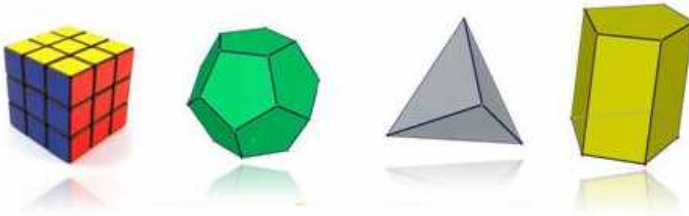


MUA TRỌN BỘ 12 (Bản mới 2017) File Word liên hệ:

Tác giả: HUỖNH ĐỨC KHÁNH – 0975120189

Facebook: <https://www.facebook.com/duckhanh0205>



○ Bài 01

KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

I – KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.

II – KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

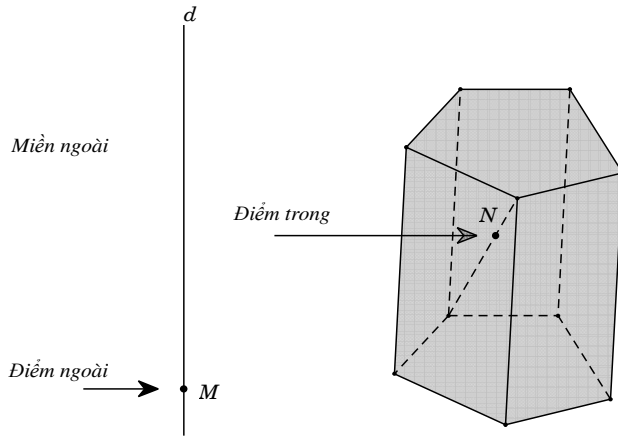
Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

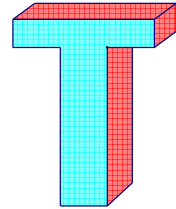
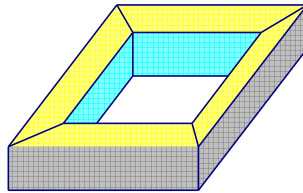
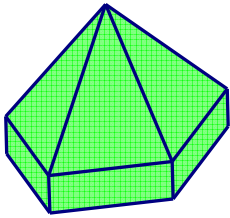
Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.

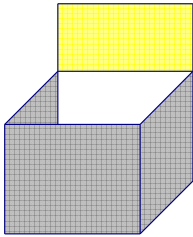


Ví dụ

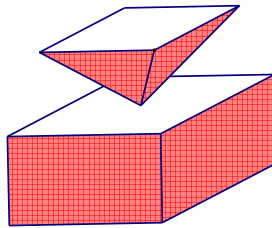
- Các hình dưới đây là những khối đa diện:



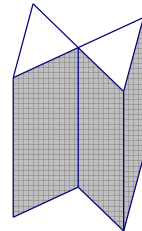
- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:



Hình a



Hình b



Hình c

Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

III – HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian. Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

a) **Phép tịnh tiến theo vectơ \vec{v}** , là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{MM'} = \vec{v}$. Kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

b) **Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)** là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' .

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (\mathcal{H}) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (\mathcal{H}) .

c) **Phép đối xứng tâm O** là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM' .

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (\mathcal{H}) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (\mathcal{H}) .

d) **Phép đối xứng qua đường thẳng Δ** là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM' .

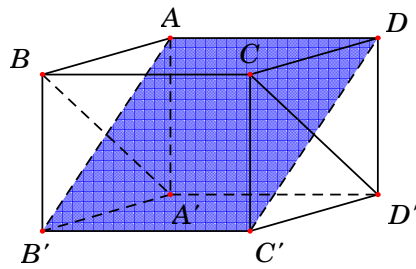
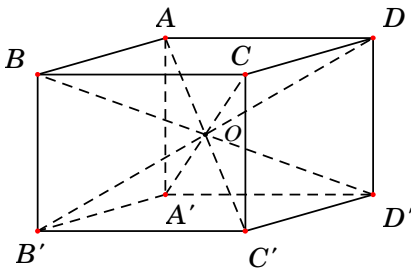
Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình (\mathcal{H}) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (\mathcal{H}) .

Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (\mathcal{H}) thành đa diện (\mathcal{H}') , biến đỉnh, cạnh, mặt của (\mathcal{H}) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (\mathcal{H}') .

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

- Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).
- Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$).



2. Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

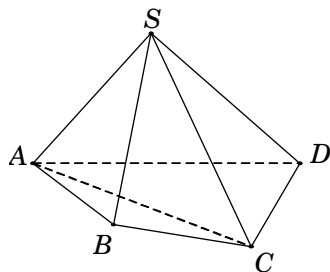
Đặc biệt, hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

IV – PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (\mathcal{H}) là hợp của hai khối đa diện (\mathcal{H}_1) và (\mathcal{H}_2) sao cho (\mathcal{H}_1) và (\mathcal{H}_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể phân chia được khối đa diện (\mathcal{H}) thành hai khối đa diện (\mathcal{H}_1) và (\mathcal{H}_2). Khi đó ta cũng nói có thể ghép hai khối đa diện (\mathcal{H}_1) và (\mathcal{H}_2) để được khối đa diện (\mathcal{H}).

Ví dụ 1. Với khối chóp tứ giác $S.ABCD$, xét hai khối chóp tam giác $S.ABC$ và $S.ACD$. Ta thấy rằng:

- Hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ không có điểm trong chung (tức là không tồn tại điểm trong của khối chóp này là điểm trong của khối chóp kia và ngược lại).
- Hợp của hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ chính là khối chóp $S.ABCD$.

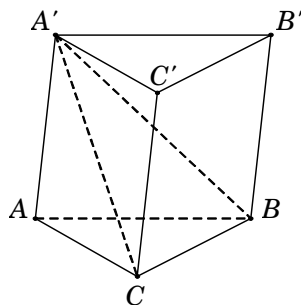


Vậy khối chóp $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ hay hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ được ghép lại thành khối chóp $S.ABCD$.

Ví dụ 2. Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$. Khi đó, khối lăng trụ được phân chia thành hai khối đa diện $A'ABC$ và $A'BCC'B'$.

Nếu ta cắt khối chóp $A'BCC'B'$ bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ thì ta chia khối chóp $A'BCC'B'$ thành hai khối chóp $A'CB'B'$ và $A'CC'B'$.

Vậy khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối tứ diện là $A'ABC$, $A'CB'B'$ và $A'CC'B'$.



MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

Kết quả 1: Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.

Kết quả 2: Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

Kết quả 3: Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

Kết quả 4: Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

Kết quả 5: Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

Kết quả 6: Cho (\mathcal{H}) là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của (\mathcal{H}) là lẻ thì p phải là số chẵn.

Chứng minh: Gọi M là số các mặt của khối đa diện (\mathcal{H}). Vì mỗi mặt của (\mathcal{H}) có p cạnh nên M mặt sẽ có $p.M$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số cạnh của (\mathcal{H}) bằng $C = \frac{pM}{2}$. Vì M lẻ nên p phải là số chẵn.

Kết quả 7 (Suy ra từ chứng minh kết quả 6): Cho (\mathcal{H}) là đa diện có M mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của (\mathcal{H}) là $C = \frac{pM}{2}$.

Kết quả 8: Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

Chứng minh: Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lồi là C và M .

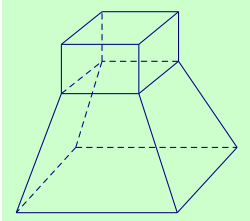
Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là $C = \frac{3M}{2} \xrightarrow{C \in \mathbb{Z}} M$ chẵn.

Kết quả 9: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.

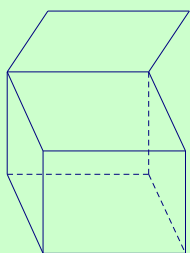
Kết quả 10: Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn. (Tổng quát: Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số đỉnh là một số chẵn).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

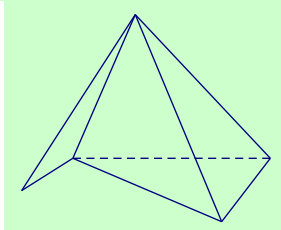
Câu 1. Cho các hình khối sau:



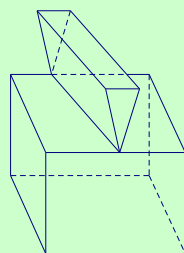
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình đa diện là:

A. Hình 1.

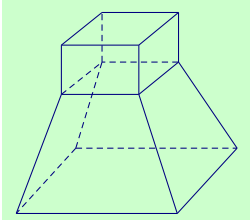
B. Hình 2.

C. Hình 3.

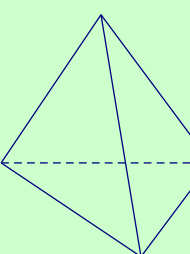
D. Hình 4.

Lời giải. Chọn A.

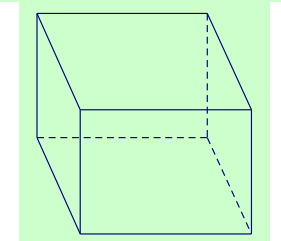
Câu 2. Cho các hình khối sau:



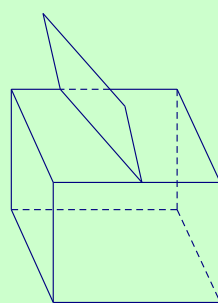
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình không phải đa diện là:

A. Hình 1.

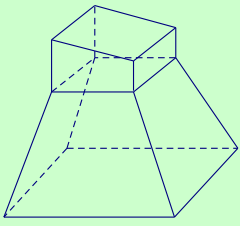
B. Hình 2.

C. Hình 3.

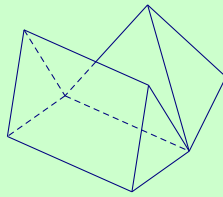
D. Hình 4.

Lời giải. Chọn D.

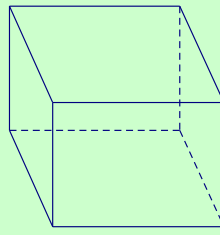
Câu 3. Cho các hình khối sau:



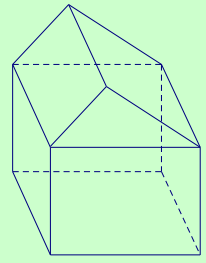
Hình 1



Hình 2



Hình 3



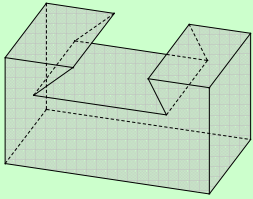
Hình 4

Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số hình đa diện là:

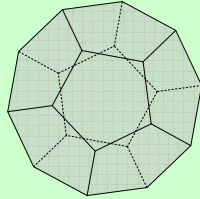
- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Lời giải. Các hình đa diện là: Hình 1; Hình 3; Hình 4. **Chọn C.**

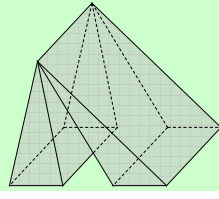
Câu 4. Vật thể nào trong các vật thể sau không phải là khối đa diện?



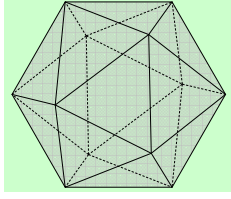
A.



B.



C.

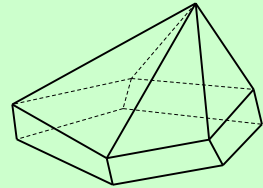


D.

Lời giải. Chọn C. Vì hình C vi phạm tính chất "Mỗi cạnh của miền đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác".

Câu 5. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt ?

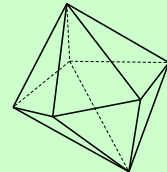
- A. 6.
- B. 10.
- C. 11.
- D. 12.



Lời giải. Chọn C.

Câu 6. Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt ?

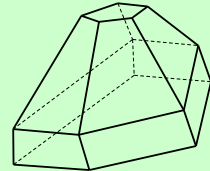
- A. 8.
- B. 10.
- C. 11.
- D. 12.



Lời giải. Chọn B.

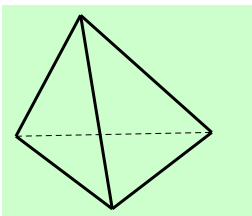
Câu 7. Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt ?

- A. 11.
- B. 12.
- C. 13.
- D. 14.

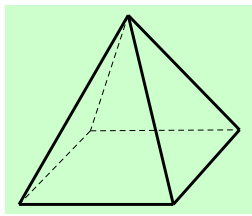


Lời giải. Chọn B.

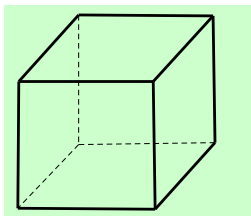
Câu 8. Khối đa diện nào sau đây có số mặt nhỏ nhất?



