UBND THÀNH PHỐ CHÍ LINH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI
Năm học 2024-2025
Môn: TOÁN - LỚP 8
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề này gồm 06 câu, 01 trang)

Câu 1: *(2,0 điểm).*

1) Rút gọn biểu thức: $A=\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}\right):\frac{x^3-y^3}{x^5-x^4y-xy^4+y^5}$ với $x\neq y;\ x\neq -y$

2) Cho $a^2(b+c)=b^2(c+a)=2025$ với a,b,c đôi một khác nhau và khác 0.
Tính giá trị của biểu thức $c^2(a+b)$.

Câu 2: *(2,0 điểm).*

1) Giải phương trình: $(3x+1)(x-1)^2(3x-7)+7=0$

2) Biết rằng đa thức $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 11, chia cho $x+2$ dư (-1), chia cho x^2-4 được thương là $3x$ và còn dư. Tính $f(2025)+f(-2025)$.

Câu 3: *(2,0 điểm).*

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $y^2+2(x^2+1)=2y(x+1)$

2) Tìm các số tự nhiên n để $(n^2-8)^2+36$ là số nguyên tố.

Câu 4: *(2,5 điểm).* Cho tam giác *ABC* vuông tại *A (AB < AC)*. Gọi *AD* là tia phân giác của góc *BAC*. Từ *D* kẻ $DM\perp AB$, $DN\perp AC$ ($M\in AB$, $N\in AC$). Gọi *E* là giao điểm của *BN* và *DM*, *F* là giao điểm của *CM* và *DN*.

1) Chứng minh tứ giác *AMDN* là hình vuông và *EF // BC*

2) Chứng minh ΔANB đồng dạng với ΔNFA.

3) Gọi *P* là điểm trên đoạn thẳng *AN*, *Q* là điểm trên đoạn thẳng *AM* sao cho *AP = MQ*. Tìm vị trí của *P* và *Q* để diện tích tứ giác *MQPN* đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: *(0,5 điểm).* Cho 33 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và nằm trong tam giác đều có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác có ba đỉnh là ba điểm trong 33 điểm đã cho có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{16}$.

Câu 6: *(1,0 điểm).*

Cho hai số a, b $\neq 0$ thỏa mãn $2a^2+\frac{b^2}{4}+\frac{1}{a^2}=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=ab+2024$.

------------Hết------------

(Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

UBND THÀNH PHỐ CHÍ LINH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI
Năm học 2024-2025
Môn: TOÁN - LỚP 8
(Hướng dẫn này gồm 06 câu, 06 trang)

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
1	1	$A=\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}\right):\frac{x^3-y^3}{x^5-x^4y-xy^4+y^5}$ với $x\neq y;\ x\neq -y$	
		$A=\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}\right):\frac{x^3-y^3}{x^5-x^4y-xy^4+y^5}$ $=\left[\frac{x^2}{(x-y)(x+y)}+\frac{y}{x-y}\right].\frac{(x^5-x^4y)-(xy^4-y^5)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$ $=\left[\frac{x^2}{(x-y)(x+y)}+\frac{y(x+y)}{(x-y)(x+y)}\right].\frac{x^4(x-y)-y^4(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$ $=\frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x+y)}.\frac{(x^4-y^4)(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$	0.25
		$=\frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x+y)}.\frac{(x^2+y^2)(x-y)^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$	0.25
		$=x^2+y^2$	0.25
		$A=x^2+y^2$ với $x\neq y;\ x\neq -y$	0.25
	2	Ta có $a^2(b+c)=b^2(c+a)$ $a^2b+a^2c-b^2c-ab^2=0$ $ab(a-b)+c(a-b)(a+b)=0$ $(a-b)(ab+bc+ca)=0$ Mà $a-b\neq 0$, suy ra:	0.25
		$ab+bc+ca=0$ $bc=-a(b+c)$ $-abc=a^2(b+c)=2025$ (1)	0.25

		$ab+bc+ca=0$ $ab=-c\left(a+b\right)$ $-abc=c^2\left(a+b\right).(2)$ Từ (1) và (2) ta được $c^2\left(a+b\right)=2025$.	0.25 0.25
2	**1**	$(3x+1)(x-1)^2(3x-7)+7=0$ Nhân 2 vế của phương trình với 9 ta được $(3x+1)(3x-3)^2(3x-7)+63=0$ $(9x^2-18x-7)(9x^2-18x+9)+63=0$ Đặt $y=9x^2-18x-7$ ta được $y(y+16)+63=0$ $y^2+16y+63=0$ $(y+7)(y+9)=0$ $y=-7$ hoặc $y=-9$ Trường hợp 1 : $y=-7$ $9x^2-18x-7=-7$ $9x^2-18x=0$ $x=0$ hoặc $x=2$ Trường hợp 2: $y=-9$ $9x^2-18x-7=-9$ $9(x-1)^2=7$ $x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3}$ hoặc $x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3}$ Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=0$; $x=2$; $x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3}$; $x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3}$	0.25 0.25 0.25 0.25
	2	$f(x)$ chia cho $x-2$ dư 11 *suy ra* $f(x)=\left(x-2\right).P(x)+11$ *suy ra* $f(2)=11$	

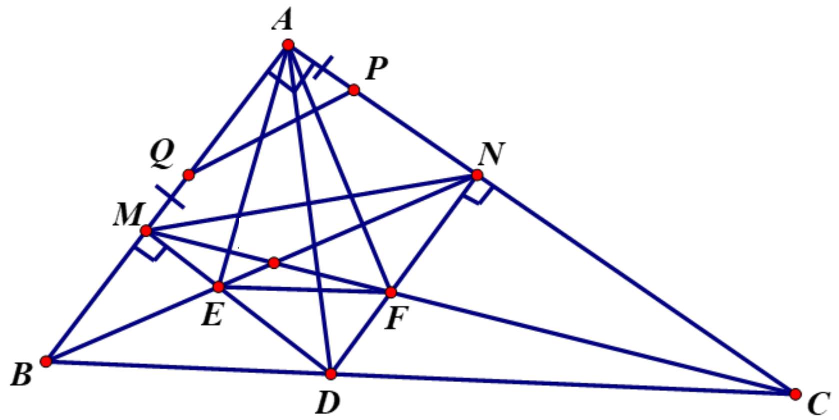
<table>
<tr><td></td><td></td><td>$f(x)$ chia cho $x+2$ dư -1 $suy\, ra\; f(x)=(x+2).Q(x)-1$
$suy\, ra\; f(-2)=-1$
$f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $3x$ và còn dư
$suy\, ra\; f(x)=(x^2-4).3x+ax+b$ (1)
Từ (1) $suy\, ra\; f(2)=2a+b,\; f(-2)=-2a+b$
$suy\, ra \begin{cases} 2a+b=11 \\ -2a+b=-1 \end{cases}$
tìm được $a=3,\; b=5$
Suy ra $f(x)=(x^2-4).3x+3x+5=3x^3-9x+5$
$f(2025)+f(-2025)=3.2025^3-9.2025+5+3.(-2025)^3-9.(-2025)+5$
Suy ra $f(2025)+f(-2025)=10$</td><td>0.25

0.25

0.25
0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>1</td><td>$y^2+2(x^2+1)=2y(x+1)$
$y^2-2y(x+1)+2(x^2+1)=0$
$\left[y^2-2y(x+1)+(x+1)^2\right]+(x^2-2x+1)=0$
$(y-x-1)^2+(x-1)^2=0$
$\begin{cases} y-x-1=0 \\ x-1=0 \end{cases}$
$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$
Vậy $(x;y)=(1;2)$</td><td>0.25
0.25
0.25

0.25</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Ta có: $(n^2-8)^2+36=n^4-16n^2+64+36=n^4-16n^2+100$
$=n^4+20n^2+100-36n^2=(n^2+10)^2-36n^2$
$=(n^2+10+6n)(n^2+10-6n)$
Vì $n\in N$ nên $n^2+6n+10\ge n^2-6n+10$
để $(n^2-8)^2+36$ là số nguyên tố thì
$n^2+6n+10=1$ hoặc $n^2-6n+10=1$
Mà $n^2+6n+10>n^2-6n+10$ nên $n^2-6n+10=1$</td><td>0.25

0.25</td></tr>
</table>

		$n^2 - 6n + 9 = 0$ $(n-3)^2 = 0$ $n = 3$ Với $n = 3 \Rightarrow (n^2 - 8)^2 + 36 = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố Vậy với $n = 3$ thì $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố	0.25 0.25
4			
	1	*** Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông** Xét tứ giác *AMDN* có: $\widehat{AMD} = 90^0; \widehat{AND} = 90^0; \widehat{MAN} = 90^0$ Suy ra tứ giác *AMDN* là hình chữ nhật Hình chữ nhật *AMDN* có *AD* là phân giác của $\widehat{MAN}$ nên tứ giác *AMDN* là hình vuông. *** Chứng minh EF // BC.** Vì *ND//AB* hay *DF//MB* áp dụng định lí Thalès ta có: $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1) Vì *MD//AC* áp dụng định lý Thalès ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}$ (2) Tứ giác *AMDN* là hình vuông nên $AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}$ (3) Chứng minh ΔDNE đồng dạng với ΔMBE ta có $\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}$ (4) Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF // DC$ Hay *EF // BC*	0.25 0.25 0.25 0.25
	2	*** Chứng minh** $\Delta ANB \backsim \Delta NFA$ Vì AMDN là hình vuông nên $AN = DN$ suy ra	

		$\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{DN}{AB}$ (5) Vì $DN//AB$ áp dụng hệ quả của định lí Thalès ta có $\dfrac{DN}{AB}=\dfrac{CN}{CA}$(6) và $\dfrac{FN}{AM}=\dfrac{CN}{CA}$(7) Mà AMDN là hình vuông nên $AM = AN$ suy ra $\dfrac{FN}{AM}=\dfrac{FN}{AN}$ (8) Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{FN}{AN}$ nên $\Delta ANB \backsim \Delta NFA$	0.25 0.25 0.25 0.25
	3	Vì AN = AM ; PN = AQ $\Rightarrow$ AP = MQ. Ta có : $S_{APQ}=\frac{1}{2}AP.AQ=\frac{1}{2}QM.AQ=\frac{1}{2}AQ(AM-AQ)=-\frac{1}{2}(AQ^2-AQ.AM)$ $=-\frac{1}{2}(AQ^2-2AQ.\frac{AM}{2}+\frac{AM^2}{4})+\frac{AM^2}{8}$ $=-\frac{1}{2}(AQ-\frac{AM}{2})^2+\frac{AM^2}{8}\le\frac{AM^2}{8}$ Suy ra: $S_{PQMN}=S_{AMN}-S_{APQ}\ge\frac{1}{2}AM^2-\frac{1}{8}AM^2=\frac{3}{8}AM^2$ dấu "=" xảy ra khi $AQ=\dfrac{AM}{2}$. Vậy diện tích tứ giác PQMN có giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{8}AM^2$ khi Q là trung điểm của AM; P là trung điểm của AN.	0.25 0.25
5		Hs chỉ ra được cách chia tam giác đều ban đầu thành 16 tam giác đều bằng nhau không có điểm chung trong. Vì 33 điểm nằm trong tam giác đều ban đầu nên theo nguyên lý Đirichlet tồn tại ít nhất 3 điểm trong 33 điểm đã cho nằm trong 1 tam giác trong 16 tam giác trên Do trong 33 điểm không có ba điểm nào thẳng hàng nên tam giác tạo bởi 3 điểm nói trên nằm trọn trong 1 tam giác trong 16 tam giác trên. Mà diện tích của một tam giác trong 16 tam giác trên là $\dfrac{1}{16}$ Vậy diện tích tam giác tạo bởi ba điểm nói trên có diện tích nhỏ hơn $\dfrac{1}{16}$	0.25 0.25

6		Ta có: $4 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + a^2 + \frac{b^2}{4} - ab + ab + 2$ $= (a - \frac{1}{a})^2 + (a - \frac{b}{2})^2 + ab + 2 \ge ab + 2$ suy ra $ab \le 2$ suy ra $Q \le 2026$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} a = -1; b = -2 \\ a = 1; b = 2 \end{array}\right.$	0.5
		Ta lại có: $4 = (a - \frac{1}{a})^2 + (a + \frac{b}{2})^2 - ab + 2 \ge -ab + 2 \Rightarrow ab \ge -2$ $\Rightarrow Q \ge 2022$ Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} a = 1; b = -2 \\ a = -1; b = 2 \end{array}\right.$ Vậy GTLN của Q là 2026 khi $a = -1; b = -2$ hoặc $a = 1; b = 2$ GTNN của Q là 2022 khi $a = 1; b = -2$ hoặc $a = -1; b = 2$	0.25 0.25

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa