

CHUYÊN ĐỀ 7_HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

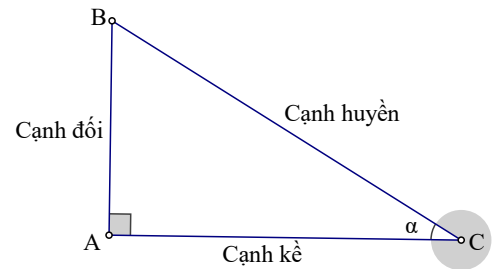
1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn

Xét α là góc nhọn trong một tam giác vuông.

Khi đó ta có các tỉ số lượng giác của góc nhọn α là

$\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được định nghĩa như sau:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}; \cos \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AB}{AC}; \cot \alpha = \frac{AC}{AB}$$



Chú ý: Nếu α là một góc nhọn thì $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1; \tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

Nhận xét: Khi góc α tăng từ 0° đến 90° thì $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ tăng, $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$ giảm

Tức là: $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha < \sin \beta, \cos \alpha > \cos \beta, \tan \alpha < \tan \beta, \cot \alpha > \cot \beta$

2. Mối liên hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc nhọn phụ nhau

Với hai góc α, β mà $\alpha + \beta = 90^\circ$,

ta có: $\sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \cot \alpha = \tan \beta$.

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin \alpha = \sin \beta$ hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$ thì $\alpha = \beta$.

3. Công thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác của góc nhọn α

Xét α là góc nhọn khi đó ta có:

$$+ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$+ \text{Công thức mở rộng: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ và } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

4. Với một số góc đặc biệt ta có:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

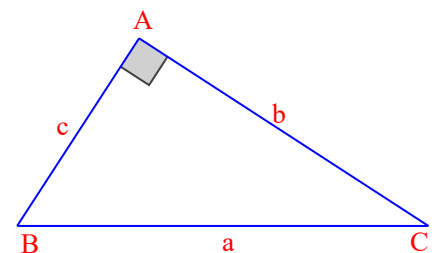
$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1; \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

5. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Từ công thức tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta chỉ ra được hệ thức giữa cạnh và góc của một tam giác vuông như sau:

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cosin góc kề.
- Cạnh góc vuông kia nhân với tan của góc đối hay nhân với cot của góc kề. $b = a \cdot \sin B = a \cos C; c = a \cdot \sin C = a \cos B; b = c \cdot \tan B = c \cot C; c = b \cdot \tan C = b \cot C$



Chú ý: Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc chưa biết của tam giác vuông đó.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, đường cao AH

a. Cho $\widehat{C} = 30^\circ$, $AH = 4cm$. Tính AB , AC

b. Cho $\widehat{HAB} = 30^\circ$, $AB = 3cm$. Tính AC , BC

Câu 2: Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 90^\circ$, cho $\sin \widehat{B} = \frac{4}{5}$. $AB = 9cm$. Tính AC, BC

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\tan \widehat{C} = \frac{3}{4}$ và $BC = 20cm$. Tính AB, AC

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 30^\circ$ $AB = 8cm, AC = 6cm$. Tính S_{ABC}

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $\widehat{C} = 30^\circ$, kẻ phân giác BD , sao cho $CD = 8cm$. Tính. AC, AB, BC

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc B bằng 30° , $BC = 10cm$. Hãy tính cạnh AB và góc C

Câu 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc B bằng α , biết $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $AB = 8cm$. Hãy tính cạnh AC và BC

Câu 8: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 24cm, AC = 32cm, BC = 40cm$. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính $\sin B, \sin C, \cos B, \cos C$

Câu 9: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 21, AC = 28, BC = 35$

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông

b) Tính $\sin B, \sin C$, góc B , góc C và đường cao AH trong $\triangle ABC$

Câu 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có đường cao AH . Tính tỉ số lượng giác của góc C , từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc B , biết:

a) $AB = 16cm, AC = 12cm$

b) $AC = 13cm, CH = 5cm$

c) $CH = 3cm, BH = 4cm$

Câu 11: Giải các tam giác vuông sau, tam giác ABC vuông tại A , biết

a) $a = 18, b = 8$

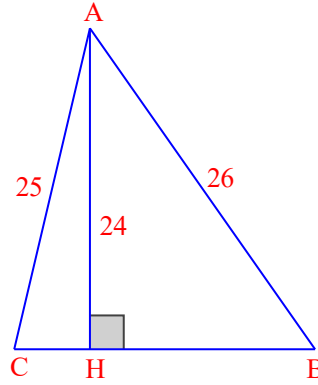
b) $b = 20, \widehat{C} = 38^\circ$

c) $\tan B = \frac{3}{4}, c = 4$

Câu 12: Cho tam giác ABC có $AB = 16cm, AC = 14cm$ và $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và diện tích tam giác ABC

Câu 13: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 18^\circ, \widehat{C} = 150^\circ, AC = 8cm$. Tính độ dài cạnh AB và BC .

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 26cm$, $AC = 25cm$, đường cao $AH = 24cm$. Tính cạnh BC



Câu 15: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 12cm$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

a) Tính chiều cao CH và AC

b) Tính diện tích $\triangle ABC$

Câu 16: Cho đường tròn tâm O , bán kính $R = 10cm$. Trên (O) lấy A, B, C, D thỏa mãn $\widehat{AOB} = 60^\circ$; $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{COD} = 120^\circ$

a) Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân

b) Tính chu vi của $ABCD$.

Câu 17: Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 15cm$ và $DC = 20cm$. Góc ở đáy bằng 75° . Tính diện tích hình thang cân $ABCD$

Câu 18: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A có $AB = 6cm$, $AC = 8cm$

a) Giải tam giác vuông ABC .

b) Kẻ $AH \perp BC$ tại H . Tính AH , HB , HC

c) Từ H kẻ HE và HF lần lượt vuông góc với AB , AC .

Tính chu vi và diện tích tứ giác $AEHF$.

d) Cho BC cố định. Tìm vị trí điểm A để S_{AEHF} đạt giá trị lớn nhất.

Câu 19: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC \perp AD$. Kẻ $AH \perp DC$ tại H , đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại I . Chứng minh rằng:

1. $AC^2 = CH \cdot CD = CB \cdot CI$.

2. $AH \cdot AI + DH \cdot DC = BC \cdot BI$.

3. $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{HC \cdot HD} - \frac{1}{AI^2}$.

Câu 20: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C , đường cao CK .

a) Cho $AB = 10cm$, $AC = 8cm$. Tính BC , CK , BK và AK

b) Gọi H và I thứ tự là hình chiếu của K trên BC và AC . Chứng minh $CB \cdot CH = CA \cdot CI$

- c) M là chân đường vuông góc kẻ từ K xuống IH . Chứng minh $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$
- d) Chứng minh rằng $\frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3}$

Câu 21: Cho tam giác MNP vuông tại M , góc $\widehat{N} = 60^\circ$, đường phân giác NI . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với NI tại K .

- 1) Chứng minh $\triangle MKN$ đồng dạng với $\triangle NMP$, tìm tỉ số đồng dạng của chúng.
- 2) Tính diện tích tam giác MKN biết diện tích tam giác NMP bằng 60cm^2 .
- 3) Chứng minh $NP.MK = NK.IP$

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

- a) Chứng minh $DE.BC = AB.AC$.
- b) Chứng minh $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$.
- c) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với DE cắt BC tại M . Chứng minh M là trung điểm BC .
- d) Cho $\widehat{C} = \alpha$, $BC = a$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt BC tại N . Chứng minh $CN = \frac{a(\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos 2\alpha}$.

Câu 23: Cho tam giác MND vuông tại M ($MN < MD$), đường cao MH .

- a) Cho $MN = 6\text{ cm}$, $MD = 8\text{ cm}$. Tính ND , MH .
- b) Qua N kẻ Nx song song MD cắt đường thẳng MH tại Q . Chứng minh $MH.MQ = NH.ND$.
- c) Kẻ QG vuông góc MD (G thuộc MD), QG cắt ND tại K . Chứng minh $NH^2 = HK.HD$.
- d) Kẻ HP vuông góc MN (P thuộc MN). Chứng minh $NP = ND.\cos^3 MND$.

Câu 24: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường cao AH . Hạ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi M là trung điểm của BC

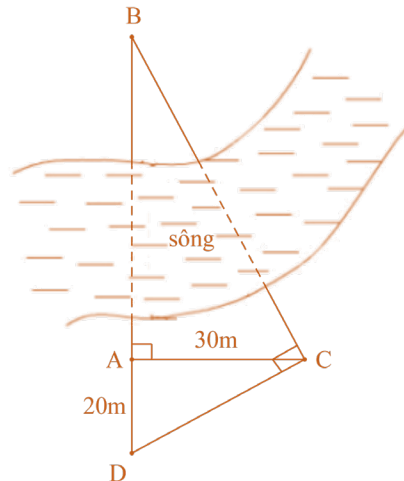
- a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$
- b) $\triangle AEF \sim \triangle ACE$
- c) $AM \perp EF$
- d) Cho $BH = 4\text{cm}, HC = 9\text{cm}$. Tính EF
- e) Cho BC cố định, tìm vị trí của điểm A để đoạn EF lớn nhất
- f) Cho BC cố định, tìm vị trí của A để diện tích tứ giác $AEHF$ lớn nhất.

- Câu 25:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $\hat{A} = 60^\circ$, $M \in BC$. Gọi I là trung điểm của AM , hạ $ME \perp AB, MF \perp AC$
- Chứng minh rằng $IA = IM = IE = IF$
 - Tính $\widehat{EIF}$
 - Cho $AM = 20cm$. Tính EF
 - Tìm vị trí của điểm M để EF nhỏ nhất
- Câu 26:** Cho tam giác ABC đều, đường cao AH . Trên tia đối của tia AH lấy điểm M sao cho $MH = \frac{1}{3}AH$
- Chứng minh rằng $\triangle ACM$ vuông
 - Cho $CM = 5cm$. Tính AB
 - Phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt BC tại E , biết $CE = 4cm$. Tính AC
 - CM cắt AB tại N . Tính MN , BN theo cạnh của $\triangle ABC$
- Câu 27:** Cho $AB = 2a$ cố định. O là trung điểm của AB , vẽ cùng một phía của AB vẽ hai tia Ax, By trong đó $By \perp AB$. Lấy điểm C thuộc Ax , D thuộc By sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$ ($AC \leq BD$). Hạ $OM \perp CD$, nối OC cắt AM tại E , nối OD cắt BM tại F
- Chứng minh rằng CO và DO là phân giác của $\widehat{ACD}$ và $\widehat{BDC}$
 - Chứng minh $\triangle ABM$ vuông tại M
 - Chứng minh tứ giác $OEMF$ là hình chữ nhật
 - $OE \cdot OC = OF \cdot OD$
 - Cho C và D chuyển động mà $\widehat{COD} = 90^\circ$. Chứng minh $AC \cdot BD$ không đổi
 - Cho $\widehat{MBA} = 30^\circ$, tính AC và BD theo a
 - Xác định vị trí của điểm C để cho $\tan \widehat{CDB} = 3$
- Câu 28:** Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông để đo chiều cao của một cây dừa, với các kích thước đo được như hình bên. Khoảng cách từ vị trí gốc cây đến vị trí chân của người thợ là $4,8m$ và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người ngắm là $1,6m$. Hỏi với các kích thước trên thì người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu? (làm tròn đến mét).

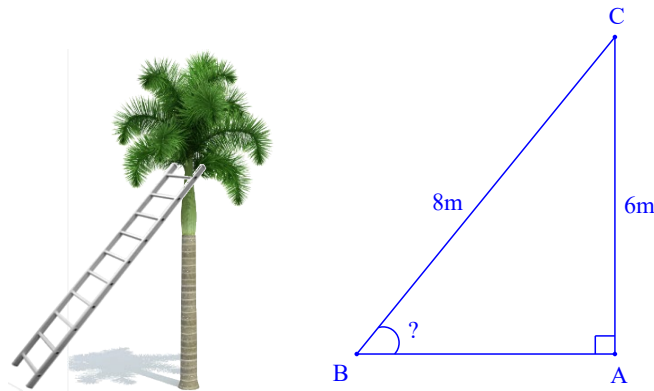


- Câu 29:** Muốn tính khoảng cách từ điểm A đến điểm B nằm bên kia bờ sông, ông Việt vạch từ A đường vuông góc với AB . Trên đường vuông góc này lấy một đoạn thẳng $AC = 30m$, rồi vạch CD

vuông góc với phương BC cắt AB tại D (xem hình vẽ). Đo $AD = 20m$, từ đó ông Việt tính được khoảng cách từ A đến B . Em hãy tính độ dài AB và số đo góc ACB .



Câu 30: Một cây cau có chiều cao $6m$. Để hái một buồng cau xuống, phải đặt thang tre sao cho đầu thang tre đạt độ cao đó, khi đó góc của thang tre với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài $8m$ (làm tròn đến phút)



Câu 31: Một máy bay đang bay ở độ cao $12km$. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.



a) Nếu cách sân bay $320km$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

b) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

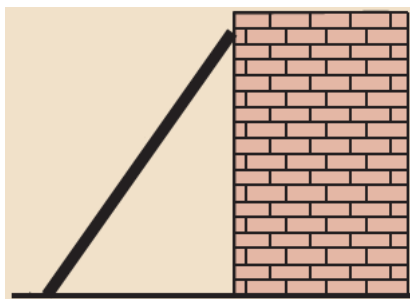
Câu 32: Hải đăng kê Gà thuộc xã Tân Thành, huyện Hàm Thuận Nam, Bình Thuận là ngọn hải đăng được trung tâm sách kỷ lục Việt Nam xác nhận là ngọn hải đăng cao nhất và nhiều tuổi nhất. Hải đăng Kê Gà được xây dựng từ năm 1897 – 1899 và toàn bộ bằng đá. Tháp đèn có hình bát giác, cao

66m so với mực nước biển. Ngọn đèn đặt trong tháp có thể phát sáng xa 22 hải lý (tương đương 40km)



Một người đi thuyền thúng trên biển, muốn đến ngọn hải đăng có độ cao 66m, người đó đứng trên mũi thuyền và dùng giác kế đo được góc giữa thuyền và tia nắng chiếu từ đỉnh ngọn hải đăng đến thuyền là 25° . Tính khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng (làm tròn đến m).

