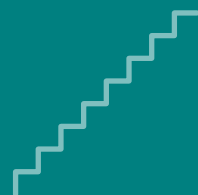




TÀI LIỆU HỌC TẬP
TOÁN LỚP 12

LÊ MINH KHA

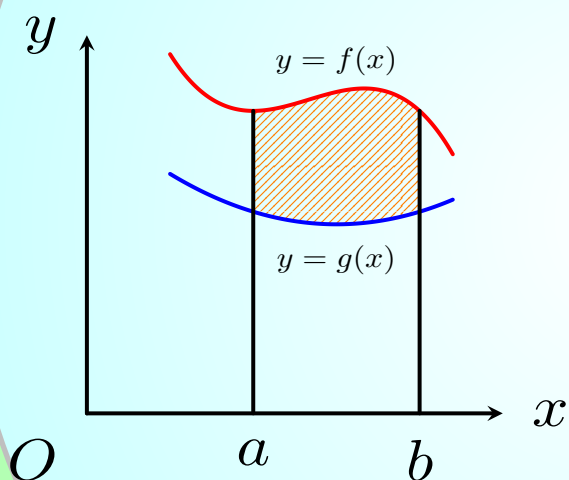


TOÁN

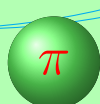
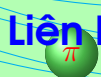
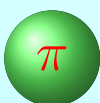
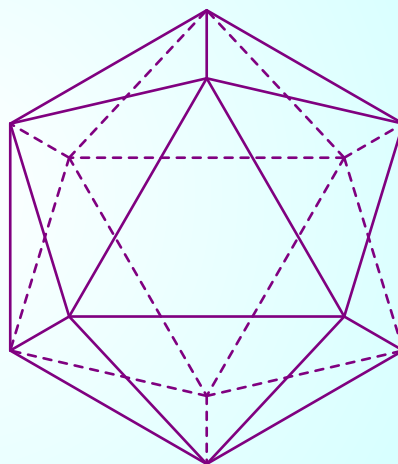
PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP

12

2025 - 2026



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



Liên hệ: 0399653362

Mục lục

1	ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	5
1.1	Tính đơn điệu của hàm số	5
1.1.1	Định nghĩa:	5
1.1.2	Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu	6
1.2	Cực trị của hàm số	7
1.2.1	Định nghĩa:	7
1.3	Các dạng bài tập liên quan đến đơn điệu và cực trị của hàm số . .	9
1.3.1	Dạng 1: Tìm khoảng đơn điệu, cực trị của hàm số cho trước	9
1.3.2	Dạng 2: Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước	19
1.3.3	Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số có cực trị hoặc đạt cực trị tại điểm cho trước	26
1.4	Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số	31
1.4.1	Định nghĩa	31
1.4.2	Một số lưu ý	32
1.4.3	Các dạng bài tập về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất	34
1.5	Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	54
1.5.1	Đường tiệm cận ngang	54
1.5.2	Đường tiệm cận đứng	55
1.5.3	Đường tiệm cận xiên	56
1.5.4	Các dạng bài tập liên quan đến đường tiệm cận của hàm số	57
1.6	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	66

1.6.1	Các bước khảo sát hàm số $y = f(x)$	66
1.6.2	Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	67
1.6.3	Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$	68
1.6.4	Hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}, a \neq 0, m \neq 0$	69
1.6.5	Các dạng bài tập có liên quan	70
1.7	Ứng dụng đạo hàm giải bài toán thực tiễn	97
1.7.1	Tốc độ thay đổi của một đại lượng	97
1.7.2	Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản	98
1.7.3	Các dạng bài tập có liên quan	99
1.8	Ôn tập chương 1	113
2	VECTƠ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	142
2.1	Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau, vectơ - không	142
2.1.1	Định nghĩa:	142
2.1.2	Tổng và hiệu của hai vectơ	143
2.1.3	Các quy tắc	145
2.1.4	Tích của một số với một vectơ	146
2.1.5	Bài tập luyện tập	147
2.2	Tọa độ vectơ trong không gian	159
2.2.1	Hệ tọa độ trong không gian	159
2.2.2	Tọa độ của điểm và vectơ	160
2.3	Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ	173
2.3.1	Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ	173
2.3.2	Biểu thức tọa độ của tích vô hướng	173
2.3.3	Vận dụng	173
2.3.4	Các dạng bài tập	174
2.4	Ôn tập chương 2	183
3	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	195

3.1	Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	195
3.1.1	Khoảng biến thiên	195
3.1.2	Khoảng tứ phân vị	196
3.2	Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm	200
3.2.1	Ôn tập chương 3	203

Chương 1

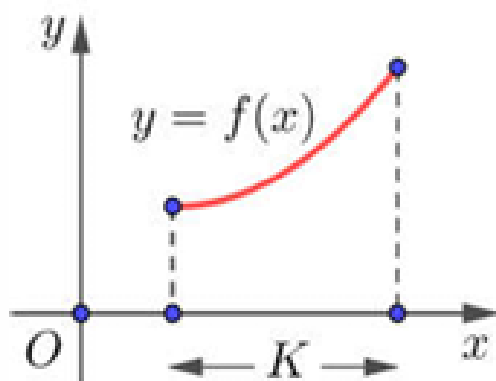
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 01: TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1.1 Tính đơn điệu của hàm số

1.1.1 Định nghĩa:

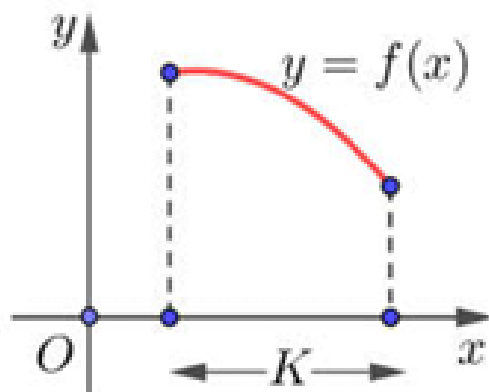
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K với K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng



- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$.

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải



• Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải

• Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .

• Khi xét đơn điệu mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó

1.1.2 Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu

Định lí 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Chú ý: Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y = f(x)$ còn được gọi là đơn điệu trên $K \subset \mathbb{R}$.

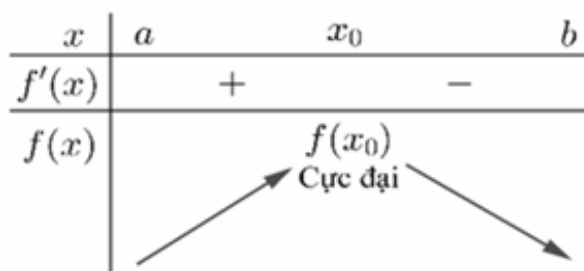
Định lý 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K .

1.2 Cực trị của hàm số

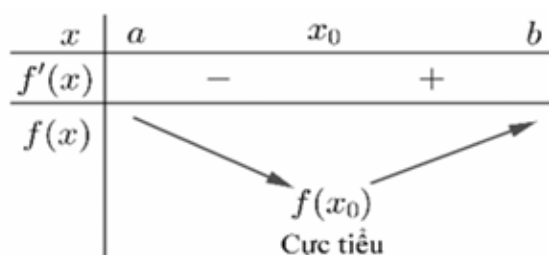
1.2.1 Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

• Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .



• Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .



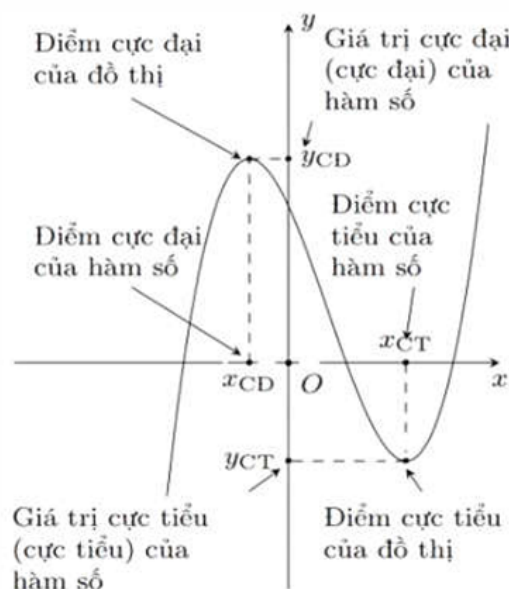
Ghi chú:

• Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số, kí hiệu f_{CE} hay y_{CE} , còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

• Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số, kí hiệu f_{CT} hay y_{CT} , còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

• Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (còn gọi là cực đại) và giá trị cực tiểu (còn gọi là cực tiểu) được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

• Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và có điểm cực trị ;à $x_0 \in (a; b)$ thì $f'(x_0) = 0$.



Định lí : Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$ với $h > 0$

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Nhận xét: Định lí trên có thể hiểu một cách đơn giản như sau: Điều kiện đủ để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại một điểm x_0 là đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 với $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không tồn tại.

1.3 Các dạng bài tập liên quan đến đơn điệu và cực trị của hàm số

1.3.1 Dạng 1: Tìm khoảng đơn điệu, cực trị của hàm số cho trước

Phương pháp giải:

B1: Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

B2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

B3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

B4: Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2024$

b) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = 2$

c) $y = x^4 + 2025$

d) $y = x^4 - 2x^2 - 2$

Bài tập 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

b) $y = \frac{5x+9}{x-1}$

c) $y = (x - 2)(x^2 + 1)$

d) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Bài tập 3: Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = -x^4 = 2x^2 + 3$

b) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

c) $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án

Câu 1. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 - x^2 + 6x - 1$.

C. $y = \frac{x - 2}{x + 1}$.

D. $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

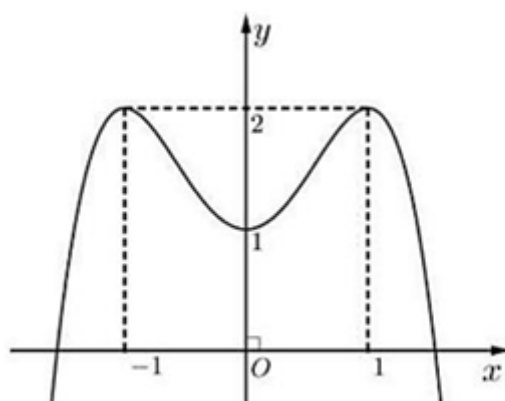
A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-2; +\infty)$.

D. $(-2; 1)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

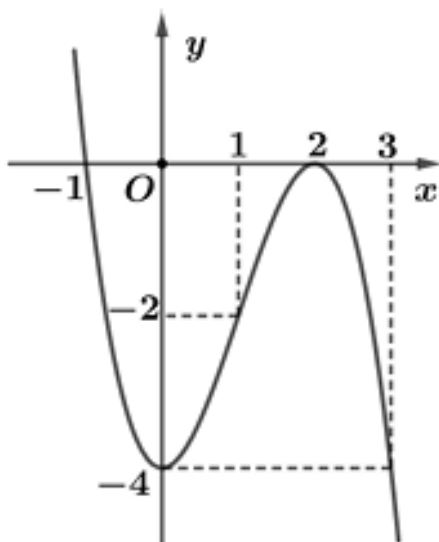


- A. $(-1; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$, khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-1; 1)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Câu 6. Hàm số $y = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(1; 2)$.

Câu 7. Hàm số $y = \frac{x+3}{x-2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 3)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-\infty; -3)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$. D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(2x-5)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 3)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-3; 1)$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-\infty; -3)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^4(2-x)$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(5) > f(4) > f(3)$. B. $f(-1) > f(0) > f(1)$.
C. $f(-3) < f(-2) < f(-1)$. D. $f(0) < f(1), f(2)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (2-x)(x+1)^2(x-1)^5$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-1; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{2025x-2024}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2025)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2025)$.

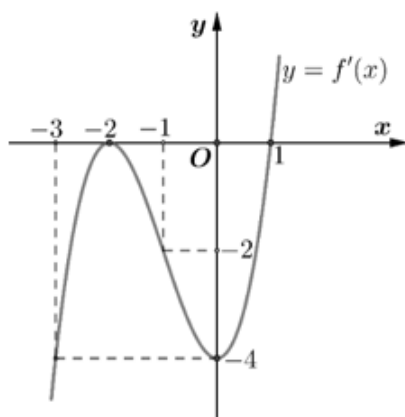
Câu 15. Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. C. $(-5; -2)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 16. Hàm số $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-2; 1)$. D. $(1; 4)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đường cong trong hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên

A. $(-\infty; 1)$. B. $(-2; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; +\infty)$.

Câu 18. Hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 5)$. B. $(-3; +\infty)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-3; 5)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x - 1)^2(3 - x)(x^2 - x - 1)$.

Hỏi hàm số có bao nhiêu cực tiểu?

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 20. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 4$

A. $y_{CT} = 2$. B. $y_{CT} = 1$. C. $y_{CT} = 6$. D. $y_{CT} = -1$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 5x + 6)$.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(2-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số là

- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = 2$. D. $x = -1$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là

- A. $(2; 2)$. B. $(2; -2)$. C. $(0; -2)$. D. $(0; 2)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của $f(x)$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Số điểm cực tiểu của $y = f(x)$ là

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Phần II: . Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

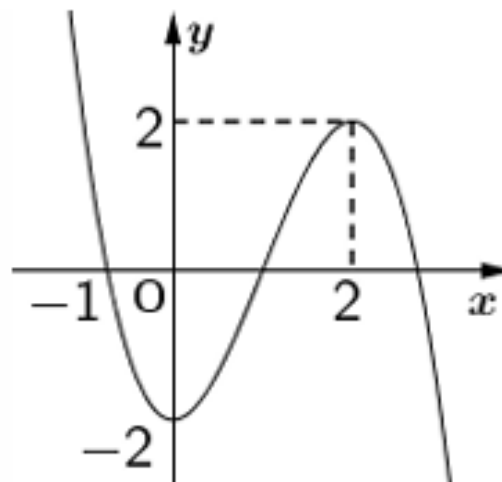
- a) Tập xác định của hàm số $D = [0; +\infty)$.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 0)$.
c) Hàm số đồng biến trên $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.
d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.
b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$
- c) Với mọi $x \in (0; 2)$ thì hàm số $y = f(x)$ luôn nhận giá trị dương
- d) Hàm số $y = f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$
- d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x + 3}{x - 1}$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- c) Đạo hàm của hàm số luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x \neq 1$

d) Hàm số đã cho không có cực trị

Câu 6: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

d) Hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{1}{2}$.

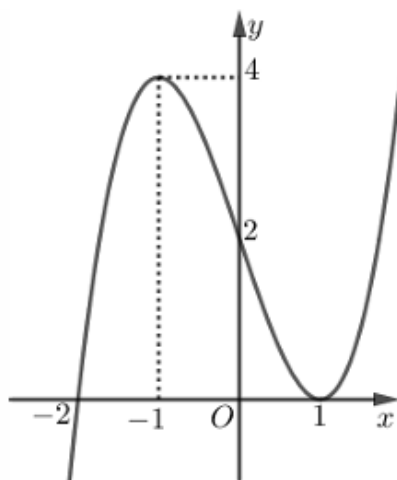
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 0$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = 1$.

c) Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = \frac{1}{2}$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = \frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$ và giá trị cực đại là $y_{C\mathbb{E}} = 4$.

- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$							
	</							

- a) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
- c) Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 .
- d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 10: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$, khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- a) Phương trình vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.
- c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
- d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$

Phần 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị (C) . Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C) . KQ:

Câu 2: Biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1; 18)$ và $(3; -16)$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c + d$. KQ:

Câu 3: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị là A và B . Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB . KQ:

Câu 4: Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 5: Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$ 0 $+$	$\parallel$	$-$ 0 $+$	

Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị? KQ:

Câu 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0)$, $x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các số a, b, c, d có bao nhiêu số âm? KQ:

1.3.2 Dạng 2: Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước

• Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

Hàm số nghịch trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$.

Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số thì ta kiểm tra thêm trường hợp

$a = 0$

• Xét hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ với $ad - bc \neq 0, c \neq 0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' > 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \iff ad - bc > 0$

Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y' < 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \iff ad - bc < 0$

• Xét hàm phân thức $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có đạo hàm $y' = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$, với $ad \neq 0$

Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y' \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \iff adx^2 + 2aex + be - dc \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y' \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \iff adx^2 + 2aex + be - dc \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

c) $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 5)$.

d) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- e) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + x + 6$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.
- f) $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- g) $y = x^3 + mx^2 + m$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
- h) $y = (m - 1)x^3 - 3(m - 1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

- a) $y = \frac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định
- b) $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định
- c) $y = \frac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- d) $y = \frac{x+7}{2x+m}$ nghịch biến trên $(-2; +\infty)$
- e) $y = \frac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- f) $y = \frac{x-9}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.
- g) $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- h) $y = \frac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.

Bài tập 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

- a) $y = \frac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên khoảng xác định.
- b) $y = \frac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-4}{x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Câu 27. Cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 - (m + 1)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

- A. $-\frac{3}{4} < m < 0$. B. $-\frac{3}{4} \leq m \leq 0$. C. $m \leq 0$. D. $m \leq -\frac{3}{4}$.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

- A. $m \leq \frac{1}{3}$. B. $m \geq \frac{1}{3}$. C. $m \geq \frac{4}{3}$. D. $m \leq \frac{4}{3}$.

Câu 29. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tam số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 31. Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = (m - 7)x^3 + (m - 7)x^2 - 2mx - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ bằng

- A. 7. B. 9. C. 4. D. 6.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định

- A. $m \geq 2$. B. $m < 2$. C. $m \leq 2$. D. $m > 2$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x - mx + 5$ nghịch biến trên tập xác định

- A. $m \geq 2$. B. $m \leq 2$. C. $m \geq -2$. D. $-2 \leq m \leq 2$.

Câu 34. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho $f(x) = \frac{1}{3}mx^3 - 2mx^2 + (m - 5)x + 2025$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên tập xác định của nó

- A. 5. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{(m^2-m)x^3}{3} + (m^2 - m)x^2 + mx + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 3. B. 5. C. 1. D. 2.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x + 3 - \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên $[5; +\infty)$?

- A. 3. B. 2. C. 8. D. 9.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$ sao cho $f(x) = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 + (2m+1)x + 3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 2024. B. 2023. C. 2021. D. 2022.

Câu 39. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến $\mathbb{R}$ là $m \in [a; b]$. Giá trị của $b-a$ bằng

- A. 4. B. 10. C. 12. D. -3.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup [0; \frac{1}{2}]$. B. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; \frac{1}{2})$.
C. $m \in (-\infty; -1] \cup (0; \frac{1}{2}]$. D. $m \in (\frac{1}{2}; +\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 - (m+1)x + 1$, với m là tham số

- a) Hàm số là hàm số bậc ba khi $m \neq 0$.
b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < -\frac{3}{4}$ hoặc $m \geq 0$.
d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\frac{3}{4} \leq m < 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2+2m)x - 3$, với m là tham số

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -m$ và $x_2 = -m-2$.
c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
d) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq -1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x+5}{x+m}$, với m là tham số

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

- b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m \geq 5$.
- c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m < 5$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -8)$ khi và chỉ khi $(5; 8)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-x^2+2x-1}{x+2}$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm và hai nghiệm này là nguyên dương.
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-5; -2)$ và $(-2; +\infty)$
- d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{\cot^2 x - 2m \cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m}$, với m là tham số

- a) Nếu đặt $t = \cot x$ thì bài toán trở thành tìm tham số m nguyên để hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$.
- b) Tập xác định của hàm số $y = f(t)$ là $\mathbb{R}$.
- c) Hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$ khi và chỉ khi $f'(t) > 0$ với mọi $t \in (0; 1)$.
- d) Có 2026 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$? KQ:

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}\cot^3 x - m\cot^2 x + \cot x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$? KQ:

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3m - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 là khoảng $(a; b)$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 4: Hàm số $y = (x + m)^3 + (x + n)^3 - x^3$ tham số là m, n đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - 2m - 2n$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 5: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3. Tính tổng các phần tử của S . KQ:

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$. KQ:

Câu 7: Số các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y = \frac{-mx-2025}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$ là bao nhiêu? KQ:

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số $f(x) = \frac{x^2+5x+m+6}{x+2}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$? KQ:

1.3.3 Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số có cực trị hoặc đạt cực trị tại điểm cho trước

- Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước ($f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0)
- Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$ để tìm m
- Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được và chọn giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu.
- Biện luận cực trị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$
- Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ với $\Delta_y = b^2 - 3ac$
 - Nếu $\begin{cases} \Delta'_y > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì hàm số có hai điểm cực trị.
 - Nếu $\Delta'_y \leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ thì hàm số không có cực trị.
- Lưu ý:
 - Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$
 - **Hệ thức 1:** $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
 - **Hệ thức 2:** $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
 - **Hệ thức 3:** $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$
 - Các công thức tính toán thường gặp:
 - * Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$
 - * Khoảng cách từ M đến Δ : $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, với $\Delta : Ax + By + C = 0$
 - * Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
 - * Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1), \overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$

Chú ý: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = \frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$

c) $y = -x^3 + mx^2 + (m^2 - 12)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

d) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (đồ thị hàm số)

a) $y = \frac{2}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x - 1$ có hai điểm cực trị

b) $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3(3m + 7)x + 1$ có cực trị

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 2024$ không có cực trị

d) $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + mx^2 + 3x + 1$ có cực đại

e) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m + 2)x^2 + (2m^2 + 3m + 1)x - 2$ có điểm cực đại $x_{C\text{Đ}}$ và điểm cực tiểu $x_{C\text{T}}$ thỏa mãn $3x_{C\text{Đ}}^2 = 4x_{C\text{T}}$

f) $y = x^3 - 3mx + 1$ có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2; 3)$.

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu tạo thành tam giác vuông tại O .

h) $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị $A < B$ sao cho tam giác AOB cân tại O .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$

- A. $0 < m \leq 4$. B. $m > 4$. C. $m = 0$. D. $0 \leq m < 4$.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 + 3(m^2 - m + 2)x^2 + 3(3m^2 + 1)x + 2022m$, tìm các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - (m^2 + 1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Khi đó

- A. $S = \{-\frac{3}{2}\}$. B. $S = \{0\}$. C. $S = \{\frac{3}{2}; 0\}$. D. $S = \{\frac{3}{2}\}$.

Câu 44. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt giá trị cực đại tại $x = 1$

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = 3$. D. $m = 0$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 2(2m - 1)x^2 - (m^2 - 8)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x = -1$

- A. $m = 3$. B. $m = -9$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 - (5m + 4)x + 10$ đạt giá trị cực đại tại $x = -1$

- A. $m = -1$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 2m - 3)x + 4$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

- A. $m = -1$ hoặc $m = 3$. B. $m = -1$.
C. $m = 3$. D. $m = 1$ hoặc $m = 3$.

Câu 48. Cho biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 x_2^2 = 3$ khi đó

- A. $m \leq -1$. B. $m \in (2; 3)$. C. $m \in (1; 2)$. D. $m \in (0; 1)$.

Câu 49. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in (-1; -2)$. B. $m_0 \in (2; 4)$. C. $m_0 \in (0; 2)$. D. $m_0 \in (-2; 0)$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \left(\frac{m-1}{3}\right)x^3 + (m^2 - 4)x^2 + (m^2 - 9)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số có hai điểm cực trị trái dấu?

- A. 18. B. 19. C. 17. D. 16.

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+3)x^2 + (12-m)x + 2020$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung?

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 2021m + 2022(C)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung

- A. $m \in \emptyset$. B. $-3 < x < -1$. C. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -3 \end{cases}$.

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 + 5m + 4)x - 1$ có hai điểm cực trị trái dấu?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 54. Tìm giá trị của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ thuộc đường thẳng $d: y = x + 1$

- A. $m = -5$. B. $m = 31$. C. $m = 23$. D. $m = 5$.

Câu 55. Cho đường cong $(C_m): y = x^3 - 3(m-1)x^2 - 3(m+1)x + 3$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $\angle A, B$ thẳng hàng. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 56. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị $X_1, X_2 (x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 58. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương là

A. $m \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in (\frac{1}{2}; +\infty)$.

C. $m \in (1; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$.

Câu 59. Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu?

A. 19.

B. 20.

C. 21.

D. 22.

Câu 60. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m - 2)x^2 - 3(m - 1)x + 1$, m là tham số. Số giá trị $m > 0$ để hàm số có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là $y_{C\text{Đ}}, y_{C\text{T}}$ thỏa mãn $2y_{C\text{Đ}} + y_{C\text{T}} = 4$ là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Phần II. . Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$, với m là tham số

- a) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $-2 < m < 2$.
- b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m = 0$ hoặc $m = 2$.
- c) Hàm số không có điểm cực trị khi và chỉ khi $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.
- d) Hàm số có hai điểm cực trị thỏa mãn $x_{C\text{Đ}} < x_{C\text{T}}$ khi và chỉ khi $0 < m < 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số

- a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m .
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$.
- c) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$
- d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn thuộc đường thẳng cố định với hệ số góc $k = -3$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt.

- c) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung.
- d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y = x + 1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$, với m là tham số

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.
- b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = \frac{1}{2}$.
- d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y = 2x - 2m$.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có một điểm cực trị là $A(-1; 29)$ và đi qua điểm $B(2; 2)$. Tính $a + b + c$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ khi $m = \frac{a}{b}$. Tính $S = a^2 + b^2$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$ có điểm cực tiểu là $I(1; 3)$. Khi đó $m + n$ bằng

Câu 4: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$ thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

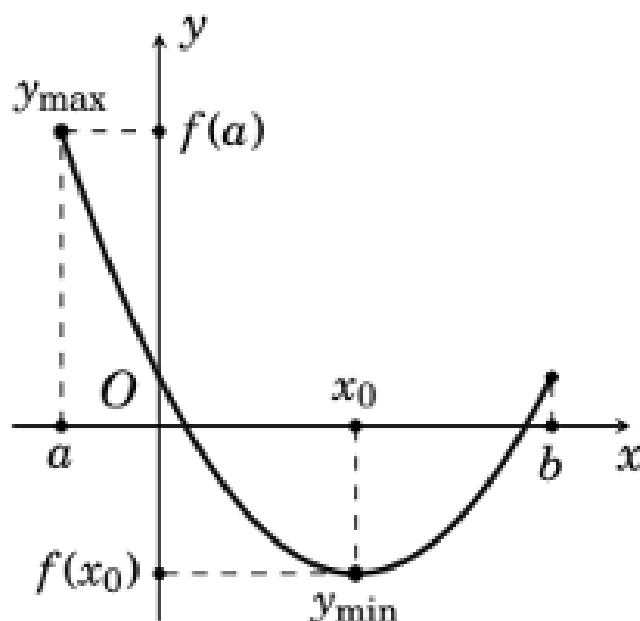
Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2; 4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

BÀI 2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1.4 Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

1.4.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập D . Khi đó ta có:



- M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu

$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \quad \text{Kí hiệu } \max_{x \in D} f(x) = M$$

- m là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \quad \text{Kí hiệu } \min_{x \in D} f(x) = m$$

1.4.2 Một số lưu ý

- Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.
- Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên miền D ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên D . Từ bảng biến thiên ta có thể kết luận:
 - Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min
- Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ có thể trừ một số hữu hạn các điểm và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm trong $(a; b)$) thì ta có thể giải theo các bước sau:

Bước 1: Giải phương trình $f'(0) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$

Bước 2: Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)

Bước 4: Gọi M, m lần lượt là số lớn nhất và nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì ta có thể kết luận:

$$M = \max_{[a;b]} f(x); \quad m = \min_{[a;b]} f(x)$$

- Ta có thể sử dụng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.

– **Bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a, b :**

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

– **Bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm a, b, c :**

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

– **Bất đẳng thức Cauchy cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$:**

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

1.4.3 Các dạng bài tập về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Dạng 1: Bài toán tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền D

- **Phương pháp giải:**

Bước 1: Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in D$ và tìm các điểm $x_j \in D$ mà tại đó y' không xác định.

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số trên D

Bước 3: Từ bảng biến thiên đưa ra kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max
- Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min

- **Lưu ý:** Nếu D là đoạn $[a; b]$ và hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì ta có thể làm như sau:

Bước 1: Giải phương trình $f'(x) = 0$ rồi tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$

Bước 2: Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)

Bước 4: Gọi M, m lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì ta có thể kết luận:

$$M = \max_{x \in D} f(x); \quad m = \min_{x \in D} f(x)$$

- **Lưu ý quan trọng:**

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(b)$
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(a)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

- a) $y = f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$
- b) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2; 4]$
- c) $y = 1 + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 2]$.
- d) $y = g(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên miền xác định
- e) $y = f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$
- f) $y = f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ trên khoảng $(0; +\infty)$
- g) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1; 3]$
- h) $y = f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$
- l) $y = f(x) = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$
- m) $y = f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$
- k) $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

- a) $y = x - \ln x$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; e]$
- b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $[0; \frac{\pi}{4}]$
- c) $y = f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$
- d) $y = \cos 2x + 2\sin x$ trên đoạn $[0; \frac{\pi}{2}]$

Bài tập 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

- a) $f(x) = \frac{5\sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $[0; \frac{\pi}{6}]$

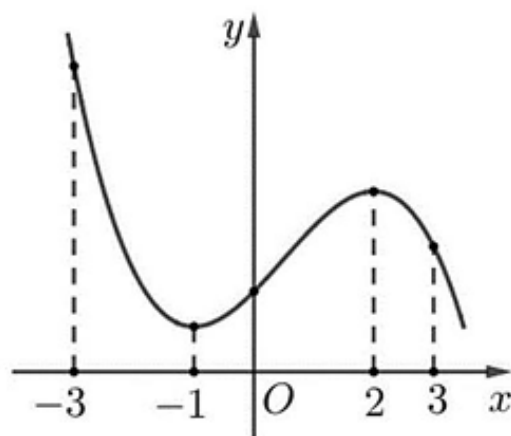
b) $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định.

Bài tập 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc tiêm vào là bao nhiêu mg ?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

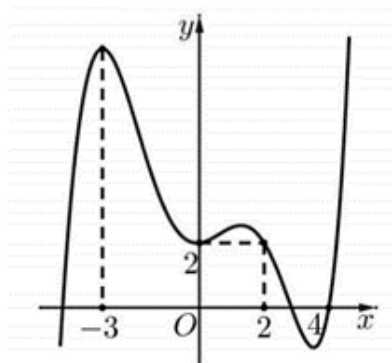
Câu 61. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

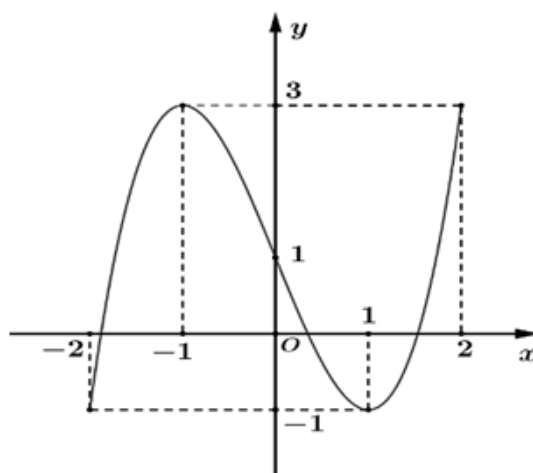
- A. $f(2)$. B. $f(-1)$. C. $f(-3)$. D. $f(3)$.

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; 4]$ bằng



A. $f(2)$.B. $f(-3)$.C. $f(4)$.D. $f(0)$.

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$

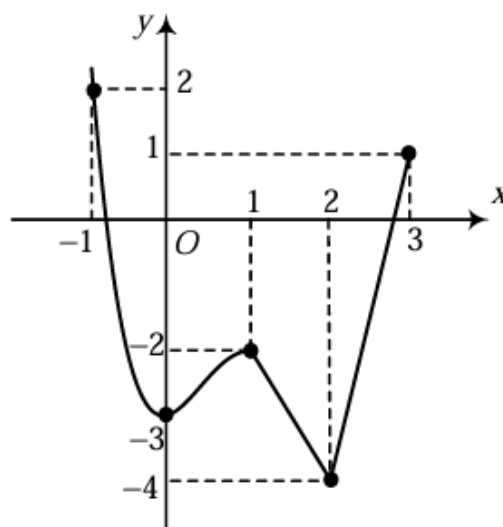
A. 1.

B. -1.

C. -2.

D. 3.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$. Khi đó, tổng $M = m$ bằng



A. -6.

B. -2.

C. -5.

D. 2.

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-3	-1	0	1	2
y		3		2	
	-2		0		1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$. Tính $M + m$

- A. -1. B. 1. C. 3. D. 5.

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Biết $f(-2) = f(0) = -3$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$

- A. $f(-1)$. B. -3. C. $-f(-1)$. D. 3.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M.m$

x	-3	0	1	2
$f(x)$	-4	2	0	1

- A. 6. B. 7. C. 5. D. -8.

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	0	3	8
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	10	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0 . Khi đó tích $x_0 \cdot f(x_0)$ bằng

- A. 30. B. 3. C. 10. D. 0.

Câu 69. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x$ trên $[-1; 4]$

- A. $-4\sqrt{2}$. B. -5 . C. 5. D. 40.

Câu 70. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[0; 4]$. Tính tổng $S = M + m$

- A. $\frac{7}{3}$. B. 1. C. $\frac{10}{3}$. D. 4.

Câu 71. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-5; -1]$ bằng

- A. 12. B. 18. C. -40 . D. 14.

Câu 72. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A. 5. B. 0. C. 3. D. 7.

Câu 73. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A. 7. B. 8. C. $\frac{19}{3}$. D. $\frac{23}{3}$.

Câu 74. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tổng $S = 2M - m$ bằng

- A. $S = 0$. B. $S = -\frac{3}{2}$. C. $S = -2$. D. $S = 4$.

Câu 75. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $[0; \frac{\pi}{4}]$

- A. $\max_{[0; \frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{1}{2}; \min_{[0; \frac{\pi}{4}]} f(x) = -1$. B. $\max_{[0; \frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi}{4}; \min_{[0; \frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi}{6}$.
C. $\max_{[0; \frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{[0; \frac{\pi}{4}]} f(x) = 1$. D. $\max_{[0; \frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{[0; \frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{1}{2}$.

Câu 76. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ trên $[1; 2]$

- A. 3. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 77. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{16 - x^2}$ là

- A. 16. B. 4. C. 0. D. 1.

Câu 78. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $x\sqrt{16-x^2}$. Tính $M + m$

- A. $5 - \sqrt{8}$. B. $\sqrt{8}$. C. 0. D. 8.

Câu 79. Trên đoạn $[-4; -1]$ hàm số $y = x + \frac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. -5. B. $-\frac{29}{5}$. C. $-\frac{11}{2}$. D. 4.

Câu 80. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$. Tính $M - m$

- A. 9. B. 5. C. 1. D. 4.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4; 4)$ và có bảng biến thiên như sau

x	-4	2	0	4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-10	0	-4	10	

- a) $\max_{(-4;4)} y = 10; \min_{(-4;4)} y = -4$
- b) $\max_{(-4;4)} y = 10; \min_{(-4;4)} y = -10$
- c) $\max_{(-4;4)} y = 0; \min_{(-4;4)} y = -4$
- d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4; 4)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x = \frac{4}{x}, x \in (0; +\infty)$

- a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$
- b) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$	

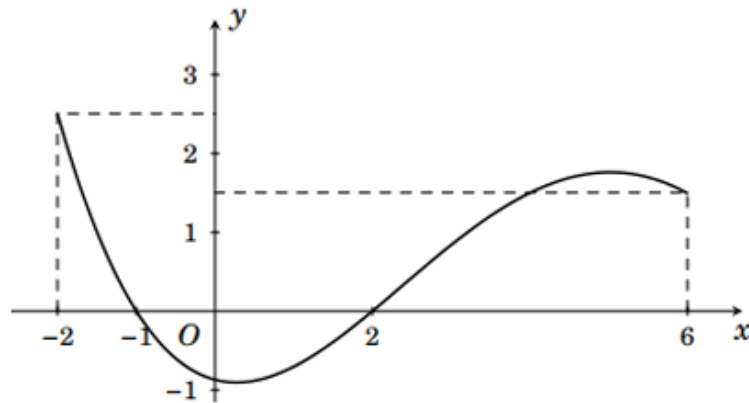
- a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0); (1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu tại $y = -2$
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$
- d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -3 .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		4			
	$-\infty$			3			$-\infty$	

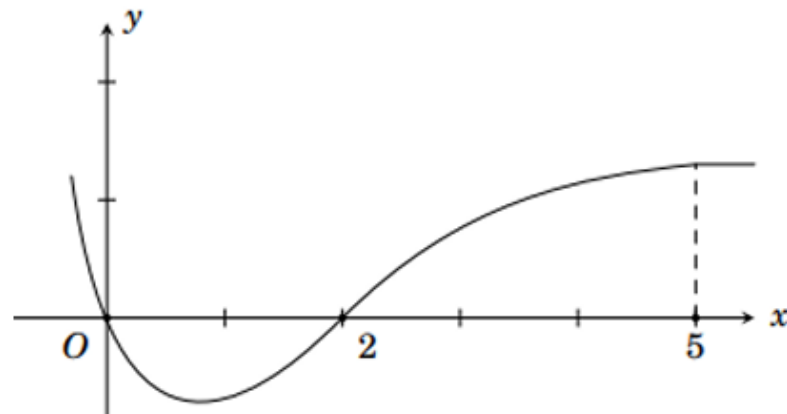
- a) Cực đại của hàm số là 4
- b) Cực tiểu của hàm số là 3
- c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4$
- d) $\min_{\mathbb{R}} y = 4$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên



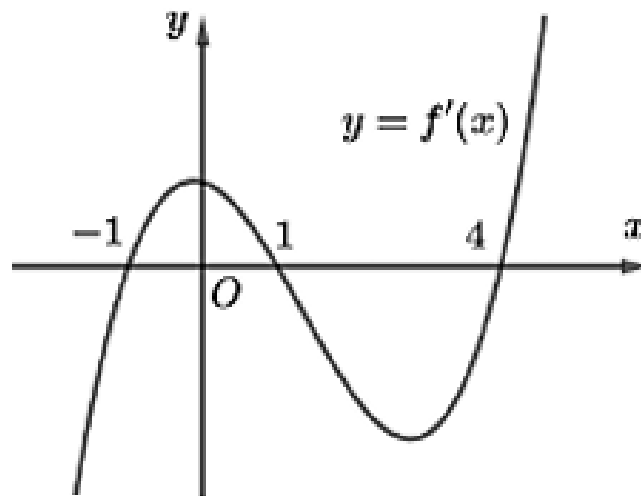
- a) $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$ $\max_{[-2;6]} f(x) = f(6)$
- c) $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$
- d) $\max_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$



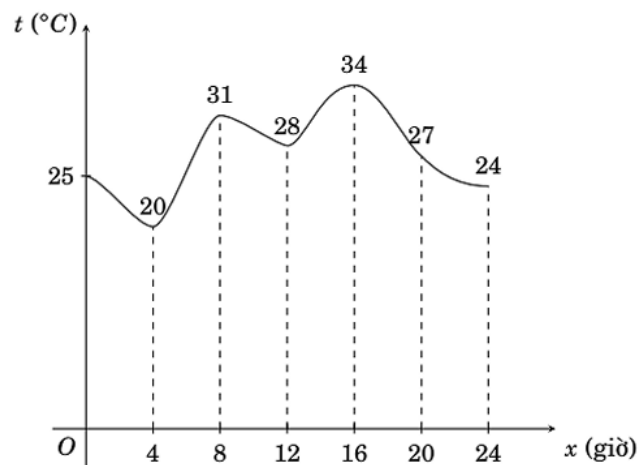
- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- c) $\min_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$
- d) $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên



- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
- c) $f(1) > f(2) > f(4)$
- d) Trên đoạn $[1; 4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$

Câu 8: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày



- a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C
- b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C
- c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ
- d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 30x$. Với các số nguyên a, b mà $a < b$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(b) - f(a)$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 2: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 2\cos^2 x + 3\sin x + 6$ trên $[0; \pi]$ lần lượt là M, m . Tính tổng $M + m$ KQ:

Câu 3: Cho hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$, gọi $M = \frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$) là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; -2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$? KQ:

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ KQ:

Câu 5: Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ KQ:

Câu 6: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất? KQ:

Dạng 2: Bài toán tối ưu, thực tế liên quan đến max min

1. Bài toán chuyển động

- Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc
- Khi đó $s'(t) = v(t); v'(t) = a(t)$

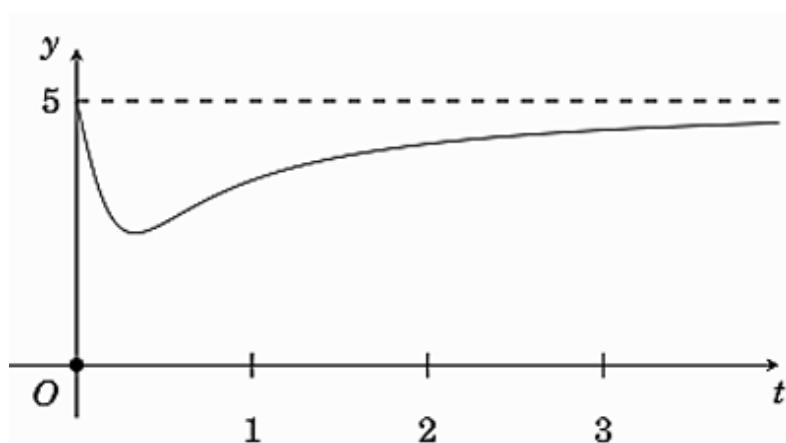
2. Bài toán thực tế - tối ưu

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max - min qua một hàm $f(t)$
- Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

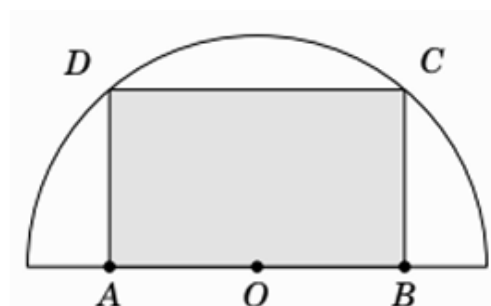
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 = 24t^2 + 500(m/s)$. Trong khoảng thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 5(s)$ chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

Bài tập 2: Sự phân hủy của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hòa tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($9t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị cả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2+1}$ như hình bên. Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

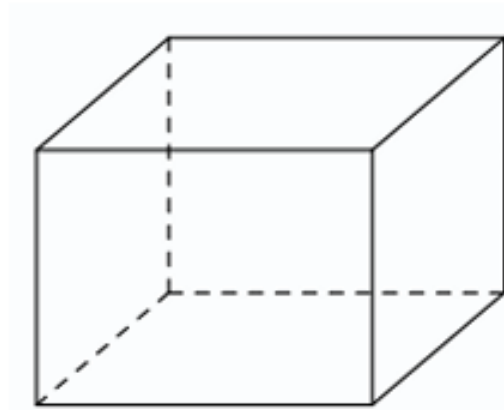


Bài tập 3: Tính diện tích lớn nhất S_{max} của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6cm$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp

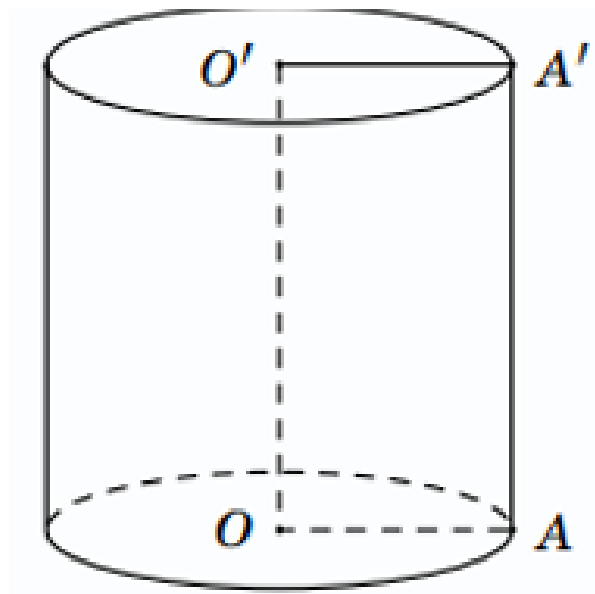


Bài tập 4: Một người muốn xây một cái bể chứa nước dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288dm^3$. Đáy là bể hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu người đó đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp

nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



Bài tập 5: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 81. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$ (t (giây) là thời gian). Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

- A. $t = 3s$. B. $t = 4s$. C. $t = 2s$. D. $t = 6s$.

Câu 82. Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

- A. $13m/s$. B. $10m/s$. C. $9m/s$. D. $12m/s$.

Câu 83. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

- A. $24mg$. B. $20mg$. C. $15mg$. D. $10mg$.

Câu 84. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100}{100+t^2}$ (con). Trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

- A. 1008 con. B. 1012 con . C. 1005 con. D. 1020 con.

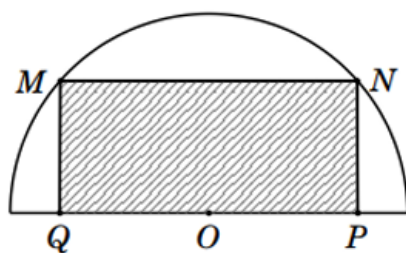
Câu 85. Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $25cm^2$. B. $\frac{125}{4}cm^2$. C. $\frac{625}{4}cm^2$. D. $125cm^2$.

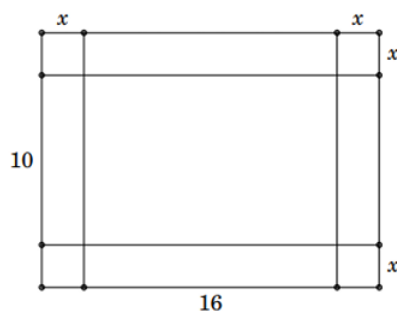
Câu 86. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

- A. $\frac{9}{2}$. B. $6\sqrt{2}$. C. 9. D. $9\sqrt{2}$.

Câu 87. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $10cm \times 16cm$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh



hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng



A. $3m$.

B. $4m$.

C. $5m$.

D. $2m$.

Câu 88. Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01m^3$.

B. $1,17m^3$.

C. $1,51m^3$.

D. $1,40m^3$.

Câu 89. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là $700000\text{đồng}/m^2$. Tìm kích thước của bể để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là

A. 120 triệu đồng. B. 105 triệu đồng. C. 115 triệu đồng. D. 110 triệu đồng.

Câu 90. Một sợi dây có chiều dài là 6m được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$.

B. $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}m$.

C. $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}m$.

D. $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức: $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$. Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$

- a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1 lít.
- b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.
- c) $V(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$.
- d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Câu 2: Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa $100m^3$ sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm trong ngày và $\bar{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

- a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$.
- b) Tổng chi phí sản xuất $100m^3$ sản phẩm là 34 triệu đồng.
- c) $\bar{C} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2$ với $0 \leq x \leq 100$.
- d) $\bar{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số)

Câu 3: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng)) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3 + 15x - 100$.
- d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

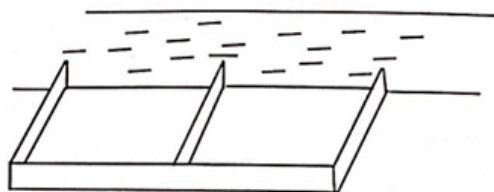
Câu 3: Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam)

- a) Điều kiện xác định là $x \geq 0$.
- b)) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x(108 - x^2)$
- c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống
- d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là 432(gam).

Câu 4: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/ m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

- a) Số cá giống mà ông Thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.
- b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là 1,5(kg).
- c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500(kg)$.
- d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

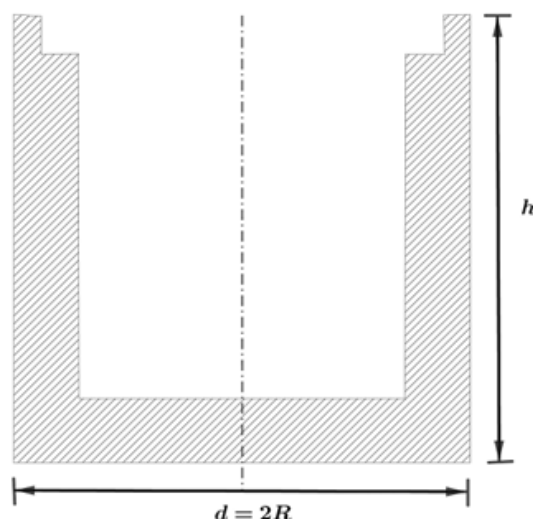
Câu 5: Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



- a) Số tiền phải làm là: $x.60000 + y.3.50000 = 15000000$ đồng
- b) Diện tích đất: $S = x.y = x.\frac{500-5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$.
- c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\min_{[0;+\infty]} S = 6250(m^2)$.
- d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

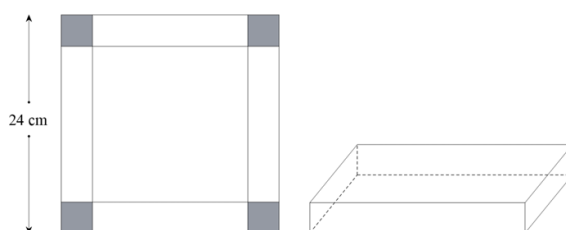
Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bác Nam muốn xây dựng một hồ ga không nắp hình trụ với dung tích $3m^3$. Hãy tính chi phí ít nhất mà bác Nam phải bỏ ra xây dựng hồ ga, biết tiền công và vật liệu cho $1m^3$ thành bê tông của hồ ga (thành bê tông đáy và thành bê tông xung quang) là 685000 đồng.

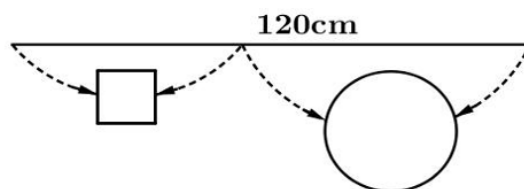


KQ:

Câu 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất. KQ:



Câu 3: Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)? KQ:

Câu 4: Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{386}{v^2 + 2v + 5}$ (xe/ giây) trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm.

Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất ? KQ:

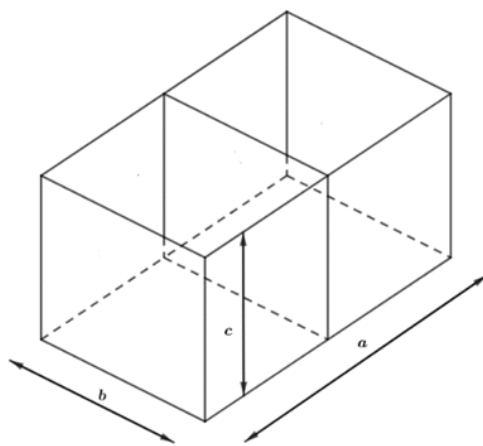
Câu 5: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất? KQ:

Câu 6: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 7: Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng. KQ:

Câu 8: Trên mảnh đất hình chữ nhật ABCD có diện tích $25m^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh . BD Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu với chi phí trồng cỏ là 70.000đồng/ m^2 ? KQ:

Câu 9: Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a, b, c . Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$ KQ:



Câu 10 (ĐỀ MINH HỌA 2025): Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó được biểu diễn bằng hàm là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? KQ:

BÀI 3: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1.5 Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1.5.1 Đường tiệm cận ngang

Định nghĩa: Đường thẳng $y = m$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $f(x)$ nếu:

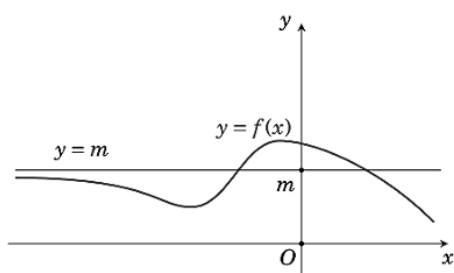
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình vẽ sau

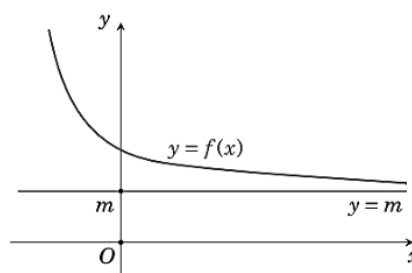
Các bước tìm đường tiệm cận ngang:

Bước 1: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Bước 2: Xem ở “vị trí” nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở “vị trí” đó



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$



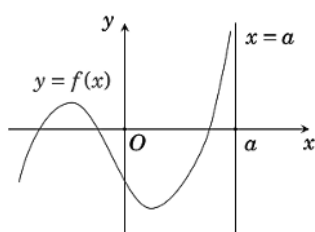
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$

1.5.2 Đường tiệm cận đứng

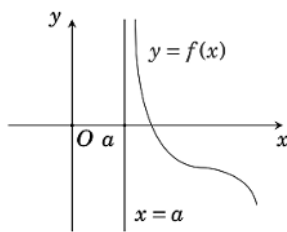
Định nghĩa: Đường thẳng $x = a$ gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

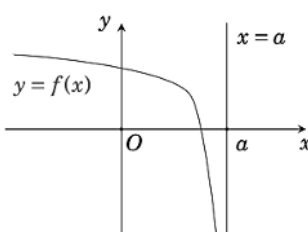
Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình vẽ dưới đây



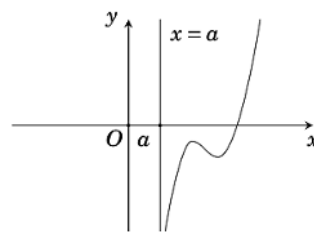
a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

Các bước tìm đường tiệm cận đứng

Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$

Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.

Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là tiệm cận

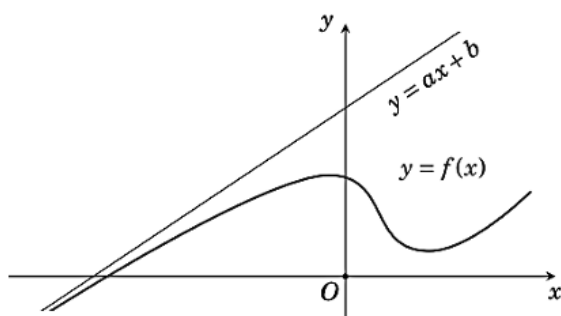
đứng.

1.5.3 Đường tiệm cận xiên

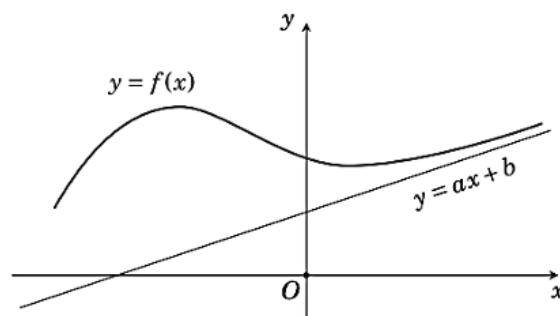
Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình dưới



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Các bước tìm đường tiệm cận xiên: Ta xác định hệ số a và b trong các trường hợp sau:

Bước 1: Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

Bước 2: Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$

1.5.4 Các dạng bài tập liên quan đến đường tiệm cận của hàm số

Dạng 1: Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- **Các bước tìm đường tiệm cận ngang:**

- **Bước 1:** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- **Bước 2:** Xem ở “vị trí” nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở “vị trí” đó

- **Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

- **Bước 1:** Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$
- **Bước 2:** Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.

Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

- **Lưu ý:** Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCD: $y = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 91. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có đường tiệm cận ngang là:

- A. $y = 2$. B. $y = 0$. C. $y = 1$. D. $y = -2$.

Câu 92. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2+1}$ có phương trình

- A. $y = 2$. B. $y = 3$. C. $y = 1$. D. $y = 0$.

Câu 93. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

- A. $y = x^3 - x - 1$. B. $y = \sqrt{2x^2 + 3}$. C. $y = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. D. $y = \frac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$.

Câu 94. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x-2}$

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $y = -2$. D. $y = 2$.

Câu 95. Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x+2}$

- A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $x = 3$. D. $y = 0$.

Câu 96. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

- A. $x = 3$. B. $x = -2$. C. $x = -3$. D. $x = 2$.

Câu 97. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x-1}$ là đường thẳng:

- A. $x = 1$. B. $y = 2$. C. $x = 0$. D. $y = 0$.

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$	2 ↘ -3	↗ 3	

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 2	↗ $+\infty$	

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận. .
 D. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận. .

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2 ↘ -4	$+\infty$ ↘ -2	↗ $+\infty$	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- 0 +	
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 4	↘ -1	↗ $+\infty$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang. .
 B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 4$.
 C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận. .
 D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$.

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+		+ 0 -	
y	2 ↗ 4	↘ $-\infty$	↗ 3	↘ -1

Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định là liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-2	$+\infty$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$.

B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

Câu 104. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$ là

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 105. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Câu 106. Cho hàm số $y = \frac{2x^2+x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 107. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 108. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-1}{3-2x-5x^2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 109. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 110. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2x-3}$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 111. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}$ là:

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 112. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-x}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 113. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-4}$ có phương trình là

- A. $y = -2$. B. $y = 2$. C. $y = 0$. D. $y = -1$.

Câu 114. Tìm số đường tiệm cận đứng của hàm số $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 2	$+\infty$ ↗ 2	$+\infty$

a $f(-5) < f(4)$

b Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.

c Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$

d Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5-4x}{2x+3}$ có đồ thị là (C)

a Hàm số đã cho không có cực trị

b Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$

c Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$

d Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{4-x^2}$ có đồ thị là (C)

a Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$.

b Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang, trong đó có một đường là đường thẳng có phương trình $y = -1$.

c Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$

d Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	3 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -2	-2 ↗ 5	

a Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

b Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận đứng là $x = 1$

c Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang $y = 3$

d Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang $y = 3$. Tính giá trị của biểu thức $a - 2b$

Câu 2: Gọi $I(a; b)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$. Tính $T = a + b$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^3-9x}{x^3-x^2-5x-3}$ có đồ thị là (C) . Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) bằng bao nhiêu?

Câu 4: Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+3}$ và các trục tọa độ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

Tính giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$.

Dạng 2: Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- **Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

- **Bước 1:** Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$

- **Bước 2:** Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.

Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

- **Các bước tìm đường tiệm cận xiên:** ta xác định hệ số của a và b trong các trường hợp sau:

- **Bước 1:** Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

- **Bước 2:** Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$

- **Lưu ý:**

- Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

- Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ta có thể chia đa thức để biến đổi về dạng:

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n} \quad \text{với } e \neq 0$$

Suy ra, $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 115. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = 2x + 3$.

Câu 116. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-2x+2}{x-3}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = ax + b$. Tính $a^2 = 2b$

- A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

Câu 117. Biết tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3+2}{x^2-2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B khi đó diện tích tam giác OAB là

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 3.

Câu 118. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $d : ax + b$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d

- A. $M(-1; 2)$. B. $N(2; 2)$. C. $P(2; -2)$. D. $Q(2; -1)$.

Câu 119. Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số dưới đây?

- A. $y = \frac{x-1}{x^2+1}$. B. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.
C. $y = \frac{x^2+1}{x-2}$. D. $y = \frac{2x^2+x+1}{2x+1}$.

Câu 120. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

- A. $y = 2x + 1$. B. $y = x - 3$. C. $y = x + 3$. D. $y = 2x - 1$.

Câu 121. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-2}$

- A. $y = 2x - 5$. B. $y = x - 2$. C. $y = x + 5$. D. $y = x - 5$.

Câu 122. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$

- A. $y = x + 1$. B. $y = -3x + 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = x - 1$.

Câu 123. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x+5}$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $(5; 3)$. B. $(-4; -5)$. C. $(6; -1)$. D. $(2; -10)$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C)

a Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1

- c Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị nằm trên parabol $y = x^2$.
- d Đường tiệm cận xiên của đồ thị vuông góc với đường thẳng $x + y - \pi = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2-2x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C)

- a Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận
- b Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
- c Giao điểm của hai tiệm cận nằm trên trục hoành.
- d Đường tiệm cận xiên của đồ thị song song với đường thẳng $x + y = 0$

Câu 3: Cho hàm số $(C) : y = f(x) = \frac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta : y = ax + b$

- a Giao điểm của Δ và trục Ox có hoành độ lớn hơn 2
- b Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3; -9)$
- c Gọi $A = \Delta \cap Ox, B = \Delta \cap Oy$ thì ta có $S_{OAB} > 3$.
- d Giá trị lớn nhất của hàm số $y = ax + b$ trên $[0; 3]$ là 4.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{x^2-4}$

Câu 2: Tìm hệ số góc k của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}$

BÀI 4: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐTHS

1.6 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

1.6.1 Các bước khảo sát hàm số $y = f(x)$

Để khảo sát hàm số $y = f(x)$ thì ta thực hiện theo các bước sau

1. Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

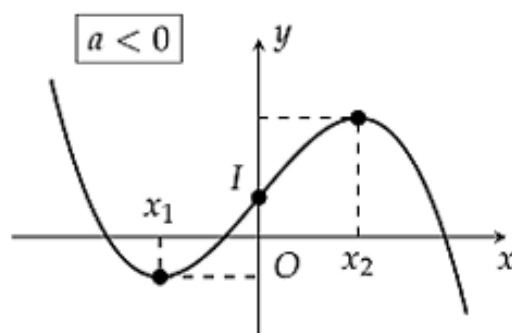
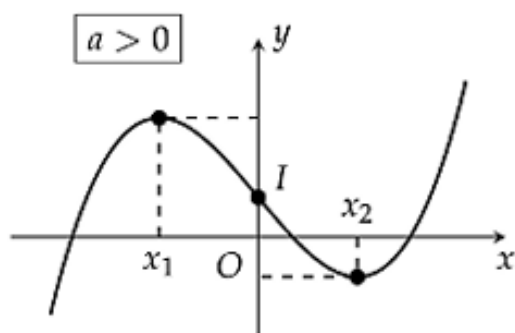
2. Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
- Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

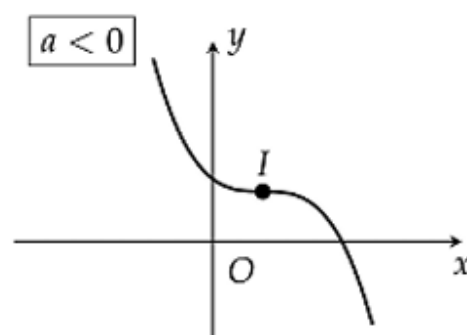
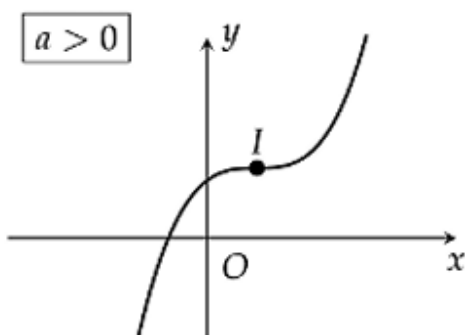
3. Bước 3: Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

1.6.2 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

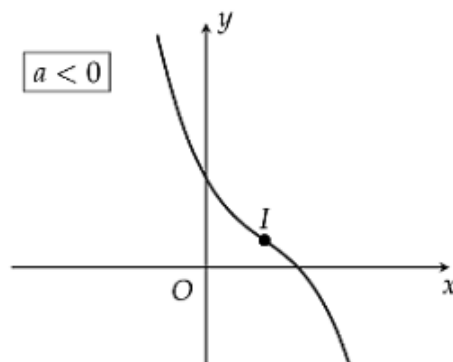
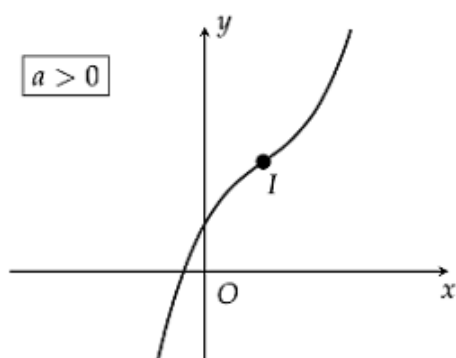
a) **Trường hợp 1:** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2 . Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = x_1$ và $x = x_2$



a) **Trường hợp 2:** $y' = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị



b) **Trường hợp 3:** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị

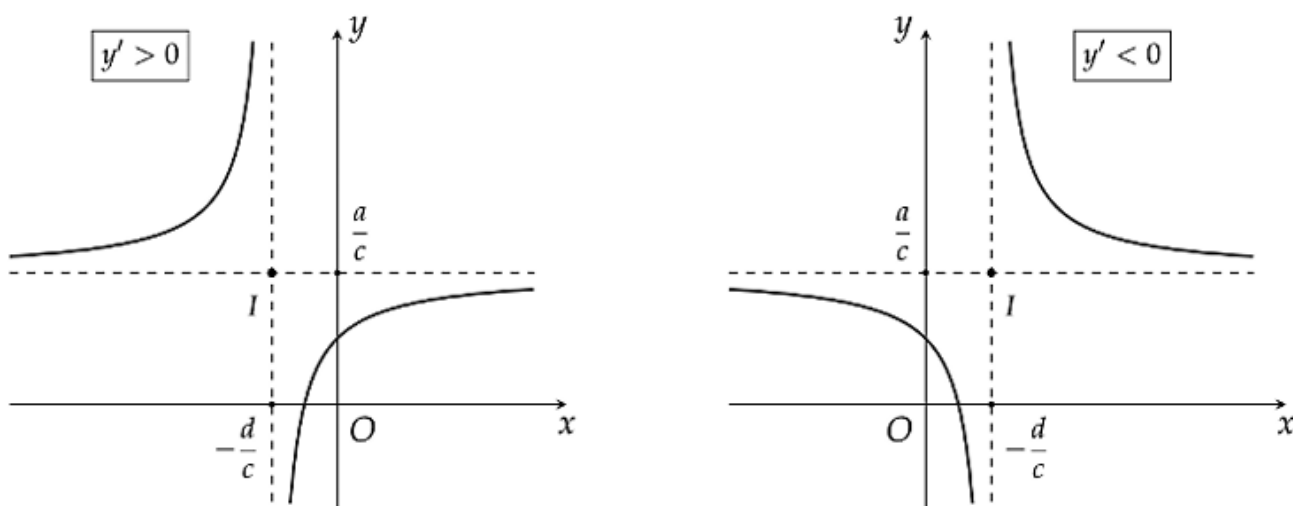


Một số lưu ý cần nhớ về hàm số bậc ba:

- Hàm số không có điểm cực trị khi và chỉ khi $b^2 - 3ac \leq 0$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
- Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$
- Liên hệ giữa tổng và tích hạ nghiệm $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$
- Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị chính là trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị. hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của phương trình $y'' = 0 \iff x = -\frac{b}{3a}$.
- Tiếp tuyến tại tâm đối xứng sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và lớn nhất nếu $a < 0$

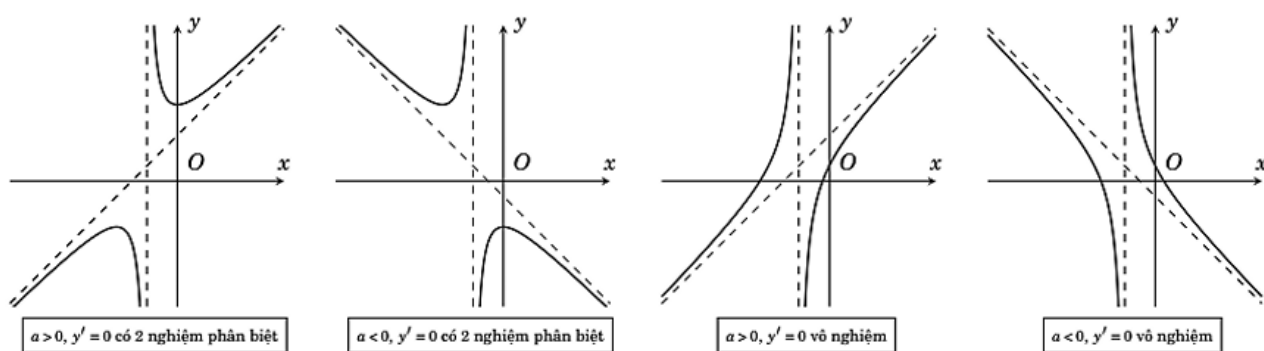
1.6.3 Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng
- Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$; tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.
- Giao với $Ox : y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$; giao với $Oy : y = \frac{b}{d}$.
- Hình dạng đồ thị được minh họa như sau:



1.6.4 Hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$, $a \neq 0, m \neq 0$

1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{n}{m}\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{amx^2+2an.x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$
2. Hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, không có cực trị khi phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.
3. Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
4. Hình dạng đồ thị được minh họa như sau:



1.6.5 Các dạng bài tập có liên quan

Dạng 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số.
 - (a) Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - (b) Tìm các giới hạn tại vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - (c) Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số.
3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa trên bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

b $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

c $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

d $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Gợi ý làm câu a tất cả các câu còn lại làm tương tự

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

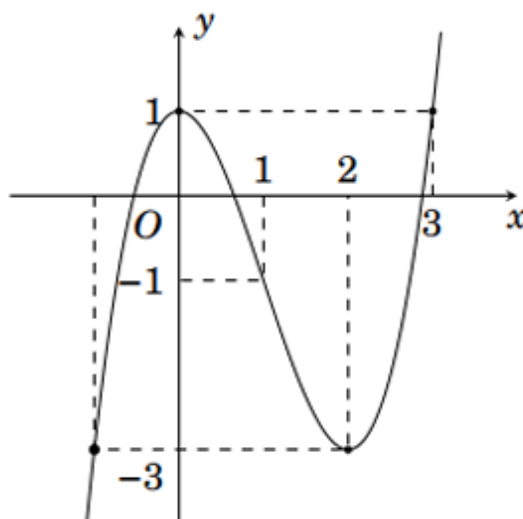
Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CD} = 1$ và cực tiểu tại $x = 2; y_{CT} = -3$.



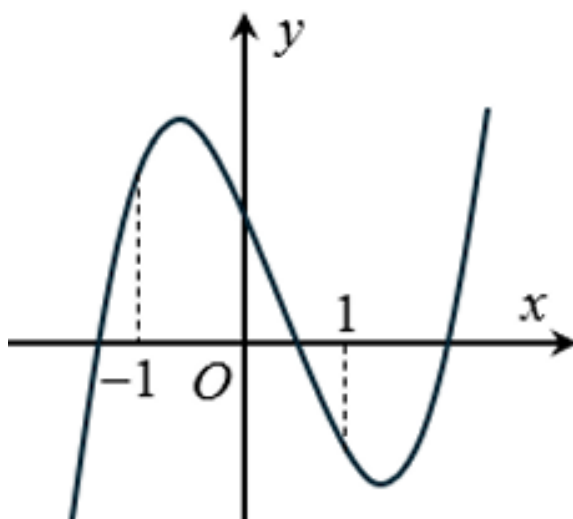
Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2; -3); (-1; -3); (3; 1)$.

Đồ thị nhận điểm $I(1; -1)$ làm tâm đối xứng

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 124. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 125. Bảng biến thiên ở hình bên là một trong bốn hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		1	5		$-\infty$

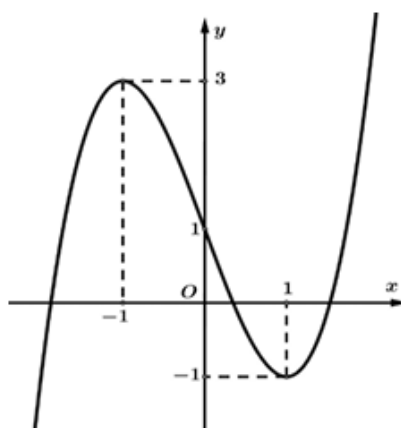
A. $y = -x^3 - 3x^2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = x^3 + 2x^2 + 1$.

D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

Câu 126. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



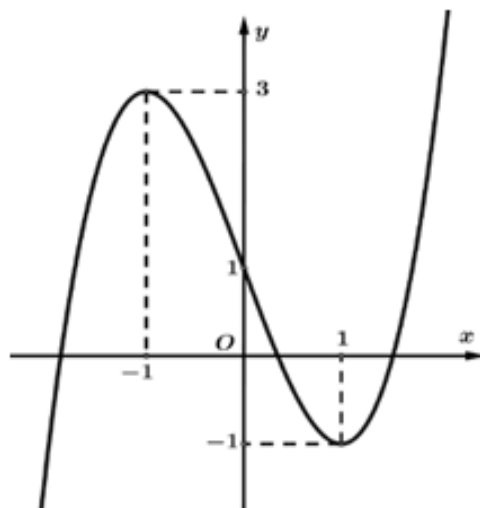
A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = x^3 - 3x - 1$.

C. $y = -x^3 - 3x - 1$.

D. $y = -x^3 - 3x + 1$.

Câu 127. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



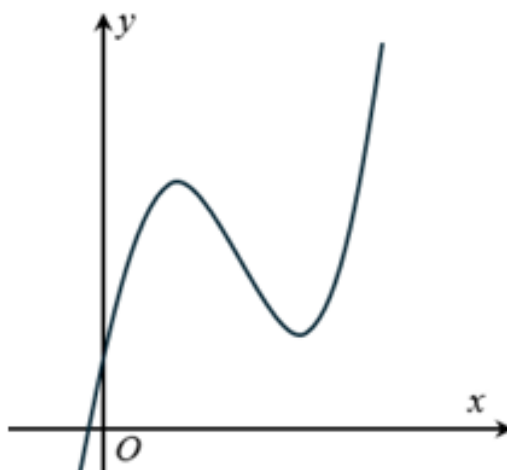
A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 128. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



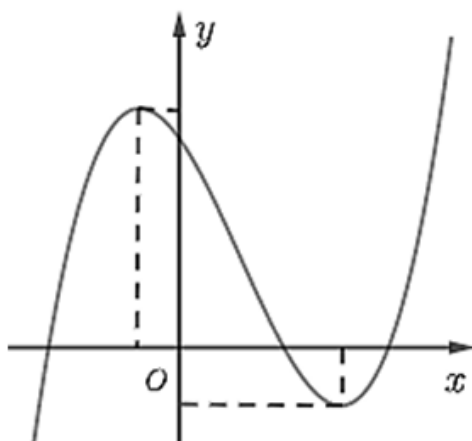
A. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

D. $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = \frac{9}{2}x + 1$.

Câu 129. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



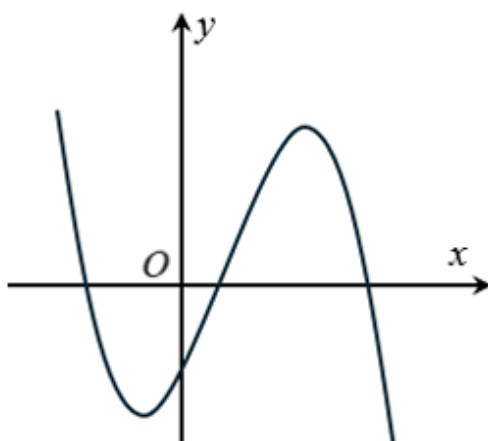
A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 130. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



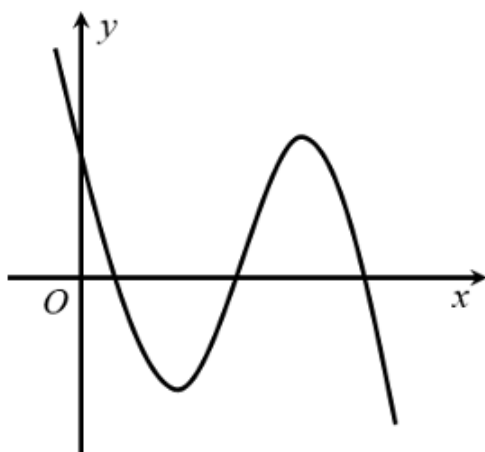
A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 131. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

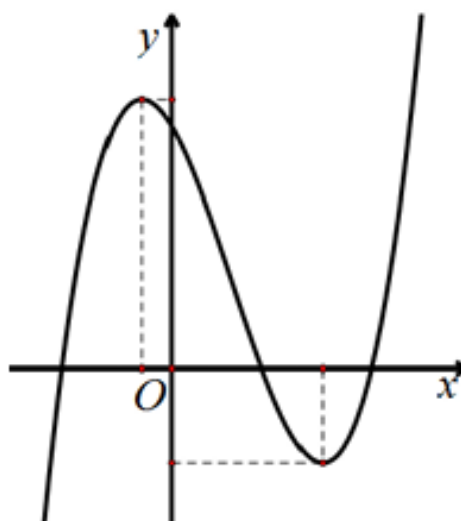
A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 132. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

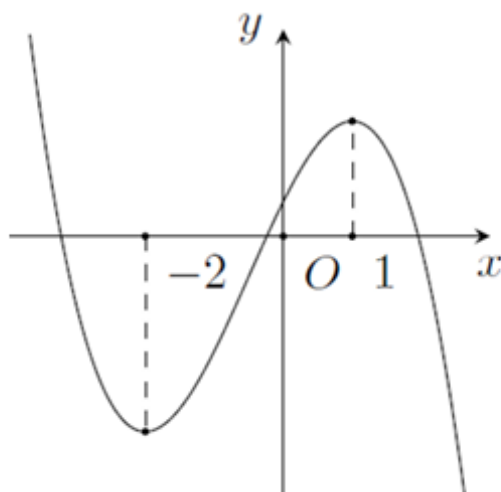
Câu 133. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?

A. $ab > 0, bc < 0, cd < 0$.

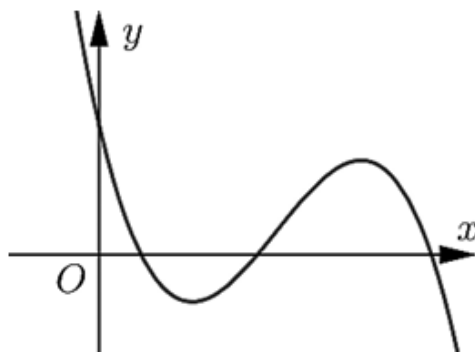
B. $ab > 0, bc < 0, cd > 0$.

C. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$.

D. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.



Câu 134. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



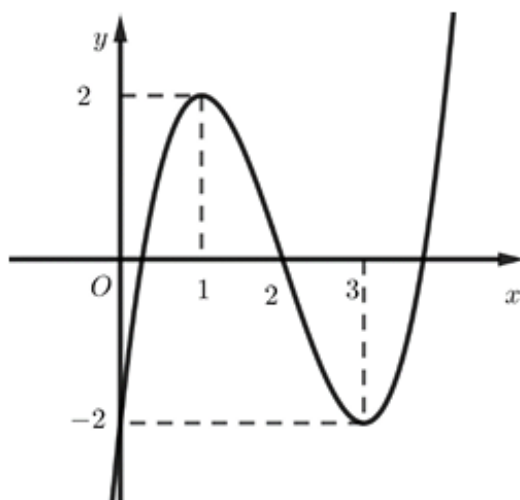
A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 135. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d là

- A. a . B. b . C. c . D. d .

Câu 136. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - 2x - 4$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_3$

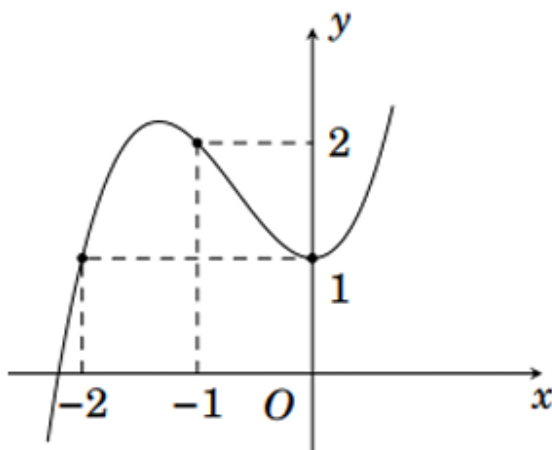
- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 137. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$, (C_m) . Tìm các giá trị của m để đường thẳng d đi qua $I(-1; 2)$ có hệ số góc bằng $-m$ cắt đồ thị hàm số (C_m) tại 3 điểm phân biệt

- A. $m < \frac{3}{2}$. B. $m > \frac{3}{2}$. C. $m \leq -2$. D. $m > 2$.

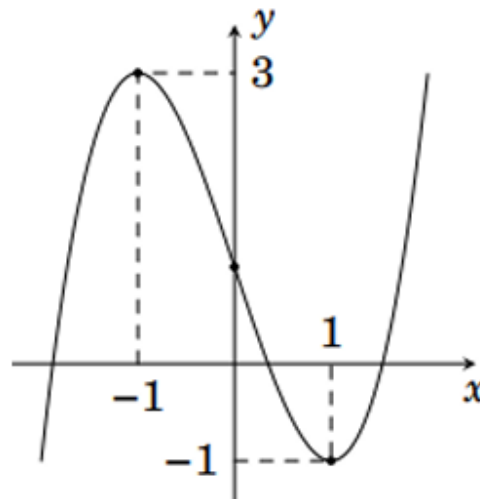
Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



- a Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- b Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; 1)$.
- c Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$
- d $2a + 3b + c = 9$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



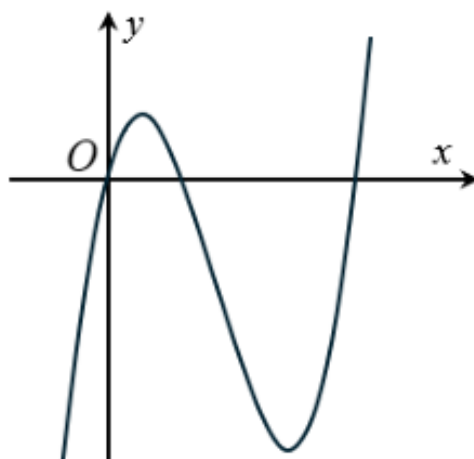
- a Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có hoành độ $(0; 1)$
- b Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.
- c $a - b + c + d = -1$.
- d Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			4		$-\infty$
			0			

- a Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4
- b Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt
- c Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.
- d Đồ thị hàm số đi qua điểm $(4; 20)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.



- a Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.
- b Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.
- c Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
- d Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024$ có đồ thị (C)

- a (C) luôn có hai điểm cực trị.
- b Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng cố định.
- c Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn cắt trục hoành ít nhất 1 điểm.
- d Khi (C) có 2 cực trị thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \leq 2024$.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đường thẳng $y = 3x + m - 2$ cắt đồ thị $y = (x - 1)^3$ tại ba điểm phân biệt là KQ:

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt? KQ:

Câu 3: Với m là tham số thực thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = m$ có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm? KQ:

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^2 + 5m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt? KQ:

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C) , đường thẳng $(d): y = mx - 1$ và điểm $K(4; 11)$. Biết rằng (C) và d cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0; -1)$ còn trong tâm tam giác ΔKBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Tìm giá trị của tham số m . KQ:

Dạng 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Đề khảo sát hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tìm tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$
2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
 - Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và điểm cực trị của hàm số
3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a $y = \frac{x+1}{x-2}$

b $y = \frac{2x+1}{x+1}$

c $y = \frac{x+3}{1-x}$

d $y = \frac{5+x}{2-x}$

Hướng dẫn giải câu a tất cả các câu còn lại làm tương tự

a) $y = \frac{x+1}{x-2}$

Lời giải

Ta có: Tập xác định của hàm số $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Sự biến thiên: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

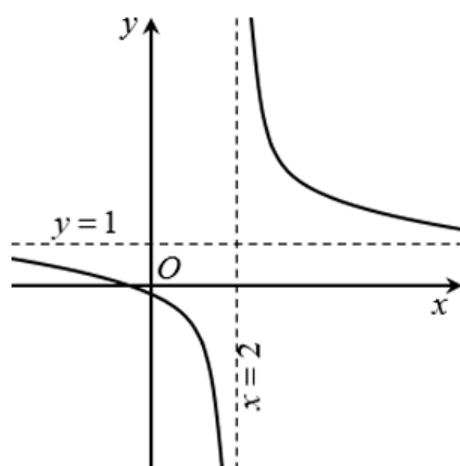
Tiệm cận:

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$.

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -\frac{1}{2})$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

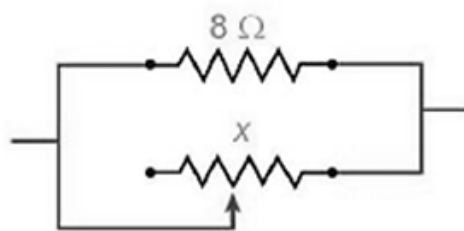
Bài tập 2: Một cốc chứa 30ml dung dịch KOH ((Potassium Hydroxide) với nồng độ 100mg/ml Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8mg/ml được trộn vào cốc.

- Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x(ml)$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.
- Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.
- Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8mg/ml.

Câu 3: Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (theo Vật lí Đại Cương, NXB Giáo dục Việt Nam 2016).

Giả sử một điện trở 8Ω được mắc song song với một biến trở như hình bên. Nếu điện trở đó được kí hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x . Vẽ đồ thị của hàm số $y = R(x)$, $x > 0$ và dựa vào đồ thị hình vẽ, hãy cho biết:

- Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.



b Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8Ω .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 138. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

x	0	2	$+\infty$
y'		-	-
y	2	$+\infty$	2

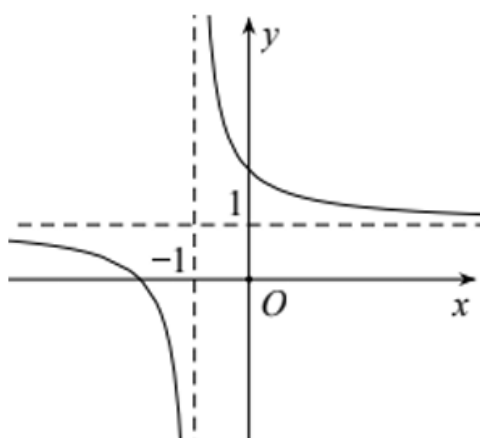
A. $y = \frac{2x-7}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+2}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{1-2x}{x-2}$.

Câu 139. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

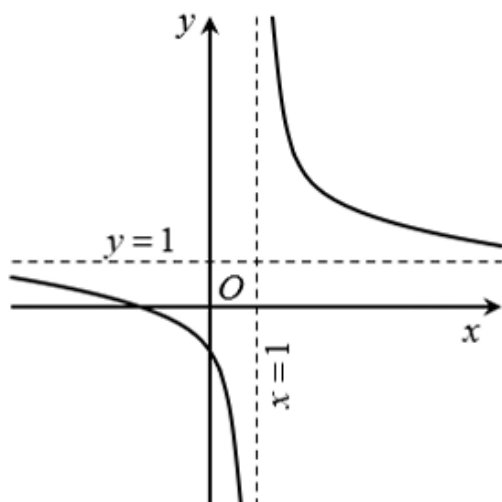
A. $0 < b < a$.

B. $0 < a < b$.

C. $b < 0 < a$.

D. $a < b < 0$.

Câu 140. Hàm số nào sau đây có đồ thị dạng hình vẽ bên dưới?



A. $y = \frac{x}{1-x}$.

B. $y = \frac{x+1}{1-x}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x}{x-1}$.

Câu 141. Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2
	$-\infty$		

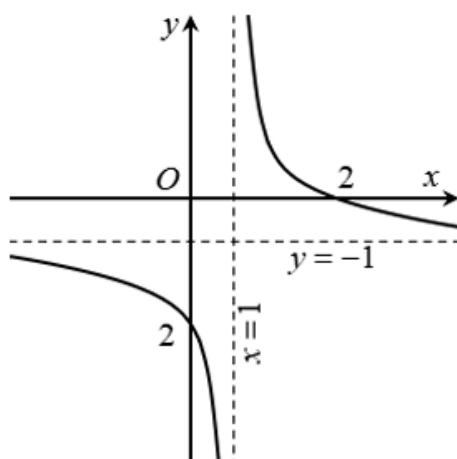
A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

Câu 142. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tích $a.b$ bằng

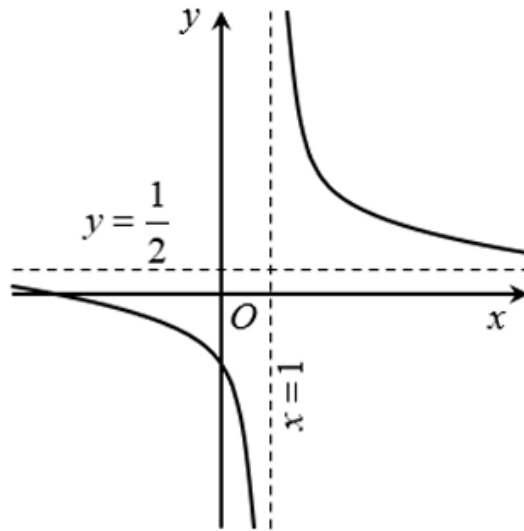
A. 2.

B. -3.

C. -2.

D. 3.

Câu 143. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



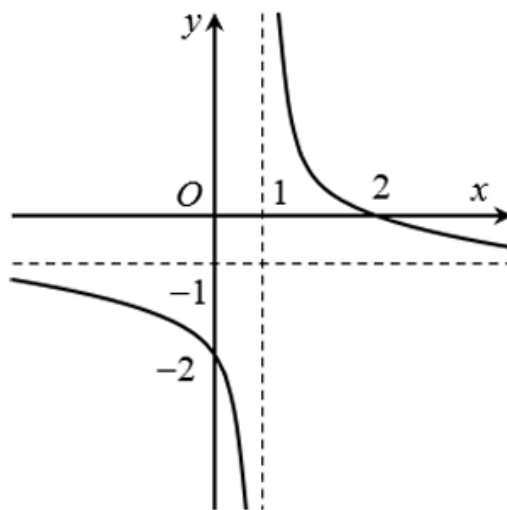
A. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-4}{x-1}$.

C. $y = \frac{x+1}{2x-2}$.

D. $y = \frac{2x}{3x-3}$.

Câu 144. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a + 2b + 3c$ bằng

A. 2.

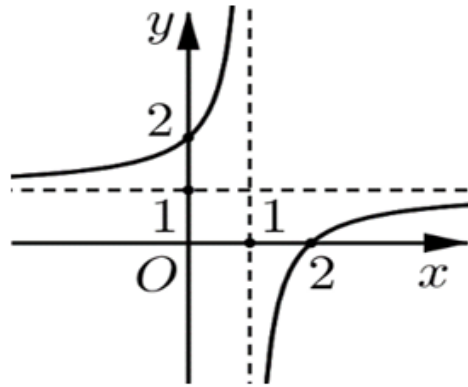
B. 0.

C. 6.

D. -8.

Câu 145. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$.

Khi đó giá trị của biểu thức $T = a - 3b - 2c$ bằng



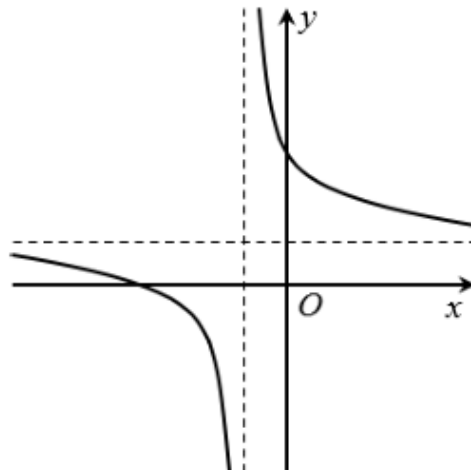
A. 3.

B. 2.

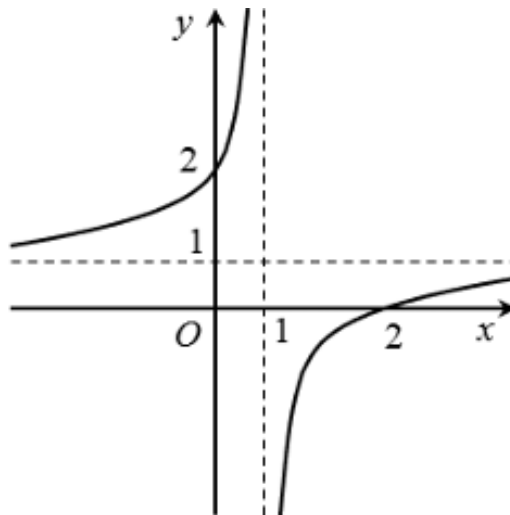
C. 0.

D. -3.

Câu 146. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $0 < a < b$.B. $b < 0 < a$.C. $0 < b < a$.D. $a < b < 0$.

Câu 147. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ dưới



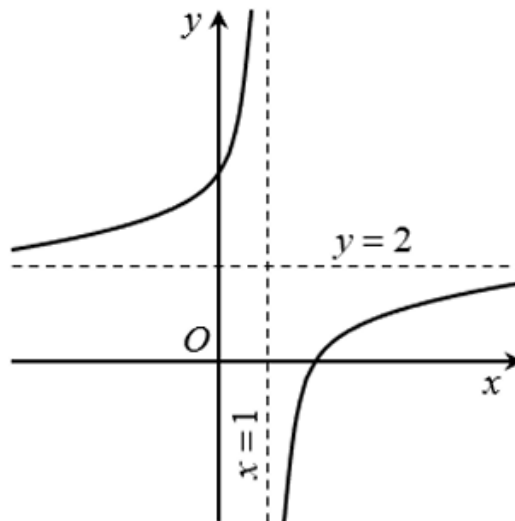
A. $y = x^3 - 3x + 2$.

B. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

D. $y = -x^4 + 5x^2 - 1$.

Câu 148. Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

D. $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

Câu 149. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c, \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} b > 0 \\ b < -\frac{2}{3} \end{cases}$ C. $-\frac{2}{3} < b < 0$ D. $0 \leq b < \frac{2}{3}$.

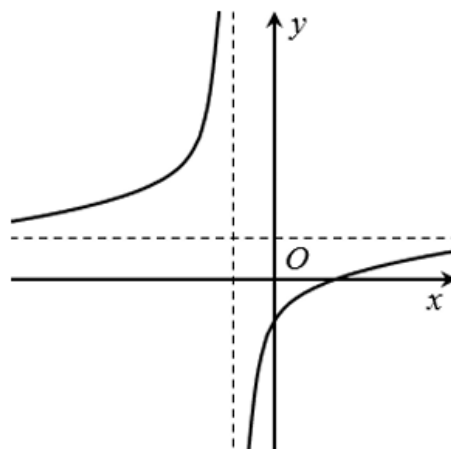
Câu 150. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	2	$+\infty$	2

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

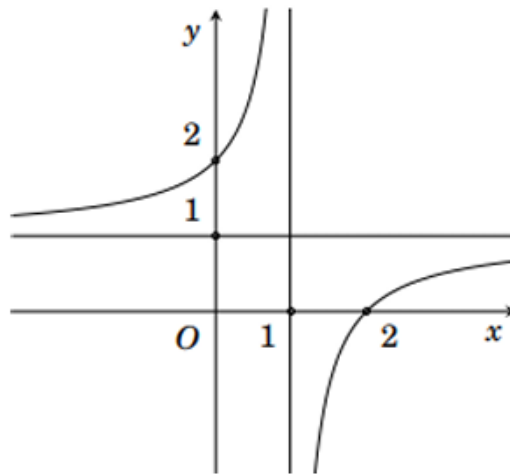
Câu 151. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới. Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?



- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

b Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

c Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

d $T = a - 3b - 2c = -3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$  $-\infty$		$+\infty$  $\frac{1}{2}$

a Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\infty; \frac{1}{2})$.

b Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$.

c Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ lớn hơn 3.

d
$$\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

a Khi $m = 2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$

b Khi $m = 2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có tọa độ $I(1; -1)$

c Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$ thì $m = 2$.

d Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

câu 1: Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x-m}{x+m}$ ($m \neq 0$) có đồ thị (C_m) . Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d) . Tính giá trị của $a + b$. KQ:

Câu 2: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d : y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a; b)$. Tính giá trị biểu thức $a + b$. KQ:

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (H) và đường thẳng Δ có phương trình $y = x + 1$. Số giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai nhánh của đồ thị. KQ:

Câu 4: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d : y = x - 2m$ cắt đồ thị $y = \frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a; b)$. Tính $T = a + b$. KQ:

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 1 - x$ tại hai điểm phân biệt KQ:

Dạng 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Để khảo sát hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$, $a \neq 0, m \neq 0$ thì ta thực hiện theo các bước sau

1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{n}{m}\}$.
2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - (a) Tính đạo hàm $y' = \frac{amx^2+2an.x+bn-mc}{(mx+n)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y' = 0$
 - (b) Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số
 - (c) Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a $y = \frac{x^2-x-1}{x-2}$

b $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

c $y = \frac{2x^2-x+4}{x-1}$

d $y = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$

Gợi ý giải câu 1, các câu còn lại thực hiện tương tự

a) $y = \frac{x^2-x-1}{x-2}$

Tập xác định của hàm số $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Sự biến thiên: $y = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. $y' = 0 \iff \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \iff x = 1$ hoặc $x = 3$.

Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CD} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty.$$

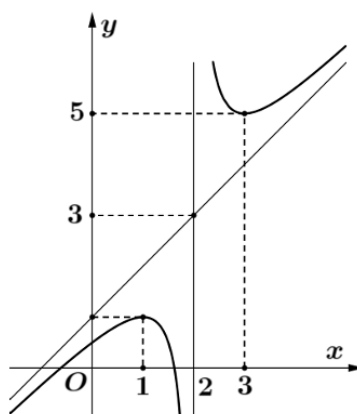
Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 2} = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	-	0	+
y							

Đồ thị:



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 152. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$+\infty$	0	$-\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			24		$-\infty$

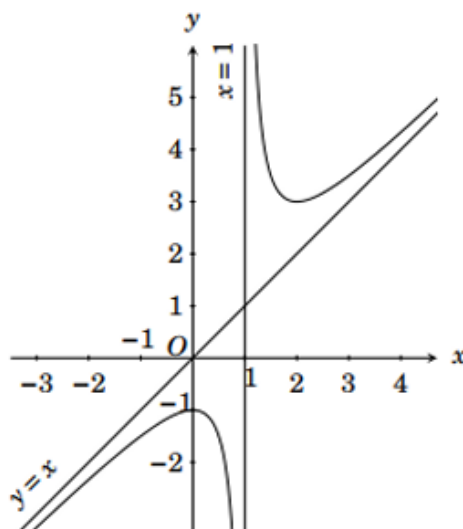
A. $y = \frac{x^2-3x+4}{-x-4}$. B. $y = \frac{x^2-4x+4}{-x-4}$. C. $y = \frac{x^2-5x+4}{x+4}$. D. $y = \frac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Câu 153. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$+\infty$	-9	$-\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			-1		$-\infty$

A. $\frac{x^2-4x+3}{x-3}$. B. $\frac{-x^2-x+2}{x-3}$. C. $\frac{-x^2+x+2}{x-3}$. D. $\frac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Câu 154. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



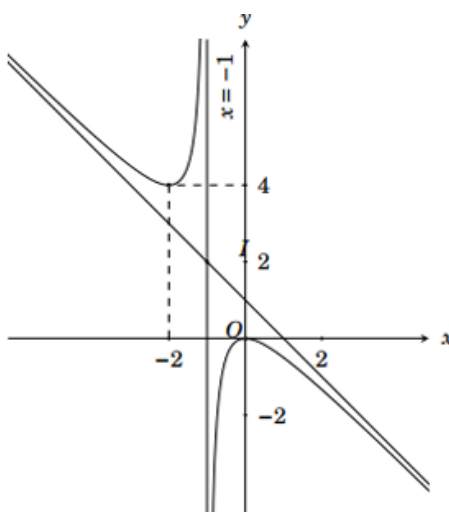
A. $y = \frac{x^2-3}{x-2}$.

B. $y = \frac{x^2-4x+2}{x-2}$.

C. $yy = \frac{x^2-x}{x-2}$.

D. $y = \frac{x^2-4x+5}{x-2}$.

Câu 155. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



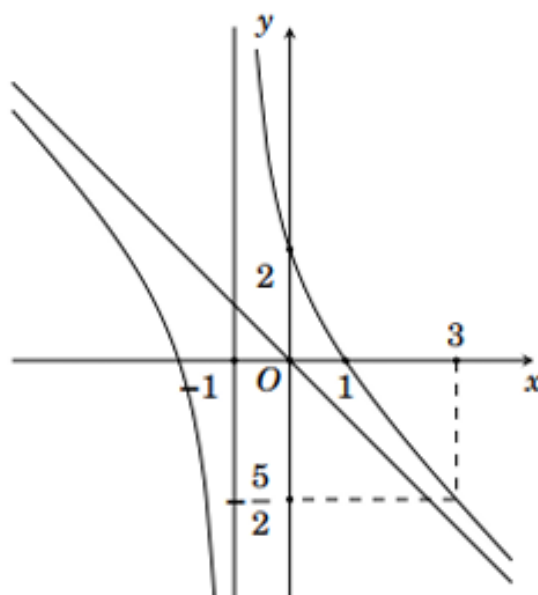
A. $y = \frac{x^2-x}{x+1}$.

B. $y = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

C. $y = \frac{x^2+x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{-x^2}{x+1}$.

Câu 156. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



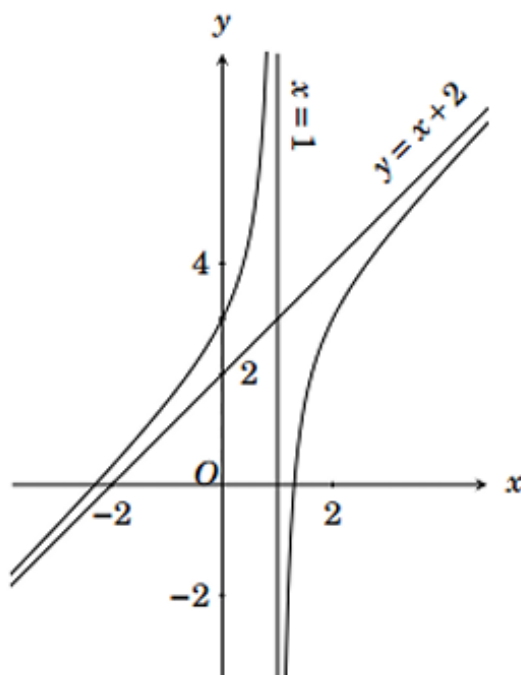
A. $y = \frac{x^2-x+4}{x+1}$.

B. $y = \frac{x^2-2x+3}{x+1}$.

C. $y = \frac{-x^2-x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x^2+x-1}{x+1}$.

Câu 157. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \frac{x^2+3}{x-1}$. B. $y = \frac{x^2+x-3}{x-1}$. C. $y = \frac{x^2-2x+3}{-x+1}$. D. $y = \frac{x^2+3}{-x+1}$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C) . Khi đó:

- a Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$
- b Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.
- c Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.
- d Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C) .

- a Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- b Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- c Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}]$ bằng $-\frac{19}{3}$.
- d Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x + y = 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) .

- a Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$
- b Hàm số có hai điểm cực trị.
- c Đồ thị (C) không cắt trục Ox .
- d Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C)

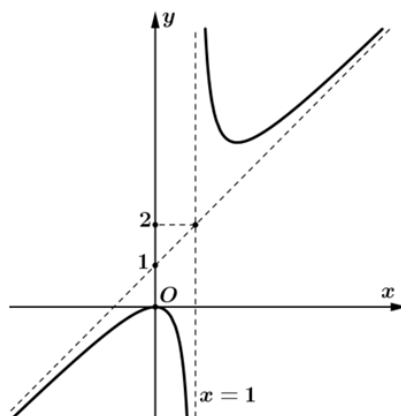
- a Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.
- b Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.
- c Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
- d Đồ thị không cắt trục Ox .

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C) .

- a Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang.
- b Đồ thị hàm số cắt trục tung tại M . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M là $3x - 4y + 2 = 0$.
- c Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
- d Đồ thị không cắt trục Ox .

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Đồ thị hình bên dưới là của hàm số $y = ax + b + \frac{1}{x+c}$



Khi đó tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 2: Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A, B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy . KQ:

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{6}$. KQ:

Câu 4: Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là bao nhiêu? KQ:

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI BÀI TOÁN THỰC TIỄN

1.7 Ứng dụng đạo hàm giải bài toán thực tiễn

1.7.1 Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.

- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

1.7.2 Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số. Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- Bước 1: Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

- Bước 2: Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.

- Bước 3: Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

1.7.3 Các dạng bài tập có liên quan

Bài toán tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được

phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất $2m$ với vận tốc ban đầu $24,5m/s$ là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lý Đại Cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

hướng dẫn giải

- (a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ (m/s).

- (b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{-b}{2a} = \frac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5) = 32,625$ (m).

- (c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$ hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5,08) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ (m/s). Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Bài tập 2: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

Ta có: $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}$, $t \geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$.

$$\text{Do đó, ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20, \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1), \\ \frac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \quad \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men

luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$, nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Bài tập 3: Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hóa nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$

a Tìm hàm chi phí biên.

b Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 201.

Bài tập 4: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{300x}{100-x}, 0 \leq x < 100$ (triệu đồng). Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 158. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3(m)$. Tìm thời điểm t (giây) mà tạo đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất

A. $t = 2$.

B. $t = 0,5$.

C. $t = 2,5$.

D. $t = 1$.

Câu 159. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được chuyển động bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện

A. 72.

B. 12.

C. $-\frac{1}{192}$.

D. $\frac{23}{2}$.

Câu 160. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật chuyển động trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $289(m/s)$. B. $105(m/s)$. C. $111(m/s)$. D. $487(m/s)$.

Câu 161. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó $x(mg)$ và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

- A. $15mg$. B. $30mg$. C. $40mg$. D. $20mg$.

Câu 162. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

- A. 25. B. 30. C. 20. D. 15.

Câu 163. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}) + 12$. . Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A. $t = 10(h)$. B. $t = 14(h)$. C. $t = 15(h)$. D. $t = 22(h)$.

Câu 164. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. . Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- A. 14. B. 13. C. 12. D. 11.

Câu 165. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị 0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A. $27,832^0C$. B. $18,4^0C$. C. $26,2^0C$. D. $25,312^0C$.

Câu 166. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người

thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

- A. 2.250.000. B. 2.350.000. C. 2.450.000. D. 2.550.000.

Câu 167. Một cửa hàng bán bưởi Doan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

- A. 44.000Ø. B. 43.000Ø. C. 42.000Ø. D. 41.000Ø.

Câu 168. Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $(30 - \frac{5m}{2})^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

- A. 30. B. 40. C. 50. D. 60.

Câu 169. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

- A. 480 ngàn. B. 50 ngàn. C. 450 ngàn. D. 80 ngàn.

Câu 170. Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VND và bán ra 30 triệu VND, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VND mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

- A. 29 triệu VND. B. 27,5 triệu VND.
C. 29,5 triệu VND. D. 27 triệu VND.

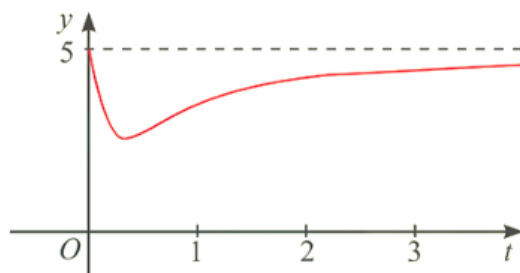
Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).



- a Số dân của thị trấn vào năm 1980 là 18 nghìn người.
- b Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.
- c Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.
- d Đạo hàm của f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

Câu 2: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2+1}$ (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



- a Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5(mg/l).
- b Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l).

c Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất

d Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5 (mg/l).

Câu 3: Một chất điểm chuyển động theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

a Hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

b Hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$

c Trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm tăng.

d Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm.

Câu 4: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t giây là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$

a Hàm vận tốc là: $v(t) = 3t^2 - 12, t \geq 0$.

b Hạt chuyển động xuống dưới khi $t > 2$.

c Quãng đường hạt đi được trong khoảng $0 \leq t \leq 3$ là $9m$.

d Khu $t > 0$ thì hạt tăng tốc.

Câu 5: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

a Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi tivi, x là số ti vi. Vậy hàm cầu là : $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$.

b Công ty giảm giá 4,5 (triệu đồng) /1 ti vi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất.

c Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số tivi bán ra trong tuần, vậy có 2300 tivi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

d Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng) trong đó x là số tivi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 tivi để lợi nhuận là lớn nhất.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$ trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4s$. KQ:

Câu 2: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó? KQ:

Câu 3: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là me^n . Tính $T = m + n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)? KQ:

Câu 4: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 (m/s). Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất? KQ:

Câu 5: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}$ $t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? KQ:

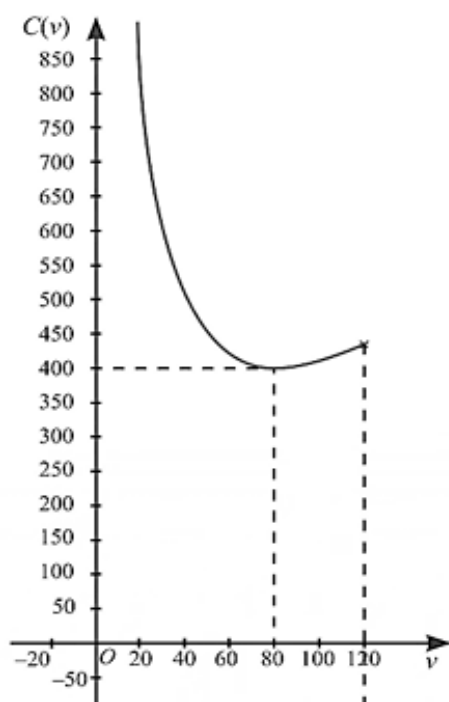
Câu 6: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời

gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. KQ:

Câu 7: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức $V = k(R - r)r^2; 0 \leq r \leq R$ trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất? KQ:

câu 8: Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất? KQ:

Câu 9: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức: $C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v (0 < v \leq 120)$ Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v , người đã vẽ đồ thị hàm số của $C(v)$ như hình bên.



Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D = (0; 120]$.

Đạo hàm $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2} = \frac{5(v-80)(v+80)}{2v^2} = 0 \Leftrightarrow v = -80$ (loại) hoặc $v = 80$.

Trên khoảng $(0; 80)$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(80; 120)$, $C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 80$, $C_{CT} = C(80) = 400$.

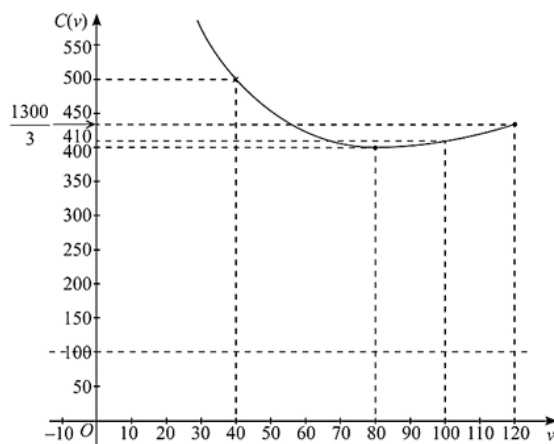
Giới hạn vô cực và tiệm cận:

$\lim_{v \rightarrow 0^+} C(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \left(\frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \right) = +\infty \Rightarrow$ nên đường thẳng $v = 0$ là tiệm cận đứng của C .

Bảng biến thiên:

v	0	80	120		
$C'(v)$		-	0	+	
$C(v)$	$+\infty$		400		$+\infty$

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80; 400)$ và đi qua các điểm $(40; 500)$, $(100; 410)$, $(120; \frac{1300}{3})$ như hình



Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTLN khi $v = 80$ và GTNN là 400.

Câu 10: Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất? KQ:

--	--	--	--	--

Câu 11: Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6(km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất? KQ:

--	--	--	--	--

Câu 12: Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3$ (m^3) Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất? KQ:

--	--	--	--	--

Câu 13: Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6, 0 \leq x \leq 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo? KQ:

--	--	--	--	--

Câu 14: Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu? KQ:

--	--	--	--	--

Câu 15: Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$ ($0 \leq t \leq 12$). Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu? KQ:

--	--	--	--	--

Câu 16: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$ với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng? KQ:

--	--	--	--	--

Câu 17: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy

có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất? KQ:

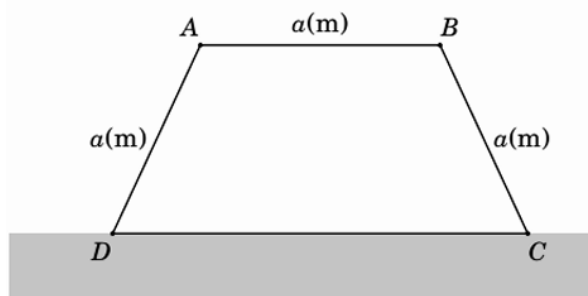
Dạng 2: Một số bài toán tối ưu đơn giản

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- Bước 1: Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- Bước 2: Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$
- Bước 3: Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

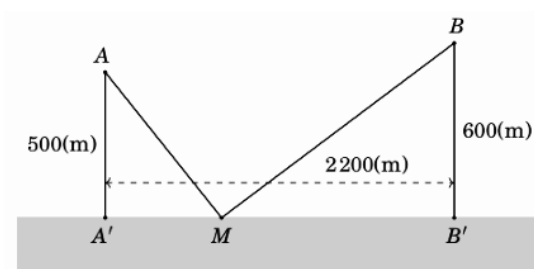
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài $a(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc theo bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ dưới đây biết rằng bờ sông là đường thẳng CD không phải rào lưới. Hỏi bác nông dân đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



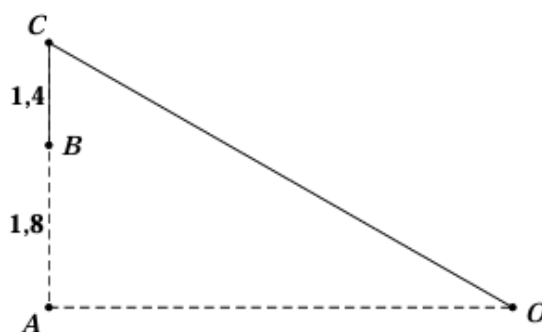
Bài tập 2: Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 550m, BB' = 600m$. Người ta đo được $A'B' = 2200m$

như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn AB sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



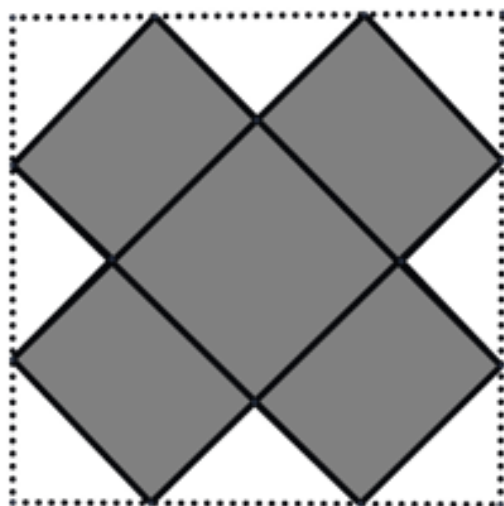
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 171. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



- A. $AO = 2,4m$. B. $AO = 2m$. C. $AO = 2,6m$. D. $AO = 3m$.

Câu 172. Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



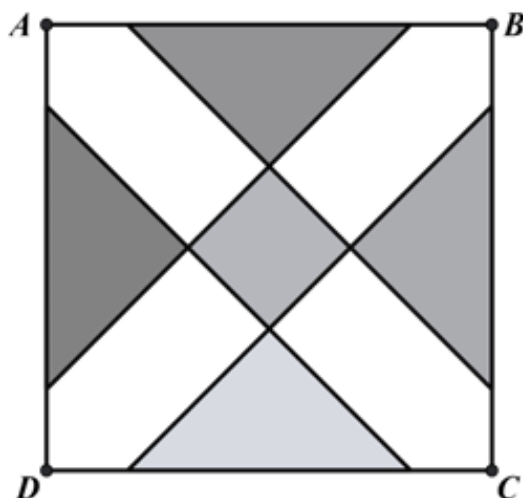
A. $8\sqrt{2}$.

B. $10\sqrt{2}$.

C. $9\sqrt{2}$.

D. $11\sqrt{2}$.

Câu 173. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với ABCD. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



A. $\frac{19}{3}$.

B. $\frac{17}{3}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Câu 174. Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100m.

- A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$. B. $75\sqrt{3}$. C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$. D. $75\sqrt{2}$.

Câu 175. Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đáy với thể tích $1(m^3)$. Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

- A. $\sqrt[3]{2\pi}$. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Câu 176. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R , nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

- A. $2R^2$. B. $5R^2$. C. R^2 . D. $3R^2$.

Câu 177. Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

- A. $83.200.000$ đồng. B. 382.000 đồng.
C. 83.200 đồng. D. $8.320.000$ đồng.

1.8 Ôn tập chương 1

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 178. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $-\infty; 1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-2; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 179. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. $\frac{65}{3}$. B. $\frac{52}{3}$. C. 20 . D. 6 .

Câu 180. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ là

- A. $x = -1$. B. $x = 3$. C. $y = 3$. D. $y = 2$.

Câu 181. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

$\nearrow 2 \searrow -6 \nearrow$

- A. 0. B. 3. C. -4. D. 2.

Câu 182. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình là

- A. $y = x + 4$. B. $y = x + 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = x - 4$.

Câu 183. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 8\ln x$ trên đoạn $[1; e]$ là

- A. 1. B. 10. C. $4 - 8\ln 2$. D. $e^2 - 8$.

Câu 184. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x+2}$ có tọa độ là

- A. $(-2; -3)$. B. $(2; -3)$. C. $(-2; 3)$. D. $(2; 3)$.

Câu 185. Một vật chuyển động thẳng với phương trình chuyển động là $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t tính bằng giây và s tính bằng mét. Hỏi trong khoảng thời gian 8 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $289m/s$. B. $487m/s$. C. $111m/s$. D. $105m/s$.

Câu 186. Biết đường thẳng $y = 2x - 3$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+3}$ tại hai điểm A và B. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I(-\frac{1}{4}; -\frac{11}{4})$. B. $I(-\frac{1}{4}; -\frac{13}{4})$. C. $I(-\frac{1}{8}; -\frac{13}{4})$. D. $I(-\frac{1}{4}; -\frac{7}{2})$.

Câu 187. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) < 0, \forall x \in (-1; 3)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (3; 5)$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 3)$ và $(3; 5)$.
 B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 5)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
 C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 3)$ và $(3; 5)$.
 D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; 5)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 188. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$						

$\swarrow$ -1 $\nearrow$ 3 $\searrow$
 $-\infty$

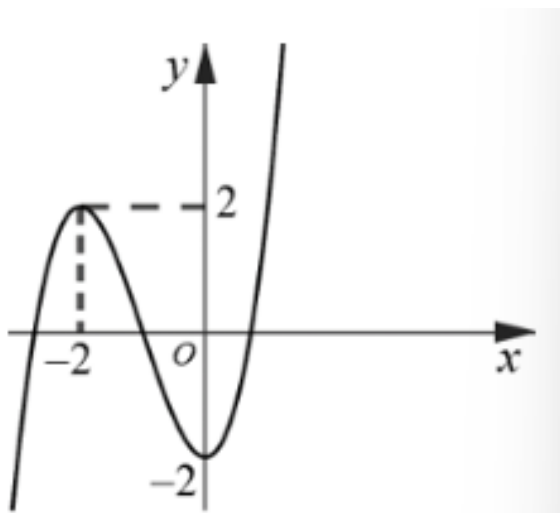
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; +\infty)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 189. Đồ thị hàm số nào dưới đây có đúng ba đường tiệm cận?

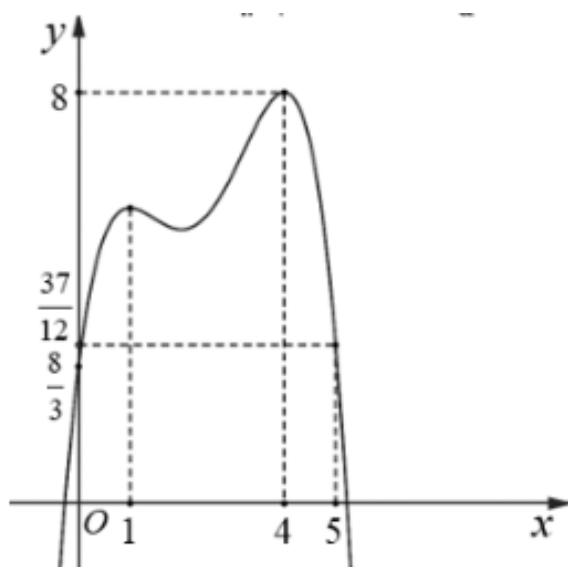
- A. $y = \frac{1}{4-x^2}$. B. $y = \frac{x}{x^2-x+9}$. C. $y = \frac{x^2-2x+3}{5x-1}$. D. $y = \frac{1-2x}{1+x}$.

Câu 190. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 0)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$.

Câu 191. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$. Khẳng định nào sau đây đúng?



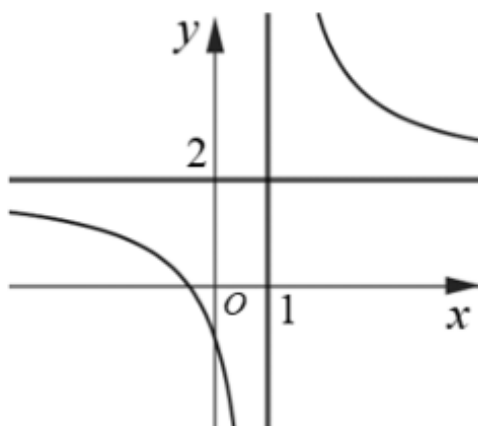
A. $3m + M = 16$.

B. $8m + 3M = 16$.

C. $12m - 3M = 13$.

D. $12m - 4M = 5$.

Câu 192. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào dưới đây đúng?



A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 1$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 0$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Câu 193. Hàm số nào sau đây không có cực trị

A. $y = x^2 - 3x + 2$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = x^4$.

D. $y = -x^3 + x$.

Câu 194. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 B. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
 C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 195. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 196. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x+2023}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 2021. B. 2024. C. 2023. D. 2022.

Câu 197. Cho hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$ là

- A. $m = -1$. B. $m = -3$.
 C. $m \in \{-3; -1\}$. D. không có giá trị của m .

Câu 198. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

- A. -5. B. -2. C. 0. D. 1.

Câu 199. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	4	0	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số là:

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 200. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt là:

A. $M = \pi, m = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

B. $M = \pi, m = 0$.

C. $M = \pi, m = \frac{\pi}{6} - 1$.

D. $M = \pi, m = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Câu 201. Cho hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^2+2x-3}$. Tổng số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

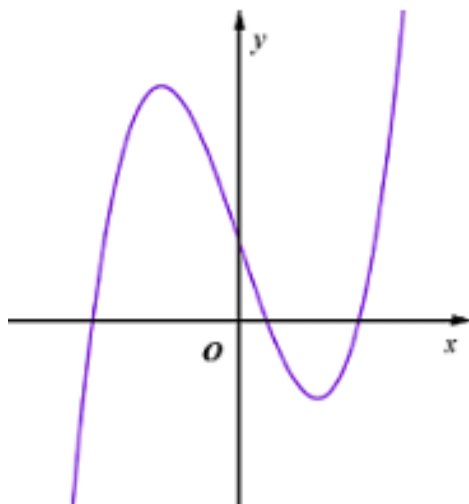
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 202. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ



A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$.

D. $y = \frac{x^2+3}{x+2}$.

Câu 203. Bảng biến thiên sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$
				$+\infty$	6	$+\infty$

A. $y = \frac{x^2+4x-2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x^2+2x-2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x^2+2}{x-1}$.

Câu 204. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

A. -1.

B. 15.

C. 10.

D. -12.

Câu 205. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Câu 206. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	-2	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 4.

Câu 207. Mỗi đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 60 ngày. Người ta nhận thấy lượng gạo xuất khẩu tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức: $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$ (tấn) ($1 \leq t \leq 60$). Hỏi trong 60 ngày đó, ngày thứ mấy có lượng gạo xuất khẩu cao nhất?

- A. 60.
- B. 45.
- C. 30.
- D. 25.

Câu 208. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 27x + 2$ có hai điểm cực trị là A và B. Độ dài đoạn AB bằng

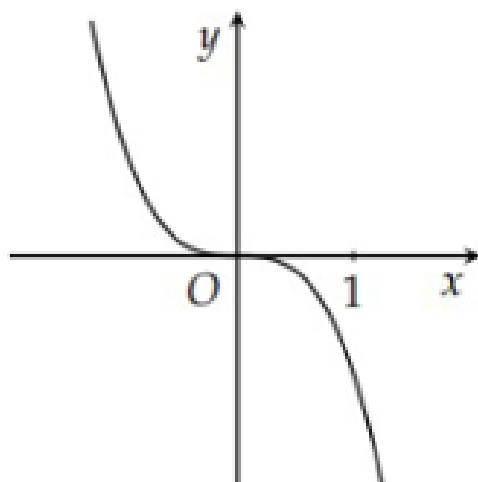
- A. $\sqrt{5}$.
- B. $2\sqrt{5}$.
- C. $30\sqrt{13}$.
- D. $15\sqrt{13}$.

Câu 209. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, Biết $f(x)$ có đạo hàm và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, khẳng định nào sau đây đúng?

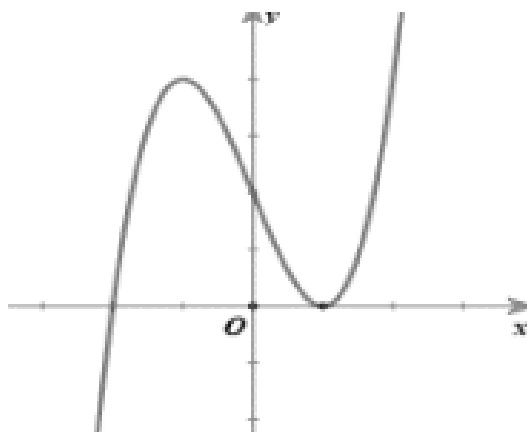
- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 210. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

- A. $32\sqrt{2}$.
- B. -40 .
- C. $-32\sqrt{2}$.
- D. -45 .



Câu 211. Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.
Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^3 + 3x + 2$.

B. $y = x^4 - x^2 + 1$.

C. $y = x^2 + x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 2$.

Câu 212. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $x = 2$.

D. $x = -1$.

Câu 213. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-1; 0)$.

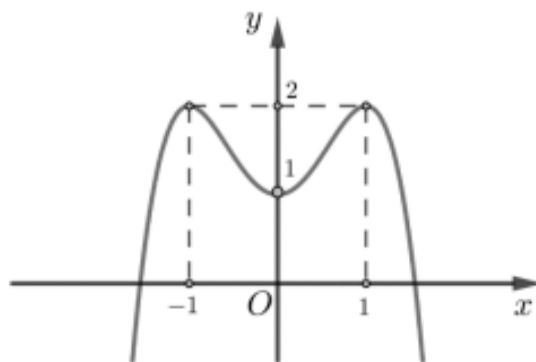
Câu 214. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x + 2$.

B. $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.

C. $y = x^4 + 2x^2 + 2$.

D. $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.



Câu 215. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 3x + \frac{2}{x-1}$

- A. $y = 3$. B. $y = 3x$. C. $y = x + 1$. D. $y = x - 1$.

Câu 216. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 217. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau

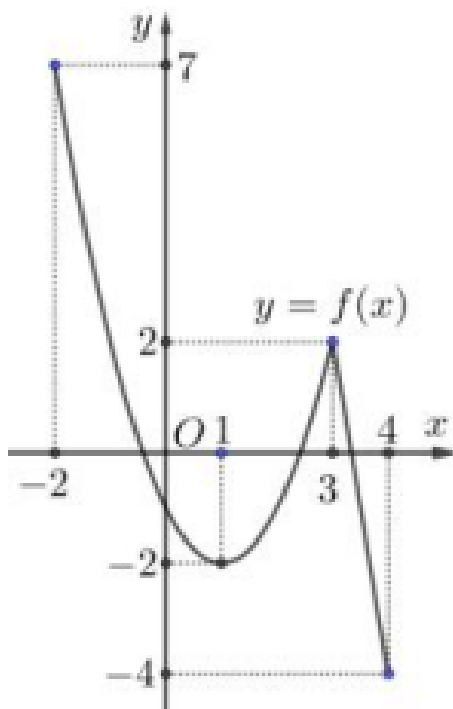
x	-5		1		7
y'		-	0	+	
y	6				9

$\swarrow$ $\nearrow$
 2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

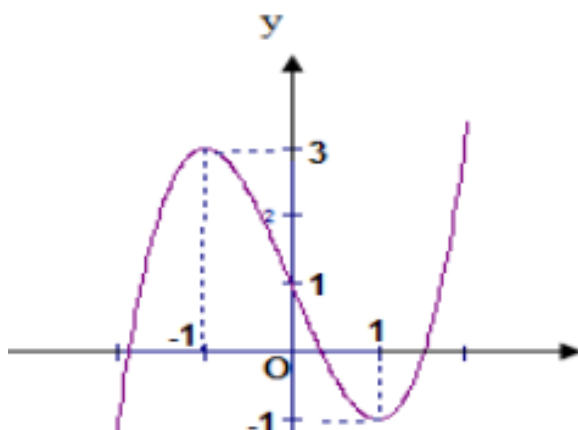
- A. $\min_{[-5;7)} f(x) = 1$. B. $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$. C. $\min_{[-5;7)} f(x) = 9$. D. $\min_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Câu 218. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



- A. 5. B. 3. C. 0. D. -2.

Câu 219. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

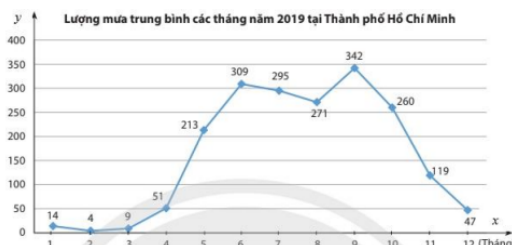


- A. Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1; -1)$.
B. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1; -1)$.

C. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-1; 3)$.

D. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1; 1)$.

Câu 220. . Hình bên cho biết lượng mưa trung bình các tháng năm 2019 tại Thành phố Hồ Chí Minh đo theo đơn vị milimet. Hãy cho biết vào tháng nào trong năm 2019 thì lượng mưa (mm) là cao nhất ?



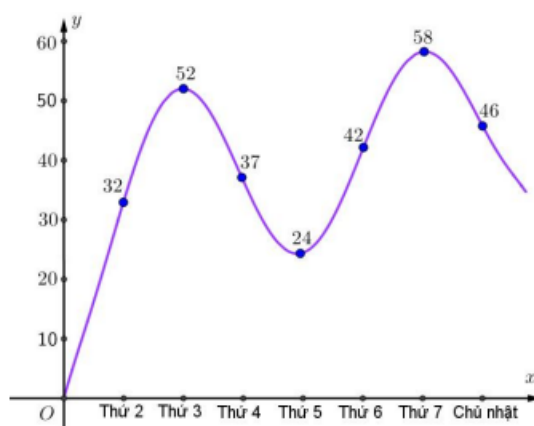
A. Tháng 6.

B. Tháng 8.

C. Tháng 9.

D. Tháng 10.

Câu 221. Một cửa hàng trà sữa có đồ thị biểu diễn số ly trà sữa bán được trong một tuần như sau. Số ly trà sữa cửa hàng đó bán được nhiều nhất trong một ngày là bao nhiêu



A. 62 ly.

B. 52 ly.

C. 68 ly.

D. 58 ly.

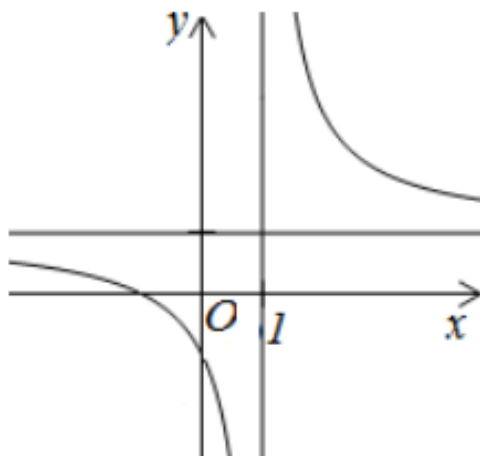
Câu 222. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} - 1$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	2	$+\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là

- A. $x = -1$. B. $x = 2$. C. $x = -2$. D. $y = -1$.

Câu 223. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' > 0, \forall x \neq 1$. C. $y' < 0, \forall x \neq 1$. D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 224. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	1	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = \sqrt{2}$ tại bao nhiêu điểm

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 225. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = (\frac{e}{3})^x$. B. $y = x^3 + x$. C. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$. D. $y = \frac{x+1}{x+3}$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai

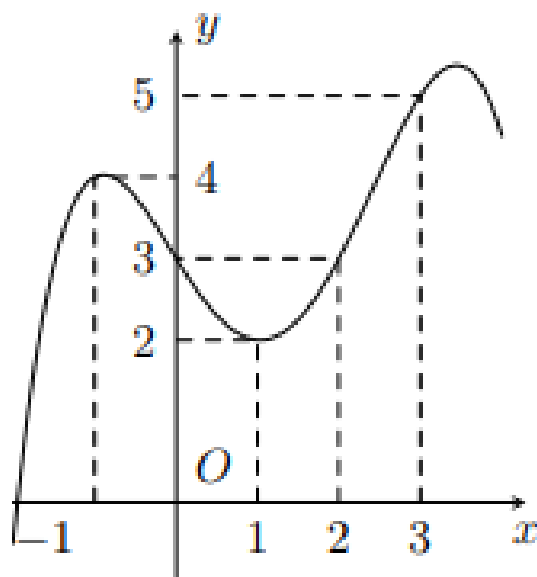
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Các mệnh đề sau là đúng hay sai?

- a Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- b $f(-5) > f(-3)$.
- c Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -2 .

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2		-2	$+\infty$

d Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Các khẳng định sau đây là đúng hay sai?



a Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; 3)$.

b Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ bằng 1.

c Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$ bằng 5.

d Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 6

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

a Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

- b Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
- c Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.
- d Đồ thị hàm số có giao điểm I của hai đường tiệm cận nằm trên đường thẳng $\Delta : x + 2y - 3 = 0$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$

- a Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
- b Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- c Hàm số đã cho có 2 cực trị
- d Nếu $g'(x) = f(x)$ thì hàm số $g(x)$ có 3 cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x}$. Khi đó

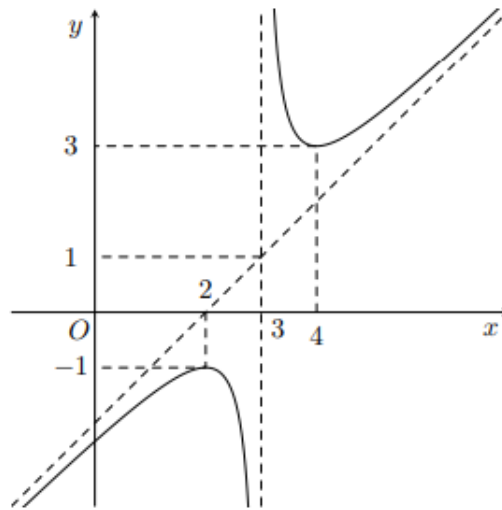
- a Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; 3)$ khi $x = 2$.
- b Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định bằng 2
- c Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(0; 3)$ bằng $\frac{10}{3}$
- d Có đúng 2 giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = m$ có 1 nghiệm.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$. Các mệnh đề sau là đúng hay sai?

- a Hàm số có hai đường tiệm cận.
- b Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$.
- c Khoảng cách từ O đến đường tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.
- d Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0; -4)$

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ như hình vẽ.

- a Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$.
- b Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 3$.
- c Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = x - 2$.



d Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $(1; 3)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2+2x-1}{x-1}$ với m là tham số

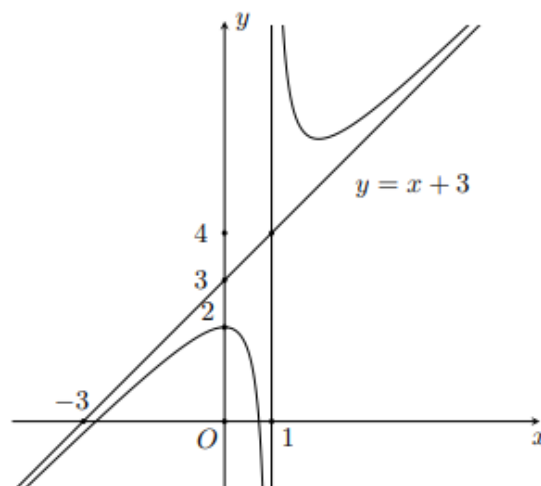
a Với $m = -1$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

b Với $m = 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x - 1$.

c Với $m = 2$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

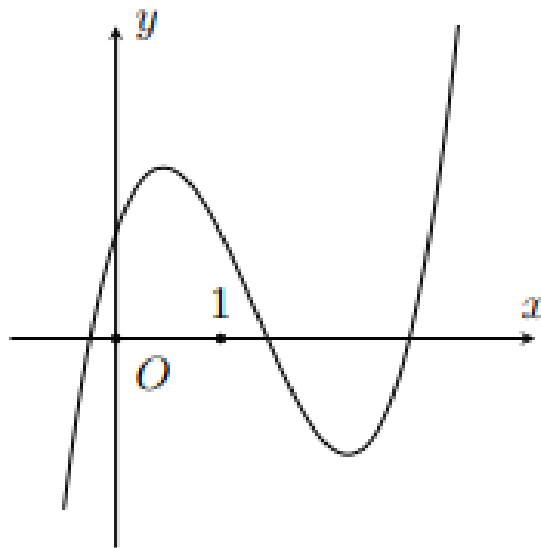
d Với $m = 1$, tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ



- a Đồ thị (C) cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 2.
- b Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x - 1 = 0$
- c Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị trong đó $y_{CT} > y_{CD}$.
- d Hai đường tiệm cận của đồ thị cùng với trục hoành tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



- a Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất một điểm.
- b $f(1) = 0$
- c $ad > 0$
- d $bc < 0$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- a Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- b Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị.

c $f(x) = 0$ có đôi đa 5 nghiệm phân biệt.

d Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\sqrt{2}; 0)$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = 4^x - 2^{x+3}$. Xét tính đúng sai các phát biểu sau

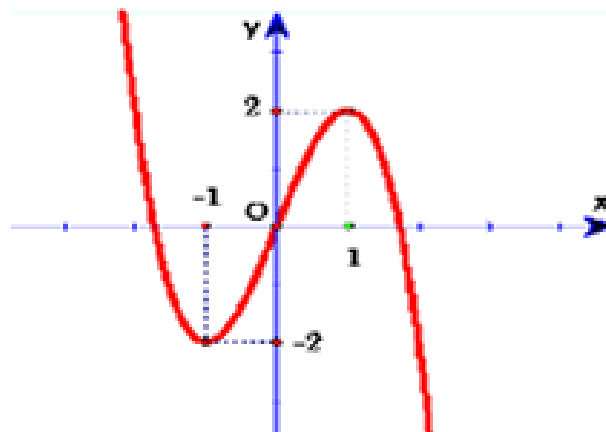
a Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = 4^x \ln 4 - 2^{x+3} \ln 2$.

b Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

c Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ đạt $x = 2$.

d Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 0.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



a Hàm số đã cho có hai điểm cực trị

b Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$

c Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên nửa khoảng $(1; 2]$ bằng 2.

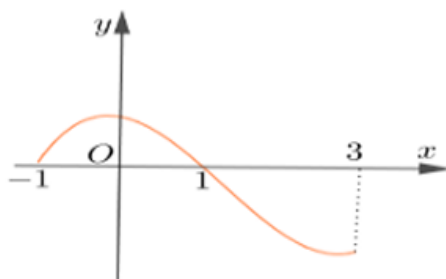
d $f(x) = x^3 - 3x$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

a Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

b Trên khoảng $(0; 3)$ hàm số có một điểm cực đại.

c Trên khoảng $(-1; 3)$ phương trình $f'(x) = 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.



d Cho $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2)$ thì $\min_{[-1;3]} f(x) = f(3)$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = 2\sin 2x + 2x - 5$.

a $f(\frac{3\pi}{2}) - f(0) = \frac{3\pi}{2}$.

b Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = -4\cos 2x + 2$.

c Trên đoạn $[0; \frac{3\pi}{2}]$ Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

d Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[0; \frac{3}{2}]$ là $3\pi - 5$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \ln x - 2x^2$

a $f(1) = -2, f(e^2) = 2e - e^2$.

b Đạo hàm của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$ là $f'(x) = \frac{1}{x} - 4x$

c Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(\frac{1}{2}; +\infty)$ và nghịch biến trên $(0; \frac{1}{2})$.

d Tổng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[\frac{1}{2}; e^2]$ bằng $\frac{3}{2} - \ln a - ae^b$. Khi đó $ab = 6$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = e - 3x + 2$

a $f(0) = 2, f(3) = e^3 - 7$.

b Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = e^x - 3$.

c Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = \ln 3$.

d Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng $3 - 3\ln 3$.

Câu 18: Một cửa hàng bán đồ thủ công với giá bán là 39000 đồng/sản phẩm. Giá nhập vào của sản phẩm đó là 15000 đồng/sản phẩm. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 120 sản phẩm/ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/sản phẩm thì số sản phẩm bán được sẽ tăng thêm là 15 sản phẩm.

- A. Nếu giá bán là 25000 đồng/sản phẩm thì cửa hàng bán được 135 sản phẩm/ngày.
- B. Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng khi chưa giảm giá sản phẩm là 2 880 000 đồng.
- C. Lợi nhuận tối đa theo ngày mà cửa hàng thu được là 3840 (nghìn đồng).
- D. Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán sản phẩm đó ($15 \leq x \leq 39$), khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số $f(x) = (x - 15)(705 - 15x)$.

Câu 19: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 36$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc chất điểm bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian đó, tính bằng mét (m).

- A. Quãng đường vật di được sau 4 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động là 82 (m).
- B. Vận tốc của vật tại giây thứ t là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- C. Gia tốc của vật tại thời điểm 2 giây là 4 (m/s²).
- D. Trong khoảng thời gian 10 s (đầu tiên), vận tốc của vật nhỏ nhất là 6 m/s.

Câu 20: Người ta ước tính rằng số lượng cá thể của một loài có nguy cơ tuyệt chủng vẫn còn trong tự nhiên t năm sau khi chính sách bảo vệ được thiết lập có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = \frac{600}{1+3e^{-0,02t}}$, $t \geq 0$.

- A. Số lượng cá thể của loài đó tại thời điểm khi bắt đầu thiết lập chính sách bảo vệ là 150 con.
- B. Sau khi chính sách bảo vệ được thiết lập, số lượng cá thể của loài đó lúc đầu tăng nhưng sau đó sẽ giảm dần.

- C. Cần ít nhất 50 năm kể từ khi chính sách bảo vệ được thiết lập để số lượng cá thể của loài đó sẽ vượt mức 300 con.
- D. Số lượng cá thể của loài đó không bao giờ vượt quá 600 con.

Câu 21: Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử, huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức $p(t) = 120 + 15 \cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

- A. Tại thời điểm ban đầu, $t = 0$, huyết áp người này là 135 (mmHg).
- B. Hàm số $p(t)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{1}{60}$ phút.
- C. Huyết áp thấp nhất của người này là 120 (mmHg).
- D. Trong 1 phút từ thời điểm ban đầu, có 75 lần huyết áp người này ở mức 120 mmHg.

Câu 22: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Biết rằng, nếu số lượng đặt hàng là x (tấn) sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng) và chi phí để nhà máy A sản xuất được x (tấn) sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng), gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm.

- A. Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- B. Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là 600 triệu đồng.
- C. Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán x (tấn) sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho nhà máy B là $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

- D. Nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 23: Sau khi tiêm thuốc cho bệnh nhân thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân theo thời gian của bệnh nhân theo thời gian được thống kê theo công thức

$$C(x) = \frac{0,05x}{x^2 + x + 1}$$

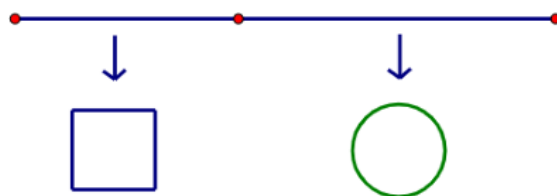
(tính theo mg/cm^3), trong đó x là thời gian tính theo giờ.

- A. Nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân không bao giờ bằng 0 sau khi tiêm.
B. Sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân giảm dần theo thời gian.
C. Nồng độ thuốc trong máu lớn nhất ở thời điểm 1 giờ sau khi tiêm.
D. Tại thời điểm nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân đạt $0,02 \text{ mg}/\text{cm}^3$.

Câu 24: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ (trong đó $f(t)$ được tính bằng nghìn người).

- A. Coi $f(t)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$. Khi đó $f(t)$ luôn nghịch biến và do vậy số dân của thị trấn giảm theo thời gian.
B. Trong giai đoạn từ năm 1970 đến năm 2000, số dân lớn nhất của thị trấn không vượt quá 23 nghìn người.
C. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ xét trên tập $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ có tâm đối xứng là $I(-5; 26)$.
D. Đạo hàm của hàm số $f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Khi đó năm 1998 có tốc độ tăng dân số lớn nhất.

Câu 25: Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r (hình vẽ).



A. Điều kiện $0 < a < 15$.

B. Chu vi đường tròn được tạo ra là $2\pi r = 60 - 2a$.

C. Bán kính đường tròn được tạo ra là $r = \frac{30-2a}{\pi}$.

D. Tổng diện tích hình vuông và hình tròn nhỏ nhất khi tỉ số $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$.

Phần III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$, gọi $M = \frac{a}{e^b}$, ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; -2]$). Giá trị của biểu thức $P = a + b$ bằng. KQ:

--	--	--	--	--

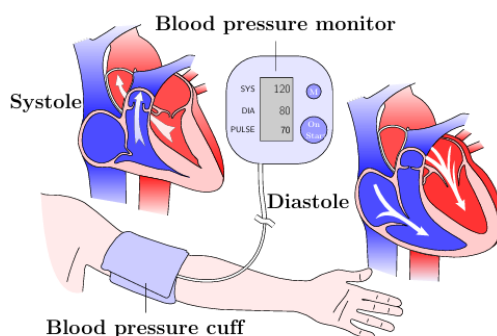
Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng xác định. Tìm số phần tử của S . KQ:

--	--	--	--	--

Câu 3: Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200m^3$ đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 300000 đồng/ m^2 . Chi phí thuê nhân công thấp nhất là bao nhiêu? (đơn vị triệu đồng, làm tròn đến hàng đơn vị) KQ:

--	--	--	--	--

Câu 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x(15 - x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất



KQ:

Câu 5: Người ta thống kê được chi phí sửa chữa, vận hành máy móc trong một năm của xưởng sản xuất được tính bởi công thức $f(x) = \frac{2000x-1500}{35x+5}$ (triệu đồng). Biết x là số năm kể từ lúc máy móc vận hành lần đầu tiên, số năm càng nhiều thì chi phí càng cao. Khi số năm x đủ lớn thì chi phí vận hành máy móc trong một năm gần với số nào? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục) KQ:

Câu 6: Một công ty sản xuất sản phẩm và doanh thu (đơn vị: triệu đồng) từ việc bán sản phẩm mô tả bởi hàm số $R(x) = -2x^3 + 9x^2 + 12x + 100$. Trong đó x là số lượng sản phẩm được bán ra (tính bằng ngàn sản phẩm). Hỏi số lượng sản phẩm tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là bao nhiêu sản phẩm? KQ:

Câu 7: Một công ty muốn thiết kế một hộp chứa hàng có đáy là hình chữ nhật không nắp với diện tích đáy là 100cm^2 . Chuyên viên thiết kế đề xuất chiều cao của hộp sẽ bằng tổng độ dài của 2 cạnh đáy. Gọi 2 cạnh đáy là x và y . Thể tích nhỏ nhất của hộp là bao nhiêu? KQ:

Câu 8: Một cửa hàng bán một loại sản phẩm với lợi nhuận thu được khi bán x (trăm) sản phẩm được mô tả bởi hàm số $L(x) = -0,5x^2 + 6x - 10$. Trong đó x là số lượng sản phẩm bán ra, và $L(x)$ là lợi nhuận thu được (đơn vị: triệu đồng). Hãy xác định số lượng sản phẩm mà cửa hàng cần bán ra để lợi nhuận đạt mức cao nhất? KQ:

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$? KQ:

Câu 10: Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp

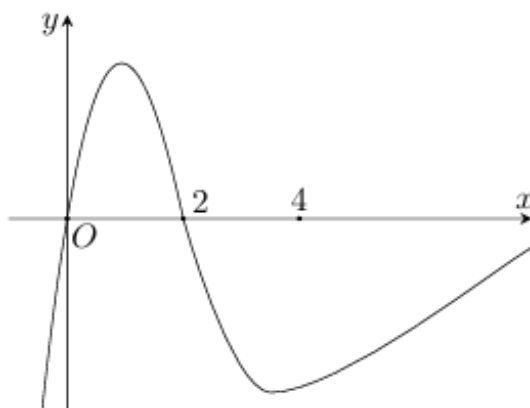
đôi chiều rộng, giá thuê nhân công xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu? (đơn vị triệu đồng) KQ:

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ và $(c; +\infty)$. Tính $a + b + c$. KQ:

Câu 12: Trang trại heo đang bị lây lan một dịch bệnh do virus gây nên và được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 27t^2 - t^3$ $0 \leq t \leq 12$, trong đó $f(t)$ là số heo bị nhiễm (tính bằng trăm con) và t là thời gian (tính bằng tuần). Vì đã phát hiện muộn, nên quan sát từ tuần thứ 2 trở đi đỉnh điểm cao nhất số heo bị mắc bệnh là bao nhiêu con? KQ:

Câu 13: Người ta thấy rằng trong vòng 3 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành P của một loại sản phẩm vào tháng thứ t thay đổi theo công thức $P(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (đồng) với $0 \leq t \leq 36$. Biết giá thành đạt cực đại vào thời điểm t_1 và giá thành đạt cực tiểu vào thời điểm t_2 . Khi đó giá trị của $2t_1 + t_2$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) - f(2) = f(4) - f(3)$. Giả sử giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ đạt được lần lượt tại x_0 và x_1 . Tính $x_0 + x_1$ KQ:

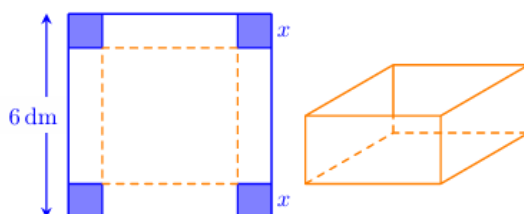


Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$, đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên có dạng $(C): y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{b}$. KQ:

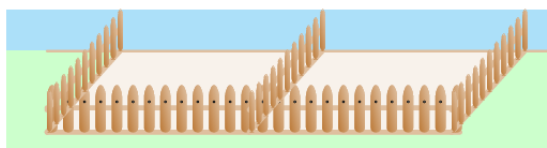
Câu 16: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc btws đầu chuyển động, vận tốc (m/s) lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 17: Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 6 dm. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài bằng x (dm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x . Tìm x (dm) để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất. KQ:



Câu 18: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình bên dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



KQ:

Câu 19: Một ông nông dân có 2400 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu hecta?

KQ:

Câu 20: Một nhà máy sản xuất xe đạp cho thị trường châu Âu theo đơn giá 120 euro. Chi phí mỗi ngày của nhà máy được cho bởi hàm số $K(x) = 0,02x^3 - 3x^2 + 172x + 2400$, trong đó x là số lượng xe đạp sản xuất được trong ngày hôm đó. Mỗi ngày có thể sản xuất tối đa 130 xe đạp. Giả sử số xe đạp sản xuất được trong mỗi ngày đều được bán hết vào cuối ngày đó. Gọi $G(x)$ là hàm số biểu diễn lợi nhuận hằng ngày của nhà máy. Lợi nhuận hằng ngày là hàm đồng biến theo x khi $x \in (a; b)$, trong đó a và b là các giá trị nguyên dương. $a + b$ lớn nhất bằng bao nhiêu? KQ:

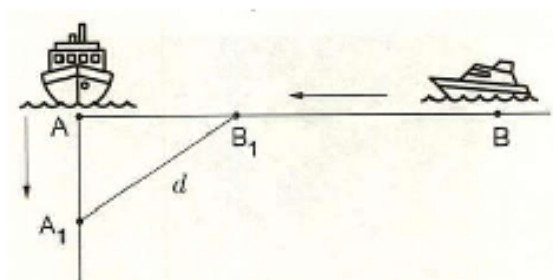
Câu 21: Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường S (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (giây), hàm số đó là $S = 6t^2 - t^3$. Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất. KQ:

Câu 22: Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực đại tại điểm $x = -3$, $f(-3) = 28$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1. Tính $S = a^2 + b^2 - c^2$. KQ:

Câu 23: Vi khuẩn E.coli sống chủ yếu ở đường ruột và có số lượng lớn nhất trong hệ vi sinh vật của cơ thể. Một bộ quần thể vi khuẩn E.coli được quan sát trong điều kiện thích hợp, có tốc độ sinh sản được cho bởi hàm số $f(t) = 480.2^t \ln 2$. Trong đó t tính bằng giờ ($t > 0$), $f(t)$ tính bằng cá thể/giờ (*Nguồn R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage*). Biết tại thời điểm bắt đầu quan sát, số lượng cá thể được ước tính một cách chính xác khoảng 480 cá thể. Hỏi sau 3 giờ số lượng cá thể bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 24: Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 6 hải lí. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với vận tốc 5 hải lí/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất (là tròn đến hàng phần trăm) KQ:

Câu 25: Một nhà máy sản xuất x sản phẩm trong mỗi tháng. Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi hàm chi phí $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ (nghìn đồng). Biết giá bán của mỗi sản phẩm là một hàm số phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x và được cho bởi công thức $p(x) = 1700 - 7x$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi thnags

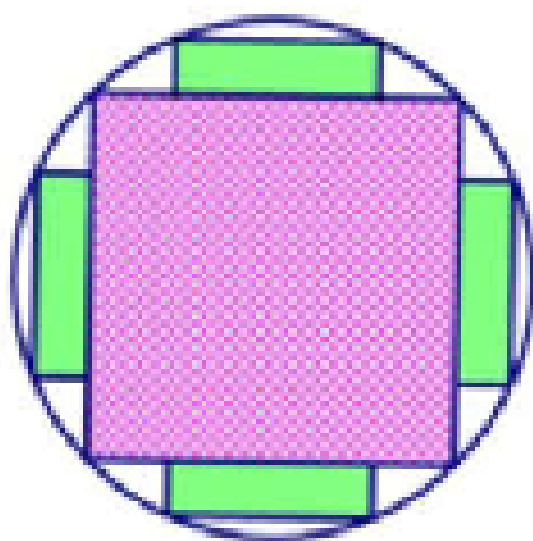


nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? Biết rằng kết quả khảo sát thị trường cho thấy sản phẩm xuất ra sẽ được tiêu thụ hết.

KQ:

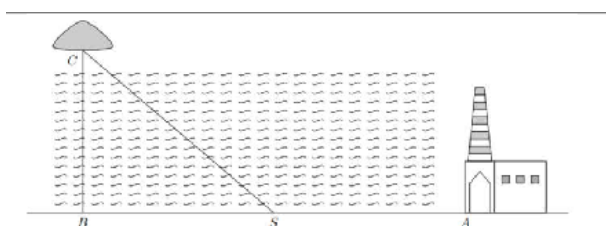
Câu 26: Trong trung tâm thương mại Lotte có một nhà hàng bán buffet hải sản. Khi nhà hàng bán với giá 200 ngàn đồng một suất thì mỗi ngày nhà hàng bán được 100 suất. Nhà hàng dự định có đợt giảm giá bán để kích cầu trong dịp cuối năm. Theo khảo sát từ thị trường thì mỗi lần giảm giá 10 ngàn đồng một suất thì nhà hàng bán thêm được 10 suất, hỏi nhà hàng cần bán với giá mới là bao nhiêu ngàn đồng một suất để doanh thu trong một ngày là lớn nhất? KQ:

Câu 27: Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng 19 cm sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích phần gỗ bỏ đi của mặt cắt ngang khúc gỗ hình trụ khi diện tích mặt cắt ngang của mỗi tấm ván đạt tối đa (theo đơn vị 2 cm và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

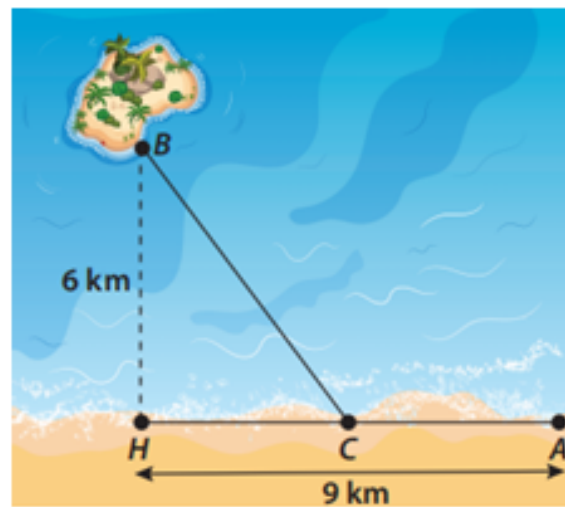
Câu 28: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở (nằm tại bờ biển là đường thẳng AB) đến một hòn đảo C , khoảng cách ngắn nhất từ đảo về bờ biển là đoạn BC dài 1km , khoảng cách từ B đến A là 4km được minh họa bằng hình vẽ bên. Biết rằng mỗi km dây điện đặt dưới nước chi phí mất 5000 USD , còn đặt dưới đất chi phí mất 3000 USD . Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu km để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C có chi phí là ít nhất? A KQ:



Câu 29: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6\text{km}$ (hình vẽ). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50.000 USD mỗi kilomet và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130.000 USD mỗi kilomet, biết rằng $AH = 9\text{km}$. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất KQ:

Câu 30: Giám đốc một nhà hát đang phân vân trong việc xác định mức giá

vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 200 nghìn đồng/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 10 nghìn đồng /người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 10 nghìn đồng /người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 20 nghìn đồng lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất



KQ:

Chương 2

VECTƠ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

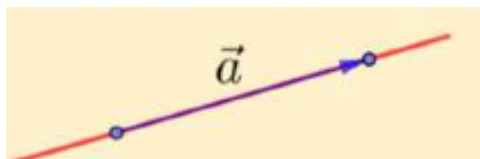
2.1 Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau, vectơ - không

2.1.1 Định nghĩa:

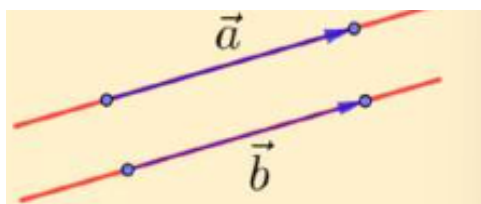
• **Vectơ trong không gian** là một đoạn thẳng có hướng

• **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $|\vec{a}|$.

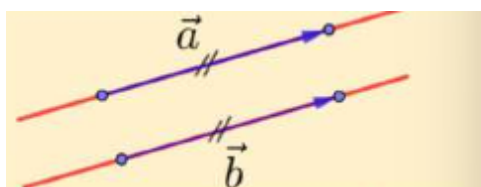
• **Giá** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.



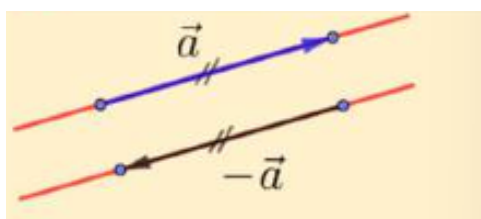
• Hai vectơ **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



• Hai vectơ **bằng nhau** nếu chúng có độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết $\vec{a} = \vec{b}$



• Hai vectơ **đối nhau** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.



• **Vectơ - không** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ - không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Chú ý:

- Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B .
- Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

2.1.2 Tổng và hiệu của hai vectơ

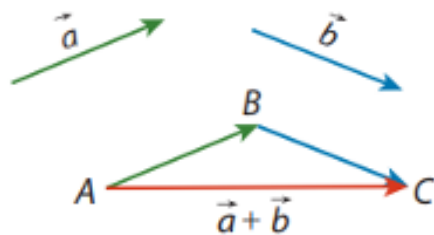
Phép cộng hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

• Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}, \vec{b}$.

• Kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

- Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ*.



Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

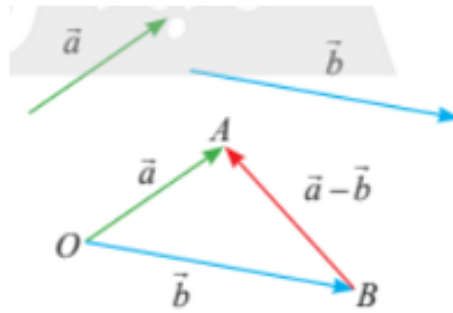
1. Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp, ta xác định được tổng ba vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Phép trừ hai vectơ

Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

- Hiệu của hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$.
- Kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*

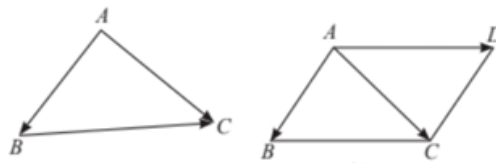


2.1.3 Các quy tắc

Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành

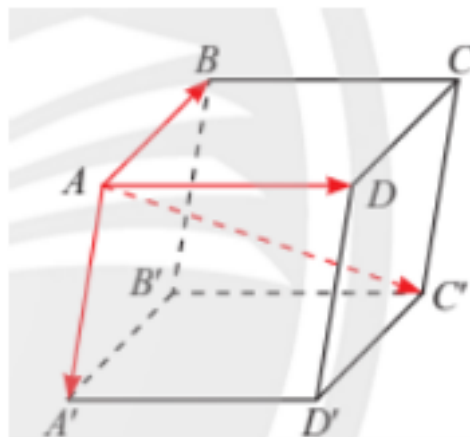
Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc ba điểm phép cộng)

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành)



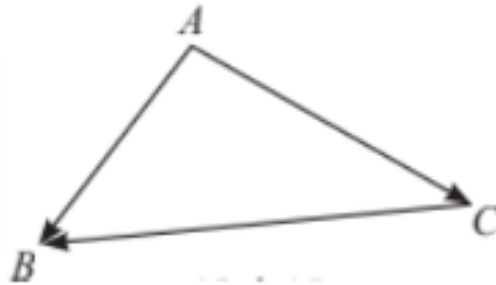
Quy tắc hình hộp

Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



Quy tắc hiệu

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

**2.1.4 Tích của một số với một vectơ****Góc giữa hai vectơ trong không gian**

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

• Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Ta gọi góc BAC là góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

• Kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$

Tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số.
- Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Được xác định bởi công thức:

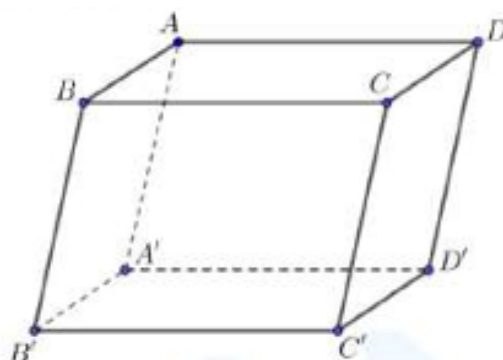
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Chú ý:

- Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$, từ đó suy ra: $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.
- Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

2.1.5 Bài tập luyện tập**Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án**

Câu 226. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$



Vectơ nào sau đây cùng phương với $\overrightarrow{BC}$?

- A. $\overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{DA}$. C. $\overrightarrow{BB'}$. D. $\overrightarrow{C'C}$.

Câu 227. Trong các vectơ sau, vectơ nào sau đây có điểm đầu là A, điểm cuối là B

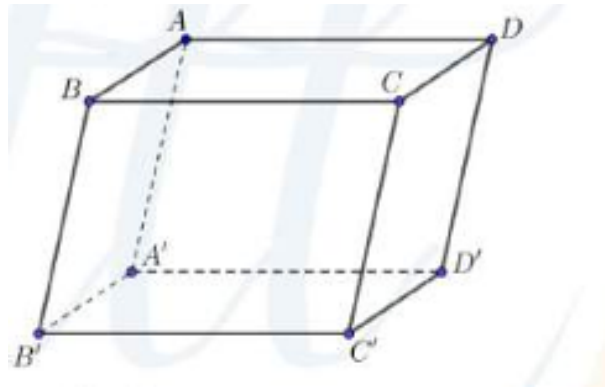
- A. $\overrightarrow{AA}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{BB}$.

Câu 228. Trong không gian cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Vectơ nào trong các vectơ sau đây là vectơ - không?

- A. $\overrightarrow{BB}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{CA}$.

Câu 229. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Vectơ $\overrightarrow{BA}$ bằng với vectơ nào sau đây?



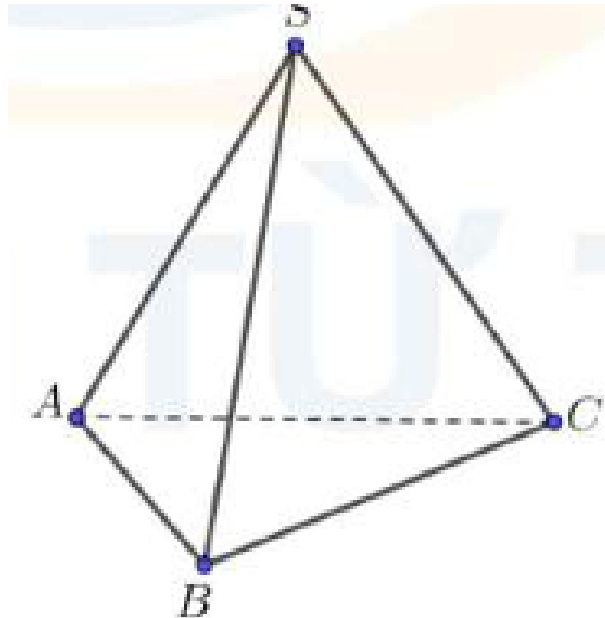
A. $\overrightarrow{A'B'}$.

B. $\overrightarrow{CD}$.

C. $\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB}$.

Câu 230. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB}$?



A. $\overrightarrow{BS}$.

B. $\overrightarrow{BA}$.

C. $\overrightarrow{SB}$.

D. $\overrightarrow{SC}$.

Câu 231. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$

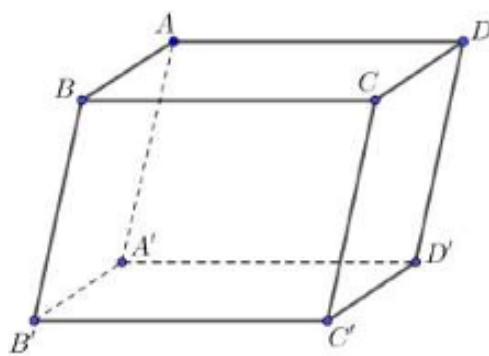
A. $\overrightarrow{DB}$.

B. $\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{CA}$.

Câu 232. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 233. Cho hình chóp $S.ABC$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

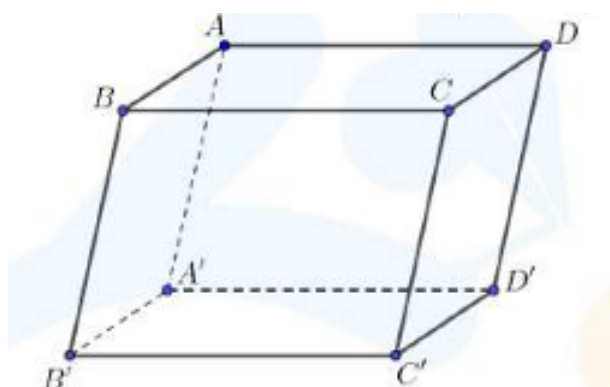
A. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB}$.

B. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BA}$.

D. $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC}$.

Câu 234. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AC'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{CA}$.

Câu 235. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Tính tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ bằng

A. $\vec{0}$.

B. $2\overrightarrow{AD}$.

C. $2\overrightarrow{NM}$.

D. $2\overrightarrow{MN}$.

Câu 236. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'C'}$.

A. $2\overrightarrow{AA'}$.

B. $\vec{0}$.

C. $2\overrightarrow{AC}$.

D. $2\overrightarrow{C'A'}$.

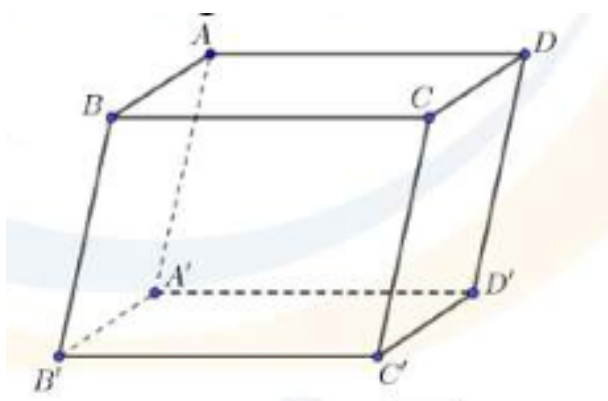
Câu 237. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, góc giữa vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{AD}$ là:

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .



Câu 238. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy là tam giác ABC vuông tại B . Khi đó góc giữa vectơ $\overrightarrow{BA}$ và vectơ $\overrightarrow{B'C'}$ bằng bao nhiêu?

- A. 45° . B. 120° . C. 90° . D. 30° .

Câu 239. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{D'C'}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{B'A'}$.

Câu 240. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. trong các biểu thức vectơ nào sau đây, biểu thức nào **đúng**?

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$. B. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
C. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d} = \vec{0}$. D. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 241. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp để điền vào đẳng thức vectơ $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$

- A. $k = 4$. B. $k = 1$. C. $k = 0$. D. $k = 2$.

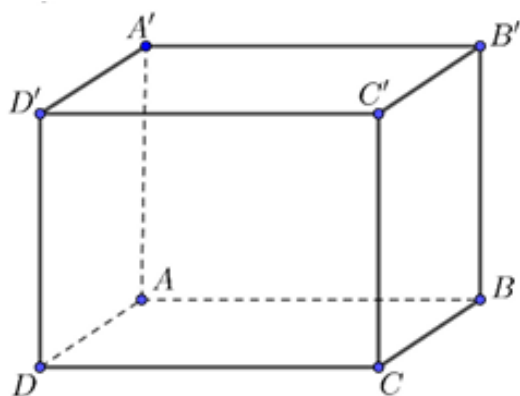
Câu 242. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD ; Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.
C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD})$. D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 243. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi O là trung điểm CH . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. B. $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.
C. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. D. $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$.

Câu 244. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là sai?



A. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'D'}) = 90^\circ$.

B. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'C'}) = 45^\circ$.

C. $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{B'D'}) = 90^\circ$.

D. $(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{CB'}) = 45^\circ$.

Câu 245. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

A. 60° .

B. 90° .

C. 120° .

D. 180° .

Câu 246. Theo định luật II Newton: Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật. m (kg) là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc $20m/s^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



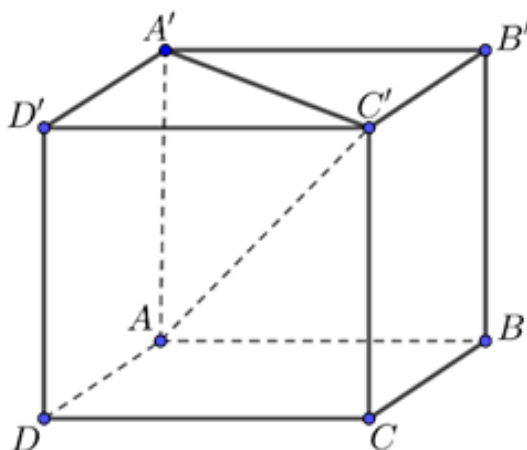
A. $100(N)$.

B. $20(N)$.

C. $25(N)$.

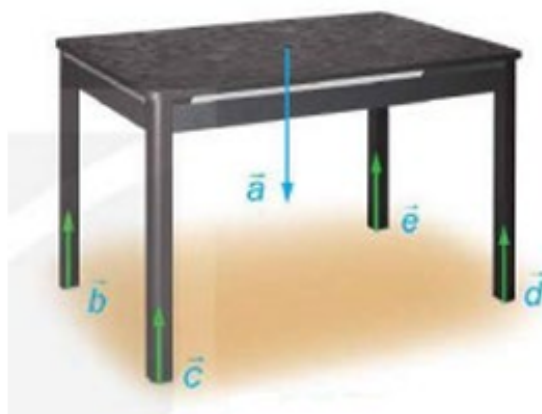
D. $10(N)$.

Câu 247. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với góc $DAB = 120^\circ$. Biết độ dài các cạnh $AB = 25cm$, $AD = 12cm$ và $AA' = 12cm$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}|$



- A. $12(cm)$. B. $\sqrt{469}(cm)$. C. $\sqrt{613}(cm)$. D. $25(cm)$.

Câu 248. Một chiếc bàn học sinh cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như hình vẽ. Trọng lực tác dụng lên bàn được biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$ phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn được biểu thị bởi các vectơ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$.

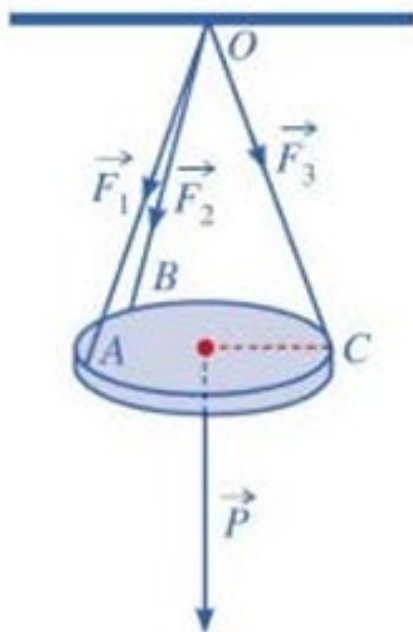


Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Vectơ $\vec{d}$ ngược hướng với $\vec{a}$.
 B. Các vectơ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ cùng phương và ngược chiều với vectơ $\vec{a}$.
 C. Vectơ $\vec{b}$ với vectơ $\vec{a}$ đối nhau .
 D. Các vectơ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ đôi một cùng chiều và cùng độ lớn.

Câu 249. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây

OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 10(N)$ (xem hình vẽ)



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.

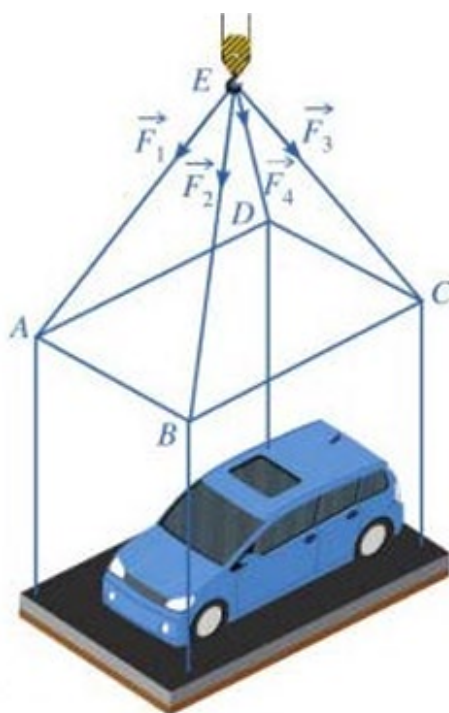
A. $30\sqrt{3}$.

B. 10.

C. $10\sqrt{2}$.

D. $10\sqrt{3}$.

Câu 250. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiến cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, RC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° như hình vẽ. Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ $5000(N)$ và trọng lượng khung sắt $2000(N)$. Trọng lượng của chiếc xe ô tô gần nhất số nào sau đây?



- A. 15321(N). B. 6660(N). C. 5000(N). D. 10000(N).

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 3, A'A = 4$.

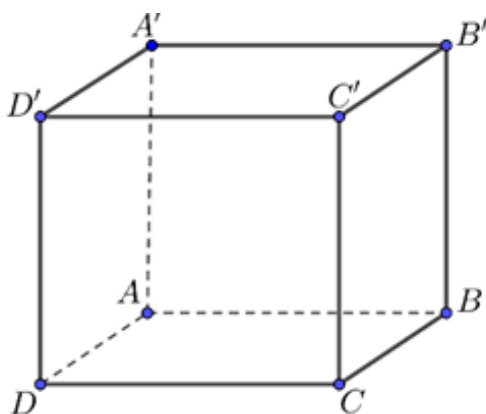
a Vectơ $\overrightarrow{BA'}$ bằng vectơ $\overrightarrow{CD'}$.

b $|\overrightarrow{BA'}| = |\overrightarrow{A'D}| = |\overrightarrow{DB}|$.

c Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp là A_8^2

d Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BD'}$ bằng $3\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$



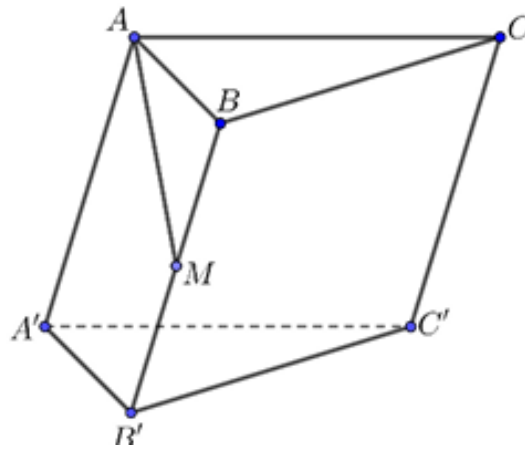
a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C}.$

b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'A}.$

c $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D'B'}.$

d $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}.$

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' và G là trọng tâm của tam giác ABC .



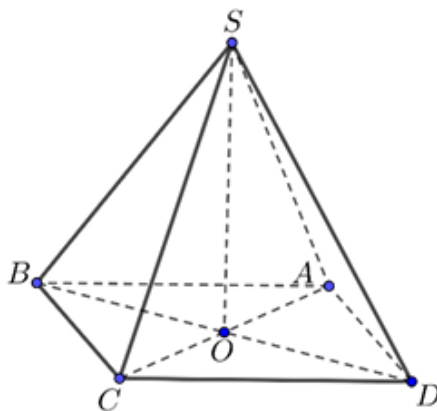
a $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

b $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'B}$.

c $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$.

d $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy $ABCD$, cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình bên)



a Góc giữa vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ là 0° .

b Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BO}$ là 180° .

c Cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CS}$ bằng $\frac{1}{4}$.

d Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{SD}$ bằng 60° .

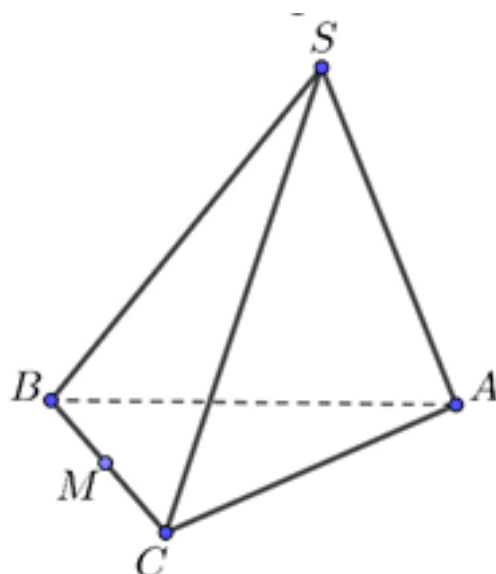
Câu 5: Cho tứ diện đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a , M là trung điểm của cạnh BC

a $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$.

b $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

c Góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 90° .

d $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.



Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, từ các đỉnh của hình hộp đã cho, có bao nhiêu vectơ đối (khác vectơ không) của vectơ $\overrightarrow{AB}$? KQ:

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Biết rằng $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng: KQ:

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Giá trị tan của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng (làm tròn tới hàng phần nghìn) KQ:

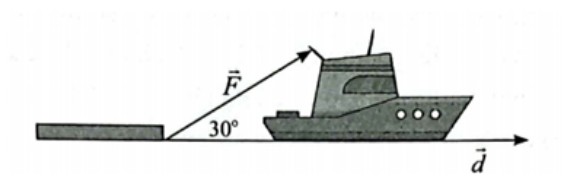
Câu 4: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{y} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}, \vec{z} = \vec{a} + 4\vec{b} + m\vec{c}$. Giá trị của m để các vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng bằng? KQ:

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$? KQ:

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng KQ:

Câu 7: Một tàu kéo một xà lan trên biển di chuyển được $3km$ với một lực kéo có cường độ $2000N$ và có phương hợp với phương dịch chuyển một góc 30° . Tính công thực hiện bởi lực kéo nói trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của Jun) KQ:

Câu 8: Một chiếc cần cầu, cầu tám kim loại có trọng lực $2000(N)$, được thiết kế



với tấm kim loại được giữ bởi ba đoạn cáp AB, AC, AD sao cho $AB = AC = AD$ và BCD là tam giác đều, đồng thời các cạnh AB, AC, AD tạo với mặt phẳng (BCD) một góc 30^0 (xem hình vẽ). Tìm số lớn của lực căng của mỗi sợi dây cáp. KQ:

--	--	--	--	--

BÀI 2: TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

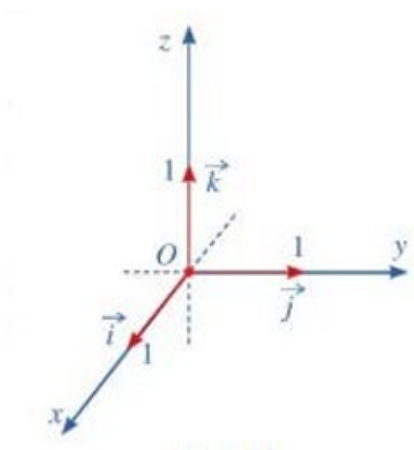
2.2 Tọa độ vectơ trong không gian

2.2.1 Hệ tọa độ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc.

- Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .
- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.



Chú ý:

- Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các **vectơ đơn vị** trên các trục Ox, Oy, Oz .
- Trong không gian $Oxyz$, ta gọi :
 - + Điểm $O(0; 0; 0)$ là **gốc tọa độ**
 - + Trục Ox : **trục hoành** , trục Oy : **Trục tung**, Trục Oz : **trục cao**.
 - + Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.
- Các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ đôi một vuông góc nhau.

2.2.2 Tọa độ của điểm và vectơ

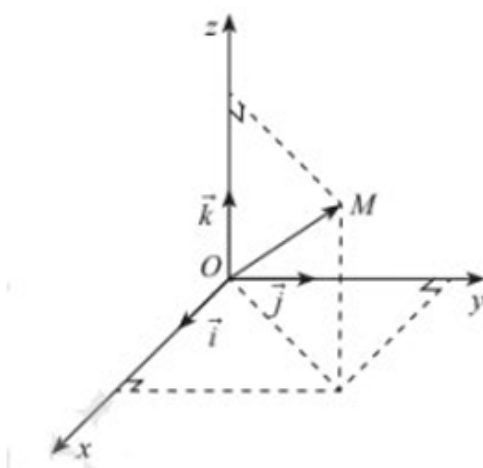
Tọa độ điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M .

- Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$.
- Viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$.

Trong đó:

- x là hoành độ,
- y là tung độ,
- z là cao độ của điểm M .



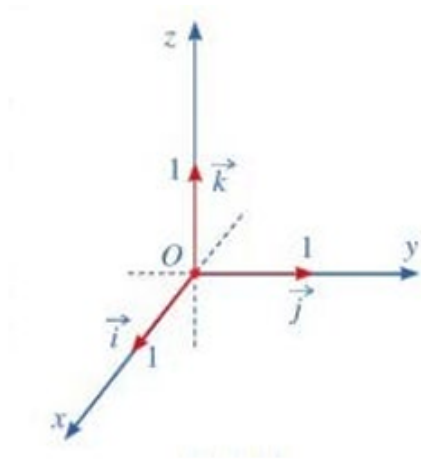
Tọa độ vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$.

- Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$.
- Viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Trong đó:

- a_1 là hoành độ,
- a_2 là tung độ,
- a_3 là cao độ của vectơ $\vec{a}$.



Chú ý:

Trong không gian $Oxyz$, ta có:

- Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Ngược lại, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

- Tọa độ của điểm M là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$:

$$M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$$

- Điều kiện hai vectơ bằng nhau: Cho $\vec{a} = (x; y; z)$, $\vec{b} = (x'; y'; z')$, khi đó $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- Vectơ đơn vị trên trục Ox có tọa độ là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
- Vectơ đơn vị trên trục Oy có tọa độ là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
- Vectơ đơn vị trên trục Oz có tọa độ là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Chiếu điểm trên trục tọa độ

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$:

- Chiếu vào trục Ox (giữ nguyên x): $M_1(x_M; 0; 0)$
- Chiếu vào trục Oy (giữ nguyên y): $M_2(0; y_M; 0)$
- Chiếu vào trục Oz (giữ nguyên z): $M_3(0; 0; z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$:

- Chiếu vào mặt phẳng Oxy (giữ nguyên x, y): $M_1(x_M; y_M; 0)$
- Chiếu vào mặt phẳng Oyz (giữ nguyên y, z): $M_2(0; y_M; z_M)$
- Chiếu vào mặt phẳng Oxz (giữ nguyên x, z): $M_3(x_M; 0; z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$:

- Đối xứng qua trục Ox (giữ nguyên x , đổi dấu y, z): $M_1(x_M; -y_M; -z_M)$
- Đối xứng qua trục Oy (giữ nguyên y , đổi dấu x, z): $M_2(-x_M; y_M; -z_M)$
- Đối xứng qua trục Oz (giữ nguyên z , đổi dấu x, y): $M_3(-x_M; -y_M; z_M)$

Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$:

- Đối xứng qua mặt phẳng Oxy (giữ nguyên x, y , đổi dấu z):
 $M_1(x_M; y_M; -z_M)$
- Đối xứng qua mặt phẳng Oxz (giữ nguyên x, z , đổi dấu y):
 $M_2(x_M; -y_M; z_M)$
- Đối xứng qua mặt phẳng Oyz (giữ nguyên y, z , đổi dấu x):
 $M_3(-x_M; y_M; z_M)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định tọa độ điểm M trong các trường hợp sau

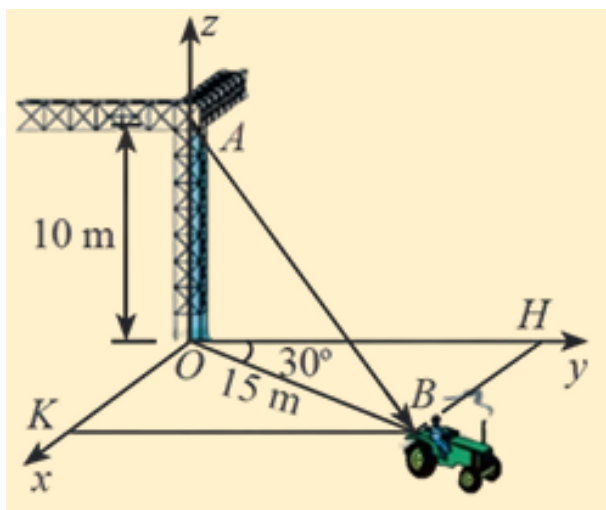
a $\overrightarrow{MO} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.

b $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} + \vec{i}$ với $A(2; -3; 1)$

Bài tập 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5. Chọn hệ trục tọa độ gốc O trùng với A ; các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . xác định tọa độ các điểm B, C, C' .

Bài tập 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1; 1; 1), N(2; 3; 4), P(7; 7; 5)$. Tìm tọa độ điểm Q để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài tập 4: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình bên dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$



Bài tập 5: Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M .

Bài tập 6: Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (hình vẽ). k) Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam

với tốc độ không đổi là 890km/h trong nửa giờ. Xác định tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ được lấy theo kilômét



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 251. Trong không gian $Oxyz$ giả sử $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ điểm M là

- A. $(-2; 3; 1)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(2; 3; -1)$. D. $(2; 3; 1)$.

Câu 252. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tọa độ điểm A là

- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(-3; 2; -1)$. D. $(2; -1; -3)$.

Câu 253. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oy ?

- A. $M(0; 5; 0)$. B. $N(4; 0; 0)$. C. $P(0; 0; 6)$. D. $Q(4; 5; 0)$.

Câu 254. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)

- A. $N(0; 4; -1)$. B. $(-2; 0; 3)$. C. $M(3; 4; 0)$. D. $(2; 0; 0)$.

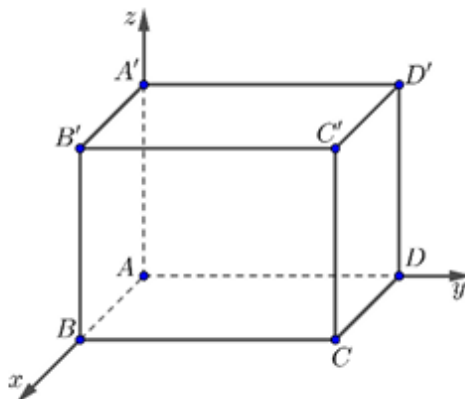
Câu 255. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -1; 0)$ và $B(1; 1; -3)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(1; -2; 3)$. C. $(-1; -2; 3)$. D. $(1; -2; 3)$.

Câu 256. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ và $B(2; 1; 4)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{BA}$ là

- A. $(0; -4; 0)$. B. $(4; -2; 8)$. C. $(-1; -1; 2)$. D. $(-2; -2; 4)$.

Câu 257. Trong không gian $Oxyz$ cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1 như hình vẽ.



Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ là

- A. $(1; 1; 0)$. B. $(0; 1; 1)$. C. $(1; 0; 1)$. D. $(1; 1; 1)$.

Câu 258. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(2; 1; 4)$ lên trục Ox là

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(0; 1; 0)$. C. $(0; 0; 4)$. D. $(0; 1; 4)$.

Câu 259. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(-2; 1; 4)$ lên Oyz là

- A. $(-2; 0; 0)$. B. $(0; 1; 0)$. C. $(0; 0; 4)$. D. $(0; 1; 4)$.

Câu 260. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-3; 5; 1)$.

Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

- A. $(-2; 8; -3)$. B. $(-2; 2; 5)$. C. $(-4; 8; -5)$. D. $(-4; 8; -3)$.

Câu 261. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1;$

Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp

- A. $A'(3; 4; -6)$. B. $(4; 6; -5)$. C. $(2; 0; 2)$. D. $A(3; 5; -6)$.

Câu 262. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -2; 1)$ và $\vec{b} = (x - 1)\vec{i} + (x^2 - 3)\vec{j} + y\vec{k}$. Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì giá trị của $x - y$ bằng ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. -1.

Câu 263. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $M(x - 1; 2y - 2; 7)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxy) . Khi tứ giác $OBM'A$ là hình bình

hành thì giá trị $x + y$ bằng?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. -1.

Câu 264. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là

- A. $P(0; 2; 3)$. B. $P(1; 0; 3)$. C. $N(0; 2; 0)$. D. $Q(1; 2; 0)$.

Câu 265. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$. Điểm đối xứng với A qua trục Oz có tọa độ là

- A. $(1; 2; -3)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(0; 0; 03)$. D. $(-1; 2; 3)$.

Câu 266. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3); B(2; 3; -4); C(-3; 1; 2)$. Điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là

- A. $D(-4; -2; 9)$. B. $D(4; 2; 9)$. C. $D(6; 2; -3)$. D. $D(-2; 4; 5)$.

Câu 267. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ lên trục Ox có tọa độ là

- A. $(0; 5; 2)$. B. $(0; 5; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 0; 2)$.

Câu 268. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ lên trục Oy có tọa độ là

- A. $(3; 0; -1)$. B. $(0; 1; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 0; -1)$.

Câu 269. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ lên trục Oz có tọa độ là

- A. $(3; -1; 0)$. B. $(0; 0; 1)$. C. $(0; -1; 0)$. D. $(3; 0; 0)$.

Câu 270. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(0; 2; -3)$. B. $(1; 0; -3)$. C. $(1; 2; 0)$. D. $(1; 0; 0)$.

Câu 271. Trong không gian $Oxyz$ hình chiếu của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

- A. $(0; 1; 0)$. B. $(2; 1; 0)$. C. $(0; 1; -1)$. D. $(2; 0; -1)$.

Câu 272. Trong không gian $Oxyz$ điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng (Oyz) ?

- A. $M(3; 4; 0)$. B. $P(-2; 0; 3)$. C. $Q(2; 0; 0)$. D. $N(0; 4; -1)$.

Câu 273. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ điểm A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy

- A. $A'(2; 3; 5)$. B. $A'(2; -3; -5)$. C. $A'(-2; -3; 5)$. D. $A'(-2; -3; -5)$.

Câu 274. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; -\sqrt{2}; -\sqrt{3})$. Tìm điểm $M' \in Ox$ sao cho độ dài đoạn thẳng MM' ngắn nhất/

- A. $M'(-1; 0; 0)$. B. $M'(1; 0; 0)$. C. $M'(1; 0; \sqrt{3})$. D. $M'(1; -\sqrt{2}; 0)$.

Câu 275. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C'(10; 4; 4)$. Tìm tọa độ điểm C'

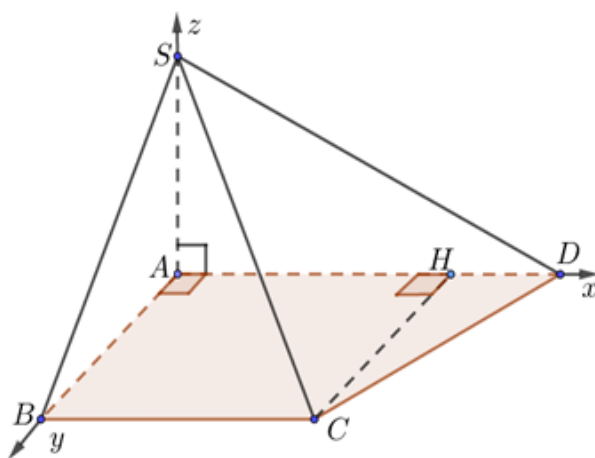
- A. $C'(10; 4; 4)$. B. $C'(-13; 4; 4)$. C. $C'(13; 4; 4)$. D. $C'(7; 4; 4)$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1; 1; 2)$, $B(1; 0; 3)$, $C(0; 2; -3)$.

- a Tọa độ vectơ $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -5)$.
b Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
c Tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$.
d Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD .



- a Tọa độ các điểm A, B là $A(0; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$.

b Tọa độ các điểm C, D là $C(a; a; 0), D(2a; 0; 0)$.

c Tọa độ điểm S là $S(0; 0; 2a)$.

d Tọa độ điểm H là $H(a; 0; 0)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 4; 6)$ và $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} + \vec{k}$.

a Tọa độ điểm $N(2; 1; 0)$.

b Hình chiếu vuông góc của M lên trục Oz là điểm $M'(0; 0; 6)$.

c Hình chiếu vuông góc của M trên mặt (Oxy) là điểm $N(2; 4; 0)$.

d Đối xứng với điểm M qua mặt (Oyz) là điểm $K(-2; 0; 0)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $OABC$ với $A(1; 2; 3), B(5; 0; -1)$ và $C(a; b; c)$.

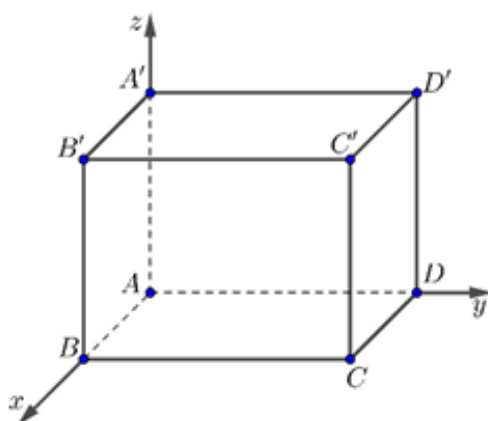
a Tọa độ điểm $O(0; 0; 1)$.

b Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA} = (1; 2; 3)$.

c $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} - \vec{k}$.

d Nếu $OABC$ là hình bình hành thì $a + b + c = 2$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0), B(3; ; 0; 0), D(0; 3;$



a $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j}$.

b $A'(0; 0; 3)$.

c M là trung điểm DD' . Khi đó, tọa độ điểm $M(0; 3; -3)$.

d Tọa độ điểm $C'(3; 3; 0)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

a Tọa độ điểm M là $(2; 1; 1)$.

b Hình chiếu của điểm M lên trục Ox là $(2; 1; 0)$.

c Hình chiếu của điểm M lên trục Oy là $(0; 1; 0)$.

d Hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (Oxy) là $(2; 0; 1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 4 đỉnh A trùng với gốc O , các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz

a Tọa độ điểm D là $(4; 0; 0)$.

b Tọa độ của $\overrightarrow{OC}$ là $(0; 4; 0)$.

c Tọa độ của $\overrightarrow{OA'}$ là $(0; 0; 4)$.

d Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OC'}$ là $(4; 4; 4)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$. cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1;$

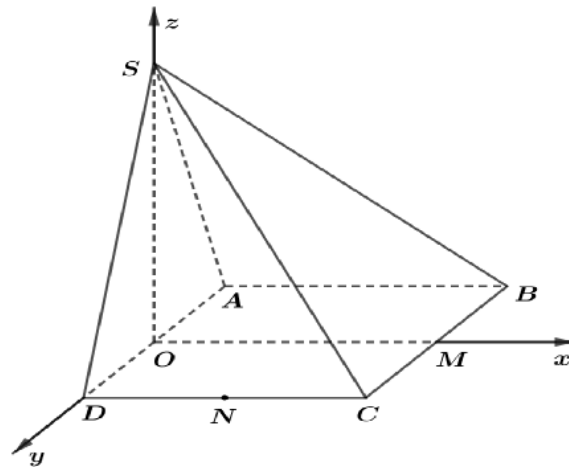
a Tọa độ $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$.

b Tọa độ $C(2; 1; 2)$.

c Tọa độ $A'(3; 5; -6)$.

d Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(3; 4; -3)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ như hình vẽ.



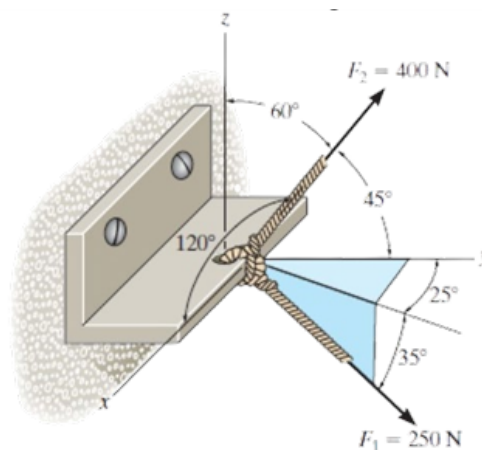
a Tọa độ các điểm A, B là $A(0; -\frac{1}{2}; 0), B(1; -\frac{1}{2}; 0)$.

b Tọa độ các điểm C, D là $C(1; \frac{1}{2}; 0), D(0; \frac{1}{2}; 0)$.

c Tọa độ điểm S là $S(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

d Tọa độ các điểm M, N là $M(1; 0; 0)N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$.

Câu 10: Dưới đây là một giá đỡ chịu hai lực. Biểu diễn từng lực dưới dạng vectơ Descartes



a $\vec{F}_2 = -200\vec{i} + 281\vec{j} + 200\vec{k}$.

b $\vec{F}_1 = 86,547\vec{i} + 185,601\vec{j} - 143,394\vec{k}$.

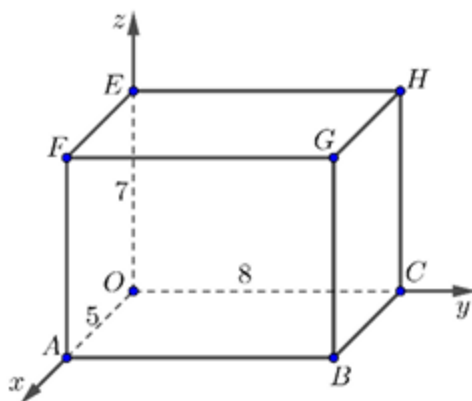
c Độ lớn lực tổng hợp lên giá đỡ bằng $485,297N$.

d Góc tạo bởi lực tổng hợp lên trục Oy là $16,145^\circ$.

Phần III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. Tọa độ $A(x; y; z)$ tính giá trị của biểu thức $S = 100x + 1000y + 10z$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.EFGH$ có các cạnh $OA = 5, OC = 8, OE = 7$ (xem hình vẽ dưới đây). Tọa độ $H(x; y; z)$. Tính giá trị của biểu thức $P = 50x + 75y + 1000z$. KQ:



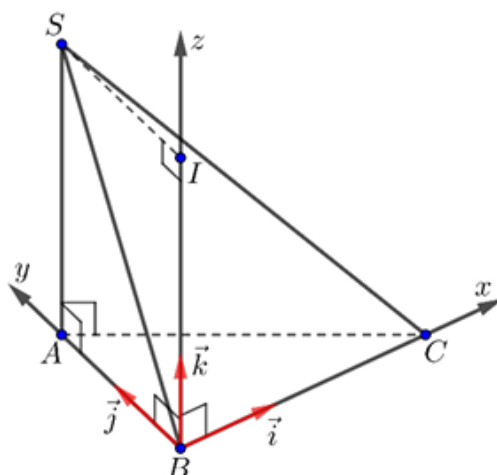
Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 2; 1), B(-2; -1; 4)$. Gọi M là điểm thỏa đẳng thức $\vec{AM} = 2\vec{MB}$. Tìm độ dài vectơ $\vec{OM}$. KQ:

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(3; 2; 1), B(-1; 0; 5)$. Điểm $(a; b; c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ khi $|\vec{MA} + \vec{MB}|$ nhỏ nhất. KQ:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 0; 2), B(-1; 2; 2), C(3; 1; 1)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $S = 2\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + 3\vec{MC} \cdot \vec{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 6a - 5b + 3c$ có giá trị là KQ:

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0), B(3; 0; 0), D(0; 3; 0)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ và tọa độ vectơ $\vec{AG} = (a; b; c)$. Tính $S = a + b + c$. KQ:

Câu 7: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B $SA = BC = 3, BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Chọn hệ trục tọa độ như hình bên dưới. Điểm $D(a; b; c)$ sao cho $SBCD$ là hình bình hành. Khi đó $a + b + c$ bằng bao nhiêu?



KQ:

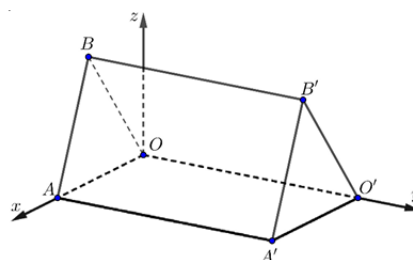
Câu 8: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$. Tính $x + y + z$. KQ:

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ và các điểm $A(2; 3; 1)$, $C(-1; 2; 3)$ và $O'(1; -2; 2)$. Vectơ $\vec{d} = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA'} + \vec{OB'}$ có tọa độ là $(a; b; c)$. Tính $a + b + c$. KQ:

Câu 10: Những căn nhà gỗ trong *Hình 1* được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong *Hình 2*. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như *Hình 2* (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a + b + c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị). KQ:



Hình 1



Hình 2

BÀI 3: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN

2.3 Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

2.3.1 Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Khi đó:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

Nhận xét: Hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\vec{a} = k\vec{b} \iff \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases}$.

Chú ý: Từ nay, các bài tập liên quan đến tọa độ đều được xét trong không gian $Oxyz$.

2.3.2 Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

2.3.3 Vận dụng

Tọa độ điểm đầu cuối

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Tọa độ trung điểm đoạn thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Tọa độ trọng tâm tam giác

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác $\triangle ABC$ là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

2.3.4 Các dạng bài tập**Dạng 1: Tọa độ tổng hiệu vectơ**

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (2; -1; 5)$ và $\vec{b} = (0; -2; 4)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $5\vec{a}$, $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Bài tập 2: Trong không gian xyz , cho ba điểm $A(-1; -3; -2), B(2; 3; 4)$ và $C(3; 5; 7)$. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C tạo thành tam giác.

Dạng 2: Tọa độ điểm - vectơ thỏa điều kiện

1. Tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

2. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

3. I là trung điểm AB :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) \Rightarrow I\vec{A} + I\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \forall M : \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$$

4. G là trọng tâm $\triangle ABC$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \forall M : \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$$

5. G là trọng tâm chóp $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Rightarrow \forall M : \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$$

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(3; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ và $C(1; 2; -1)$.
Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}$ thỏa $\vec{u} = \vec{BC} - 3\vec{AO}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ và $C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\vec{AB} = 2\vec{DC}$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(2; 2; 2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Xác định tọa độ trung điểm I của MN .

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(0; -2; 3)$.
Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB .

Dạng 3: Độ dài vectơ

1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = \left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$
2. Độ dài vectơ $\vec{a} : |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \rightarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2.$

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$ và $B(0; 3; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; -1), B(2; 1; -1); C(1; -2; 2)$. Tính chu vi của tam giác ΔABC .

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0), B(0; 3; 1), C(-3; 6; 4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm độ dài đoạn AM .

Dạng 4: Sự cùng phương của hai vectơ

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $b = (b_1; b_2; b_3)$

$$1. \text{ Hai vectơ bằng nhau: } \vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}.$$

$$2. \text{ Vectơ } \vec{a} \text{ cùng phương vectơ } \vec{b} : \vec{a} = k\vec{b} \iff \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}.$$

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (4; 1; 2); \vec{b} = (1; -2; -1); \vec{c} = (8; 2; -4)$. Vectơ $\vec{a} = (4; 1; -2)$ cùng phương với vectơ nào đã cho.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5), B(5; -5; 7), M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

Dạng 5: Tích vô hướng và ứng dụng

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, ta có:

1. Tích vô hướng hai vectơ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai vectơ:

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}$$

Chú ý:

- Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) > 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn,
- Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

2. Vectơ $\vec{a}$ vuông góc vectơ $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

► Bài toán liên quan giữa độ dài và tích vô hướng:

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = m$; $|\vec{v}| = n$ và tạo với nhau một góc α .

Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$ hoặc $|\vec{u} - \vec{v}|$ tùy vào yêu cầu bài toán.

Hướng giải quyết:

- Biến đổi

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

- Áp dụng:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Để biến đổi:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \quad (*)$$

- Lắp các dữ kiện giả thiết vào $(*) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = ?$

Dạng 6: Tâm tỷ cự

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và các hệ số $k_1, k_2, \dots, k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) . Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) sao cho

$$|k_1 \overrightarrow{MA_1} + k_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{MA_n}|$$

nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

• » **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \overrightarrow{IA_1} + k_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

• » **Bước 2:** Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$|k_1 \overrightarrow{MA_1} + k_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{MA_n}| = |(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \overrightarrow{MI}| = |k| \cdot |\overrightarrow{MI}|$$

• » **Bước 3:** Tìm độ dài nhỏ nhất của các vectơ đã cho xảy ra khi M chạy ở vị trí nào?

► Bài toán cực trị độ dài bình phương vectơ:

Cho đa giác $A_1, A_2, \dots, A_n$ và các hệ số $k_1, k_2, \dots, k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0$.

Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) sao cho tổng

$$S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

• » **Bước 1:** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \overrightarrow{IA_1} + k_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

• » **Bước 2:** Thấy rằng:

$$MA_i^2 = |\overrightarrow{MA_i}|^2 = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_i}|^2 = MI^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_i}) + IA_i^2$$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\begin{aligned}
 S &= k_1 MA_1^2 + k_2 MA_2^2 + \dots + k_n MA_n^2 \\
 &= k_1 \left(MI^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + IA_1^2 \right) + \dots + k_n \left(MI^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_n}) + IA_n^2 \right) \\
 &= (k_1 + \dots + k_n) MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (k_1 \overrightarrow{IA_1} + \dots + k_n \overrightarrow{IA_n}) + \sum_{i=1}^n k_i IA_i^2 \\
 &= k \cdot MI^2 + 0 + \sum_{i=1}^n k_i IA_i^2
 \end{aligned}$$

1. » **Bước 3:** Do $k > 0$, để S đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

» **Chú ý:** Cho đa giác $A_1, A_2, \dots, A_n$ và các hệ số $k_1, k_2, \dots, k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n < 0$.

Tìm điểm M trên d hoặc (P) sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -3; 7), B(0; 4; 1), C(3; 0; 5)$ và $D(3; 3; 3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó xác định tọa độ điểm M .

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, B(2; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 276. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 5; 0)$ và $\vec{v} = (1; -5; -3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A. $(2; -10; 3)$. B. $(2; 10; 3)$. C. $(0; 0; -3)$. D. $(2; 0; 3)$.

Câu 277. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 5; 2)$ và $\vec{b} = (1; -3; -1)$, vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; -2; 3)$. B. $(-3; 8; 3)$. C. $(-1; 2; 1)$. D. $(3; -8; -3)$.

Câu 278. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-2; 6; 2)$, vectơ $\frac{3}{2}\vec{a}$ có tọa độ là

- A. $(-6; 9; 6)$. B. $(-3; 9; 3)$. C. $(6; 9; 6)$. D. $(-3; 6; 3)$.

Câu 279. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -1; 0)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$, $\vec{c} = (-2; -4; -3)$, tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ là

- A. $(5; 3; -9)$. B. $(-5; -3; 9)$. C. $(-3; -7; -9)$. D. $(3; 7; 9)$.

Câu 280. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của $\vec{b}$ sao cho thỏa mãn đẳng thức $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$?

- A. $\vec{b} = (-1; 2; -1)$. B. $\vec{b} = (-2; 1; -1)$.
C. $\vec{b} = (1; -2; 1)$. D. $\vec{b} = (1; 2; 1)$.

Câu 281. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$. B. $(2; -2; 0)$. C. $(0; -2; 1)$. D. $(0; 0; 1)$.

Câu 282. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 2)$ và $N(1; 0; 4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là

- A. $(1; -1; 3)$. B. $(0; 2; 2)$. C. $(2; -2; 6)$. D. $(1; 0; 3)$.

Câu 283. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1; -1; -3)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 3)$. D. $(3; 3; -1)$.

Câu 284. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy

- A. $A'(2; 3; 5)$. B. $A'(2; -3; -5)$. C. $A'(-2; -3; 5)$. D. $A'(-2; -3; -5)$.

Câu 285. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 2)$ và $B(3; -1; 4)$. Tọa độ vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB}$

- A. $(-7; 7; -8)$. B. $(-7; 3; -8)$. C. $(-7; 5; -8)$. D. $(-7; 9; -8)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$.

a $\vec{a} + \vec{b} = (-3; 6; -1)$.

b $\vec{a} - \vec{b} = (3; -6; 1)$.

c $3\vec{b} = (-3; 15; 6).$

d $2\vec{a} - \vec{b} = (5; -7; 4).$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; -2)$, $\vec{c} = (m; -2; 4).$

a $-2\vec{a} + \vec{b} = (-5; -2; -2).$

b $\vec{b} \perp \vec{c} \iff m = 8.$

c $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}.$

d $|\vec{c}| = 2|\vec{a}| \iff m = 0$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC biết $A(-1; 0; 3)$, $B(4; 2; 0)$, $C(3; 1; -3)$

a $G(2; 1; 0)$ là trọng tâm tam giác ABC .

b $D(-2; -1; 0)$ là một đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

c $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CB}$. Khi đó $a + b + c = -13$.

d $M(a; b; c) \in Ox$ sao cho BM vuông góc với đường thẳng AC . Khi đó $4a^2 + b^2 + c^2 = 162$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; 5; 4)$, $C(0; 2; 0)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

a Khi vecto $\vec{v} = (1; 3; -2n)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ thì n có giá trị là $-\frac{1}{2}$.

b Khi $ABCD$ là hình bình hành thì $D(-1; -1; -1)$.

c Với điểm $E(x; y; -2)$ để A, B, E thẳng hàng thì $x + y = -\frac{1}{2}$.

d Điểm $M \in (Oxy)$ sao cho A, B, M thẳng hàng có tọa độ là $M(-2; 7; 0)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(-1; 3; -1)$, $C(5; -3; 4)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

a Tích vô hướng của vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng -52 .

b Góc ABC là góc tù.

c Côsin giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ bằng $\frac{-23}{\sqrt{638}}$.

d Điểm $D(1; 2; x)$ với $\triangle ABD$ vuông tại B thì giá trị $x = -6$.

Phần III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1; 2; -1), C(3; -4; 1), B'(2; -1; 3), D'(0; 3; 5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x; y; z)$ thì $x + y + z$ bằng KQ:

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(1; 2; -3)$ và $C(7; 4; -2)$. Gọi $E(x; y; z)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ khi đó $x + y + z$ bằng KQ:

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 0; 0), B(0; 3; 1), C(-3; 6; 4)$. Gọi điểm M nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn AM (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) KQ:

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$. KQ:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$ và $\vec{v} = (1; 0; m)$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 45° . Số phần tử của S bằng bao nhiêu? KQ:

2.4 Ôn tập chương 2

Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 286. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 5; -3), \vec{b} = (4; -4; -6)$. Tọa độ vectơ $-2\vec{a} - 3\vec{b}$ là

- A. $(8; -19; 10)$. B. $(2; 1; -9)$. C. $(-8; 2; 24)$. D. $(10; 2; 15)$.

Câu 287. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ có điểm đầu và điểm cuối của hình hộp bằng vectơ $\overrightarrow{B'D'}$ là vectơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{D'B'}$. C. $\overrightarrow{BA'}$. D. $\overrightarrow{BD}$.

Câu 288. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $P(-1; -8; 10)$ và $Q(-6; -1; -3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{PQ}$ là

- A. $(-5; 7; 7)$. B. $(6; 8; 30)$. C. $(5; -7; -7)$. D. $(-7; -9; -13)$.

Câu 289. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{v} = (-1; 6; 3)$ và điểm A . Biết vectơ $\vec{OA} = \vec{v}$. Tọa độ của điểm A là

- A. $(1; -6; 3)$. B. $(-1; 6; 3)$. C. $(-1; -6; -3)$. D. $(-1; 6; 0)$.

Câu 290. Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BD}$. B. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.
C. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CA}$. D. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD}$.

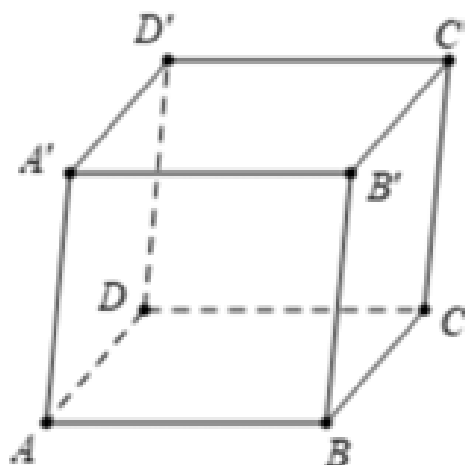
Câu 291. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ đối của vectơ $\vec{AA'}$ là

- A. $\vec{A'C'}$. B. $\vec{C'C}$. C. $\vec{BB'}$. D. $\vec{BA'}$.

Câu 292. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

- A. $(3; -2; 1)$. B. $(-1; 2; -3)$. C. $(2; -3; -1)$. D. $(1; -2; 3)$.

Câu 293. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình vẽ). Phát biểu nào sau đây đúng?



- A. $\vec{AB} + \vec{BB'} + \vec{B'A'} = \vec{AC'}$. B. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{C'D'} = \vec{AC'}$.
C. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$. D. $\vec{AB} + \vec{AA'} + \vec{AD} = \vec{AC'}$.

Câu 294. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{CD'}$ bằng

- A. 30° . B. 135° . C. 45° . D. 60° .

Câu 295. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I(-2; 2; 1)$. B. $I(1; 0; 4)$. C. $I(2; 0; 8)$. D. $I(2; -2; -1)$.

Câu 296. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; 1; -3), C(-3; 5; 1)$. Tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

- A. $D(-4; 6; 3)$. B. $D(-2; 2; 5)$. C. $D(-2; 8; -3)$. D. $D(-4; 6; -5)$.

Câu 297. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 3; 5), B(2; 0; 1), C(0; 9; 0)$. Tọa độ trong tâm G của $\triangle ABC$ là

- A. $(3; 12; 6)$. B. $(1; 5; 2)$. C. $(1; 0; 5)$. D. $(1; 4; 2)$.

Câu 298. Trong không gian $Oxyz$, gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -1; 0), \vec{v} = (\sqrt{3}; 1; 0)$. Giá trị của α là

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 299. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -2; 1)$ độ dài vectơ $\vec{u}$ bằng

- A. 9. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 300. Khoảng cách giữa hai điểm $I(1; 4; -7)$ và $K(6; 4; 5)$ là

- A. 169. B. 13. C. 26. D. 65.

Câu 301. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-1; 2; 3), B(1; 0; 2)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{AB} = 2\vec{MA}$ là

- A. $M(-2; 3; \frac{7}{2})$. B. $M(-2; -3; \frac{7}{2})$. C. $M(-2; 3; 7)$. D. $M(-4; 6; 7)$.

Câu 302. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -1; 1), B(-1; 3; -1), C(5; -3; 4)$. Tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ có giá trị bằng

- A. 48. B. 52. C. -48. D. -52.

Câu 303. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Khẳng định nào sai ?

- A. $\vec{BG} + \vec{CG} + \vec{DG} = \vec{0}$. B. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}$.
C. $\vec{BC} + \vec{BD} = 3\vec{BG}$. D. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

Câu 304. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của CC' . Vectơ $\vec{AM}$ bằng

- A. $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$. B. $\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA'}$.
C. $\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA'}$. D. $\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$.

Câu 305. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sai?

- A. $\vec{AB} + \vec{CC'} = \vec{AB'}$. B. $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 306. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết tọa độ hình chiếu của điểm A lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $M(1; 0; 0), N(0; -2; 0), P(0; 0; 3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$ là

A. $(1; -2; 3)$.

B. $(1; 2; 3)$.

C. $(-1; 2; -3)$.

D. $(-1; 2; 3)$.

Câu 307. Cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc A lên mặt phẳng (Oxy) là

A. $(3; 0; 0)$.

B. $(0; -1; 1)$.

C. $(0; -1; 0)$.

D. $(0; 0; 1)$.

Câu 308. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-3; 2; -1)$. Điểm đối xứng M qua mặt phẳng (Oxy) có tọa độ

A. $(-3; 2; 1)$.

B. $(3; 2; 1)$.

C. $(3; 2; -1)$.

D. $(3; -2; -1)$.

Câu 309. Hình chiếu vuông góc điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2; 1; 0)$.

B. $(0; 0; -1)$.

C. $(2; 0; 0)$.

D. $(0; 1; 0)$.

Câu 310. Cho điểm $A(-3; 1; 2)$, điểm đối xứng A qua trục Oy có tọa độ là:

A. $(3; -1; -2)$.

B. $(3; -1; 2)$.

C. $(3; 1; -2)$.

D. $(-3; -1; 2)$.

Câu 311. cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài bằng 1. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}$.

A. 1.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 312. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $8m$, chiều rộng là $7m$ và chiều cao là $3,2m$. Tại vị trí chính giữa trần nhà của phòng học được gắn một chiếc quạt trần. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn (hình vẽ), đơn vị đo được lấy theo mét. Tìm tọa độ điểm gắn quạt.

A. $(3, 5; 4; 3, 2)$.

B. $(4; 3, 5; 3, 2)$.

C. $(4; 3, 5; 1, 6)$.

D. $(3, 5; 4; 1, 6)$.

Câu 313. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-4; 0; 6)$. Tọa độ của điểm B là

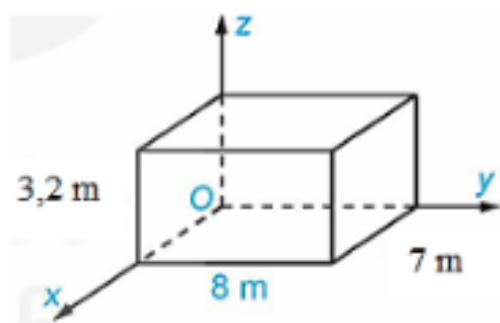
A. $(-1; 6; -6)$.

B. $(5; 2; -10)$.

C. $(-3; 2; 2)$.

D. $(0; 4; -5)$.

Câu 314. Trong không gian $Oxyz$ cho hình vuông $ABCD$ có $B(3; 0; 8), D(-5; -4; 0)$. Độ dài cạnh của hình vuông đã cho bằng



- A. 6. B. 12. C. $5\sqrt{2}$. D. $6\sqrt{2}$.

Câu 315. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị đo lấy theo mét), một công ty xây dựng cần xác định chiều dài của một sợi dây cáp nối giữa hai điểm cao trên hai tòa nhà để lắp đặt hệ thống điện. Tòa nhà thứ nhất có đỉnh ở vị trí $A(3; 5; 12)$ và tòa nhà thứ hai có vị trí ở đỉnh $B(8; 2; 20)$. Hỏi công ty cần chuẩn bị sợi dây cáp cho chiều dài tối thiểu là bao nhiêu mét để nối hai đỉnh tòa nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)

- A. 11. B. 12. C. 10. D. 9.

Câu 316. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Khi đó góc giữa vectơ $\overrightarrow{AB'A'}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng bao nhiêu?

- A. 60° . B. 120° . C. 30° . D. 90° .

Câu 317. Một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thi nô. Bác Nam tính xây một sân trước của nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài cạnh lần lượt là $AB = 5$ và $AD = 12m$. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và rửa sân nên bác Nam xây vị trí B thấp hơn vị trí A là $5cm$, vị trí D thấp hơn vị trí A là $8cm$. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, hãy xác định xem vị trí C thấp hơn vị trí A là bao nhiêu cm?

- A. 5. B. 13. C. 12. D. 30.

Câu 318. Cho ba điểm $A(3; 1; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(x; y; -1)$. Tìm tọa độ điểm C để tam giác ABC là tam giác vuông tại A .

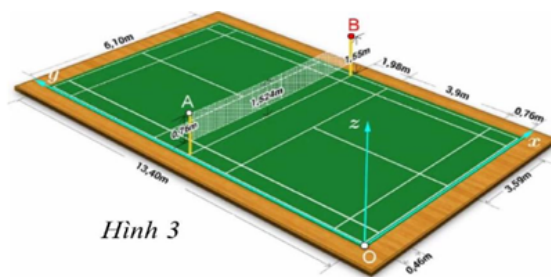
- A. $(4; 1 + \sqrt{2}; -1)$. B. $(4; 1 - \sqrt{2}; -1)$. C. $(4; 1 - 1)$. D. $(2; -1; -1)$.



Câu 319. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Câu 320. Một sân cầu lông có kích thước cho trong hình bên dưới (Hình bên) hệ trục tọa độ $Oxyz$ đã được chọn.



Hình 3

Tọa độ của $\vec{AB}$ là

- A. $(6, 1; 3, 9; 0)$. B. $(6, 7; 0; 0)$. C. $(6, 7; 0; 1, 55)$. D. $(6, 1; 0; 0)$.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $2a$. Gọi M là trung điểm $B'C'$. Khi đó:

- A. $\vec{A'B'} - \vec{A'C'} = \vec{BC'}$.
 B. $\vec{AC} \cdot \vec{BB'} = 0$.
 C. $|\vec{AB} + \vec{AA'}| = 3a$.
 D. $\cos(\vec{AB'}, \vec{AM}) = \frac{3}{2\sqrt{15}}$.

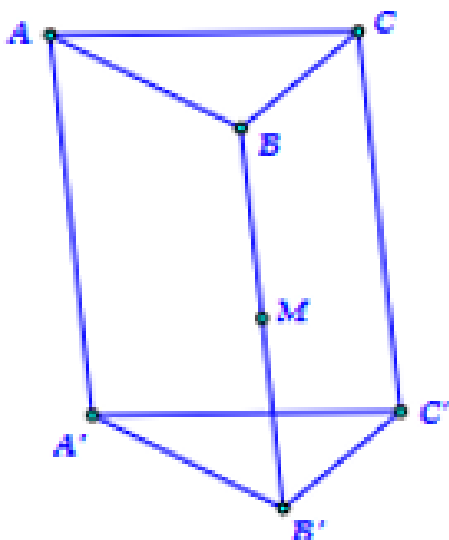
Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), C(1; -1; 1)$.

- A. Ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- B. Tọa độ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ là $D(0; 2; -1)$.
- C. Độ dài $BC = 2$.
- D. $\cos \angle BAC = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-5; 0; 7), B(1; 2; 1), C(16; 5; -2)$. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{AB} = (6; 2; -6)$.
- B. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $158,7^\circ$.
- C. $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{22}$.
- D. Điểm $N(a; b; c)$ thuộc đoạn AB thỏa mãn $NA = 3NB$. Khi đó $a + b + c = 4,5$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.



- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
- B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = \vec{a} + \vec{b}$.
- C. $\overrightarrow{A'M} = \vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1)$.

A. Tọa độ $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

B. Tọa độ $\vec{v} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ là $\vec{v} = (1; 4; 0)$.

C. Độ dài vectơ $\overrightarrow{MN}$ bằng $\sqrt{17}$.

D. Cho $P(1; m - 1; 3)$. Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $m = 1$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 7)$ và $\vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

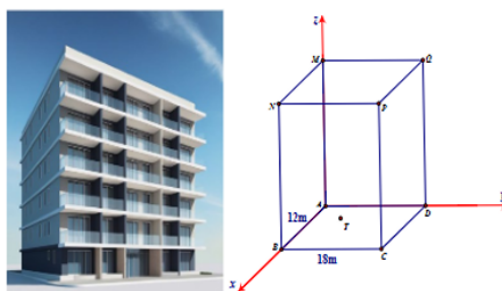
A. $\vec{b} = (5; 4; -2)$.

B. $|\vec{a}| = \sqrt{10}$.

C. $\vec{a} - 2\vec{b} = (8; 7; 9)$.

D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

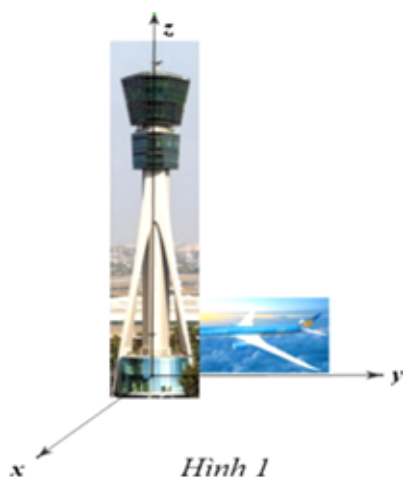
Câu 7: Một tòa nhà 6 tầng có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$. Trong đó mặt sàn của tòa nhà là hình chữ nhật có kích thước $18m \times 12m$, mỗi tầng của tòa nhà cao bằng nhau và bằng $5m$. Để định vị các vị trí trong tòa nhà, người ta đặt một hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, với A trùng với O , mặt sàn tầng 1 là mặt phẳng (Oxy) và 1 đơn vị trên mỗi trục ứng với 1 mét. Thang máy ở sàn tầng 1 ở vị trí $T(2; 2; 0)$ (Giả sử bề dày của mặt sàn, mặt tường là không đáng kể). Cô Đào làm việc tại tòa nhà này.



a Tọa độ điểm $P(12; 18; 30)$.

- b Khi thang máy đến tầng 2 thì vị trí thang máy có tọa độ $(2; 2; 10)$.
- c Cô Đào làm việc ở tầng 2, viết vị trí bàn làm việc của cô có hoành độ $x = 8$ và tung độ $y = 10$. Khoảng cách từ bàn làm việc của cô đến thang máy ở sàn tầng 2 là $9m$.
- d Bộ Phát Wifi của tòa nhà được đặt ở vị trí tầng 3 tại vị trí có hoành độ $x = 10,5$ và tung độ $y = 10,5$ và cách mặt sàn tầng 3 là 3 mét. Nếu cô Đào uống cà phê ở tòa nhà bên cạnh vị trí $(5; 20; 5)$ thì điện thoại của cô vẫn bắt song wifi từ tòa nhà mà cô làm việc, biết rằng vùng phủ sóng bộ phát wifi đó có bán kính $20m$ (giả sử không gặp vấn đề về đường truyền).

Câu 8: Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao $80m$ sử dụng ra đa có phạm vi theo dõi $500km$ được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng phía trên, Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất $10km$ cách $300km$ về phía đông và $200km$ về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát thông lưu

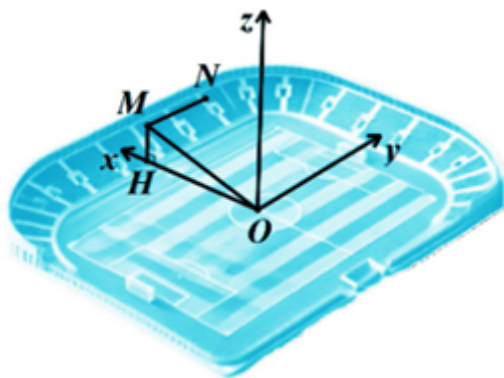


Hình 1

- a Ra đa của trung tâm kiểm soát thông lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A .
- b Ra đa ở vị trí đó có tọa độ $(0; 0; 0)$,
- c Khoảng cách từ máy bay đến ra đa là khoảng $360,69km$.

d Vị trí A có tọa độ $(300; 200; 10)$.

Câu 9: Một sân vận động với sân bóng phẳng hình chữ nhật có chấm trắng trung tâm là nơi giao bóng, một đường kẻ vạch chia đôi sân và các khán đài. Khán đài A gồm những dãy ghế nằm vuông góc với vạch chia đôi sân có độ cao tăng dần (các ghế cùng hàng thì cùng độ cao so với mặt sân). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với điểm giao bóng, mặt phẳng Oxy trùng với mặt sân, trục Ox trùng với vạch chia đôi sân, Tia Oz vuông góc với mặt sân (đơn vị đo lấy theo mét). Một khán giả ngồi tại vị trí M của khán đài A , có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng chứa sân là một điểm thuộc Ox . Góc hợp bởi $\overrightarrow{OM}$ và mặt sân là α với $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, nếu người này di chuyển $10(m)$ trên hàng ngang đó đến ngồi tại vị trí N thì góc hợp bởi $\overrightarrow{ON}$ và mặt sân là β với $\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Gọi $h(m)$ là độ cao tại M so với mặt sân.

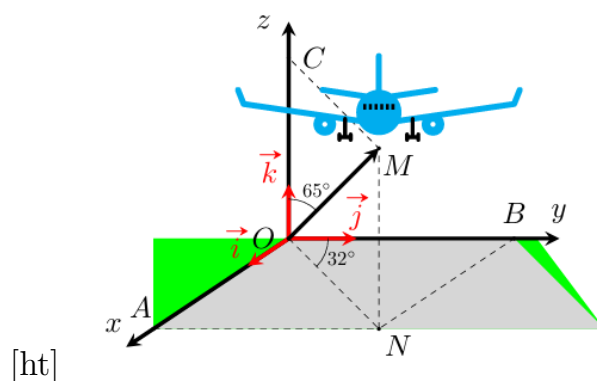


- a Điểm M có cao độ bằng 0.
- b Điểm N có cùng tung độ với điểm M .
- c $OM = 3h$.
- d $h = 10m$.

Phần III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho ba điểm phân biệt A, B, C và một điểm O tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$ ($m, n \in \mathbb{R}$), ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $m + n$ bằng KQ:

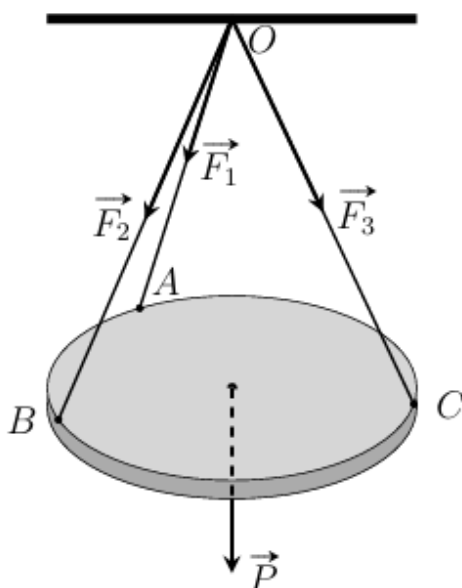
--	--	--	--



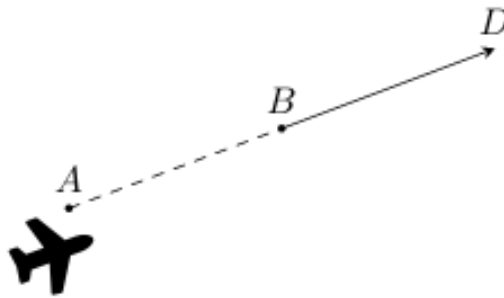
Câu 2: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính độ dài đường chéo AC' . KQ:

Câu 3: Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $Om = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Khi đó tọa độ điểm M có dạng $(a; b; c)$ (làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 4: Một tam giác gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tâm gỗ tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 25(N)$ (xem hình vẽ). Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó (tính chính xác đến hàng phần mười).



Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $D(x; y; z)$. Khi đó $x + y + z$ bằng bao nhiêu?



--	--	--	--	--

Chương 3

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

3.1 Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

3.1.1 Khoảng biến thiên

Khoảng biến thiên, kí hiệu R của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu

Lưu ý.

- Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Nếu n_1 và n_k cùng khác 0 thì

$$R = u_{k+1} - u_1$$

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.
- Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

3.1.2 Khoảng tứ phân vị

Lưu ý.

- Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

- Tứ phân vị thứ i , kí hiệu là Q_i với $i = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm được xác định như sau:

$$Q_i = u_m + \left(\frac{in}{4} - C \right) \cdot \frac{u_{m+1} - u_m}{n_m}$$

Trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.
- $[u_m, u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i .
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i .
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu ΔQ , là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là:

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1$$

Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp 50% số liệu nằm giữa giá trị Q_1 và Q_3).
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta Q$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 321. Thống kê điểm kiểm tra học kì 1 môn toán của 300 học sinh lớp 12 được mô tả ở bảng sau:

Điểm	(2; 4]	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số học sinh	20	50	70	160

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

- A. 160. B. 8. C. 7. D. 140.

Câu 322. Mỗi ngày bạn Nguyễn đều phải làm bài tập môn toán có bảng thống kê về thời gian làm bài tập mỗi ngày của bạn Nguyễn (đơn vị: phút) trong 60 ngày như sau:

Thời gian (phút)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120)
Số ngày	1	7	24	3	25

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là:

- A. 24. B. 50. C. 120. D. 25.

Câu 323. Cho bảng thống kê chiều cao của học sinh lớp 12A và lớp 12B như sau:

Chiều cao (cm)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)	[175;180)	[180;185)
12A	1	5	23	10	2	3	0
12B	0	0	35	6	1	0	2

Khoảng biến thiên chiều cao lớp 12A và 12B lần lượt là Δ_A, Δ_B . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\Delta_B = \Delta_A + 5$. B. $\Delta_A = \Delta_B + 5$. C. $\Delta_A < \Delta_B$. D. $\Delta_A = \Delta_B$.

Câu 324. Cho một mẫu số liệu ghép nhóm có chứa tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là Q_1, Q_2, Q_3 . Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó

- A. $\Delta Q = Q_1 - Q_3$. B. $\Delta Q = Q_3 - Q_2$. C. $\Delta Q = Q_2 - Q_1$. D. $\Delta Q = Q_3 - Q_1$.

Câu 325. Thống kê điểm thi đánh giá năng lực của một nhóm có 120 học sinh qua thang điểm 100 được cho ở bảng sau:

Điểm	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100]
Số học sinh	25	35	37	15	8

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên bảng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

A. 22, 9.

B. 3, 4.

C. 56, 2.

D. 79, 1.

Câu 326. Một vườn thú ghi lại tuổi thọ 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

A. [14; 15).

B. [15; 16).

C. [16; 17).

D. [17; 18).

Câu 327. Một vườn thú ghi lại tuổi thọ của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

A. [14; 15).

B. [15; 16).

C. [16; 17).

D. [17; 18).

Câu 328. Kết quả điều tra tổng thu nhập bình quân trong năm 2024 của một số hộ gia đình thành phố Nha Trang như bảng sau

Tổng thu nhập (triệu đồng)	[200; 250)	[250; 300)	[300; 350)	[350; 400)	[400; 450)
Số hộ gia đình	24	62	34	21	9

Tứ phân vị thứ nhất bằng

- A. $\frac{16175}{62}$. B. $\frac{16175}{34}$. C. $\frac{16157}{62}$. D. $\frac{16751}{62}$.

Câu 329. Một mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị $Q_1 = 4, Q_2 = 6, Q_3 = 9$. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là bao nhiêu?

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 9.

Câu 330. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng).

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

3.2 Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2 , được tính bằng công thức

$$S^2 = \frac{1}{n} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \bar{x})^2]$$

trong đó: $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ là cỡ mẫu;

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_kc_k)$$

là số trung bình.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là S , là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là $S = \sqrt{S^2}$.

Lưu ý.

- a) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2 = \frac{1}{n}(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \cdots + n_kc_k^2) - \bar{x}^2.$$

- b) Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \bar{x})^2]$$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu

- Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.
- Với mẫu số liệu có cùng số trung bình (hoặc xấp xỉ nhau), ta thường sử dụng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ phân tán của các mẫu số liệu đó.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 331. Mẫu số liệu ghép nhóm có độ lệch chuẩn bằng 9 thì có phương sai bằng

- A. 9. B. 3. C. 18. D. 81.

Câu 332. Một mẫu số liệu ghép nhóm có phương sai bằng 16 thì có độ lệch chuẩn bằng bao nhiêu?

- A. 5. B. 8. C. 256. D. 32.

Câu 333. Hai mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 có bảng tần số ghép nhóm như sau

M_1	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Tần số	3	4	8	6	4
M_2	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Tần số	6	8	16	12	8

Gọi s_1, s_2 lần lượt là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 . Phát biểu nào dưới đây đúng?

- A. $s_1 = s_2$. B. $s_1 = 2s_2$. C. $2s_1 = s_2$. D. $4s_1 = s_2$.

Câu 334. Khối lượng 66 quả bưởi da xanh ở lô hàng A được ghi lại ở bảng sau:

Khối lượng (kg)	[1, 2; 1, 4)	[1, 4; 1, 6)	[1, 6; 1, 8)	[1, 8; 2, 0)	[2, 0; 2, 2)	[2, 2, ; 2, 4]
Số quả bưởi	5	7	9	16	21	8

Khối lượng trung bình của mỗi quả bưởi gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. 5. B. 8. C. 2. D. 3.

Câu 335. Để đánh giá chất lượng của một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho ra kết quả như sau:

Thời gian (giờ)	[5;5,5)	[5,5;6)	[6;6,5)	[6,5;7)	[7;7,5)
Số chiếc điện thoại (tần số)	5	8	10	15	5

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến 4 chữ số thập phân)

- A. 0,4252. B. 0,5268. C. 0,5314. D. 0,6214.

Câu 336. Số tiền ghi trên hóa đơn của 150 khách hàng lấy ngẫu nhiên trong một siêu thị cho vào bảng dưới đây:

Số tiền (nghìn đồng)	[50;100)	[100;150)	[150;200)	[200;250]	[250;300)
Tần số	6	9	39	66	30

Hãy tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 49,24. B. 21,03. C. 24,25. D. 49,41.

Câu 337. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau:

Số tiền (nghìn đồng)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40]	[40;50)
Số cây	4	6	7	5	3

Phương sai của mẫu số liệu trên là

- A. 154,45. B. 154,56. C. 24,25. D. 66,35.

3.2.1 Ôn tập chương 3

Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 338. Bảng sau thống kê khối lượng một số quả măng cụt được lựa chọn ngẫu nhiên trong một thùng hàng

Khối lượng (gam)	[80;82)	[82;84)	[84;86)	[86;88)	[88;90)
Số quả	17	20	25	16	12

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

- A. 10 gam. B. 12 gam. C. 2 gam. D. 20 gam.

Câu 339. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau.

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	$[3;6)$	$[6;9)$	$[9;12)$	$[12;15)$	$[15;18)$
Số hộ gia đình	20	60	40	32	7

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

- A. $3m^3$. B. $15m^3$. C. $18m^3$. D. $20m^3$.

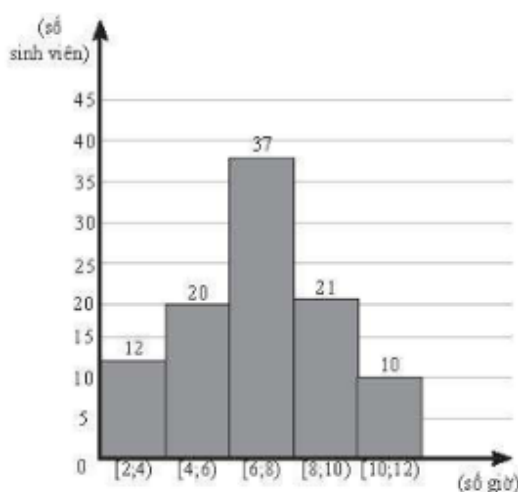
Câu 340. Người ta thống kê tốc độ của một số xe ô tô di chuyển qua một trạm kiểm soát trên đường cao tốc trong một khoảng thời gian ở bảng sau.

Tốc độ (km/h)	$[75;80)$	$[80;85)$	$[85;90)$	$[90;95)$	$[95;100)$
Số xe	15	22	28	34	19

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. $75km/h$. B. $25km/h$. C. $100km/h$. D. $5km/h$.

Câu 341. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ sau.



Khoảng biến thiên của mẫu số liệu được cho trong biểu đồ trên

- A. 2. B. 3. C. 10. D. 37.

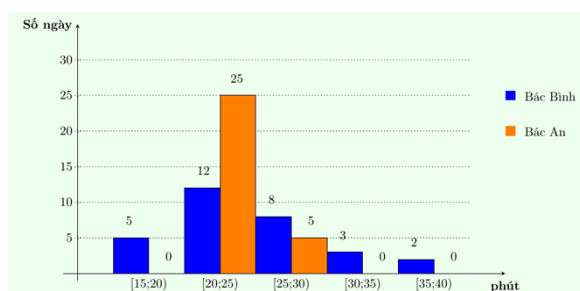
Câu 342. Thâm niên công tác của các công nhân hai nhà máy A và B được cho trong bảng sau

Thăm niên công tác (năm)	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$
Số công nhân nhà máy A	35	13	12	12	8
Số công nhân nhà máy B	19	26	24	11	0

Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết thâm niên công tác các công nhân của nhà máy nào có độ phân tán lớn hơn?

- A. Không so sánh được.
- B. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán lớn hơn nhà máy B.
- C. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán nhỏ hơn nhà máy B.
- D. Nhà máy A có thâm niên công tác của các công nhân phân tán bằng nhà máy B.

Câu 343. Biểu đồ dưới đây thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.



Hỏi giữa bác Bình và bác An thì người nào có thời gian luyện tập đều?

- A. Bác Bình có thời gian tập đều hơn.
- B. Bác An có thời gian tập đều hơn.
- C. Không xác định được.
- D. . Bác Bình và Bác An có thời gian tập đều như nhau.

Câu 344. Bạn Ngọc rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy của mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Ngọc được thống kê lại ở bảng sau:

Cự li (m)	$[19;19,5)$	$[19,5;20)$	$[20;20,5)$	$[20,5;21)$	$[21;21,5)$
Tần số	13	45	24	12	6

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 100. B. 20,015. C. 2001,5. D. 2.

Câu 345. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	$[120;122)$	$[122;124)$	$[124;126)$	$[126;128)$	$[128;130)$
Số ngày giao dịch của cổ phiếu A	8	9	12	10	11

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 50. B. 12528. C. 125,28. D. 10.

Câu 346. Mỗi ngày Nguyễn đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của Nguyễn trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2,7;3,0)$	$[3,0;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 3,39. B. 11,62. C. 0,13. D. 0,36.

Câu 347. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Số lần	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 5,98. B. 6. C. 2,44. D. 2,5.

Câu 348. Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả như sau
Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro đầu tư các lĩnh vực có giá trị trung bình tiền lãi gần bằng nhau. Lĩnh vực nào có phương

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

sai, độ lệch chuẩn tiền lãi cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của cổ phiếu nào cao hơn?

- A. Lĩnh vực A có độ rủi ro bằng lĩnh vực B. .
- B. Lĩnh vực A có độ rủi ro cao hơn lĩnh vực B. .
- C. Lĩnh vực A có độ rủi ro thấp hơn lĩnh vực B..
- D. Không so sánh được. .

Câu 349. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của cổ phiếu nào cao hơn?

- A. Cổ phiếu A có độ rủi ro bằng cổ phiếu B. .
- B. Cổ phiếu A có độ rủi ro cao hơn cổ phiếu B..
- C. Cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B..
- D. Không so sánh được. .

Câu 350. Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên nam Dũng được lần lượt thống kê trong các bảng sau (đơn vị: mét)

Nhóm	Tần số
$[6, 22; 6, 46)$	3
$[6, 46; 6, 70)$	7
$[6, 70; 6, 94)$	5
$[6, 94; 7, 18)$	20
$[7, 18; 7, 42)$	5
	$n = 40$

Giá trị trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm biểu diễn kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Dũng có giá trị gần với giá trị

A. 6, 92.

B. 7, 34.

C. 9, 86.

D. 5, 85.

Phần II. Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Thời gian chờ khám bệnh của hai phòng khám 1 và phòng khám 2 ở thành phố X được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	$[0; 5)$	$[5; 10)$	$[10; 15)$	$[15; 20)$
Phòng khám số 1 (Số bệnh nhân)	3	12	15	18
Phòng khám số 2 (Số bệnh nhân)	5	10	12	0

Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

a Tổng số bệnh nhân chờ khám bệnh ở phòng khám số 1 dưới 5 phút là 3.

b Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian chờ khám bệnh của phòng khám số 1 là $R_1 = 15$.

c Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian chờ khám bệnh

của phòng khám số 2 là $R_2 = 20$.

d Thời gian chờ khám bệnh ở phòng khám số 2 phân tán hơn thời gian chờ khám bệnh ở phòng khám số 1.

Câu 2: Thống kê thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của một nhóm người chạy Grab được cho trong bảng sau:

Thu nhập (triệu đồng)	$[3;5)$	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$
Số người	5	10	5	2

Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

- a Cỡ mẫu là $n = 22$.
- b Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 10$.
- c Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 5$.
- d Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = 5$

Câu 3: Thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của 20 người lao động ở ba nhà máy như sau:

Thu nhập	$[5; 8)$	$[8; 11)$	$[11; 14)$	$[14; 17)$	$[17; 20)$	$[20; 23)$
Số người của nhà máy A	2	5	4	4	5	0
Số người của nhà máy B	0	6	4	3	7	0
Số người của nhà máy C	1	5	8	6	0	0

Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

- a Trong 20 người lao động ở nhà máy A, hiệu số thu nhập của hai người lao động bất kì không vượt quá 15 triệu đồng.
- b Trong 20 người lao động ở nhà máy B, hiệu số thu nhập của hai người lao động bất kì không vượt quá 18 triệu đồng .
- c Nếu dựa vào khoảng biến thiên thì thu nhập của người lao động ở nhà máy A phân tán hơn so với người lao động ở nhà máy B.

d Nếu dựa vào khoảng biến thiên thì thu nhập của người lao động ở nhà máy C phân tán hơn so với người lao động ở nhà máy A .

Câu 4: Điểm kiểm tra cuối khóa môn Tiếng Anh của hai lớp ở một trung tâm ngoại ngữ được thống kê trong các bảng sau

Bảng a. Điểm của lớp A		Bảng b. Điểm của lớp B	
Điểm	Số học viên	Điểm	Số học viên
[50; 60)	8	[50; 60)	15
[60; 70)	20	[60; 70)	20
[70; 80)	50	[70; 80)	30
[80; 90)	17	[80; 90)	20
[90; 100)	5	[90; 100)	15

Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

- a Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ở Bảng a là [60; 70).
- b Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ở Bảng b là (90; 100].
- c Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng a là 10.
- d Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở Bảng b là 20.

Câu 5: Cho mẫu số liệu thống kê chiều cao của các học sinh lớp 12A1, 12A2 và 12A3 của một trường THPT như bảng sau :

Chiều cao (đơn vị: cm)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)	[175; 180)
Số học sinh lớp 12A1	1	13	18	5	3	0
Số học sinh lớp 12A2	0	12	20	7	1	0
Số học sinh lớp 12A3	1	8	12	15	3	1

Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

- a Nếu dựa vào khoảng tứ phân vị thì mẫu số liệu thống kê chiều cao của học sinh lớp 12A1 phân tán hơn so với lớp 12A2.
- b Nếu dựa vào khoảng tứ phân vị thì mẫu số liệu thống kê chiều cao của học sinh lớp 12A2 phân tán hơn so với lớp 12A3.
- c Ở lớp 12A2 có một học sinh có chiều cao là 173 cm, chiều cao của học sinh đó là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu của lớp 12A2.

d Ở lớp 12A3 có một học sinh có chiều cao là 177 cm, chiều cao của học sinh đó là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu của lớp 12A3.

Câu 6: . Số lượng khách hàng nữ mua hàng thời trang trong một ngày của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số ghép nhóm sau:

Khoảng tuổi	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số khách hàng nữ	3	9	6	4	2

Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

- a Giá trị đại diện của nhóm $[30;40)$ là 35.
- b Cỡ mẫu $n = 20$.
- c Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 42,08 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)
- d Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là 129,99 (làm tròn đến hàng phần trăm).

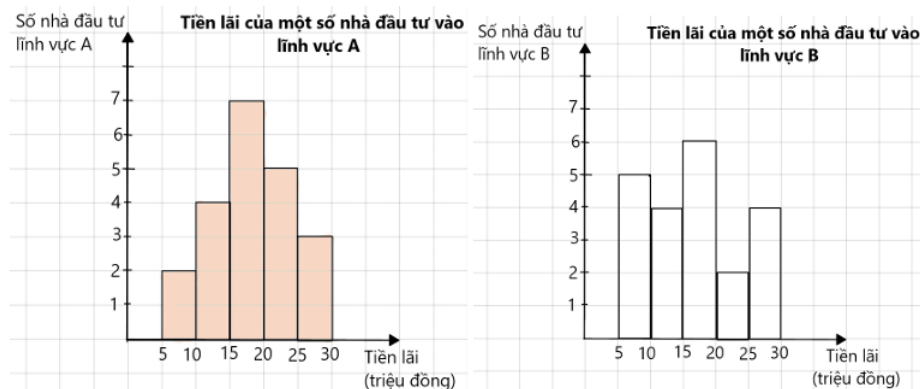
Câu 7: Thời gian (phút) để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi được cho như sau:

Thời gian (phút)	$[0,5;10,5)$	$[10,5;20,5)$	$[20,5;30,5)$	$[30,5;40,5)$	$[40,5;50,5)$
Số học sinh lớp 11A	2	10	6	4	3
Số học sinh lớp 11B	3	8	10	2	4

Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

- a Phương sai của mẫu số liệu lớp 11A là: 133,44 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- b Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 11A là: 11,77 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- c Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 11B là: 11,55 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- d Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì thời gian để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi của lớp 11A ít phân tán hơn lớp 11B.

Câu 8: Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả bằng biểu đồ dưới đây



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu số nhà đầu tư vào lĩnh vực A là: 5,83 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu số nhà đầu tư vào lĩnh vực B là: 7,01 (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Về trung bình, đầu tư vào lĩnh vực B đem lại tiền lãi cao hơn lĩnh vực A.
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì tiền lãi của các nhà đầu tư trong lĩnh vực A có xu hướng phân tán rộng hơn so với tiền lãi của các nhà đầu tư trong lĩnh vực B.

Câu 9: Để đánh giá độ chính xác của hệ thống đóng gói tự động các túi cà phê người ta tiến hành thu thập mẫu số liệu về khối lượng của một số gói cà phê (đơn vị tính là gam). Máy được coi là hoạt động tốt theo tiêu chuẩn của nhà máy nếu khối lượng trung bình của các gói cà phê nằm trong khoảng (198; 202) và độ lệch chuẩn nhỏ hơn 3 gam. Kết quả kiểm tra được thống kê trong bảng dưới đây?

Cân nặng (gam)	[190; 194)	[194; 198)	[198; 202)	[202; 206)	[206; 210)
Số gói	2	5	6	5	2

- Cỡ mẫu là $n = 20$.

- b Khối lượng trung bình các gói cà phê bằng 200 gam.
- c Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 22.
- d Máy hoạt động tốt theo tiêu chuẩn của nhà máy.

Câu 10: Số giờ sử dụng smartphone trong 1 ngày nghỉ của học sinh lớp 12A7 được thống kê trong bảng sau:

Số giờ	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6]
Số học sinh	3	15	12	9	5	1

- a Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên bằng 6.
- b Giá trị trung bình của mẫu số liệu trên bằng $\frac{226}{45}$.
- c Số trung vị của mẫu số liệu trên bằng $\frac{19}{8}$.
- d Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên bằng $\frac{2\sqrt{730}}{45}$.

Phần III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho bảng thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của Bác An và Bác Bình.. Gọi R_1, R_B lần lượt là khoảng biến thiên của mẫu số liệu về thời gian tập thể dục của Bác An và Bác Bình, khi đó $R_A + R_B$ bằng KQ:

Thời gian (phút)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
Bác An	5	12	8	3	2
Bác Bình	0	20	5	5	0

Câu 2: Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau hai năm sử dụng đầu tiên được cho ở bảng sau

Số lần gặp sự cố	[1;2]	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
Số xe	17	33	25	20	5

Khoảng biến thiên của bảng số liệu trên là KQ:

Chiều cao (cm)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[175;180)	[180;185)
Lớp 12A	3	5	12	1	0
Lớp 12B	6	10	7	0	2

Câu 3: Bạn Lộc thống kê lại chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn nam lớp 12A và lớp 12B ở bảng sau.

Khoảng biến thiên chiều cao của học sinh nam lớp 12B có độ phân tán lớn hơn khoảng biến thiên chiều cao của học sinh nam lớp 12A bao nhiêu cm? KQ:

Câu 4: Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả như sau:

101	79	79	78	75	73	68	67	67	63
63	61	60	59	57	55	55	50	47	42

Tính khoảng biến của mẫu số liệu ghép nhóm dãy số liệu trên thành các nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là [40; 50). KQ:

Câu 5: Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau:

Chiều cao (m)	[8,4;8,6)	[8,6;8,8)	[8,8;9,0)	[9,0;9,2)	[9,2;9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

Trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Hỏi giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu là bao nhiêu? KQ:

Câu 6: . Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 7: Điều tra 42 học sinh của một lớp 12 về số giờ tự học ở nhà, người ta có bảng thống kê sau:

Số giờ tự học	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$
Số học sinh	8	10	12	9	3

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên. KQ:

Câu 8: Thống kê điểm trắc nghiệm môn Tiếng Anh của 40 học sinh, người ta có bảng sau:

Điểm	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$	$[90;100)$
Số học sinh	3	5	5	8	7	5	3	4

Tính phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên. KQ:

Câu 9: . Một giống cây xoan đào được trồng tại hai địa điểm A và B. Người ta thống kê đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở bảng sau. Gọi phương sai đường kính thân của một số cây xoan đào 5 năm tuổi ở địa điểm A và địa điểm B lần lượt là S_A^2, S_B^2 . Tính $S_A^2 - S_B^2$ bằng bao nhiêu?

Đường kính (cm)	[30;32)	[32;34)	[34;36)	[36;38)	[38;40)
Số cây trồng ở địa điểm A	25	38	20	10	9
Số cây trồng ở địa điểm B	22	27	19	14	14

KQ:

Câu 10: Kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên HUY được thống kê trong bảng sau (đơn vị: mét):

Nhóm	Tần số
[6,22;6,46)	3
[6,46;6,70)	7
[6,70;6,94)	5
[6,94;7,18)	20
[7,18;7,42)	5
	$n = 40$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) KQ: