ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề chính thức

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2025

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình

$$x+2\sqrt{(x+1)(x+6)}+2\sqrt{x+1}=2+2\sqrt{x+6}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+6y^2+7xy+x+6y=21, \\ 21\left(22-5y^2-5xy+x-4y\right)=27(x+6y). \end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$y+\frac{1}{y}=\frac{x^4+6x^2+1}{2x\left(x^2+1\right)}.$$

2) Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{2}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)}+\frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)}+\frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)}.$$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E,F (không trùng các đỉnh tam giác) sao cho $AE=AF$. Trên đường thẳng EF lấy các điểm M,N sao cho CM vuông góc CA, BN vuông góc BA. K là giao điểm của BN và CM.

1) Chứng minh rằng $KM=KN$.

2) Dựng các hình bình hành $ANQF$ và $AMRE$. Chứng minh rằng $\widehat{NQK}=\widehat{MRK}$.

3) Gọi L,J lần lượt là hình chiếu vuông góc của M,N lên đường thẳng BC, S là giao điểm của JF và LE, T là điểm đối xứng với S qua EF. Chứng minh rằng A,T,K thẳng hàng.

Câu IV. (1,0 điểm)

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mọi cách sắp xếp 99 điểm màu đỏ và 100 điểm màu xanh trên mặt phẳng (không có 3 điểm nào thẳng hàng), ta luôn vẽ được k đường thẳng, mỗi đường thẳng không đi qua điểm nào trong các điểm trên và các đường thẳng đó chia mặt phẳng thành các miền mà trong mỗi miền không có 2 điểm khác màu.

---HẾT---

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN CHUNG LỚP 10/2025 THPT CHUYÊN KHTN

Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Lê Phước – Nguyễn Văn Quý – Nguyễn Tiến Dũng
Trần Đức Hiếu – Trần Quang Độ – Phan Quang Linh
Vũ Minh Đức – Đào Phúc Long

Bài 1 (3.5 *điểm*).

a) Giải phương trình

$$x + 2\sqrt{(x+1)(x+6)} + 2\sqrt{x+1} = 2 + 2\sqrt{x+6}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 + 7xy + x + 6y = 21, \\ 21(22 - 5y^2 - 5xy + x - 4y) = 27(x + 6y). \end{cases}$$

Lời giải. a) Cách 1. Điều kiện: $x \geq -1$. Đặt $a = \sqrt{x+1}$ và $b = \sqrt{x+6}$, khi đó phương trình có thể được viết lại thành $a^2 - 1 + 2ab + 2a = 2 + 2b$, hay

$$2b(a-1) + a^2 + 2a - 3 = 0.$$

Một cách tương đương, ta được

$$(a-1)(2b + a + 3) = 0.$$

Mà $2b + a + 3 > 0$ nên $a = 1$, hay $\sqrt{x+1} = 1$. Từ đó, ta có $x = 0$ (thử lại thỏa mãn). Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách 2. Điều kiện: $x \geq -1$. Dễ thấy $x = 0$ là nghiệm của phương trình. Xét trường hợp $x \neq 0$, khi đó phương trình có thể được viết lại thành

$$x = 2\left(1 - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+6} + 1\right),$$

hay

$$x = -\frac{2x}{1 + \sqrt{x+1}} \cdot \left(\sqrt{x+6} + 1\right).$$

Một cách tương đương, ta có $1 = -\frac{2}{1+\sqrt{x+1}} \cdot \left(\sqrt{x+6} + 1\right)$, mâu thuẫn vì vế phải có giá trị âm. Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b) Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành $(x+6y)(x+y+1)=21$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$(x+6y)(x+y+1)\big[(x+6y)(x+y+1)+1-5y^2-5xy+x-4y\big]=27(x+6y),$$

hay

$$(x+6y)(x+y+1)\cdot(x+y+1)^2=27(x+6y).$$

Từ đây, với chú ý $x+6y\neq 0$ (suy ra từ phương trình thứ nhất), ta được $x+y=2$. Kết hợp với $(x+6y)(x+y+1)=21$, ta được $x+6y=7$. Từ đó $x=y=1$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,\ y)=(1,\ 1)$. □

Bài 2 (2.5 *điểm*).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $x,\ y$ thoả mãn

$$y+\frac{1}{y}=\frac{x^4+6x^2+1}{2x(x^2+1)}.$$

b) Xét các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{2}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)}+\frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)}+\frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)}.$$

Lời giải. a) Điều kiện: $x,\ y\neq 0$. Chú ý rằng nếu $(x,\ y)$ là nghiệm thì $(-x,\ -y)$ cũng là nghiệm và $x,\ y$ cùng dấu nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x,\ y>0$.

Tiếp theo, ta có hai cách giải sau.

Cách 1. Từ giả thiết, ta có $y+\frac{1}{y}=\frac{x^2+1}{2x}+\frac{2x}{x^2+1}$. Chuyển vế, phân tích nhân tử, ta được

$$\left(y-\frac{x^2+1}{2x}\right)\left[1-\frac{2x}{y\left(x^2+1\right)}\right]=0.$$

Từ đó, ta có hai trường hợp sau.

- **Trường hợp 1:** $y=\frac{x^2+1}{2x}$. Trong trường hợp này, với chú ý y là số nguyên, ta suy ra x^2+1 chia hết cho x. Từ đó 1 chia hết cho x, kéo theo $x=1$ (do $x>0$). Suy ra $y=\frac{x^2+1}{2x}=1$. Thử lại thỏa mãn.
- **Trường hợp 2:** $1-\frac{2x}{y(x^2+1)}=0$. Trong trường hợp này, ta có $\frac{2x}{x^2+1}=y$. Chú ý rằng $0<\frac{2x}{x^2+1}\leq\frac{2x}{2x}=1$, ta có $0<y\leq 1$, suy ra $y=1$. Từ đó $\frac{2x}{x^2+1}=1$, hay $(x-1)^2=0$. Suy ra $x=1$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy, có tất cả hai cặp số $(x,\ y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(1,\ 1)$ và $(-1,\ -1)$.

Cách 2. Phương trình có thể được viết lại thành

$$2x(x^2+1)(y^2+1)=y(x^4+6x^2+1).$$

Từ đây, ta suy ra $y(x^4+6x^2+1)$ chia hết cho x. Mà $(x^4+6x^2+1,\ x)=1$ nên y chia hết cho x. Bây giờ, đặt $y=kx$ với k nguyên dương. Phương trình có thể được viết lại thành

$$2(x^2+1)(k^2x^2+1)=k(x^4+6x^2+1). \quad (1)$$

Với $x=1$, thay vào phương trình trên, ta dễ dàng tìm được $k=1$. Từ đó $y=1$. Thử lại thỏa mãn.

Với $k=1$, thay vào phương trình trên, ta dễ dàng tìm được $x=1$. Từ đó $x=1$. Thử lại thỏa mãn.

Xét trường hợp $x\ge 2$ và $k\ge 2$. Khi đó, phương trình (1) không thể thỏa mãn, vì

$$2(x^2+1)(k^2x^2+1)>2k^2x^2(x^2+1)\ge 4kx^2(x^2+1)=k(4x^4+4x^2)>k(x^4+6x^2+1).$$

Vậy, có tất cả hai cặp số $(x,\ y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(1,\ 1)$ và $(-1,\ -1)$.

b) Xin giới thiệu hai cách giải như sau.

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}M&=\frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)}+\frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)}+\frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)}\\&=\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-a}\right)^2}{a^2+2ab}+\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{b^2}}{2-b}\right)^2}{b^2+2bc}+\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{c^2}}{2-c}\right)^2}{c^2+2ca}\\&\ge\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-a}+\frac{\sqrt[3]{b^2}}{2-b}+\frac{\sqrt[3]{c^2}}{2-c}\right)^2}{(a+b+c)^2}=\frac{4\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-a}+\frac{\sqrt[3]{b^2}}{2-b}+\frac{\sqrt[3]{c^2}}{2-c}\right)^2}{9}.\end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, với mọi $0<x<\frac{3}{2}$, thì

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2-x}&=\frac{x}{\sqrt[3]{x}(2-x)}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{x\cdot\frac12\cdot\frac12}(2-x)}\ge\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{3x}{\left(x+\frac12+\frac12\right)(2-x)}\\&=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{x}{(x+1)(2-x)}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{x}{\left(\frac{x+1+2-x}{2}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{4}{9}x=\frac{4}{3\sqrt[3]{4}}x.\end{aligned}$$

Sử dụng đánh giá này, ta có

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-a}+\frac{\sqrt[3]{b^2}}{2-b}+\frac{\sqrt[3]{c^2}}{2-c}\ge\frac{4}{3\sqrt[3]{4}}(a+b+c)=\sqrt[3]{2}.$$

Do đó

$$M\ge\frac{4\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{9}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{9}.$$

Mặt khác, với $a=b=c=\frac12$ thì $M=\frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$. Vậy $\min M=\frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2}&=\frac{3a\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{2a\cdot 2a\cdot 1}(2-a)^2}\ge\frac{3a\sqrt[3]{4}}{(4a+1)(2-a)^2}=\frac{12a\sqrt[3]{4}}{(4a+1)(4-2a)(4-2a)}\\&\ge\frac{27\cdot 12a\sqrt[3]{4}}{(4a+1+4-2a+4-2a)^3}=\frac{4a\sqrt[3]{4}}{9}.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2} \geq \frac{4b\sqrt[3]{4}}{9}, \quad \frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2} \geq \frac{4c\sqrt[3]{4}}{9}.$$

Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}\left(\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\right) = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}\left(\frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ca}\right) \\ &\geq \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$. Vậy $\min M = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$. □

Bình luận. Ở câu **b)**, sau khi sử dụng bất đẳng thúc Cauchy-Schwarz như cách 1, cũng có thể giải tiếp bằng phương pháp hệ số bất định.

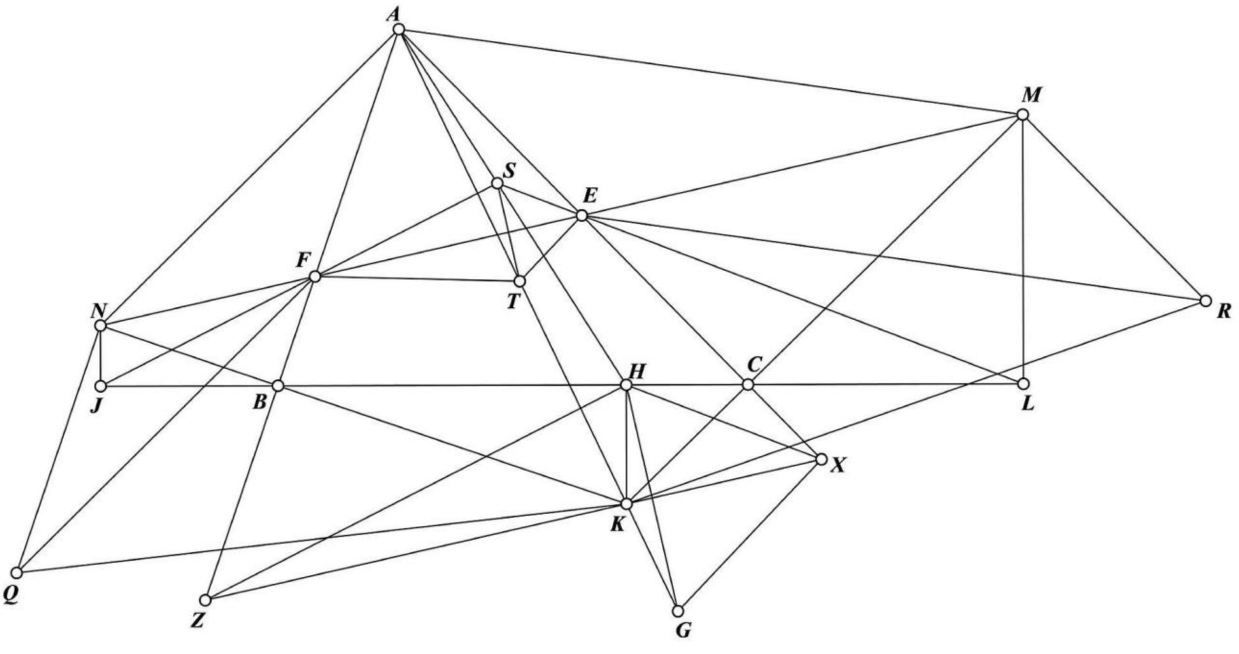
Trong cả hai lời giải, có thể thấy giả thiết $a+b+c = \frac{3}{2}$ là thừa, chỉ cần $0 < a,\ b,\ c < 2$ là đủ.

Bài 3 (3.0 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Trên các cạnh CA và AB, lần lượt lấy các điểm E, F (không trùng các đỉnh của tam giác) sao cho $AE = AF$. Trên đường thẳng EF, lấy các điểm M, N sao cho đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng CA và đường thẳng BN vuông góc với đường thẳng BA. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BN và CM.

a) Chứng minh rằng $KM = KN$.

b) Dựng các hình bình hành $ANQF$ và $AMRE$. Chứng minh rằng $\angle NQK = \angle MRK$.

c) Gọi L, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm M, N trên đường thẳng BC; S là giao điểm của hai đường thẳng JF và LE; T là điểm đối xứng với điểm S qua đường thẳng EF. Chứng minh rằng ba điểm A, T, K thẳng hàng.



Lời giải. a) Do $AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại đỉnh A, suy ra $\angle AEF = \angle AFE$. Từ đó $\angle BFN = \angle CEM$. Bây giờ, xét hai tam giác BFN và CEM, có $\angle BFN = \angle CEM$ và $\angle FBN = \angle ECM = 90^\circ$ (do $BN \perp BA$, $CM \perp CA$) nên $\triangle BFN \sim \triangle CEM$ (g-g). Từ đó $\angle BNF = \angle CME$, hay $\angle KNM = \angle KMN$. Suy ra tam giác KMN cân tại đỉnh K, từ đây ta có $KM = KN$.

b) Do tứ giác $ANQF$ là hình bình hành nên $NQ = AF$ và $NQ \parallel AF$. Vì $NQ \parallel AF$ và $BN \perp BA$ nên $NQ \perp NK$, từ đó $\angle KNQ = 90^\circ$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $MR = AE$ và $\angle KMR = 90^\circ$. Từ đó $NQ = MR$ và $\angle KNQ = \angle KMR = 90^\circ$. Kết hợp với $KN = KM$, ta suy ra hai tam giác KNQ và KMR bằng nhau (c-g-c), từ đó $\angle NQK = \angle MRK$.

c) Qua điểm K, kẻ đường thẳng song song với đường thẳng EF, cắt các đường thẳng AC và AB theo thứ tự tại các điểm X, Z. Kẻ đường thẳng KH vuông góc với đường thẳng BC tại điểm H.

Vì $KH \parallel NJ$ và $KZ \parallel FN$ nên $\frac{BF}{BZ} = \frac{BN}{BK} = \frac{BJ}{BH}$, suy ra $FJ \parallel HZ$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $HX \parallel EL$.

Do $XZ \parallel EF$, $HZ \parallel SF$ và $HX \parallel ES$ nên hai tam giác SEF và HXZ đồng dạng (g-g). Từ đó $\frac{SE}{HX} = \frac{EF}{XZ} = \frac{AE}{AX}$, suy ra hai tam giác AES và AXH đồng dạng (c-g-c). Do đó $\angle SAE = \angle HAX$. Từ đây, ta suy ra ba điểm A, S, H thẳng hàng.

Chú ý rằng tứ giác $ABKC$ nội tiếp đường tròn đường kính AK, do đó $\angle KAB = \angle KCH$. Mà $\angle KBA = \angle KHC = 90^\circ$ nên $\angle AKB = \angle HKC$. Lại có $AE = AF$ và $EF \parallel XZ$ nên $AX = AZ$, suy ra $\angle AXZ = \angle AZX$. Từ đó $\angle BKZ = \angle CKX$. Suy ra $\angle AKZ = \angle HKX$.

Gọi G là điểm đối xứng với điểm H qua đường thẳng XZ. Ta có $\angle XKG = \angle XKH = \angle AKZ$ nên ba điểm A, K, G thẳng hàng. Đến đây, với chú ý $\angle TEF = \angle SEF = \angle ZXH = \angle ZXG$ và $\angle AES = \angle AXH$, ta có $\angle AET = \angle AXG$.

Xét hai tam giác AET và AXG, có $\frac{AE}{AX} = \frac{ES}{XH} = \frac{ET}{XG}$ và $\angle AET = \angle AXG$ nên hai tam giác này đồng dạng (c-g-c). Suy ra $\angle EAT = \angle XAG$, do đó ba điểm A, T, G thẳng hàng. Từ đây, ta suy ra ba điểm A, T, K thẳng hàng. □

Bài 4 (1.0 *điểm*). Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mọi cách sắp xếp 99 điểm màu đỏ và 100 điểm màu xanh trên mặt phẳng (không có ba điểm nào thẳng hàng), ta luôn vẽ được k đường thẳng, mỗi đường thẳng không đi qua điểm nào trong các điểm trên và các đường thẳng đó chia mặt phẳng thành các miền mà trong mỗi miền mà trong mỗi miền không có hai điểm khác màu.

Lời giải. Xét cấu hình gồm 99 điểm màu đỏ và 99 điểm màu xanh xếp xen kẽ nhau trên đường tròn. Nếu kẻ được k đường thẳng mà chia được mặt phẳng thành các miền mà không có hai điểm khác màu thì k đường thẳng này chia đường tròn thành không quá $2k$ cung tròn rời nhau. Ta thấy mỗi cung tròn này chỉ chứa nhiều nhất một điểm xanh hoặc một điểm đỏ (thật vậy, nếu tồn tại cung chứa không ít hơn hai điểm thì hai điểm đó phải cùng màu và nếu hai điểm đó cùng màu thì sẽ có một điểm khác màu nằm giữa dẫn tới vô lý). Như vậy, k đường thẳng này phải chia đường tròn thành không ít hơn $2 \cdot 99$ cung tròn. Từ đây, ta có $2k \geq 2 \cdot 99$, hay $k \geq 99$.

Ta chứng minh rằng với $k = 99$ thì ta luôn có thể kẻ được 99 đường chia 99 điểm đỏ và 100 điểm xanh vào các miền mà mỗi miền không có điểm khác màu. Để ý rằng ban đầu, với hai điểm A, B cùng màu thì ta có thể kẻ hai đường thẳng song song với cạnh AB và gần AB để tạo ra một miền mới mà miền này chỉ chứa đúng hai điểm A và B do không có điểm nào nằm trên đường thẳng A, B. (1)

Xét bao lồi của các điểm là S.

- Nếu bao lồi có một điểm đỏ thì ta kẻ được một đường thẳng tách điểm đỏ này với các điểm xanh. Với 98 điểm đỏ còn lại, ta chia các điểm này thành 49 cặp rồi áp dụng nhận xét (1) liên tiếp 49 lần, tương ứng với mỗi cặp thì ta kẻ thêm 98 đường nữa. Như vậy, ta đã kẻ được tất cả 99 đường và sau khi kẻ thì mỗi điểm đỏ sẽ nằm trong miền chỉ chứa toàn điểm đó khác.

- Nếu bao lồi gồm toàn điểm xanh thì kẻ một đường thẳng song song, đủ gần cạnh của bao lồi thì ta tách được hai điểm xanh ra một miền mới. Từ đó, còn 98 điểm xanh, ta chia các điểm này chia thành 49 cặp rồi áp dụng nhận xét (1) liên tiếp 49 lần, tương ứng với mỗi cặp thì ta kẻ thêm 98 đường nữa. Sau khi kẻ 99 đường này thì mỗi điểm xanh sẽ nằm trong miền chỉ chứa toàn điểm xanh khác.

Vậy $k_{\min} = 99$. □