LÊ BÁ BẢO
TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

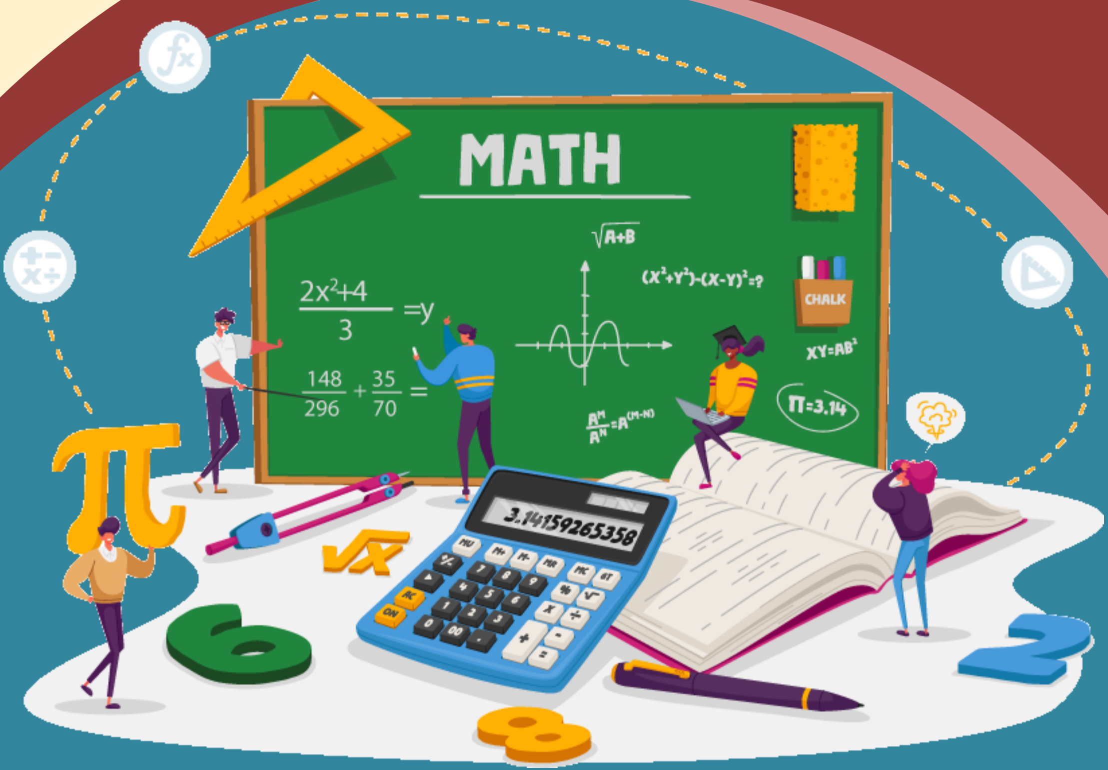
TOÁN 12

KHẢO SÁT HÀM SỐ

MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHẦN 01

- LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
- CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT



Page: CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

HUE - CLUB

PHIẾU ÔN TẬP SỐ 01_*TrNg 2025*

TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ

Môn: *Toán 12*

CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO
Trường THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế *Trung tâm Km10- Hương Trà – Huế*

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

*Trong quá trình **sưu tầm** và biên soạn, nếu tài liệu có sai sót gì thì rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô cùng các em học sinh! Xin chân thành cảm ơn!*

Câu 1: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^3-3t^2+8t+1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3(s)$ bằng $8\ m/s$.		
b)	Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $13m$, vận tốc khi đó bằng $8\ m/s$.		
c)	Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5\,m/s$.		
d)	Gia tốc tại thời điểm chất điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng $2\,m/s^2$.		

Câu 2: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tầu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10$ km/h thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Khi vận tốc $v=10$ km/h thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.		
b)	Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông với vận tốc x km/h là $f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^3$.		
c)	Khi vận tốc $v=30$ km/h thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là 43000 đồng.		
d)	Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông nhỏ nhất là km/h.		

Câu 3: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1\le x\le 17)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x)=2x^3-9x^2-40x+700$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 200 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

Khẳng định	Đúng	Sai

a)	Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x)=200x$.		
b)	Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x)=-2x^3+9x^2+240x+700$.		
c)	Hộ làm nghề dệt này đạt lợi nhuận tối đa nếu sản xuất và bán ra mỗi ngày số mét vải lụa là 8 mét.		
d)	Hộ làm nghề dệt này làm ăn có lãi khi số mét vải lụa cần sản xuất và bán ra mỗi ngày trong khoảng $(2;11)$.		

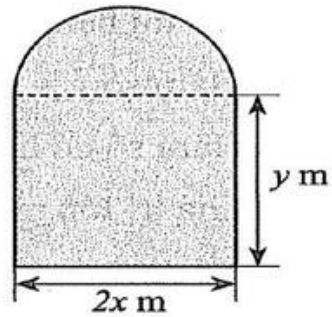
Câu 4: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức $N(t)=1000+\dfrac{100t}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. (Nguồn: *R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Đến giây thứ 10 thì số lượng vi khuẩn đạt nhiều nhất.		
b)	Thời gian tăng lên nhiều giờ thì số lượng vi khuẩn càng nhiều.		
c)	Sau khi cấy lại môi trường dinh dưỡng, số lượng vi khuẩn tăng thêm được 3 con so với lúc đầu tại hai thời điểm t_1 và t_2, khi đó $t_1t_2=100$.		
d)	Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ trên sẽ như hình dưới đây: $\begin{array}{c\|ccccc} t & 0 & & 10 & & +\infty \\ \hline N'(t) & & + & 0 & - & \\ \hline N(t) & & \nearrow & 1005 & \searrow & \\ & 1000 & & & & 1000 \end{array}$		

Câu 5: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (tính theo lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức: $V(t)=300(t^2-t^3)+4,5$ với $0\le t\le 0,5$. Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$. Biết 1 lít xăng có giá là 21.000 đồng.

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là $1,5$ lít.		
b)	Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Số tiền người mua phải trả là 787.500 đồng.		
c)	Khi xăng chảy vào bình xăng thì tốc độ tăng thể tích là lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 21.		
d)	Phương trình $V'(t)=0$ có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.		

Câu 6: Người ta dùng một thanh thép có chiều dài 4 m để uốn thành khung viền của một cửa sổ có dạng một hình chữ nhật ghép với nửa hình tròn có các kích thước được cho trên hình vẽ:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Có thể biểu thị y theo công thức $y=2-\dfrac{(\pi-2)x}{2}$.		
b)	Diện tích của cửa sổ được tính bởi công thức $S(x)=4x-2x^2-\dfrac{\pi x^2}{2}\left(\text{m}^2\right)$.		
c)	Diện tích của cửa sổ lớn nhất khi $x=\dfrac{4}{\pi+2}(\text{m})$.		
d)	Giá trị lớn nhất của diện tích cửa sổ là $\dfrac{8}{\pi+4}\left(\text{m}^2\right)$.		

Câu 7: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau ít phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t)=1000+30t^2-t^3(0\le t\le 30)$. Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất ?

Kết quả:

Câu 8: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-t^3+6t^2+3t+9$ với t được tính bằng giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s được tính bằng mét là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Tính quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất.

Kết quả:

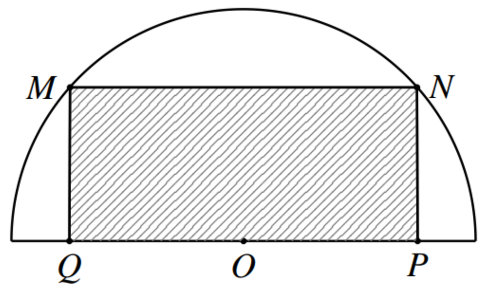
Câu 9: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được tính theo công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ (nghìn người). Biết đạo hàm của hàm số $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Gọi k là tốc độ tăng dân số của thị trấn đó vào năm 2022. Giá trị của biểu thức $1000k$ bằng bao nhiêu? (*làm tròn kết quả đến hàng phần chục*)

Kết quả:

Câu 10: Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 40 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 30 lít/phút. Gọi $f(t)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút. khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức x (gam/lít). Tính x (*làm tròn đến hàng đơn vị).*

Kết quả:

Câu 11: Một tấm nhôm có dạng nửa hình tròn có bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (như hình vẽ).



Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là bao nhiêu?

Kết quả:

Câu 12: Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không có nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100000 $đồng\ /m^2$. Khi đó chi phí thuê nhân công ít nhất bao nhiêu triệu đồng?

Kết quả:

Câu 13: Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Mỗi ngày, nếu giá bán rau là 30000 đồng/ kg thì bán hết rau, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng 20 kg. Số rau thừa này được thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng /kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?

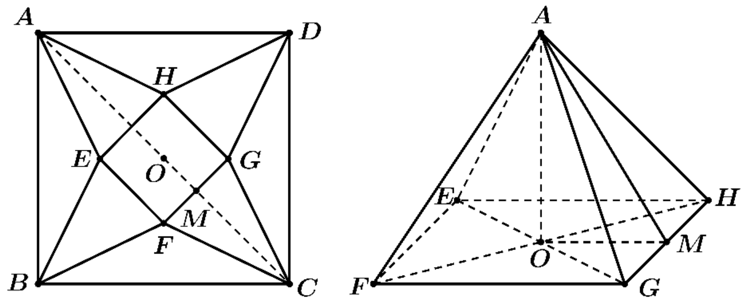
Kết quả:

Câu 14: Một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. (Tham khảo hình vẽ).

Giả sử từ vị trí $S(t)$ của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t được cho bởi công thức $S(t)=t^3-9t^2+15t,(t\geq 0)$. Trong đó t tính bằng giây và $S(t)$ tính bằng mét. Biết $(a;b)$ là khoảng thời gian có độ dài lớn nhất mà chất điểm chuyển động sang trái. Tính $P=a^2+b^2$.

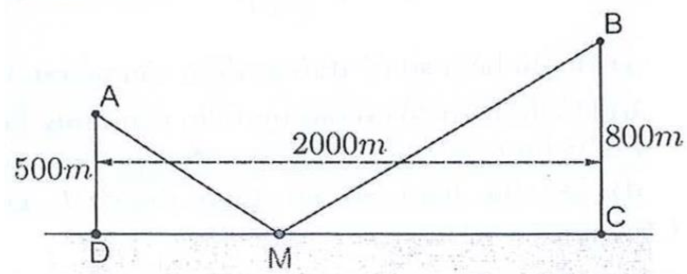
Kết quả:

Câu 15: Trong một tiết học Toán, giáo viên phát cho 4 tổ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 10 cm. Giáo viên yêu cầu 4 tổ sử dụng tấm bìa này và cắt tấm bìa theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA để sau đó gấp các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều (tham khảo hình vẽ bên dưới). Khi đó thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng $\frac{a\sqrt{b}}{c}\left(\text{cm}^3\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.



Kết quả:

Câu 16: Có hai xã cùng ở bên bờ sông Lam. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A và B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AD = 500m, BC = 800m$ và $CD = 2000m$. Các kĩ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn CD sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất (đơn vị là mét) của tổng khoảng cách đó (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

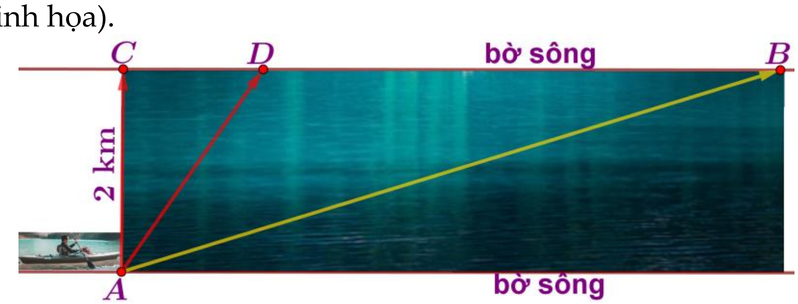


Kết quả:

Câu 17: Giả sử doanh số (tính bằng sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \dfrac{6500}{1 + 4e^{-t}}, t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất là bao nhiêu?

Kết quả:

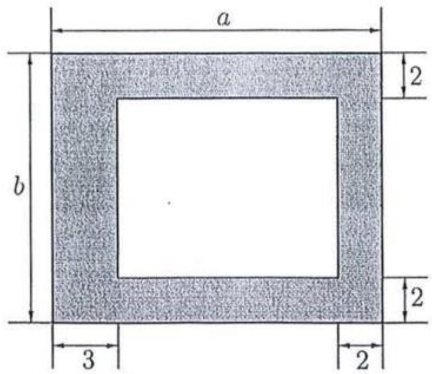
Câu 18: Một người chèo một chiếc thuyền xuất phát từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng $2\,\text{km}$, và muốn đến điểm B cách bờ đối diện $10\,\text{km}$. Người này có thể chỉ chèo thuyền hoặc kết hợp chèo thuyền với chạy bộ, càng nhanh càng tốt. Chẳng hạn, anh ta có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến điểm B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền qua sông đến điểm D nào đó ở giữa C và B rồi chạy bộ đến điểm B (hình minh họa).



Biết rằng vận tốc chèo thuyền của anh ta là $6\,\text{km/h}$ (đã tính vận tốc dòng nước), vận tốc chạy bộ của anh ta là $10\,\text{km/h}$. Trong tất cả các phương án đến B bằng cách chèo thuyền hoặc chèo thuyền rồi chạy bộ, phương án nhanh nhất có tổng thời gian là bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

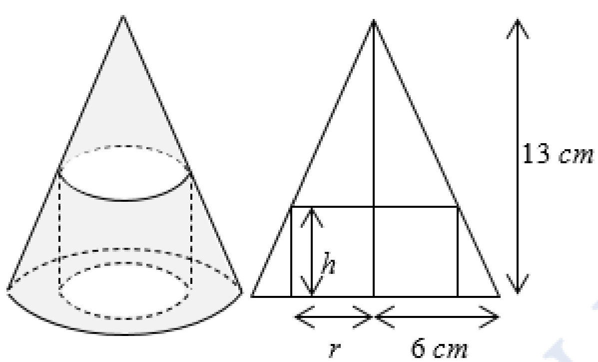
Kết quả:

Câu 19: Người ta muốn thiết kế một lồng nuôi cá có bề mặt hình chữ nhật bao gồm phần mặt nước có diện tích bằng 80 m^2 và phần đường đi xung quanh với kích thước (đơn vị: m) như Hình bên. Diện tích phần đường đi bé nhất bằng bao nhiêu mét vuông (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Kết quả:

Câu 20: Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 13 cm và bán kính đáy bằng 6 cm. Người ta cắt hình nón , trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một mặt phẳng như hình sau. Tìm chiều cao h (cm) của hình trụ để khối trụ tương ứng có thể tích lớn nhất (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

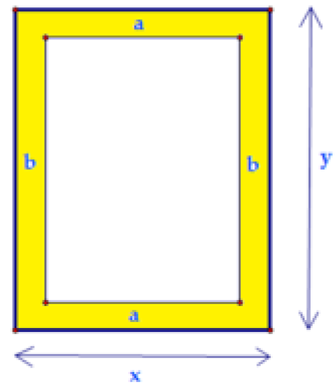


Kết quả:

Câu 21: Bác Tân muốn hàn một chiếc thùng tôn dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp và đựng được 32 lít nước. Để làm được chiếc thùng tôn mà tốn ít vật liệu nhất thì cạnh đáy của thùng bằng bao nhiêu mét (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)?

Kết quả:

Câu 22: Ông An muốn đào một cái ao trên một thửa đất hình chữ nhật có diện tích bằng $600m^2$. Bao quanh ao ông An bố trí các lối đi như hình vẽ với $a = 3m,\ b = 2m$. Tính diện tích lối đi khi diện tích ao có giá trị lớn nhất.



Kết quả:

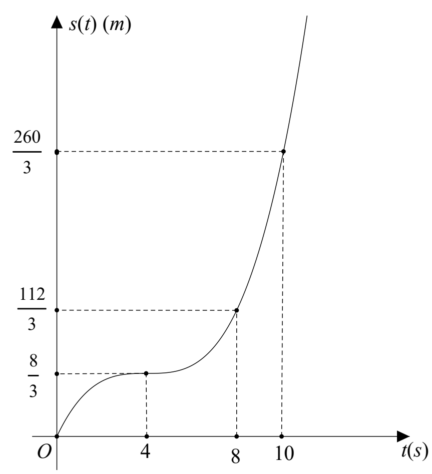
Câu 23: Ông An muốn xây 1 bể chứa nước với thể tích $15m^3$, chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng. Chi phí làm đáy và nắp bể là 1,2 triệu/m^2, chi phí làm mặt xung quanh bể là 1 triệu/m^2. Tính chiều cao của bể để chi phí làm bể là thấp nhất (đơn vị tính là m và làm tròn đến hàng phần trăm)

Kết quả:

Câu 24: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 16 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 400 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 chiếc ti vi mỗi tuần. Biết rằng hàm chi phí hàng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần. Nhà sản xuất nên đặt giá bán như thế nào để lợi nhuận là lớn nhất.

Kết quả:

Câu 25: Một vật chuyển động. Quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t \geq 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?

Kết quả:

Câu 26: Anh An muốn thiết kế một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình chữ nhật với chiều dài gấp đôi chiều rộng và diện tích tất cả các mặt của bể nước bằng

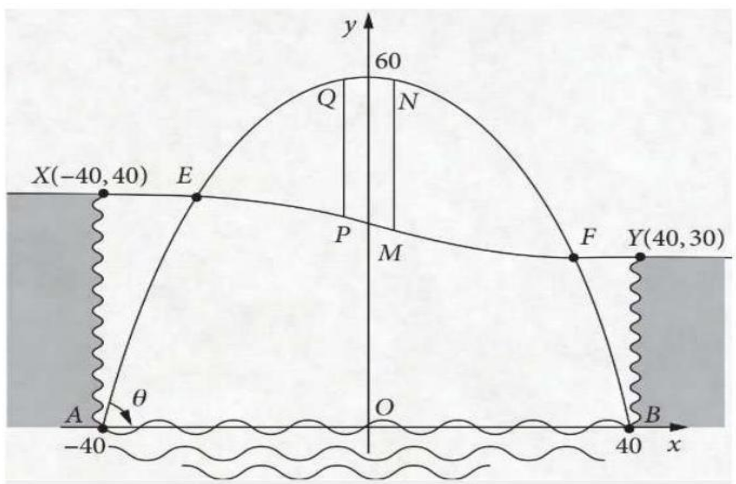
150 m². Để thể tích của bể nước là lớn nhất thì chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể nước theo đơn vị mét lần lượt có giá trị là a,b,c mét. Tính giá trị $a+2b+3c$.

Kết quả:

Câu 27: Một khách sạn có 80 phòng cho thuê. Người quản lí của khách sạn nhận thấy rằng tất cả các phòng của khách sạn sẽ có người thuê hết nếu giá thuê một phòng là 700000 đồng một ngày. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê phòng thêm 50000 đồng thì sẽ có thêm 2 phòng bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi phòng một ngày là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất. *(đơn vị: triệu đồng)*

Kết quả:

Câu 28: Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây. Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y=\frac{x^3}{25600}-\frac{3x}{16}+35$.



Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và đường XY. Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

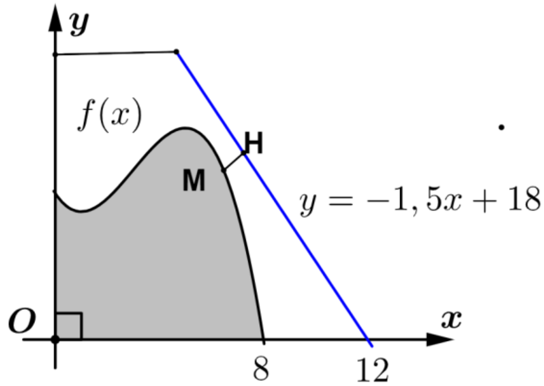
Kết quả:

Câu 29: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tuần A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x sản phẩm thì giá bán cho mỗi sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x sản phẩm trong một tuần là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi sản phẩm). Hỏi nhà máy A bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tuần thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Kết quả:

Câu 30: Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa như hình vẽ, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số

$y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là $100\,m$ *(Nguồn: A.Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).*



Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tọa độ của điểm để xây bến thuyền $M(x_0; y_0)$ .Tìm x_0.

Kết quả:

Câu 31: Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích $200\,m^2$ để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?

Kết quả:

Câu 32: Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Tàu thứ nhất chạy theo hướng Nam với vận tốc 6 hải lí/giờ, còn tàu thứ hai chạy theo hướng về vị trí ban đầu của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao lâu khoảng cách giữa hai con tàu là ngắn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

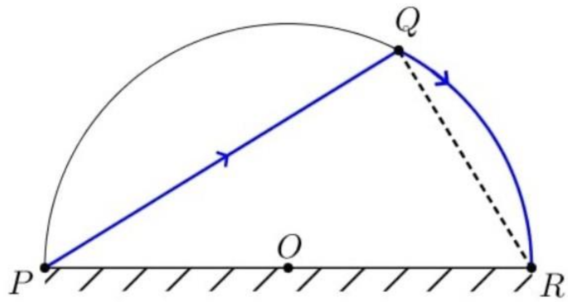
Kết quả:

Câu 33: Một cơ sở sản xuất quần áo trẻ em đang bán mỗi bộ quần áo với giá 80 nghìn đồng một bộ và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 1200 bộ quần áo. Cơ sở sản suất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lí thấy rằng nếu từ mức giá 80 nghìn đồng mà cứ mỗi lần tăng thêm 5 nghìn đồng mỗi bộ quần áo thì mỗi tháng sẽ bán ít đi 100 bộ. Biết vốn sản suất một bộ quần áo không thay đổi là 50 nghìn đồng . Để lợi nhuận thu được lớn nhất thì cơ sở sản xuất đưa ra giá bán cho một bộ quần áo là bao nhiêu? *(đơn vị: nghìn đồng).*

Kết quả:

Lời giải:

Câu 34: Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng $2km$, đường kính PR như hình vẽ sau:



Từ điểm P anh Toàn chèo một chiếc thuyền với vận tốc $3km/h$ đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc $6km/h$. Thời gian lớn nhất mà anh Toàn di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến phần chục).

Kết quả:

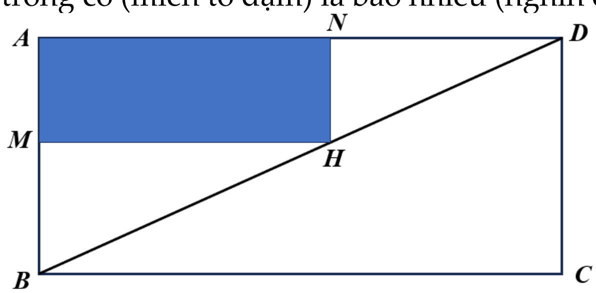
Câu 35: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t)=\dfrac{2t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Kết quả:

Câu 36: Một công ty sản xuất sản phẩm và doanh thu (đơn vị triệu đồng) từ việc bán sản phẩm được mô tả bởi hàm số $R(x)=-x^3+12x^2-36x+120$. Trong đó, x là số lượng sản phẩm được bán ra (tính bằng ngàn sản phẩm). Hỏi số lượng sản phẩm x tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là bao nhiêu?

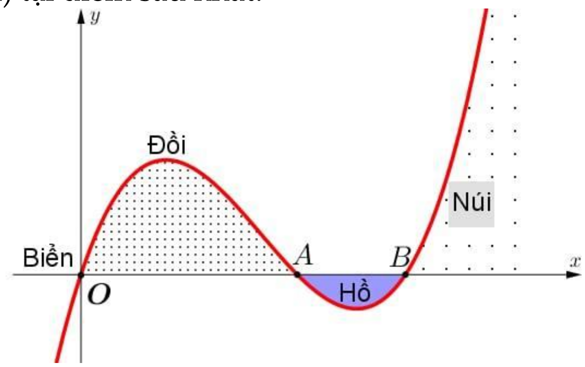
Kết quả:

Câu 37: Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Biết chi phí trồng cỏ là 80 (nghìn đồng)$/\text{m}^2$. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu (nghìn đồng)?



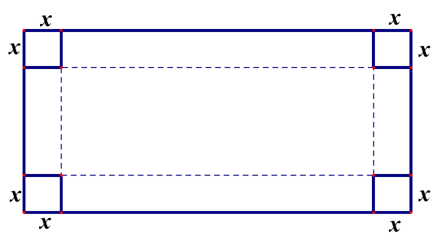
Kết quả:

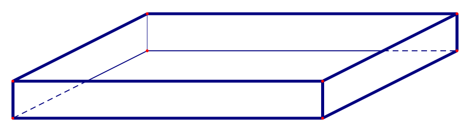
Câu 38: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hóa thành một hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA = \frac{15}{8}$km, độ rộng của hồ $AB = \frac{9}{8}$km và chiều cao của ngọn đồi là 243m. Tìm độ sâu của hồ (tính theo km) tại điểm sâu nhất.



Kết quả:

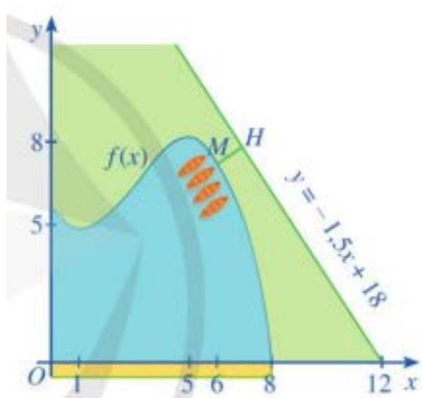
Câu 39: Từ tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng $30cm$ và chiều dài $80cm$, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh bằng $x\left(cm\right)$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp *(tham khảo hình vẽ)*. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*





Kết quả:

Câu 40: Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong công viên giải trí. Trong mô hình minh họa sau, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) = \frac{1}{10}\left(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56\right)$



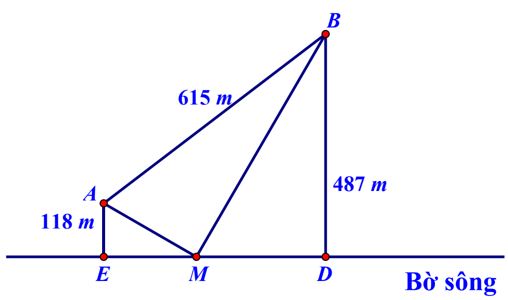
Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100m. Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị của hàm số $y = -\frac{3}{2}x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường là ngắn nhất . Khi đó tọa độ của điểm để xây bến thuyền là $M\left(a;b\right)$. Tính $T = a - b$

Kết quả:

Câu 41: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \le x \le 400)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \dfrac{100000x}{\frac{3}{2}x + 1}$ (đồng). Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp đó mua nguyên vật liệu với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Kết quả:

Câu 42: Cho hai vị trí A, B cách nhau $615m$, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là $118m$ và $487m$. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về **B.** Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu mét? (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

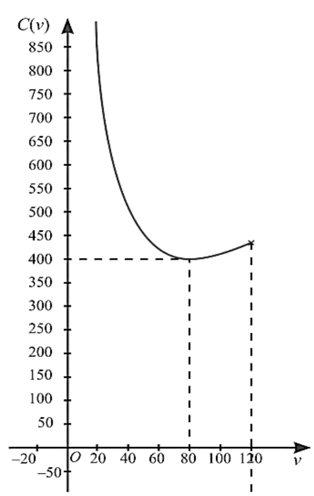


Kết quả:

Câu 43: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \ \ (0 < v \le 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu km/h để tiết kiệm tiền xăng nhất?

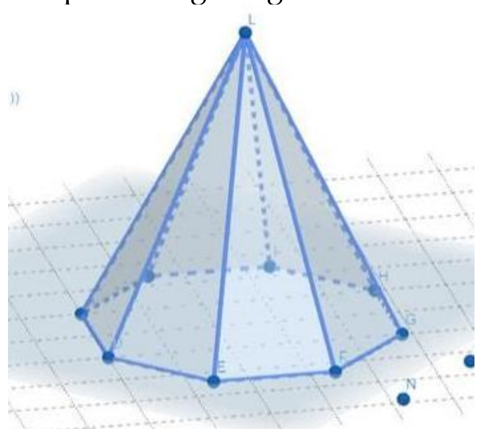
Kết quả:

Câu 44: Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó dùng dải ruy băng này để trang trí hộp quà hình trụ. Khi trang trí hộp quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (tham khảo hình vẽ minh họa).

Với dải ruy băng có kích thước như trên có thể trang trí được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu dm^3? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*

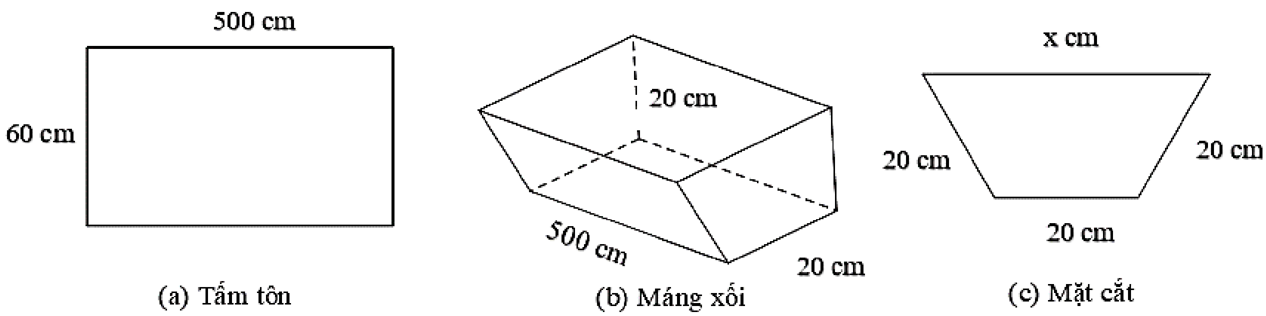
Kết quả:

Câu 45: Trên mặt trần tầng thượng một khách sạn 5 sao, người ta dự định lắp đặt một hệ thống pin năng lượng mặt trời gồm 7 tấm pin giống nhau có hình dạng một tam giác cân vào một khung sắt có dạng một hình chóp bát giác đều (*7 mặt bên của khung hình chóp được lắp vừa khít 7 tấm pin, còn 1 mặt bên để trống làm lối ra vào làm công tác bảo trì hệ thống*). Biết rằng các tấm pin không được đặt nghiêng quá $60°$ so với mặt trần và hệ thống không được sử dụng quá $150m^2$ diện tích mặt trần tầng thượng. Hỏi cần chi phí bao nhiêu triệu đồng cho việc lắp đặt hệ thống để tổng diện tích các tấm pin lớn nhất, biết giá của pin mặt trời là 2 triệu đồng$/m^2$ và chi phí lắp đặt khung hình chóp là không đáng kể.



Kết quả:

Câu 46: Để làm một máng xối nước có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác, từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $60\,\text{cm}\times 500\,\text{cm}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (được cắt bởi mặt phẳng song song với hai đầu máng xối) là một hình thang cân có đáy nhỏ và hai cạnh bên đều bằng $20\,\text{cm}$; còn đáy lớn có độ dài bằng $x\,(\text{cm})$. Tìm thể tích lớn nhất máng xối được tạo thành? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị m^3).



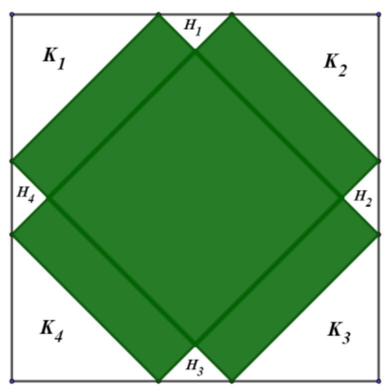
(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt

Kết quả:

Câu 47: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Biết công ty này có 38 máy và mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy công ty nên sử dụng để sản xuất đơn hàng trên là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Kết quả:

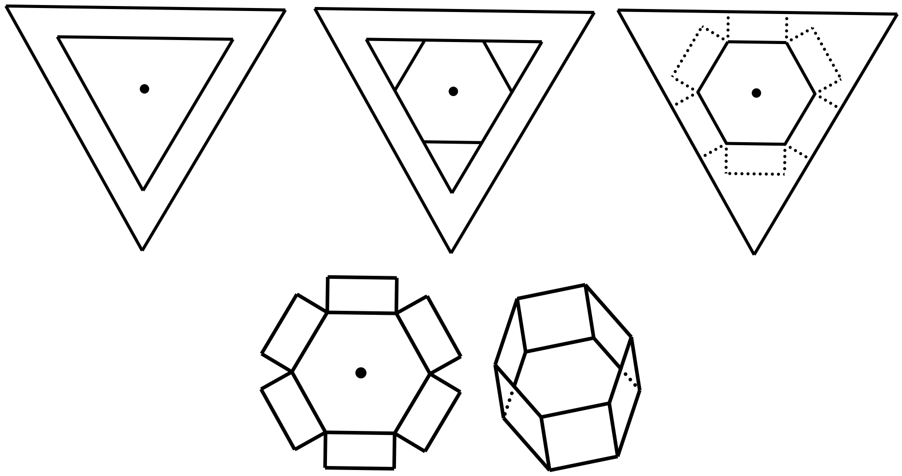
Câu 48: Từ hình vuông có cạnh bằng 8 cm người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ bên cạnh, biết các tam giác H_1, H_2, H_3, H_4 bằng nhau và K_1, K_2, K_3, K_4 bằng nhau.



Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật đó là bao nhiêu xăng-ti-mét khối? (Kết quả làm tròn hết hàng phần mười).

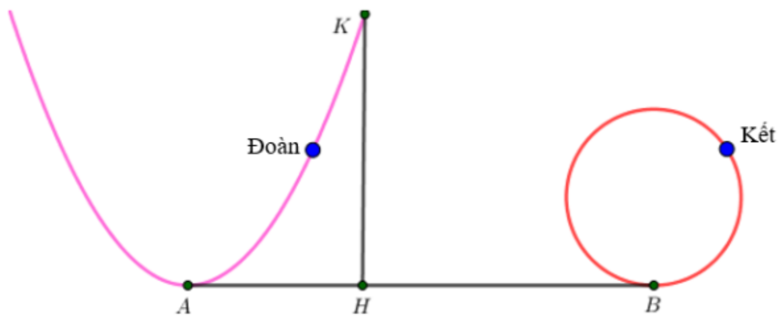
Kết quả:

Câu 49: Cho một tấm tôn hình một tam giác đều có cạnh bằng $2\ m$. Người ta thiết kế một hình lục giác đều và sáu hình chữ nhật ở phía ngoài lục giác có một cạnh bằng cạnh của lục giác, một cạnh bằng x (*mét*) với $0 < x < \frac{2}{3}$. Sau đó người ta cắt theo nét đứt đoạn để thu được hình hợp bởi một lục giác đều và sáu hình chữ nhật. Sau đó gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ lục giác đều (*tham khảo hình vẽ dưới đây*). Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu đề-xi-mét khối (dm^3) (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*)?



Kết quả:

Câu 50: Khi dạo chơi trên một công viên bạn Đoàn di chuyển trên đường Parabol, bạn Kết di chuyển trên đường tròn (*minh hoạ bằng hình vẽ dưới đây).*



Khoảng cách giữa đỉnh A của Parabol và tiếp điểm B của đường tròn là $16m$; $HK \perp AB$ và $AH = 6m, HK = 9m$. Tìm khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn Đoàn và Kết, biết rằng đường tròn có bán kính bằng $3m$ (*làm tròn đến hàng phần trăm).*

Kết quả:

HẾT

Huế, *09h00' Ngày 10 tháng 7 năm 2025*

Page: CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ

Môn: *Toán 12*

CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ

PHIẾU ÔN TẬP SỐ 01_*TrNg 2025*

Lớp Toán thầy LÊ BÁ BẢO
Trường THPT Đặng Huy Trứ SĐT: 0935.785.115 Facebook: Lê Bá Bảo
116/04 Nguyễn Lộ Trạch, TP Huế *Trung tâm Km10- Hương Trà – Huế*

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^3-3t^2+8t+1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3(s)$ bằng 8 m/s.		
b)	Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được $13m$, vận tốc khi đó bằng 8 m/s.		
c)	Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là $5\,m/s$.		
d)	Gia tốc tại thời điểm chất điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng $2\,m/s^2$.		

Lời giải:

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Sai.

Ta có $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+8$. Do đó vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=3(s)$ là $v(3)=17m/s$.

b) Đúng.

Vì $v(t)=3t^2-6t+8=3(t-1)^2+5>0\ \forall t$ nên quãng đường di chuyển của chất điểm tăng dần theo thời gian. Do đó thời điểm chất điểm di chuyển được $13m$ là

$t^3-3t^2+8t+1=13 \Leftrightarrow (t-2)(t^2-t+6)=0 \Leftrightarrow t=2$.

Vận tốc của chất điểm khi đó là $v(2)=8\,m/s$.

c) Đúng. Ta có $v(t)=3t^2-6t+8=3(t-1)^2+5\geq 5\ \forall t$. Do đó vận tốc nhỏ nhất là $5\,m/s$.

d) Sai.

Vì $v(t)=3t^2-6t+8=3(t-1)^2+5\geq 5\ \forall t$ nên thời điểm vận tốc đạt giá trị nhỏ nhất là $t=1s$.

Mà gia tốc $a(t)=v'(t)=6t-6$ nên gia tốc khi đó là $a(1)=0\,m/s^2$.

Câu 2: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10$ km/h thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

Khẳng định	Đúng	Sai

a)	Khi vận tốc $v=10\,\text{km/h}$ thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.		
b)	Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông với vận tốc $x\,\text{km/h}$ là $f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^3$.		
c)	Khi vận tốc $v=30\,\text{km/h}$ thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là 43000 đồng.		
d)	Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông nhỏ nhất là km/h.		

Lời giải:

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng.

Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là: $\dfrac{1}{10}$ (giờ)

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\dfrac{1}{10}\cdot 480000=48000$ (đồng).

b) Sai

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc của tàu, $x>0$.

Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là: $\dfrac{1}{x}$ (giờ)

+) Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\dfrac{1}{x}\cdot 480=\dfrac{480}{x}$ (nghìn đồng)

+) Hàm chi phí cho phần thứ hai là $p=kx^3$ (nghìn đồng/giờ)

Mà khi $x=10\Rightarrow p=30\Rightarrow k=0,03$.

Ta có $p=0,03x^3$ (nghìn đồng/giờ)

Do đó chi phí phần 2 để chạy 1 km là $\dfrac{1}{x}\cdot 0,03x^3=0,03x^2$ (nghìn đồng)

Vậy tổng chi phí: $f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^2$.

c) Đúng

Tổng chi phí: $f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^2$.

Thay $x=v=30$ (km/h) vào ta có $f(30)=\dfrac{480}{30}+0,03.30^2=43$ (nghìn đồng).

d) Đúng

$f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^2=\dfrac{240}{x}+\dfrac{240}{x}+0,03x^2\geq 3\sqrt[3]{1728}=36$.

Dấu $''=''$ xảy ra khi $x=20$.

Câu 3: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1\leq x\leq 17)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x)=2x^3-9x^2-40x+700$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá

200 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x)=200x$.		
b)	Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x)=-2x^3+9x^2+240x+700$.		
c)	Hộ làm nghề dệt này đạt lợi nhuận tối đa nếu sản xuất và bán ra mỗi ngày số mét vải lụa là 8 mét.		
d)	Hộ làm nghề dệt này làm ăn có lãi khi số mét vải lụa cần sản xuất và bán ra mỗi ngày trong khoảng $(2;11)$.		

Lời giải:

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng.

Khi bán x mét vải lụa:

- Số tiền thu được là: $B(x)=200x$.

b) Sai.

- Lợi nhuận thu được là: $L(x)=B(x)-C(x)=-2x^3+9x^2+240x-700$

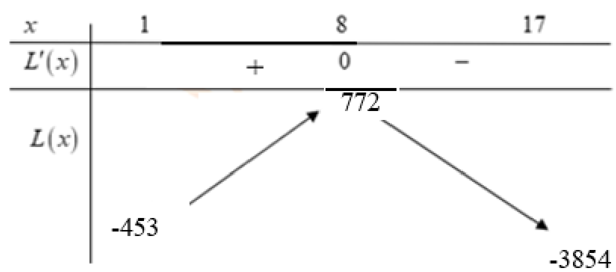
c) Đúng.

Xét hàm số $L(x)=-2x^3+9x^2+240x-700$

Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1;17]$.

Ta có: $L'(x)=-6x^2+18x+240, L'(x)=0 \Leftrightarrow x=-5$ hoặc $x=8$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy Hộ làm nghề dệt này đạt lợi nhuận tối đa nếu sản xuất và bán ra mỗi ngày số mét vải lụa là 8 mét.

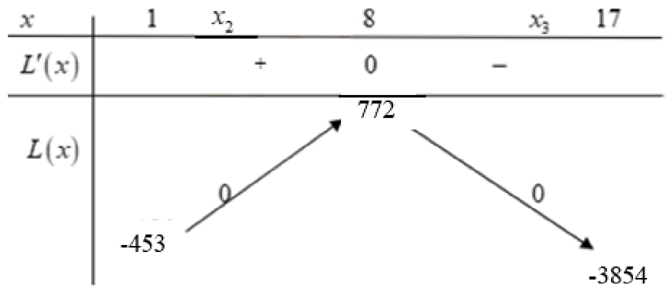
d) Đúng.

Xét hàm số $L(x)=-2x^3+9x^2+240x-700$

Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1;17]$; $L(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \approx -10,35 \\ x_3 \approx 12,05 \\ x_2 \approx 2,81 \end{array}\right.$

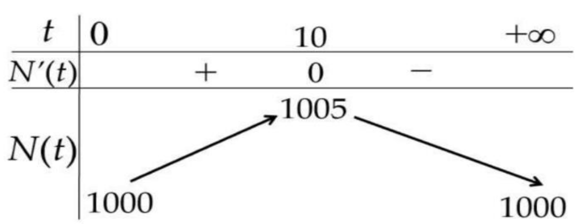
Ta có: $L'(x)=-6x^2+18x+240, L'(x)=0 \Leftrightarrow x=-5$ (loại) hoặc $x=8$

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy Hộ làm nghề dệt này làm ăn có lãi khi số mét vải lụa cần sản xuất và bán ra mỗi ngày trong khoảng $(2,81;12,05)$.

Câu 4: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức $N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}\ (con)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. (Nguồn: *R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Đến giây thứ 10 thì số lượng vi khuẩn đạt nhiều nhất.		
b)	Thời gian tăng lên nhiều giờ thì số lượng vi khuẩn càng nhiều.		
c)	Sau khi cấy lại môi trường dinh dưỡng, số lượng vi khuẩn tăng thêm được 3 con so với lúc đầu tại hai thời điểm t_1 và t_2 khi đó $t_1t_2=100$.		
d)	Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ trên sẽ như hình dưới đây: 		

Lời giải:

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Ta có $N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}$ nên $N'(t)=\frac{-100t^2+10000}{(t^2+100)^2}$. Do đó $N'(t)=0\Leftrightarrow t=10$.

a) Đúng.

Ta có $N(0)=1000$; $N(10)=1005$ và $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)=1000$ nên $\max\limits_{[0;+\infty)}N(t)=N(10)=1005$.

b) Sai. Ta có $N'(t)<0\Leftrightarrow t>10$.

c) Đúng. Ta có $N(t)=1003\Leftrightarrow\frac{100t}{t^2+100}=3\Leftrightarrow 3t^2-100t+300=0$. Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt t_1; t_2 và $t_1t_2=100$.

d) Đúng.

Câu 5: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (tính theo lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$V(t)=300(t^2-t^3)+4,5$ với $0\le t\le 0,5$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$. Biết 1 lít xăng có giá là 21.000 đồng.

	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là $1,5$ lít.		
b)	Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Số tiền người mua phải trả là 787.500 đồng.		
c)	Khi xăng chảy vào bình xăng thì tốc độ tăng thể tích là lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 21.		
d)	Phương trình $V'(t)=0$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.		

Lời giải:

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

(a) Lượng xăng ban đầu là: $V(0)=300(0^2-0^3)+4,5=4,5(l)$. **Sai**

(b) Lượng xăng trong bình khi bơm đầy là: $V(0,5)=300(0,5^2-0,5^3)+4,5=42(l)$.

Lượng xăng đã bơm vào bình là: $42-4,5=37,5(l)$

Vậy số tiền người mua phải trả là: $37,5.21000=787500$ đồng. **Đúng**

(c) Xét hàm tốc độ tăng thể tích $V'(t)=300(2t-3t^2)$ với $0\le t\le 0,5$, có:

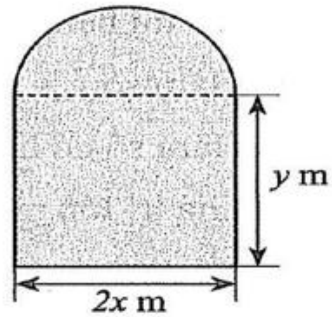
$V''(t)=300(2-6t)\Rightarrow V''(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ (phút).

Vì $\begin{cases}V'(0)=0\\ V'\left(\frac{1}{3}\right)=100\\ V'(0,5)=75\end{cases}$ nên tốc độ tăng thể tích là lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 20. **Sai**

(d) Xét phương trình $V'(t)=0\Leftrightarrow 300(2t-3t^2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $V'(t)=0$ có một nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. **Sai.**

Câu 6: Người ta dùng một thanh thép có chiều dài 4 m để uốn thành khung viền của một cửa sổ có dạng một hình chữ nhật ghép với nửa hình tròn có các kích thước được cho trên hình vẽ:



	Khẳng định	Đúng	Sai
a)	Có thể biểu thị y theo công thức $y=2-\dfrac{(\pi-2)x}{2}$.		
b)	Diện tích của cửa sổ được tính bởi công thức $S(x)=4x-2x^2-\dfrac{\pi x^2}{2}\left(\mathrm{m}^2\right)$.		
c)	Diện tích của cửa sổ lớn nhất khi $x=\dfrac{4}{\pi+2}(\mathrm{m})$.		
d)	Giá trị lớn nhất của diện tích cửa sổ là $\dfrac{8}{\pi+4}\left(\mathrm{m}^2\right)$.		

Lời giải:

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Sai.

Ta có $2x+2y+\pi x=4$, suy ra $y=2-\dfrac{(\pi+2)x}{2}$.

b) Đúng.

Diện tích của cửa sổ: $S(x)=2xy+\dfrac{\pi x^2}{2}=2x\left(2-x-\dfrac{\pi x}{2}\right)+\dfrac{\pi x^2}{2}=4x-2x^2-\dfrac{\pi x^2}{2}\left(\mathrm{m}^2\right)$.

c) Sai.

Xét hàm số $S(x)=4x-2x^2-\dfrac{\pi x^2}{2}\left(\mathrm{m}^2\right)$, ta có $x>0$ và $y>0$, suy ra $0<x<\dfrac{4}{\pi+2}$

Khi đó, $S'(x)=4-4x-\pi x; S'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{\pi+4}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{4}{\pi+4}$		$\dfrac{4}{\pi+2}$
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{8}{\pi+4}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy diện tích của cửa sổ lớn nhất khi $x=\frac{4}{\pi+4}(\text{ m})$.

d) Đúng.

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị lớn nhất của diện tích cửa sổ là $S\left(\frac{4}{\pi+4}\right)=\frac{8}{\pi+4}\left(\text{ m}^2\right)$.

Câu 7: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau ít phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t)=1000+30t^2-t^3 (0\le t\le 30)$. Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất ?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 20

Ta có: $N'(t)=60t-3t^2$; $N'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[0;20] \\ t=20\in[0;20] \end{array}\right.$.

Ta có: $N(0)=1000; N(20)=5000; N(30)=1000$.

Vậy số vi khuẩn lớn nhất sau 20 phút

Câu 8: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-t^3+6t^2+3t+9$ với t được tính bằng giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s được tính bằng mét là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Tính quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất.

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 22

Ta có: $s=-t^3+6t^2+3t+9$

$v(t)=s'(t)=-3t^2+12t+3$

Ta có: $v(t)=s'(t)=-3\left(t^2-4t-1\right)=-3\left[(t-2)^2-5\right]=-3(t-2)^2+15\le 15$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất tại thời điểm $t=2(s)$.

Khi đó quãng đường vật đi được là: $s(2)-s(0)=31-9=22\ (\text{m})$.

Câu 9: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được tính theo công thức $f(t)=\frac{26t+10}{t+5}$ (nghìn người). Biết đạo hàm của hàm số $f(t)=\frac{26t+10}{t+5}$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Gọi k là tốc độ tăng dân số của thị trấn đó vào năm 2022. Giá trị của biểu thức $1000k$ bằng bao nhiêu? (*làm tròn kết quả đến hàng phần chục*)

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 36,9

Ta có: $f(t)=\frac{26t+10}{t+5}\Rightarrow f'(t)=\frac{120}{(t+5)^2}$

Tốc độ tăng dân số của thị trấn đó vào năm 2022 là $k = f'(2022-1970) = \dfrac{120}{(52+5)^2} = \dfrac{120}{57^2}$

$\Rightarrow 1000k = 1000.\dfrac{120}{57^2} \simeq 36,9$.

Câu 10: Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 40 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 30 lít/phút. Gọi $f(t)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút. khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức x (gam/lít). Tính x (*làm tròn đến hàng đơn vị).*

Kết quả: ☐

Lời giải:

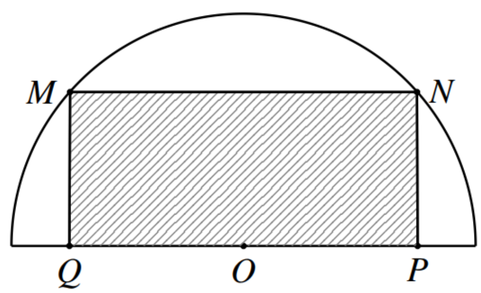
Đáp án: 40

Nước muối tinh khiết: $30.40.t$ (gam).

Nồng độ muối sau t phút : $f(t) = \dfrac{30.40.t}{30t+3000}$

Khi t càng lớn : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{30.40.t}{30t+3000} = 40$ (gam/lít)

Câu 11: Một tấm nhôm có dạng nửa hình tròn có bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (như hình vẽ).



Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là bao nhiêu?

Kết quả: ☐

Lời giải:

Đáp án: 9

Đặt $OQ = x\,(0<x<3) \Rightarrow MQ = \sqrt{OM^2 - OQ^2} = \sqrt{9-x^2}$.

Diện tích tấm tôn hình chữ nhật là $S = PQ.MQ = 2x.\sqrt{9-x^2} \le 2.\dfrac{x^2+9-x^2}{2} = 9$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12: Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không có nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}m^3$. Biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100000 $đồng/m^2$. Khi đó chi phí thuê nhân công ít nhất bao nhiêu triệu đồng?

Kết quả: ☐

Lời giải:

Đáp án: 7,21

Gọi $2x, x$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng của đáy bể.

Do thể tích bằng $\dfrac{500}{3}m^3$ nên chiều cao của bể là $\dfrac{250}{3x^2}$.

Khi đó diện tích toàn phần của bể là $S = 2.\dfrac{250}{3x^2}.x + 2.\dfrac{250}{3x^2}.2x + 2x.x = \dfrac{500}{3x} + 2x^2$.

Do đó: $S = \dfrac{250}{3x} + \dfrac{250}{3x} + 2x^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{250}{3x}.\dfrac{250}{3x}.2x^2} = \dfrac{150}{\sqrt[3]{9}}$.

Khi đó tiền thuê nhân công ít nhất là $0,1.\dfrac{150}{\sqrt[3]{9}} \approx 7,21$ (triệu đồng).

Câu 13: Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Mỗi ngày, nếu giá bán rau là 30000 đồng/ kg thì bán hết rau, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng 20 kg. Số rau thừa này được thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng /kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 4100

Gọi x $(x \geq 0)$ (nghìn đồng) là số tiền tăng lên cho mỗi kg rau.

+) Số tiền bán mỗi một kg rau sau khi tăng là $x + 30$ (nghìn đồng).

+) Số kg rau thừa là $20x$ $(x \leq 50)$.

Do đó, tổng số kg rau bán được là $1000 - 20x(\text{kg})$.

Tổng số tiền thu được là $T(x) = (1000 - 20x)(30 + x) + 20x.2 = -20x^2 + 440x + 30000$.

Cách 1:

Ta có $-20x^2 + 440x + 30000 = 32420 - 20(x - 11)^2 \leq 32420.$

Do đó $T(x) \leq 32420 \Rightarrow \max T = 32420$, dấu "$=$" xảy ra khi $x = 11$.

Cách 2:

$T'(x) = -40x + 440 \Rightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 11$.

Lập bảng biến thiên: Ta có $T(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 32420000 đồng tại $x = 11$.

Vậy để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại nên bán với giá 41000 đồng.

Câu 14: Một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. (Tham khảo hình vẽ).

Giả sử từ vị trí $S(t)$ của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t được cho bởi công thức $S(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, (t \geq 0)$. Trong đó t tính bằng giây và $S(t)$ tính bằng mét. Biết $(a;b)$ là khoảng thời gian có độ dài lớn nhất mà chất điểm chuyển động sang trái. Tính $P = a^2 + b^2$.

Kết quả:

Lời giải:

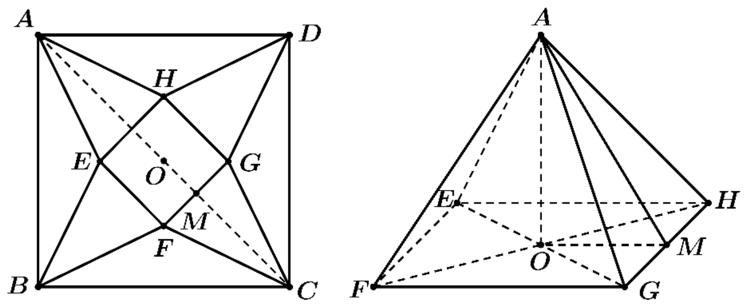
Đáp án: 26

Ta có vận tốc của vật là $V(t) = S'(t) = 3t^2 - 18t + 15$.

Vật chuyển động sang trái khi và chỉ khi $V(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 < 0 \Leftrightarrow t \in (1;5)$.

Vậy $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$. Suy ra $P = a^2 + b^2 = 1^2 + 5^2 = 26$.

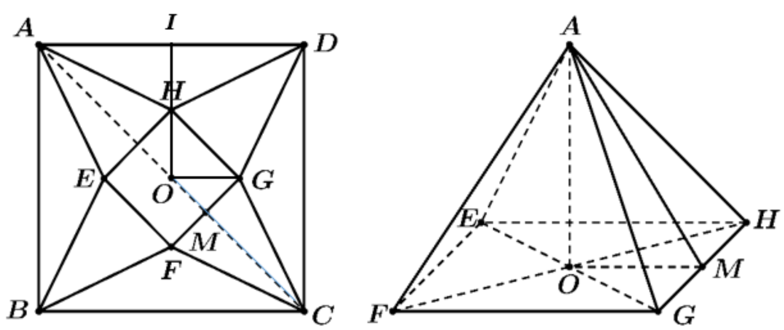
Câu 15: Trong một tiết học Toán, giáo viên phát cho 4 tổ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $10\,\text{cm}$. Giáo viên yêu cầu 4 tổ sử dụng tấm bìa này và cắt tấm bìa theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA để sau đó gấp các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều (tham khảo hình vẽ bên dưới). Khi đó thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}\left(\text{cm}^3\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 45



Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AD và đặt $HI = x$ $(0 < x < 5)$.

Ta có $OH = OI - IH = 5 - x$, suy ra $EF = FG = GH = HE = (5 - x)\sqrt{2}$.

Chiều cao của khối chóp là

$AO = \sqrt{AH^2 - OH^2} = \sqrt{AI^2 + IH^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 + x^2 - (5 - x)^2} = \sqrt{10x}$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}.\left((5 - x)\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{10x} = \frac{2\sqrt{10}}{3}.(5 - x)^2.\sqrt{x}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{10}}{3}.(5 - x)^2.\sqrt{x}$ trên khoảng $(0;5)$ có

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{10}}{3}\left[-2.(5-x).\sqrt{x}+(5-x)^2.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=\frac{2\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{(5-x)^2-4x(5-x)}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{(5-x)(5-5x)}{2\sqrt{x}}$$

.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{(5-x)(5-5x)}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5-x=0\\5-5x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=1\end{array}\right..$$

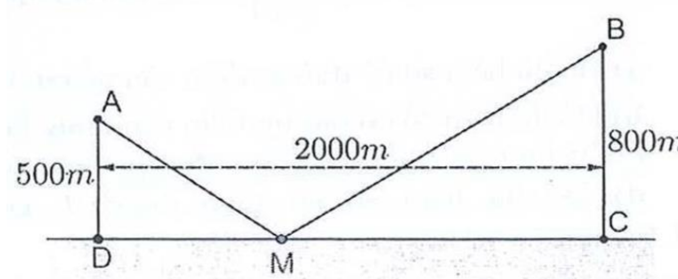
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=\frac{2\sqrt{10}}{3}.(5-x)^2.\sqrt{x}$ trên khoảng $(0;5)$ như sau

x	0		1		5
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{32\sqrt{10}}{3}$	↘	0

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;5)} f(x)=\frac{32\sqrt{10}}{3}$ đạt được khi $x=1$.

Suy ra $V_{\max}=\frac{32\sqrt{10}}{3}\left(\text{cm}^3\right)$. Vậy $P=32+10+3=45$.

Câu 16: Có hai xã cùng ở bên bờ sông Lam. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A và B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AD=500m, BC=800m$ và $CD=2000m$. Các kĩ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn CD sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A,B đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất (đơn vị là mét) của tổng khoảng cách đó (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 2385

Đặt $DM=x(0<x<2000)$

Tổng khoảng cách từ hai vị trí A,B đến vị trí M là: $S(x)=\sqrt{500^2+x^2}+\sqrt{800^2+(2000-x)^2}$

Xét $S(x)=\sqrt{250000+x^2}+\sqrt{4640000-4000x+x^2}$

$$S'(x)=\frac{x}{\sqrt{250000+x^2}}+\frac{x-2000}{\sqrt{4640000-4000x+x^2}}$$

Xét $S'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{250000+x^2}}+\dfrac{x-2000}{\sqrt{4001600-4000x+x^2}}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{10000}{13}$.

Suy ra: $MinS(x)=2385,37\approx 2385$

Câu 17: Giả sử doanh số (tính bằng sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t)=\dfrac{6500}{1+4e^{-t}}, t\geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất là bao nhiêu?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 1,39

Ta có: $f(t)=\dfrac{6500}{1+4e^{-t}}=\dfrac{6500e^t}{e^t+4}$, $t\geq 0$; $f'(t)=\dfrac{26000.e^t}{\left(e^t+4\right)^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{26000.e^t}{\left(e^t+4\right)^2}$, $t\geq 0$.

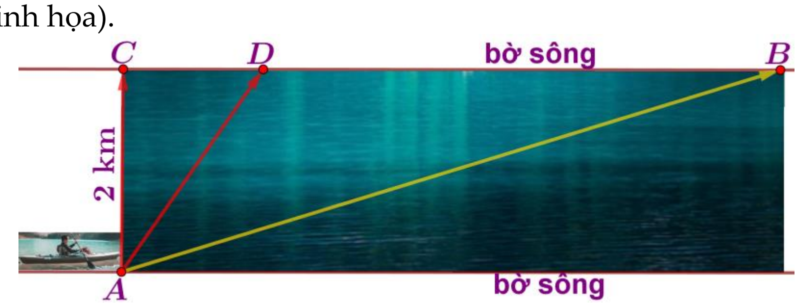
Ta có: $h'(t)=\dfrac{26000\left(-e^{2t}+16\right)e^t}{\left(e^t+4\right)^4}$; $h'(t)=0 \Leftrightarrow -e^{2t}+16=0 \Leftrightarrow e^t=4 \Leftrightarrow t=\ln 4$ (tm)

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:

t	0		$\ln 4$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	-	
$h(t)$	1040	$\nearrow$	1625	$\searrow$	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 4\approx 1,39$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 18: Một người chèo một chiếc thuyền xuất phát từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng $2\,\text{km}$, và muốn đến điểm B cách bờ đối diện $10\,\text{km}$. Người này có thể chỉ chèo thuyền hoặc kết hợp chèo thuyền với chạy bộ, càng nhanh càng tốt. Chẳng hạn, anh ta có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến điểm B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền qua sông đến điểm D nào đó ở giữa C và B rồi chạy bộ đến điểm B (hình minh họa).



Biết rằng vận tốc chèo thuyền của anh ta là $6\,\text{km/h}$ (đã tính vận tốc dòng nước), vận tốc chạy bộ của anh ta là $10\,\text{km/h}$. Trong tất cả các phương án đến B bằng cách chèo thuyền hoặc chèo thuyền rồi chạy bộ, phương án nhanh nhất có tổng thời gian là bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 1,27

Đặt $BD = x\ (\text{km})$ là quãng đường người đó chạy bộ, với điều kiện $0 \le x \le 10$.

Khi đó: $CD = BC - BD = 10 - x\ (\text{km})$.

Quãng đường người đó chèo thuyền là $AD = \sqrt{4 + (10-x)^2}\ (\text{km})$.

Gọi t_1, t_2 (giờ) lần lượt là thời gian người đó chèo thuyền và thời gian người đó chạy bộ.

Ta có: $t_1 = \dfrac{AD}{6} = \dfrac{\sqrt{4+(10-x)^2}}{6}$ và $t_2 = \dfrac{BD}{10} = \dfrac{x}{10}$.

Tổng thời gian chèo thuyền A đến D và đi bộ từ D đến B là $t_1 + t_2 = \dfrac{\sqrt{4+(10-x)^2}}{6} + \dfrac{x}{10}$.

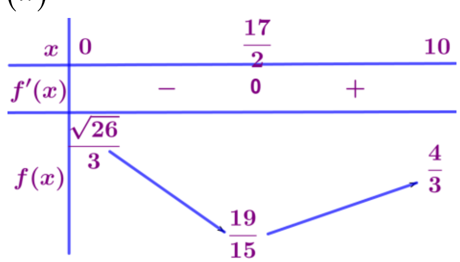
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+(10-x)^2}}{6} + \dfrac{x}{10}$ trên đoạn $[0;10]$.

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{10-x}{6\sqrt{4+(10-x)^2}} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{-5(10-x) + 3\sqrt{4+(10-x)^2}}{30\sqrt{4+(10-x)^2}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow -5(10-x) + 3\sqrt{4+(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+(10-x)^2} = 5(10-x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{17}{2} \in [0;10] \\ x = \dfrac{23}{2} \notin [0;10] \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

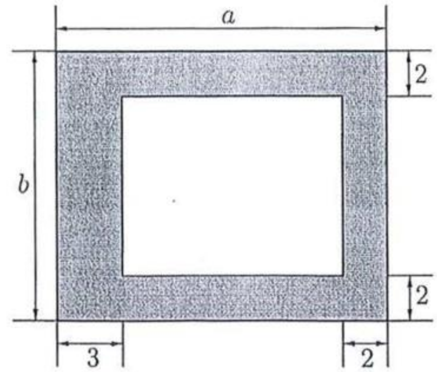


+ Tổng thời gian chèo thuyền A đến C và chạy bộ từ C đến B là: $\dfrac{2}{6} + \dfrac{10}{10} = \dfrac{4}{3} \approx 1,33$ (giờ).

+ Thời gian chèo thuyền trực tiếp từ A đến B là $\dfrac{\sqrt{4+100}}{6} = \dfrac{\sqrt{26}}{3} \approx 1,7$ (giờ).

Vậy phương án nhanh nhất là chèo thuyền từ A đến D và chạy bộ từ D đến B có tổng thời gian là $\dfrac{19}{15} \approx 1,27$ (giờ).

Câu 19: Người ta muốn thiết kế một lồng nuôi cá có bề mặt hình chữ nhật bao gồm phần mặt nước có diện tích bằng $80\ \text{m}^2$ và phần đường đi xung quanh với kích thước (đơn vị: m) như Hình bên. Diện tích phần đường đi bé nhất bằng bao nhiêu mét vuông (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 100

Ta có $S = a.b - 80 = a\left(\frac{80}{a-5} + 4\right) - 80 = \frac{4a^2 - 20a + 400}{a-5}$; $a > 5$.

$$\Rightarrow S' = \frac{4a^2 - 40a - 300}{(a-5)^2}.$$

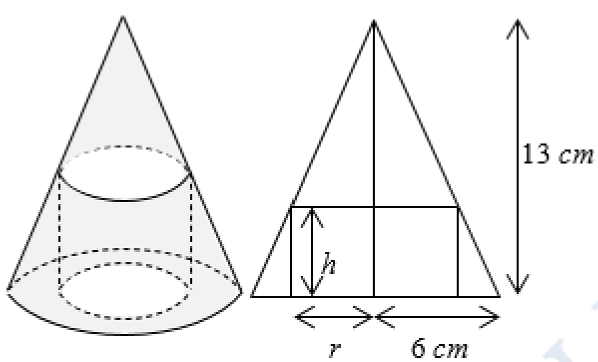
$$S' = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 40a - 300 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 15 \\ a = -5 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		5		15		$+\infty$
S'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
S	$-\infty$	↗	-60	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	100	↗	$+\infty$

Vậy giá trị bé nhất của diện tích phần đường đi trên khoảng $(5;+\infty)$ là $100\ m^2$.

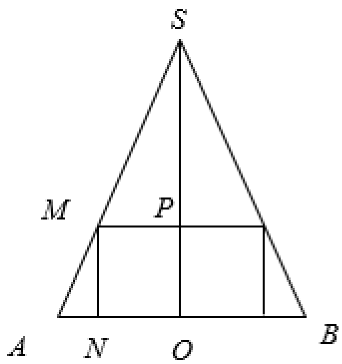
Câu 20: Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 13 cm và bán kính đáy bằng 6 cm. Người ta cắt hình nón , trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một mặt phẳng như hình sau. Tìm chiều cao h (cm) của hình trụ để khối trụ tương ưng có thể tích lớn nhất (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 4,33



Ta có $\Delta AMN \sim \Delta ASO$ (g-g-g), ta được

$$\frac{AN}{AO}=\frac{MN}{SO} \Leftrightarrow \frac{6-r}{6}=\frac{h}{13} \Leftrightarrow 78-13r=6h \Rightarrow h=13-\frac{13r}{6}$$

Thể tích khối trụ bằng:

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\left(13-\frac{13r}{6}\right)=13\pi r^2-\frac{13\pi r^3}{6}$$

Ta có $V'=26\pi r-\frac{13\pi r^2}{2}; V'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r=0 \\ r=4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		4		6
V'		+	0	−	
V	0	↗	$\frac{208}{3}\pi$	↘	0

Vậy để khối trụ tương ưng có thể tích lớn nhất thì hình trụ có bán kính đáy bằng $r=4$ khi đó chiều cao $h=\frac{13}{3}=4,33$ (cm)

Câu 21: Bác Tân muốn hàn một chiếc thùng tôn dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp và đựng được 32 lít nước. Để làm được chiếc thùng tôn mà tốn ít vật liệu nhất thì cạnh đáy của thùng bằng bao nhiêu mét (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 0,4

Gọi x (mét) là cạnh đáy của chiếc thùng tôn, h (mét) là chiều cao của chiếc thùng tôn.

Thể tích của chiếc thùng tôn được tính theo công thức $V=x^2.h$ hay $0,032=x^2.h$. Suy ra $h=\frac{0,032}{x^2}$.

Diện tích các mặt của chiếc thùng tôn bằng $x^2+\dfrac{0,128}{x}$.

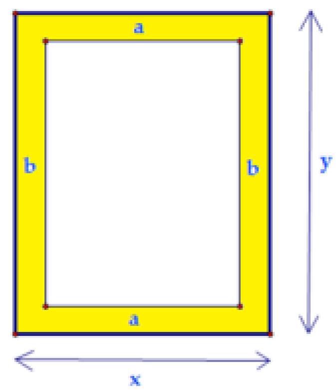
Xét hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{0,128}{x}$ có $f'(x)=2x-\dfrac{0,128}{x^2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\dfrac{0,128}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^3=0,064 \Leftrightarrow x=0,4$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, $f(0,4)=0,48$.

Suy ra để làm được chiếc thùng tôn mà tốn ít vật liệu nhất thì cạnh đáy của thùng bằng $0,4$ mét.

Câu 22: Ông An muốn đào một cái ao trên một thửa đất hình chữ nhật có diện tích bằng $600m^2$. Bao quanh ao ông An bố trí các lối đi như hình vẽ với $a=3m$, $b=2m$. Tính diện tích lối đi khi diện tích ao có giá trị lớn nhất.



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 216

Gọi x, y là hai kích thước của thửa đất $(x, y>0)$.

Khi đó $xy=600 \Rightarrow y=\dfrac{600}{x}$.

Diện tích ao là $S(x)=(x-4)(y-6)=(x-4)(\dfrac{600}{x}-6)=624-6x-\dfrac{2400}{x}$

$S'(x)=-6+\dfrac{2400}{x^2}=\dfrac{-6x^2+2400}{x^2}$

$S'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-6x^2+2400}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=20\,(tm) \\ x=-20\,(l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	-	
S(x)		$\nearrow$	S_{max}	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy diện tích ao lớn nhất khi $x = 20m, y = 30m$.
Diện tích lối đi là $20.30 - (20-4)(30-6) = 216\,m^2$

Câu 23: Ông An muốn xây 1 bể chứa nước với thể tích $15m^3$, chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng. Chi phí làm đáy và nắp bể là 1,2 triệu/m^2, chi phí làm mặt xung quanh bể là 1 triệu/m^2. Tính chiều cao của bể để chi phí làm bể là thấp nhất (đơn vị tính là m và làm tròn đến hàng phần trăm)

Kết quả: $\boxed{}$

Lời giải:

Đáp án: 2,75

Gọi chiều rộng của bể là: $x(m), x > 0$.

Khi đó chiều dài của bể là: $\frac{3}{2}x(m)$.

Ta có thể tích bể là $V = B.h = x.\frac{3}{2}x.h = 15 \Rightarrow h = \frac{10}{x^2}$.

Khi đó tổng chi phí để làm bể là:

$$T(x) = 2.x.\frac{3}{2}x.1,2 + 2\left(x.h + \frac{3}{2}x.h\right).1 = 3,6x^2 + 5xh = 3,6x^2 + 5x.\frac{10}{x^2} = 3,6x^2 + \frac{50}{x}$$

$$= 3,6x^2 + \frac{25}{x} + \frac{25}{x} \geq 3\sqrt[3]{3,6x^2.\frac{25}{x}.\frac{25}{x}} = 3\sqrt[3]{2250}$$ (theo bất đẳng thức Cauchy)

Dấu "=" xảy ra khi và khỉ chi $3,6x^2 = \frac{25}{x} \Leftrightarrow x^3 = \frac{25}{3,6} = \frac{125}{18} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{125}{18}}$.

Khi đó chiều cao của bể là $h = \frac{10}{x^2} = \frac{10}{\left(\sqrt[3]{\frac{125}{18}}\right)^2} \approx 2,75(m)$.

Câu 24: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 16 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 400 nghìn đồng , số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 chiếc ti vi mỗi tuần. Biết rằng hàm chi phí hàng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần. Nhà sản xuất nên đặt giá bán như thế nào để lợi nhuận là lớn nhất.

Kết quả: $\boxed{}$

Lời giải:

Đáp án: 8,5

+) Gọi $p\ (p > 0)$ (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, $x\ (x \in \mathbb{N},\ x \geq 1000)$ là số ti vi. Khi đó ta cần xác định hàm cầu $p = p(x)$

Theo giả thiết tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất. Do đó $p = p(x) = ax + b, a \neq 0$.

Theo đề có: $x_1 = 1000$ thì $p_1 = 16$; $x_2 = 1100$ thì $p_2 = 15,6$.

Khi đó phương trình đường thẳng $p(x)=ax+b, a\neq 0$ đi qua hai điểm $(1000;16)$ và $(1100;15,6)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1000a+b=16\\1100a+b=15,6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{250}\\b=20\end{cases}$$

Vậy $p=p(x)=-\dfrac{1}{250}x+20$.

+) Khi đó tổng doanh thu mỗi tuần từ tiền bán x ti vi là

$$R(x)=xp=x\left(\frac{-1}{250}x+20\right)=-\frac{1}{250}x^2+20x.$$

+) Khi đó tổng lợi nhuận từ bán x ti vi là:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{250}x^2+20x\right)-(12000-3x)$$

$$=-\frac{1}{250}x^2+23x-12000$$

+) Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ lớn nhất.

Ta có: $P'(x)=-\dfrac{1}{125}x+23;\ P'(x)=0\Leftrightarrow x=2875\,(t/m)$.

Bảng biến thiên:

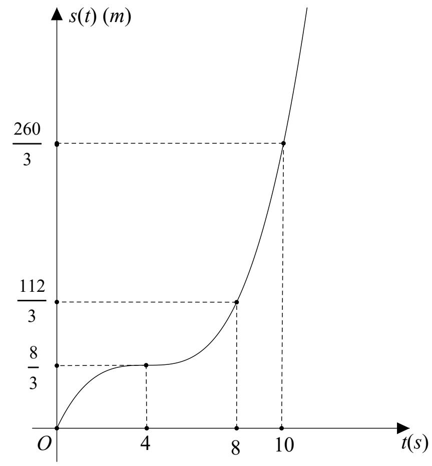
x	0		2875		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$	0	$\nearrow$	$21062,5$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số ti vi bán ra trong 1 tuần là 2875 chiếc thì lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất.

Với $x=2875$ thì $p=8,5$.

Vậy phải để giá bán là 8,5 triệu đồng.

Câu 25: Một vật chuyển động. Quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t\geq 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 8

Gọi quãng đường $s(t)=at^3+bt^2+ct+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị (C) được mô tả như hình vẽ.

Các điểm $O, A\left(4;\frac{8}{3}\right), B\left(8;\frac{112}{3}\right), C\left(10;\frac{260}{3}\right)$ thuộc (C) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} d=0 \\ 4^3.a+4^2.b+4c+d=\frac{8}{3} \\ 8^3.a+8^2.b+8.c+d=\frac{112}{3} \\ 10^3.a+10^2.b+10c+d=\frac{260}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow s(t)=\frac{1}{6}t^3-t^2+2t$$

$v(t)=s'(t)=\frac{1}{2}t^2-2t+2=\frac{1}{2}(t-2)^2\geq 0,\ t\geq 0$

$a(t)=v'(t)=t-2$

Vật chuyển động nhanh dần thì $a(t)>0\Leftrightarrow t-2>0\Leftrightarrow t>2$

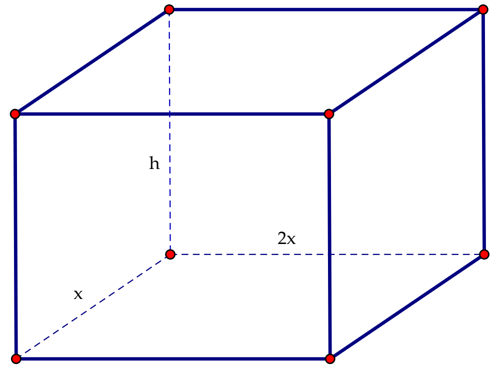
Vậy trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài 8 giây.

Câu 26: Anh An muốn thiết kế một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình chữ nhật với chiều dài gấp đôi chiều rộng và diện tích tất cả các mặt của bể nước bằng 150 m^2. Để thể tích của bể nước là lớn nhất thì chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể nước theo đơn vị mét lần lượt có giá trị là a,b,c mét. Tính giá trị $a+2b+3c$.

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 30



Gọi $x, 2x, h$ lần lượt là chiều rộng, dài, cao của bể chứa nước.

Ta có $2x^2 + 2(xh + 2xh) = 150 \Leftrightarrow h = \dfrac{150 - 2x^2}{6x}$ (Điều kiện $0 < x < \sqrt{75}$).

Thể tích bể cá $V = 2x^2 . \dfrac{150 - 2x^2}{6x} = \dfrac{1}{3}(150x - 2x^3)$.

$V' = \dfrac{1}{3}(150 - 6x^2)$. $V' = 0 \Rightarrow x = 5$.

Lập BBT ta có :

x	0		5		$\sqrt{75}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{500}{3}$	$\searrow$	

Suy ra: $V_{\max} = \dfrac{500}{3} \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy khi đó $a = 10; b = 5; c = \dfrac{10}{3} \Rightarrow a + 2b + 3c = 30$

Câu 27: Một khách sạn có 80 phòng cho thuê. Người quản lí của khách sạn nhận thấy rằng tất cả các phòng của khách sạn sẽ có người thuê hết nếu giá thuê một phòng là 700000 đồng một ngày. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê phòng thêm 50000 đồng thì sẽ có thêm 2 phòng bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi phòng một ngày là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất. *(đơn vị: triệu đồng)*

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 1,35

Gọi x là số lần tăng giá ($x > 0, x \in \mathbb{N}$). Khi đó

Giá thuê một phòng là: $700000 + 50000x$.

Số phòng có khách thuê là: $80 - 2x$.

Doanh thu thu được là $T(x) = (700000 + 50000x)(80 - 2x) = 2.10^4(70 + 5x)(40 - x)$.

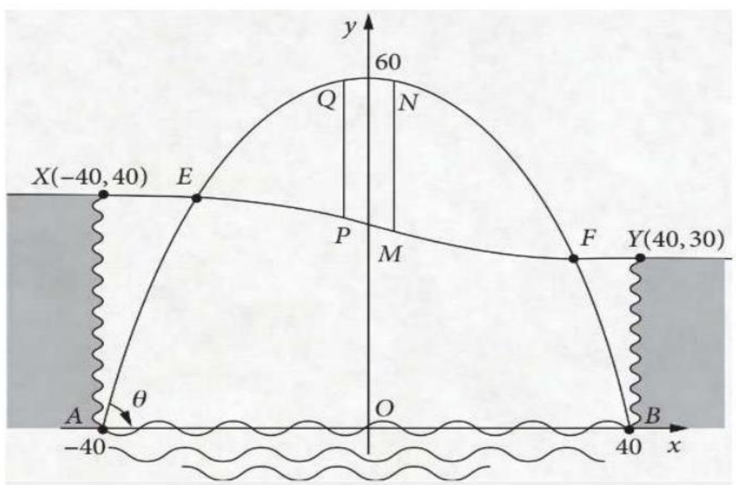
$T'(x)=2.10^4\left[5(40-x)-(70+5x)\right]=2.10^4(130-10x)$

x	0		13		$+\infty$
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$		$\nearrow$	729.10^5	$\searrow$	

$T(x)$ lớn nhất khi $x=13$

Vậy giá thuê phòng là 1350000 hay $1,35$ triệu đồng thì doanh thu sẽ lớn nhất.

Câu 28: Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây. Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y=\dfrac{x^3}{25600}-\dfrac{3x}{16}+35$.



Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và đường XY. Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Kết quả: ☐

Lời giải:

Đáp án: 49,5

Gọi phương trình parabol $(P): y=ax^2+bx+c$.

Ta có $\begin{cases} A(-40;0)\in(P) \\ B(40;0)\in(P) \\ (0;60)\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1600a-40b+c=0 \\ 1600a+40b+c=0 \\ c=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{80} \\ b=0 \\ c=60 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = -\frac{3}{80}x^2 + 60$.

Theo hình vẽ ta có $MN = y_N - y_M = -\frac{3}{80}x^2 + 60 - \left(\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35\right)$

$MN = f(x) = -\frac{x^3}{25600} - \frac{3}{80}x^2 + \frac{3x}{16} + 25$

Cho $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_E \approx -23,707 \\ x_F \approx 27,996 \\ x \approx -964,28 \end{array}\right.$.

Tìm giá trị lớn nhất của $MN = f(x) = -\frac{x^3}{25600} - \frac{3}{80}x^2 + \frac{3x}{16} + 25$ trên $x \in [x_E; x_F]$.

$f'(x) = -\frac{3}{25600}x^2 - \frac{3}{40}x + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 2,4903 \quad (n) \\ x \approx -642,4903 \ (l) \end{array}\right.$

Ta có $f(x_E) = f(x_F) = 0$.

$f(2,4903) \approx 25,234$.

Do đó MN đạt GTLN là $MN \approx 25,234$ tại $x \approx 2,4903$.

$PQ = f(-2,4903) \approx 24,299$

Vậy $MN + PQ \approx 49,5$.

Câu 29: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tuần A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x sản phẩm thì giá bán cho mỗi sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x sản phẩm trong một tuần là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi sản phẩm). Hỏi nhà máy A bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tuần thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Kết quả: ☐

Lời giải:

Đáp án: 71

Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x sản phẩm $(0 \le x \le 100)$ cho B là:

$R(x) = x.P(x) = x(45 - 0,001x^2) = 45x - 0,001x^3$ (triệu đồng).

Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là:

$H(x) = R(x) - C(x) = (45x - 0,001x^3) - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$

Xét hàm số $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ với $(0 \le x \le 100)$ ta có:

$H'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \in [0;100]$

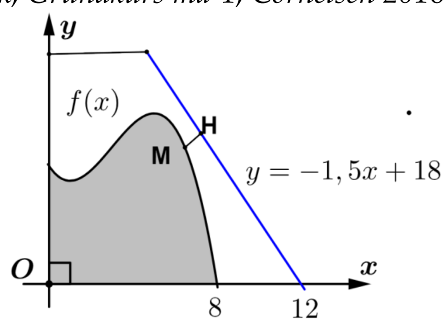
Bảng biến thiên

x	0		$50\sqrt{2}$		100
$H'(x)$		$+$	0	$-$	
$H(x)$	100	$\nearrow$	$500\sqrt{2}-100$	$\searrow$	400

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[0;100]} H(x) = H\left(50\sqrt{2}\right) = 500\sqrt{2}-100$.

Vậy nhà máy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2} \approx 71$ sản phẩm cho B mỗi tuần.

Câu 30: Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa như hình vẽ, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}\left(-x^3+9x^2-15x+56\right)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là $100\,m$ (*Nguồn: A.Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).



Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x+18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tọa độ của điểm để xây bến thuyền $M\left(x_0;y_0\right)$.Tìm x_0.

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 6

Ta có: $d\left(M;(d)\right) = \dfrac{\left|1,5x_0+y_0-18\right|}{\sqrt{1.5^2+1}} = \dfrac{\left|1,5x_0+\frac{1}{10}\left(-x_0^{\,3}+9x_o^{\,2}-15x_o+56\right)-18\right|}{\frac{\sqrt{13}}{2}}$

$= \dfrac{\left|15x_0+\left(-x_0^{\,3}+9x_o^{\,2}-15x_o+56\right)-180\right|}{5\sqrt{13}} = \dfrac{\left|-x_0^{\,3}+9x_o^{\,2}-124\right|}{5\sqrt{13}}$

Xét hàm số: $h(x) = -x^3+9x^2-124$ trên $[0;8]$ ta có: $h'(x) = -3x^2+18x$;

Xét $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2+18x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 6$; Ta có: $h(0) = -124; h(6) = -16\ h\left(8\right) = -60$

Vậy GTNN của: $d\left(M;(d)\right) = \dfrac{16}{5\sqrt{13}}$ khi $x_o = 6$

Câu 31: Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích $200\,m^2$ để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 10

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào. Theo đề bài, ta có $0 < x \le 15$.

Diện tích khu đất này là $200\left(m^2\right)$ nên chiều dài của khu đất là $\frac{200}{x}(m)$.

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là $L(x) = 2x + \frac{200}{x}(m)$.

Xét hàm số: $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$, với $x \in (0;15]$.

Ta có: $L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$;

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (do } x > 0\text{)}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} L(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(2x + \frac{200}{x}\right) = +\infty$;

$L(10) = 40; L(15) = \frac{130}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		15
$L'(x)$		$-$	0	$+$	
$L(x)$	$+\infty$	$\searrow$	40	$\nearrow$	$\frac{130}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là $40\,m$ khi chiều rộng khu đất này là $x = 10(m)$ (và chiều dài là $\frac{200}{10} = 20(m)$).

Câu 32: Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Tàu thứ nhất chạy theo hướng Nam với vận tốc 6 hải lí/giờ, còn tàu thứ hai chạy theo hướng về vị trí ban đầu của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao lâu khoảng cách giữa hai con tàu là ngắn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

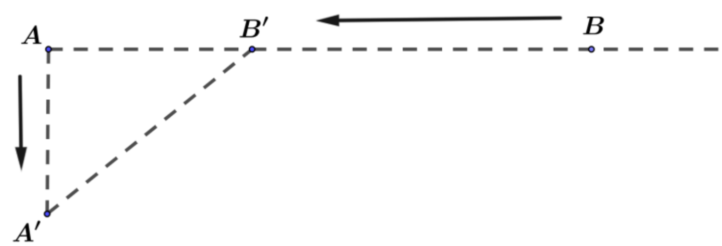
Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: $0,41$

Giả sử A, A' lần lượt là vị trí ban đầu và vị trí lúc sau của tàu 1, B, B' lần lượt là vị trí ban đầu và vị trí lúc sau của tàu 2.

Vì tàu 1 đi về hướng Nam (hướng $\overrightarrow{AA'}$) mà hai con tàu lúc đầu lại ở cùng vĩ tuyến nên hướng $\overrightarrow{AA'}$ là hướng xuống dưới và vuông góc với AB. Tàu 2 đi về phía tàu 1, nên đi theo hướng $\overrightarrow{BA}$ (như hình vẽ).



Gọi d (hải lí) là khoảng cách ngắn nhất giữa hai con tàu và t (giờ) là thời gian từ ban đầu đến lúc đạt khoảng cách đó.

Ta có: $d = A'B' = \sqrt{AB'^2 + AA'^2} = \sqrt{(AB - BB')^2 + AA'^2}$, trong đó, $AB = 5, BB' = 7t, AA' = 6t$, BB' và AA' lần lượt là quãng đường của tàu 2 và tàu 1 đi được trong thời gian t.

Khi đó, $d = \sqrt{(5-7t)^2 + (6t)^2} = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$ với $t > 0$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$ trên $(0; +\infty)$ ta có

$f'(t) = \dfrac{85t - 35}{\sqrt{85t^2 - 70t + 25}} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{17}$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		$\frac{7}{17}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$f(\frac{7}{17})$	$\nearrow$	

Ta có $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = \dfrac{7}{17}$.

Vậy khoảng cách ngắn nhất giữa hai con tàu là ngắn nhất sau $\dfrac{7}{17} \approx 0,41$ giờ.

Câu 33: Một cơ sở sản xuất quần áo trẻ em đang bán mỗi bộ quần áo với giá 80 nghìn đồng một bộ và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 1200 bộ quần áo. Cơ sở sản suất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lí thấy rằng nếu từ mức giá 80 nghin đồng mà cứ mỗi lần tăng thêm 5 nghin đồng mỗi bộ quần áo thì mỗi tháng sẽ bán ít đi 100 bộ. Biết vốn sản suất một bộ quần áo không thay đổi là 50 nghin đồng . Để lợi nhuận thu được lớn nhất thì cơ sở sản xuất đưa ra giá bán cho một bộ quần áo là bao nhiêu? *(đơn vị: nghìn đồng).*

Kết quả: ☐

Lời giải:

Đáp án: 95

Gọi x là số lần tăng giá ($x>0, x\in\mathbb{N}$). Khi đó

Giá một bộ quần áo là: $80+5x$ (nghìn đồng).

Số bộ quần áo bán được là: $1200-100x$.

Số tiền thu được là: $T(x)=(80+5x)(1200-100x)$ (nghìn đồng).

Lãi thu được $L(x)=T(x)-(1200-100x).50=(1200-100x)(30+5x)$ (nghìn đồng).

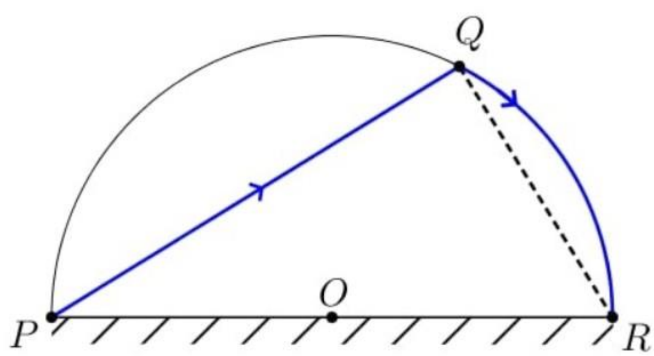
$L'(x)=500(6-2x)$

x	0		3		$+\infty$
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$		$\nearrow$	405.10^2	$\searrow$	

$L(x)$ lớn nhất khi $x=3$

Vậy giá một bộ quần áo là 95 nghìn đồng thì lợi nhuận sẽ lớn nhất.

Câu 34: Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng $2km$, đường kính PR như hình vẽ sau:

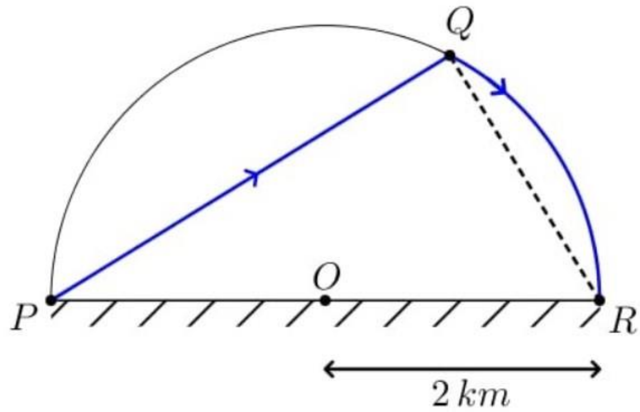


Từ điểm P anh Toàn chèo một chiếc thuyền với vận tốc $3km/h$ đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc $6km/h$. Thời gian lớn nhất mà anh Toàn di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến phần chục).

Kết quả: ☐

Lời giải:

Đáp số: 1,5



Đặt $\widehat{QPR} = \alpha \ (rad)$, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có ΔPQR vuông tại $Q \Rightarrow PQ = PR.\cos\alpha = 4\cos\alpha$ mà $\widehat{QOR} = 2.\widehat{QPR} = 2\alpha$.

Độ dài cung tròn $QR = 2.2\alpha = 4\alpha$.

Thời gian anh Toàn chèo thuyền từ P đến Q là $\dfrac{4\cos\alpha}{3}$ (giờ)

Thời gian anh Toàn chạy bộ từ Q đến R là $\dfrac{4\alpha}{6} = \dfrac{2\alpha}{3}$ (giờ)

Tổng thời gian anh Toàn di chuyển từ P đến R là: $t = \dfrac{4\cos\alpha}{3} + \dfrac{2\alpha}{3}$, $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

Xét hàm số $t(\alpha) = \dfrac{4\cos\alpha}{3} + \dfrac{2\alpha}{3}$ với $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$t'(\alpha) = \dfrac{1}{3}(-4\sin\alpha + 2)$, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$t'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Bằng cách lập bảng biến thiên ta thấy $t(\alpha) \le t\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \approx 1,5$ (giờ).

Vậy thời gian lớn nhất mà anh Toàn di chuyển từ P đến R là 1,5 giờ.

Câu 35: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 1

Với $c(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$, $t > 0$ ta có $c'(t) = \dfrac{2.(-t^2+1)}{(t^2+1)^2}$.

Cho $c'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(-t^2+1)}{(t^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t		0		1		$+\infty$
$c'(t)$			$+$	0	$-$	
$c(t)$			$\nearrow$	1	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t)=1$ khi $t=1$.

Cách 2:

Với $t>0$, ta có $t^2+1 \ge 2t$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow t=1$.

Do đó, $c(t)=\dfrac{2t}{t^2+1} \le \dfrac{2t}{2t}=1$. Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t)=1$ khi $t=1$.

Câu 36: Một công ty sản xuất sản phẩm và doanh thu (đơn vị triệu đồng) từ việc bán sản phẩm được mô tả bởi hàm số $R(x)=-x^3+12x^2-36x+120$. Trong đó, x là số lượng sản phẩm được bán ra (tính bằng ngàn sản phẩm). Hỏi số lượng sản phẩm x tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là bao nhiêu?

Kết quả: $\boxed{}$

Lời giải:

Đáp án: **2000**

Ta có

$R'(x)=-3x^2+24x-36$.

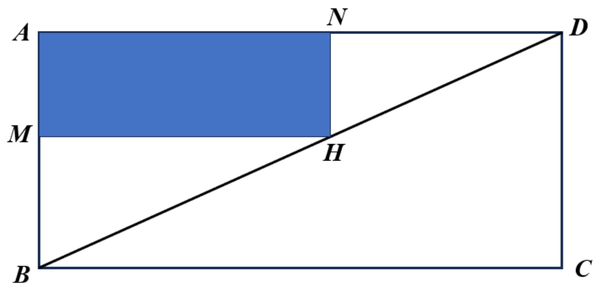
$R'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+24x-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		2		6		$+\infty$
$R'(x)$		-	0	$+$	0	-	
$R(x)$		$\searrow$	88	$\nearrow$	120	$\searrow$	

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có số lượng sản phẩm x tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là 2000 sản phẩm.

