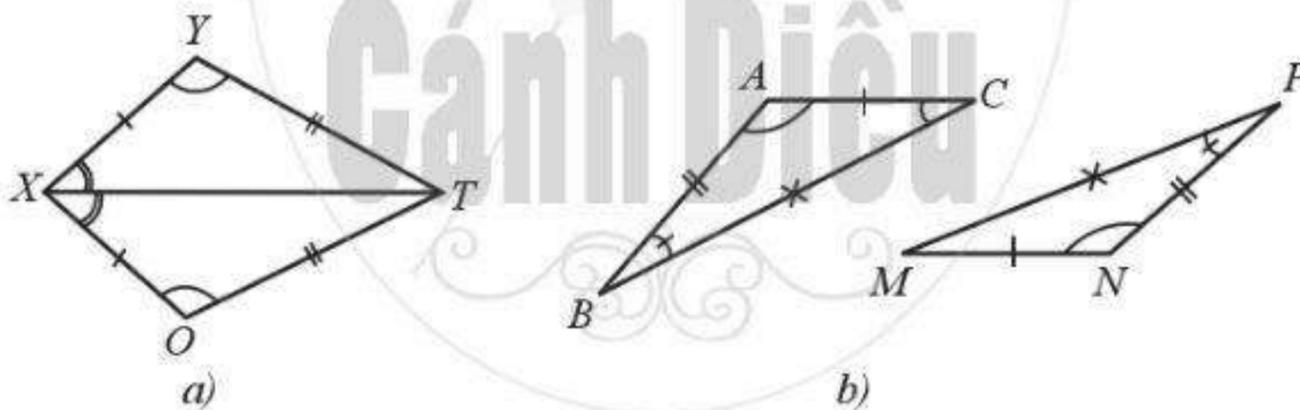
Từ $\Delta ABC = \Delta OPQ$ suy ra $AB = OP, BC = PQ, AC = OQ$.

Ta có $\frac{AB}{7} = \frac{AC}{8} = \frac{AB + AC}{7 + 8} = \frac{15}{15} = 1$ suy ra $AB = 7$ (cm), $AC = 8$ (cm).

Do đó $OP = 7$ cm, $OQ = 8$ cm, $PQ = 10$ cm.

C. BÀI TẬP

19. Quan sát các hình 9a, 9b, viết các cặp tam giác bằng nhau.



Hình 9

20. Cho hai tam giác bằng nhau: tam giác ABC và một tam giác có ba đỉnh là X, Y, Z .

Viết kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = \widehat{X}, \widehat{B} = \widehat{Z};$

b) $AB = XY, BC = YZ.$

21. Bạn Sơn cho rằng “Nếu độ dài các cạnh của tam giác ABC đều là số tự nhiên và $\Delta ABC = \Delta MNP$ thì tổng chu vi của tam giác ABC và tam giác MNP là số lẻ”. Bạn Sơn nói như vậy có đúng không? Vì sao?

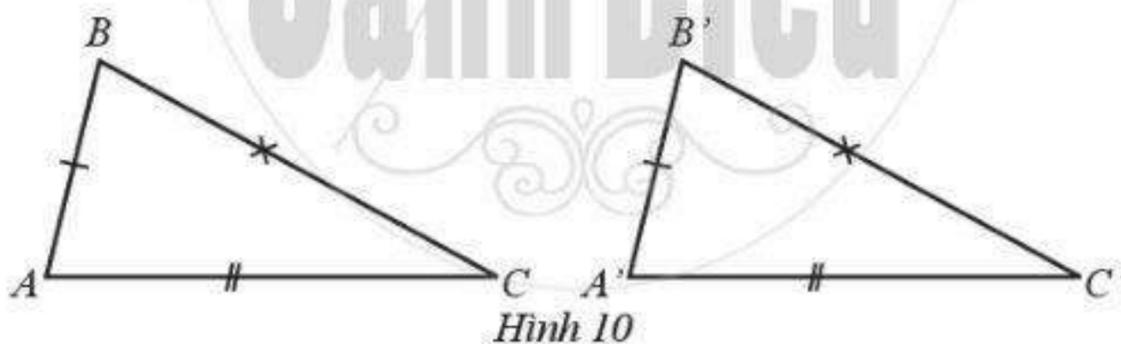
22. Cho $\triangle ABC = \triangle DEG$ có $AB = 4$ dm, $BC = 7$ dm, $CA = 9,5$ dm. Tính chu vi của tam giác DEG .
23. Cho $\triangle ABC = \triangle GIK$ có số đo \widehat{G} , \widehat{I} , \widehat{K} tỉ lệ với 2; 3; 4. Tính số đo mỗi góc của tam giác ABC .
24. Cho $\triangle ABC = \triangle XYZ$ có $3BC = 5AB$, $YZ - XY = 10$ cm và $AC = 35$ cm. Tính độ dài mỗi cạnh của tam giác XYZ .
25. Cho $\triangle ABC = \triangle XYZ$ có $\widehat{A} + \widehat{Y} = 120^\circ$ và $\widehat{A} - \widehat{Y} = 40^\circ$. Tính số đo mỗi góc của từng tam giác trên.
26. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại O tạo thành góc BOC bằng 120° . Tính tổng số đo các góc MNP và MPN của tam giác MNP .

§4 TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC: CẠNH - CẠNH - CẠNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

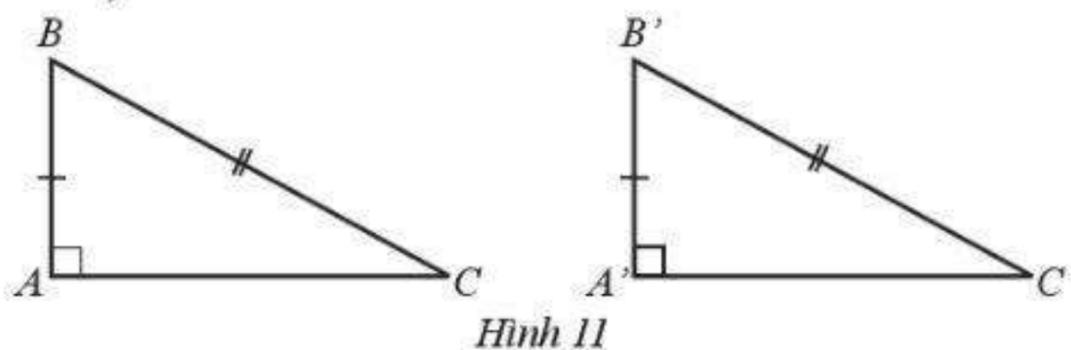
– Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Nếu $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$ thì $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.c.c) (Hình 10).



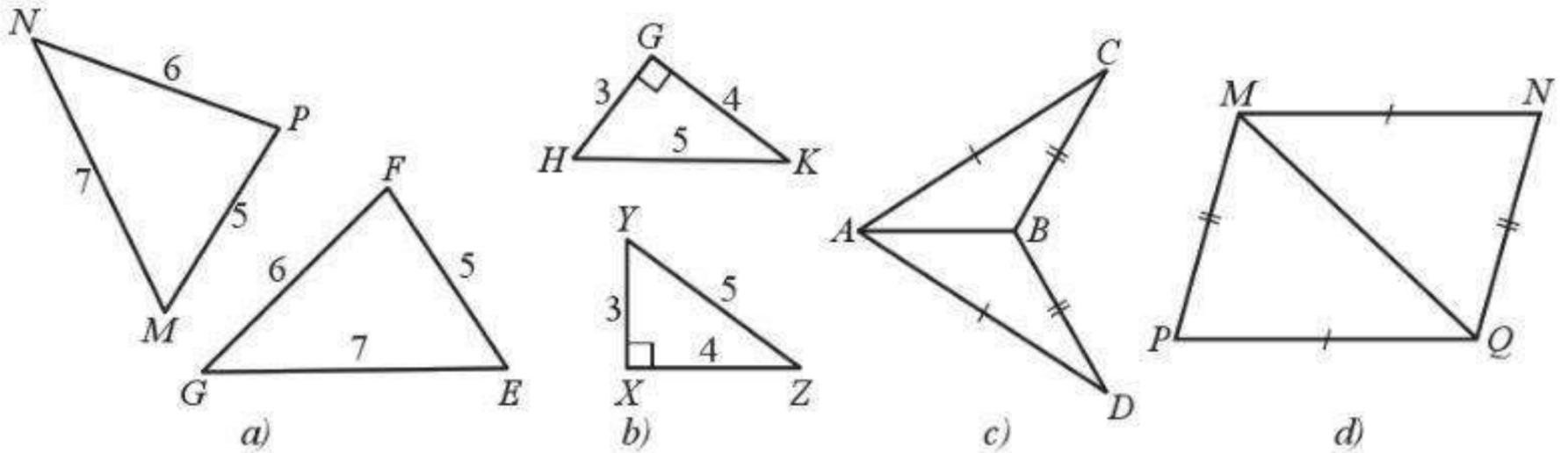
– Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Nếu $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A}' = 90^\circ$ thì $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) (Hình 11).



B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trên mỗi hình 12a, 12b, 12c, 12d, cho biết cặp tam giác nào bằng nhau. Vì sao?



Hình 12

Giải

Trong mỗi hình 12a, 12b, 12c, 12d, các cặp tam giác bằng nhau như sau:

Tên	Cặp tam giác bằng nhau	Lí do
Hình 12a	$\triangle MNP = \triangle EGF$ (c.c.c)	$MN = EG, NP = GF, MP = EF$
Hình 12b	$\triangle GHK = \triangle XYZ$ (c.c.c)	$GH = XY, HK = YZ, GK = XZ$
Hình 12c	$\triangle ABC = \triangle ABD$ (c.c.c)	AB chung, $BC = BD, AC = AD$
Hình 12d	$\triangle MPQ = \triangle QNM$ (c.c.c)	MQ chung, $MP = QN, PQ = NM$

Ví dụ 2 Ở Hình 13 có $AD = DB, AE = EB$. Chứng minh:

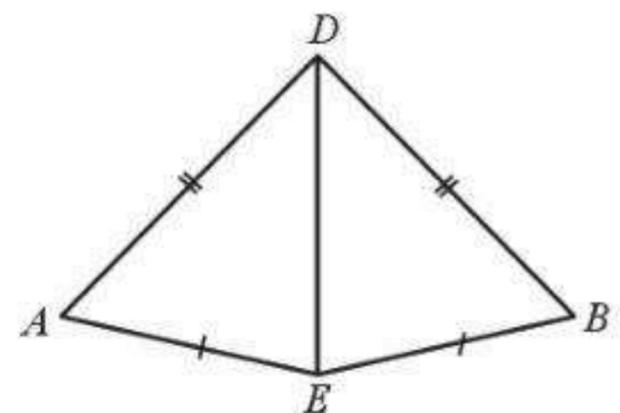
- $\widehat{DAE} = \widehat{DBE}$;
- ED là tia phân giác của góc AEB .

Giải

- Xét hai tam giác DAE và DBE , ta có: $AD = BD$;
 $AE = EB$; DE là cạnh chung.
Suy ra $\triangle DAE = \triangle DBE$ (c.c.c).

Do đó $\widehat{DAE} = \widehat{DBE}$ (hai góc tương ứng).

- Vì $\triangle DAE = \triangle DBE$ nên $\widehat{AED} = \widehat{BED}$ (hai góc tương ứng). Vậy ED là tia phân giác của góc AEB .



Hình 13

Ví dụ 3 Ở Hình 14 có $MN = MP$, $\widehat{MNQ} = \widehat{MPQ} = 90^\circ$. Chứng minh:

- a) $\triangle MNQ = \triangle MPQ$;
 b) Tính số đo góc NMP , biết $\widehat{NQP} = 120^\circ$.

Giải

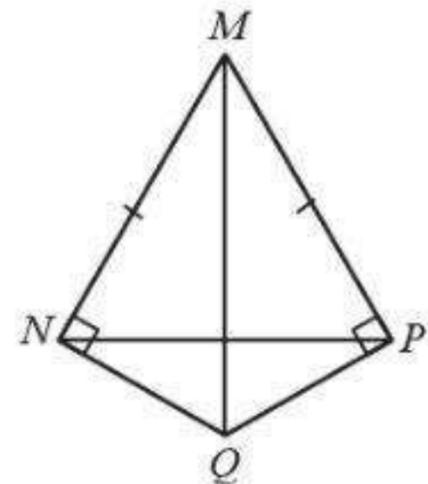
- a) Xét hai tam giác vuông MNQ và MPQ , ta có:

MQ là cạnh chung; $MN = MP$.

Suy ra $\triangle MNQ = \triangle MPQ$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

- b) Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{NMP} &= \widehat{NMQ} + \widehat{PMQ} = (90^\circ - \widehat{NQM}) + (90^\circ - \widehat{MQP}) \\ &= 180^\circ - (\widehat{NQM} + \widehat{MQP}) = 180^\circ - \widehat{NQP} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ. \end{aligned}$$

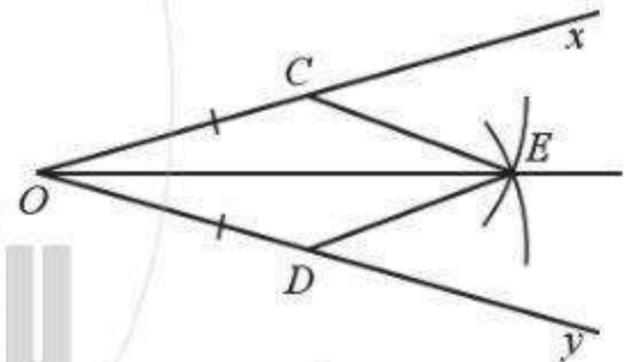


Hình 14

C. BÀI TẬP

27. Cho bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn tâm O sao cho $AB = CD$. Chứng minh $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

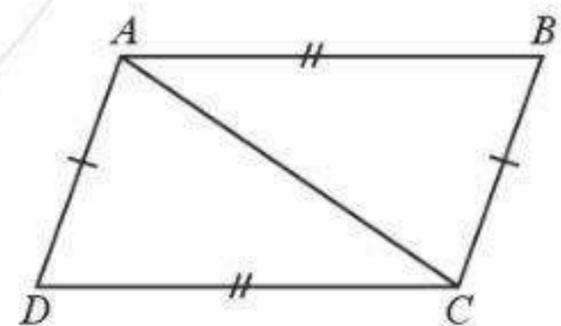
28. Cho góc xOy . Trên tia Ox lấy điểm C , trên tia Oy lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Vẽ một phần đường tròn tâm C và tâm D có cùng bán kính, E là điểm chung của hai phần đường tròn đó (E nằm trong góc xOy) (Hình 15). Vẽ các đoạn thẳng CE, DE . Chứng minh:



Hình 15

- a) $\triangle OCE = \triangle ODE$;
 b) OE là tia phân giác của góc xOy ;
 c) $\widehat{OCE} = \widehat{ODE}$.

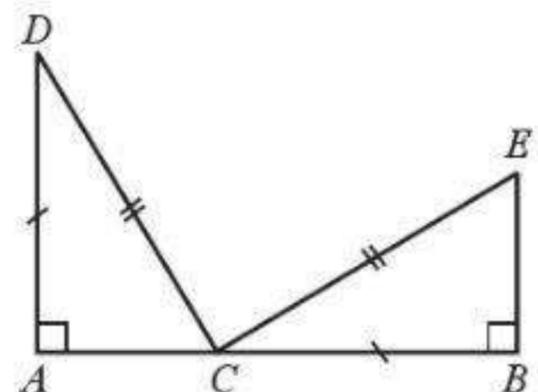
29. Ở Hình 16 có $AB = CD, AD = BC$. Chứng minh:



Hình 16

- a) AB song song với CD ;
 b) $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

30. Ở Hình 17 có ba điểm A, B, C thẳng hàng; AD và BE vuông góc với AB ; $AD = BC$; $DC = CE$. Chứng minh:



Hình 17

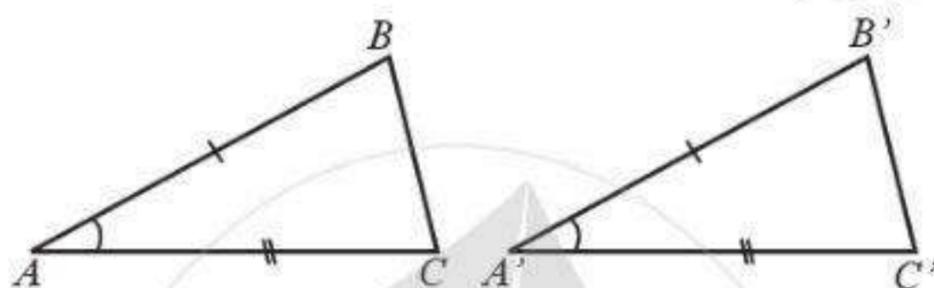
- a) $\triangle DAC = \triangle CBE$;
 b) $\widehat{DCE} = 90^\circ$.

§5 TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC: CẠNH - GÓC - CẠNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này lần lượt bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

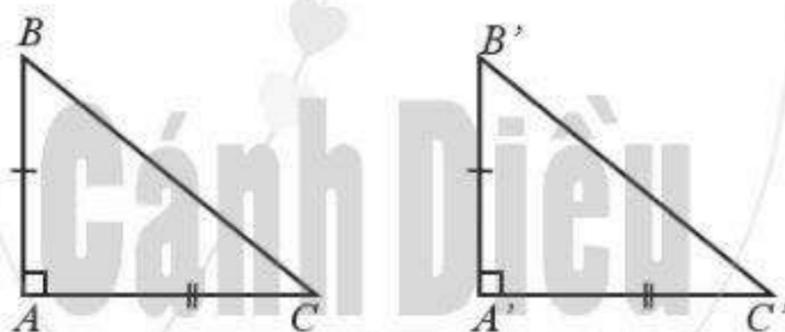
Nếu $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c) (Hình 18).



Hình 18

– Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

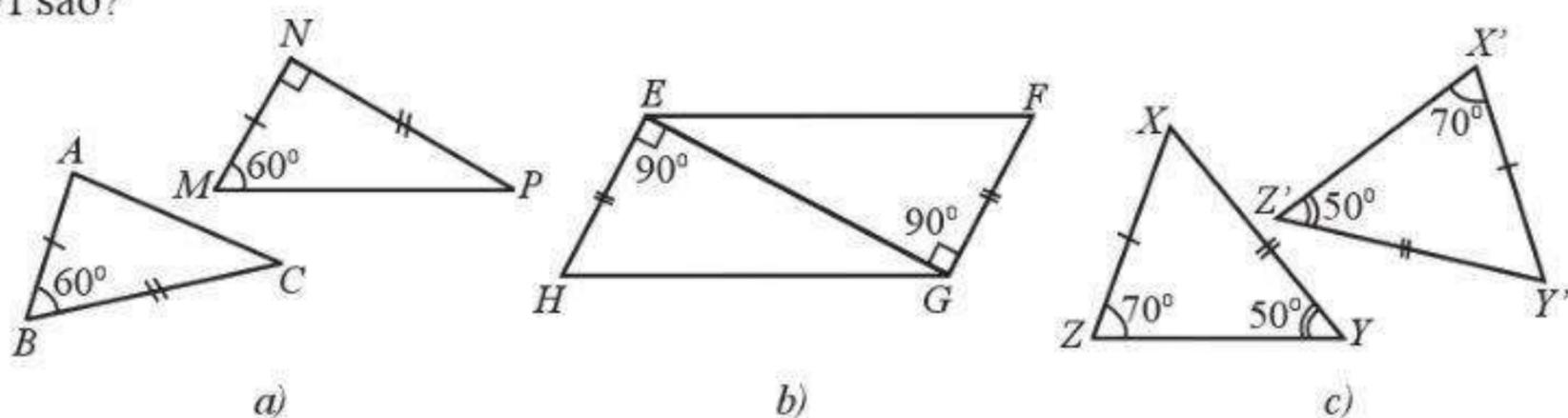
Nếu $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A}' = 90^\circ$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (hai cạnh góc vuông) (Hình 19).



Hình 19

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Quan sát mỗi hình 20a, 20b, 20c và cho biết cặp tam giác nào bằng nhau. Vì sao?



Hình 20

Giải

– Ở Hình 20a, tam giác ABC không bằng tam giác MNP do $AB = MN$; $BC = NP$ nhưng \widehat{ABC} và \widehat{MNP} không cùng bằng 60° .

– Ở Hình 20b, xét hai tam giác vuông EGH và GEF , ta có:

EG là cạnh chung; $HE = FG$.

Suy ra $\triangle EGH = \triangle GEF$ (hai cạnh góc vuông).

– Ở Hình 20c, ta có:

$\widehat{X} + \widehat{Y} + \widehat{Z} = 180^\circ$; $\widehat{Y}' + \widehat{Z}' + \widehat{X}' = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác).

Mà $\widehat{Y} = \widehat{Z}'$ (cùng bằng 50°); $\widehat{Z} = \widehat{X}'$ (cùng bằng 70°) nên $\widehat{X} = \widehat{Y}'$.

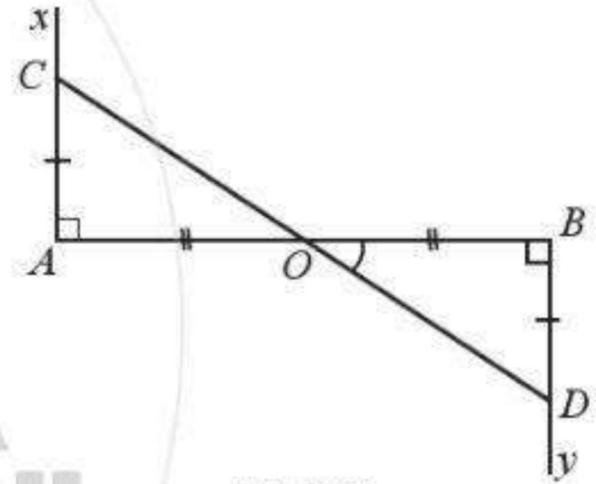
Xét hai tam giác XYZ và $Y'Z'X'$, ta có: $XY = Y'Z'$; $\widehat{X} = \widehat{Y}'$; $XZ = Y'X'$.

Suy ra $\triangle XYZ = \triangle Y'Z'X'$ (c.g.c).

Ví dụ 2 Cho đoạn thẳng AB . Vẽ tia Ax vuông góc với AB , tia By vuông góc với AB . Trên tia Ax , By lần lượt lấy hai điểm C , D sao cho $AC = BD$, lấy O là trung điểm của AB (Hình 21). Chứng minh:

a) $\triangle OAC = \triangle OBD$;

b) O là trung điểm của CD .



Hình 21

Giải

a) Xét hai tam giác vuông OAC và OBD , ta có: $OA = OB$; $AC = BD$.

Suy ra $\triangle OAC = \triangle OBD$ (hai cạnh góc vuông).

b) Do $\triangle OAC = \triangle OBD$ nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (hai góc tương ứng) và $OC = OD$ (hai cạnh tương ứng).

Ta có $\widehat{COD} = \widehat{COB} + \widehat{BOD} = \widehat{COB} + \widehat{AOC} = \widehat{AOB} = 180^\circ$.

Do đó C , O , D thẳng hàng. Mà $OC = OD$ nên O là trung điểm của CD .

C. BÀI TẬP

31. Hai đoạn thẳng BE và CD vuông góc với nhau tại A sao cho $AB = AD$, $AC = AE$, $AB > AC$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**? Vì sao?

a) $\triangle AED = \triangle ACB$.

b) $DE = BC$.

c) $\triangle ACE = \triangle ABD$.

d) $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$.

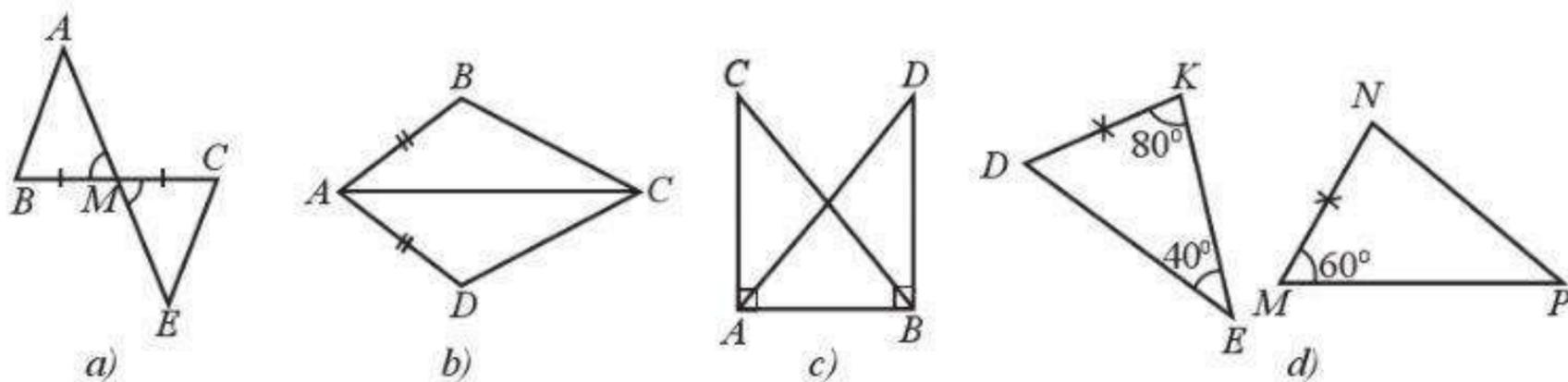
32. Nêu thêm một điều kiện để hai tam giác trong mỗi hình 22a, 22b, 22c, 22d là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh.

a) $\triangle MAB = \triangle MEC$ (Hình 22a).

b) $\triangle BAC = \triangle DAC$ (Hình 22b).

c) $\triangle CAB = \triangle DBA$ (Hình 22c).

d) $\triangle KDE = \triangle NMP$ (Hình 22d).



Hình 22

33. Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB , AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = AB$ và $AE = AC$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và DE . Chứng minh:

a) $\triangle ABC = \triangle ADE$;

b) $DE = BC$ và DE song song với BC ;

c) $\triangle AEN = \triangle ACM$;

d) M, A, N thẳng hàng.

34. Cho điểm M nằm giữa hai điểm O và A . Vẽ các điểm N và B sao cho O là trung điểm của cả AB và MN . Vẽ tia Ox vuông góc với AB , trên tia Ox lấy điểm K . Chứng minh:

a) $\triangle KOM = \triangle KON$;

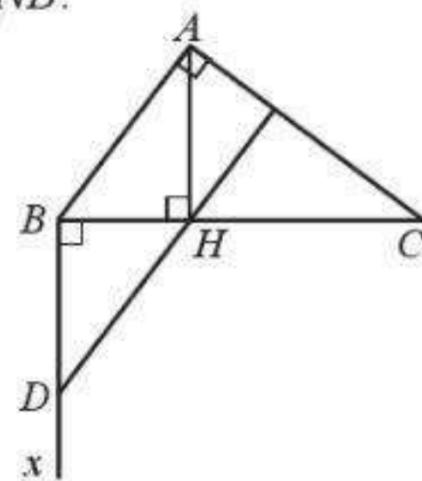
b) $\triangle KMA = \triangle KNB$.

35. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 53^\circ$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$, AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Vẽ tia Bx vuông góc với BC . Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD = HA$ (Hình 23).

a) Chứng minh $\triangle AHB = \triangle DBH$.

b) Chứng minh DH vuông góc với AC .

c) Tính số đo góc BDH .

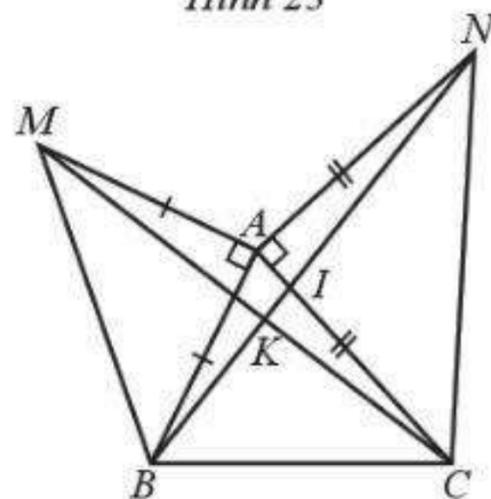


Hình 23

36*. Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Lấy hai điểm M , N nằm ngoài tam giác ABC sao cho MA vuông góc với AB , NA vuông góc với AC và $MA = AB$, $NA = AC$. Gọi I , K lần lượt là giao điểm của BN với AC , MC (Hình 24). Chứng minh:

a) $\triangle AMC = \triangle ABN$;

b) BN vuông góc với CM .



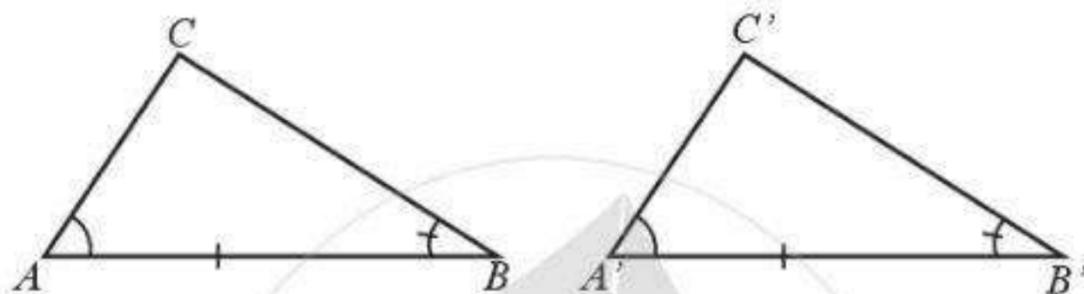
Hình 24

§6 TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC: GÓC - CẠNH - GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Nếu $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'B'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (g.c.g) (Hình 25).



Hình 25

– Nếu một cạnh góc vuông và góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

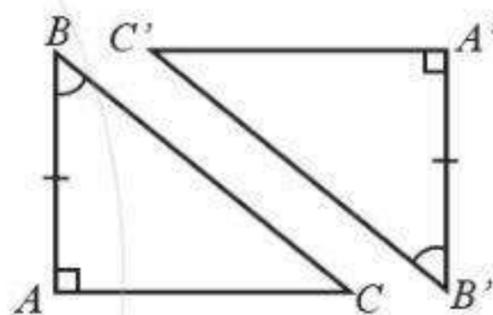
Nếu $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ$, $AB = A'B'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ thì

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cạnh góc vuông - góc nhọn) (Hình 26).

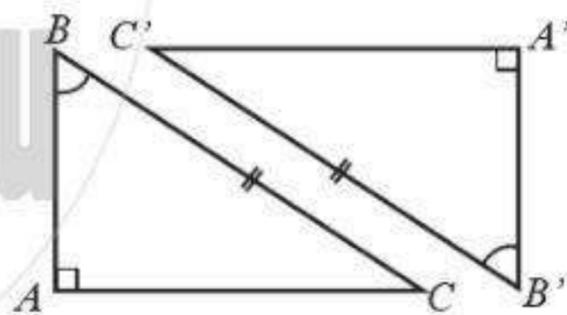
– Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Nếu $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ$, $BC = B'C'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ thì

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cạnh huyền - góc nhọn) (Hình 27).



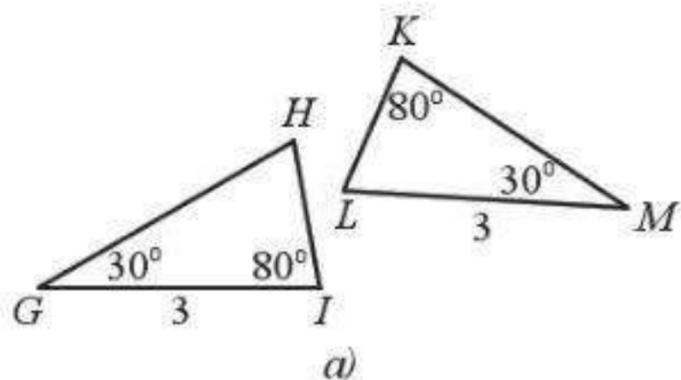
Hình 26



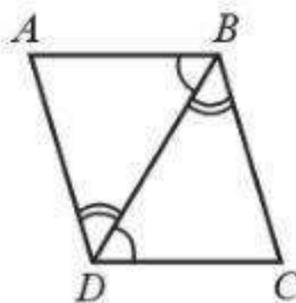
Hình 27

B. VÍ DỤ

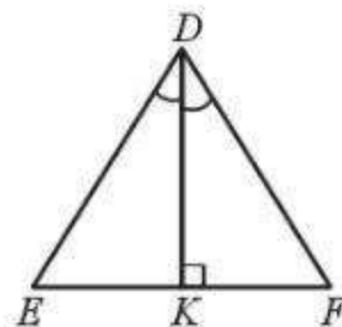
Ví dụ 1 Quan sát mỗi hình 28a, 28b, 28c và cho biết cặp tam giác nào bằng nhau. Vì sao?



a)



b)



c)

Hình 28

Giải

– Ở Hình 28a, dễ thấy $\widehat{KLM} = 180^\circ - (\widehat{LKM} + \widehat{LMK}) = 70^\circ$.

Tam giác HGI không bằng tam giác KML do $\widehat{KML} = \widehat{HGI}$; $GI = ML$ nhưng $\widehat{KLM} < \widehat{HIG}$ (vì $70^\circ < 80^\circ$).

– Ở Hình 28b, xét hai tam giác ABD và CDB , ta có:

$$\widehat{ABD} = \widehat{CDB}; BD \text{ là cạnh chung}; \widehat{ADB} = \widehat{CBD}.$$

Suy ra $\Delta ABD = \Delta CDB$ (g.c.g).

– Ở Hình 28c, xét hai tam giác vuông DKE và DKF , ta có:

$$DK \text{ là cạnh chung}; \widehat{EDK} = \widehat{FDK}.$$

Suy ra $\Delta DKE = \Delta DKF$ (cạnh góc vuông - góc nhọn).

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC . Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại K . Vẽ KM vuông góc với AB tại M , KN vuông góc với AC tại N . Chứng minh $KM = KN$.

Giải. (Hình 29)

Vẽ KI vuông góc với BC tại I .

Xét hai tam giác vuông BMK và BIK , ta có:

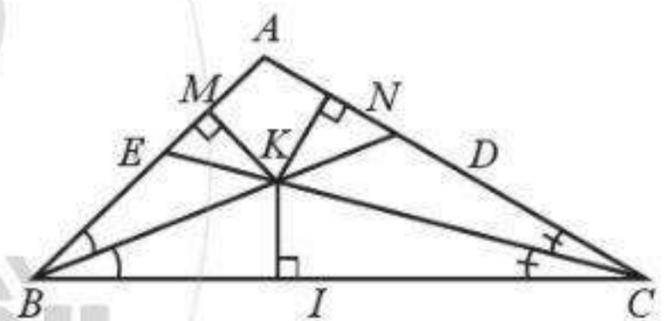
$$BK \text{ là cạnh chung}; \widehat{MBK} = \widehat{IBK}.$$

Suy ra $\Delta BMK = \Delta BIK$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Do đó $KM = KI$ (hai cạnh tương ứng).

Tương tự, ta có $KN = KI$.

Vậy $KM = KN$ (cùng bằng KI).



Hình 29

Ví dụ 3 Ở Hình 30 có $\widehat{xAD} = 134^\circ$,

$\widehat{yDA} = 46^\circ$ và $AB = CD$. Chứng minh I là trung điểm của mỗi đoạn thẳng BD và AC .

Giải

Ta có $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{yDA} = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$.

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{xAD}$ (cùng bằng 134°), mà chúng ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CD$.

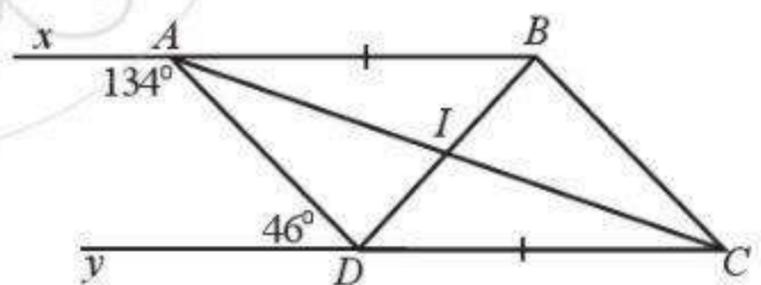
Do đó $\widehat{CAB} = \widehat{ACD}$, $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong).

Xét hai tam giác IAB và ICD , ta có:

$$\widehat{IAB} = \widehat{ICD}; AB = CD; \widehat{IBA} = \widehat{IDC}.$$

Suy ra $\Delta IAB = \Delta ICD$ (g.c.g).

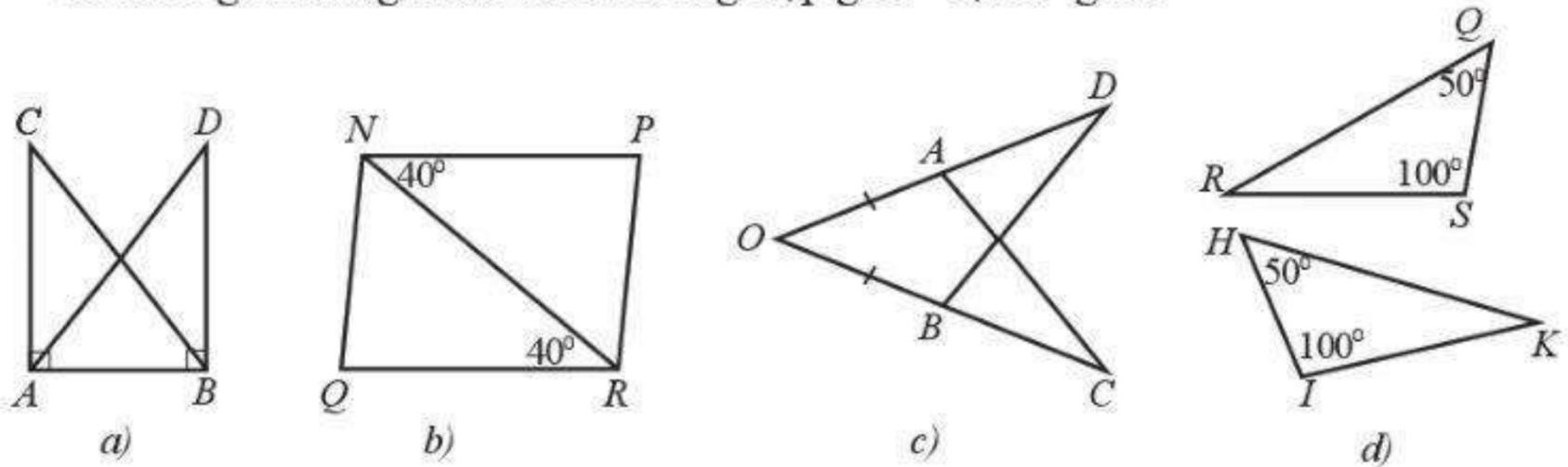
Do đó $IB = ID$, $IA = IC$ hay I là trung điểm của mỗi đoạn thẳng BD và AC .



Hình 30

C. BÀI TẬP

37. Nêu thêm một điều kiện để hai tam giác trong mỗi hình 31a, 31b, 31c, 31d là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc.



Hình 31

a) $\triangle CAB = \triangle DBA$ (Hình 31a).

b) $\triangle NRQ = \triangle RNP$ (Hình 31b).

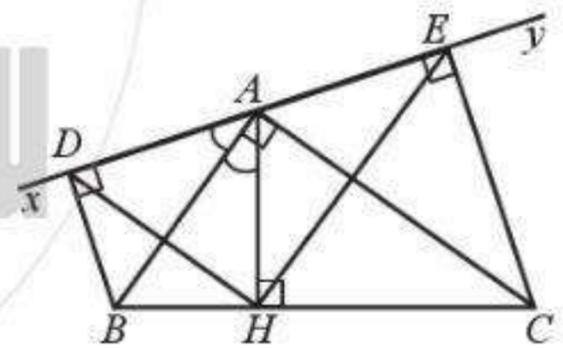
c) $\triangle OAC = \triangle OBD$ (Hình 31c).

d) $\triangle SRQ = \triangle IKH$ (Hình 31d).

38. Cho $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H , $A'H'$ vuông góc với $B'C'$ tại H' . Chứng minh $AH = A'H'$.

39. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi D là trung điểm của BC . Vẽ CM vuông góc với AB tại M , BN vuông góc với AC tại N . Chứng minh $AM = AN$.

40. Cho Hình 32 có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, AH vuông góc với BC tại H , $\widehat{xAB} = \widehat{BAH}$, Ay là tia đối của tia Ax . BD và CE vuông góc với xy lần lượt tại D và E . Chứng minh:



Hình 32

a) AC là tia phân giác của góc HAy ;

b) $BD + CE = BC$;

c) DH vuông góc với HE .

41. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và $\widehat{A} = 60^\circ$. Tia phân giác của góc ABC cắt AC tại D , tia phân giác của góc ACB cắt AB tại E . BD cắt CE tại I . Tia phân giác của góc BIC cắt BC tại F . Chứng minh:

a) $\widehat{BIC} = 120^\circ$;

b) $\triangle BEI = \triangle BFI$;

c) $BC = BE + CD$.

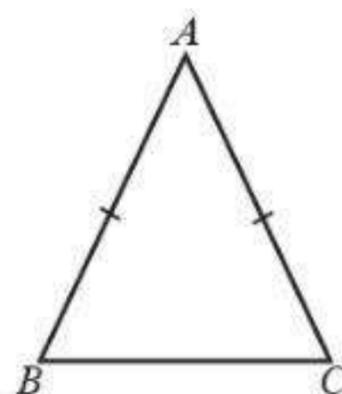
42*. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, M là trung điểm của BC . Chứng minh $BC = 2AM$.

§7 TAM GIÁC CÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Định nghĩa:* Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau. Tam giác cân ABC có $AB = AC$ (Hình 33) ta gọi:

- Tam giác ABC là tam giác cân tại A ;
- AB, AC là các cạnh bên và BC là cạnh đáy;
- \widehat{B}, \widehat{C} là các góc ở đáy và \widehat{A} là góc ở đỉnh.



Hình 33

– *Tính chất:* Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

– *Dấu hiệu nhận biết:* Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

B. VÍ DỤ

Ví dụ Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Chứng minh MN song song với BC .

Giải. (Hình 34)

Vì tam giác ABC cân tại A nên

$$AB = AC \text{ (hai cạnh bên)} \quad (1)$$

Do M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC nên

$$AM = \frac{AB}{2}, AN = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$. Do đó tam giác AMN cân tại A .

Trong tam giác ABC cân tại A , ta có:

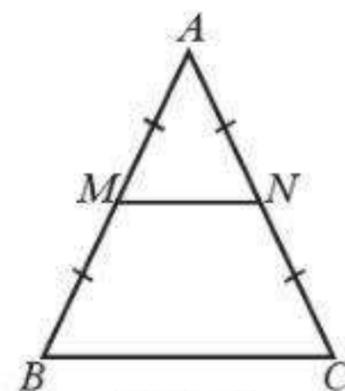
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc của một tam giác);}$$

$$\widehat{B} = \widehat{C} \text{ (hai góc ở đáy).}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^\circ \text{ hay } \widehat{B} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}.$$

$$\text{Tương tự như trên, trong tam giác } AMN \text{ cân tại } A, \text{ ta có } \widehat{AMN} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}.$$

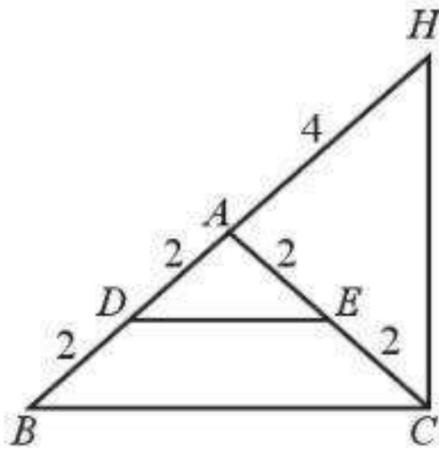
Vì vậy, $\widehat{B} = \widehat{AMN}$ (cùng bằng $\frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$), mà chúng ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel BC$.



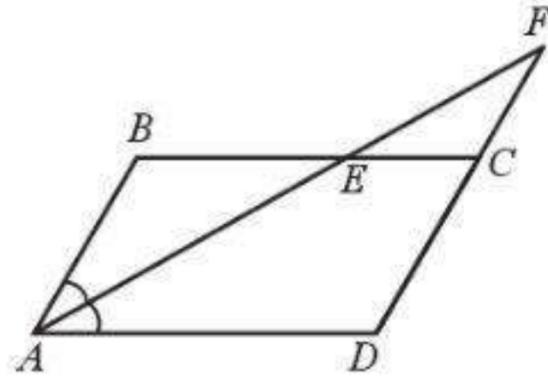
Hình 34

C. BÀI TẬP

43. Tìm các tam giác cân trên Hình 35. Kể tên các cạnh bên, cạnh đáy, góc ở đáy, góc ở đỉnh của mỗi tam giác cân đó.



Hình 35



Hình 36

44. Ở Hình 36 có AB song song với CD , BC song song với AD . Tia phân giác của góc BAD cắt BC tại E và cắt tia CD tại F .

- Chứng minh các tam giác ABE , CEF , DAF là các tam giác cân.
- Tính số đo mỗi góc của tam giác ADF , biết $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

45. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 56^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M sao cho $AC = CM$. Tính số đo mỗi góc của tam giác ABM .

46. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Tính số đo góc BAC , biết $IA = IB = IC$.

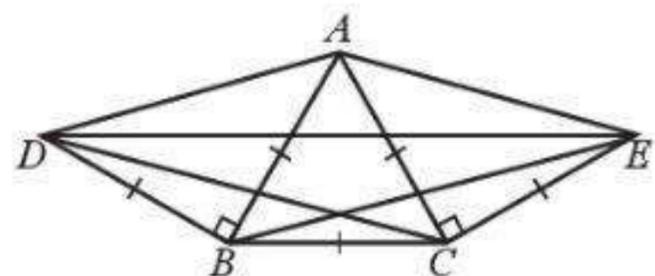
47. Cho tam giác MNP cân tại P . Lấy điểm A trên cạnh PM , điểm B trên cạnh PN sao cho $PA = PB$. Gọi O là giao điểm của NA và MB . Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

48. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Trên cạnh BC lấy các điểm D, E sao cho $BD = BA$, $CE = CA$.

- Chứng minh các tam giác BAD , CAE , AED là các tam giác cân.
- Tính số đo mỗi góc của tam giác ADE .

49. Cho Hình 37 có $AB = AC = BC = BD = CE$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^\circ$.

- Chứng minh tam giác AED là tam giác cân.
- Tính số đo các góc của tam giác ADE .
- Chứng minh $DC = BE$.



Hình 37

50. Cho tam giác đều ABC . Gọi E, D, F là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, AC, BC sao cho $AD = CF = BE$. Chứng minh tam giác DEF là tam giác đều.

51*. Cho tam giác ABC . Trên cạnh BA lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Gọi O là giao điểm của DE và BC . Biết $OD = OE$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân.

§8 ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

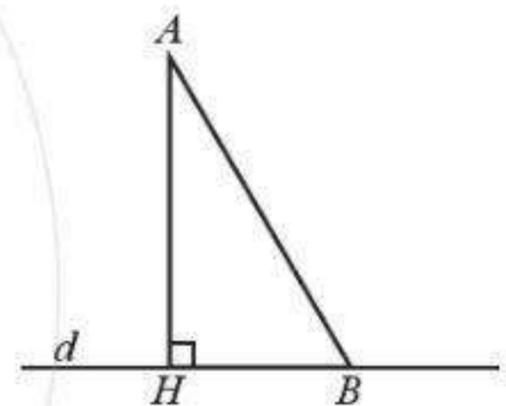
– Trong Hình 38, ta gọi

+ Đoạn thẳng AH là đoạn vuông góc hay đường vuông góc kẻ từ điểm A đến đường thẳng d ;

+ Điểm H là chân của đường vuông góc hay hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d ;

+ Độ dài đoạn thẳng AH là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d ;

+ Đoạn thẳng AB là một đường xiên kẻ từ điểm A đến đường thẳng d .



Hình 38

– Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Quan sát Hình 39 và so sánh độ dài AB và AD .

Giải

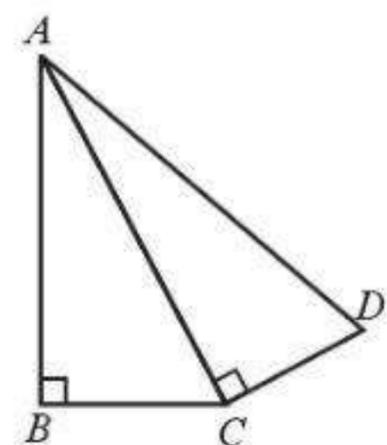
Ta có AB và AC lần lượt là đường vuông góc và đường xiên kẻ từ điểm A đến đường thẳng BC .

$$\text{Suy ra } AB < AC \quad (1)$$

Ta lại có AC và AD lần lượt là đường vuông góc và đường xiên kẻ từ điểm A đến đường thẳng CD .

$$\text{Suy ra } AC < AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB < AD$.



Hình 39

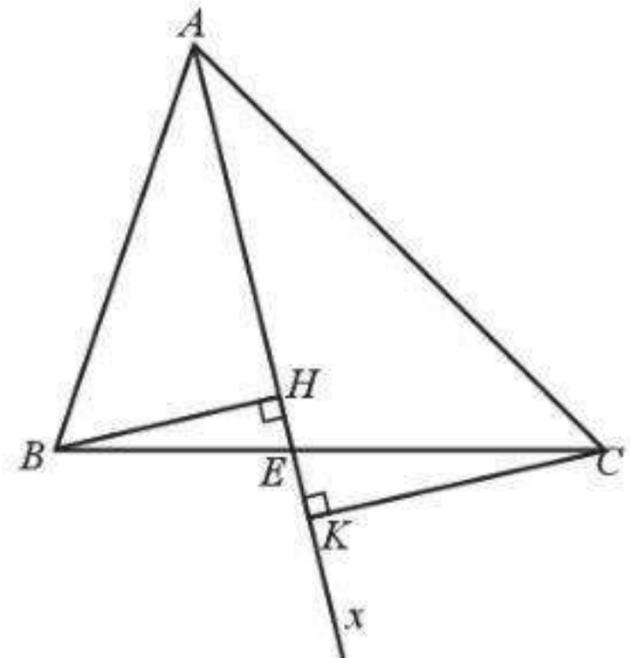
57. Cho tam giác ABC vuông tại A , tia phân giác của góc B cắt AC ở D . So sánh độ dài AD và DC .

58. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), BD là tia phân giác của góc ABC ($D \in AC$). Qua C kẻ tia Cx vuông góc với AC cắt BD tại M .

- Chứng minh tam giác CBM là tam giác cân.
- So sánh độ dài CM và AC .

59. Cho tam giác ABC có \widehat{B} và \widehat{C} nhọn. H và K lần lượt là hình chiếu của B và C trên Ax (Hình 41). Chứng minh:

- $BH + CK \leq BC$.
- Nếu tổng $BH + CK$ lớn nhất thì tia Ax phải vuông góc với BC .



Hình 41

§9 ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Định nghĩa:* Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng đó tại trung điểm của nó.

– *Tính chất:*

- + Một điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó;
- + Điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

B. VÍ DỤ

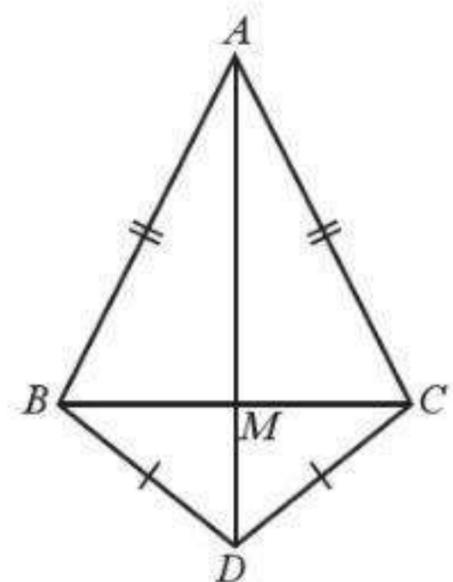
Ví dụ 1 Ở Hình 42 có $AB = AC, DB = DC$; M là giao điểm của AD và BC . Chứng minh M là trung điểm của BC .

Giải

Do $AB = AC$ nên A thuộc đường trung trực của BC .

Mặt khác, $DB = DC$ nên D cũng thuộc đường trung trực của BC .

Vậy đường thẳng AD là đường trung trực của BC . Mà M nằm trên AD , do đó $MB = MC$ hay M là trung điểm của BC .



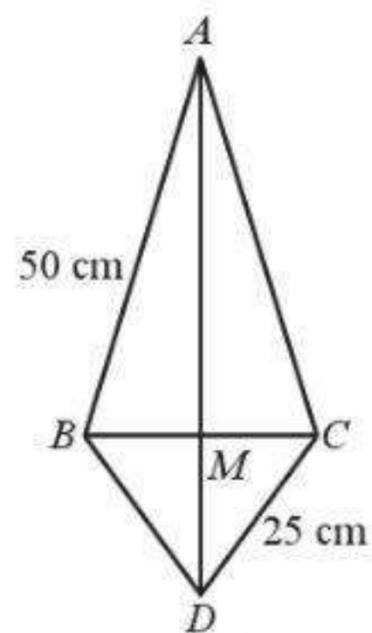
Hình 42

Ví dụ 2 Bạn Đức làm một chiếc điều có dạng như Hình 43, biết điểm A và D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC . Tính độ dài các nẹp AC và DB .

Giải

Do A và D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC nên

$$AC = AB = 50 \text{ cm}; DB = DC = 25 \text{ cm}.$$



Hình 43

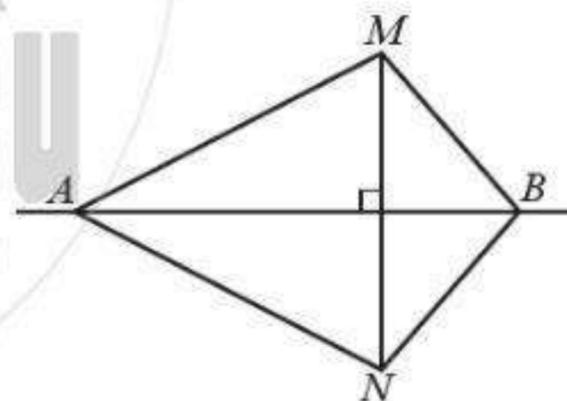
C. BÀI TẬP

60. Xác định điểm M thuộc đường thẳng BC sao cho M cách đều A và B trong mỗi trường hợp sau:

- Tam giác nhọn ABC ;
- Tam giác ABC có góc B là góc tù;
- Tam giác ABC vuông tại B .

61. Một con đường liên xã cách không xa hai địa điểm dân cư và hai địa điểm này nằm ở cùng một phía của con đường. Hãy xác định một địa điểm trên con đường đó để xây dựng nhà văn hoá xã sao cho nhà văn hoá đó cách đều hai địa điểm dân cư.

62. Quan sát Hình 44, biết $\triangle MAB = \triangle NAB$. Chứng minh đường thẳng AB là đường trung trực của đoạn thẳng MN .



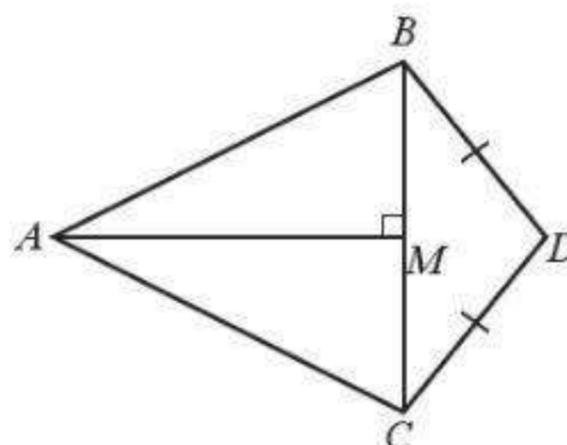
Hình 44

63. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Đường trung trực của đoạn thẳng BC cắt cạnh AC tại M . Chứng minh $AM + BM = AC$.

64. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 30^\circ$. Đường trung trực của BC cắt AC tại M . Chứng minh:

- BM là tia phân giác của góc ABC ;
- $MA < MC$.

65. Quan sát Hình 45, biết AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC và $DB = DC$. Chứng minh ba điểm A, M, D thẳng hàng.



Hình 45

66. Cho tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm BC ; ME vuông góc với AB tại E , MF vuông góc với AC tại F . Chứng minh:
- AM là trung trực của đoạn thẳng BC ;
 - $ME = MF$ và AM là đường trung trực của đoạn thẳng EF .
67. Cho tam giác ABC cân tại A . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt cạnh AB tại D . Biết CD là tia phân giác của góc ACB . Tính số đo mỗi góc của tam giác ABC .
68. Cho góc xOy khác góc bẹt. Oz là tia phân giác của góc đó, M là một điểm bất kì thuộc tia Oz . Qua M vẽ đường thẳng a vuông góc với Ox tại A , cắt Oy tại C . Qua M vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy tại B , cắt Ox tại D . Chứng minh:
- OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB ;
 - Tam giác DMC là tam giác cân.
69. Cho góc xOy nhọn. Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Đường trung trực của đoạn thẳng OA và đường trung trực của đoạn thẳng OB cắt nhau tại I . Chứng minh:
- OI là tia phân giác của góc xOy ;
 - OI là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

§10 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

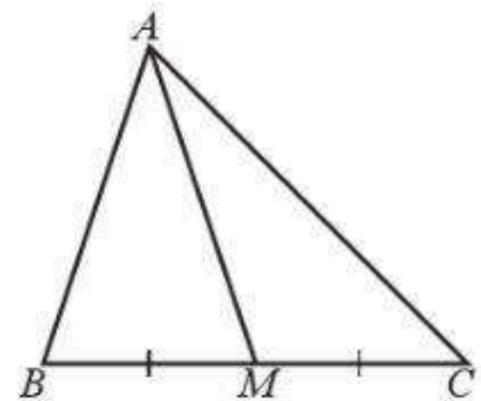
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Định nghĩa:* Trong tam giác ABC , đoạn thẳng AM nối đỉnh A với trung điểm M của cạnh BC được gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc tương ứng với cạnh BC) (Hình 46).

– *Tính chất:*

+ Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là trọng tâm của tam giác.

+ Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.



Hình 46

B. VÍ DỤ

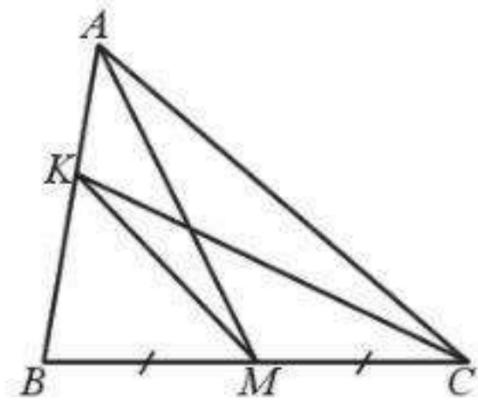
Ví dụ 1 Trong ba đoạn thẳng AM , CK , KM ở Hình 47, đoạn thẳng nào là đường trung tuyến của tam giác ABC ?

Giải

– Đoạn thẳng AM là đường trung tuyến của tam giác ABC vì A là đỉnh của tam giác ABC và M là trung điểm của cạnh BC .

– Đoạn thẳng CK không là đường trung tuyến của tam giác ABC vì C là đỉnh của tam giác ABC mà K không là trung điểm của cạnh AB .

– Đoạn thẳng KM không là đường trung tuyến của tam giác ABC vì cả K và M đều không là đỉnh của tam giác ABC .



Hình 47

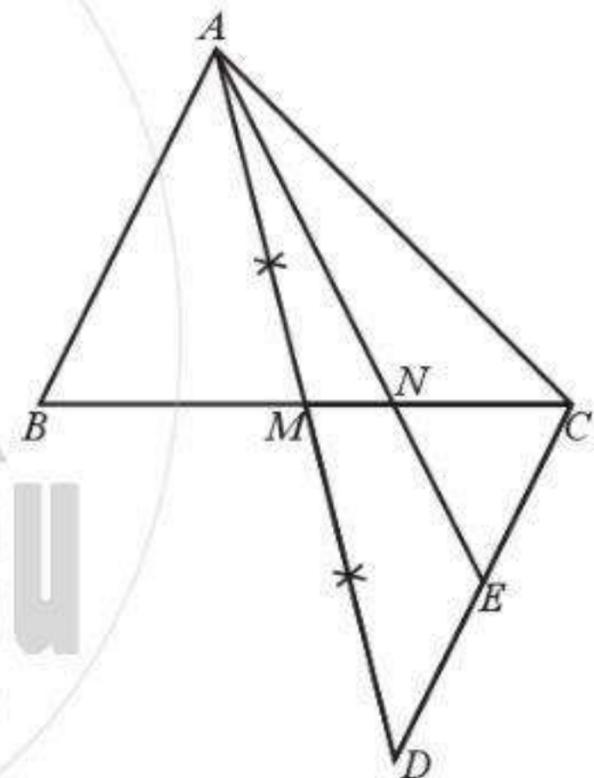
Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM . Trên tia đối của MA lấy điểm D sao cho $MA = MD$.

Trên đoạn MC lấy điểm N sao cho $MN = \frac{1}{3}CM$; AN và CD cắt nhau tại E . Chứng minh E là trung điểm của CD .

Giải. (Hình 48)

Ta có $AM = MD$ nên CM là đường trung tuyến của tam giác CAD . Mà $N \in CM$ và $MN = \frac{1}{3}CM$ nên N là trọng tâm của tam giác CAD .

Suy ra AN đi qua trung điểm của CD . Vậy E là trung điểm của CD .



Hình 48

C. BÀI TẬP

70. Cho tam giác ABC cân tại A có hai trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G . Chứng minh:

- $BM = CN$;
- Tam giác GBC là tam giác cân;
- AG vuông góc với BC .

71. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của MG lấy điểm D sao cho $MD = MG$.

- a) Chứng minh CG là trung tuyến của tam giác ACD .
- b) Chứng minh BG song song với CD .
- c) Gọi I là trung điểm của BD ; AI cắt BG tại F . Chứng minh $AF = 2FI$.

72. Chứng minh: Nếu một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

73. Cho tam giác ABC đều và có G là trọng tâm.

- a) Chứng minh $GA = GB = GC$.
- b) Trên tia AG lấy điểm D sao cho $GD = GA$. Chứng minh tam giác BGD là tam giác đều.

74. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến BD . Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = BD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CE . Gọi I, K lần lượt là giao điểm của AM, AN với BE . Chứng minh $BI = IK = KE$.

75. Tam giác ABC có đường trung tuyến AM bằng nửa cạnh BC . Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

76. Cho tam giác nhọn ABC . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$.

- a) Chứng minh E là trọng tâm tam giác BCD .
- b) Gọi M là trung điểm DC . Chứng minh ba điểm B, M, E thẳng hàng.

77. Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AD , G là trọng tâm. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DG$.

- a) Chứng minh $BG = GC = CE = BE$.
- b) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ACE$.
- c) Nếu $CG = \frac{1}{2}AE$ thì tam giác ABC là tam giác gì? Vì sao?

78. Cho tam giác DEF cân tại D có đường trung tuyến EM . Trên tia đối của tia ME lấy điểm N sao cho $MN = ME$.

- a) Chứng minh $DE = FN$ và tam giác DFN là tam giác cân.
- b) Trên tia đối của tia FD lấy điểm A sao cho $FA = FD$. Chứng minh F là trọng tâm của tam giác NEA .
- c) Chứng minh tam giác DNA là tam giác vuông.
- d) Kẻ EB vuông góc với NA ($B \in NA$). Chứng minh ba điểm E, F, B thẳng hàng.

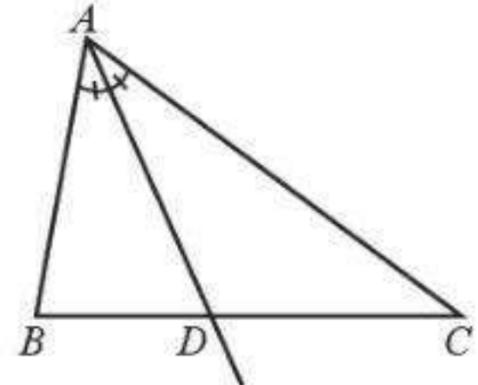
§11 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Định nghĩa:* Trong tam giác ABC , tia phân giác của góc A cắt BC tại D (Hình 49).

Đoạn thẳng AD được gọi là đường phân giác (xuất phát từ đỉnh A) của tam giác ABC .

Đôi khi đường thẳng AD cũng được gọi là đường phân giác của tam giác ABC .



Hình 49

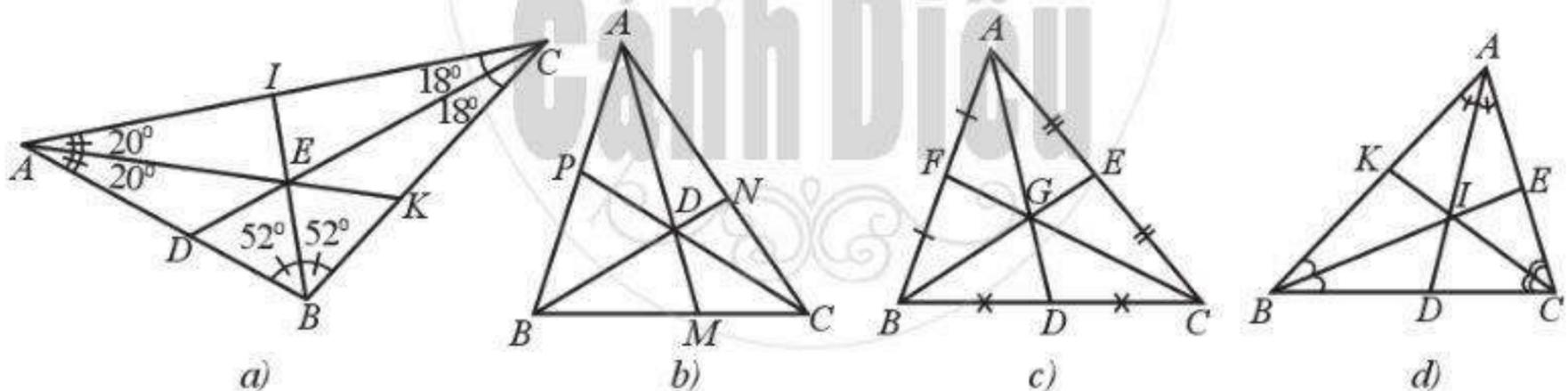
– *Tính chất:*

+ Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm.

+ Giao điểm của ba đường phân giác của một tam giác cách đều ba cạnh của tam giác đó.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Trong các hình 50a, 50b, 50c, 50d, hình nào cho biết ba đường phân giác của tam giác cùng đi qua một điểm? Vì sao?



Hình 50

Giải

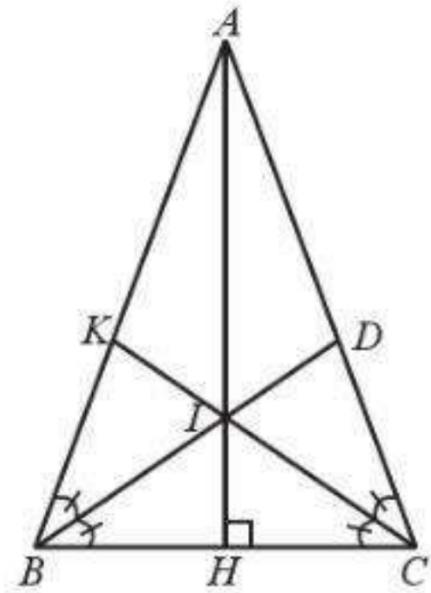
Hình 50a và 50d có ba đường phân giác cùng đi qua một điểm.

Hình 50b và 50c không có ba đường phân giác, mặc dù chúng cũng cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC cân tại A có AH vuông góc với BC tại H . Vẽ hai đường phân giác BD và CK của tam giác ABC . Gọi I là giao điểm của AH và BD . Chứng minh ba điểm C, I, K thẳng hàng.

Giải (Hình 51)

Có $\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ (hai góc tương ứng) hay AH là tia phân giác của góc BAC . Lại có BD là tia phân giác của góc ABC nên I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC . Mặt khác, CK là tia phân giác của góc ACB nên $I \in CK$. Vậy ba điểm C, I, K thẳng hàng.



Hình 51

C. BÀI TẬP

79. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Trên tia phân giác của góc A , lấy điểm E nằm trong tam giác ABC sao cho E cách đều hai cạnh AB, BC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

- Điểm E không nằm trên tia phân giác của góc B .
- $\widehat{EBC} = \widehat{ECB}$.
- Điểm E cách đều AB, BC, CA .
- Điểm E nằm trên tia phân giác của góc C .

80. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2\widehat{BAC}$. Hai tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại K . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

- Số đo góc KAC bằng 30° .
- Số đo góc BAK bằng 25° .
- Số đo góc BKC bằng 120° .
- Số đo góc BKC bằng 115° .

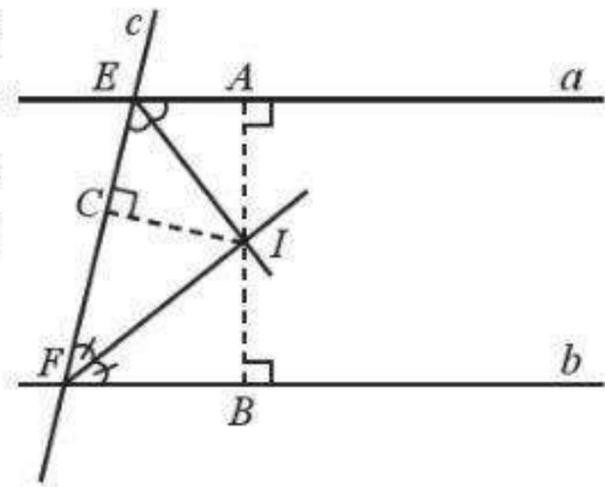
81. Cho tam giác ABC cân tại A có K là trung điểm của đoạn BC . Hai đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I . Chứng minh:

- I cách đều ba cạnh của tam giác ABC ;
- KI là tia phân giác của góc EKD .

82. Cho tam giác ABC vuông tại C có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, AE là tia phân giác của góc CAB ($E \in BC$). Gọi D là hình chiếu của B trên tia AE , K là hình chiếu của E trên AB . Chứng minh:

- EB là tia phân giác của góc DEK , EK là tia phân giác của góc BEA ;
- $EC = ED = EK$.

83. Cho hai đường thẳng song song a, b và một đường thẳng c (c cắt a tại E, c cắt b tại F). Hai tia phân giác của các góc aEF và bFE cắt nhau tại I . Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của I trên các đường thẳng a và b (Hình 52). Chứng minh:



Hình 52

- Tam giác EIF là tam giác vuông;
- $IA = IB$.

84*. Cho tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm của BC . G là giao điểm của hai trung tuyến BD và CE .

- Chứng minh: GA, GM, MA lần lượt là tia phân giác của các góc DGE, BGC, EMD .
- Tìm điều kiện của tam giác ABC để EG là tia phân giác của góc DEM .

§12 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

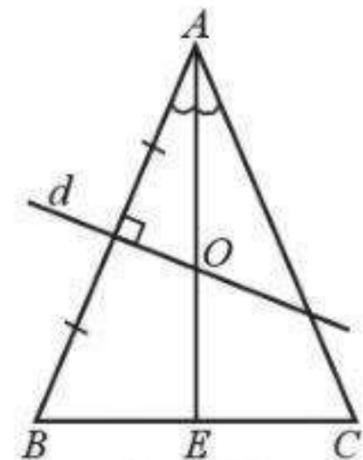
– *Định nghĩa:* Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh được gọi là đường trung trực của tam giác đó.

– *Tính chất:*

- + Ba đường trung trực của tam giác cùng đi qua một điểm;
- + Giao điểm của ba đường trung trực của một tam giác cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC cân tại A có d là đường trung trực của cạnh AB và AE là tia phân giác của góc BAC ($E \in BC$), O là giao điểm của d và AE . Chứng minh O nằm trên đường trung trực của cạnh AC .



Hình 53

Giải. (Hình 53)

Ta có $\triangle ABE = \triangle ACE$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{AEC}$ và $BE = CE$.

Do $\widehat{AEB} = \widehat{AEC}$ và $\widehat{AEB} + \widehat{AEC} = 180^\circ$ suy ra
 $\widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 90^\circ$ hay $AE \perp BC$ (1)

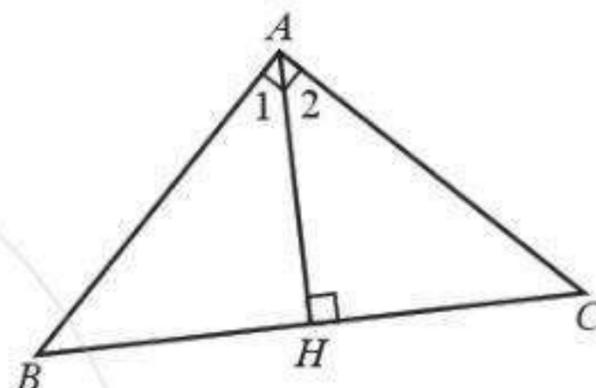
Từ (1) và $BE = CE$ suy ra AE là đường trung trực của cạnh BC . Mặt khác, O là giao điểm của d và AE (d là đường trung trực của cạnh AB , AE là đường trung trực của cạnh BC), do đó O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC . Suy ra O nằm trên đường trung trực của cạnh AC .

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC vuông cân tại A . H là hình chiếu của A trên cạnh BC . Chứng minh rằng H cũng là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .

Giải. (Hình 54)

Tam giác ABC vuông cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$.
 Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 45^\circ$. Do đó các tam giác HAB , HAC là các tam giác vuông cân tại H .

Suy ra $HA = HB = HC$. Vậy H là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .



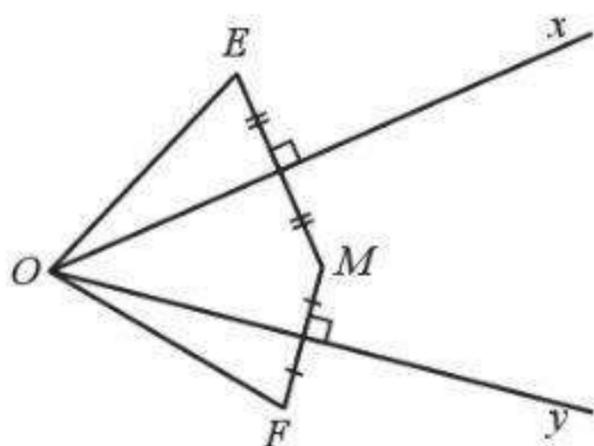
Hình 54

C. BÀI TẬP

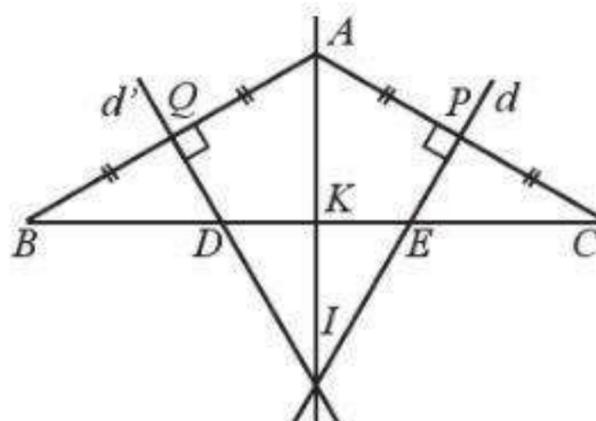
- 85.** Cho hai tam giác đều chung đáy ABC và BCD . Gọi I là trung điểm của BC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?
- Đường thẳng BC là đường trung trực của AD .
 - Điểm I cách đều các điểm A, B, D .
 - Điểm B nằm trên đường trung trực của CD .
 - Điểm C không nằm trên đường trung trực của BD .
- 86.** Cho tam giác ABC cân ở A . Đường trung trực của cạnh AC cắt AB tại D . Biết CD là tia phân giác của góc ACB . Tính số đo các góc của tam giác ABC .
- 87.** Cho tam giác đều ABC có I là điểm cách đều ba cạnh AB, BC, CA . Chứng minh rằng I cách đều ba đỉnh A, B, C và cũng là trọng tâm của tam giác ABC .
- 88.** Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.
- 89.** Cho góc nhọn xOy và điểm M nằm trong góc xOy . Gọi E, F là hai điểm nằm ngoài góc xOy sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng ME , Oy là đường trung trực của đoạn thẳng MF (Hình 55). Chứng minh:

a) O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác EMF .

b) Nếu $\widehat{xOy} = 30^\circ$ thì $\widehat{EOF} = 60^\circ$.



Hình 55



Hình 56

90. Cho tam giác ABC cân ở A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau ở I và cắt cạnh BC lần lượt tại D, E (Hình 56).

a) Chứng minh điểm I nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng DE .

b) Đường tròn tâm I bán kính IA đi qua những điểm nào?

c) Tính số đo các góc của tam giác IBC .

91*. Cho tam giác ABC vuông cân ở A có đường phân giác AM . Gọi E là điểm nằm giữa B và C . Vẽ BH và CK vuông góc với AE (H, K thuộc AE).

a) Chứng minh ba đường trung trực tương ứng của các đoạn thẳng AB, AC, KH cùng đi qua điểm M .

b) Tính số đo các góc của tam giác MKH .

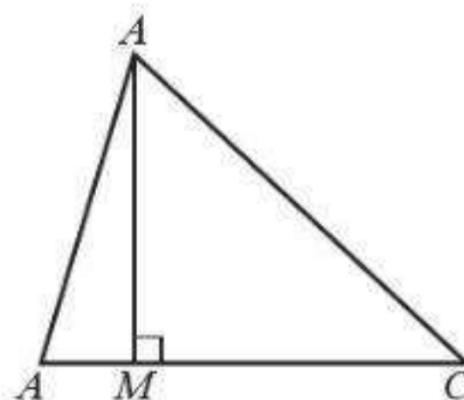
§13 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Định nghĩa:* Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là một đường cao của tam giác đó.

Trong Hình 57, đoạn thẳng AM là một đường cao của tam giác ABC . Đôi khi, đường thẳng AM cũng được gọi là một đường cao của tam giác ABC .

Đường cao của tam giác có thể nằm trong, trên cạnh, hoặc nằm ngoài tam giác.



Hình 57

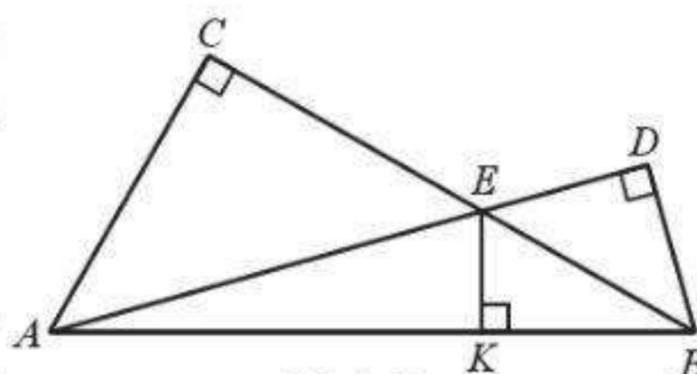
– *Tính chất:* Trong một tam giác, ba đường cao cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là trực tâm của tam giác.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Quan sát Hình 58 và cho biết các đường thẳng AC , BD , EK cùng đi qua một điểm không. Vì sao?

Giải

Các đường thẳng AC , BD , EK là các đường cao của tam giác AEB , do đó chúng cùng đi qua một điểm là trực tâm của tam giác AEB .



Hình 58

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên tia đối của tia AB lấy E sao cho $AB = AE$. Tìm trực tâm của mỗi tam giác AEC và BCE .

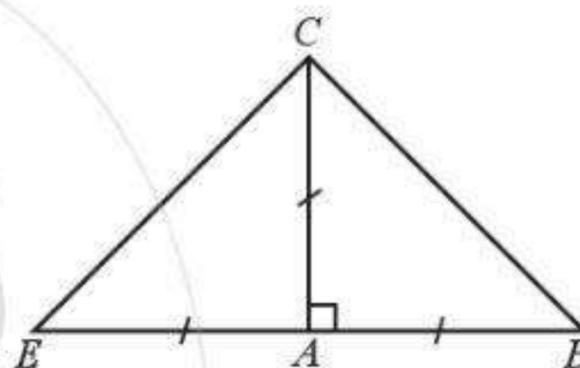
Giải. (Hình 59)

Tam giác ABC vuông cân tại A nên

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 45^\circ \quad (1)$$

$$\triangle CAE = \triangle CAB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) dễ thấy tam giác BCE vuông cân tại C , tam giác CAE vuông cân tại A . Vậy trực tâm của các tam giác BCE , CAE lần lượt là C và A .



Hình 59

Ví dụ 3 Quan sát Hình 60.

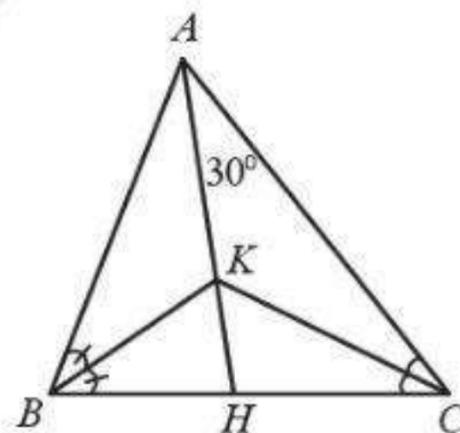
a) Tính số đo góc BAK .

b) Nếu cho thêm điều kiện AK nằm trên đường cao của tam giác ABC , tính số đo các góc của tam giác ABC .

Giải

a) Dễ thấy K chính là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC nên $\widehat{KAB} = \widehat{KAC}$, do đó $\widehat{BAK} = \widehat{CAK} = 30^\circ$.

b) Gọi giao điểm của AK và BC là H . Do AK nằm trên đường cao nên $AH \perp BC$. Tam giác ABC có AH vừa là đường phân giác, vừa là đường cao nên tam giác ABC là tam giác cân tại A . Mặt khác $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Vậy ba góc của tam giác ABC đều bằng 60° .



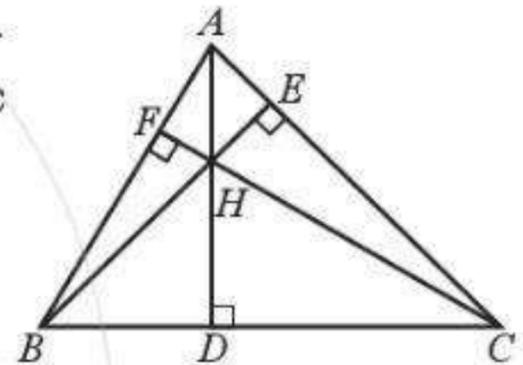
Hình 60

C. BÀI TẬP

92. Cho tam giác ABC có $AB > AC > BC$ và H là trực tâm. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?
- H là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .
 - CH vuông góc với AB .
 - AH vuông góc với BC .

93. Cho tam giác ABC có $AB > AC > BC$ và K là trực tâm. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?
- K là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .
 - K là giao điểm ba đường cao của tam giác ABC .
 - K là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC .
 - K là giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác ABC .

94. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (Hình 61). Tìm trực tâm của các tam giác HAB, HBC, HCA .



Hình 61

95. Cho tam giác ABC có trực tâm H đồng thời cũng là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác. Tính số đo các góc của tam giác ABC .
96. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Vẽ BE vuông góc với CD tại E . Gọi I là giao điểm của AC và BE ; K là hình chiếu của I trên BC .
- Chứng minh ba điểm D, I, K thẳng hàng.
 - Tìm điều kiện của tam giác ABC để I là trọng tâm của tam giác BCD .
97. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$, đường phân giác BD . Vẽ DE vuông góc với BC tại E .
- Chứng minh trực tâm H của tam giác BAE nằm trên đường thẳng BD .
 - Chứng minh trực tâm của tam giác DAE nằm ngoài tam giác đó.
 - Tìm điều kiện của tam giác ABC để H cách đều các đỉnh của tam giác BAE .
98. Cho tam giác ABC cân tại A , đường trung tuyến AM . Từ M kẻ ME vuông góc với AB ($E \in AB$), kẻ MF vuông góc với AC ($F \in AC$). Gọi I là giao điểm của AM và EF . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. Chứng minh:

- a) AM vuông góc với EF ;
- b) Trục tâm của các tam giác ABD và ACD nằm trên đường thẳng BC ;
- c) Trục tâm của các tam giác AEF , MEF , DBC và ABC nằm trên cùng một đường thẳng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

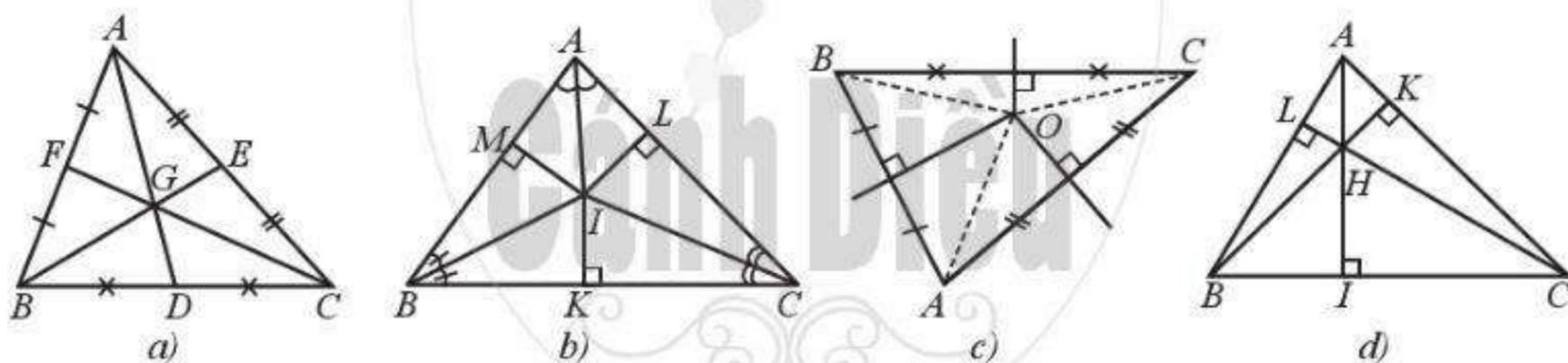
99. Cho hai tam giác ABC và MNP có $\widehat{ABC} = \widehat{MNP}$, $\widehat{ACB} = \widehat{MPN}$. Cần thêm một điều kiện để tam giác ABC và tam giác MNP bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc là:

- A. $AC = MP$. B. $AB = MN$. C. $BC = NP$. D. $AC = MN$.

100. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 110^\circ$. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC lần lượt tại E và F . Khi đó, số đo góc EAF bằng:

- A. 20° . B. 30° . C. 40° . D. 50° .

101. Trong các hình 62a, 62b, 62c, 62d, hình nào có điểm cách đều các đỉnh của tam giác đó? Vì sao?



Hình 62

102*. Cho tam giác ABC và điểm G nằm trong tam giác. Chứng minh: Nếu diện tích các tam giác GAB , GBC và GCA bằng nhau thì G là trọng tâm của tam giác đó.

103. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Chứng minh:

- a) OC vuông góc với FH ;
- b) Tam giác OAI là tam giác cân;
- c) Tam giác BAI là tam giác cân.

104. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

a) Chứng minh $AC = EB$ và AC song song với EB .

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H . Cho biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$; $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính số đo các góc HEB và HEM .

105. Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

a) Chứng minh $\triangle ADB = \triangle AEC$.

b) Chứng minh tam giác HDE là tam giác cân.

c) So sánh HB và HD .

d) Gọi M là trung điểm của HC , N là trung điểm của HB , I là giao điểm của BM và CN . Chứng minh ba điểm A, H, I thẳng hàng.

106. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ AD là tia phân giác của góc BAC ($D \in BC$). Trên AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

a) Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{AED}$.

b) Tia ED cắt AB tại F . Chứng minh $AC = AF$.

c) Gọi G là trung điểm của DF ; AD cắt CF tại H và cắt CG tại I . Chứng minh $DI = 2IH$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. B.

2. a) $\widehat{EDF} = 180^\circ - 55^\circ - 42^\circ = 83^\circ$, mà $x + \widehat{EDF} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $x + 83^\circ = 180^\circ$. Do đó $x = 97^\circ$.

Tương tự tính được $y = 125^\circ$; $z = 138^\circ$.

b) $x + y + z = 97^\circ + 125^\circ + 138^\circ = 360^\circ$. Tổng số đo ba góc ngoài (kề bù với góc trong tam giác) luôn bằng 360° .

3. a) Góc nhọn còn lại bằng 50° .

b) Mỗi góc nhọn bằng 45° .

4. Giả sử có tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{A} = 3\widehat{B}$ và $\widehat{B} = 3\widehat{C}$. Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 13\widehat{C}$ mà $\widehat{C} = 14^\circ$, do vậy $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 13 \cdot 14^\circ = 182^\circ$. Điều này vô lí (vì tổng các góc trong tam giác bằng 180°). Vậy không có tam giác ABC nào thỏa mãn điều kiện của đề bài.

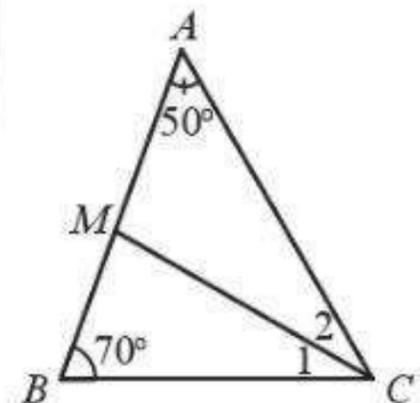
Do đó, bạn Bình phát biểu đúng.

5. (Hình 63)

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$.

Tia CM là tia phân giác của \widehat{C} , do đó $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 30^\circ$.

Từ đó tính được $\widehat{AMC} = 100^\circ$; $\widehat{BMC} = 80^\circ$.



Hình 63

6. a) $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 180^\circ : 3 = 60^\circ$.

b) Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 110^\circ$; mà $\widehat{C} - \widehat{B} = 20^\circ$ nên

$\widehat{B} = (110^\circ - 20^\circ) : 2 = 45^\circ$, $\widehat{C} = 110^\circ - 45^\circ = 65^\circ$.

c) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1 + 2 + 3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ.$$

Do đó $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 90^\circ$.

7. a) Các cặp góc có tổng số đo bằng 90° là: \widehat{BAH} và \widehat{CAH} ; \widehat{B} và \widehat{C} ; \widehat{B} và \widehat{BAH} ; \widehat{C} và \widehat{CAH} ; \widehat{BAD} và \widehat{DAC} ; \widehat{HAD} và \widehat{ADH} .

b) Tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
 Suy ra $\widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{C} = 50^\circ$; $\widehat{DAC} = \widehat{DAH} = 50^\circ : 2 = 25^\circ$. Do đó
 $\widehat{DAC} = 25^\circ$; $\widehat{BDA} = 90^\circ - \widehat{DAH} = 65^\circ$.

c) $\widehat{C} = \widehat{BAH} (= 90^\circ - \widehat{B})$ và $\widehat{B} = \widehat{CAH} (= 90^\circ - \widehat{C})$.
 Ta có $\widehat{DAC} + \widehat{BAD} = \widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{DAH} + \widehat{HDA} = 90^\circ$.
 Mà $\widehat{DAC} = \widehat{DAH}$ suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$.

8. B.

9. (Hình 64)

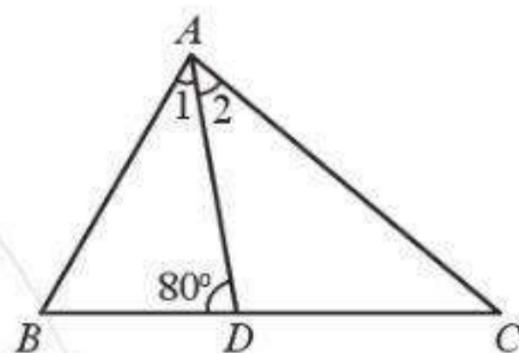
Ta có $\widehat{A}_1 + \widehat{B} + \widehat{ADB} = \widehat{A}_2 + \widehat{C} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (vì AD là phân giác của \widehat{BAC});

$\widehat{ADB} = 80^\circ$ và $\widehat{B} = 1,5\widehat{C}$ nên

$1,5\widehat{C} + 80^\circ = \widehat{C} + 100^\circ$ hay $\widehat{C} = 40^\circ$.

Do đó $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{A} = 80^\circ$.



Hình 64

10. Trong tam giác ABC ta có: $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{ACy} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Vì Cx là tia phân giác của \widehat{ACy} nên $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}_1$, mà chúng ở vị trí đồng vị nên $Cx \parallel AB$.

11. Do $AD \parallel BC$ nên $\widehat{DBC} = \widehat{ADB} = 15^\circ$ (so le trong).

Trong tam giác vuông BCD có $\widehat{BDC} = 90^\circ - \widehat{DBC} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Tương tự, ta tính được $\widehat{ABD} = 75^\circ$. Do đó $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$, mà chúng ở vị trí so le trong nên $AB \parallel DC$.

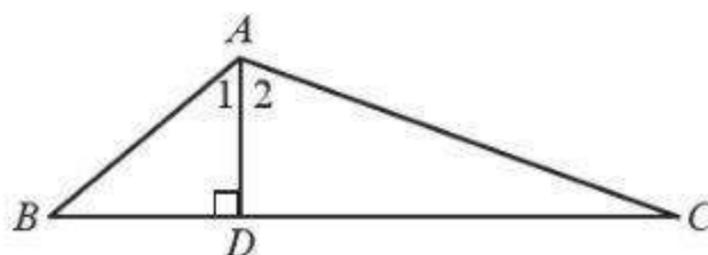
12. (Hình 65)

a) Từ $\widehat{A} = 3\widehat{B} = 6\widehat{C}$ suy ra $\frac{\widehat{A}}{6} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{1}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{6} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{1} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{6 + 2 + 1} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ.$$

Suy ra số đo góc lớn nhất là $\widehat{A} = 120^\circ$, số đo góc bé nhất là $\widehat{C} = 20^\circ$.



Hình 65

b) Từ câu a suy ra $\widehat{B} = 40^\circ$. Xét tam giác ABD vuông tại D , ta có

$$\widehat{A_1} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

Trong tam giác ADB có $\widehat{A_1} > \widehat{B}$, suy ra $BD > AD$.

13. (Hình 66)

Xét tam giác ABD có $\widehat{A} > 90^\circ$ nên \widehat{A} là góc lớn nhất trong tam giác đó, do đó

$$AB < BD \quad (1)$$

Trong tam giác ABD có $\widehat{A} > 90^\circ$ nên

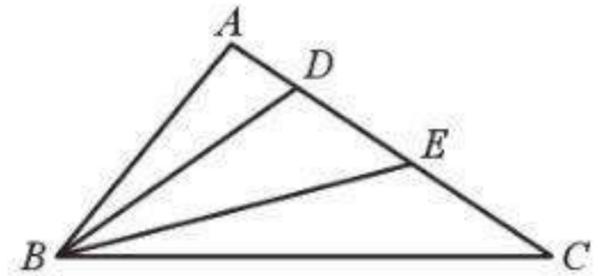
$$\widehat{ADB} < 90^\circ.$$

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 180^\circ$, do đó $\widehat{BDE} > 90^\circ$.

Vì thế trong tam giác BDE thì $BD < BE$ (2)

Chứng minh tương tự có $BE < BC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $BA < BD < BE < BC$.



Hình 66

14. a) $AC = 17$ cm hoặc $AC = 19$ cm.

b) Gọi độ dài ba cạnh của tam giác MNP là m, n, p với $m \leq n \leq p$.

Theo bài ra, ta có $\frac{m}{2} = \frac{n}{3} = \frac{p}{4}$ và $m + n = 20$ (cm).

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{m}{2} = \frac{n}{3} = \frac{p}{4} = \frac{m+n}{2+3} = \frac{20}{5} = 4 \text{ hay } p = 16 \text{ (cm).}$$

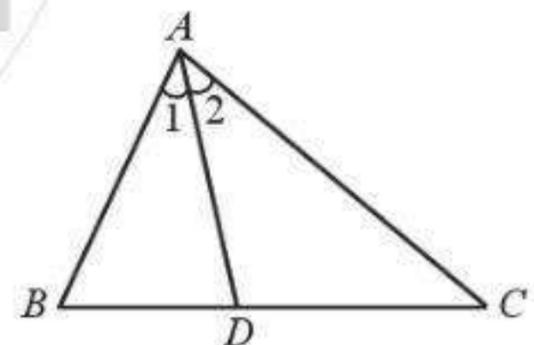
15. (Hình 67)

Xét tam giác ABC có $AB < AC$, suy ra $\widehat{C} < \widehat{B}$.

Xét hai tam giác ABD và ACD :

$$\widehat{A_1} + \widehat{B} + \widehat{ADB} = \widehat{A_2} + \widehat{C} + \widehat{ADC} = 180^\circ.$$

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt) và $\widehat{C} < \widehat{B}$ suy ra $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.



Hình 67

16. (Hình 68)

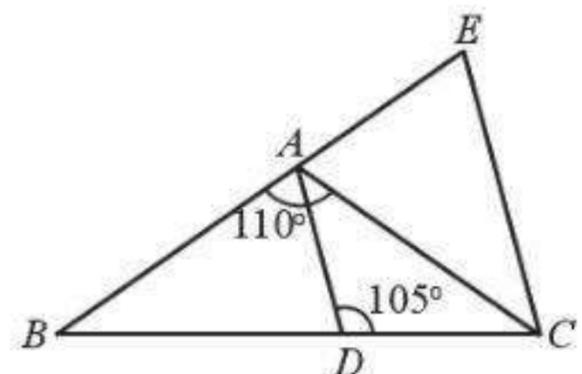
a) Tính được $\widehat{CAE} = 70^\circ$ và $\widehat{ACE} = 40^\circ$.

Trong tam giác ACE có $\widehat{ACE} < \widehat{CAE}$ nên $AE < CE$.

b) Ta có $\widehat{BCE} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 75^\circ$.

Trong tam giác BEC có $\widehat{EBC} < \widehat{E} < \widehat{BCE}$ nên

$$EC < BC < BE.$$



Hình 68

17. (Hình 69)

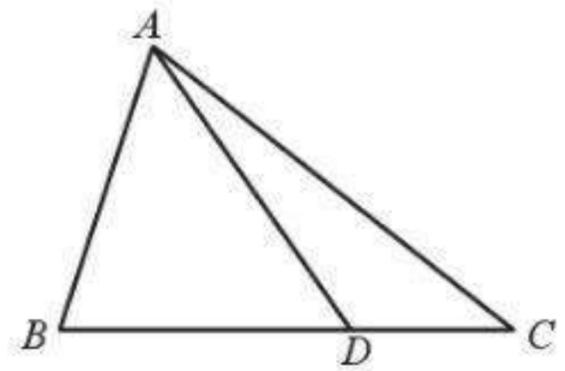
Xét tam giác ABD có $AD < AB + BD$ (1)

Xét tam giác ACD có $AD < AC + DC$ (2)

Cộng theo vế của (1) và (2):

$$2AD < AB + AC + (BD + DC).$$

Suy ra $AD < \frac{AB + AC + BC}{2}$.



Hình 69

18*. Giả sử độ dài ba cạnh của tam giác là a, b, c với $a \geq b \geq c$.

$a < b + c$, suy ra $a + a < a + b + c$ hay $a < \frac{a + b + c}{2}$ (1)

$a \geq b, a \geq c$, suy ra $a + a + a \geq a + b + c$ hay $3a \geq a + b + c$,

do đó $a \geq \frac{a + b + c}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a + b + c}{3} \leq a < \frac{a + b + c}{2}$.

19. Ở Hình 9a có $\Delta XYT = \Delta XOT$.

Ở Hình 9b có $\Delta ABC = \Delta NPM$.

20. a) $\Delta ABC = \Delta XZY$.

b) $\Delta ABC = \Delta XYZ$.

21. Do $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên chu vi của tam giác MNP bằng chu vi của tam giác ABC .

Gọi chu vi của tam giác ABC là x (x là số tự nhiên). Khi đó, tổng chu vi của tam giác ABC và tam giác MNP là:

$$x + x = 2x \text{ (là số chẵn)}$$

Vậy bạn Sơn nói không đúng.

22. $\Delta ABC = \Delta DEG$ nên chu vi của tam giác DEG bằng chu vi của tam giác ABC và bằng

$$4 + 7 + 9,5 = 20,5 \text{ (dm)}.$$

23. Số đo $\widehat{G}, \widehat{I}, \widehat{K}$ tỉ lệ với 2; 3; 4 nên

$$\frac{\widehat{G}}{2} = \frac{\widehat{I}}{3} = \frac{\widehat{K}}{4} = \frac{\widehat{G} + \widehat{I} + \widehat{K}}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ.$$

Do đó $\widehat{G} = 40^\circ, \widehat{I} = 60^\circ, \widehat{K} = 80^\circ$.

Do $\Delta ABC = \Delta GIK$ nên $\widehat{A} = \widehat{G} = 40^\circ, \widehat{B} = \widehat{I} = 60^\circ, \widehat{C} = \widehat{K} = 80^\circ$.

24. Do $\Delta ABC = \Delta XYZ$ nên $AB = XY, BC = YZ, AC = XZ$.

$$\text{Có } YZ - XY = 10 \text{ (cm) suy ra } BC - AB = 10 \text{ (cm)} \quad (1)$$

Từ (1) và $3BC = 5AB$ suy ra $AB = 15 \text{ cm}$ và $BC = 25 \text{ cm}$.

Vậy độ dài các cạnh XY, YZ, XZ của tam giác XYZ lần lượt là: $15 \text{ cm}, 25 \text{ cm}, 35 \text{ cm}$.

25. Do $\widehat{A} + \widehat{Y} = 120^\circ$ và $\widehat{A} - \widehat{Y} = 40^\circ$ nên $\widehat{A} = 80^\circ$ và $\widehat{Y} = 40^\circ$ (1)

Mặt khác, $\Delta ABC = \Delta XYZ$ suy ra: $\widehat{A} = \widehat{X}, \widehat{B} = \widehat{Y}, \widehat{C} = \widehat{Z}$ (2)

Từ (1) và (2), ta tính được: $\widehat{A} = \widehat{X} = 80^\circ; \widehat{B} = \widehat{Y} = 40^\circ; \widehat{C} = \widehat{Z} = 60^\circ$.

26. (Hình 70)

$$\begin{aligned} \widehat{BOC} &= 180^\circ - (\widehat{OBC} + \widehat{OCB}) \\ &= 180^\circ - \left(\frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} \right) \end{aligned}$$

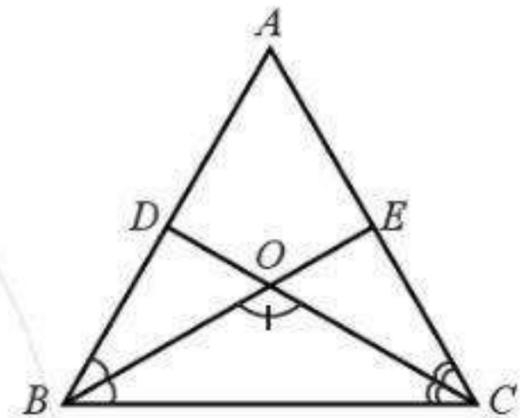
$$\text{Mà } \widehat{BOC} = 120^\circ \text{ nên } \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 120^\circ \quad (1)$$

Do $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên

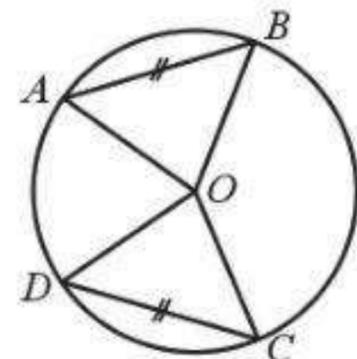
$$\widehat{ABC} = \widehat{MNP} \text{ và } \widehat{ACB} = \widehat{MPN}$$

$$\text{hay } \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{MNP} + \widehat{MPN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{MNP} + \widehat{MPN} = 120^\circ$.



Hình 70



Hình 71

27. (Hình 71)

Để thấy $\Delta OAB = \Delta OCD$ (c.c.c) suy ra

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \text{ (hai góc tương ứng).}$$

28. a) Do $OC = OD, CE = DE, OE$ là cạnh chung nên $\Delta OCE = \Delta ODE$ (c.c.c).

b) Vì $\Delta OCE = \Delta ODE$ nên $\widehat{COE} = \widehat{DOE}$ (hai góc tương ứng). Suy ra OE là tia phân giác của góc xOy .

c) Do $\Delta OCE = \Delta ODE$ nên $\widehat{OCE} = \widehat{ODE}$ (hai góc tương ứng).

29. a) Để thấy $\Delta ABC = \Delta CDA$ (c.c.c) nên $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$. Mà hai góc BAC và ACD ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CD$.

b) $\Delta ABC = \Delta CDA$ suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc tương ứng).

30. Học sinh tự làm.

31. (Hình 72)

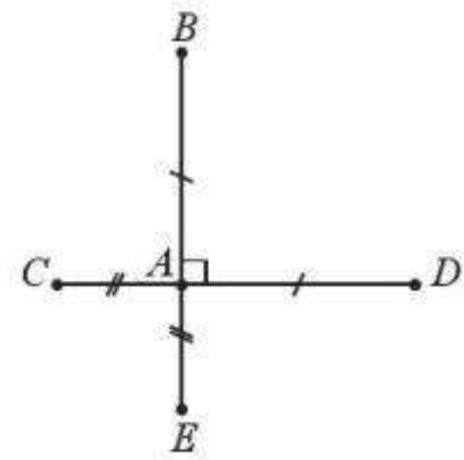
Các phát biểu c, d là sai.

32. a) Hình 22a phải thêm điều kiện $MA = ME$.

b) Hình 22b phải thêm điều kiện $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$.

c) Hình 22c phải thêm điều kiện $AC = BD$.

d) Hình 22d phải thêm điều kiện $DE = MP$.



Hình 72

33. (Hình 73)

a) Dễ chứng minh $\triangle ABC = \triangle ADE$ (c.g.c)

b) Do $\triangle ABC = \triangle ADE$ nên $BC = DE$ và $\widehat{ACB} = \widehat{AED}$.

Mặt khác \widehat{ACB} , \widehat{AED} là hai góc ở vị trí so le trong, suy ra $DE \parallel BC$.

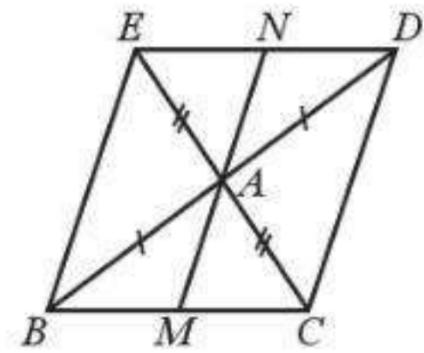
c) Ta có $EN = \frac{DE}{2}$; $MC = \frac{BC}{2}$; $DE = BC$ nên $EN = MC$.

Xét hai tam giác AEN và ACM có $AE = AC$, $EN = MC$, $\widehat{NEA} = \widehat{MCA}$ (so le trong), suy ra $\triangle AEN = \triangle ACM$ (c.g.c).

d) Do $\triangle AEN = \triangle ACM$ nên $\widehat{NAE} = \widehat{MAC}$.

Ta có: $\widehat{NAM} = \widehat{NAE} + \widehat{EAM} = \widehat{MAC} + \widehat{EAM} = \widehat{EAC} = 180^\circ$.

Vậy M, A, N thẳng hàng.



Hình 73

34. (Hình 74)

a) Dễ chứng minh $\triangle KOM = \triangle KON$ (c.g.c).

b) Do $\triangle KOM = \triangle KON$ suy ra

$$\widehat{KMO} = \widehat{KNO}; KM = KN \quad (1)$$

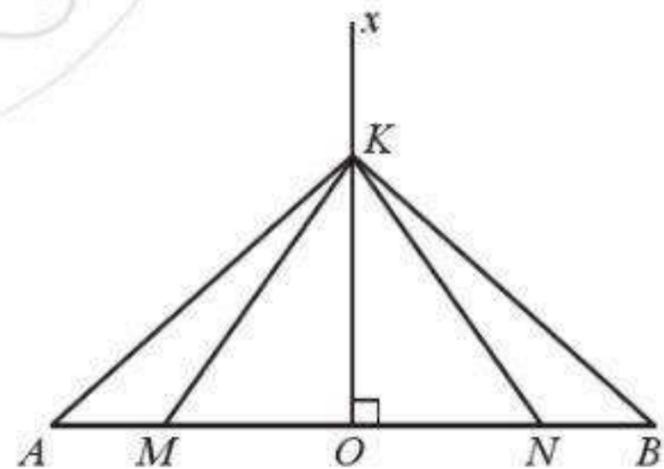
Do đó $180^\circ - \widehat{KMO} = 180^\circ - \widehat{KNO}$ hay

$$\widehat{KMA} = \widehat{KNB} \quad (2)$$

Có $OA = OB$ và $OM = ON$ nên

$$OA - OM = OB - ON \text{ hay } AM = BN \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\triangle KMA = \triangle KNB$ (c.g.c).



Hình 74

35. a) Do BH là cạnh chung, $BD = HA$ và $\widehat{AHB} = \widehat{DBH} = 90^\circ$ nên $\triangle AHB = \triangle DBH$ (c.g.c).

b) Do $\triangle AHB = \triangle DBH$ nên $\widehat{ABH} = \widehat{BHD}$. Mà \widehat{ABH} , \widehat{BHD} ở vị trí so le trong nên $AB \parallel DH$. Lại có, $AB \perp AC$ nên $DH \perp AC$.

c) Do $\triangle AHB = \triangle DBH$ nên $\widehat{BDH} = \widehat{BAH}$.

Mà $\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$ nên $\widehat{BDH} = 37^\circ$.

36*. a) Ta có

$$\widehat{MAC} = \widehat{MAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}; \quad \widehat{NAB} = \widehat{NAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}.$$

Suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$.

Kết hợp với điều kiện $AM = AB$, $AC = AN$ suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c).

b) Do $\triangle AMC = \triangle ABN$ nên $\widehat{ACM} = \widehat{ANB}$. Mặt khác $\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đôi đỉnh).

Xét tam giác KIC , có $\widehat{KIC} + \widehat{KCI} = \widehat{AIN} + \widehat{ANI} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{IKC} = 90^\circ$.

Vậy $BN \perp MC$.

37. Chứng hạn:

a) Hình 31a thêm điều kiện $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$.

b) Hình 31b thêm điều kiện $\widehat{NRP} = \widehat{RNQ}$.

c) Hình 31c thêm điều kiện $\widehat{OAC} = \widehat{OBD}$.

d) Hình 31d thêm điều kiện $QS = HI$.

38. (Hình 75)

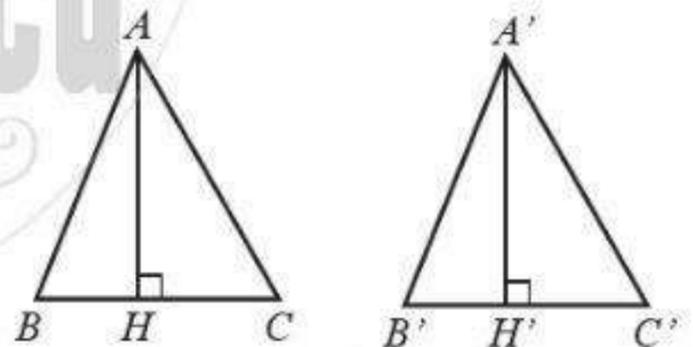
Do $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ nên

$$AB = A'B' \text{ và } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}.$$

Suy ra

$\triangle ABH = \triangle A'B'H'$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Do đó $AH = A'H'$ (hai cạnh tương ứng).



Hình 75

39. (Hình 76)

$\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c) suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ hay

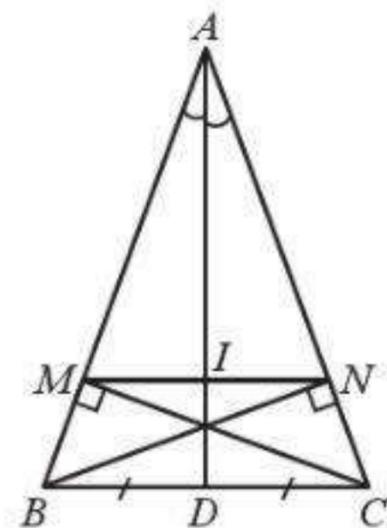
$$\widehat{MBD} = \widehat{NCD} \quad (1)$$

Từ (1) và BC là cạnh chung nên

$\triangle BNC = \triangle CMB$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra $BM = CN$.

Ta có $AB = AC$ và $BM = CN$ suy ra $AM = AN$.



Hình 76

40. a) $\widehat{xAy} = \widehat{xAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAy}$ nên $180^\circ = \widehat{xAB} + 90^\circ + \widehat{CAy}$. Ta có:

$$\widehat{CAy} = 90^\circ - \widehat{xAB} = 90^\circ - \widehat{BAH} = \widehat{CAH} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra AC là tia phân giác của \widehat{HAy} .

b) $\triangle ADB = \triangle AHB$ (cạnh huyền - góc nhọn). Suy ra $BD = BH$ (2)

Tương tự, ta có $CH = CE$ (3)

Từ (2) và (3), dễ thấy $BC = BH + CH = BD + CE$.

c) Gọi I là giao điểm của AB và DH . Ta có: $\triangle ADI = \triangle AHI$ (c.g.c) nên $\widehat{AHD} = \widehat{ADH}$.
Tương tự, ta có $\widehat{AHE} = \widehat{AEH}$. Suy ra

$$\widehat{AHE} = \frac{180^\circ - \widehat{HAE}}{2}; \quad \widehat{AHD} = \frac{180^\circ - \widehat{DAH}}{2}$$

Từ đó suy ra $\widehat{DHE} = \widehat{AHD} + \widehat{AHE} = \frac{360^\circ - (\widehat{DAH} + \widehat{HAE})}{2} = 90^\circ$.

Vậy $DH \perp HE$.

41. (Hình 77)

$$\begin{aligned} \text{a) } \widehat{BIC} &= 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) \\ &= 180^\circ - \left(\frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} \right) \\ &= 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} \right) = 120^\circ. \end{aligned}$$

b) Xét hai tam giác BEI và BFI có cạnh BI chung,

$$\widehat{EBI} = \widehat{IBF} \left(= \frac{\widehat{ABC}}{2} \right), \quad \widehat{EIB} = \widehat{BIF} (= 60^\circ).$$

Suy ra $\triangle BEI = \triangle BFI$ (g.c.g).

c) Do $\triangle BEI = \triangle BFI$ nên $BE = BF$ (1)

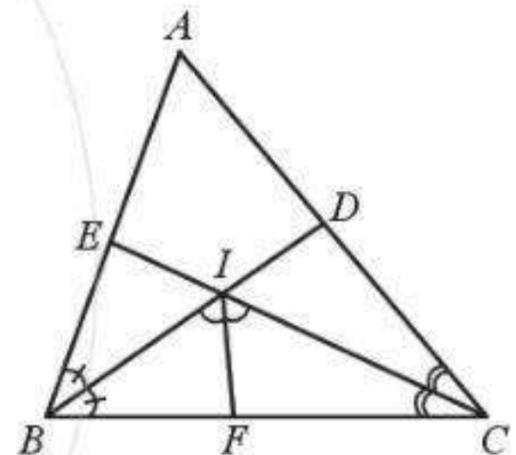
Tương tự câu a, ta có $\triangle IDC = \triangle IFC$ (g.c.g), suy ra $FC = CD$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $BC = BF + FC = BE + CD$.

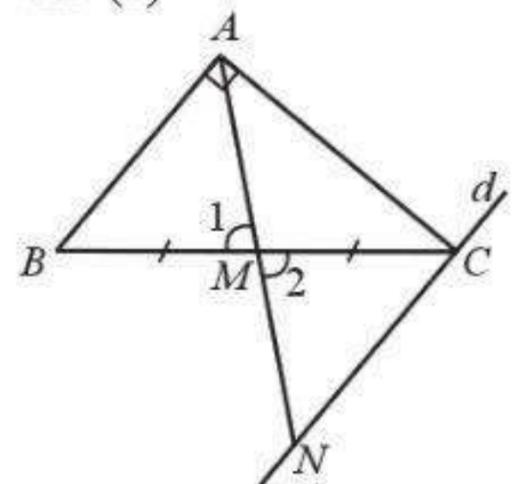
42*. (Hình 78) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB ,
 d cắt AM tại N . Dễ thấy $\triangle MBA = \triangle MCN$ (g.c.g) suy ra
 $AB = CN$ và $AM = MN$.

$\triangle BAC = \triangle NCA$ (c.g.c) do: $BA = CN$, AC chung
và $\widehat{BAC} = \widehat{ACN} (= 90^\circ)$.

Suy ra $AN = BC$ hay $2AM = BC$.



Hình 77



Hình 78

43. Trên Hình 35 có các tam giác cân với cạnh bên, cạnh đáy, góc ở đáy, góc ở đỉnh của tam giác đó như sau:

Tên tam giác cân	Cạnh bên	Cạnh đáy	Góc ở đáy	Góc ở đỉnh
$\triangle ADE$	AD, AE	DE	$\widehat{ADE}, \widehat{AED}$	\widehat{DAE}
$\triangle ABC$	AB, AC	BC	$\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$	\widehat{BAC}
$\triangle AHC$	AH, AC	HC	$\widehat{AHC}, \widehat{ACH}$	\widehat{HAC}

44. a) AE là tia phân giác của \widehat{BAD} nên $\widehat{BAE} = \widehat{EAD}$, mà $\widehat{BEA} = \widehat{EAD}$ (so le trong) do đó $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Suy ra tam giác ABE cân tại B .

Tương tự, ta có tam giác DAF cân tại D do $\widehat{DAF} = \widehat{DFA}$; tam giác CEF cân tại C do $\widehat{CEF} = \widehat{CFE}$.

b) Do $AB \parallel CD$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\widehat{ADF} = 120^\circ$. Mặt khác, tam giác ADF cân tại D và $\widehat{ADF} = 120^\circ$ nên

$$\widehat{DAF} = \widehat{DFA} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

45. (Hình 79) Tam giác ABC cân tại A , có $\widehat{BAC} = 56^\circ$ nên

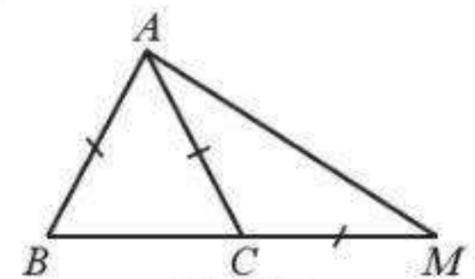
$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 56^\circ}{2} = 62^\circ;$$

$$\widehat{ACM} = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ.$$

Tam giác ACM cân tại C nên

$$\widehat{CAM} = \widehat{CMA} = \frac{180^\circ - 118^\circ}{2} = 31^\circ.$$

$$\widehat{BAM} = \widehat{BAC} + \widehat{CAM} = 56^\circ + 31^\circ = 87^\circ.$$



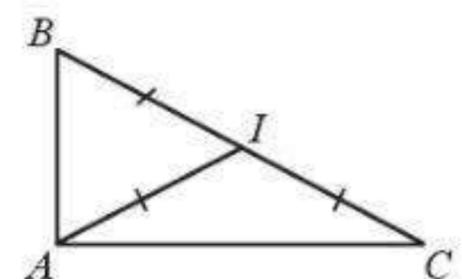
Hình 79

46. (Hình 80) Tam giác IAB cân tại I nên $\widehat{IBA} = \widehat{IAB}$.

Tam giác IAC cân tại I nên $\widehat{IAC} = \widehat{ICA}$. Ta có

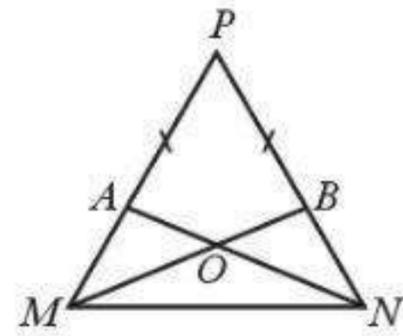
$$\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \widehat{BAC} + \widehat{BAI} + \widehat{IAC}$$

$$= 2\widehat{BAC} = 180^\circ \text{ hay } \widehat{BAC} = 90^\circ.$$



Hình 80

47. (Hình 81) Do $AM = BN$, MN là cạnh chung và $\widehat{AMN} = \widehat{BNM}$ nên $\triangle AMN = \triangle BNM$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{BMN}$ hay $\widehat{ONM} = \widehat{OMN}$.
 Vậy tam giác OMN là tam giác cân tại O .



Hình 81

48. (Hình 82)

a) Do $BD = BA$, $CE = CA$ nên tam giác BAD cân tại B , tam giác CAE cân tại C .

Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ suy ra

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^\circ.$$

Tam giác BAD cân tại B có $\widehat{ABD} = 30^\circ$ suy ra $\widehat{ADB} = 75^\circ$. Tương tự $\widehat{AEC} = 75^\circ$.
 Vậy $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$, tức là tam giác AED cân tại A .

b) Tam giác AED cân tại A và $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = 75^\circ$ nên $\widehat{EAD} = 30^\circ$. Vậy số đo các góc ADE , AED và EAD của tam giác AED lần lượt là: $75^\circ, 75^\circ, 30^\circ$.

49. a) $\triangle ABD = \triangle ACE$ (do $AB = AC$, $BD = CE$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^\circ$) suy ra $AD = AE$.
 Vậy tam giác AED là tam giác cân tại A .

b) Tam giác AED cân tại A và $\widehat{EAD} = 45^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 150^\circ$ do đó

$$\widehat{ADE} = \widehat{AED} = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ.$$

c) Do BC là cạnh chung, $BD = CE$, $\widehat{DBC} = \widehat{BCE} = 150^\circ$ nên

$$\triangle BDC = \triangle CEB \text{ (c.g.c).}$$

Suy ra $DC = BE$ (hai cạnh tương ứng).

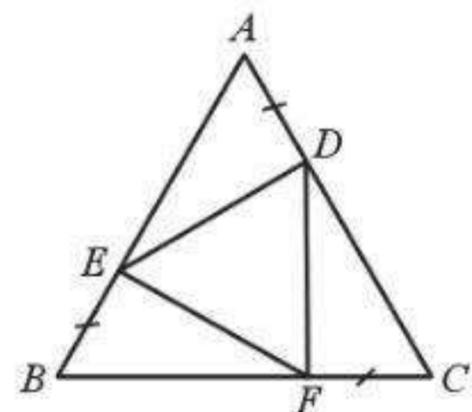
50. (Hình 83)

$$\triangle ADE = \triangle BEF \text{ (c.g.c) nên } DE = EF \quad (1)$$

$$\triangle BEF = \triangle CFD \text{ (c.g.c) nên } EF = FD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $DE = FD = EF$.

Vậy tam giác DEF là tam giác đều.



Hình 83

51. (Hình 84) Cách 1. Qua D vẽ $DK \parallel AC$. Ta có

$$\triangle OKD = \triangle OCE \text{ (g.c.g) nên } KD = CE.$$

Mặt khác $BD = CE$ suy ra $DB = DK$ hay tam giác DBK cân tại D . Suy ra

$$\widehat{DBK} = \widehat{DKB} \quad (1)$$

Do $DK \parallel AC$ nên $\widehat{DKB} = \widehat{ACB}$ (đồng vị) (2)

Từ (1) và (2), ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Vậy tam giác ABC là tam giác cân tại A .

Cách 2. Qua D, E lần lượt vẽ DH và EI vuông góc với BC ($H, I \in BC$). Ta có

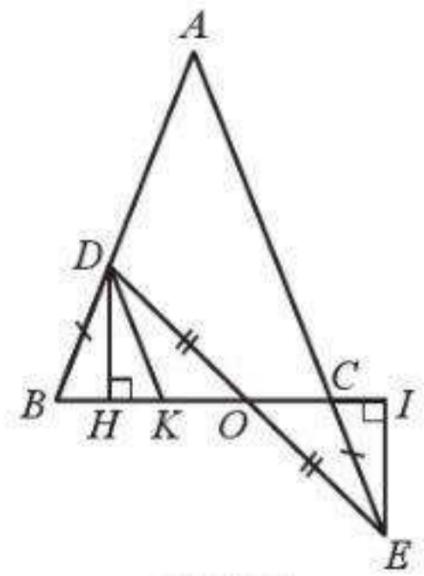
$\triangle DHO = \triangle EIO$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên $DH = EI$.

$\triangle DHB = \triangle EIC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

nên $\widehat{DBH} = \widehat{ICE}$.

Lại có $\widehat{ICE} = \widehat{ACB}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

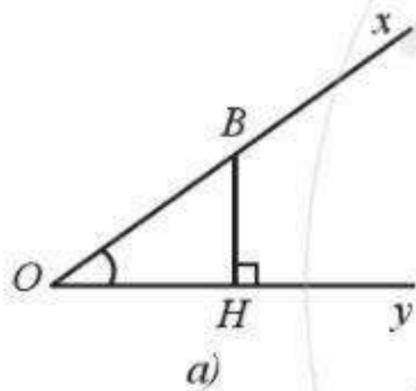
Vậy tam giác ABC là tam giác cân tại A .



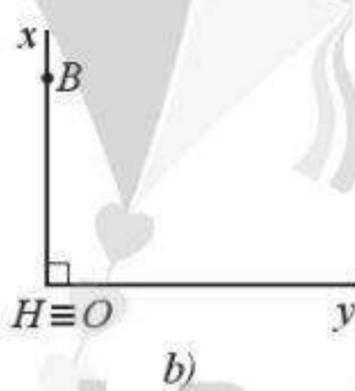
Hình 84

52. (Hình 85)

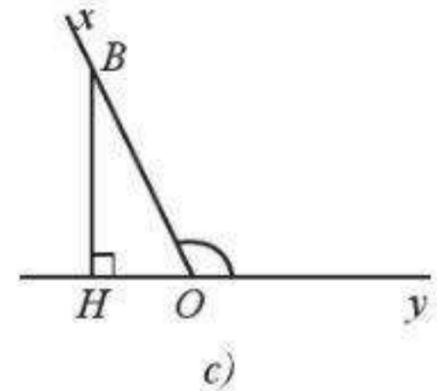
a) Góc xOy nhọn



b) Góc xOy vuông



c) Góc xOy tù



Hình 85

53. Học sinh tự làm.

54. Học sinh tự làm.

55. (Hình 86)

$\triangle MAE = \triangle MCF$ (cạnh huyền - góc nhọn)

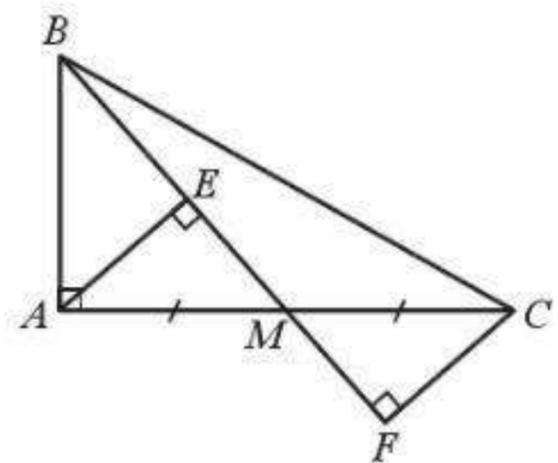
suy ra $ME = MF$ (1)

Ta có: $AB < BM = BE + ME$ (2)

$AB < BM = BF - MF$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$AB + AB < BE + BF$ nên $BE + BF > 2AB$.



Hình 86

56. (Hình 87)

a) Trong tam giác MAB có: $\widehat{ABM} + \widehat{BAM} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{CAN} + \widehat{BAM} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ$ nên

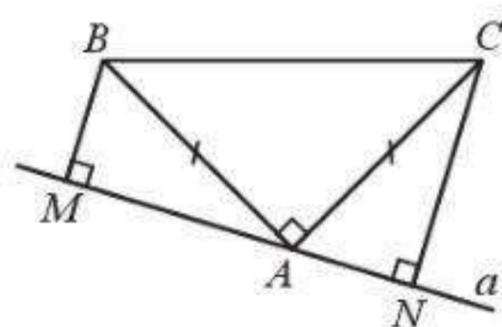
$$\widehat{ABM} = \widehat{CAN}.$$

b) $\Delta MBA = \Delta NAC$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $MA = CN$.

c) Nếu $a \parallel BC$ thì $\widehat{MAB} = \widehat{ABC} = 45^\circ$ (so le trong), nên ΔMAB vuông cân tại M .

Do đó $MA = MB$.

Tương tự $CN = AN$. Lại có $MA = CN$. Suy ra $MA = AN$.



Hình 87

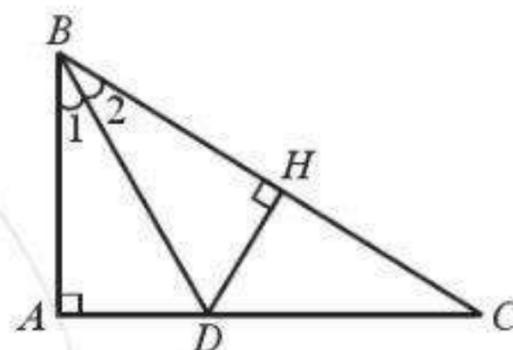
57. (Hình 88) Kẻ $DH \perp BC$.

$\Delta ABD = \Delta HBD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

suy ra $AD = DH$ (1)

Tam giác DHC vuông tại H nên $DH < DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD < DC$.



Hình 88

58. (Hình 89)

a) Trong tam giác CDM có $\widehat{M} + \widehat{D}_2 = 90^\circ$.

Trong tam giác ABD có

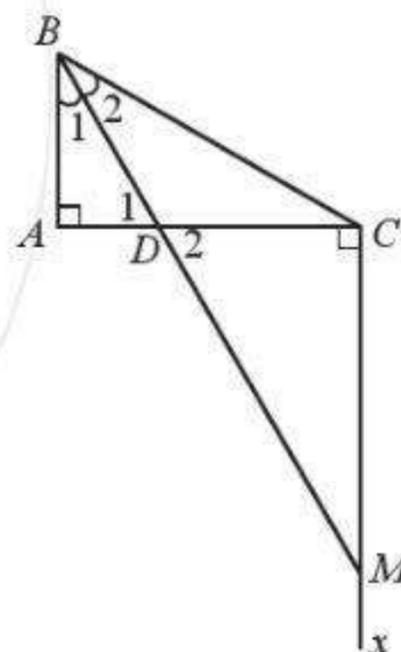
$$\widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ;$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2; \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

nên $\widehat{M} = \widehat{B}_2$.

Suy ra tam giác CBM cân tại C .

b) Theo chứng minh a) ta có $CM = BC$ mà $BC > AC$ nên $CM > CA$.



Hình 89

59. a) Ta có: $BH \leq BE$; $CK \leq CE$ nên $BH + CK \leq BE + CE = BC$.

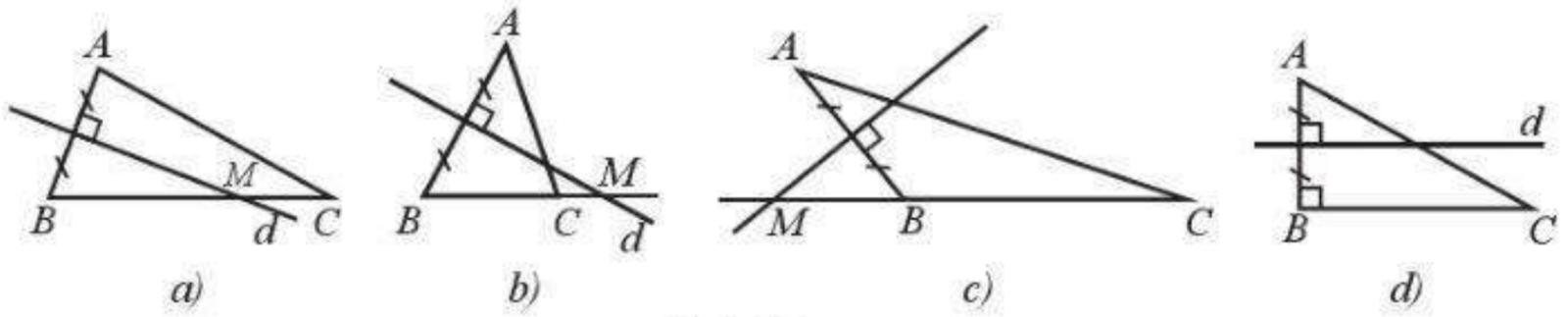
b) Do $BH + CK$ lớn nhất nên $BH = BE$, $CK = CE$. Do đó $Ax \perp BC$.

60. (Hình 90) Vì M cách đều A và B nên M nằm trên đường trung trực d của đoạn thẳng AB .

Như vậy M nằm trên đường thẳng BC và M nằm trên đường trung trực d của AB .

a) Tam giác ABC nhọn thì điểm M thuộc tia BC (Hình 90a, 90b)

- b) Tam giác ABC có góc B là góc tù thì M thuộc tia đối của tia BC (Hình 90c).
 c) Tam giác ABC vuông tại B thì $d \parallel BC$ nên không tìm được M (Hình 90d).

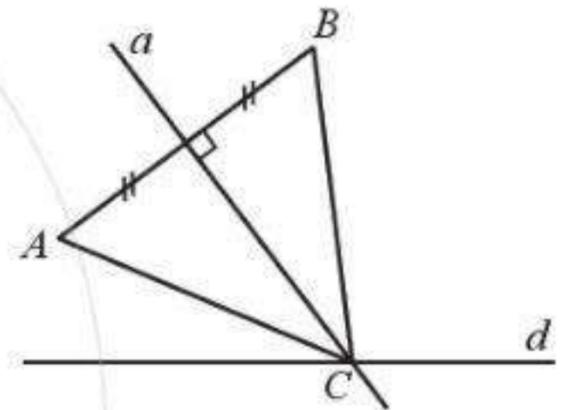


Hình 90

61. (Hình 91) Đưa về bài toán: Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng một phía đối với d . Tìm một điểm C trên d sao cho C cách đều A và B .

Gợi ý:

- Khi AB không vuông góc với d , vẽ trung trực a của đoạn thẳng AB . Giao điểm của đường thẳng a và đường thẳng d chính là điểm C cần tìm. Thật vậy, hiển nhiên C nằm trên d , C nằm trên đường trung trực a của đoạn thẳng AB nên theo tính chất đường trung trực ta có C cách đều A và B ($CA = CB$).
- Khi $AB \perp d$ thì $a \parallel d$, do đó không có một điểm nào nằm trên d lại cách đều A và B .

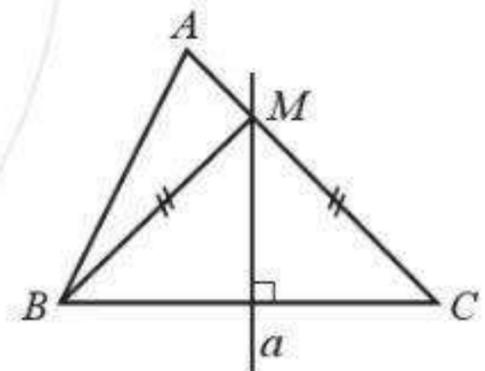


Hình 91

62. Từ $\triangle MAB = \triangle NAB$ suy ra $AM = AN, BM = BN$. Do đó A, B cùng cách đều hai điểm M, N . Suy ra đường thẳng AB là đường trung trực của đoạn thẳng MN .

63. (Hình 92) Vì M thuộc đường trung trực của BC nên
 $BM = CM$.

Ta có: $AM + MB = AM + MC = AC$.



Hình 92

64. (Hình 93)

a) Tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{C}$.

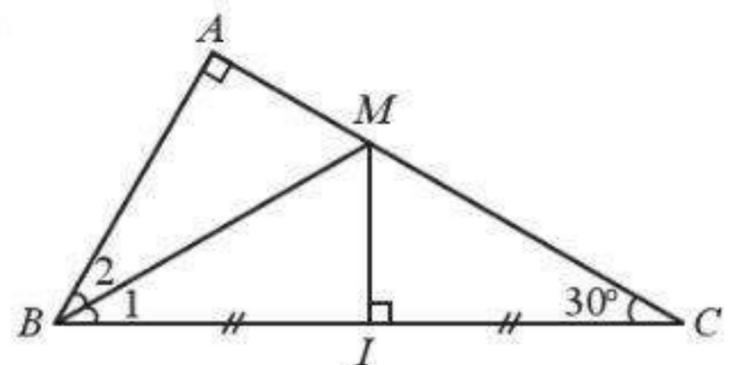
Vì điểm M thuộc đường trung trực của BC nên $MB = MC$, do đó tam giác MBC cân ở M , ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{C} = 30^\circ$.

Mặt khác $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 60^\circ$ nên

$$\widehat{B}_2 = \widehat{ABC} - \widehat{B}_1 = 30^\circ.$$

Suy ra $\widehat{B}_2 = \widehat{B}_1$.

Vậy BM là tia phân giác của góc ABC .



Hình 93

b) Gọi I là trung điểm của BC có MI vuông góc với BC .

Xét hai tam giác vuông ABM và IBM có $\Delta ABM = \Delta IBM$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra $MA = MI$.

Trong tam giác vuông MIC có $MC > MI$ suy ra $MC > MA$.

65. Vì $DB = DC$ nên điểm D thuộc trung trực của đoạn thẳng BC (1)

AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, M, D thẳng hàng.

66. (Hình 94)

a) Tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$ suy ra A thuộc đường trung trực của BC .

Theo giả thiết $MB = MC$ nên M thuộc đường trung trực của BC .

Do đó AM là đường trung trực của BC .

b) Ta có $\widehat{B} = \widehat{C}$; $MB = MC$ nên

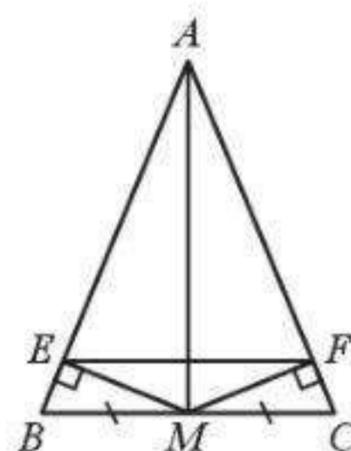
$$\Delta EBM = \Delta FCM \text{ (cạnh huyền - góc nhọn).}$$

Suy ra $ME = MF$ (1)

và $BE = CF$. Lại có $AB = AC$ nên $AE = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra M và A thuộc đường trung trực của EF .

Vậy AM là đường trung trực của EF .



Hình 94

67. (Hình 95) Đường trung trực của AC cắt AB tại D nên $DA = DC$.

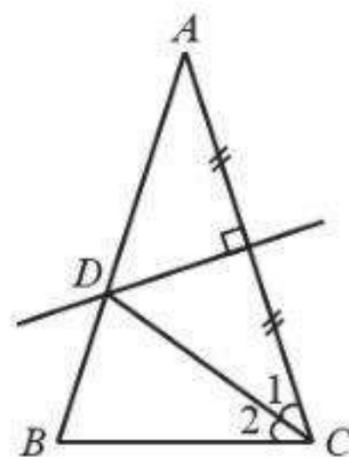
Suy ra $\widehat{A} = \widehat{C}_1$.

Vì CD là tia phân giác của góc C nên $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$. Suy ra $\widehat{ACB} = 2\widehat{A}$.

Trong tam giác cân ABC có $\widehat{B} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{A} + 2\widehat{A} + 2\widehat{A} = 180^\circ$ hay $5\widehat{A} = 180^\circ$. Vậy $\widehat{A} = 36^\circ$.

Khi đó $\widehat{B} = \widehat{C} = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$.



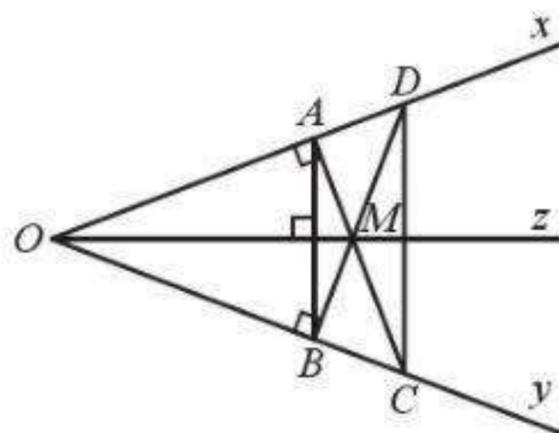
Hình 95

68. (Hình 96)

a) $\Delta OAM = \Delta OBM$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra $OA = OB$ và $MA = MB$. Do đó OM là đường trung trực của AB .

b) $\Delta ADM = \Delta BCM$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)

Suy ra $MD = MC$. Vậy tam giác DMC cân tại M .



Hình 96

69. (Hình 97)

a) DI là đường trung trực của OA nên $IO = IA$.

FI là đường trung trực của OB nên $IO = IB$.

Vậy $IO = IA = IB$. Mà $OA = OB$ (gt), suy ra

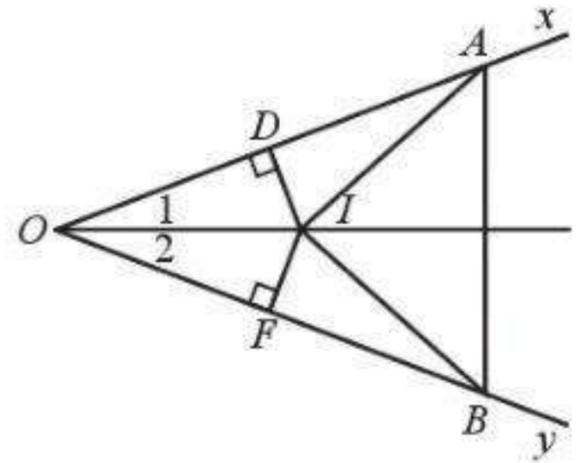
$$\triangle OIA = \triangle OIB \text{ (c.c.c.)}$$

Vậy $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (hai góc tương ứng). Do đó OI là tia phân giác của góc xOy .

b) Theo giả thiết $OA = OB$ suy ra O cách đều A và B .

Theo chứng minh trên: $IA = IB$ suy ra I cách đều A và B .

Vậy OI là đường trung trực của đoạn thẳng AB .



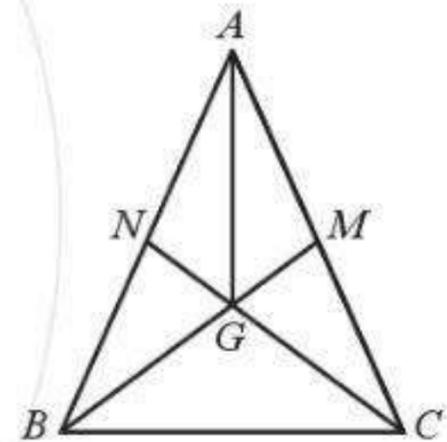
Hình 97

70. (Hình 98)

a) Dễ chứng minh $\triangle AMB = \triangle ANC$ (c.g.c) suy ra $BM = CN$.

b) Do $\triangle AMB = \triangle ANC$ suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$. Mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên $\widehat{GBC} = \widehat{GCB}$. Suy ra tam giác GBC cân tại G .

c) G là trọng tâm của tam giác ABC nên AG nằm trên đường trung tuyến thuộc cạnh BC . Suy ra AG vuông góc với BC (do $\triangle ABC$ cân tại A).



Hình 98

71. (Hình 99)

a) Ta có $GM = \frac{1}{2}GA$; $GM = MD$.

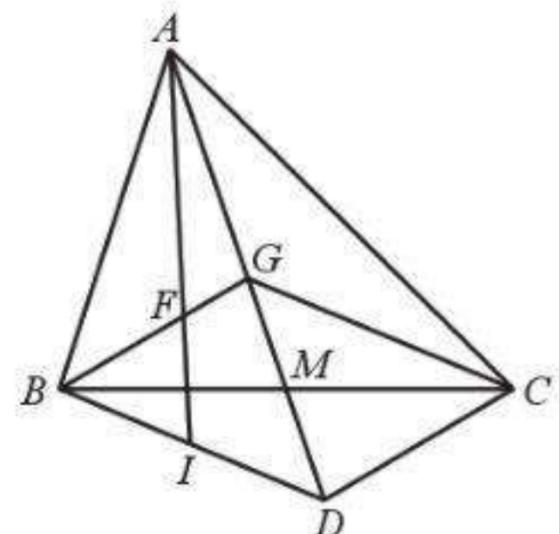
Suy ra $GD = GA$ nên CG là trung tuyến của tam giác ACD .

b) Xét hai tam giác BGM và CDM có

$$GM = DM, \widehat{GMB} = \widehat{DMC}, MB = MC$$

nên $\triangle BGM = \triangle CDM$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{BGM} = \widehat{CDM}$, chúng ở vị trí so le trong nên $BG \parallel CD$.

c) Trong tam giác ABD có AI và BG là hai đường trung tuyến nên F là trọng tâm của tam giác ABD , vì thế $AF = 2FI$.

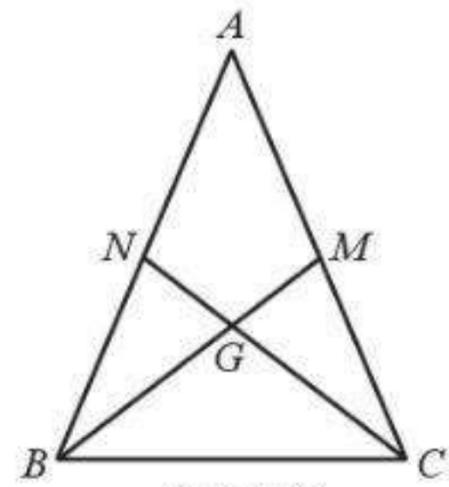


Hình 99

72. (Hình 100) Tam giác ABC có hai trung tuyến BM và CN bằng nhau. Gọi G là giao điểm của BM và CN , theo tính chất trọng tâm tam giác có

$$BG = \frac{2}{3}BM \text{ nên } CG = \frac{2}{3}CN.$$

Vì $BM = CN$ nên $BG = CG$ suy ra $\widehat{GBC} = \widehat{GCB}$. Từ đó $\Delta MBC = \Delta NCB$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$ hay tam giác ABC cân.



Hình 100

73. (Hình 101)

a) Do tam giác ABC đều nên $AM = CN$. Mà $GA = \frac{2}{3}AM$, $CG = \frac{2}{3}CN$ nên $GA = GC$.

Tương tự, ta có $GA = GB$. Vậy $GA = GB = GC$.

b) Ta có $GA = GB$ và $GA = GD$

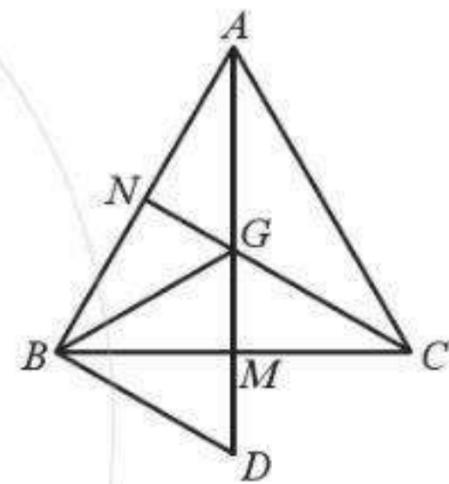
nên $GD = GB$ (1)

Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$, suy ra

$$\Delta BMG = \Delta BMD \text{ (c.g.c).}$$

Do đó $BG = BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GD = GB = BD$. Vậy tam giác BGD đều.



Hình 101

74. (Hình 102) I là trọng tâm của ΔABC nên

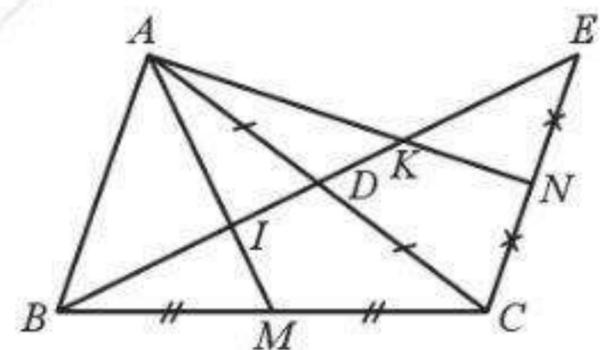
$$BI = \frac{2}{3}BD = \frac{1}{3}BE \quad (1)$$

K là trọng tâm của ΔACE nên

$$EK = \frac{2}{3}ED = \frac{1}{3}BE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $IK = \frac{1}{3}BE$.

Do đó $BI = IK = EK$.



Hình 102

75. (Hình 103)

Ta có $AM = \frac{1}{2}BC$, $BM = MC$ nên $AM = BM = MC$.

c) Theo Bài tập 75, tam giác DNA có $FN = FD = FA$ nên tam giác DNA vuông tại N .

d) $EB \perp NA$ (1), $EF \parallel DN$ mà $DN \perp NA$ nên $EF \perp NA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ta có ba điểm E, F, B thẳng hàng.

79. a) Sai. b) Sai. c) Đúng. d) Đúng.

80. Do $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2\widehat{BAC}$ suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $\widehat{BKC} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} = 120^\circ$.

Vậy phát biểu b và d là sai.

81. (Hình 107)

a) $\triangle ABK = \triangle ACK$ (c.c.c) suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$, do đó AK là tia phân giác của góc BAC . I là giao điểm của hai đường phân giác CE và BD nên I cũng nằm trên phân giác AK suy ra I cách đều ba cạnh của tam giác ABC .

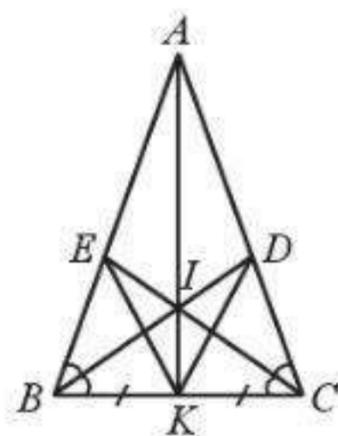
b) Từ $\triangle EBC = \triangle DCB$ (g.c.g) suy ra $BE = CD$.

$\triangle EBK = \triangle DCK$ (c.g.c) suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{CKD}$ (1)

Lại có $\widehat{AKB} = \widehat{AKC} = 90^\circ$ (do tam giác ABC cân tại A và K là trung điểm của đoạn BC) (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AKB} - \widehat{EKB} = \widehat{AKC} - \widehat{DKC}$ hay $\widehat{EKI} = \widehat{IKD}$.

Vậy KI là tia phân giác của góc EKD .



Hình 107

82. (Hình 108)

a) Tam giác ABC vuông tại C , $\widehat{CAB} = 60^\circ$, AE là tia phân giác của góc CAB suy ra

$\widehat{CEA} = \widehat{AEK} = 60^\circ$, do đó $\widehat{BED} = \widehat{CEA} = 60^\circ$

và $\widehat{BEK} = 180^\circ - \widehat{CEK} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{BEK} = \widehat{BED} = 60^\circ$ và $\widehat{BEK} = \widehat{AEK} = 60^\circ$.

Vậy EB là tia phân giác của góc DEK , EK là tia phân giác của góc BEA .

b) Dễ thấy $\triangle ACE = \triangle AKE$, $\triangle EKB = \triangle EDB$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra

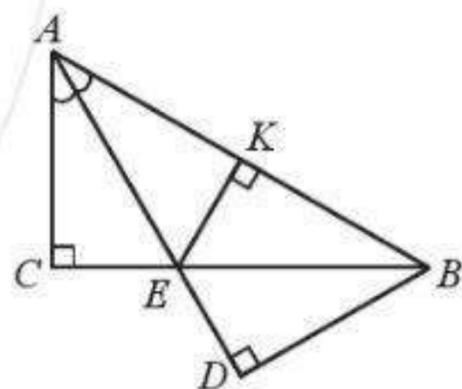
$$EC = ED = EK.$$

83. a) $\widehat{IEF} + \widehat{IFE} = \frac{\widehat{aEF} + \widehat{bFE}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{EIF} = 90^\circ$.

b) Do EI là tia phân giác của góc AEF nên $IA = IC$ (1)

do FI là tia phân giác của góc EFB nên $IC = IB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $IA = IB$.



Hình 108

84*. (Hình 109)

a) $\triangle BEC = \triangle CDB$ (c.g.c) suy ra $\widehat{ECB} = \widehat{DBC}$. Do đó tam giác GBC cân ở G mà M là trung điểm của BC suy ra GM là tia phân giác của góc BGC .

$$\widehat{BGM} = \widehat{AGD}, \widehat{MGC} = \widehat{EGA} \text{ suy ra } \widehat{AGD} = \widehat{EGA}$$

do đó GA là tia phân giác của góc EGD .

$$\triangle AME = \triangle AMD \text{ (c.g.c) suy ra } \widehat{AME} = \widehat{AMD}.$$

Do đó MA là tia phân giác của góc EMD .

b) Hai tam giác ABC và AED cân tại A suy ra

$$\widehat{AED} = \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}.$$

Do đó $ED \parallel BC$. Suy ra

$$\widehat{DEC} = \widehat{GCM} \quad (1)$$

Để EG là tia phân giác của góc DEM thì

$$\widehat{DEG} = \widehat{GEM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $\widehat{MEC} = \widehat{MCE}$, suy ra $ME = MC$.

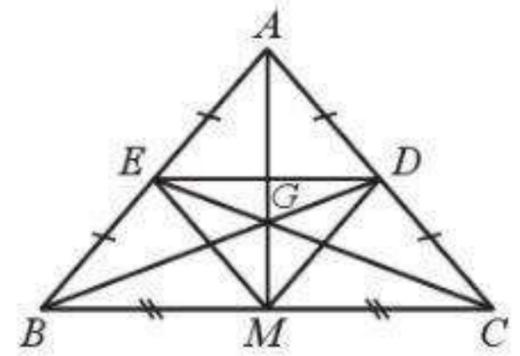
Mặt khác, $MB = MC$ nên $ME = MB = MC$, do đó tam giác BEC vuông tại E .

Do CE vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên tam giác CAB cân tại C .

Ta có $CA = CB$ và $AB = AC$, suy ra tam giác ABC là tam giác đều.

Dễ thấy nếu tam giác ABC là tam giác đều thì EG là tia phân giác của góc DEM .

Vậy điều kiện để EG là tia phân giác của góc DEM là tam giác ABC là tam giác đều.



Hình 109

85. a) Đúng.

b) Sai.

c) Đúng.

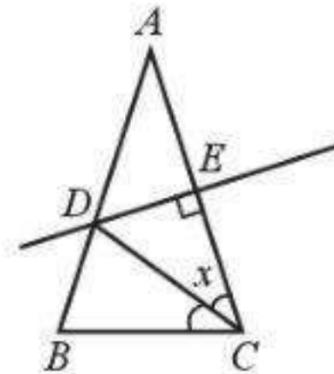
d) Sai.

86. (Hình 110) Đặt $\widehat{DCA} = x$ suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{ABC} = 2x$.

Tam giác DAC cân ở D (do ED là đường trung trực của cạnh AC), suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{DCA} = x$.

Ta có $x + 2x + 2x = 180^\circ$ hay $x = 36^\circ$.

Vậy số đo các góc A, B, C của tam giác ABC lần lượt là: $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.



Hình 110

87. Học sinh tự làm.

88. (Hình 111) Gọi d là đường trung trực của cạnh AB và M là giao điểm của d và BC .

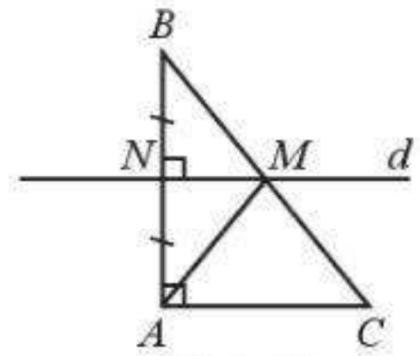
Do $M \in d$ nên $MA = MB$ hay tam giác MAB cân tại M . Suy ra $\widehat{MBA} = \widehat{MAB}$.

Ta có $90^\circ - \widehat{MBA} = 90^\circ - \widehat{MAB}$ hay $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$. Do đó tam giác MAC cân tại M .

Suy ra $MA = MC$.

Như vậy, $MA = MB = MC$.

Vậy các đường trung trực của tam giác vuông đi qua trung điểm của cạnh huyền.



Hình 111

89. a) Trong tam giác EMF có O là giao điểm hai đường trung trực của ME và MF nên O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác EMF .

$$b) \widehat{EOF} = \widehat{EOM} + \widehat{MOF} = 2\widehat{xOM} + 2\widehat{MOy} = 2\widehat{xOy} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

90. a) Gọi K là trung điểm của BC . Tam giác ABC cân ở A suy ra AK là đường trung trực của BC . Do các đường trung trực d, d' tương ứng của các cạnh AB và AC cắt nhau ở I nên A, K, I thẳng hàng hay $KI \perp DE$ (1)

$$\Delta BQD = \Delta CPE \text{ (cạnh góc vuông - góc nhọn) suy ra } BD = EC \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (2) và } BK = KC \text{ suy ra } DK = KE \text{ (3)}$$

Từ (1) và (3) suy ra I nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng DE .

b) Do $IA = IB = IC$ nên đường tròn tâm I bán kính IA đi qua các điểm A, B, C .

c) Chứng tỏ tam giác IAB là tam giác đều và tam giác IBC cân tại I . Tính được $\widehat{IBC} = \widehat{ICB} = 30^\circ, \widehat{BIC} = 120^\circ$.

91*. (Hình 112)

a) Tam giác ABC vuông cân ở A nên đường phân giác AM cũng là đường trung tuyến, suy ra

$$AM = MB = MC.$$

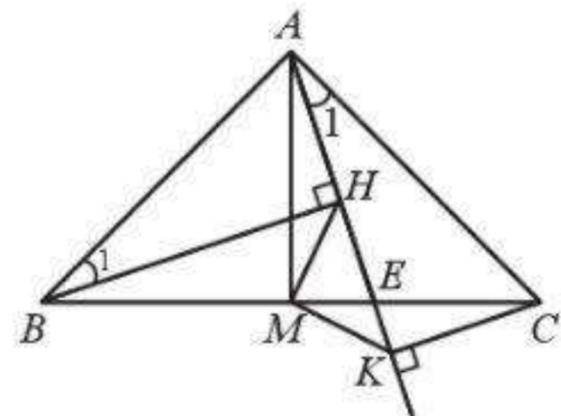
Do $AB = AC; \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 = 90^\circ - \widehat{BAH}$ nên

$$\Delta ABH = \Delta CAK.$$

Suy ra $AH = CK$ và $\widehat{BAH} = \widehat{ACK}$ (1)

Từ (1) và $\widehat{BAM} = \widehat{ACM} = 45^\circ$ suy ra

$$\widehat{BAH} - \widehat{BAM} = \widehat{ACK} - \widehat{ACM} \text{ hay } \widehat{MAH} = \widehat{MCK}.$$



Hình 112

$\Delta AMH = \Delta CMK$ (do $AM = CM, AH = CK, \widehat{MAH} = \widehat{MCK}$) suy ra $MH = MK$. Ta có $MA = MB = MC$ và $MH = MK$ nên ba đường trung trực tương ứng của các đoạn thẳng AB, AC, KH cùng đi qua điểm M .

b) Ta có $MH = MK$ và

$$\widehat{HMK} = \widehat{HME} + \widehat{EMK} = \widehat{HME} + \widehat{AMH} = 90^\circ$$

suy ra tam giác MHK vuông cân ở M . Vậy các góc của tam giác MHK là:

$$\widehat{MHK} = \widehat{MKH} = 45^\circ, \widehat{HMK} = 90^\circ.$$

92. a) Sai. b) Đúng. c) Đúng.

93. Phát biểu b là đúng.

94. Trục tâm của các tam giác HAB, HBC, HCA tương ứng là C, A, B .

95. Do tam giác ABC có trục tâm H cũng là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác nên tam giác ABC là tam giác đều. Do đó số đo các góc của tam giác ABC đều bằng 60° .

96. (Hình 113)

a) I là trục tâm của tam giác DBC do đó

$$DI \perp BC \quad (1)$$

Mặt khác

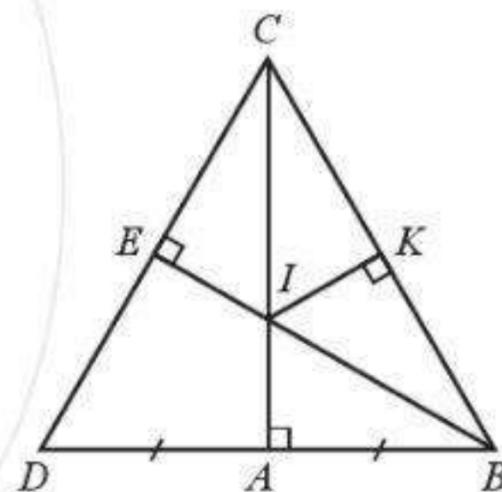
$$IK \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D, I, K thẳng hàng.

b) Tam giác BCD có I vừa là trục tâm vừa là trọng tâm suy ra tam giác BCD là tam giác đều, do đó

$$\widehat{DBC} = 60^\circ \text{ hay } \widehat{ABC} = 60^\circ.$$

Vậy điều kiện của tam giác ABC để I cũng là trọng tâm của tam giác BCD là tam giác vuông ABC phải có $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

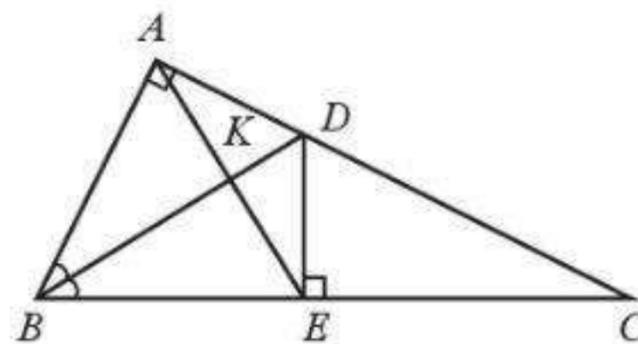


Hình 113

97. (Hình 114)

a) Gọi K là giao điểm của BD và AE .

Do $\Delta BAD = \Delta BED$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên $BA = BE$. Tam giác BAE cân tại B và BK là tia phân giác suy ra $BK \perp AE$. Do BK là đường cao của tam giác BAE và B, K, D thẳng hàng nên trục tâm H của tam giác BAE nằm trên đường thẳng BD .



Hình 114

b) Ta có $\widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{ABE}$, $\widehat{ABE} < 90^\circ$ suy ra $\widehat{ADE} > 90^\circ$. Do góc ADE là góc tù nên trục tâm của tam giác DAE nằm ngoài tam giác đó.

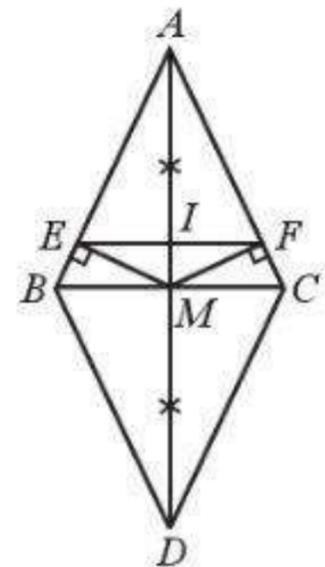
c) Tam giác BAE có H vừa là trực tâm vừa là điểm cách đều các đỉnh của tam giác suy ra tam giác BAE là tam giác đều, do đó $\widehat{ABE} = 60^\circ$ hay $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Vậy điều kiện để H cách đều các đỉnh của tam giác BAE là tam giác vuông ABC phải có $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

98. (Hình 115)

a) Chứng minh $AE = AF, ME = MF$ nên AM là đường trung trực của đoạn thẳng EF . Suy ra AM vuông góc với EF .

b) Tam giác ABC cân tại A , có đường trung tuyến AM , suy ra $AM \perp BC$ hay $BM \perp AD, CM \perp AD$. Mà BM và CM là các đường cao tương ứng của các tam giác ABD, ACD , suy ra trực tâm của các tam giác ABD và ACD nằm trên đường thẳng BC .

c) Trực tâm của các tam giác AEF, MEF, DBC và ABC nằm trên đường thẳng AD .



Hình 115

99. Chọn C.

100. Chọn C.

101. Học sinh tự làm.

102*. (Hình 116) Gọi N là giao điểm của AG và $BC, BH \perp AN (H \in AN), CK \perp AN (K \in AN)$.

Ta có

$$S_{\triangle AGB} = S_{\triangle AGC} \text{ nên } \frac{AG \cdot BH}{2} = \frac{AG \cdot CK}{2}.$$

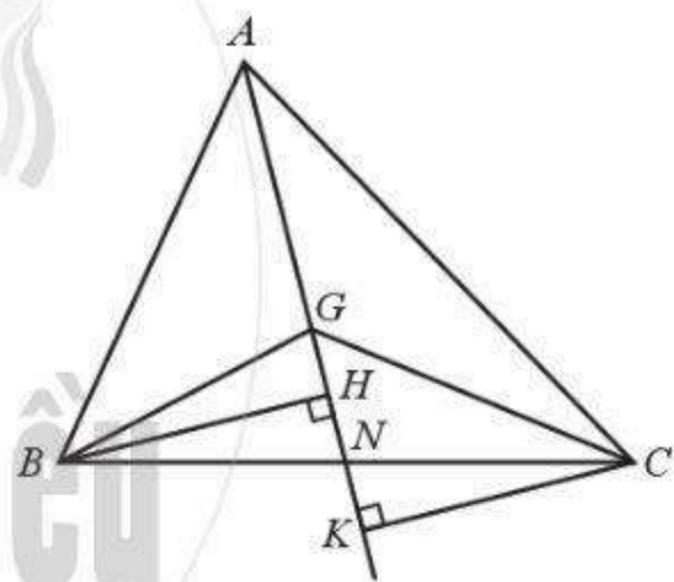
Suy ra $BH = CK$.

Suy ra $\triangle BHN = \triangle CKN$ (cạnh góc vuông - góc nhọn).

Suy ra $BN = NC$ hay AN là đường trung tuyến của tam giác ABC (1)

Tương tự, ta có CG cũng là đường trung tuyến của tam giác ABC (2)

Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC .



Hình 116

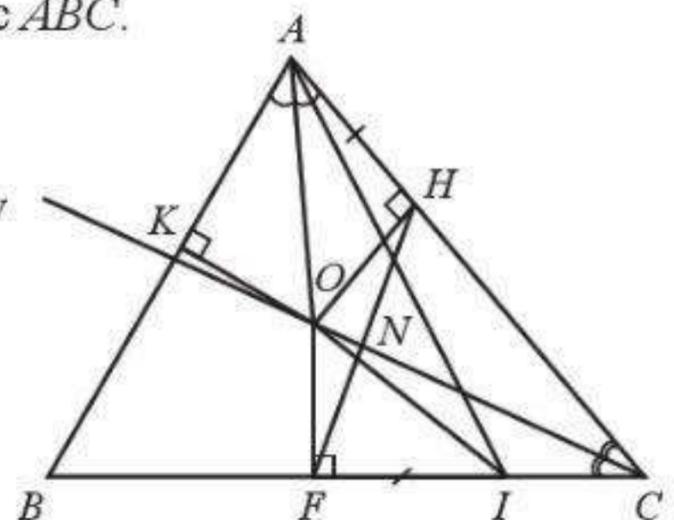
103. (Hình 117)

a) $\triangle OHC = \triangle OFC$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $CH = FC$.

$\triangle CNH = \triangle CNF$ (c.g.c) nên $\widehat{CNH} = \widehat{CNF}$.

Mà $\widehat{CNH} + \widehat{CNF} = 180^\circ$ suy ra

$$\widehat{CNH} = \widehat{CNF} = 90^\circ \text{ hay } OC \perp FH.$$



Hình 117

b) $\Delta OHA = \Delta OFI$ (c.g.c) nên $OA = OI$ hay ΔOAI cân tại O .

c) Kẻ $OK \perp AB$ ($K \in AB$). Dễ thấy $AH = AK$, $BK = BF$.

Từ đó suy ra $AB = BI$. Vậy tam giác BAI cân tại B .

104. (Hình 118)

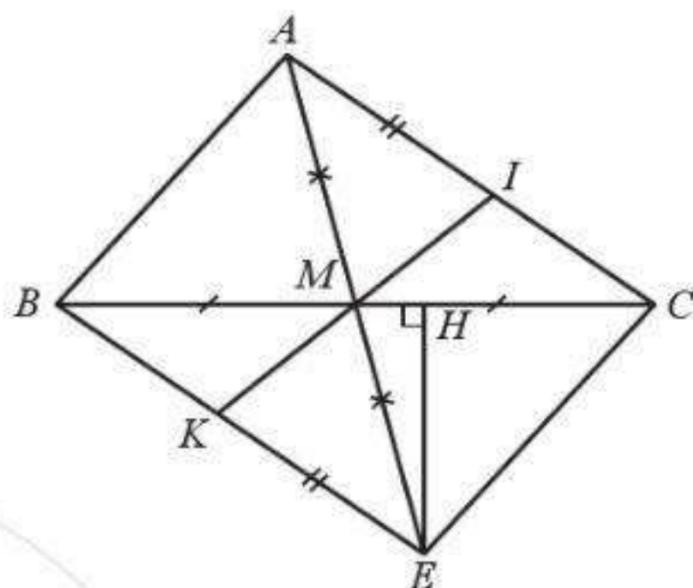
a) Dễ thấy $\Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c) suy ra $AC = EB$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MEB}$. Hai góc này ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BE$.

b) $\Delta AMI = \Delta EMK$ (c.g.c) suy ra

$$\widehat{AMI} = \widehat{EMK}.$$

Mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) suy ra $\widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ$, do đó ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) $\widehat{HEB} = 40^\circ$; $\widehat{HEM} = 15^\circ$.



Hình 118

105. (Hình 120)

a), b) Học sinh tự làm.

c) Trong tam giác HDC có $HD < HC$ (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền).

Mà $HC = HB$, do đó $HB > HD$.

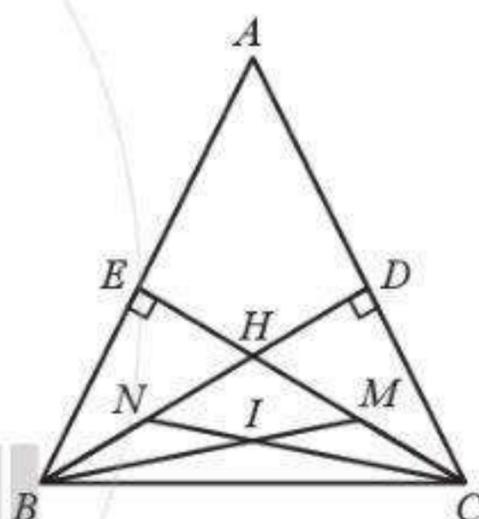
d) Tam giác HBC cân tại H , I là trọng tâm của tam giác HBC nên IH nằm trên đường trung tuyến tương ứng cạnh BC . Do đó

$$HI \perp BC \quad (1)$$

H là trực tâm của tam giác cân ABC nên

$$AH \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, H, I thẳng hàng.



Hình 119

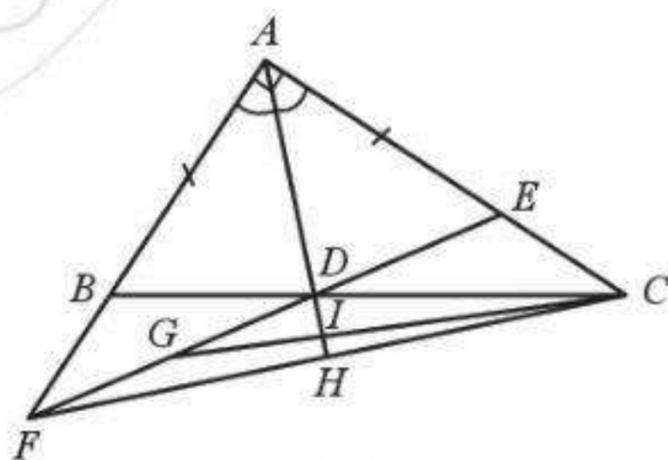
106. (Hình 151)

a) $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{AED}$.

b) $\Delta ABC = \Delta AEF$ (cạnh góc vuông - góc nhọn) nên $AC = AF$.

c) Do AH là đường phân giác của tam giác cân CAF nên AH là đường trung tuyến của tam giác đó, tức là H là trung điểm của CF .

Suy ra CG và DH là hai đường trung tuyến của tam giác CDF . Vì vậy, I là trọng tâm của tam giác CDF . Theo tính chất của trọng tâm tam giác, ta có $DI = 2IH$.



Hình 120

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG V. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 3

§1. Thu thập, phân loại và biểu diễn dữ liệu 3

§2. Phân tích và xử lý dữ liệu 6

§3. Biểu đồ đoạn thẳng 11

§4. Biểu đồ hình quạt tròn 16

§5. Biến cố trong một số trò chơi đơn giản 19

§6. Xác suất của biến cố ngẫu nhiên trong một số trò chơi đơn giản 22

Bài tập cuối chương V 25

Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 30

CHƯƠNG VI. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ 35

§1. Biểu thức số. Biểu thức đại số 35

§2. Đa thức một biến. Nghiệm của đa thức một biến 40

§3. Phép cộng, phép trừ đa thức một biến 44

§4. Phép nhân đa thức một biến 47

§5. Phép chia đa thức một biến 51

Bài tập cuối chương VI 55

Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 58

CHƯƠNG VII. TAM GIÁC

67

§1. Tổng các góc của một tam giác

67

§2. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện. Bất đẳng thức tam giác

69

§3. Hai tam giác bằng nhau

71

§4. Trường hợp bằng nhau thứ nhất của tam giác: cạnh - cạnh - cạnh

73

§5. Trường hợp bằng nhau thứ hai của tam giác: cạnh - góc - cạnh

76

§6. Trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác: góc - cạnh - góc

79

§7. Tam giác cân

82

§8. Đường vuông góc và đường xiên

84

§9. Đường trung trực của một đoạn thẳng

86

§10. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

88

§11. Tính chất ba đường phân giác của tam giác

91

§12. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

93

§13. Tính chất ba đường cao của tam giác

95

Bài tập cuối chương VII

98

Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số

100

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống



BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 7
Cánh Diều

1. Ngữ văn 7 (Tập một, Tập hai)
2. Toán 7 (Tập một, Tập hai)
3. Giáo dục công dân 7
4. Lịch sử và Địa lí 7
5. Khoa học tự nhiên 7
6. Công nghệ 7
7. Tin học 7
8. Giáo dục thể chất 7
9. Âm nhạc 7
10. Mĩ thuật 7
11. Hoạt động trải nghiệm hướng nghiệp 7
12. Tiếng Anh 7 Explore English

TÌM ĐỌC

CÁC SÁCH BỔ TRỢ VÀ THAM KHẢO LỚP 7 (Cánh Diều)
THEO TỪNG MÔN HỌC

SỬ DỤNG
TEM CHỐNG GIẢ

Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập
website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com

ISBN: 978-604-54-9455-4



9 786045 494554