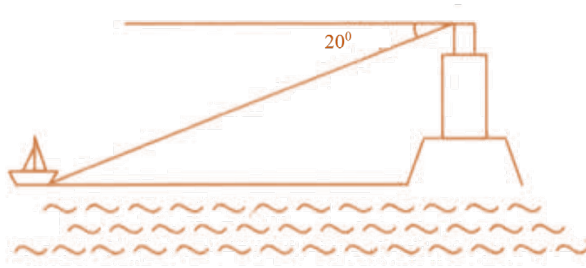
Câu 33: Trường bạn An có một chiếc thang dài 6 mét. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc “an toàn” là 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng)



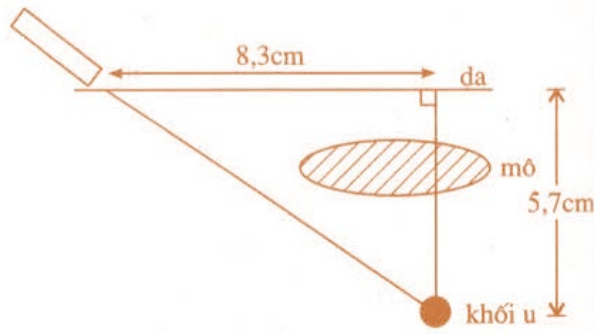
Câu 34: Thang xếp chữ A gồm 2 thang đơn tựa vào nhau. Để an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc khoảng 75° . Nếu muốn tạo một thang xếp chữ A cao 2m tính từ mặt đất thì mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu?



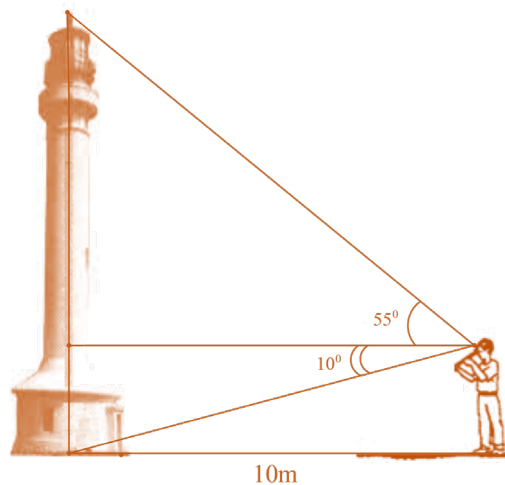
Câu 35: Từ một đài quan sát cao 350m so với mực nước biển, người ta nhìn thấy một chiếc thuyền bị nạn dưới góc 20° so với phương ngang của mực nước biển. Muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài bao nhiêu mét?



Câu 36: Một khối u của một bệnh nhân cách mặt da $5,7\text{cm}$ được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) $8,3\text{cm}$ (xem hình vẽ). Tính góc tạo bởi chùm tia với mặt da và chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu để đến được khối u?



Câu 37: Một người quan sát đứng cách một cái tháp 10m , nhìn thẳng đỉnh tháp và chân tháp lần lượt dưới 1 góc 55° và 10° so với phương ngang của mặt đất. Hãy tính chiều cao của tháp.



Câu 38: Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40° . Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao $8,1\text{m}$ thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là $2,6\text{m}$, chiều cao của vật nặng là 1m (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân)



Câu 39: Một tòa nhà cao tầng có bóng trên mặt đất là $272m$, cùng thời điểm đó một cột đèn cao $7m$ có bóng trên mặt đất dài $14m$. Em hãy cho biết tòa nhà đó có bao nhiêu tầng, biết rằng mỗi tầng cao $3,4m$?



Câu 40: Tòa nhà Bitexco Financial, Bitexco Financial Tower hay Tháp Tài chính Bitexco là một tòa nhà chọc trời được xây dựng tại trung tâm Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh. Tòa nhà có 68 tầng (không tính 3 tầng hầm). Biết rằng, khi tòa nhà có bóng in trên mặt đất dài $47,3m$ ét, thì cùng thời điểm đó có một cột tiêu (được cắm thẳng đứng trên mặt đất) cao 15 mét có bóng in trên mặt đất dài $2,64m$ ét.



- Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất (đơn vị đo góc được làm tròn đến độ)
- Tính chiều cao của tòa nhà (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 41: Giông bão thổi mạnh, một cây tre gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và ngọn cây tạo với mặt đất một góc 30° . Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây tre là $8,5m$. Giả sử cây tre mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây tre đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



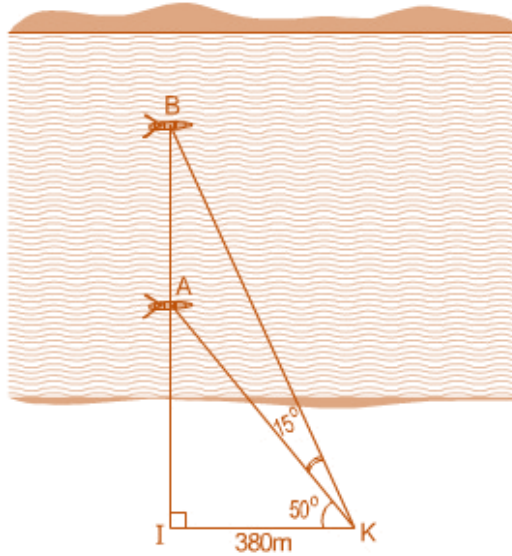
Câu 42: Tính chiều cao của trụ cầu Cần Thơ so với mặt sông Hậu cho biết tại hai điểm cách nhau 89m trên mặt sông người ta nhìn thấy đỉnh trụ cầu với góc nâng lần lượt là 40° và 30° .



Câu 43: Hai người A và B đứng cùng bờ sông nhìn ra một cồn nổi giữa sông. Người A nhìn ra cồn với 1 góc 43° so với bờ sông, người B nhìn ra cồn với 1 góc 28° so với bờ sông, 2 người đứng cách nhau 250m . Hỏi cồn cách bờ sông hai người đang đứng là bao nhiêu m?



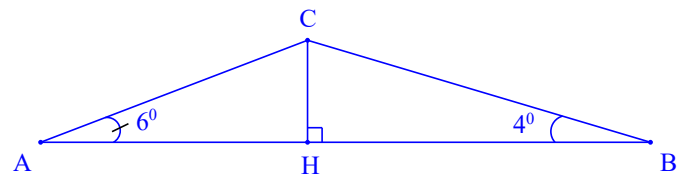
Câu 44: Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình vẽ dưới đây. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến mét).



Câu 45: Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc như hình vẽ dưới. Cho biết đoạn AB dài $762m$, $\hat{A} = 6^\circ$, $\hat{B} = 4^\circ$.

a) Tính chiều cao con dốc.

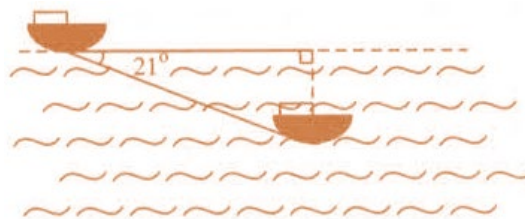
b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ lên dốc là $4km/h$ và tốc độ xuống dốc là $19km/h$.



Câu 46: Trong một buổi luyện tập, một tàu ngầm ở trên mặt biển bắt đầu lặn xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° .

a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được $250m$ thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước (làm tròn đến đơn vị mét).

b) Giả sử tốc độ trung bình của tàu là $9km/h$ thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200 mét (cách mặt nước biển $200m$) làm tròn đến phút.



CHUYÊN ĐỀ 7_HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

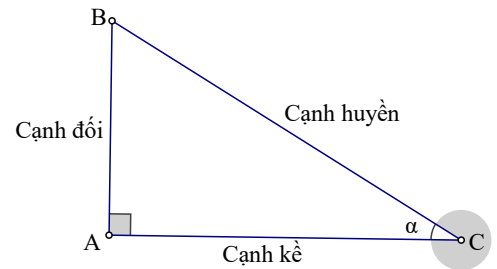
1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn

Xét α là góc nhọn trong một tam giác vuông.

Khi đó ta có các tỉ số lượng giác của góc nhọn α là

$\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được định nghĩa như sau:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}; \cos \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AB}{AC}; \cot \alpha = \frac{AC}{AB}$$



Chú ý: Nếu α là một góc nhọn thì $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1; \tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

Nhận xét: Khi góc α tăng từ 0° đến 90° thì $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ tăng, $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$ giảm

Tức là: $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha < \sin \beta, \cos \alpha > \cos \beta, \tan \alpha < \tan \beta, \cot \alpha > \cot \beta$

2. Mối liên hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc nhọn phụ nhau

Với hai góc α, β mà $\alpha + \beta = 90^\circ$,

ta có: $\sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \cot \alpha = \tan \beta$.

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin \alpha = \sin \beta$ hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$ thì $\alpha = \beta$.

3. Công thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác của góc nhọn α

Xét α là góc nhọn khi đó ta có:

$$+ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$+ \text{Công thức mở rộng: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ và } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

4. Với một số góc đặc biệt ta có:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

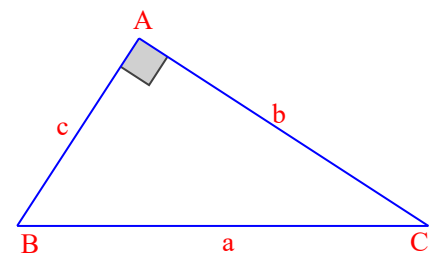
$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1; \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

5. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Từ công thức tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta chỉ ra được hệ thức giữa cạnh và góc của một tam giác vuông như sau:

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cosin góc kề.
- Cạnh góc vuông kia nhân với tan của góc đối hay nhân với cot của góc kề. $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C; c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B; b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C; c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot C$



Chú ý: Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc chưa biết của tam giác vuông đó.

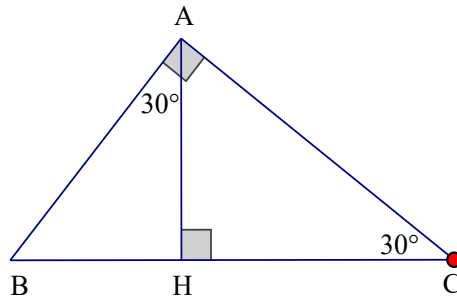
B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, đường cao AH

a. Cho $\widehat{C} = 30^\circ$, $AH = 4\text{cm}$. Tính AB , AC

b. Cho $\widehat{HAB} = 30^\circ$, $AB = 3\text{cm}$. Tính AC , BC

Lời giải



$$\text{a) } \sin \widehat{C} = 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin \widehat{C}} = 8(\text{cm}); \tan \widehat{C} = 90^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \tan \widehat{C} = \frac{8}{\sqrt{3}}(\text{cm})$$

(hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông).

b) Tính được $\widehat{B} = 60^\circ$.

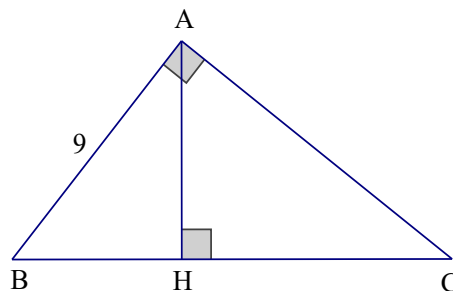
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

$$AC = AB \cdot \tan \widehat{B} = 3 \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Dùng pytago suy ra $BC = 6\text{cm}$

Câu 2: Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 90^\circ$, cho $\sin \widehat{B} = \frac{4}{5}$. $AB = 9\text{cm}$. Tính AC, BC

Lời giải



Cách 1: Theo giả thiết ta có $\sin \widehat{B} = \frac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AC}{4} = \frac{BC}{5} = x \Rightarrow \begin{cases} AC = 4x \\ BC = 5x \end{cases} (x > 0)$$

Dùng định lý Pytago vào tam giác vuông ABC , có:

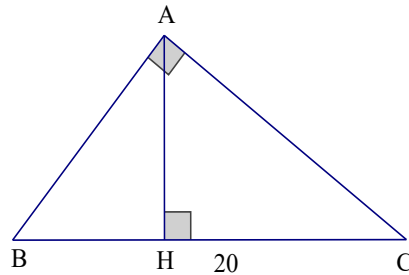
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 81 + 16x^2 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow AC = 12; BC = 15$$

Cách 2: Xét $\triangle ABH$ ($\widehat{AHB} = 90^\circ$), ta có $\sin \widehat{B} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow AH = \frac{4AB}{5} = \frac{4 \cdot 9}{5} = \frac{36}{5}$

$$\Rightarrow BH \Rightarrow BC \Rightarrow AC$$

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\tan \widehat{C} = \frac{3}{4}$ và $BC = 20cm$. Tính AB, AC

Lời giải

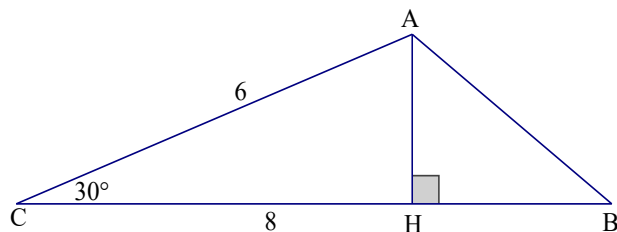


$$\text{Ta có: } \tan \widehat{C} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = x (x > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3x \\ AC = 4x \end{cases}$$

$$\text{Dùng Pytago: } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow \begin{cases} AB = 12(cm) \\ AC = 16(cm) \end{cases}$$

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 30^\circ$, $AB = 8cm$, $AC = 6cm$. Tính S_{ABC}

Lời giải



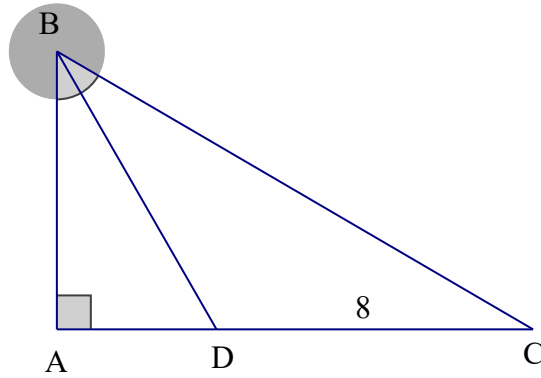
Hạ $CH \perp AB$. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$CH = CA \cdot \sin \widehat{A} = 6 \cdot \sin 30^\circ = 3$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = 12 (cm^2)$$

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $\widehat{C} = 30^\circ$, kẻ phân giác BD , sao cho $CD = 8cm$. Tính AC, AB, BC

Lời giải



Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow DA = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 (cm)$$

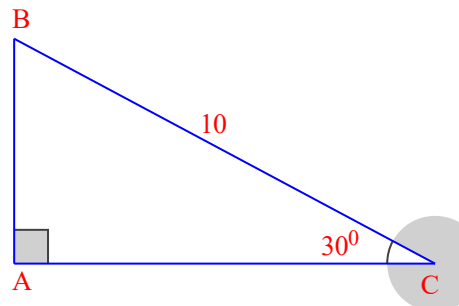
$$AC = 8 + 4 = 12 (cm)$$

Áp dụng quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có:

$$AB = AC \cdot \tan \hat{C} = 12 \cdot \tan 30^\circ = 4\sqrt{3} (cm)$$

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc B bằng 30° , $BC = 10cm$. Hãy tính cạnh AB và góc C

Lời giải



$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } A, \text{ có } \cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \cos B \cdot BC \Rightarrow AB = 10 \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} (cm)$$

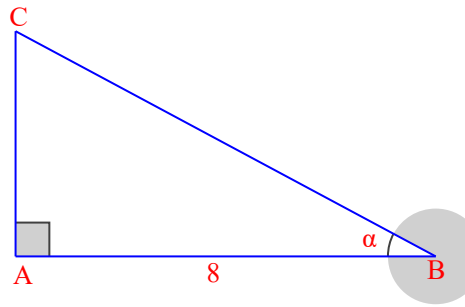
$$\text{Ta có } \triangle ABC \text{ vuông tại } A \text{ (giả thiết)} \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ ta có } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc của một tam giác)}$$

$$\text{Nên } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 60^\circ.$$

Câu 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Góc B bằng α , biết $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $AB = 8cm$. Hãy tính cạnh AC và BC

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có $\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4} AB = 6(cm)$

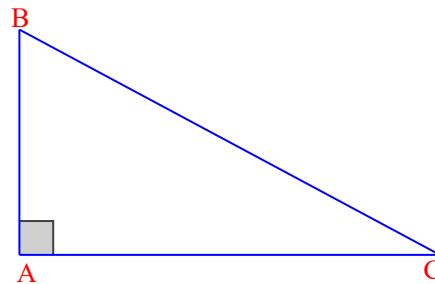
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Pitago)

$$\Rightarrow BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10(cm) \text{ (vì } BC > 0)$$

Vậy $AC = 6cm$; $BC = 10cm$.

Câu 8: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 24cm$, $AC = 32cm$, $BC = 40cm$. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính $\sin B, \sin C, \cos B, \cos C$

Lời giải



$$\text{Ta có } AB^2 + AC^2 = 24^2 + 32^2 = 1600(cm^2) \quad (1)$$

$$BC^2 = 40^2 = 1600(cm^2) \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A (Pitago đảo)

$\triangle ABC$ vuông tại A nên ta có

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}; \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}; \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

Chú ý: Vì $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau nên ta có thể tính $\cos B; \cos C$

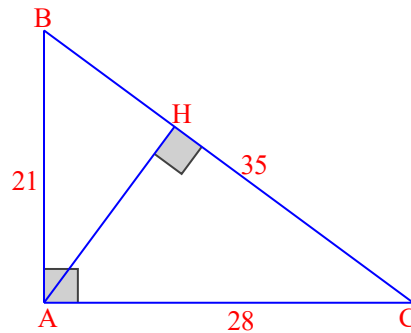
$$\cos B = \sin C = \frac{3}{5}; \cos C = \sin B = \frac{4}{5}$$

Câu 9: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 21$, $AC = 28$, $BC = 35$

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông

b) Tính $\sin B, \sin C$, góc B , góc C và đường cao AH trong $\triangle ABC$

Lời giải



a) Ta có $AB^2 + AC^2 = 21^2 + 28^2 = 1225$; $BC^2 = 35^2 = 1225$

$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A (định lí Pitago đảo)

b) Có $\sin B = \frac{AC}{BC} = 0,8 \Rightarrow \widehat{B} \approx 53^\circ$; $\sin C = \frac{AB}{BC} = 0,6 \Rightarrow \widehat{C} \approx 37^\circ$

Xét tam giác ABH vuông tại H , áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có $AH = AB \cdot \sin B = 21 \cdot \sin 53^\circ = 21 \cdot 0,8 = 16,8$ (hoặc $AH \cdot BC = AB \cdot AC$)

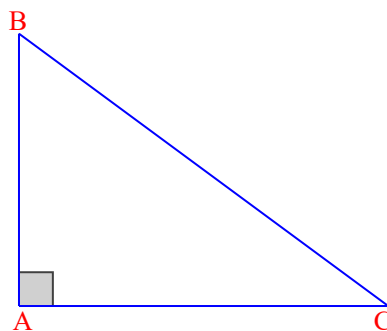
Câu 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có đường cao AH . Tính tỉ số lượng giác của góc C , từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc B , biết:

a) $AB = 16\text{cm}, AC = 12\text{cm}$

b) $AC = 13\text{cm}, CH = 5\text{cm}$

c) $CH = 3\text{cm}, BH = 4\text{cm}$

Lời giải



Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}, \widehat{C}$ là hai góc phụ nhau

a) $\sin C = \cos B = \frac{4}{5}$; $\tan C = \cot B = \frac{4}{3}$; $\cos C = \sin B = \frac{3}{5}$; $\cot C = \tan B = \frac{3}{4}$

b) $\sin C = \cos B = \frac{5}{13}$; $\tan C = \cot B = \frac{5}{12}$; $\cos C = \sin B = \frac{12}{13}$; $\cot C = \tan B = \frac{12}{5}$

$$c) \sin C = \cos B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}; \tan C = \cot B = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \cos C = \sin B = \frac{3}{\sqrt{21}}; \cot C = \tan B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

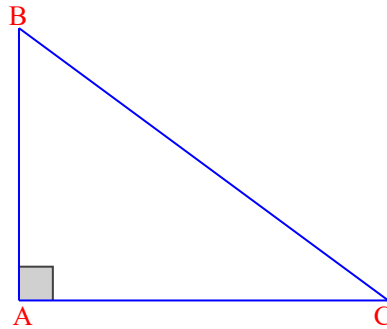
Câu 11: Giải các tam giác vuông sau, tam giác ABC vuông tại A , biết

a) $a=18, b=8$

b) $b=20, \widehat{C}=38^\circ$

c) $\tan B = \frac{3}{4}, c=4$

Lời giải



a) Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{18} \Rightarrow \widehat{B} = 23^\circ 23' \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ - 23^\circ 23' = 66^\circ 37'$

$$AB = BC \cdot \sin C = 18 \cdot \sin 66^\circ 37' \approx 16,1$$

b) $\widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ; AB = AC \cdot \tan C = 20 \cdot \tan 38^\circ \approx 15,6$

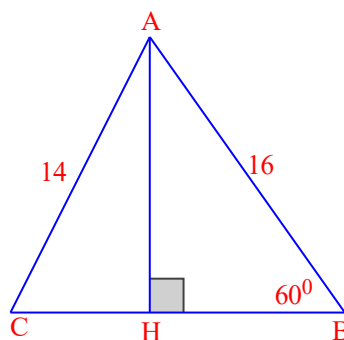
$$BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{20}{\sin 60^\circ} \approx 23,1$$

c) $AC = AB \cdot \tan B = 4 \cdot \frac{3}{4}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\sin C = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow \widehat{C} \approx 53^\circ 08' \Rightarrow \widehat{B} \approx 36^\circ 52'$$

Câu 12: Cho tam giác ABC có $AB=16cm, AC=14cm$ và $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và diện tích tam giác ABC

Lời giải



Kẻ đường cao AH

Xét tam giác vuông ABH , ta có $BH = AB \cdot \cos B = AB \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8cm$

$$AH = AB \cdot \sin B = AB \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}cm$$

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông AHC ta có $AC^2 = HC^2 + AH^2$

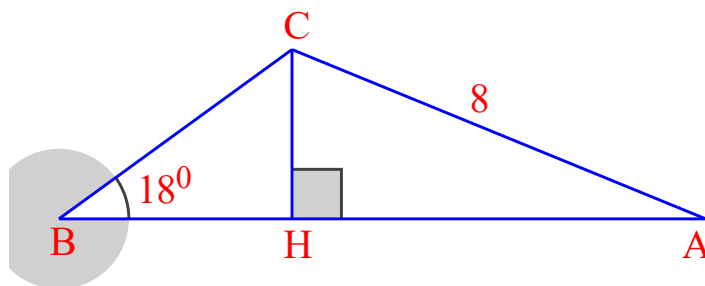
$$\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 = 14^2 - (8\sqrt{3})^2 = 196 - 192 = 4 \Rightarrow HC = 2cm$$

$$\Rightarrow BC = CH + HB = 2 + 8 = 10cm$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8\sqrt{3} = 40\sqrt{3} (cm^2)$$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 18^\circ$, $\widehat{C} = 150^\circ$, $AC = 8cm$. Tính độ dài cạnh AB và BC .

Lời giải



Xét $\triangle BHC$ vuông tại H có $\widehat{B} + \widehat{BCH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCH} = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$

Khi đó $\triangle AHC$ vuông tại H có $\widehat{ACH} = 150^\circ - 72^\circ = 78^\circ$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác AHC có:

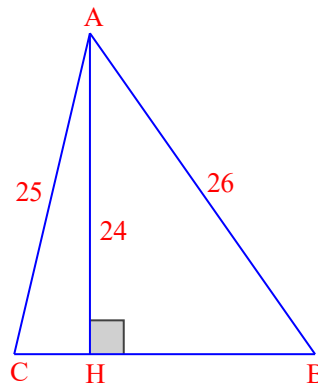
$$CH = AC \cdot \cos 78^\circ = 8 \cdot \cos 78^\circ \approx 1,66; AH = AC \cdot \sin 78^\circ = 8 \cdot \sin 78^\circ \approx 7,82$$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác BHC có:

$$CH = BC \cdot \sin 18^\circ \approx 1,66 \Rightarrow BC \approx 5,37; BH = BC \cdot \cos 18^\circ = 5,37 \cdot \cos 18^\circ \approx 5,12$$

$$\text{Khi đó } AB = BH + AH = 5,12 + 7,82 = 12,94$$

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 26cm$, $AC = 25cm$, đường cao $AH = 24cm$. Tính cạnh BC



Lời giải

Cách 1: Sử dụng định lý Pitago

Ta có AH là đường cao của tam giác ABC (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{AHB} = 90^\circ$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H (do $\widehat{AHB} = 90^\circ$) ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2$ (Pitago)

$$\Rightarrow HB^2 = AB^2 - AH^2 \Rightarrow HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10 (cm)$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H (do $\widehat{AHC} = 90^\circ$) ta có: $AC^2 = AH^2 + HC^2$ (Pitago)

$$\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 \Rightarrow HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7 (cm)$$

$$BC = BH + HC = 7 + 10 = 17 (cm)$$

Vậy $BC = 17cm$.

Cách 2: Áp dụng tỉ số lượng giác

Ta có AH là đường cao của $\triangle ABC$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{AHB} = 90^\circ$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H (do $\widehat{AHB} = 90^\circ$) ta có $\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{13}$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\text{Ta có } BH = AB \cdot \cos B = 26 \cdot \frac{5}{13} = 10 (cm)$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H (do $\widehat{AHC} = 90^\circ$) ta có $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{24}{25}$

$$\text{Xét } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$$

$$\text{Ta có } HC = AC \cdot \cos C = 25 \cdot \frac{7}{25} = 7 (cm) \Rightarrow BC = HC + HB = 17 (cm)$$

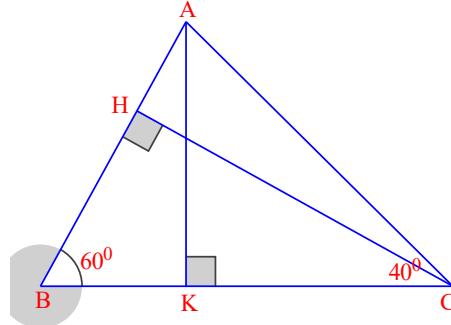
Vậy $BC = 17cm$.

Câu 15: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 12\text{cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

a) Tính chiều cao CH và AC

b) Tính diện tích $\triangle ABC$

Lời giải



a) Xét $\triangle BHC$ vuông tại H . Áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

$$\Rightarrow CH = BC \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Trong } \triangle ABC \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 100^\circ \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 100^\circ} \approx 10,55(\text{cm})$$

b) Kẻ $AK \perp BC$. Xét $\triangle ACK$ vuông tại K ta có $AK = AC \cdot \sin C$

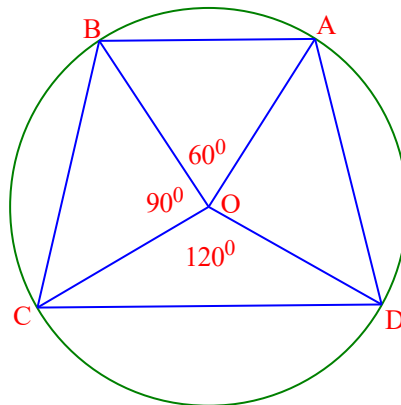
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C \approx 40,7(\text{cm}^2)$$

Câu 16: Cho đường tròn tâm O , bán kính $R = 10\text{cm}$. Trên (O) lấy A, B, C, D thỏa mãn $\widehat{AOB} = 60^\circ$; $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{COD} = 120^\circ$

a) Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân

b) Tính chu vi của $ABCD$.

Lời giải



$$\text{a) Ta có } \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{AOD} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle AOB \text{ cân tại } O \text{ có } \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOB \text{ đều} \Rightarrow \widehat{OBA} = 60^\circ \quad (1)$$

Xét $\triangle OBC$ cân tại O có $\widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBO} = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CBA} = 105^\circ$

Tương tự chứng minh được $\widehat{BCD} = 45^\circ + 35^\circ = 75^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, mà hai góc ở vị trí trong cùng phía $\Rightarrow AB \parallel CD$

Xét $\triangle BOC$ và $\triangle AOD$ có $OB = OA = R; OC = OD = R$ và $\widehat{BOC} = \widehat{AOD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle AOD$ (cgc) $\Rightarrow AD = BC$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow ABCD$ là hình thang cân

b) Ta có $AB = R$ (vì $\triangle OAB$ đều)

$BC = AD = \sqrt{2}R$ ($\triangle OBC$ và $\triangle OAD$ là hai tam giác vuông cân)

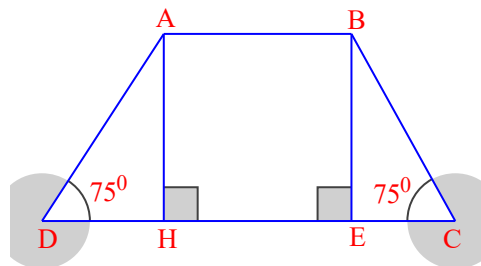
Kẻ $OH \perp CD \Rightarrow \widehat{COH} = 60^\circ$ ($\triangle COD$ cân)

$\Rightarrow CH = R \cdot \sin 60^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{3}$

Vậy chu vi $ABCD = AB + BC + CD + DA = R + 2\sqrt{2}R + \sqrt{3}R \approx 55,6(cm)$.

Câu 17: Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 15cm$ và $DC = 20cm$. Góc ở đáy bằng 75° . Tính diện tích hình thang cân $ABCD$

Lời giải



Kẻ $AH \perp CD, BE \perp CD$ ($A \in DC; B \in DC$)

Ta có $AH \perp AC, BE \perp DC$ ($A \in DC; B \in DC$)

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AHC} = \widehat{BEC} = \widehat{BED} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ABEH$ có $AB \parallel HE$ (do $AB \parallel CD$ và $H \in DC, E \in DC$)

$AH \parallel BE$ (cùng vuông góc với DC)

Suy ra tứ giác $ABEH$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow AB = HE = 15(cm)$ (tính chất)

Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân (giả thiết) nên $\begin{cases} \widehat{D} = \widehat{C} = 75^\circ \\ AD = BC \end{cases}$ (tính chất)

$$\Delta AHD \text{ vuông tại } H \text{ và } \Delta BEC \text{ vuông tại } E \text{ có } \begin{cases} \widehat{D} = \widehat{C} \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta AHD = \Delta BEC \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)} \Rightarrow DH = EC$$

$$\text{Mà } DH + EC + HE = DC \Rightarrow DH = EC = \frac{DC - HE}{2} = \frac{20 - 15}{2} = 2,5 (cm)$$

$$\text{Xét } \Delta AHD \text{ vuông tại } H \text{ ta có } AH = DH \cdot \tan D = 2,5 \cdot \tan 75^\circ = \frac{10 + 5\sqrt{3}}{2} (cm)$$

Diện tích hình thang $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot AH = \frac{1}{2}(15 + 20) \cdot \frac{10 + 5\sqrt{3}}{2} \approx 163,28 (cm^2)$$

Câu 18: Cho ΔABC vuông ở A có $AB = 6cm$, $AC = 8cm$

a) Giải tam giác vuông ABC .

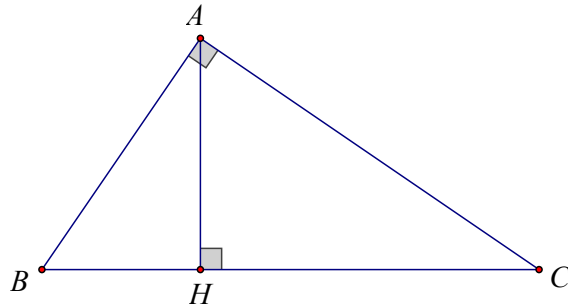
b) Kẻ $AH \perp BC$ tại H . Tính AH , HB , HC

c) Từ H kẻ HE và HF lần lượt vuông góc với AB , AC .

Tính chu vi và diện tích tứ giác $AEHF$.

d) Cho BC cố định. Tìm vị trí điểm A để S_{AEHF} đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $\Delta ABC (\widehat{A} = 90^\circ)$: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pytago). Khi đó, $BC = 10cm$.

$$\text{Ta có: } \sin \widehat{B} = \frac{8}{10} = 0,8 \Rightarrow \widehat{B} \approx 53^\circ \Rightarrow \widehat{C} \approx 37^\circ.$$

b) Áp dụng HTL trong tam giác vuông ABC :

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = 4,8cm.$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = 3,6cm.$$

$$CH = BC - BH = 6,4cm.$$

c) Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$ nên tứ giác là hình chữ nhật.

Mặt khác, áp dụng HTL trong tam giác vuông HAB :

$$HE.AB = HB.AH \Rightarrow HE = 2,88cm.$$

$$AH^2 = AE.AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB} = 3,84.$$

Do vậy chu vi HCN $AEHF : (2,88 + 3,84).2 = 13,44cm$.

Diện tích HCN $AEHF : 2,88.3.84 = 11,0592cm^2$.

$$d) \text{ Ta có } S_{AEHF} = HE.AE \leq \frac{HE^2 + AE^2}{2} = \frac{1}{2} AH^2.$$

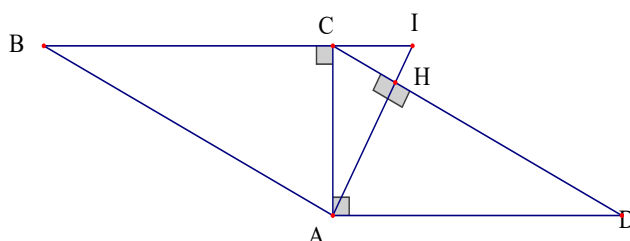
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \leq AM$. Vậy $S_{AEHF} \leq \frac{1}{2} AM^2$.

Dấu bằng xảy ra khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Câu 19: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC \perp AD$. Kẻ $AH \perp DC$ tại H , đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại I . Chứng minh rằng:

1. $AC^2 = CH.CD = CB.CI$.
2. $AH.AI + DH.DC = BC.BI$.
3. $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{HC.HD} - \frac{1}{AI^2}$.

Lời giải



a) Ta có: $ABCD$ là hình bình hành (gt) $\Rightarrow AD \parallel BC; AB \parallel CD$ (t/c hình bình hành)

Lại có: $AC \perp AD$ (gt) $\Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow AC \perp BI$

Xét $\triangle ADC$ vuông tại A, có: $AH \perp CD$ (gt) $\Rightarrow AH$ là đường cao của $\triangle ADC$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADC , có: $AC^2 = CH.CD$ (1)

Có: $AH \perp CD$ (gt) $\Rightarrow AH \perp AB$ (vì $BA \parallel CD$) $\Rightarrow \triangle ABI$ vuông tại A

Mà $AC \perp BI$ (cmt) $\Rightarrow AC$ là đường cao của $\triangle ABI$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABI , có: $AC^2 = CB.CI$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AC^2 = CH.CD = CB.CI$

b) Xét $\triangle ACI$ vuông tại C, có đường cao CH .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được: $AC^2 = AH.AI$ (3)

Xét $\triangle ACD$ vuông tại A , có đường cao AH .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được: $AD^2 = DH.DC$ (4)

Xét $\triangle ABI$ vuông tại A , đường cao AC . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được:

$$AB^2 = BC.BI \Rightarrow CD^2 = BC.BI \quad (5) \quad (\text{Vì } AB = CD \text{ do } ABCD \text{ là hình bình hành (gt)})$$

Xét $\triangle ACD$ vuông tại A . Áp dụng định lý Py – ta – go, có: $CD^2 = AC^2 + AD^2$ (6)

Từ (3), (4), (5) và (6), suy ra: $AH.AI + DH, DC = BC.BI$

c) Xét $\triangle ACD$ vuông tại A , có đường cao AH . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được:

$$+) AH^2 = HC.HD \Rightarrow \frac{1}{HC.HD} = \frac{1}{AH^2}$$

$$+) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$$

Xét $\triangle ABI$ vuông tại A , có đường cao AC . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta được:

$$\frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AC^2} - \frac{1}{AI^2}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{HC.HD} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{HC.HD} - \frac{1}{AI^2}$$

Câu 20: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C , đường cao CK .

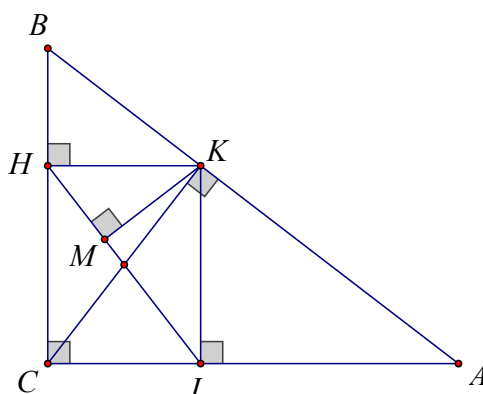
a) Cho $AB = 10\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Tính BC, CK, BK và AK

b) Gọi H và I thứ tự là hình chiếu của K trên BC và AC . Chứng minh $CB.CH = CA.CI$

c) M là chân đường vuông góc kẻ từ K xuống IH . Chứng minh $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$

d) Chứng minh rằng $\frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3}$

Lời giải



a) $\triangle ABC$ vuông tại C có:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Rightarrow BC^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 6(cm)$$

$$\text{Ta có: } CK \cdot AB = BC \cdot AC \Leftrightarrow CK \cdot 10 = 6 \cdot 8 \Rightarrow CK = 4,8 (cm)$$

$$BC^2 = BK \cdot AB \Leftrightarrow 6^2 = BK \cdot 10 \Leftrightarrow BK = 3,6(cm)$$

$$\text{Ta có: } BK + KA = AB \Rightarrow AK = 10 - 3,6 = 6,4 (cm)$$

b) Xét $\triangle KBC$ vuông tại K có: $CH \cdot CB = CK^2$ (1)

$$\triangle KAC \text{ vuông tại } K \text{ có: } CI \cdot CA = CK^2 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow CH \cdot CB = CI \cdot CA$$

c) Xét tứ giác $CHKI$ có: $\widehat{CHK} = \widehat{HCI} = \widehat{CIK} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $CHKI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow CH = KI$; $HK = CI$ (t/c) (3)

$$\triangle HKI \text{ vuông tại } K \text{ có } KM \text{ là đường cao } \Rightarrow \frac{1}{KH^2} = \frac{1}{KH^2} + \frac{1}{KI^2} \text{ (4)}$$

$$\text{Từ (3), (4) } \Rightarrow \frac{1}{KH^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2} \text{ (đpcm)}$$

d) Tứ giác $CHKI$ là hình chữ nhật (cmt) $\Rightarrow IK \parallel CH \Rightarrow IK \parallel AB$

$$\Rightarrow \widehat{KBH} = \widehat{AKI} \text{ (hai góc đồng vị).}$$

Xét $\triangle BKH$ và $\triangle KAI$ có:

$$\widehat{BHK} = \widehat{KIA} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BKH} = \widehat{KAI}$$

$$\triangle KAI \sim \triangle BKH (g.g) \Rightarrow \frac{KI}{BH} = \frac{AK}{BK} \text{ (t / c)}$$

$$IK \parallel AB \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{KI}{BC} \text{ (hệ quả định lí Ta lét)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AI} = \frac{BC}{KI \cdot AC} \Rightarrow \frac{BH}{AI} = \frac{BC \cdot BH}{KI \cdot AC}$$

$$\text{Mà } \frac{KI}{BH} = \frac{AK}{BK} \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{BH}{AI} = \frac{BC \cdot BK}{AK \cdot AC} \Rightarrow \frac{BH}{AI} = \frac{BC \cdot BK \cdot AB}{AK \cdot AC \cdot AB} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BK \cdot AB}{AK \cdot AB}$$

Mà $CB^2 = CK \cdot AB$; $CA^2 = KA \cdot BC$ (hệ thức lượng trong $\triangle ABC$ vuông tại C có đường cao CH)

$$\Rightarrow \frac{BH}{AI} = \left(\frac{BC}{AC} \right)^3 \Rightarrow \frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3} \text{ (đpcm)}$$

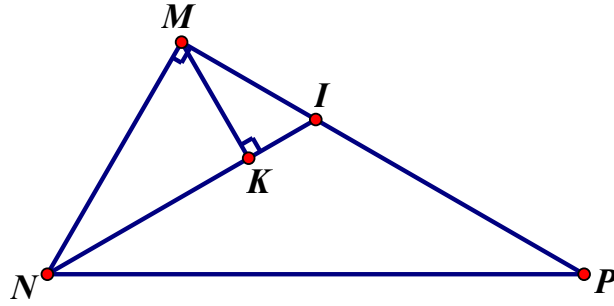
Câu 21: Cho tam giác MNP vuông tại M , góc $\widehat{N} = 60^\circ$, đường phân giác NI . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với NI tại K .

1) Chứng minh $\triangle MKN$ đồng dạng với $\triangle NMP$, tìm tỉ số đồng dạng của chúng.

2) Tính diện tích tam giác MKN biết diện tích tam giác NMP bằng $60cm^2$.

3) Chứng minh $NP \cdot MK = NK \cdot IP$

Lời giải



$$1) \Delta NMP \text{ vuông tại } M \text{ có } \widehat{N} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 30^\circ \Rightarrow NM = \frac{NP}{2}$$

Do NI là phân giác của $\widehat{MNP} \Rightarrow \widehat{MNK} = \widehat{INP} = 30^\circ$

Xét ΔMKN và ΔNMP có: $\widehat{MKN} = \widehat{NMP} = 90^\circ$; $\widehat{MNK} = \widehat{P} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \Delta MKN \sim \Delta NMP \text{ (g.g), tỉ số đồng dạng } \frac{NM}{NP} = \frac{1}{2}$$

$$2) \Delta MKN \sim \Delta NMP, \text{ tỉ số } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MKN}}{S_{NMP}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MKN} = \frac{S_{NMP}}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ cm}^2$$

$$3) \text{ Xét } \Delta NIP \text{ có } \widehat{INP} = \widehat{P} = 30^\circ \Rightarrow \Delta NIP \text{ cân tại } I \Rightarrow IP = IN$$

$$\Delta MKN \text{ vuông tại } K \text{ có } \widehat{MNK} = 30^\circ \Rightarrow MK = \frac{MN}{2}$$

$$\text{Mà } MN = \frac{NP}{2} \Rightarrow 2MN = NP \Rightarrow NP.MK = 2MN.\frac{MN}{2} = MN^2 \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông với ΔMNI vuông tại M có:

$$MN^2 = NK.NI = NK.IP \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow NP.MK = NK.IP$$

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

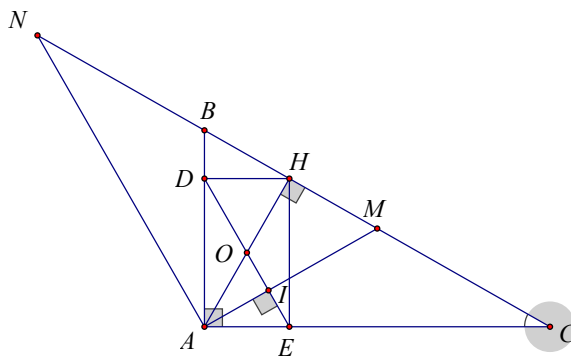
a) Chứng minh $DE.BC = AB.AC$.

$$\text{b) Chứng minh } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}.$$

c) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với DE cắt BC tại M . Chứng minh M là trung điểm BC .

d) Cho $\widehat{C} = \alpha$, $BC = a$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt BC tại N . Chứng minh $CN = \frac{a.(\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos 2\alpha}$.

Lời giải



a) Chỉ ra $AEHD$ là hình chữ nhật suy ra $AH = DE$.

Mà $AB.AC = AH.BC \Rightarrow AB.AC = DE.BC$.

b) Chỉ ra $\begin{cases} AB^2 = BH.BC \\ AC^2 = CH.BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH.BC}{CH.BC} = \frac{BH}{CH}$.

c) Chỉ ra $\widehat{IAE} = \widehat{IEH} = \widehat{OHE} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta MAC$ cân tại $M \Rightarrow MA = MC$ (1)

Ta có: $\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \\ \widehat{MAE} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{MAB} \Rightarrow \Delta MAB \text{ cân tại } M \Rightarrow MA = MB \text{ (2)} \\ \widehat{MAE} = \widehat{C} \end{cases}$

Từ (1)(2) suy ra M là trung điểm BC .

d) Tam giác AMC cân tại $M \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{MAC} + \widehat{C} = 2\widehat{C} = 2\alpha$

Trong tam giác vuông AMN có:

$$\cos 2\alpha = \frac{AM}{NM} \Rightarrow \frac{a \cdot (\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos 2\alpha} = \frac{a \cdot \left(\frac{AM}{NM} + 1 \right)}{2 \cdot \frac{AM}{NM}} = \frac{a \cdot \left(\frac{AM + MN}{NM} \right)}{2 \cdot \frac{AM}{NM}} = \frac{a \cdot (MC + MN)}{2AM} = \frac{a \cdot NC}{2 \cdot \frac{a}{2}} = NC$$

Câu 23: Cho tam giác MND vuông tại M ($MN < MD$), đường cao MH .

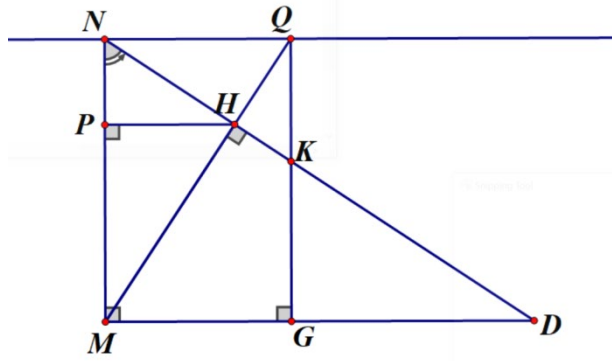
a) Cho $MN = 6 \text{ cm}$, $MD = 8 \text{ cm}$. Tính ND , MH .

b) Qua N kẻ Nx song song MD cắt đường thẳng MH tại Q . Chứng minh $MH.MQ = NH.ND$.

c) Kẻ QG vuông góc MD (G thuộc MD), QG cắt ND tại K . Chứng minh $NH^2 = HK.HD$.

d) Kẻ HP vuông góc MN (P thuộc MN). Chứng minh $NP = ND \cdot \cos^3 MND$.

Lời giải



a) Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông MND : $MN^2 + MD^2 = ND^2 \Rightarrow ND = 10 \text{ cm}$

Hệ thức lượng trong tam giác vuông MND , đường cao MH : $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MD^2}$

$$\Rightarrow MH = \frac{24}{5} \text{ cm}.$$

b) $NQ \parallel MD, NM \perp MD \Rightarrow NQ \perp NM$ (từ vuông góc đến song song).

Tam giác MNQ vuông, NH là đường cao: $NM^2 = MH.MQ$ (hệ thức trong tam giác vuông)

Tam giác MND vuông, MH là đường cao: $NM^2 = NH.ND$ (hệ thức trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow MH.MQ = NH.ND$$

c) Tam giác MNQ vuông, NH là đường cao: $NH^2 = MH.HQ$ (hệ thức trong tam giác vuông)

Tam giác QHK đồng dạng tam giác DHM (g - g) $\Rightarrow \frac{HK}{HM} = \frac{HQ}{HD} \Rightarrow HK.HD = MH.HQ$

$$\Rightarrow NH^2 = HK.HD$$

d) Tam giác NHM vuông, HP là đường cao: $NH^2 = NM.NP \Rightarrow NP = \frac{NH^2}{NM} = NH^2 \cdot \frac{1}{NM}$

Tam giác NMD vuông, MH là đường cao: $NM^2 = NH.ND \Rightarrow NH = \frac{NM^2}{ND}$

$$NP = \Rightarrow \left(\frac{NM^2}{ND} \right)^2 \cdot \frac{1}{NM} = \frac{NM^3}{ND^2} = \frac{(ND \cdot \cos MND)^3}{ND^2} = ND \cdot \cos^3 MND$$

Câu 24: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường cao AH . Hạ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi M là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$

b) $\triangle AEF \sim \triangle ACE$

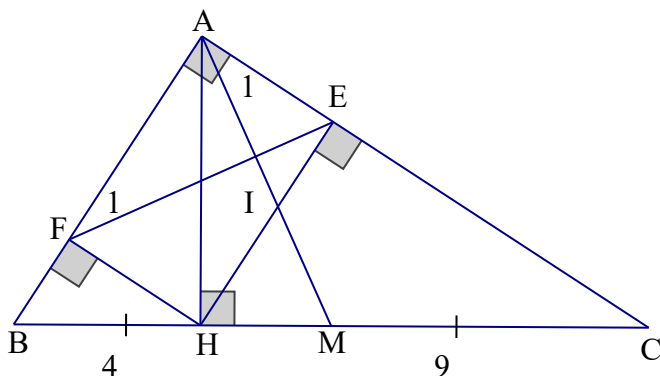
c) $AM \perp EF$

d) Cho $BH = 4\text{cm}, HC = 9\text{cm}$. Tính EF

e) Cho BC cố định, tìm vị trí của điểm A để đoạn EF lớn nhất

f) Cho BC cố định, tìm vị trí của A để diện tích tứ giác $AEHF$ lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (vì cùng bằng AH^2)

b) Từ $AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB}$, lại có $\widehat{A}$: chung $\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB$ (cgc)

c) Từ chứng minh trên $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E_1}$ (1)

$\triangle ABC$ vuông tại A , M là trung điểm của $BC \Rightarrow MA = MC \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A_1}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{MAB} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp FE = I$

d) Ta có $AH^2 = BH \cdot HC = 36 \Rightarrow AH = EF = 6$ (cm)

e) Theo chứng minh trên ta có $AH = EF = 6$ (cm) do đó EF lớn nhất khi AH lớn nhất

mà $AH \leq AM$, $AM = \frac{1}{2}BC$ (không đổi)

Dấu “=” xảy ra khi H trùng với M khi và chỉ khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A

Vậy EF lớn nhất khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

f) Theo câu a, có: $\begin{cases} AE \cdot AB = AH^2 \\ AF \cdot AC = AH^2 \end{cases} \Rightarrow AE \cdot AF \cdot AB \cdot AC = AH^4 \Rightarrow AE \cdot AF \cdot AH \cdot BC = AH^4$

$$\Rightarrow AE \cdot AF = \frac{AH^3}{BC}$$

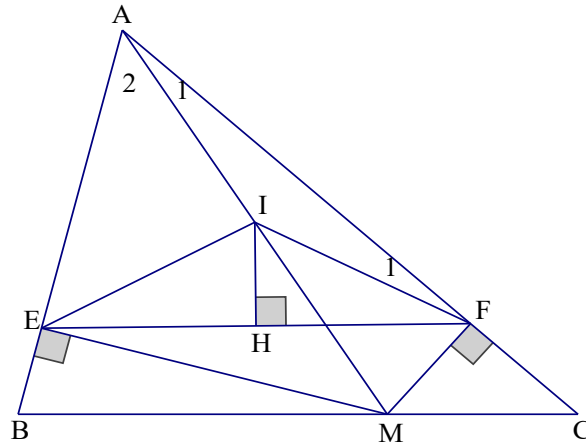
Vậy EF lớn nhất khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A

Có $S_{AEHF} = \frac{AH^3}{BC}$, mà BC không đổi $\Rightarrow S_{AEHF}$ lớn nhất khi AH lớn nhất khi $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Câu 25: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $\widehat{A} = 60^\circ$, $M \in BC$. Gọi I là trung điểm của AM , hạ $ME \perp AB, MF \perp AC$

- a) Chứng minh rằng $IA = IM = IE = IF$
- b) Tính $\widehat{EIF}$
- c) Cho $AM = 20cm$. Tính EF
- d) Tìm vị trí của điểm M để EF nhỏ nhất

Lời giải



- a) Dùng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông
- b) Theo chứng minh trên ta có:

$$IA = IF \Rightarrow \triangle IAF \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{F_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{MIF} = 2\widehat{A_1} \text{ (góc ngoài tam giác)}. \text{ Tương tự ta có } \Rightarrow \widehat{I_2} = 2\widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{EIF} = 2(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}) = 120^\circ$$

$$\text{c) Hạ } IH \perp EF, \text{ do } \triangle EIF \text{ cân tại } I \Rightarrow \begin{cases} HE = HF \\ \widehat{EIH} = \widehat{FIH} = 60^\circ \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức lượng giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có:

$$EH = IE \cdot \sin \widehat{EIH} = \frac{1}{2} AM \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow EF = AM \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow EF = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} (cm)$$

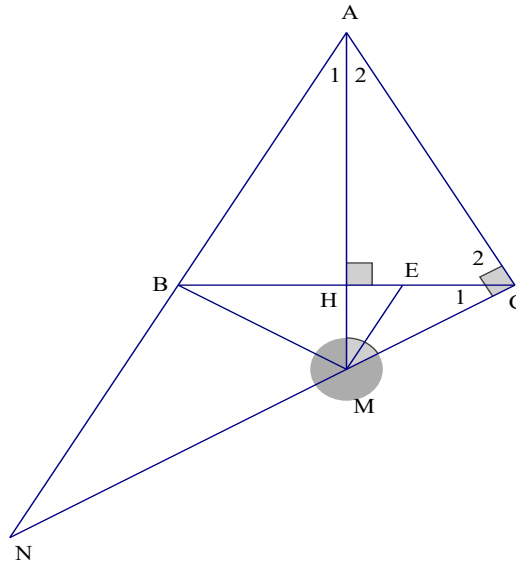
$$\text{d) Theo chứng minh trên ta có } EF = AM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó } EF \text{ nhỏ nhất khi } AM \text{ nhỏ nhất}$$

AM nhỏ nhất khi $AM \perp BC$. Vậy EF nhỏ nhất khi $AM \perp BC$.

Câu 26: Cho tam giác ABC đều, đường cao AH . Trên tia đối của tia AH lấy điểm M sao cho $MH = \frac{1}{3}AH$

- a) Chứng minh rằng $\triangle ACM$ vuông
- b) Cho $CM = 5cm$. Tính AB
- c) Phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt BC tại E , biết $CE = 4cm$. Tính AC
- d) CM cắt AB tại N . Tính MN , BN theo cạnh của $\triangle ABC$

Lời giải



Ta có $\triangle ABC$ đều, đường cao AH nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 30^\circ$

a) Có $\tan 30^\circ = \frac{HC}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \sqrt{3}.CH$

mà $HM = \frac{1}{3}AH \Rightarrow HM = \frac{\sqrt{3}.CH}{3}$

$\Rightarrow \tan \widehat{C_1} = \frac{HM}{MC} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{C_1} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$ (dpcm)

b) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

$AM = CM.\cos \widehat{A_2} = 5.\cos 30^\circ = 5\sqrt{3}(cm)$

c. Theo chứng minh trên $\widehat{C_1} = 30^\circ$

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác: $\frac{EH}{EC} = \frac{MH}{MC} = \sin \widehat{C_1} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow EH = \frac{1}{2}EC = 2(cm) \Rightarrow CH = 4 + 2 = 6(cm) \Rightarrow BC = 12cm = AC$

d) Đặt $AB = AC = BC = x(cm)$ ($x > 0$)

$\triangle CAN$, có $\widehat{ACN} = 90^\circ$; $\widehat{NAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{N} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{N} = \widehat{A_1} \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại M $\Rightarrow MN = MA$

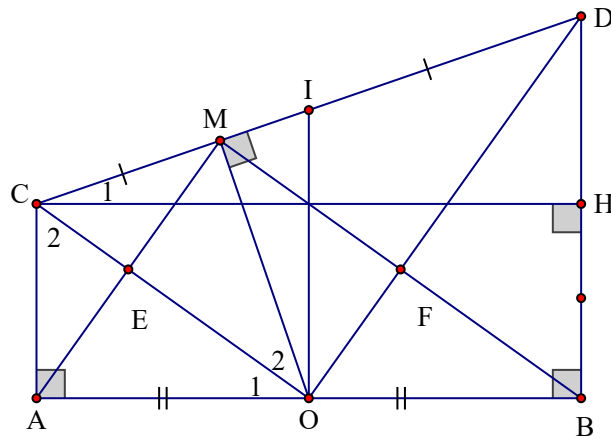
Có $\cos \widehat{A_2} = \frac{AC}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AM = \frac{2AC}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

Lại có $\widehat{ABM} = 90^\circ \Rightarrow MB \perp AN$

Mà $\triangle AMN$ cân tại M nên $BN = BA = x$.

- Câu 27:** Cho $AB = 2a$ cố định. O là trung điểm của AB , vẽ cùng một phía của AB vẽ hai tia Ax, By trong đó $By \perp AB$. Lấy điểm C thuộc Ax, D thuộc By sao cho $\widehat{COD} = 90^\circ$ ($AC \leq BD$). Hạ $OM \perp CD$, nối OC cắt AM tại E , nối OD cắt BM tại F
- Chứng minh rằng CO và DO là phân giác của $\widehat{ACD}$ và $\widehat{BDC}$
 - Chứng minh $\triangle ABM$ vuông tại M
 - Chứng minh tứ giác $OEMF$ là hình chữ nhật
 - $OE \cdot OC = OF \cdot OD$
 - Cho C và D chuyển động mà $\widehat{COD} = 90^\circ$. Chứng minh $AC \cdot BD$ không đổi
 - Cho $\widehat{MBA} = 30^\circ$, tính AC và BD theo a
 - Xác định vị trí của điểm C để cho $\tan \widehat{CDB} = 3$

Lời giải



a) Từ giả thiết suy ra $AC \parallel BD$ vì cùng vuông góc với $ACDB$

Tứ giác $ACDB$ là hình thang.

Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang $ACDB$

$$\Rightarrow OI \parallel AC \Rightarrow \widehat{IOC} = \widehat{C}_2 \text{ (so le trong)}$$

Tam giác COD vuông tại O (giả thiết), $IC = ID \Rightarrow IO = IC \rightarrow \widehat{IOC} = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow CO$ là phân giác của $\widehat{ACD}$

Tương tự: DO là phân giác của $\widehat{BDC}$

b) Theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow OM = OA = OB \Rightarrow OM = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại M

c) $\triangle OMC$ vuông tại M và $\triangle OAC$ vuông tại A ,

$$\text{mà } \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \text{ (cmt)} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MOC} = \widehat{AOC} \\ OM = OA \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow OC \perp AM = E \text{ (đpcm)}$$

d, e) Ta có:

$$\widehat{AOC} + \widehat{BOD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD} \Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle BDO \Rightarrow \frac{AO}{BD} = \frac{AC}{BO} \Rightarrow AC \cdot BD = AO \cdot BO = a^2$$

f) Ta có $OC \parallel MB$ (cùng vuông góc với AM)

$$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{MBO} = 30^\circ \Rightarrow AC = AO \cdot \tan 30^\circ = a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$AC \cdot BD = a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$$

g) Hạ $CH \perp BD$, đặt $AC = x (x > 0)$

Tứ giác $ACHD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BH = x; CH = AB = 2a$

$$\text{Ta có } \tan \widehat{CDB} = 3 \Leftrightarrow \frac{CH}{DH} = 3 \Leftrightarrow DH = \frac{CH}{3} = \frac{2a}{3} \Rightarrow BD = \frac{2a}{3} + x$$

Theo chứng minh trên $AC \cdot BD = a^2$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(x + \frac{2a}{3}\right) = a^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2ax}{3} = a^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{9} = a^2 + \frac{a^2}{9} \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{10a^2}{9} (x, a > 0)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{a}{3} = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow x = \frac{a(\sqrt{10}-1)}{3} \Rightarrow AC = \frac{a(\sqrt{10}-1)}{3}.$$

Câu 28: Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông để đo chiều cao của một cây dừa, với các kích thước đo được như hình bên. Khoảng cách từ vị trí gốc cây đến vị trí chân của người thợ là $4,8m$ và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người ngắm là $1,6m$. Hỏi với các kích thước trên thì người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu? (làm tròn đến mét).



Lời giải

Xét tứ giác $ABDH$ có:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{H} = 90^\circ \text{ (hình vẽ)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDH$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

$$\Rightarrow BA = DH = 1,6m; BD = AH = 4,8m$$

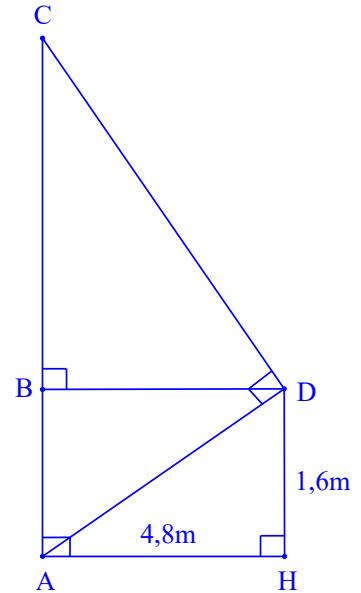
Xét $\triangle ADC$ vuông tại D và DB là đường cao, ta có:

$$DB^2 = BA \cdot BC \text{ (hệ thức lượng)}$$

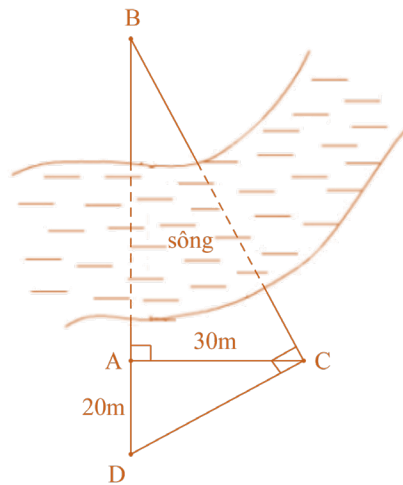
$$\Rightarrow BC = \frac{DB^2}{BA} = \frac{4,8^2}{1,6} = 14,4m$$

$$\Rightarrow AC = AB + BC = 1,6 + 14,4 = 16m$$

Vậy chiều cao của cây dừa là $16m$



Câu 29: Muốn tính khoảng cách từ điểm A đến điểm B nằm bên kia bờ sông, ông Việt vạch từ A đường vuông góc với AB . Trên đường vuông góc này lấy một đoạn thẳng $AC = 30m$, rồi vạch CD vuông góc với phương BC cắt AB tại D (xem hình vẽ). Đo $AD = 20m$, từ đó ông Việt tính được khoảng cách từ A đến B . Em hãy tính độ dài AB và số đo góc ACB .



Lời giải

Xét $\triangle BCD$ vuông tại C và CA là đường cao, ta có:

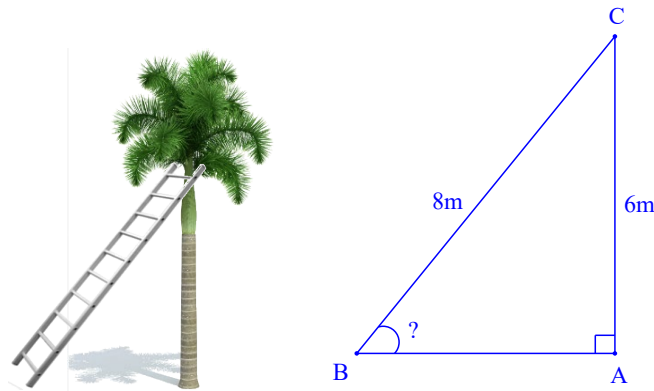
$$AB \cdot AD = AC^2 \text{ (hệ thức lượng)} \Rightarrow AB = \frac{AC^2}{AD} = \frac{30^2}{20} = 45m$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\tan ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{45}{30} = 1,5 \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 56^\circ 18'$$

Vậy tính độ dài $AB = 45m$ và số đo góc ACB là $56^\circ 18'$

Câu 30: Một cây cau có chiều cao $6m$. Để hái một buồng cau xuống, phải đặt thang tre sao cho đầu thang tre đạt độ cao đó, khi đó góc của thang tre với mặt đất là bao nhiêu, biết chiếc thang dài $8m$ (làm tròn đến phút)



Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)} \Rightarrow \hat{B} \approx 48^\circ 35'$$

Vậy góc giữa thang tre với mặt đất là $48^\circ 35'$

Câu 31: Một máy bay đang bay ở độ cao $12km$. Khi bay hạ cánh xuống mặt đất, đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất.

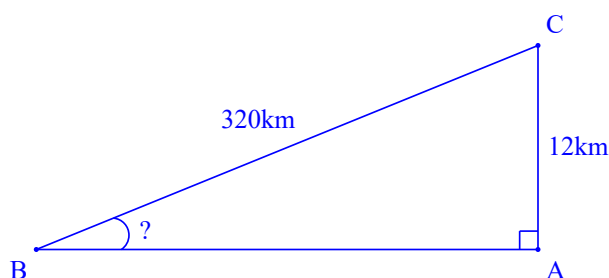


a) Nếu cách sân bay $320km$ máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

b) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng 5° thì cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Lời giải

a) Hình vẽ minh họa bài toán:



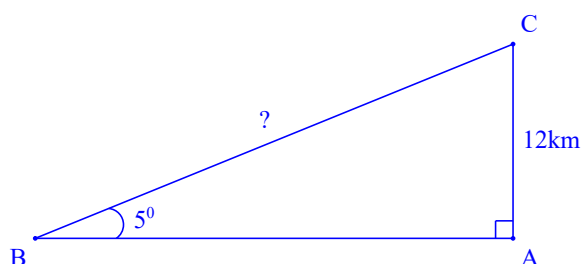
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{320} = \frac{3}{80}$$

(tỉ số lượng giác của góc nhọn) $\Rightarrow \hat{B} \approx 2^{\circ}9'$

Vậy góc nghiêng là $2^{\circ}9'$

b) Hình vẽ minh họa bài toán:



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{12}{\sin 5^{\circ}} \approx 137,7km$$

Vậy phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh khi cách sân bay $137,7km$

Câu 32: Hải đăng kê Gà thuộc xã Tân Thành, huyện Hàm Thuận Nam, Bình Thuận là ngọn hải đăng được trung tâm sách kỷ lục Việt Nam xác nhận là ngọn hải đăng cao nhất và nhiều tuổi nhất. Hải đăng Kê Gà được xây dựng từ năm 1897 – 1899 và toàn bộ bằng đá. Tháp đèn có hình bát giác, cao $66m$ so với mực nước biển. Ngọn đèn đặt trong tháp có thể phát sáng xa 22 hải lý (tương đương $40km$)



Một người đi thuyền thúng trên biển, muốn đến ngọn hải đăng có độ cao $66m$, người đó đứng trên mũi thuyền và dùng giác kế đo được góc giữa thuyền và tia nắng chiếu từ đỉnh ngọn hải đăng đến thuyền là 25° . Tính khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng (làm tròn đến m).

Lời giải

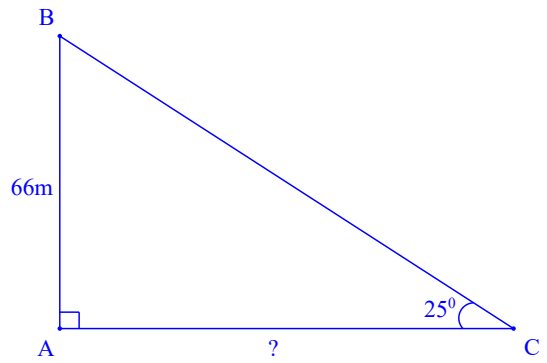
Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

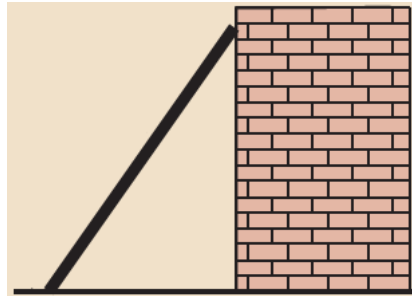
$$\tan C = \frac{AB}{AC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan C} = \frac{66}{\tan 25^\circ} \approx 142m$$

Vậy khoảng cách của thuyền đến ngọn hải đăng là $142m$



Câu 33: Trường bạn An có một chiếc thang dài 6 mét. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc “an toàn” là 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng)



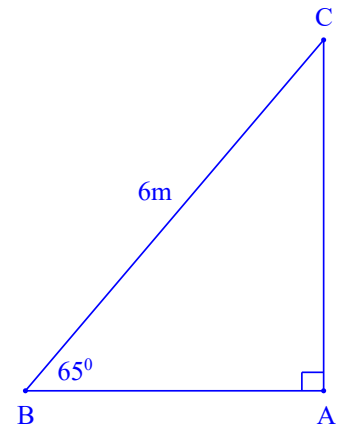
Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có: $\cos B = \frac{AB}{BC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn) $\Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 6 \cdot \cos 65^\circ \approx 2,5m$

Vậy cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng $2,5m$

Câu 34: Thang xếp chữ A gồm 2 thang đơn tựa vào nhau. Để an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc khoảng 75° . Nếu muốn tạo một thang xếp chữ A cao $2m$ tính từ mặt đất thì mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu?



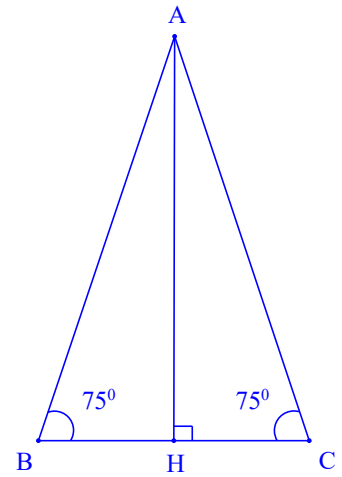
Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

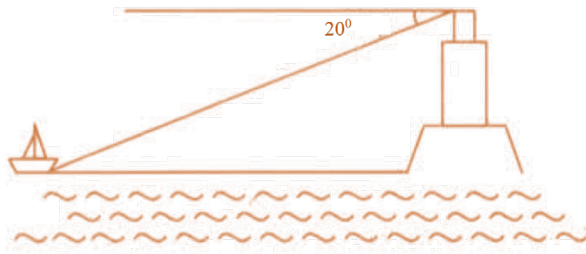
Do tam giác ABC cân nên đường cao AH cũng là trung tuyến hay H là trung điểm BC

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có: $\sin B = \frac{AH}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn) $\Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} = \frac{2}{\sin 75^\circ} \approx 2,07m$

Vậy thang đơn cần có chiều dài $2,07m$



Câu 35: Từ một đài quan sát cao $350m$ so với mực nước biển, người ta nhìn thấy một chiếc thuyền bị nạn dưới góc 20° so với phương ngang của mực nước biển. Muốn đến cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài bao nhiêu mét?



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Theo đề bài, ta có: $\widehat{BCA} = \widehat{CBx} = 20^\circ$

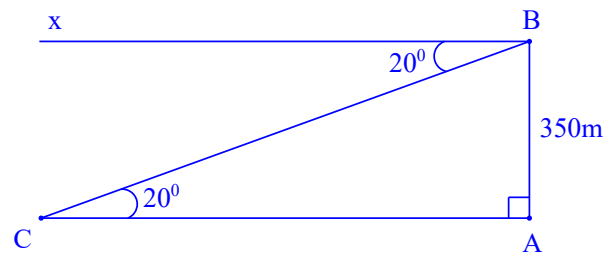
(vì $AC \parallel Bx$ và 2 góc ở vị trí so le trong)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

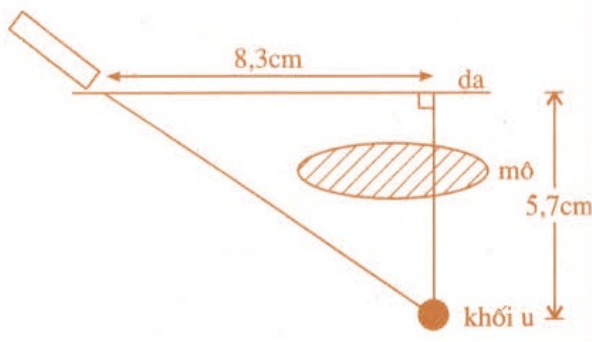
$\tan ACB = \frac{AB}{AC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan ACB} = \frac{350}{\tan 20^\circ} \approx 961,6m$$

Vậy muốn cứu con thuyền thì phải đi quãng đường dài khoảng $961,6m$.



Câu 36: Một khối u của một bệnh nhân cách mặt da $5,7cm$ được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u (trên mặt da) $8,3cm$ (xem hình vẽ). Tính góc tạo bởi chùm tia với mặt da và chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu để đến được khối u?



Lời giải

Dựa vào hình vẽ bài toán, ta có:

Xét ΔABC vuông tại A , ta có:

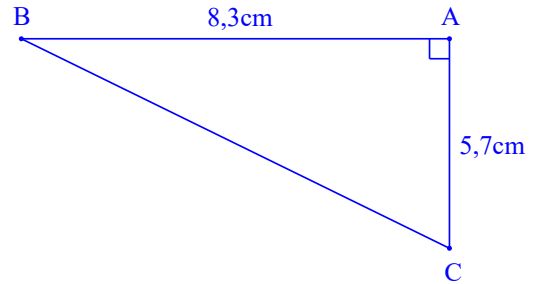
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{5,7}{8,3} \text{ (tỉ số lượng giác của góc}$$

nhọn) $\Rightarrow \hat{B} \approx 34^\circ 28'$

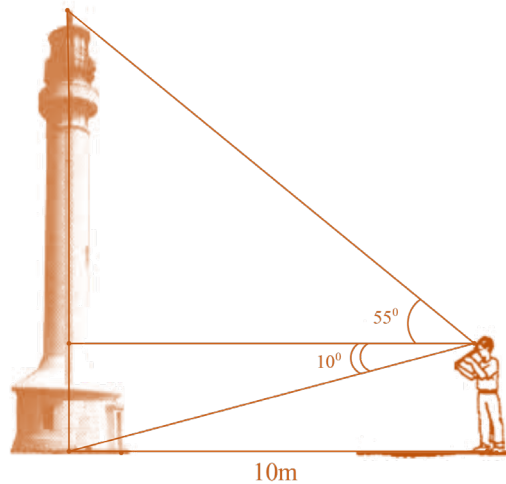
Và: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pytago)

$$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(8,3)^2 + (5,7)^2} \approx 10,1(cm)$$

Vậy góc tạo bởi chùm tia với mặt da là $34^\circ 28'$ và chùm tia phải đi một đoạn dài khoảng $10,1cm$ để đến được khối u.



Câu 37: Một người quan sát đứng cách một cái tháp $10m$, nhìn thẳng đỉnh tháp và chân tháp lần lượt dưới 1 góc 55° và 10° so với phương ngang của mặt đất. Hãy tính chiều cao của tháp.



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Dựa vào hình vẽ minh họa, ta có: $AH = BD = 10m$

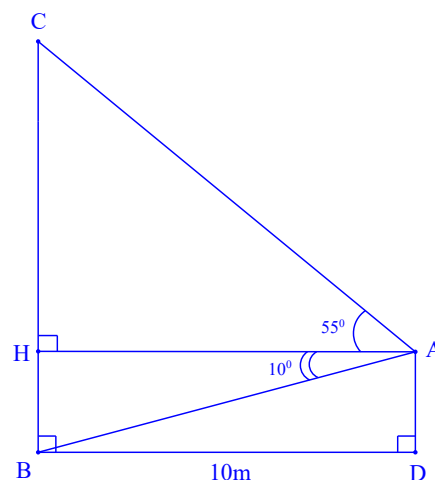
Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , ta có: $\tan BAH = \frac{BH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = AH \cdot \tan BAH = 10 \cdot \tan 10^\circ (m)$$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có: $\tan CAH = \frac{CH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow CH = AH \cdot \tan CAH = 10 \cdot \tan 55^\circ (m)$$

Ta có: $BC = BH + CH = 10 \cdot \tan 10^\circ + 10 \cdot \tan 55^\circ \approx 16m$. Vậy chiều cao của tháp là $16m$



Câu 38: Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40° . Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao $8,1$ mét thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là $2,6$ mét, chiều cao của vật nặng là 1 mét (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân)



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Ta có: $AK = CH$

$$\Rightarrow AD + DK = CH$$

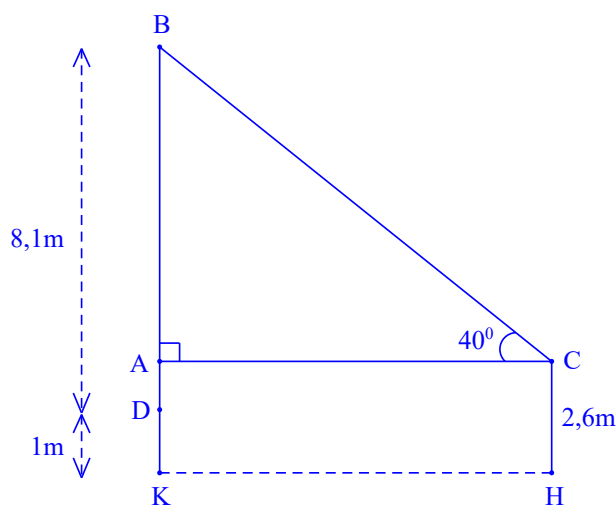
$$\Rightarrow AD = CH - DK = 2,6 - 1 = 1,6m$$

Mà: $AB + AD = BD$

$$\Rightarrow AB = BD - AD = 8,1 - 1,6 = 6,5m$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

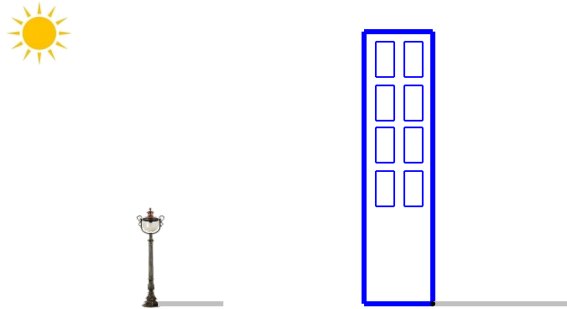
$\sin C = \frac{AB}{BC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)



$$\Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{6,5}{\sin 40^\circ} \approx 10,1m$$

Vậy cần cầu phải dài 10,1m

Câu 39: Một tòa nhà cao tầng có bóng trên mặt đất là 272m , cùng thời điểm đó một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 14m . Em hãy cho biết tòa nhà đó có bao nhiêu tầng, biết rằng mỗi tầng cao 3,4m ?



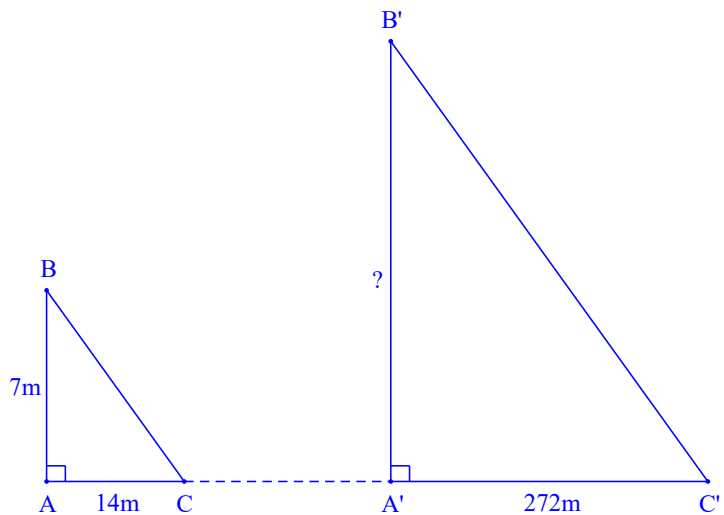
Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Vì các góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất là bằng nhau nên góc C bằng góc C'

$$\Rightarrow \tan C = \tan C' \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

(tỉ số lượng giác của góc nhọn)



$$\Rightarrow A'B' = \frac{AB \cdot A'C'}{AC} = \frac{7 \cdot 272}{14} = 136m$$

Vậy tòa nhà có: $\frac{136}{3,4} = 40$ (tầng).

Câu 40: Tòa nhà Bitexco Financial, Bitexco Financial Tower hay Tháp Tài chính Bitexco là một tòa nhà chọc trời được xây dựng tại trung tâm Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh. Tòa nhà có 68 tầng (không tính 3 tầng hầm). Biết rằng, khi tòa nhà có bóng in trên mặt đất dài 47,3mét, thì cùng thời điểm đó có một cột tiêu (được cắm thẳng đứng trên mặt đất) cao 15 mét có bóng in trên mặt đất dài 2,64 mét.



- a) Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất (đơn vị đo góc được làm tròn đến độ)
- b) Tính chiều cao của tòa nhà (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

a) Vì các góc tạo bởi tia nắng mặt trời và mặt đất là bằng nhau nên góc B bằng góc B'

$$\Rightarrow \tan B = \tan B' = \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{15}{2,64} \text{ (tỉ số}$$

lượng giác của góc nhọn)

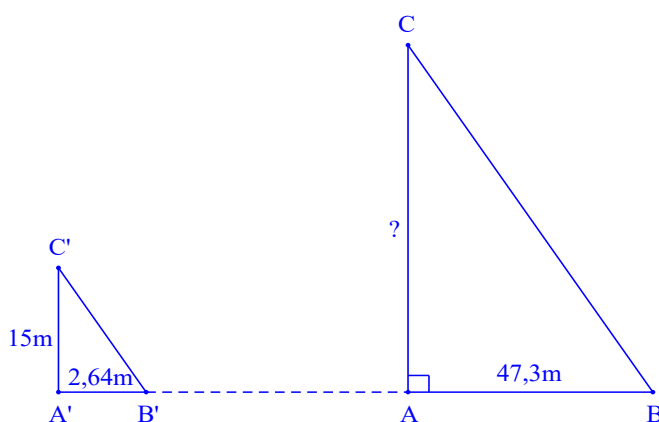
$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{B'} \approx 80^\circ$$

Vậy góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là 80°

b) Ta có $\tan B = \frac{AC}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AC = AB \cdot \tan B = 47,3 \cdot \frac{15}{2,64} \approx 268,8m$$

Vậy chiều cao của tòa nhà là $268,8m$



Câu 41: Giông bão thổi mạnh, một cây tre gãy gấp xuống làm ngọn cây chạm đất và ngọn cây tạo với mặt đất một góc 30° . Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây tre là $8,5m$. Giả sử cây tre mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây tre đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét $\triangle ADC$ vuông tại C , ta có:

$$\tan DCA = \frac{AD}{AC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

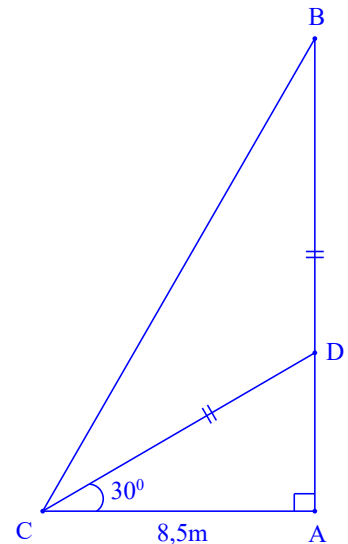
$$\Rightarrow AD = AC \cdot \tan DCA = 8,5 \cdot \tan 30^\circ \text{ (m)}$$

$$\text{Và: } \cos DCA = \frac{AC}{DC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

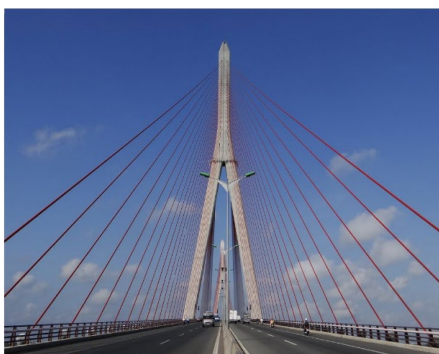
$$\Rightarrow DC = \frac{AC}{\cos DCA} = \frac{8,5}{\cos 30^\circ} \text{ (m)}$$

$$\Rightarrow AB = AD + DC = 8,5 \cdot \tan 30^\circ + \frac{8,5}{\cos 30^\circ} \approx 14,72 \text{ m}$$

Vậy chiều cao của cây tre là 14,72m.



Câu 42: Tính chiều cao của trụ cầu Cần Thơ so với mặt sông Hậu cho biết tại hai điểm cách nhau 89m trên mặt sông người ta nhìn thấy đỉnh trụ cầu với góc nâng lần lượt là 40° và 30° .



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

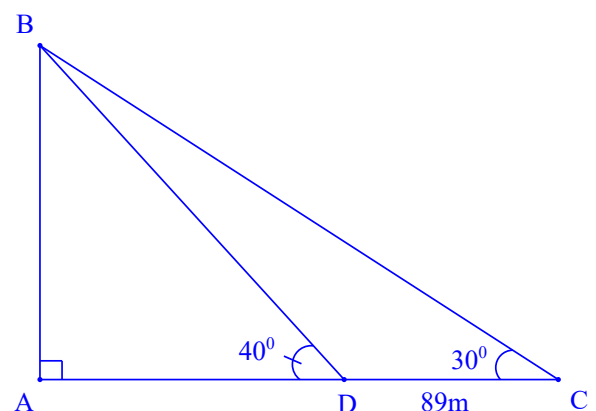
$$\text{Xét } \triangle ABD \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \tan ADB = \frac{AB}{AD} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB}{\tan ADB} = \frac{AB}{\tan 40^\circ} \text{ m (1)}$$

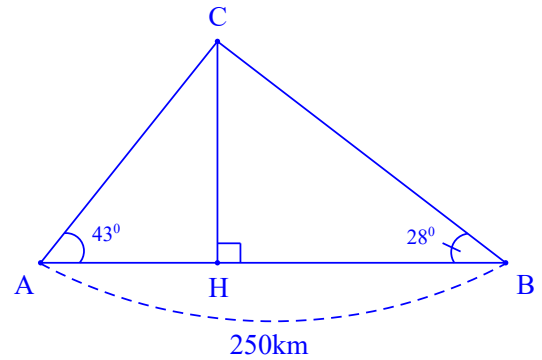
$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \tan ACB = \frac{AB}{AC} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan ACB} = \frac{AB}{\tan 30^\circ} \text{ m (2)}$$

Ta có: $AD + DC = AC$ (vì D thuộc AC)



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{AB}{\tan 40^\circ} + 89 = \frac{AB}{\tan 30^\circ} \\
&\Leftrightarrow \frac{AB}{\tan 30^\circ} - \frac{AB}{\tan 40^\circ} = 89 \\
&\hat{U}AB \cdot \left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 40^\circ} \right) = 89 \\
&\Leftrightarrow AB = \frac{89}{\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 40^\circ}} \\
&\Leftrightarrow AB \approx 164,7m
\end{aligned}$$



Vậy chiều cao của trụ cầu Cần thơ so với mặt sông Hậu là 164,7m .

Câu 43: Hai người A và B đứng cùng bờ sông nhìn ra một cồn nổi giữa sông. Người A nhìn ra cồn với 1 góc 43° so với bờ sông, người B nhìn ra cồn với 1 góc 28° so với bờ sông, 2 người đứng cách nhau 250m . Hỏi cồn cách bờ sông hai người đang đứng là bao nhiêu m?



Lời giải

Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét $\triangle AHC$ vuông tại A , ta có:

$$\tan \hat{CAH} = \frac{CH}{AH} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan \hat{CAH}} = \frac{CH}{\tan 43^\circ} (m) \quad (1)$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại A , ta có: $\tan \hat{CBH} = \frac{CH}{BH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

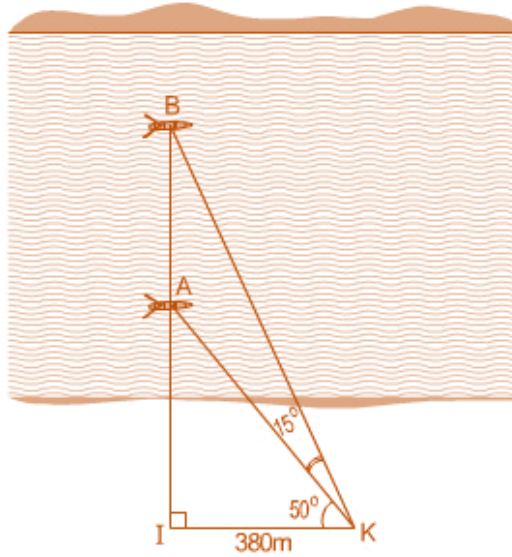
$$\Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan \hat{CBH}} = \frac{CH}{\tan 28^\circ} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AH + BH = \frac{CH}{\tan 43^\circ} + \frac{CH}{\tan 28^\circ} \Leftrightarrow AB = CH \cdot \left(\frac{1}{\tan 43^\circ} + \frac{1}{\tan 28^\circ} \right)$$

$$\Leftrightarrow 250 = CH \cdot \left(\frac{1}{\tan 43^\circ} + \frac{1}{\tan 28^\circ} \right) \Leftrightarrow CH = \frac{250}{\frac{1}{\tan 43^\circ} + \frac{1}{\tan 28^\circ}} \approx 84,66m$$

Vậy cồn cách bờ sông hai người đang đứng là 84,66m .

Câu 44: Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như hình vẽ dưới đây. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến mét).



Lời giải

Xét $\triangle AIK$ vuông tại I , ta có: $\tan AKI = \frac{AI}{IK}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AI = IK \cdot \tan AKI = 380 \cdot \tan 50^\circ \approx 453m$$

Xét $\triangle BIK$ vuông tại I , ta có: $\tan BKI = \frac{BI}{IK}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow BI = IK \cdot \tan BKI = 380 \cdot \tan (15^\circ + 50^\circ) = 380 \cdot \tan 65^\circ \approx 815m$$

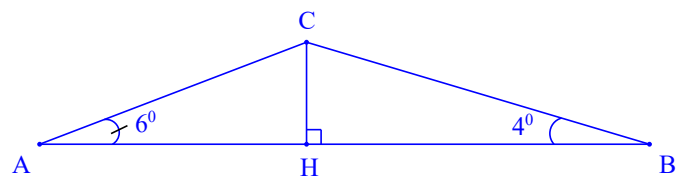
$$\text{Ta có: } AB + AI = BI \Rightarrow AB = BI - AI = 815 - 453 = 362m$$

Vậy khoảng cách giữa chúng là $362m$.

Câu 45: Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc như hình vẽ dưới. Cho biết đoạn AB dài $762m$, $\hat{A} = 6^\circ$, $\hat{B} = 4^\circ$.

a) Tính chiều cao con dốc.

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ lên dốc là $4km/h$ và tốc độ xuống dốc là $19km/h$.



Lời giải

a) Xét ΔACH vuông tại H , ta có: $\tan CAH = \frac{CH}{AH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan CAH} = \frac{CH}{\tan 6^\circ} (m) \quad (1)$$

Xét ΔBCH vuông tại H , ta có: $\tan CBH = \frac{CH}{BH}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan CBH} = \frac{CH}{\tan 4^\circ} (m) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AH + BH = \frac{CH}{\tan 6^\circ} + \frac{CH}{\tan 4^\circ}$$

$$\Leftrightarrow AB = CH \left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ} \right) \Leftrightarrow 762 = CH \left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ} \right)$$

$$\Rightarrow CH = \frac{762}{\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}} \approx 32m$$

Vậy chiều cao của con dốc là $32m$

b) Xét ΔACH vuông tại H , ta có: $\sin CAH = \frac{CH}{AC}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 6^\circ} = \frac{32}{\sin 6^\circ} (m) \quad (3)$$

Xét ΔBCH vuông tại H , ta có: $\sin CBH = \frac{CH}{CB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow CB = \frac{CH}{\sin 4^\circ} = \frac{32}{\sin 4^\circ} (m) \quad (4)$$

$$\text{Đổi đơn vị: } 4km/h = \frac{10}{9} m/s; 19km/h = \frac{95}{18} m/s$$

$$\text{Thời gian lên dốc } AC \text{ là: } t_{AC} = \frac{S_{AC}}{v_{AC}} = \frac{AC}{v_{AC}} = \frac{32/\sin 6^\circ}{14,4} (s)$$

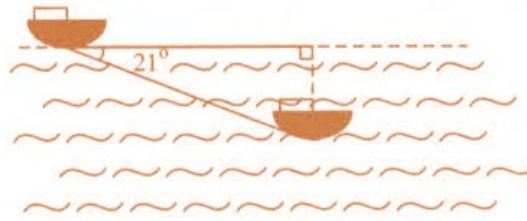
$$\text{Thời gian xuống dốc } CB \text{ là: } t_{CB} = \frac{S_{CB}}{v_{CB}} = \frac{CB}{v_{CB}} = \frac{32/\sin 4^\circ}{68,4} (s)$$

$$\text{Thời gian đi từ } A \text{ đến } B \text{ là: } t_{AB} = t_{AC} + t_{CB} = \frac{32}{\frac{10}{9} \cdot \sin 6^\circ} + \frac{32}{\frac{95}{18} \cdot \sin 4^\circ} \approx 362,44s \approx 6 \text{ phút } 3 \text{ giây.}$$

Câu 46: Trong một buổi luyện tập, một tàu ngầm ở trên mặt biển bắt đầu lặn xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° .

a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được $250m$ thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước (làm tròn đến đơn vị mét).

b) Giả sử tốc độ trung bình của tàu là 9km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu 200 mét (cách mặt nước biển 200m) làm tròn đến phút.



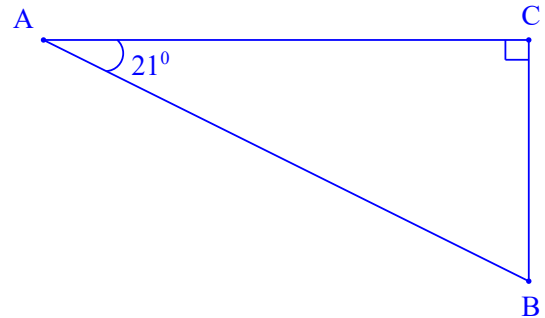
Lời giải

a) Hình vẽ minh họa bài toán:

Xét ΔABC vuông tại C , ta có: $\sin A = \frac{CB}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow CB = AB \cdot \sin A = 250 \cdot \sin 21^\circ \approx 89,6\text{m}$$

Vậy khi tàu đi được 250m , thì tàu ở độ sâu là $89,6\text{m}$



b) Đổi đơn vị: $9\text{km/h} = 2,5\text{m/s}$

Gọi $t(\text{s})$ là thời gian tàu đi để đạt được độ sâu là 200m

Quãng đường tàu đi được trong thời gian $t(\text{s})$ là: $AB = S_{AB} = v_{AB} \cdot t_{AB} = 2,5t(\text{m})$

Xét ΔABC vuông tại C , ta có: $\sin A = \frac{CB}{AB}$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Leftrightarrow \sin 21^\circ = \frac{200}{2,5t} \Rightarrow t = \frac{200}{2,5 \cdot \sin 21^\circ} \approx 223\text{s} \approx 4\text{ phút}$$

Vậy thời gian tàu đi là 4 phút .