Câu 37: Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Biết chi phí trồng cỏ là 80 (nghìn đồng)$/\text{m}^2$. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu (nghìn đồng)?



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 500

Vì ΔDHN đồng dạng với ΔDBA nên $\dfrac{DN}{DA}=\dfrac{NH}{AB}=x$, với $0<x<1$.

Khi đó $NH=x.AB$; $DN=x.DA\Rightarrow AN=(1-x)DA$.

Ta có $S_{AMHN}=AN.NH=x(1-x).AB.DA=x(1-x)S_{ABCD}=25x(1-x)$.

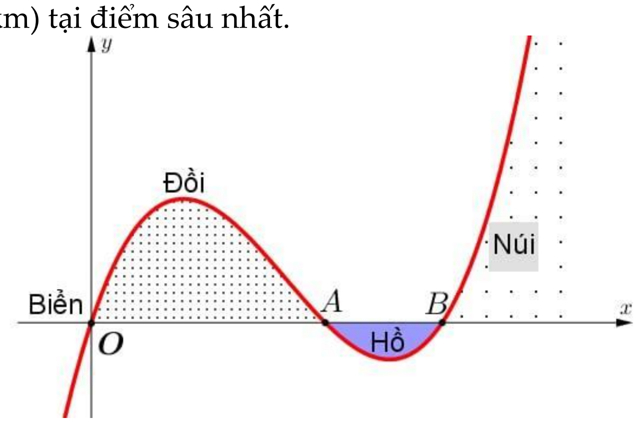
Số tiền người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ là $80.25x(1-x)$ (nghìn đồng).

Để số tiền lớn nhất thì $f(x)=x(1-x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;1)$.

Nhận thấy $f(x)=x(1-x)=x-x^2=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2\le\dfrac{1}{4},\forall x\in(0;1)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ là 500 (nghìn đồng).

Câu 38: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hóa thành một hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA=\dfrac{15}{8}\text{km}$, độ rộng của hồ $AB=\dfrac{9}{8}\text{km}$ và chiều cao của ngọn đồi là 243m. Tìm độ sâu của hồ (tính theo km) tại điểm sâu nhất.



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: $0,1$.

Ta có $OA=\dfrac{15}{8}\text{km}$, $OB=OA+AB=\dfrac{15}{8}+\dfrac{9}{8}=3(\text{km})$ và chiều cao của ngọn đồi là $243\text{m}=0,243\text{km}$.

Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm: $O(0;0)$, $A\left(\frac{15}{8};0\right)$, $B(3;0)$ nên hàm số bậc ba có dạng $y=f(x)=a.x\left(x-\frac{15}{8}\right)(x-3)=a\left(x^3-\frac{39}{8}x^2+\frac{45}{8}x\right)$ với $a>0$.

Khi đó $y'=a\left(3x^2-\frac{39}{4}x+\frac{45}{8}\right)$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-\frac{39}{4}x+\frac{45}{8}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{2} \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right.$.

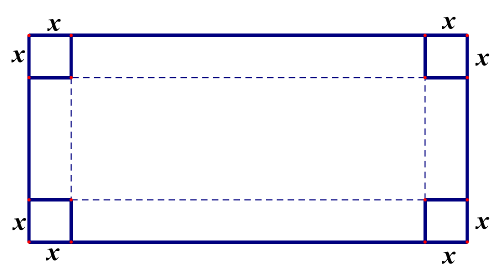
Chiều cao của ngọn đồi đạt tại điểm cực đại của đồ thị hàm số, do đó

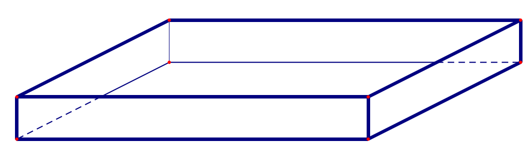
$$y\left(\frac{3}{4}\right)=0,243\Leftrightarrow a.\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{15}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-3\right)=0,243\Leftrightarrow a=\frac{16}{125}.$$

Suy ra $y\left(\frac{5}{2}\right)=-0,1$.

Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất đạt tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất là $0,1\text{km}$.

Câu 39: Từ tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng $30cm$ và chiều dài $80cm$, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp *(tham khảo hình vẽ)*. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

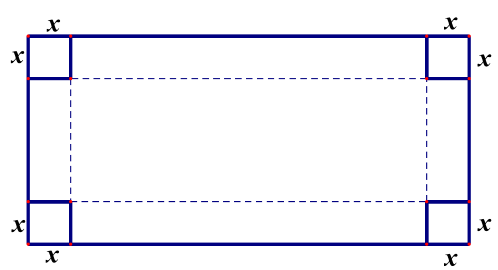


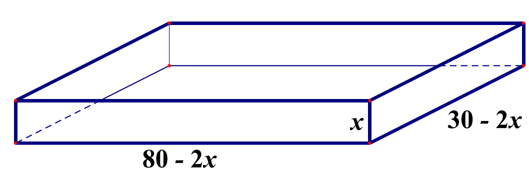


Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 6,67





Hình hộp chữ chữ nhật thu được có:
Mặt đáy là một hình chữ nhật có chiều dài $80-2x\ (cm)$ và chiều rộng $30-2x(cm)$. Diện tích mặt đáy $S=(80-2x)(30-2x)$ với $0<x<15$.

Chiều cao của hình hộp bằng $x(cm)$.

Thể tích khối hộp là: $V = x(80-2x)(30-2x) = 4x^3 - 220x^2 + 2400x$.

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 220x^2 + 2400x$ với $0 < x < 15$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 440x + 2400$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30 \\ x = \dfrac{20}{3} \end{array}\right.$.

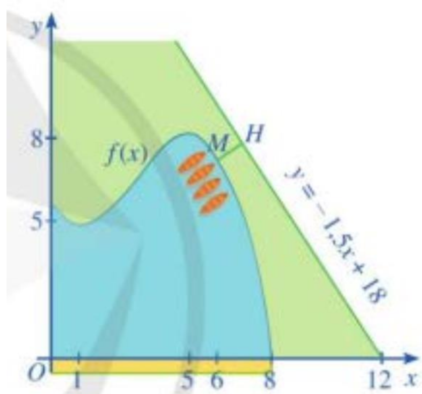
Do $0 < x < 15$ nên ta lấy $x = \dfrac{20}{3}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{20}{3}$		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{200000}{27}$	$\searrow$	0

Vậy khối hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi $x = \dfrac{20}{3} \approx 6,67\,(cm)$.

Câu 40: Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong công viên giải trí. Trong mô hình minh họa sau, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{10}\left(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56\right)$

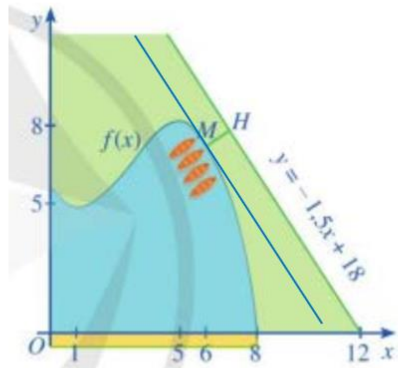


Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100m. Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị của hàm số $y = -\dfrac{3}{2}x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường là ngắn nhất . Khi đó tọa độ của điểm để xây bến thuyền là $M(a;b)$. Tính $T = a - b$

Kết quả:

Lời giải:

Kết quả: $-1,4$



Do $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên điểm M gần đường thẳng $d: y = -\dfrac{3}{2}x + 18$ nhất thì tiếp tuyến của hàm số $y = f(x)$ tại M song song với d

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{10}\left(-3x^2 + 18x - 15\right) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

Khi đó $M\left(0; \dfrac{28}{5}\right)$ và $M\left(6; \dfrac{37}{5}\right)$

Dựa trên đồ thị ta thấy $M\left(6; \dfrac{37}{5}\right)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có khoảng cách đến đường thẳng d là nhỏ nhất.

Do đó $a = 6, b = \dfrac{37}{5} \Rightarrow a - b = -1,4$.

Câu 41: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \le x \le 400)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \dfrac{100000x}{\frac{3}{2}x + 1}$ (đồng). Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp đó mua nguyên vật liệu với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 253

Ta có lợi nhuận $P(x)$ được tính bằng doanh thu trừ đi tổng chi phí: $P(x) = F(x) - xG(x) - H(x)$.

Khi $x \le 200$, chi phí mua nguyên liệu là: $H_1(x) = 0,99\left(2x^3 + 100000x - 50000\right)$ (đồng)

Khi $x > 200$, chi phí mua nguyên liệu là:

$H_2(x) = 0,99\left(2.\left(200^3\right) + 100000.200 - 50000\right) + 0,98\left(2(x-200)^3 + 100000.(x-200) - 50000\right)$ (đồng)

Xét 2 trường hợp:

+ TH1: $1 \le x \le 200$, ta có lợi nhuận thu được là:

$$P_1(x) = F(x) - xG(x) - H_1(x)$$

$$= x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - \frac{100000x^2}{\frac{3}{2}x + 1} - 0,99\left(2x^3 + 100000x - 50000\right)$$

Ta có: $P_1'(x) = -\frac{147}{50}x^2 - 3998x - \frac{600000x^2 + 800000x}{(3x+2)^2} + 902000$

Phương trình $P_1'(x) = 0$ có nghiệm $x = 184,03 \in (1;200)$.

Ta thấy $\max\limits_{[1;200]} P_1(x) = 80037062,09$ tại $x = 184,03$.

+ TH2: $201 \le x \le 400$, ta có lợi nhuận thu được là:

$$P_2(x) = F(x) - xG(x) - H_2(x)$$

$$= x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - \frac{100000x^2}{\frac{3}{2}x + 1}$$

$$-0,99\left(2.(200)^3 + 100000.200 - 50000\right) - 0,98\left(2.(x-200)^3 + 100000.(x-200) - 50000\right)$$

$$= -\frac{24}{25}x^3 - 823x^2 + 667800x - 11500 - \frac{200000x^2}{3x+2}$$

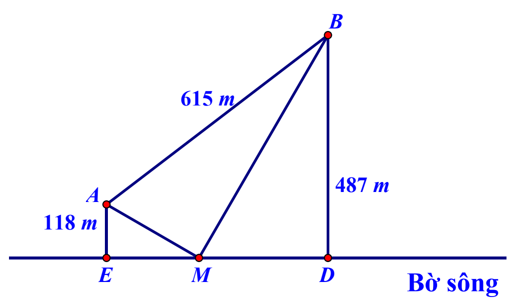
Ta có: $P_2'(x) = -\frac{72}{25}x^2 - 1646x - \frac{600000x^2 + 800000x}{(3x+2)^2} + 667800$

Phương trình $P_2'(x) = 0$ có nghiệm $x = 253,1 \in (201;400)$.

Ta thấy $\max\limits_{[201;400]} P_2(x) = 83893667,52$ tại $x = 253,1$.

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất 253 sản phẩm thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

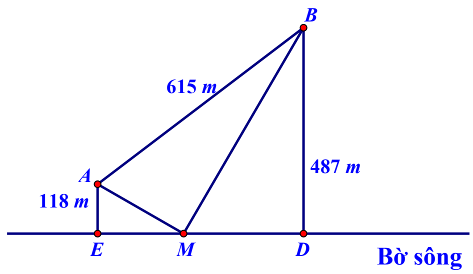
Câu 42: Cho hai vị trí A, B cách nhau $615m$, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là $118m$ và $487m$. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về **B.** Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu mét? (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).



Kết quả:

Lời giải:

Đáp số: 780



Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về **B.**

Dễ dàng tính được $ED=\sqrt{615^2-(487-118)^2}=492.$

Ta đặt $EM=x>0,$ khi đó ta được: $MD=492-x,\ AM=\sqrt{x^2+118^2},BM=\sqrt{(492-x)^2+487^2}.$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$$f(x)=\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2} \text{ với } x\in[0;492].$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}-\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}-\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}=\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492-x)^2+487^2}=(492-x)\sqrt{x^2+118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left[(492-x)^2+487^2\right]=(492-x)^2\left(x^2+118^2\right) \\ 0\le x\le 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2=(58056-118x)^2 \\ 0\le x\le 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{58056}{605} \text{ hay } x=-\frac{58056}{369} \\ 0\le x\le 492 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{58056}{605}.$$

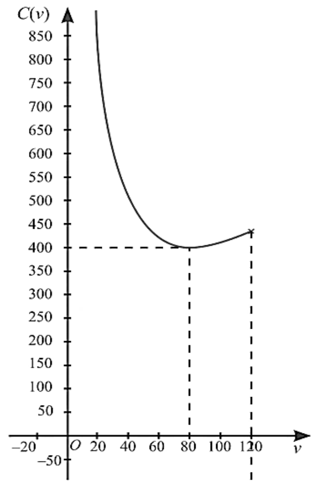
Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$; $f\left(\frac{58056}{605}\right)$; $f(492)$ ta có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right)\approx 780\,m.$

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ $780\,m$.

Câu 43: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \ \left(0 < v \le 120\right)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v, người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu km/h để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 80

Tập xác định: $D = (0;120]$.

Đạo hàm $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2} = \frac{5(v-80)(v+80)}{2v^2} = 0 \Leftrightarrow v = -80$ (loại) hoặc $v = 80$.

Bảng biến thiên:

v	0		80		120
$C'(v)$		$-$	0	$+$	
$C(v)$	$+\infty$	$\searrow$	400	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt GTNN khi $v = 80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Câu 44: Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó dùng dải ruy băng này để trang trí hộp quà hình trụ. Khi trang trí hộp quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (tham khảo hình vẽ minh họa).

Với dải ruy băng có kích thước như trên có thể trang trí được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu dm^3? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 3,14

Gọi $x(cm); y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $(x, y > 0; x < 30)$

Dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm.

Ta có: $(2x + y).4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$

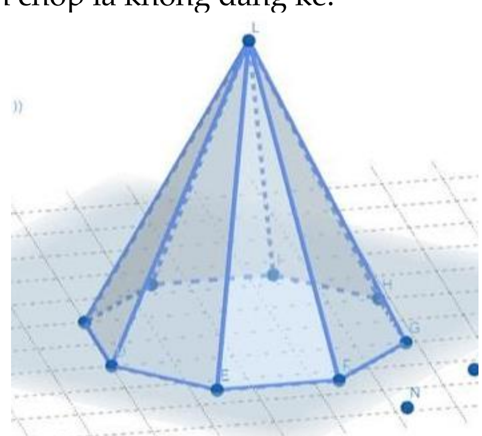
Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2.y = \pi x^2(30 - 2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2(30 - 2x)$ với $0 < x < 30$ đạt GTLN

$f'(x) = -6x^2 + 60x$, cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Lập Bảng Biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là $V = 1000\pi(cm^3) = \pi(dm^3)$.

Câu 45: Trên mặt trần tầng thượng một khách sạn 5 sao, người ta dự định lắp đặt một hệ thống pin năng lượng mặt trời gồm 7 tấm pin giống nhau có hình dạng một tam giác cân vào một khung sắt có dạng một hình chóp bát giác đều (*7 mặt bên của khung hình chóp được lắp vừa khít 7 tấm pin, còn 1 mặt bên để trống làm lối ra vào làm công tác bảo trì hệ thống*). Biết rằng các tấm pin không được đặt nghiêng quá $60°$ so với mặt trần và hệ thống không được sử dụng quá $150m^2$ diện tích mặt trần tầng thượng. Hỏi cần chi phí bao nhiêu triệu đồng cho việc lắp đặt hệ thống để tổng diện tích các tấm pin lớn nhất, biết giá của pin mặt trời là 2 triệu đồng$/m^2$ và chi phí lắp đặt khung hình chóp là không đáng kể.



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 525

Gọi x,α lần lượt là diện tích mặt đáy và góc tạo bởi mặt bên và đáy.

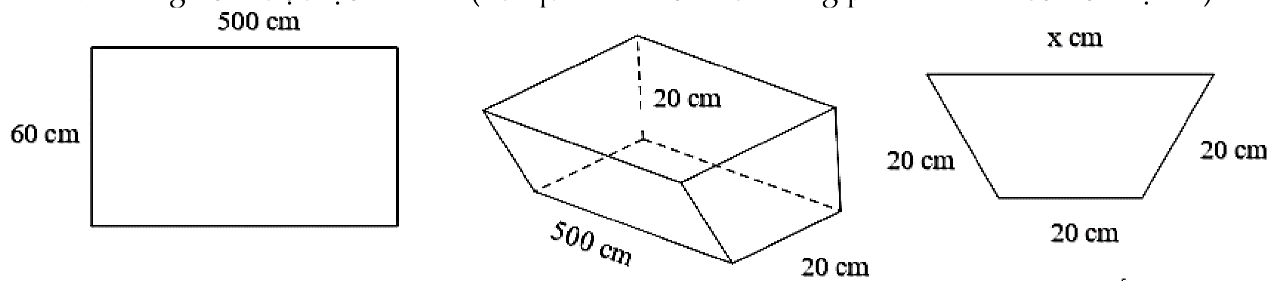
Khi đó: $0 < x \le 150,\ 0° < \alpha \le 60°$.

Áp dụng công thức diện tích hình chiếu, ta có tổng diện tích của 8 mặt bên của hình chóp là $\frac{x}{\cos\alpha}$. Suy ra diện tích một mặt tấm pin là: $\frac{x}{8\cos\alpha}$

Diện tích 7 tấm pin là: $S = 7\frac{x}{8\cos\alpha} \le \frac{7.150}{8\cos 60°} = 262,5\ m^2$.

Số tiền cần sử dụng là: $262,5 \times 2 = 525$ (triệu đồng).

Câu 46: Để làm một máng xối nước có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác, từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $60\,\text{cm} \times 500\,\text{cm}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối (được cắt bởi mặt phẳng song song với hai đầu máng xối) là một hình thang cân có đáy nhỏ và hai cạnh bên đều bằng $20\,\text{cm}$; còn đáy lớn có độ dài bằng $x\,(\text{cm})$. Tìm thể tích lớn nhất máng xối được tạo thành? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị m^3).



(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 0,26

Gọi h là chiều cao của hình thang. Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân (mặt cắt) lớn nhất.

Ta có $S = \frac{1}{2}h(x+20)$.

Kẻ $AH \perp CD$ tại H

Ta có $HD = \frac{x-20}{2} \Rightarrow h = AH = \sqrt{20^2 - \frac{(x-20)^2}{4}} = \frac{1}{2}.\sqrt{4.20^2 - (x-20)^2}$

Điều kiện: $20 < x < 60$.

Khi đó, $S = \frac{1}{2}h(x+20) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{4.20^2-(x-20)^2}.(x+20) = \frac{1}{4}(x+20).\sqrt{4.20^2-(x-20)^2}$

Xét hàm số $S(x) = \frac{1}{4}(x+20).\sqrt{4.20^2-(x-20)^2}$ với $20 < x < 60$

Ta có $S'(x)=\dfrac{1}{4}\left[\sqrt{4.20^2-(x-20)^2}+(x+20)\dfrac{-(x-20)}{\sqrt{4.20^2-(x-20)^2}}\right]$

$S'(x)=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{4.20^2-(x-20)^2-(x-20)(x+20)}{\sqrt{4.20^2-(x-20)^2}}\right]=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{-2x^2+40x+1600}{\sqrt{4.20^2-(x-20)^2}}\right]$

Khi đó $S'(x)=0\Leftrightarrow -2x^2+40x+1600=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40 \\ x=-20 \quad (\text{loai}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	20		40		60
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		↗	$300\sqrt{3}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $S(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $300\sqrt{3}$ tại $x=40$

Do đó, máng xối có thể tích lớn nhất bằng:

$300\sqrt{3}.500=150000\sqrt{3}\left(\text{cm}^3\right)\approx 0,26\,\text{m}^3$ khi $x=40\,\text{cm}$.

Câu 47: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Biết công ty này có 38 máy và mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy công ty nên sử dụng để sản xuất đơn hàng trên là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Kết quả:

Lời giải:

Đáp số: 16

Gọi x là số máy công ty sử dụng để sản xuất đơn hàng 8000 quả bóng tennis. $x\in(0;38],x\in\mathbb{N}$.

Số bóng mỗi máy cần sản xuất: $\dfrac{8000}{x}$

Số giờ cần thiết để hoàn thành đơn hàng: $\dfrac{8000}{30x}=\dfrac{800}{3x}$

Chi phí hoạt động: $f(x)=200x+192.\dfrac{800}{3x}=200x+\dfrac{51200}{x}$ (nghìn đồng)

Ta có: $f'(x)=200-\dfrac{51200}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 200-\dfrac{51200}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=256\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-16 \\ x=16 \end{array}\right.$

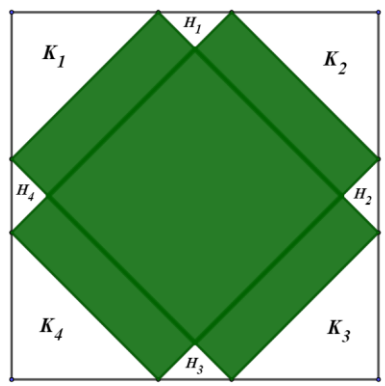
BBT:

x	0		16		38
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6400	$\nearrow$	$\frac{170000}{19}$

Suy ra: $\min\limits_{[0;38]} f(x) = 6400$ khi $x = 16$

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để sản xuất đơn hàng 8000 quả bóng tennis cho chi phí hoạt động là thấp nhất.

Câu 48: Từ hình vuông có cạnh bằng 8 cm người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ bên cạnh, biết các tam giác H_1, H_2, H_3, H_4 bằng nhau và K_1, K_2, K_3, K_4 bằng nhau.



Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật đó là bao nhiêu xăng-ti-mét khối? (*Kết quả làm tròn hết hàng phần mười*).

Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 26,8

Gọi cạnh của tam giác vuông cân bị cắt bỏ là x, (đk: $0 < x < 4$).

Suy ra cạnh đáy của khối hộp là $x\sqrt{2}$ nên diện tích mặt đáy khối hộp $S = \left(x\sqrt{2}\right)^2 = 2x^2$

Chiều cao của khối hộp là $h = \frac{8-2x}{\sqrt{2}}$

Suy ra thể tích khối hộp chữ nhật là $V = h.S = \frac{8-2x}{\sqrt{2}}.2x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-4x^3 + 16x^2\right)$

Xét hàm số $f(x) = -4x^3 + 16x^2$ với $0 < x < 4$

Ta có $f'(x) = -12x^2 + 32x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{8}{3} \\ x = 0 \end{array}\right.$

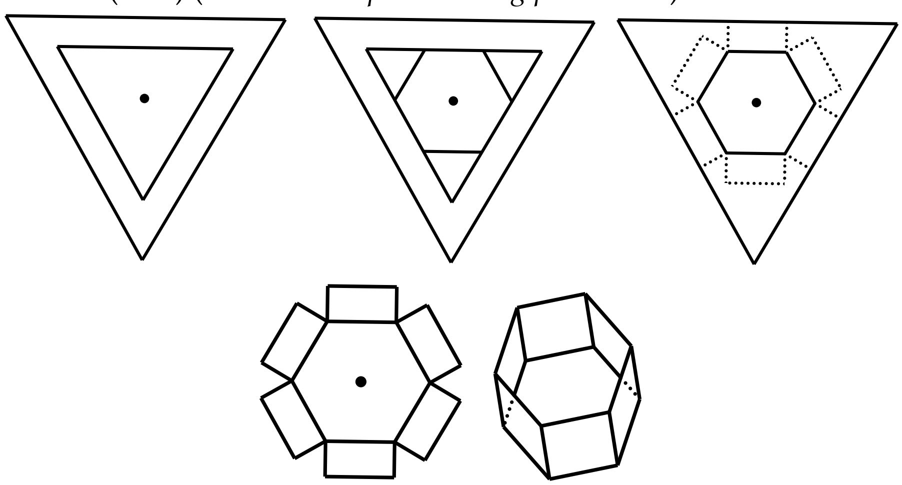
Bảng biến thiên:

x	0		$8/3$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$1024/27$	$\searrow$	

Suy ra: $\max\limits_{(0;4)} f(x) = \dfrac{1024}{27}$ khi $x = \dfrac{8}{3}$

Vậy thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật là $\dfrac{1024}{27\sqrt{2}} \approx 26{,}8$.

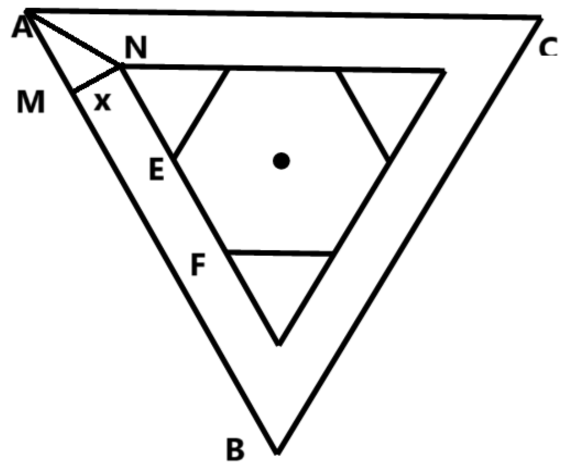
Câu 49: Cho một tấm tôn hình một tam giác đều có cạnh bằng $2\ m$. Người ta thiết kế một hình lục giác đều và sáu hình chữ nhật ở phía ngoài lục giác có một cạnh bằng cạnh của lục giác, một cạnh bằng x (*mét*) với $0 < x < \dfrac{2}{3}$. Sau đó người ta cắt theo nét đứt đoạn để thu được hình hợp bởi một lục giác đều và sáu hình chữ nhật. Sau đó gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ lục giác đều (*tham khảo hình vẽ dưới đây*). Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu đề-xi-mét khối (dm^3) (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*)?



Kết quả:

Lời giải:

Đáp án: 98,8



Xét tam giác AMN vuông tại M, gọi một cạnh hình chữ nhật bên ngoài lục giác bằng x nên $MN = x(m)$

Vì ΔABC đều nên $MAN = 30^0$

Ta có $AM = x\sqrt{3}$, tương tự $BG = x\sqrt{3}$. Theo cách dựng hình ta dễ thấy $NE = EF = FD$

Khi đó $EF = \dfrac{AB - 2AM}{3} = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}x}{3}$

Ta có diện tích tam giác đều OEF bằng $S_{OEF} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2 - 2\sqrt{3}x}{3}\right)^2$

Diện tích đáy của khối lăng trụ $S = 6.\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2 - 2\sqrt{3}x}{3}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(12x^2 - 8\sqrt{3}x + 4\right)$

Chiều cao h của lăng trụ bằng cạnh của hình chữ nhật nên $h = x$

Thể tích của khối lăng trụ $V = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(12x^3 - 8\sqrt{3}x^2 + 4x\right)$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(12x^3 - 8\sqrt{3}x^2 + 4x\right)$

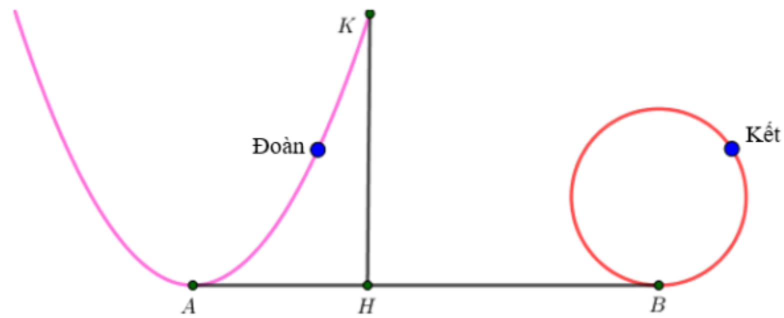
$f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(36x^2 - 16\sqrt{3}x + 4\right)$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{9}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{8}{81}$	↘	0	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: với $0 < x < \frac{2}{3}$ thể tích của khối lăng trụ lớn nhất $V_{\max} = \frac{8}{81}\left(m^3\right) \simeq 98,8\left(dm^3\right)$ tại $x = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 50: Khi dạo chơi trên một công viên bạn Đoàn di chuyển trên đường Parabol, bạn Kết di chuyển trên đường tròn (*minh hoạ bằng hình vẽ dưới đây).*



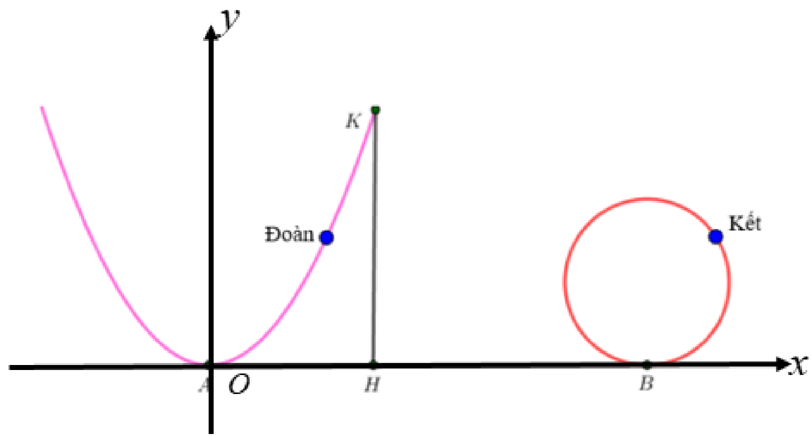
Khoảng cách giữa đỉnh A của Parabol và tiếp điểm B của đường tròn là $16m$; $HK \perp AB$ và $AH = 6m, HK = 9m$. Tìm khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn Đoàn và Kết, biết rằng đường tròn có bán kính bằng $3m$ (*làm tròn đến hàng phần trăm).*

Kết quả:

Lời giải:

Đáp số: 8,43.

Gắn hệ trục Oxy với gốc toạ độ $O \equiv A$ như hình vẽ sau:



Khi đó điểm $K\left(6;9\right)$, suy ra phương trình parabol bạn Đoàn đi là: $(P): y = \frac{1}{4}x^2$

Và phương trình đường tròn bạn Kết đi là: $\left(C\right): \left(x-16\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 9$.

Xét đường tròn $\left(C'\right)$ đồng tâm với đường tròn $\left(C\right)$ và tiếp xúc với $\left(P\right)$.

Phương trình $\left(C'\right): \left(x-16\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = R^2$.

Ta có: $\left(C'\right)$ tiếp xúc với $\left(P\right)$ khi và chỉ khi phương trình

$(x-16)^2+\left(\frac{1}{4}x^2-3\right)^2=R^2$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2-32x+265=R^2$ $(*)$ có nghiệm kép.

Xét hàm số:

$f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2-32x+265$ với $D=\mathbb{R}$

có $f'(x)=\frac{1}{4}x^3-x-32=0 \Leftrightarrow x\approx 5,304$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$5,304$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$130,67$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $(*)$ có nghiệm kép khi và chỉ khi $R^2=130,67$.

Khi đó khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn Đoàn và Kết là:

$R-3=\sqrt{130,67}-3\approx 8,43m$.

____________________HẾT____________________

Huế, 09h00' Ngày 10 tháng 7 năm 2025