

Câu 1. (3 điểm) Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = 2x + \sqrt{2025 - x} + \sqrt{\log_3^2 x - 5\log_3 x + 4}$.

Câu 2. (2 điểm) Tìm số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$ trên khoảng $(-\pi; 2\pi)$.

Câu 3. (3 điểm) Ông An cần thuê xe chở 140 tấn xi măng và 9 tấn thép để xây dựng công trình. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó xe A có 10 chiếc và xe B có 9 chiếc. Một xe loại A cho thuê với giá 5 triệu đồng và một xe loại B cho thuê với giá 4,5 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 20 tấn xi măng và 0,6 tấn thép, mỗi xe loại B có thể chở tối đa 10 tấn xi măng và 1,5 tấn thép. Tính số xe loại A và loại B cần thuê để ông An mất ít tiền thuê xe nhất.

Câu 4. (2 điểm) Tìm m để hàm số sau liên tục tại $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{2x+21}}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 3m-1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}.$$

Câu 5. (3 điểm) Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 3$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{u_3 - u_1} + \frac{1}{u_4 - u_2} + \frac{1}{u_5 - u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2026} - u_{2024}} < \frac{2}{3}$.

Câu 6. (2 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2025 \\ u_{n+1} = \frac{u_n(u_n^2 + 3)}{3u_n^2 + 1} \end{cases}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy

số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 7. (3 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $3a$, $SA = SB = SC = a\sqrt{6}$ và tam giác ABC đều. Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Gọi α là góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (P) . Tìm giá trị lớn nhất của $\sin \alpha$.

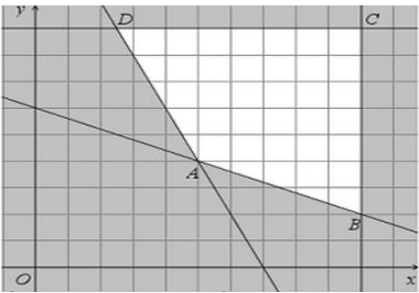
Câu 8. (2 điểm) Bạn Dung và Ánh mỗi bạn có một hộp bi. Trong mỗi hộp đều có chứa bi trắng và chứa bi đen, tổng số bi trong hai hộp là 25 (các bi giống nhau về kích thước và trọng lượng). Biết hộp của Dung chứa nhiều bi hơn hộp của Ánh và số bi đen trong hộp của Dung nhiều hơn số bi đen trong hộp của Ánh. Từ mỗi hộp của mình mỗi bạn lấy ngẫu nhiên ra một viên. Tính xác suất để hai viên được lấy ra khác màu và biết rằng xác suất lấy ra được hai viên cùng màu đen là 0,39.

-----HẾT-----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay)

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA LỚP 11 NĂM HỌC 2024 – 2025
MÔN TOÁN 11

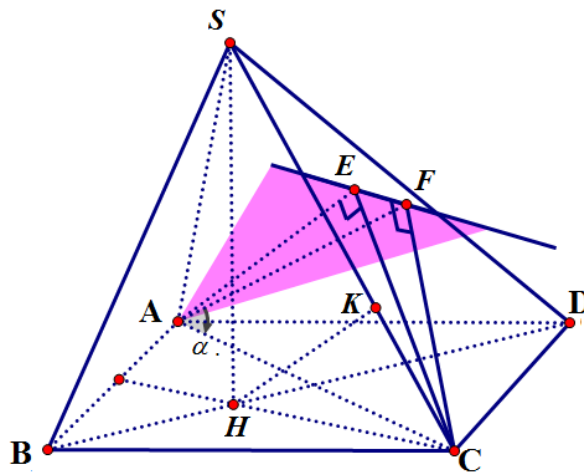
Câu	Nội dung
1. (3đ)	Tìm tập xác định của hàm số $y = 2x + \sqrt{2025 - x} + \sqrt{\log_3^2 x - 5\log_3 x + 4}$. Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2025 - x \geq 0 \\ x > 0 \\ \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 \geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2025 - x \geq 0 \\ x > 0 \\ \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2025 \geq x \\ x > 0 \\ \log_3 x \leq 1 \\ \log_3 x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2025 \geq x \\ x > 0 \\ x \leq 3 \\ x \geq 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 3 \\ 81 \leq x \leq 2025 \end{cases}$ Vậy $D = 0; 3 \cup 81; 2025$
2. (2đ)	Tìm số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$ trên khoảng $(-\pi; 2\pi)$. $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$ $\Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$ $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ Với $x = k\pi \in (-\pi; 2\pi) \Rightarrow -1 < k < 2 \Rightarrow k = 0; 1 \Rightarrow x \in \{0; \pi\}$ $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \in (-\pi; 2\pi) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \in (-\pi; 2\pi) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc $(-\pi; 2\pi)$.

3. (3đ)	Ông An cần thuê xe chở 140 tấn xi măng và 9 tấn thép để xây dựng công trình. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó xe A có 10 chiếc và xe B có 9 chiếc. Một xe loại A cho thuê với giá 5 triệu đồng và một xe loại B cho thuê với giá 4,5 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 20 tấn xi măng và 0,6 tấn thép, mỗi xe loại B có thể chở tối đa 10 tấn xi măng và 1,5 tấn thép. Tính số xe loại A và loại B cần thuê để ông An mất ít tiền thuê xe nhất.
	Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và B. Khi đó, số tiền cần bỏ ra để thuê xe là $f(x; y) = 5x + 4,5y$ Ta có x xe loại A chở được $20x$ tấn xi măng và $0,6x$ tấn sắt; y xe loại B chở được $10y$ tấn xi măng và $1,5y$ tấn sắt. Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} (*)$ Số tiền thuê xe là: $f(x; y) = 5x + 4,5y$. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).  Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác ABCD (kể cả bờ). Ta có $A(5; 4), B(10; 2), C(10; 9), D\left(\frac{5}{2}; 9\right)$. $f(5; 4) = 43; f(10; 2) = 59; f(10; 9) = 90,5; f\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 53$. Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (5; 4)$. Như vậy để chi phí thấp nhất cần thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B.
4. (2đ)	Tìm m để hàm số sau liên tục tại $x = 3$:
	$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{2x+21}}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 3m-1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$
	Tập xác định $D = -6; +\infty, x = 3 \in D; f(3) = 3m - 1$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{2x+21}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} + \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt[3]{2x+21}}{x-3}$

	$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} + \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{9+3\sqrt{2x+21}+\sqrt{(2x+21)^2}}$ $= \frac{1}{6} - \frac{2}{27} = \frac{5}{54}$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$ khi $3m-1 = \frac{5}{54} \Leftrightarrow m = \frac{59}{162}$
5. (3đ)	Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 3$. Chứng minh rằng $\frac{1}{u_3 - u_1} + \frac{1}{u_4 - u_2} + \frac{1}{u_5 - u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2026} - u_{2024}} < \frac{2}{3}$. Ta có VT = $\frac{1}{u_1(q^2-1)} + \frac{1}{u_2(q^2-1)} + \frac{1}{u_3(q^2-1)} + \dots + \frac{1}{u_{2024}(q^2-1)}$ $= \frac{1}{q^2-1} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2024}} \right)$ $= \frac{1}{q^2-1} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} + \dots + \frac{1}{u_1 q^{2023}} \right) = \frac{1}{q^2-1} \cdot \frac{1}{u_1} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{2023}} \right)$ $= \frac{1}{q^2-1} \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{2024}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2024}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{16} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2024} \right) < \frac{3}{16} < \frac{2}{3}.$
6. (2đ)	Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2025 \\ u_{n+1} = \frac{u_n(u_n^2 + 3)}{3u_n^2 + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó. Ta chứng minh $u_n > 1, \forall n \geq 1$ bằng quy nạp. Dễ thấy $u_1 = 2025 > 1$. Giả sử $u_k > 1, \forall k \geq 1$. Ta thấy $u_{k+1} - 1 = \frac{u_k(u_k^2 + 3)}{3u_k^2 + 1} - 1 = \frac{(u_k - 1)^3}{3u_k^2 + 1} > 0 \Rightarrow u_{k+1} > 1$. Suy ra $u_n > 1, \forall n \geq 1$. Mặt khác $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n^2 + 3)}{3u_n^2 + 1} - u_n = \frac{2u_n(1 - u_n^2)}{3u_n^2 + 1} < 0, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là dãy số giảm. Dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x \ (x \geq 1)$. Khi đó $x = \frac{x(x^2 + 3)}{3x^2 + 1} \Leftrightarrow x = 1$ do $x \geq 1$. Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

7. (3đ)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $3a$, $SA = SB = SC = a\sqrt{6}$ và tam giác ABC đều. Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (SCD) . Gọi α là góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (P) . Tìm giá trị lớn nhất của $\sin \alpha$.



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều ABC

$$SA = SB = SC \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

$$A \in (P) \perp (SCD), (P) \cap (SCD) = \Delta$$

Gọi E là hình chiếu của A lên $\Delta \Rightarrow AE \perp (SCD)$

Gọi K là hình chiếu của H lên SC , $(SHC) \perp (SCD) \Rightarrow HK \perp (SCD)$

$$\Rightarrow AE = d(A; (SCD)) = \frac{3}{2} d(H; (SCD)) = \frac{3}{2} HK.$$

$$HC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}; SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{6a^2 - 3a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } AE = \frac{3a\sqrt{6}}{4}.$$

Gọi F là hình chiếu của C lên $\Delta \Rightarrow CF \perp (P)$.

Suy ra góc tạo bởi AC và (P) là $\alpha = CAF$.

$$\sin \alpha = \frac{FC}{AC} \leq \frac{EC}{AC}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } F \equiv E.$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{\sqrt{AC^2 - AE^2}}{AC} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}a}{3a} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

	Vậy GTLN của $\sin \alpha$ bằng $\frac{\sqrt{10}}{4}$.
8. (2đ)	Bạn Dung và Ánh mỗi bạn có một hộp bi. Trong mỗi hộp đều có chứa bi trắng và có chứa bi đen, tổng số bi trong hai hộp là 25 (<i>các bi giống nhau về kích thước và trọng lượng</i>). Biết hộp của Dung chứa nhiều bi hơn hộp của Ánh và số bi đen trong hộp của Dung nhiều hơn số bi đen trong hộp của Ánh. Từ mỗi hộp của mình mỗi bạn lấy ngẫu nhiên ra một viên. Tính xác suất để hai viên được lấy ra khác màu và biết rằng xác suất lấy ra được hai viên cùng màu đen là 0,39. Ta ký hiệu $A; B; C$ lần lượt là các biến cố lấy được 2 bi trắng, 2 bi đen, 1 bi trắng và 1 bi đen và các biến cố ấy là xung khắc từng đôi một. Gọi $n_A; n_B \in N$ lần lượt là số bi trong hộp của Ánh và Dung. Ta có $n_A < n_B$ và $n_A + n_B = 25$ Và gọi $d_A; d_B \in N$ lần lượt là số bi đen trong hộp của Ánh và Dung. Ta có $d_A < d_B$ Từ $\begin{cases} n_A < n_B \\ n_A + n_B = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 = n_A + n_B < 2n_B \\ n_A + n_B = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_B \geq 13 \\ n_A + n_B = 25 \end{cases}$ Đề cho $P(B) = \frac{d_A}{n_A} \cdot \frac{d_B}{n_B} = 0,39 = \frac{39}{100} \Rightarrow 100 \cdot d_A d_B = 39 \cdot n_A n_B \Rightarrow (n_A n_B) : 5$ và $n_A + n_B = 25$ Nên có hai trường hợp xảy ra Trường hợp 1: $n_A = 5 \Rightarrow n_B = 20 \Rightarrow d_A \cdot d_B = 39 \Rightarrow d_A = 3, d_B = 13$ Và do đó số bi trắng trong hộp của Ánh và Dung lần lượt là 2 và 7 Vậy $P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{20} = 0,14 \Rightarrow P(C) = 1 - 0,39 - 0,14 = 0,47$ Trường hợp 2: $n_A = 10 \Rightarrow n_B = 15 \Rightarrow d_A \cdot d_B = 39 \cdot 1,5 \Rightarrow d_A \cdot d_B \notin \mathbb{N}$ (Loại) Kết luận: $P(C) = 0,47$