SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ HỒNG PHONG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXIX - NĂM 2025

Môn: **TOÁN** - Khối: **10**
Thời gian: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **05/04/2025**
*Đề thi gồm **01** trang, **05** câu*

Lưu ý: *- Thí sinh **làm mỗi câu trên một tờ giấy thi riêng** và **ghi rõ số câu ở trang 1** của mỗi tờ giấy thi đó;*
*- Thí sinh **không được** sử dụng tài liệu;*
*- Giám thị **không** giải thích gì thêm.*

Câu 1. (3 điểm)

Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_{30}, b_1, b_2, ..., b_{30}$ thỏa mãn $a_i \neq 0$ với mọi $i = 1, ..., 30$. Hỏi phương trình:

$$\max\left\{a_1x + b_1, a_2x + b_2, ..., a_{30}x + b_{30}\right\} = 4$$

có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

Câu 2. (4 điểm)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $|x| \leq 3, |y| \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$0 \leq \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) + 4(x-1)(y-1) \leq 164$$

Câu 3. (4 điểm)

Các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ được viết trên một vòng tròn theo thứ tự đó. Biết rằng mỗi số lớn hơn tích của hai số liền trước nó: với mọi $1 \leq i \leq 100$ thì $a_i a_{i+1} < a_{i+2}$ (ta quy ước $a_{101} = a_1, a_{102} = a_2$). Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu số nguyên dương trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$?

Câu 4. (4 điểm)

Cho các số nguyên dương a, b với $a > b$. Biết rằng $a^3 - b^3$ là một ước của $ab(a^2 - b^2)$. Chứng minh rằng $(a-b)^3 > 3ab$.

Câu 5. (5 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại P, các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại Q. Gọi M và N tương ứng là trung điểm của AD và BC. Ký hiệu (L) và (K) tương ứng là đường tròn ngoại tiếp tam giác QAD và tam giác QBC. Đường thẳng MQ cắt lại (K) tại điểm E (khác Q), đường thẳng NQ cắt lại (L) tại điểm F (khác Q).

a. Chứng minh rằng các điểm P, O, E, F, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b. Đường thẳng đi qua L và vuông góc với QF cắt đường thẳng đi qua K và vuông góc với QE tại điểm T. Chứng minh rằng các điểm T, P và O thẳng hàng.

--------------- HẾT ---------------

Họ tên thí sinh: .... ***SBD:*** ....
Trường: .... ***Tỉnh/TP:*** ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ HỒNG PHONG

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXIX - NĂM 2025

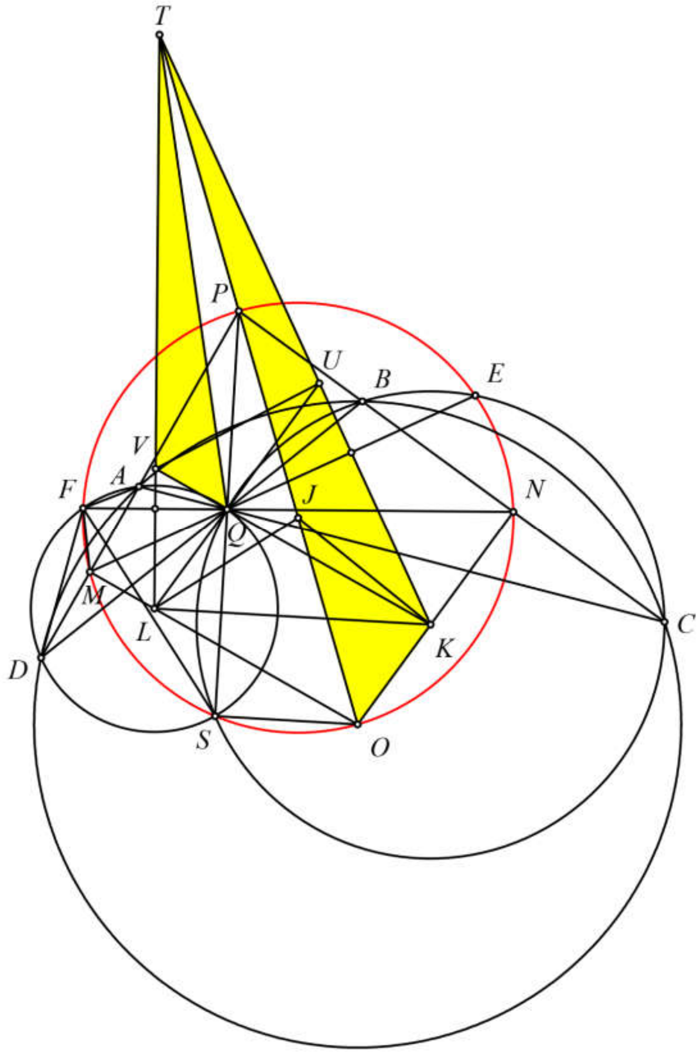
Môn: **TOÁN**
Khối: **10**
Ngày thi: **05/04/2025**

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_{30}, b_1, b_2, ..., b_{30}$ thỏa mãn $a_i \neq 0$ với mọi $i = 1, ..., 30$. Hỏi phương trình $$\max\left\{a_1x+b_1, a_2x+b_2, ..., a_{30}x+b_{30}\right\} = 4$$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?	**3**
	Giả sử phương trình đã cho có 3 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Suy ra tồn tại chỉ số $1 \le i \le 30$ để $a_ix_2 + b_i = \max\{a_1x+b_1, a_2x+b_2, \ldots, a_{30}x+b_{30}\} = 4;$ ngoài ra ta có $a_ix_1 + b_i \le 4, a_ix_3 + b_i \le 4$.	**1.5**
	Nói cách khác, hàm tuyến tính $a_ix + b_i - 4$ nhận giá trị 0 tại x_2 và không dương tại x_1, x_3. Điều này chỉ xảy ra khi nó là hàm hằng bằng 0; nghĩa là $a_i = 0, b_i = 4$, mâu thuẫn. Như vậy, phương trình đã cho có không quá 2 nghiệm.	**1**
	Đảo lại, với $a_1 = \cdots = a_{29} = 1, a_{30} = -1, b_1 = \cdots = b_{30} = 0$ ta dễ thấy phương trình $\max\{x, -x\} = 4$ có 2 nghiệm là $x = \pm 4$.	**0.5**

Câu	Nội dung	Điểm
2	Cho các số thực x, y thỏa mãn $\lvert x\rvert \le 3, \lvert y\rvert \le 3$. Chứng minh rằng: $$0 \le \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+4\left(x-1\right)\left(y-1\right) \le 164$$	4
	Một mặt, do $\lvert x\rvert, \lvert y\rvert \le 3$, ta có $$(x^2+1)(y^2+1)+4(x-1)(y-1) \le (x^2+1)(y^2+1)+4(\lvert x\rvert+1)(\lvert y\rvert+1)$$ $$\le (3^2+1)(3^2+1)+4(3+1)(3+1)=164$$ Dấu "=" đạt được khi $x=y=-3$	2
	Mặt khác, $$(x^2+1)(y^2+1)+4(x-1)(y-1) = x^2y^2+x^2+y^2+1+4xy-4x-4y+4$$ $$=(xy+1)^2+(x+y-2)^2 \ge 0$$ Dấu "=" đạt được khi $xy=-1, x+y=2$ hay $(x,y)=(1\pm\sqrt{2}, 1\mp\sqrt{2})$.	2

Câu	Nội dung	Điểm
3	Các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ được viết trên một vòng tròn theo thứ tự đó. Biết rằng mỗi số lớn hơn tích của hai số liền trước nó: với mọi $1 \le i \le 100$ thì $a_i a_{i+1} < a_{i+2}$ (ta quy ước $a_{101} = a_1, a_{102} = a_2$). Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu số nguyên dương trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$	4
	Chúng ta sẽ chỉ ra rằng hai số hạng liên tiếp không thể đồng thời là số nguyên dương được. Thật vậy, giả sử ngược lại, a_i, a_{i+1} là hai số nguyên dương liên tiếp. Suy ra, vì $a_{i+2} > a_i a_{i+1}$ nên $a_{i+2} > a_{i+1} \ge 1$. Tương tự, $a_{i+3} > a_{i+2} a_{i+1}$ nên $a_{i+3} > a_{i+2}$. Cứ lập luận như vậy, ta suy ra $a_{k+1} > a_k \ge 1$ với mọi k. Nói riêng, điều này có nghĩa là $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100} < a_1$, mâu thuẫn. Như vậy, trong 100 số hạng $a_1, \ldots, a_{100}$ có nhiều nhất 50 số nguyên dương.	2
	Hơn nữa, nếu có 50 số nguyên dương thì chúng là các số hạng chỉ số chẵn hoặc là các số hạng chỉ số lẻ. Giả sử $a_1, a_3, \ldots, a_{99}$ là các số nguyên dương (trường hợp $a_2, \ldots, a_{100}$ là các số nguyên dương lập luận tương tự). Khi này bằng cách nhân các bất đẳng thức $a_2 > a_{100} a_1$, $a_4 > a_3 a_2$, …, $a_{100} > a_{99} a_2$ lại, ta được $a_2 a_4 \cdots a_{100} > a_1 a_2 \cdots a_{100}$, kéo theo $1 > a_1 a_3 \cdots a_{99}$, vô lý.	1
	Như vậy, trong các số $a_1, \ldots, a_{100}$, có nhiều nhất 49 số nguyên dương. Ví dụ sau đây cho thấy giá trị này đạt được: $a_2 = a_4 = \cdots = a_{98} = 1, a_1 = \dfrac{1}{100}, a_3 = \dfrac{1}{99}, \ldots, a_{99} = \dfrac{1}{51}, a_{100} = \dfrac{1}{50}.$	1

Câu	Nội dung	Điểm
4	Cho các số nguyên dương a,b với $a>b$. Biết rằng a^3-b^3 là một ước của $ab(a^2-b^2)$. Chứng minh rằng $(a-b)^3>3ab$	**4**
	Đặt $a=dm, b=dn$, với $d=\gcd(a,b)$, như vậy $\gcd(m,n)=1$. Điều kiện của bài toán chứng tỏ $d^3(m^3-n^3)\mid d^4mn(m^2-n^2)$, kéo theo $(m^3-n^3)\mid dmn(m^2-n^2)$, hay $(m-n)(m^2+mn+n^2)\mid dmn(m-n)(m+n)$, nghĩa là $(m^2+mn+n^2)\mid dmn(m+n)$.	**2**
	Để ý rằng hiển nhiên $\gcd(m^2+mn+n^2,m)=\gcd(m^2+mn+n^2,n)=1$. Ngoài ra, ta cũng có $\gcd(m^2+mn+n^2,m+n)=1$. Thật vậy, nếu $k\mid m^2+mn+n^2$ và $k\mid m+n$ thì $k\mid(m+n)n+n^2$ chứng tỏ $k\mid n^2$; tương tự $k\mid m^2$, do đó $k\mid\gcd(m,n)=1$, hay $k=1$. Từ đó $m^2+mn+n^2\mid d$, kéo theo $d\ge m^2+mn+n^2=(m-n)^2+3mn>3mn$.	**1**
	Suy ra $$(a-b)^3=d^3(m-n)^3\ge d^3=d^2\cdot d>d^2\cdot 3mn=3ab$$	**1**

Câu	Nội dung	Điểm
5	Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại P, các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại Q. Gọi M và N tương ứng là trung điểm của AD và BC. Ký hiệu (L) và (K) tương ứng là đường tròn ngoại tiếp tam giác QAD và tam giác QBC. Đường thẳng MQ cắt lại (K) tại điểm E (khác Q), đường thẳng NQ cắt lại (L) tại điểm F (khác Q). a) Chứng minh rằng các điểm P,O,E,F,M,N cùng thuộc một đường tròn. b) Đường thẳng đi qua L và vuông góc với QF cắt đường thẳng đi qua K và vuông góc với QE tại điểm T. Chứng minh rằng các điểm T,P và O thẳng hàng.	5
5.a	 Do $\Delta QAD \sim \Delta QBC$ nên $\angle MQD = \angle NQC$, suy ra NQ là đường đối trung của tam giác AQD. Ta thu được tứ giác $AFDQ$ điều hòa. Suy ra $\angle QFM = \angle QFD - \angle MFD = \angle QAD - \angle QFA = \angle QBC - \angle QDA = \angle MPN$. Suy ra M,F,P,N đồng viên. Tương tự M,E,P,N đồng viên. Lại có $\angle PMO = \angle PNO = 90^\circ$ nên PO là đường kính của (PMN). Vậy P,O,E,F,M,N đều nằm trên đường tròn đường kính OP.	2

5.b	Gọi J là trung điểm của OP. LQ cắt TK tại U, KQ cắt TL tại V. (L) giao (K) tại S khác Q. Hiển nhiên P thuộc trục đẳng phương của (L) và (K) nên P,Q,S thẳng hàng. Đồng thời ta cũng có $\angle PSO = 90^\circ$. Ta có $JL \perp FS$, $LK \perp QS$ nên $\angle JLK = \angle FSQ = \frac{1}{2}\angle FLQ = \angle QLT$. Tương tự $\angle JKL = \angle QKT$, suy ra Q,J liên hợp đẳng giác trong tam giác TLK. Do đó TQ,TJ đẳng giác trong $\angle LTK$. (1)	**1.5**
	Mặt khác, ta cũng có $\angle QLT = \angle QSF = \angle QNP = \angle QMP = \angle QSE = \angle QKT$, suy ra tứ giác $LKUV$ nội tiếp. Lại có $LQ \perp BC$ nên $LQ \parallel KO$, tương tự suy ra $LQKO$ là hình bình hành. Từ đó $\frac{VQ}{OK} = \frac{VQ}{QL} = \frac{VU}{LK} = \frac{TV}{TK}$. Mà $\angle TKO = \angle TUQ = \angle TVQ$ nên $\Delta TVQ \sim \Delta TKO (c.g.c)$. Vậy TQ,TO đẳng giác trong $\angle LTK$. (2) Từ (1) và (2) suy ra T,P,J,O thẳng hàng.	**1.5**