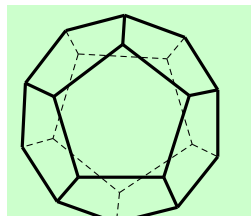
A. Khối tứ diện đều.



B. Khối chóp tứ giác.



C. Khối lập phương.



D. Khối 12 mặt đều.

Lời giải. Chọn A.

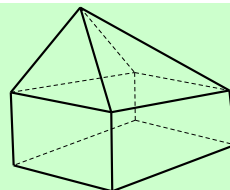
Câu 9. Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu cạnh?

A. 8.

B. 9.

C. 12.

D. 16.



Lời giải. Chọn D.

Câu 10. Cho một hình đa diện. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

B. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

C. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải. Ta thấy các đáp án A, B, D đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện.

Chọn C.

Câu 11. Gọi D là số các đỉnh, M là số các mặt, C là số các cạnh của một hình đa diện bất kỳ. mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $D > 4, M > 4, C > 6$.

B. $D > 5, M > 5, C > 7$.

C. $D \geq 4, M \geq 4, C \geq 6$.

D. $D \geq 5, M \geq 5, C \geq 7$.

Lời giải. Xét hình đa diện là hình tứ diện thì kết quả về quan hệ số đỉnh và số mặt thỏa mãn đáp án C. **Chọn C.**

Câu 12. Một hình đa diện có các mặt là những tam giác thì số mặt M và số cạnh C của đa diện đó thỏa mãn

A. $3C = 2M$.

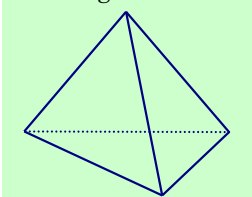
B. $C = M + 2$.

C. $M \geq C$.

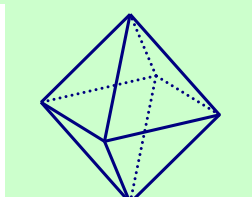
D. $3M = 2C$.

Lời giải. Tổng số cạnh của hình đa diện là $2C$. Tổng số mặt của hình đa diện là M và mỗi mặt đều là tam giác nên có tổng số cạnh $3M$. Vậy ta có $3M = 2C$. **Chọn D.**

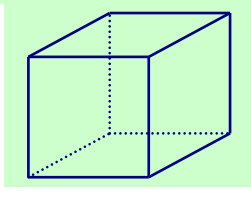
Câu 13. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?



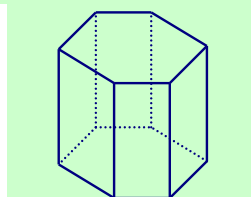
A. Tứ diện đều.



B. Bát diện đều.



C. Hình lập phương.



D. Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải. Chọn A.

Câu 14. Gọi n_1, n_2, n_3 lần lượt là số trục đối xứng của khối tứ diện đều, khối chóp tứ giác đều và khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 6.$

B. $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 9.$

C. $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 9.$

D. $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 3.$

Lời giải. Khối tứ diện đều có 3 trục đối xứng (đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện). Khối chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng (đi qua đỉnh và tâm của mặt tứ giác). Khối lập phương có 9 trục đối xứng (Loại 1: đi qua tâm của các mặt đối diện ; Loại 2: đi qua trung điểm các cặp cạnh đối diện). **Chọn C.**

Câu 15. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

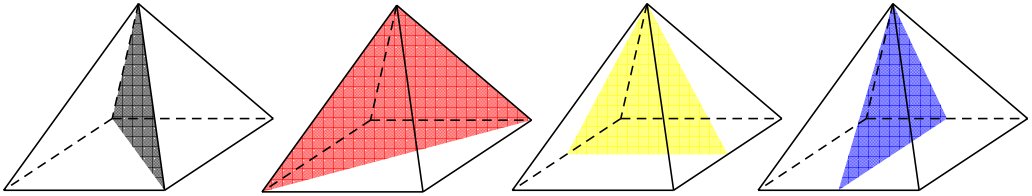
A. 4 mặt phẳng.

B. 1 mặt phẳng.

C. 2 mặt phẳng.

D. 3 mặt phẳng.

Lời giải. Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



• 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường trung bình của đáy.

• 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường chéo của đáy.

Chọn A.

Câu 16. Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là:

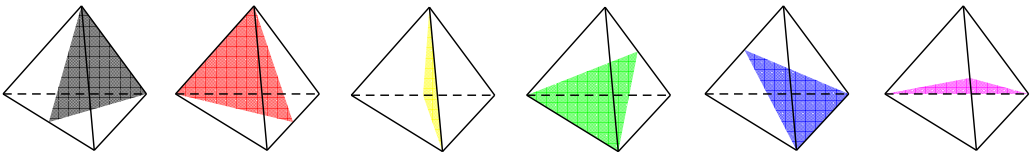
A. 4 mặt phẳng.

B. 6 mặt phẳng.

C. 8 mặt phẳng.

D. 10 mặt phẳng.

Lời giải. Các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là các mặt phẳng chứa một cạnh và qua trung điểm cạnh đối diện.



Vậy hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng. **Chọn B.**

Câu 17. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

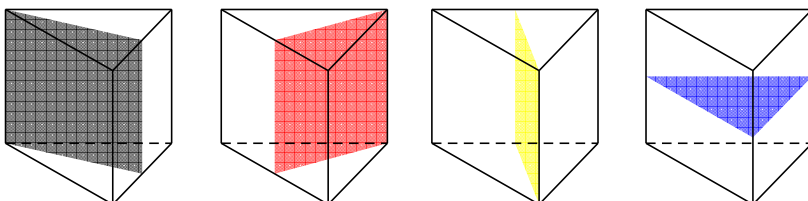
A. 4 mặt phẳng.

B. 1 mặt phẳng.

C. 2 mặt phẳng.

D. 3 mặt phẳng.

Lời giải. Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng (hình vẽ bên dưới).



Chọn A.

Câu 18. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

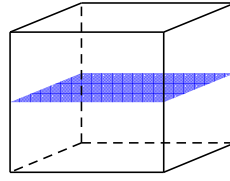
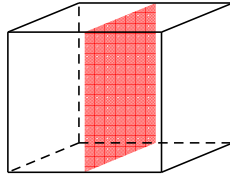
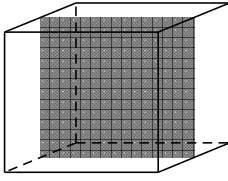
A. 4 mặt phẳng.

B. 6 mặt phẳng.

C. 9 mặt phẳng.

D. 3 mặt phẳng.

Lời giải. Hình hộp chữ nhật (không là hình lập phương) có các mặt phẳng đối xứng là các mặt các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối.



Chọn D.

Câu 19. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

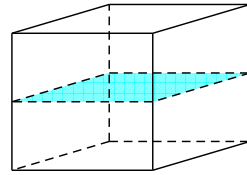
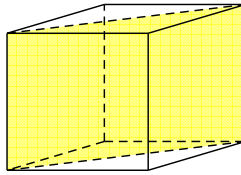
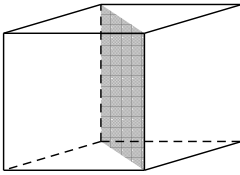
A. 4 mặt phẳng.

B. 1 mặt phẳng.

C. 2 mặt phẳng.

D. 3 mặt phẳng.

Lời giải. Hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình chữ nhật) có 3 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng chứa đường chéo của đáy và vuông góc với đáy.
- Một mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

Chọn D.

Câu 20. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

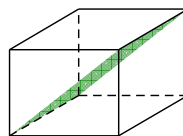
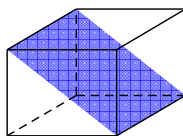
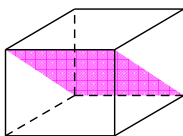
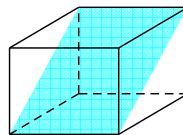
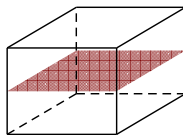
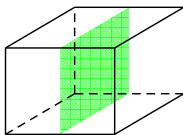
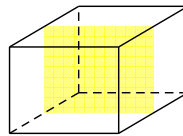
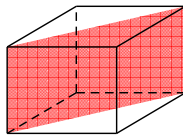
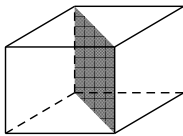
A. 8 mặt phẳng.

B. 9 mặt phẳng.

C. 10 mặt phẳng.

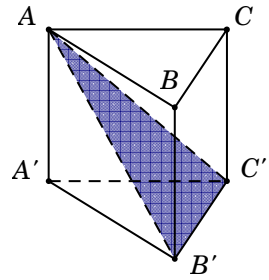
D. 12 mặt phẳng.

Lời giải. Có 9 mặt đối xứng (như hình vẽ sau). **Chọn B.**

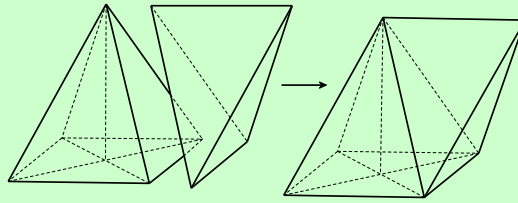


Lời giải. Dựa vào hình vẽ, ta thấy mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp tam giác $A.A'B'C'$ và khối chóp tứ giác $A.BCC'B'$.

Chọn A.



Câu 24. Lắp ghép hai khối đa diện (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}_2) để tạo thành khối đa diện (\mathcal{H}) , trong đó (\mathcal{H}_1) là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a , (\mathcal{H}_2) là khối tứ diện đều cạnh a sao cho một mặt của (\mathcal{H}_1) trùng với một mặt của (\mathcal{H}_2) như hình vẽ. Hỏi khối đa diện (\mathcal{H}) có tất cả bao nhiêu mặt?



A. 5.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải. Khối đa diện (\mathcal{H}) có đúng 5 mặt. **Chọn A.**

Sai lầm hay gặp: Khối chóp tứ giác đều có 5 mặt. Khối tứ diện đều có 4 mặt. Ghép hai hình lại như hình vẽ ta được khối đa diện (\mathcal{H}) có 8 mặt.

Câu 25. Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

A. 2.

B. 4.

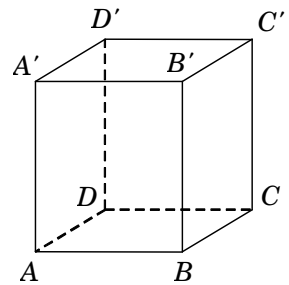
C. 6.

D. 8.

Lời giải. Lần lượt dùng mặt phẳng $(BDD'B')$ ta chia thành hai khối lập phương thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.

- Với khối $ABD.A'B'D'$ ta lần lượt dùng các mặt phẳng $(AB'D')$ và $(AB'D)$ chia thành ba khối tứ diện bằng nhau.
- Tương tự với khối $BCD.B'C'D'$.

Vậy có tất cả 6 khối tứ diện bằng nhau. **Chọn C.**

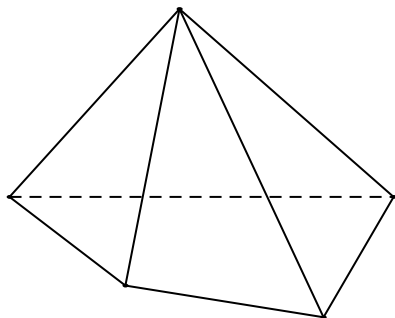


○ Bài 02

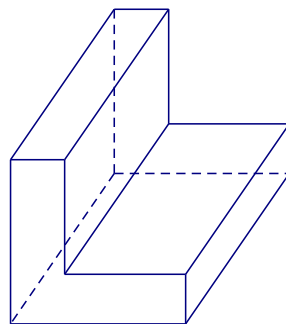
KHỐI ĐA DIỆN LỖI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

I – KHỐI ĐA DIỆN LỖI

Khối đa diện (\mathcal{H}) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (\mathcal{H}) luôn thuộc (\mathcal{H}). Khi đó đa diện giới hạn (\mathcal{H}) được gọi là đa diện lồi.

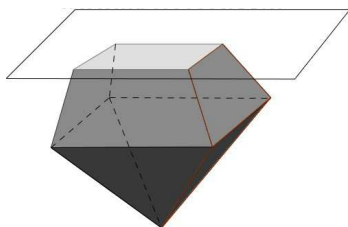


Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.



II – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Định nghĩa

Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

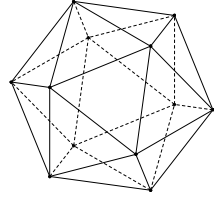
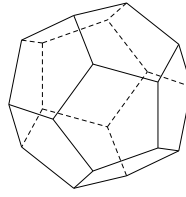
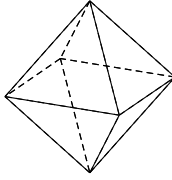
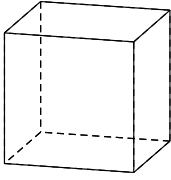
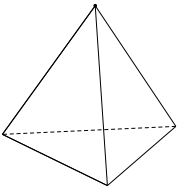
- Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n, p\}$.

Định lí

Chỉ có năm khối đa diện đều. Đó là:

- ✓ Loại $\{3;3\}$: khối tứ diện đều.
- ✓ Loại $\{4;3\}$: khối lập phương.
- ✓ Loại $\{3;4\}$: khối bát diện đều.
- ✓ Loại $\{5;3\}$: khối 12 mặt đều.
- ✓ Loại $\{3;5\}$: khối 20 mặt đều.








Khối tứ diện đều

Khối lập phương

Bát diện đều

Hình 12 mặt đều

Hình 20 mặt đều

Khối đa diện đều		Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Loại
Tứ diện đều		4	6	4	{3;3}
Khối lập phương		8	12	6	{4;3}
Bát diện đều		6	12	8	{3;4}
Mười hai mặt đều		20	30	12	{5;3}
Hai mươi mặt đều		12	30	20	{3;5}

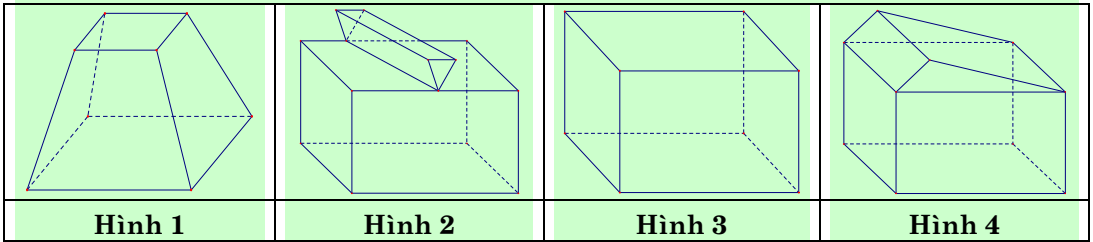
Chú ý. Gọi D là tổng số đỉnh, C là tổng số cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n; p\}$. Ta có

$$pD = 2C = nM$$

- Xét tứ diện đều $\{3;3\} \rightarrow \begin{cases} n = 3, p = 3 \\ M = 4 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 6 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 4.$
- Xét khối lập phương $\{4;3\} \rightarrow \begin{cases} n = 4, p = 3 \\ M = 6 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 12 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 8.$
- Xét bát diện đều $\{3;4\} \leftrightarrow \begin{cases} n = 3, p = 4 \\ M = 8 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 12 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 6.$
- Xét khối mười hai mặt đều $\{5;3\} \rightarrow \begin{cases} n = 5, p = 3 \\ M = 12 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 30 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 20.$
- Xét khối hai mươi mặt đều $\{3;5\} \rightarrow \begin{cases} n = 3, p = 5 \\ M = 20 \end{cases} \xrightarrow{pD=2C=nM} C = \frac{nM}{2} = 30 \text{ \& } D = \frac{nM}{p} = 12.$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho các hình khối sau:

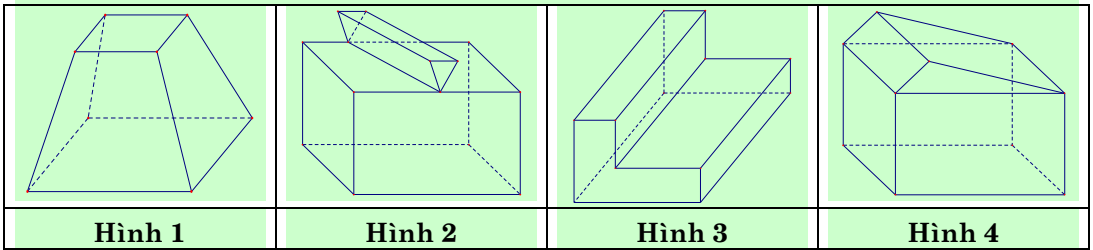


Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), hình không phải đa diện lồi là

- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

Lời giải. Áp dụng các tính chất của khối đa diện lồi (\mathcal{H}): "Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (\mathcal{H}) luôn thuộc (\mathcal{H})". **Chọn B.**

Câu 2. Cho các hình khối sau:



Mỗi hình trên gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó), số đa diện lồi là:

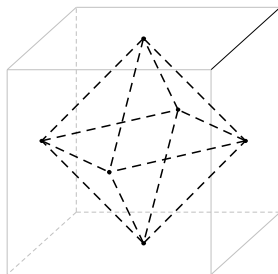
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Có hai khối đa diện lồi là: Hình 1 & Hình 4. **Chọn B.**

Câu 3. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của hình nào trong các hình sau đây?

- A. Bát diện đều. B. Tứ diện đều. C. Lục bát đều. D. Ngũ giác đều.

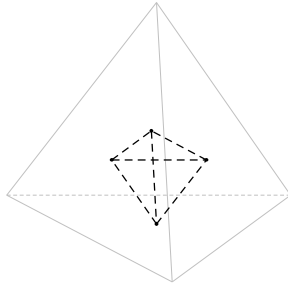
Lời giải. **Chọn A.**



Câu 4. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình lập phương.
 B. Tâm tất cả các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.
 C. Tâm tất cả các mặt của một hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.
 D. Tâm tất cả các mặt của một hình lập phương là các đỉnh của một hình tứ diện đều.

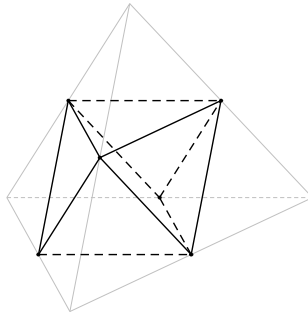
Lời giải. **Chọn B.**



Câu 5. Trung điểm các cạnh của một tứ diện đều tạo thành

- A. các đỉnh của một hình tứ diện đều.
- B. các đỉnh của một hình bát diện đều.
- C. các đỉnh của một hình mười hai mặt đều.
- D. các đỉnh của một hình hai mươi mặt đều.

Lời giải. Chọn B.



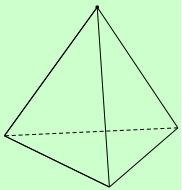
Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Tồn tại khối tứ diện là khối đa diện đều.
- B. Tồn tại khối lăng trụ đều là khối đa diện đều.
- C. Tồn tại khối hộp là khối đa diện đều.
- D. Tồn tại khối chóp tứ giác đều là khối đa diện đều.

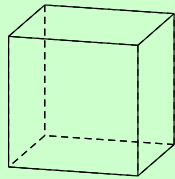
Lời giải. Trong 5 loại khối đa diện đều không tồn tại khối chóp có đáy là tứ giác.

Chọn D.

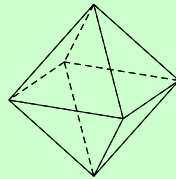
Câu 7. Trong không gian chỉ có 5 loại khối đa diện đều như hình vẽ



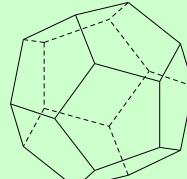
Khối tứ diện đều



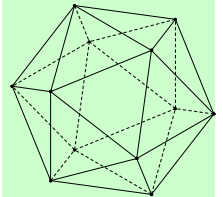
Khối lập phương



Bát diện đều



Hình 12 mặt đều



Hình 20 mặt đều

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Mọi khối đa diện đều có số mặt là những số chia hết cho 4.
- B. Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh.
- C. Khối tứ diện đều và khối bát diện đều có 1 tâm đối xứng.
- D. Khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều có cùng số đỉnh.

Lời giải. ● Khối lập phương có 6 mặt. Do đó A sai.

● Khối lập phương và khối bát diện đều có cùng số cạnh là 12. **Chọn B.**

- Khối tứ diện đều không có tâm đối xứng. Do đó C sai.
- Khối 12 mặt đều có 20 đỉnh. Khối 20 mặt đều có 12 đỉnh. Do đó D sai.

Câu 8. Các khối đa diện đều mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba mặt thì số đỉnh D và số cạnh C của các khối đa diện đó luôn thỏa mãn:

- A. $D = C - 2$. B. $D \geq C$. C. $3D = 2C$. D. $3C = 2D$.

Lời giải. Tổng số cạnh của hình đa diện là $2C$. Do mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng ba mặt nên suy ra các cạnh của hình đa diện là $3D$. Vậy ta có $3D = 2C$. **Chọn C.**

Câu 9. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là:

- A. 4π . B. 8π . C. 12π . D. 10π .

Lời giải. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương, gồm 6 mặt là các hình vuông nên tổng các góc bằng $6.2\pi = 12\pi$. **Chọn C.**

Câu 10. Tổng các góc của tất cả các mặt của khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là:

- A. 12π . B. 16π . C. 20π . D. 24π .

Lời giải. Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều, gồm 20 mặt là các tam giác đều nên tổng các góc bằng $20.\pi = 20\pi$. **Chọn C.**

Câu 11. Tổng độ dài l của tất cả các cạnh của một tứ diện đều cạnh a .

- A. $l = 4a$. B. $l = 6a$. C. $l = 6$. D. $l = 4$.

Lời giải. Tứ diện đều có tất cả 6 cạnh nên có tổng độ dài các cạnh là $6a$. **Chọn B.**

Câu 12. Tổng độ dài l của tất cả các cạnh của khối mười hai mặt đều cạnh bằng 2.

- A. $l = 8$. B. $l = 16$. C. $l = 24$. D. $l = 60$.

Lời giải. Khối mười hai mặt đều có 30 cạnh nên có tổng độ dài tất cả các cạnh bằng $l = 30.2 = 60$. **Chọn B.**

Câu 13. Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = 4a^2$. B. $S = 6a^2$. C. $S = 8a^2$. D. $S = 10a^2$.

Lời giải. Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a . Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 6a^2$. **Chọn B.**

Câu 14. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hình bát diện đều cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = 4\sqrt{3}a^2$. B. $S = \sqrt{3}a^2$. C. $S = 2\sqrt{3}a^2$. D. $S = 8a^2$.

Lời giải. Hình bát diện đều là hình có tám mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều. Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh $a \longrightarrow S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy diện tích S cần tính là $S = 8.S_0 = 8.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$. **Chọn C.**

Câu 15. Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng 2. Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = 10\sqrt{3}$. B. $S = 20\sqrt{3}$. C. $S = 20$. D. $S = 10$.

Lời giải. Hình 20 đều là hình có 20 mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều.

Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh bằng 2 $\longrightarrow S_0 = \frac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Vậy diện tích S cần tính là $S = 20.S_0 = 20\sqrt{3}$. **Chọn B.**

○ Bài 03

KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I - NHẮC LẠI MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.

1. Hình lăng trụ đứng

Định nghĩa. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

2. Hình lăng trụ đều

Định nghĩa. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

1. Hình hộp đứng

Định nghĩa. Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.

2. Hình hộp chữ nhật

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tính chất. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

3. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông

Tính chất. Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.

Hình chóp là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

I - THỂ TÍCH

1. Công thức tính thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} S.h$$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Công thức tính thể tích khối lăng trụ

$$V = B.h$$

Trong đó: B là diện tích đáy, h là hiệu cao khối lăng trụ

- **Thể tích khối hộp chữ nhật:** $V = a.b.c$

Trong đó: a, b, c là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

- **Thể tích khối lập phương:** $V = a^3$

Trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

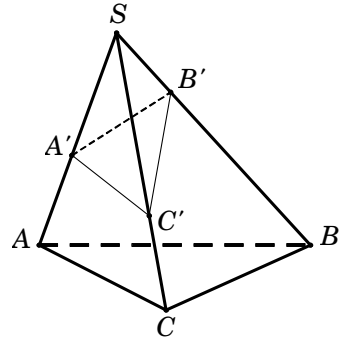
III – TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác định được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.
- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.
- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải. Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

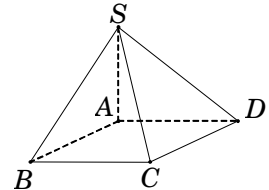
Chọn D.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SBC là tam giác vuông cân tại S , $SB = 2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $3a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 2a^3$. B. $V = 4a^3$. C. $V = 6a^3$ D. $V = 12a^3$.

Lời giải. Ta chọn (SBC) làm mặt đáy \longrightarrow chiều cao khối chóp là $d[A, (SBC)] = 3a$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB^2 = 2a^2$.



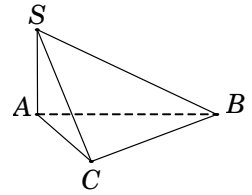
Vậy thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3} S_{\Delta SBC} \cdot d[A, (SBC)] = 2a^3$. **Chọn A.**

Câu 3. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 40$. B. $V = 192$. C. $V = 32$. D. $V = 24$.

Lời giải. Tam giác ABC , có $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = BC^2$
 \longrightarrow tam giác ABC vuông tại $A \longrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = 32$. **Chọn C.**



Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

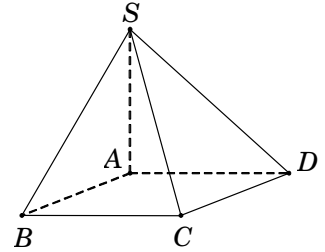
- A. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{6}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{15}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải. Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, suy ra $SA \perp (ABCD)$. Do đó chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{15}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

Chọn B.



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải. Đường chéo hình vuông $AC = a\sqrt{2}$.

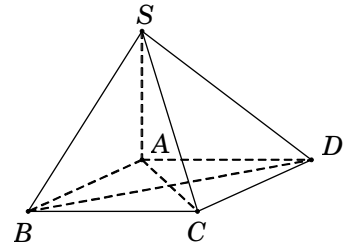
Xét tam giác SAC , ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn A.



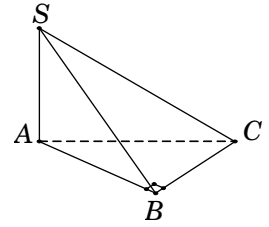
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = 2a$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$.



Chọn C.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

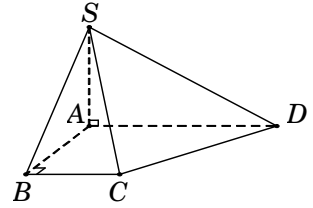
- A. $V = 1$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{1}{3}$. D. $V = 2$.

Lời giải. Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = \left(\frac{AD + BC}{2} \right) \cdot AB = \frac{3}{2}.$$

Chiều cao khối chóp là $SA = 2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = 1$. **Chọn A.**



Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm của AB , suy ra $SH \perp AB$.

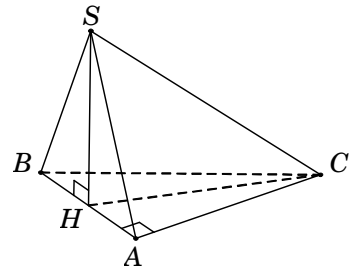
Do $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABC)$.

Tam giác SAB là đều cạnh $AB = a$ nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC , có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **Chọn A.**



Câu 9. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. C. $V = 2a^3$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

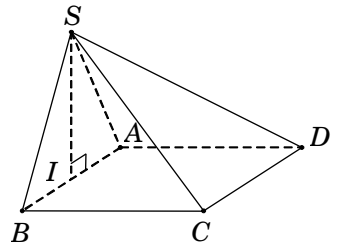
Lời giải. Gọi I là trung điểm của AB . Tam giác SAB cân tại S và có I là trung điểm AB nên $SI \perp AB$. Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SI \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông SIA , có

$$SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SI = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **Chọn B.**



Câu 10. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. B. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

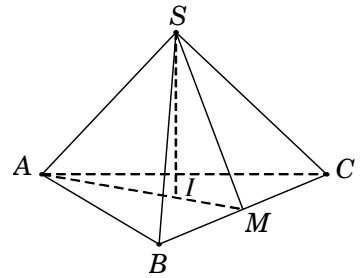
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I , có

$$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SI = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **Chọn B.**



Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

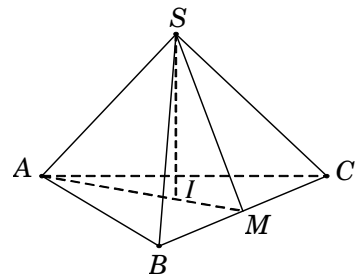
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I , có

$$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SI = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **Chọn C.**



Câu 12. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

- A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải. Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot h \longrightarrow h = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm AC . Theo giả thiết, ta có $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$.

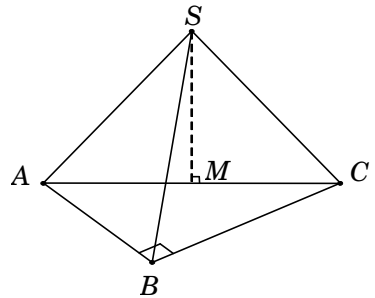
Tam giác vuông ABC , có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SMA , có

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích tam giác vuông cân ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SM = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **Chọn A.**



Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 1, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Cạnh bên $SD = \sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD thỏa $HD = 3HB$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{5}}{24}$. B. $V = \frac{\sqrt{15}}{24}$. C. $V = \frac{\sqrt{15}}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải. Vì $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều.

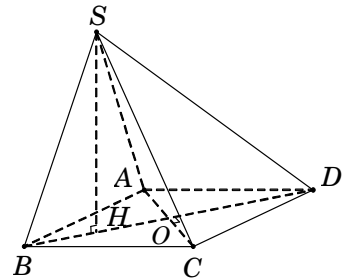
Suy ra

$$BO = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad BD = 2BO = \sqrt{3}; \quad HD = \frac{3}{4}BD = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Tam giác vuông SHD , có $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{15}}{24}$. **Chọn B.**



Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên AB là điểm H thỏa $AH = 2BH$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

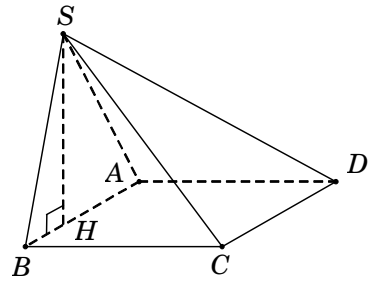
Lời giải. Trong tam giác vuông SAB , ta có

$$SA^2 = AH \cdot AB = \frac{2}{3} AB \cdot AB = \frac{2}{3} a^2;$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{2}}{9}$. **Chọn D.**



Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD \rightarrow SB = SD$.

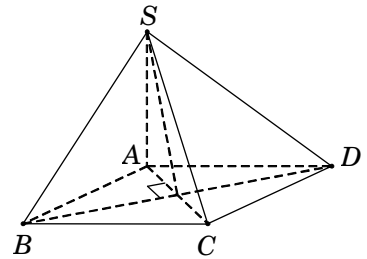
Hơn nữa, theo giả thiết $\widehat{SBD} = 60^\circ$.

Do đó $\triangle SBD$ đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB , ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$ (đvtt). **Chọn C.**



Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = 2a$, $AB = SA = a$. Tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Kẻ $SH \perp AC$. Do $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$.

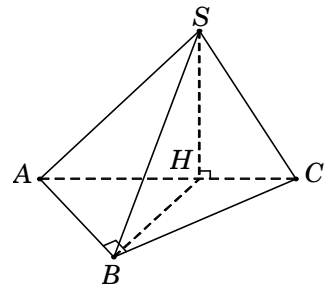
Trong tam giác vuông SAC , ta có

$$SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = a\sqrt{3}, \quad SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{4}$. **Chọn A.**



Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy; diện tích tam giác SBC bằng $\frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$ (đvdt). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{a^3}{3}$. D. $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải. Ta có $BC \perp AB$ (do $ABCD$ là hình vuông). (1)

Lại có $BC \perp SA$ (do SA vuông góc với đáy $(ABCD)$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Do đó tam giác SBC vuông tại B .

Đặt cạnh hình vuông là $x > 0$.

Tam giác SAB vuông tại A nên

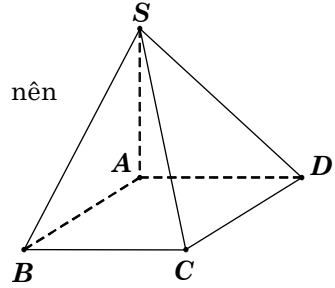
$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Theo chứng minh trên, ta có tam giác SBC vuông tại B nên

$$\frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + x^2} \cdot a \longrightarrow x = a.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{3}$. **Chọn C.**



Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , cạnh huyền AB bằng 3. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt đáy trùng với trọng tâm của tam giác ABC và $SB = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{3}{2}$. B. $V = \frac{1}{4}$. C. $V = \frac{3}{4}$. D. $V = 1$.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC . Suy ra $G = CM \cap BN$ là trọng tâm tam giác ABC . Theo giả thiết, ta có $SG \perp (ABC)$.

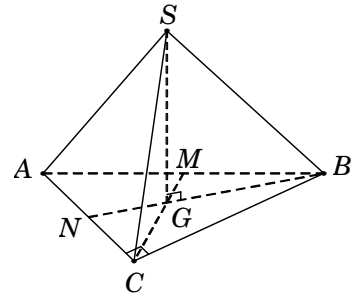
Tam giác ABC vuông cân tại C , suy ra $CA = CB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ và $CM \perp AB$.

Ta có $CM = \frac{1}{2} AB = \frac{3}{2}$, suy ra $GM = \frac{1}{3} CM = \frac{1}{2}$;

$$BG = \sqrt{BM^2 + GM^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}; \quad SG = \sqrt{SB^2 + GB^2} = 1.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{9}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SG = \frac{3}{4}$. **Chọn C.**



Câu 20. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$. B. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$. C. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải. Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

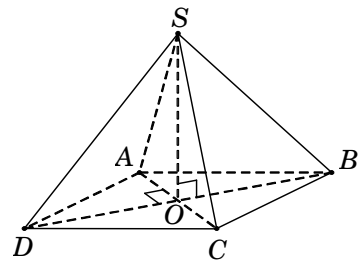
Suy ra OB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Khi đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB , có $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$. **Chọn A.**



Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AC = 5a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = 6\sqrt{2}a^3$. B. $V = 4\sqrt{2}a^3$. C. $V = 2\sqrt{2}a^3$. D. $V = 2a^3$.

Lời giải. Trong tam giác vuông ABC , ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{6}a$.

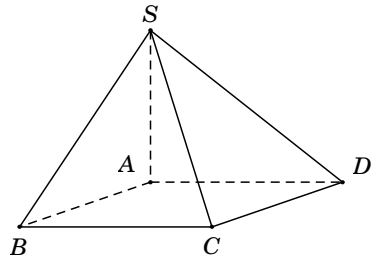
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB .

Do đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2\sqrt{6}a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = 2\sqrt{2}a^3$. **Chọn C.**



Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

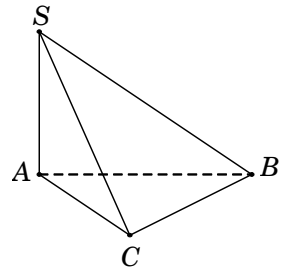
Lời giải. Do $SA \perp (ABC)$ nên ta có

$$60^\circ = \widehat{SB, (ABC)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}.$$

Tam giác vuông SAB , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều SAB là $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{4}$. **Chọn A.**



Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và SD tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

Lời giải. Do $SA \perp (ABCD)$ nên ta có $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, AD} = \widehat{SDA}$.

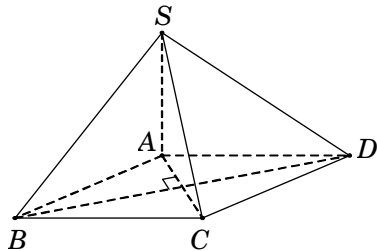
Tam giác vuông SAD , có $SA = AD \cdot \tan \widehat{SDA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình thoi

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle BAD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3}{2}$.

Chọn C.



Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB , góc giữa SC và mặt đáy bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

B. $V = \frac{\sqrt{15}}{18}$.

C. $V = \frac{1}{3}$.

D. $V = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

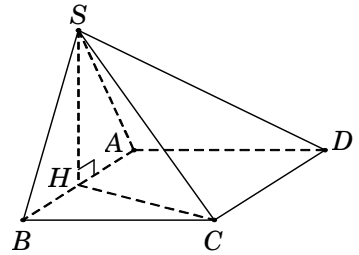
Lời giải. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là HC . Do đó $30^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, HC} = \widehat{SCH}$.

Tam giác vuông BCH , có $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông SHC , có $SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 1$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{15}}{18}$. **Chọn B.**



Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a$, $BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$.

B. $V = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V = \frac{a^3}{2}$.

D. $V = a^3$.

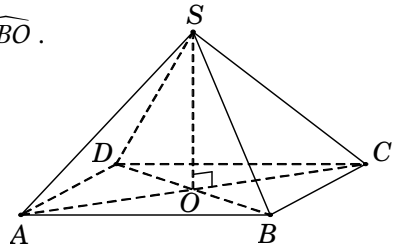
Lời giải. Gọi O là trung điểm AC , suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Theo giả thiết đỉnh S cách đều các điểm A, B, C nên hình chiếu của S xuống đáy là điểm $O \rightarrow SO \perp (ABCD) \rightarrow$ hình chiếu vuông góc của SB trên mặt đáy $(ABCD)$ là OB . Do đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SB, OB} = \widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB , có $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = a\sqrt{3}$.

Tam giác vuông ABC , có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = a^3$. **Chọn D.**



Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi I là trung điểm của BC , SI tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

C. $V = \frac{a^3}{2}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

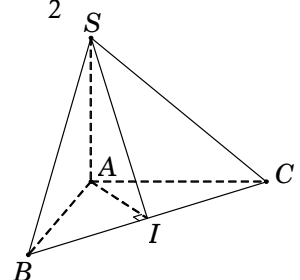
Lời giải. Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI . Do đó $60^\circ = \widehat{SI, (ABC)} = \widehat{SI, AI} = \widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông tại A , suy ra trung tuyến $AI = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông SAI , có $SA = AI \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **Chọn D.**



Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

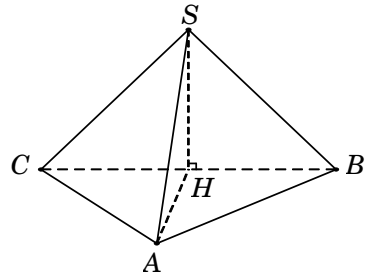
Lời giải. Vì $SH \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SA trên mặt đáy (ABC) là HA . Do đó $60^\circ = \widehat{SA, (ABC)} = \widehat{SA, HA} = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SHA , có $SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{3a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn A.**



Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B ; đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Biết $AC = 2a, BC = a$; góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm AC . Do tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C nên hình chiếu của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , suy ra $SH \perp (ABC)$. Do đó $60^\circ = \widehat{SB, (ABC)} = \widehat{SB, BH} = \widehat{SBH}$.

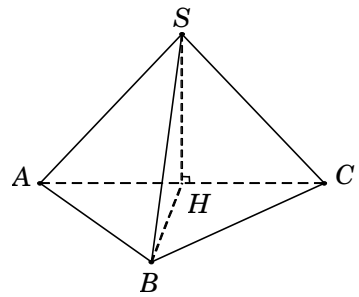
Tam giác vuông SHB , có

$$SH = BH \cdot \tan \widehat{SBH} = \frac{AC}{2} \cdot \tan \widehat{SBH} = a\sqrt{3}.$$

Tam giác vuông ABC , có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{2}$. **Chọn C.**



Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $BD = 1$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là trung điểm OD . Đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}}{24}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{1}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$ là HD . Do đó $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$.

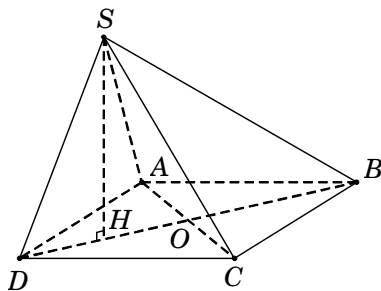
Tam giác vuông SHD , có

$$SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{BD}{4} \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Trong hình vuông $ABCD$, có $AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = \frac{1}{2}.$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{3}}{24}.$ **Chọn A.**



Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$ B. $V = \frac{a^3}{3}.$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$ D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}.$

Lời giải. Gọi $O = AC \cap BD$; M là trung điểm AB . Suy ra $H = BO \cap CM$.

Theo giả thiết $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$

là HD . Do đó $30^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}.$

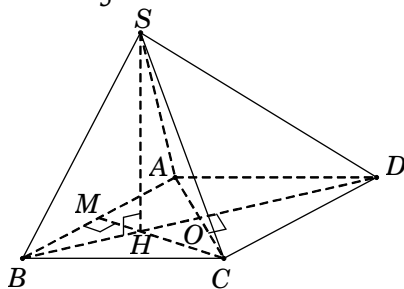
Tam giác ABC và ADC đều cạnh a , suy ra

$$\begin{cases} OD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ OH = \frac{1}{3}BO = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Rightarrow HD = OD + OH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác vuông SHD , có $SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{2a}{3}.$

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$ **Chọn C.**



Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh đáy AD và BC ; $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 45° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta có $45^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, AD} = \widehat{SDA}$.

Suy ra tam giác SAD vuông cân tại A nên $SA = AD = 2a$.

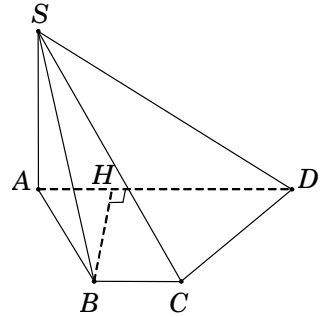
Trong hình thang $ABCD$, kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$).

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác AHB , có $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)BH = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**



Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng 30° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{8\sqrt{6}a^3}{9}$. B. $V = 8\sqrt{2}a^3$. C. $V = 8\sqrt{6}a^3$. D. $V = \frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải. Hình chiếu vuông góc của SC trên mặt đáy là HC nên

$$30^\circ = \widehat{SC, (ABCD)} = \widehat{SC, HC} = \widehat{SCH}.$$

Tam giác vuông SAD , có $SA^2 = AH \cdot AD$

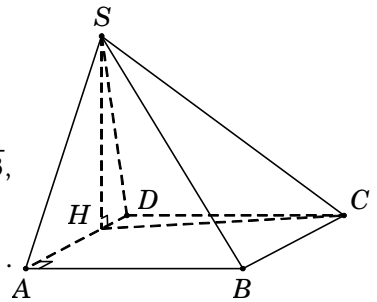
$$\Leftrightarrow 12a^2 = \frac{3}{4}AD \cdot AD = \frac{3}{4}AD^2.$$

Suy ra $AD = 4a$, $HA = 3a$, $HD = a$, $SH = \sqrt{HA \cdot HD} = a\sqrt{3}$,

$$HC = SH \cdot \cot \widehat{SCH} = 3a, \quad CD = \sqrt{HC^2 - HD^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AD \cdot CD = 8\sqrt{2}a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **Chọn D.**



Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = AB = a$. Gọi N là trung điểm SD , đường thẳng AN hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải. Tam giác SAD vuông tại A , có AN là trung tuyến nên $AN = \frac{1}{2}SD$.

Gọi M là trung điểm AD , suy ra $MN \parallel SA$ nên $MN \perp (ABCD)$.

Do đó $30^\circ = \widehat{AN}, (\widehat{ABCD}) = \widehat{AN}, \widehat{AM} = \widehat{NAM}$.

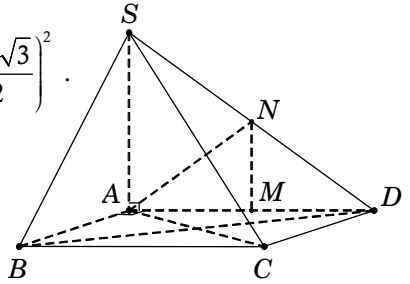
Tam giác vuông NMA , có $AM = AN \cdot \cos \widehat{NAM} = \frac{SD\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SAD , có $SD^2 = SA^2 + AD^2 \Leftrightarrow SD^2 = a^2 + \left(\frac{SD\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Suy ra $SD = 2a$ nên $AD = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**



Câu 34. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. B. $V = \sqrt{3}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải. $ABCD$ là hình vuông suy ra $AB \perp AD$. (1)

Vì $SA \perp (ABCD) \longrightarrow SA \perp AD$. (2)

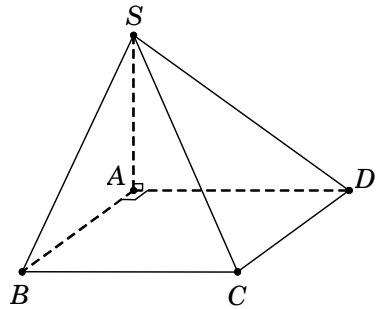
Từ (1) và (2), suy ra $AD \perp (SAB)$.

Khi đó SA là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAB) .

Do đó $30^\circ = \widehat{SD}, (SAB) = (\widehat{SD}, \widehat{SA}) = \widehat{DSA}$.

Tam giác SAD vuông tại A , có $SA = \frac{AD}{\tan \widehat{DSA}} = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D.**



Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $V = \sqrt{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \sqrt{3}$.

Lời giải. Kẻ $SH \perp BC$. Vì $(SBC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến BC nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBC)$. Do đó $60^\circ = \widehat{SD}, (SBC) = \widehat{SD}, \widehat{SC} = \widehat{DSC}$.

Từ $DC \perp (SBC) \longrightarrow DC \perp SC$.

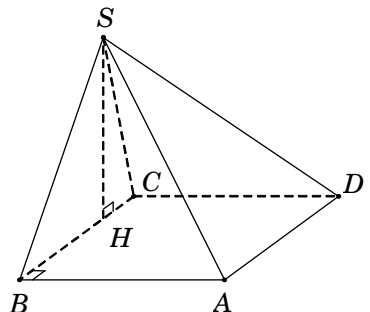
Tam giác vuông SCD , có $SC = \frac{DC}{\tan \widehat{DSC}} = 1$.

Tam giác vuông SBC , có

$$SH = \frac{SB \cdot SC}{BC} = \frac{\sqrt{BC^2 - SC^2} \cdot SC}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 3$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Chọn C.**



Câu 36. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải. Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, BA và $O = AE \cap CF$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$.

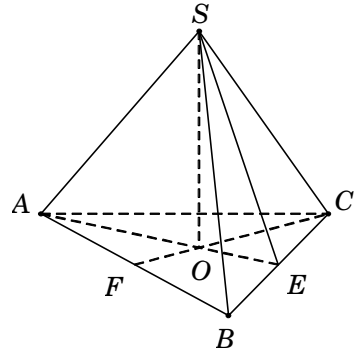
Khi đó $60^\circ = \widehat{(SBC), (ABC)} = \widehat{SE, OE} = \widehat{SEO}$.

Tam giác vuông SOE , có

$$SO = OE \cdot \tan \widehat{SEO} = \frac{AE}{3} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **Chọn A.**



Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc đáy và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = a^3\sqrt{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ nên có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

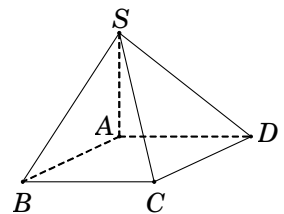
Do $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SD \perp CD; AD \perp CD \end{cases}$, suy ra $60^\circ = \widehat{(SCD), (ABCD)} = \widehat{SD, AD} = \widehat{SDA}$.

Tam giác vuông SAD , có $SA = AD \cdot \tan \widehat{SDA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn D.



Câu 38. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = 3a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải. Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ nên có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

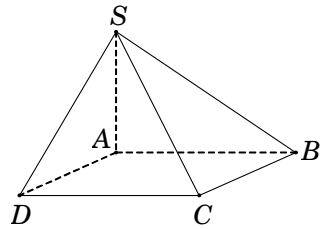
Do $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ SB \perp BC; AB \perp BC \end{cases}$, suy ra $60^\circ = \widehat{(SBC), (ABCD)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB , có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2 \sqrt{3}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = a^3$.



Chọn D.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$. D. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$.

Lời giải. Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)

Gọi $O = AC \cap BD$, suy ra $BD \perp AO$. (2)

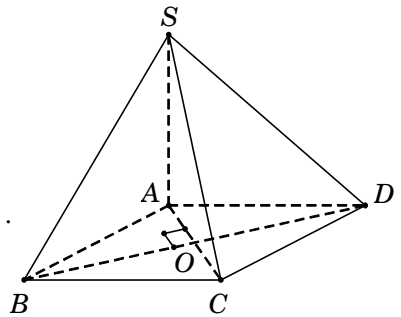
Từ (1) và (2), suy ra $BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp SO$.

Do $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \perp BD, AO \perp BD \end{cases}$, suy ra $60^\circ = \widehat{(SBD), (ABCD)} = \widehat{(SO, AO)} = \widehat{SOA}$.

Tam giác vuông SAO , ta có $SA = AO \cdot \tan \widehat{SOA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$. **Chọn C.**



Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , đường chéo $AC = a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa (SCD) và đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = \frac{a^3}{12}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$.

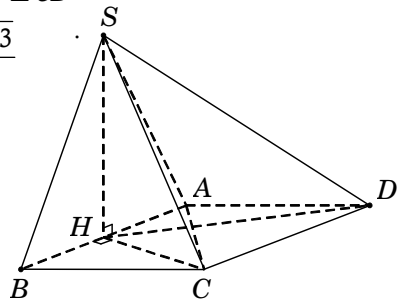
Tam giác ABC đều cạnh a nên $\begin{cases} CH \perp AB \rightarrow CH \perp CD \\ CH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SC \subset (SCD), SC \perp CD \\ HC \subset (ABCD), HC \perp CD \end{cases}$ suy ra

$$45^\circ = \widehat{(SCD), (ABCD)} = \widehat{SC, HC} = \widehat{SCH}.$$

Tam giác vuông SHC , có $SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.



Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3}{4}$. **Chọn A.**

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AD = DC = 1$, $AB = 2$; cạnh bên SA vuông góc với đáy; mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \sqrt{2}$. B. $V = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm AB , suy ra $CI = AD = 1 = \frac{1}{2} AB$.

Do đó tam giác ABC vuông tại C . Suy ra $BC \perp AC$ nên

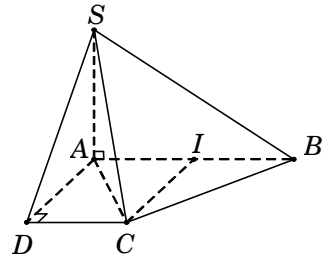
$$45^\circ = (\widehat{SBC}), (\widehat{ABCD}) = \widehat{SC}, \widehat{AC} = \widehat{SCA}.$$

Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAC , có $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = \sqrt{2}$.

Diện tích hình thang $S_{ABCD} = \frac{(AB + DC)AD}{2} = \frac{3}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn C.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có $S_{\Delta ABC} = 4\text{cm}^2$, $S_{\Delta ABD} = 6\text{cm}^2$, $AB = 3\text{cm}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng 60° . Tính thể tích V của khối tứ diện đã cho.

- A. $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$. B. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$. C. $V = 2\sqrt{3}\text{cm}^3$. D. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$.

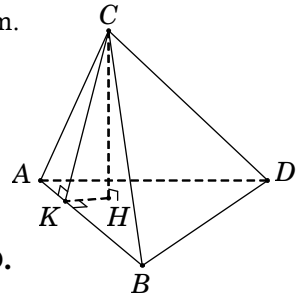
Lời giải. Kẻ $CK \perp AB$. Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK \longrightarrow CK = \frac{8}{3}\text{cm}$.

Gọi H là chân đường cao của hình chóp hạ từ đỉnh C .

Xét tam giác vuông CHK , ta có

$$CH = CK \cdot \sin \widehat{CKH} = CK \cdot \sin (\widehat{ABC}), (\widehat{ABD}) = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABD} \cdot CH = \frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$. **Chọn D.**



Câu 43. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M , N , P tương ứng là trung điểm các cạnh BC , CD , BD . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

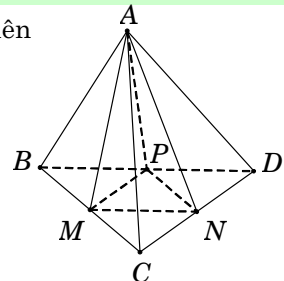
- A. $V = \frac{7}{2}a^3$. B. $V = 14a^3$. C. $V = \frac{28}{3}a^3$. D. $V = 7a^3$.

Lời giải. Do AB , AC và AD đôi một vuông góc với nhau nên

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot 6a \cdot 7a \cdot 4a = 28a^3.$$

Để thấy $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} S_{\Delta BCD}$.

Suy ra $V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 7a^3$. **Chọn D.**



Câu 44. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

- A. $V = 3$. B. $V = 4$. C. $V = 6$. D. $V = 5$.

Lời giải. Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $S_{\Delta GBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta DBC}$.

Suy ra $V_{A.GBC} = \frac{1}{3}V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$. **Chọn B.**

Câu 45. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

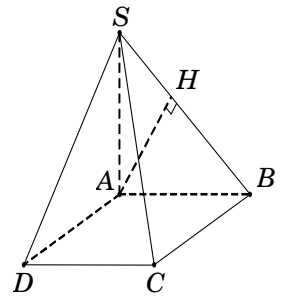
Lời giải. Gọi H là hình chiếu của A trên $SB \Rightarrow AH \perp SB$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A, (SBC)] = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A , có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$. **Chọn D.**



Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở B , $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và vuông góc với đáy (ABC) . Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SB , SC lần lượt tại M , N . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

- A. $V = \frac{2a^3}{27}$. B. $V = \frac{2a^3}{29}$. C. $V = \frac{a^3}{9}$. D. $V = \frac{a^3}{27}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $AB = BC = a$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{a^2}{2}$. Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{6}$.

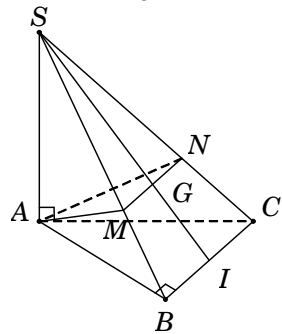
Gọi I là trung điểm BC .

Do G là trọng tâm ΔSBC nên $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$.

Vì $BC \parallel (\alpha) \rightarrow BC$ song song với giao tuyến MN

$\rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$ theo tỉ số $\frac{2}{3} \rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{4}{9}S_{\Delta SBC}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.AMN} = \frac{4}{9}V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{27}$.



Chọn A.

Nhận xét. 1) bạn đọc có thể tham khảo cách giải khác bằng tỉ số thể tích ở **Bài ???**

2) Hai tam giác đồng dạng theo tỉ số k thì tỉ số thể tích bằng k^3 .

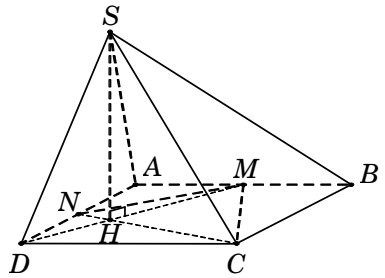
Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$.

- A. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $V = \frac{5a^3}{8}$. D. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải. Theo giả thiết, ta có $SH = a\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Diện tích tứ giác } S_{CDNM} &= S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta BMC} \\ &= AB^2 - \frac{1}{2}AM \cdot AN - \frac{1}{2}BM \cdot BC = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}. \end{aligned}$$

Vậy $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}S_{CDNM} \cdot SH = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$. **Chọn B.**



Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên tạo với đáy góc 60° . Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên SD . Tính theo a thể tích V của khối tứ diện $DKAC$.

- A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{15}$. B. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{5}$. C. $V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm CD , suy ra $OM \perp CD$ nên

$$60^\circ = (\widehat{SCD}), (\widehat{ABCD}) = \widehat{SM}, \widehat{OM} = \widehat{SMO}.$$

Tam giác vuông SOM , có $SO = OM \cdot \tan \widehat{SMO} = a\sqrt{3}$.

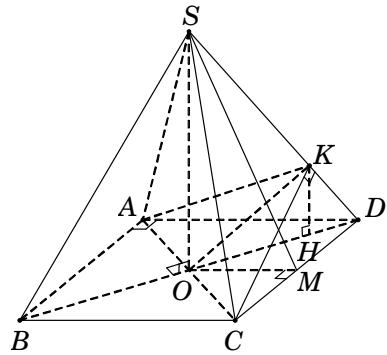
Kẻ $KH \perp OD \Rightarrow KH \parallel SO$ nên $KH \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông SOD , ta có $\frac{KH}{SO} = \frac{DK}{DS} = \frac{DO^2}{DS^2}$

$$= \frac{OD^2}{SO^2 + OD^2} = \frac{2}{5} \rightarrow KH = \frac{2}{5}SO = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

Diện tích tam giác $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}AD \cdot DC = 2a^2$.

Vậy $V_{DKAC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ADC} \cdot KH = \frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. **Chọn C.**



Câu 49*. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$ và $SA = SB = a$, $SC = 3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

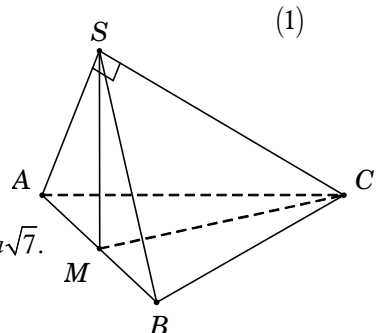
Lời giải. Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow SM \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} SA = SB \\ \widehat{ASB} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta SAB \text{ đều} \rightarrow \begin{cases} AB = a \\ SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Tam giác SAC , có $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = a\sqrt{10}$.

Tam giác SBC , có $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos \widehat{BSC}} = a\sqrt{7}$.

Tam giác SBC , có $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.



$$\longrightarrow CM = \sqrt{AM^2 + AC^2 - 2AM \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}} = \frac{a\sqrt{33}}{2}.$$

Ta có $SM^2 + MC^2 = AC^2 = 9a^2 \longrightarrow \triangle SMC$ vuông tại $M \longrightarrow SM \perp MC$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $SM \perp (ABC)$.

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SM = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **Chọn D.**

Cách 2. (Dùng phương pháp tỉ số thể tích-Bạn đọc sẽ hiểu rõ hơn vấn đề này ở Bài ??? đến Bài ???).

Trên cạnh SC lấy điểm D sao cho $SD = a$.

$$\text{Dễ dàng suy ra } \begin{cases} AB = CD = a, AD = a\sqrt{2} \\ SA = SD = a, AD = a\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \triangle ABD \text{ vuông cân} \\ \triangle SAD \text{ vuông cân} \end{cases}.$$

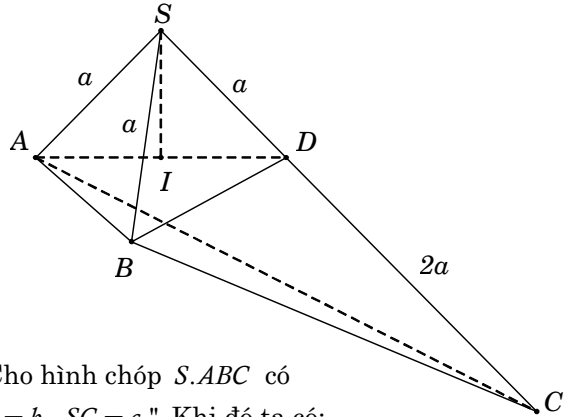
Lại có $SA = SB = SD = a$ nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABD) là trung điểm I của AD .

$$\text{Ta tính được } SI = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ và } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} a^2.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot SI = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.ABD}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD}{SC} = \frac{1}{3}$$

$$\longrightarrow V_{S.ABC} = 3V_{S.ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$



Cách 3. Phương pháp trắc nghiệm. " Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSA} = \gamma$ và $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$." Khi đó ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Áp dụng công thức, ta được $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = SB$, $SC = SD$, $(SAB) \perp (SCD)$ và tổng diện tích hai tam giác SAB và SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

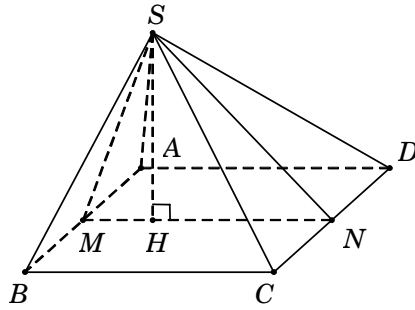
$$\text{A. } V = \frac{a^3}{5}.$$

$$\text{B. } V = \frac{4a^3}{15}.$$

$$\text{C. } V = \frac{4a^3}{25}.$$

$$\text{D. } V = \frac{12a^3}{25}.$$

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .



Tam giác SAB cân tại S suy ra $SM \perp AB \Rightarrow SM \perp d$, với $d = (SAB) \cap (SCD)$.

Vì $(SAB) \perp (SCD)$ suy ra $SM \perp (SCD) \Rightarrow SM \perp SN$ và $(SMN) \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp MN \longrightarrow SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SCD} = \frac{7a^2}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot SM + \frac{1}{2}CD \cdot SN = \frac{7a^2}{10} \longrightarrow SM + SN = \frac{7a}{5}.$$

Tam giác SMN vuông tại S nên $SM^2 + SN^2 = MN^2 = a^2$.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} SM + SN = \frac{7a}{5} \\ SM^2 + SN^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow SM = \frac{3a}{5} \text{ \& } SN = \frac{4a}{5} \longrightarrow SH = \frac{SM \cdot SN}{MN} = \frac{12a}{25}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{4a^3}{25}$. **Chọn C.**

Vấn đề 2. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Câu 51. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 - 2017) Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

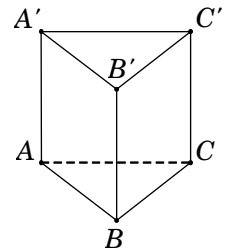
Lời giải. Xét khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a .

Diện tích tam giác đều cạnh a là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $h = AA' = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S \cdot h = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn D.



Câu 52. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

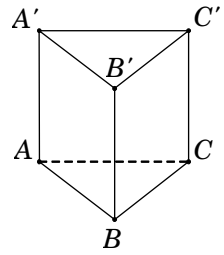
Lời giải. Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

Diện tích xung quanh lăng trụ là $S_{xq} = 3.S_{ABB'A'}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = 3.(AA'.AB) \Leftrightarrow 3a^2 = 3.(AA'.a) \Rightarrow AA' = a.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Chọn D.

Câu 53. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

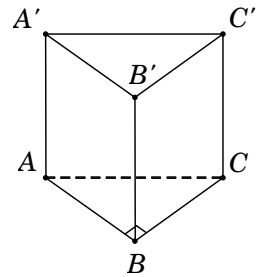
- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{2}$. D. $V = a^3$.

Lời giải. Tam giác ABC vuông cân tại B ,

suy ra $BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC}.BB' = \frac{a^3}{2}$.

Chọn C.



Câu 54. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = 4a^3\sqrt{5}$. B. $V = a^3\sqrt{15}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải. Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = a^3\sqrt{15}$. **Chọn B.**

Câu 55. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{1}{3}a^3$.

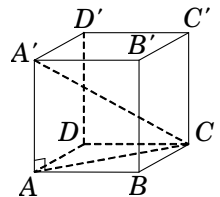
Lời giải. Đặt cạnh của khối lập phương là x ($x > 0$).

Suy ra $CC' = x$; $AC = x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC' , có

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} \Leftrightarrow x\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a.$$

Vậy thể tích khối lập phương $V = a^3$. **Chọn A.**



Câu 56. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$.

Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a , biết $A'B = 3a$.

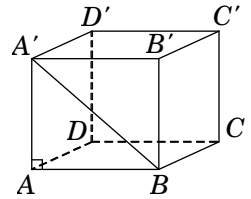
- A. $V = \frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. B. $V = 4\sqrt{5}a^3$. C. $V = 2\sqrt{5}a^3$. D. $V = 12a^3$.

Lời giải. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp AB$.

Xét tam giác vuông $A'AB$, ta có $A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{5}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'A = 4\sqrt{5}a^3$. **Chọn B.**



Câu 57. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

- A. $V = a^3\sqrt{10}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải. Trong tam giác vuông ABB' , có $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot BB' = 2a^3\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 58. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là 10cm^2 , 20cm^2 , 32cm^2 . Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật đã cho.

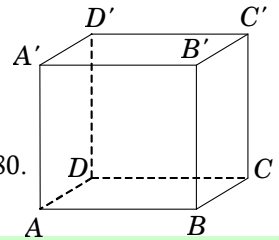
- A. $V = 80\text{cm}^3$. B. $V = 160\text{cm}^3$. C. $V = 40\text{cm}^3$. D. $V = 64\text{cm}^3$.

Lời giải. Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\text{Theo bài ra, ta có } \begin{cases} S_{ABCD} = 10\text{cm}^2 \\ S_{ABB'A'} = 20\text{cm}^2 \\ S_{ADD'A'} = 30\text{cm}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \cdot AD = 10 \\ AB \cdot AA' = 20 \\ AA' \cdot AD = 32 \end{cases}$$

Nhân vế theo vế, ta được $(AA' \cdot AB \cdot AD)^2 = 6400 \Rightarrow AA' \cdot AB \cdot AD = 80$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot AB \cdot AD = 80\text{cm}^3$. **Chọn A.**



Câu 59. Cho hình hộp chữ nhật có đường chéo $d = \sqrt{21}$. Độ dài ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Thể tích của khối hộp chữ nhật là

- A. $V = 8$. B. $V = \frac{8}{3}$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = 6$.

Lời giải. Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài kích thước ba cạnh lần lượt là $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$ và có đường chéo AC' .

Theo bài ra, ta có a, b, c lập thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Suy ra $\begin{cases} b = 2a \\ c = 4a \end{cases}$.

Mặt khác, độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{21} \Rightarrow AA'^2 + AB^2 + AD^2 = 21 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 21$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} c = 2b = 4a \\ a^2 + b^2 + c^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b = 4a \\ a^2 + (2a)^2 + (4a)^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b = 4a \\ 21a^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot AB \cdot AD = abc = 8$. **Chọn A.**

Câu 60. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = 1$. Cạnh $A'B$ tạo với mặt đáy (ABC) góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{1}{2}$.

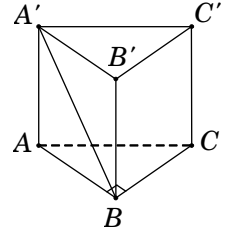
Lời giải. Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$, suy ra hình chiếu vuông góc của $A'B$ trên mặt đáy (ABC) là AB .

$$\text{Do đó } 60^\circ = \widehat{A'B, (ABC)} = \widehat{A'B, AB} = \widehat{A'BA}.$$

Tam giác vuông $A'AB$, ta có $AA' = AB \cdot \tan \widehat{A'BA} = \sqrt{3}$.

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Chọn C.}$$



Câu 61. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, đường chéo $A'C$ hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

- A. $V = 2a^3$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = \sqrt{5}a^3$. D. $V = \frac{a^3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải. Ta có $AA' \perp (ABCD)$ nên

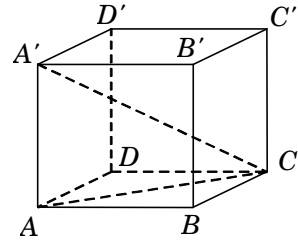
$$\widehat{A'C, (ABCD)} = \widehat{A'C, AC} = \widehat{A'CA}.$$

Tam giác vuông $A'AC$, ta có $AC = AA' \cdot \cot \alpha = a\sqrt{5}$.

Tam giác vuông ABC , ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a^3. \quad \text{Chọn A.}$$



Câu 62. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3a^3}{8}$. B. $V = \frac{9a^3}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $B'C'$. Tam giác ABC cân tại $A \longrightarrow$ tam giác $A'B'C'$ cân tại $A' \longrightarrow A'M \perp B'C'$.

$$\text{Do đó } 60^\circ = \widehat{(AB'C'), (A'B'C')} = \widehat{(AM; A'M)} = \widehat{AMA'}.$$

Tam giác vuông $A'B'M$, có

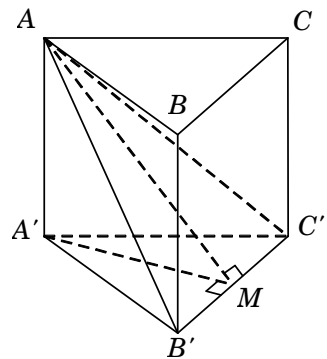
$$A'M = A'B' \cdot \cos \widehat{MA'B'} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

Tam giác vuông $AA'M$, có

$$AA' = A'M \cdot \tan \widehat{AMA'} = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3}{8}. \quad \text{Chọn A.}$$



Câu 63. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ.

- A. $V = \frac{a^3}{8}$. B. $V = \frac{3a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{3a^3}{24}$.

Lời giải. Tương tự như bài 62. **Chọn B.**

Câu 64. Tính theo a thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° , $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° và $AA' = a\sqrt{3}$.

- A. $V = 2a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = a^3$.

Lời giải. Ta có $30^\circ = \widehat{A'C, (ABCD)} = \widehat{A'C, AC} = \widehat{A'CA}$;

$$60^\circ = \widehat{(A'BC), (ABCD)} = \widehat{A'B, AB} = \widehat{A'BA}.$$

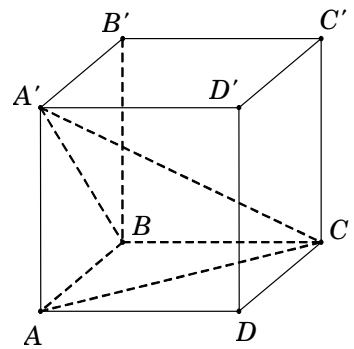
Tam giác vuông $A'AB$, có $AB = \frac{AA'}{\tan A'BA} = a$.

Tam giác vuông $A'AC$, có $AC = \frac{AA'}{\tan A'CA} = 3a$.

Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 2a^3\sqrt{6}$. **Chọn A.**



Câu 65. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ.

- A. $V = \sqrt{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $V = \sqrt{3}$.

Lời giải. Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Do đó tam giác ABC

và ADC là các tam giác đều. Vì N là trung điểm $A'D'$ nên $\begin{cases} C'N \perp A'D' \\ C'N = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

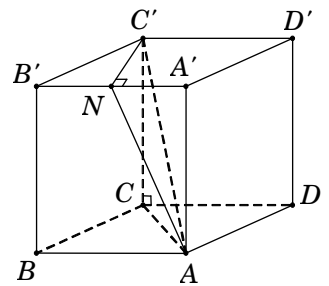
Suy ra $30^\circ = \widehat{AC', (ADD'A')} = \widehat{AC', AN} = \widehat{C'AN}$.

Tam giác vuông $C'NA$, có $AN = \frac{C'N}{\tan C'AN} = \frac{3}{2}$.

Tam giác vuông $AA'N$, có $AA' = \sqrt{AN^2 - A'N^2} = \sqrt{2}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**




Vấn đề 3. THỂ TÍCH LĂNG TRỤ XIÊN


Câu 66. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

- A. $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{8a^3}{3}$. C. $V = 8a^3$. D. $V = 4a^3\sqrt{2}$.

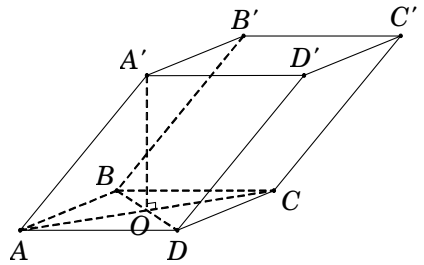
Lời giải. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, suy ra $A'O \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông $A'OA$, có

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{\Delta ABCD} \cdot A'O = 4a^3\sqrt{2}$. **Chọn D.**



Câu 67. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

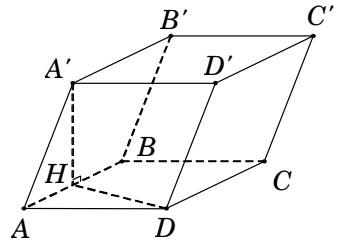
- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = a^3$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải. Theo giả thiết, ta có $A'H \perp AB$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**



Câu 68. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

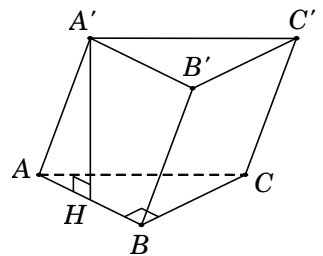
- A. $V = a^3\sqrt{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $BA = BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC = a^2$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 69. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{a^3}{4}$. D. $V = \frac{a^3}{6}$.

Lời giải. Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn A.**

Câu 70. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{2}$ và $A'A = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{6}$. D. $V = 2a^3$.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC .

Khi đó $G = AN \cap CM$ là trọng tâm ΔABC .

Theo giả thiết, ta có $A'G \perp (ABC)$.

Tam giác ABC đều cạnh $2a\sqrt{2}$ nên suy ra

$$AN = a\sqrt{6} \longrightarrow AG = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3}a\sqrt{6}.$$

Tam giác vuông $A'GA$, có $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{(2a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'G = 2a^3$. **Chọn D.**

Câu 71. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Biết rằng $A'A = A'B = A'C = a$.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm BC . Từ $A'A = A'B = A'C = a$, suy ra hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

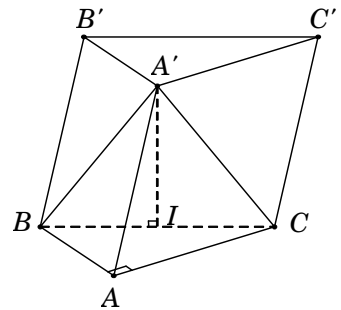
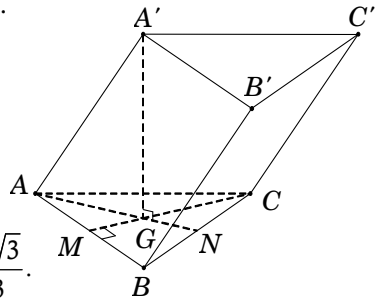
Suy ra $A'I \perp (ABC)$.

Tam giác ABC , có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'IB$, có $A'I = \sqrt{A'B^2 - BI^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'I = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **Chọn C.**



Câu 72. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=1$, $AC=2$; cạnh bên $AA'=\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy (ABC) trùng với chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{21}}{4}$. B. $V = \frac{\sqrt{21}}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{7}}{4}$. D. $V = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

Lời giải. Gọi H là chân đường cao hạ từ B trong $\triangle ABC$.

Theo giả thiết, ta có $A'H \perp (ABC)$.

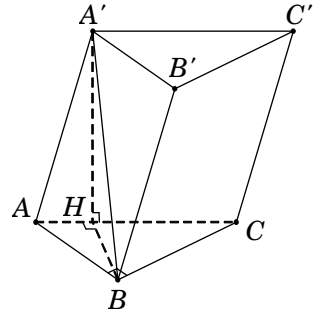
Tam giác vuông ABC , có

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}; \quad AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \frac{\sqrt{21}}{4}$. **Chọn A.**



Câu 73. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết thể tích khối chóp $A.BCB'C'$ bằng $2a^3$.

- A. $V = 6a^3$. B. $V = \frac{5a^3}{2}$. C. $V = 4a^3$. D. $V = 3a^3$.

Lời giải. Ta có thể tích khối chóp $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{A.BCB'C'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \longrightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2} V_{A.BCB'C'} = \frac{3}{2} \cdot 2a^3 = 3a^3$. **Chọn D.**

Câu 74. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12cm^3 . Tính thể tích V của khối tứ diện $AB'CD'$.

- A. $V = 2\text{cm}^3$. B. $V = 3\text{cm}^3$. C. $V = 4\text{cm}^3$. D. $V = 5\text{cm}^3$.

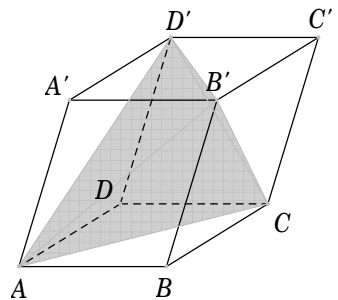
Lời giải. Gọi S là diện tích mặt đáy $ABCD$ và h là chiều cao khối hộp.

Thể tích khối hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S \cdot h = 12\text{cm}^3$.

Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành khối tứ diện $AB'CD'$ và 4 khối chóp: $A.A'B'D'$, $C.B'C'D'$, $B'.BAC$, $D'.DAC$ (như hình vẽ). Ta thấy bốn khối chóp này có thể tích bằng nhau và cùng bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot h$.

Suy ra tổng thể tích 4 khối chóp bằng $V' = \frac{2}{3} Sh$.

Vậy thể tích khối tứ diện $V_{AB'CD'} = Sh - \frac{2}{3} Sh = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4\text{cm}^3$. **Chọn C.**



Câu 75. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$; $A'O$ vuông góc với đáy ($ABCD$). Cạnh bên AA' hợp với mặt đáy ($ABCD$) một góc 45° . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải. Vì $A'O \perp (ABCD)$ nên

$$45^\circ = \widehat{AA', (ABCD)} = \widehat{AA', AO} = \widehat{A'AO}.$$

Đường chéo hình chữ nhật

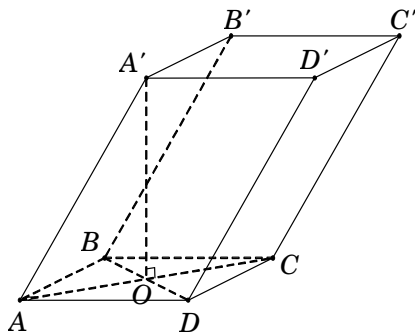
$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = a.$$

Suy ra tam giác $A'OA$ vuông cân tại O nên

$$A'O = AO = a.$$

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = a^3\sqrt{3}$. **Chọn D.**



Câu 76. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45° . Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = 3$. B. $V = 1$. C. $V = \frac{\sqrt{6}}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{6}}{24}$.

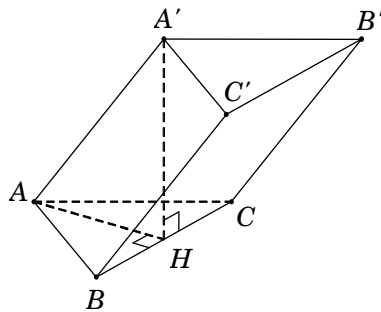
Lời giải. Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH = \sqrt{3}$. Vì $A'H \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH . Do đó

$$45^\circ = \widehat{AA', (ABC)} = \widehat{AA', AH} = \widehat{A'AH}.$$

Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H = HA = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 3$. **Chọn A.**



Câu 77. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho hình lăng trụ tam giác ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

- A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu của C' trên mặt phẳng (ABC).

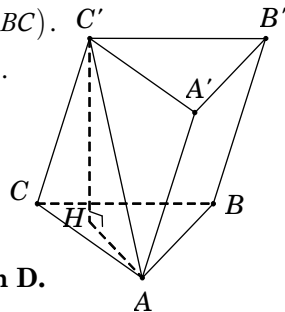
Suy ra AH là hình chiếu của AC' trên mặt phẳng (ABC).

$$\text{Do đó } 60^\circ = \widehat{AC', (ABC)} = \widehat{(AC', AH)} = \widehat{HAC'}.$$

Tam giác vuông AHC' , có $C'H = AC' \cdot \sin \widehat{HAC'} = 2\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot C'H = 8\sqrt{3}$.

Suy ra thể tích cần tính $V_{ABCB'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$. **Chọn D.**



Câu 78. Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S = 10\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° và độ dài cạnh bên bằng 10cm .

- A. $V = 100\text{cm}^3$. B. $V = 50\sqrt{3}\text{cm}^3$. C. $V = 50\text{cm}^3$. D. $V = 100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Lời giải. Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC .

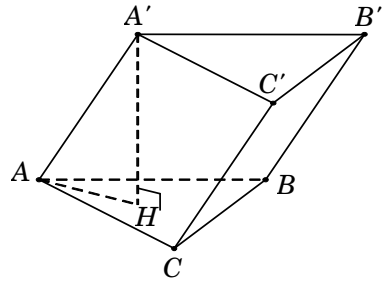
Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$. Suy ra AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) . Do đó

$$60^\circ = \widehat{AA',(ABC)} = \widehat{AA',AH} = \widehat{A'AH}.$$

Tam giác $A'AH$ vuông tại H , có

$$A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = 5\sqrt{3}.$$

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = 50\sqrt{3}\text{cm}^3$. **Chọn B.**



Câu 79. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tâm O và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60° . Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3a^3}{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra ΔABD đều cạnh a .

Gọi H là tâm tam giác ABD . Vì A' cách đều các điểm A, B, D nên $A'H \perp (ABD)$.

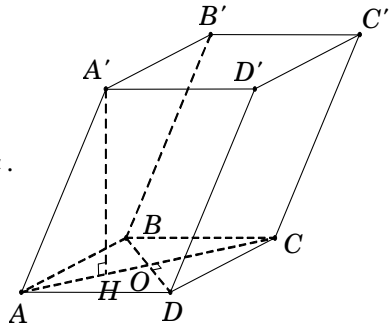
Do đó $60^\circ = \widehat{AA',(ABCD)} = \widehat{AA',HA} = \widehat{A'AH}$.

$$\text{Ta có } OH = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Tam giác vuông $A'AH$, có $A'H = AH \cdot \tan \widehat{A'AH} = a$.

$$\text{Diện tích hình thoi } S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**



Câu 80. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết rằng $A'O \perp (ABCD)$ và cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích V của khối đa diện $OABC'D'$.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{12}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Lời giải. Từ giả thiết, suy ra tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow OA = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

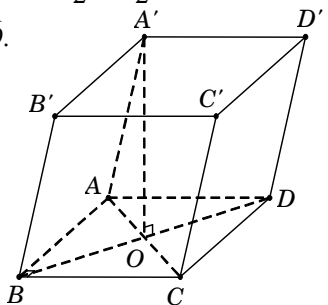
Vì $A'O \perp (ABCD)$ nên $60^\circ = \widehat{AA',(ABCD)} = \widehat{AA',AO} = \widehat{A'AO}$.

Tam giác vuông $A'AO$, có $OA' = OA \cdot \tan \widehat{A'AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Suy ra thể tích khối hộp } V = S_{ABCD} \cdot OA' = \frac{3a^3}{4}.$$

$$\text{Ta có } V = V_{O.ABC'D'} + V_{AA'D'.BB'C'} + V_{C'.BOC} + V_{D'.AOD} + V_{O.CDD'C'}$$

$$= V_{O.ABC'D'} + \frac{1}{2}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{6}V \Rightarrow V_{O.ABC'D'} = \frac{V}{6} = \frac{a^3}{8}. \text{ **Chọn C.}**$$




Vấn đề 4. TỈ SỐ THỂ TÍCH


Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CD, BD . Biết rằng $AB = 4a$, $AC = 6a$, $AD = 7a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

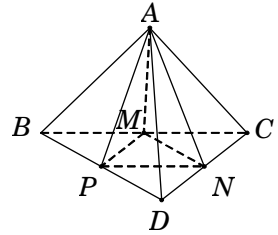
- A. $V = 7a^3$. B. $V = 28a^3$. C. $V = 14a^3$. D. $V = 21a^3$.

Lời giải. Tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD

đôi một vuông góc nên $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 28a^3$.

Ta có $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} S_{\Delta BCD}$, suy ra $V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{A.BCD} = 7a^3$.

Chọn A.



Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối tứ diện có các đỉnh là trọng tâm của các mặt của khối tứ diện $ABCD$. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

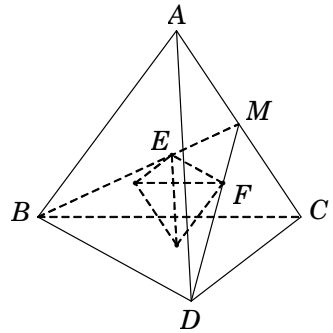
- A. $\frac{V'}{V} = \frac{8}{27}$. B. $\frac{V'}{V} = \frac{23}{27}$. C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{27}$. D. $\frac{V'}{V} = \frac{4}{27}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm AC ; E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD .

Trong tam giác MBD có $EF = \frac{1}{3} BD$.

Tương tự ta có các cạnh còn lại của tứ diện mới sinh ra bằng $\frac{1}{3}$ cạnh của tứ diện ban đầu.

Do đó $\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. **Chọn C.**



Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 9, diện tích đáy bằng 5. Gọi M là trung điểm của cạnh SB và N thuộc cạnh SC sao cho $NS = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BMNC$.

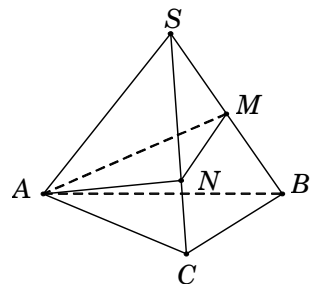
- A. $V = 15$. B. $V = 5$. C. $V = 30$. D. $V = 10$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$ và $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 5 = 15$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{ABMNC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = 10$.

Chọn D.



Câu 84. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 16. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC . Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 2$. B. $V = 4$. C. $V = 6$. D. $V = 8$.

Lời giải. Ta có $d[S, (MNP)] = d[A, (MNP)]$ nên $V_{AMNP} = V_{SMNP}$.

Mà $\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{8}$ nên $V_{AMNP} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} = 2$. **Chọn A.**

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Xét các điểm P thuộc đoạn AB , điểm Q thuộc đoạn BC và điểm R thuộc đoạn BD sao cho $\frac{PA}{PB} = 2, \frac{QB}{QC} = 3, \frac{RB}{RD} = 4$. Tính thể tích của khối tứ diện $BPQR$ theo V .

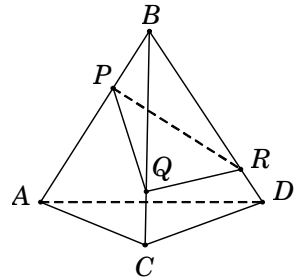
- A. $V_{BPQR} = \frac{V}{5}$. B. $V_{BPQR} = \frac{V}{4}$. C. $V_{BPQR} = \frac{V}{3}$. D. $V_{BPQR} = \frac{V}{6}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có

$$\frac{BP}{BA} = \frac{1}{3}, \frac{BQ}{BC} = \frac{3}{4}, \frac{BR}{BD} = \frac{4}{5}.$$

Ta có $\frac{V_{BPQR}}{V_{ABCD}} = \frac{BP}{BA} \cdot \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{BR}{BD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Suy ra $V_{BPQR} = \frac{1}{5}V_{ABCD} = \frac{V}{5}$.



Chọn A.

Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = 6a, AC = 9a, AD = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB . Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

- A. $V = 8a^3$. B. $V = 4a^3$. C. $V = 6a^3$. D. $V = 2a^3$.

Lời giải. Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD = 27a^3$.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB .

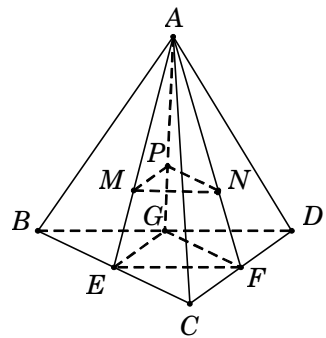
Suy ra $V_{AEFG} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = \frac{27}{4}a^3$.

Do M, N, P là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB nên ta có

$$\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AF} = \frac{AP}{AG} = \frac{2}{3}.$$

Ta có $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.EFG}} = \frac{AM}{AE} \cdot \frac{AN}{AF} \cdot \frac{AP}{AG} = \frac{8}{27}$

$\longrightarrow V_{A.MNP} = \frac{8}{27}V_{A.EFG} = 2a^3$. **Chọn D.**



Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3, SB = 4, SC = 5$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = 5\sqrt{2}$. B. $V = 5\sqrt{3}$. C. $V = 10$. D. $V = 15$.

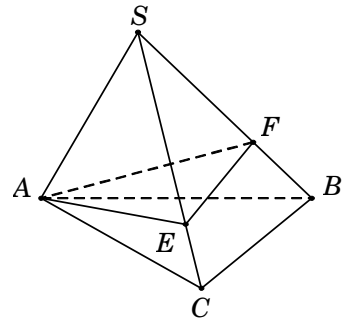
Lời giải. Trên các đoạn SB, SC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $SE = SF = 3$.

Khi đó $S.AEF$ là khối tứ diện đều có cạnh $a = 3$.

$$\text{Suy ra } V_{S.AEF} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$$

$$\longrightarrow V_{S.ABC} = \frac{20}{9} V_{S.AEF} = 5\sqrt{2}. \text{ Chọn A.}$$



Câu 88. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Cho tứ diện có thể tích bằng V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

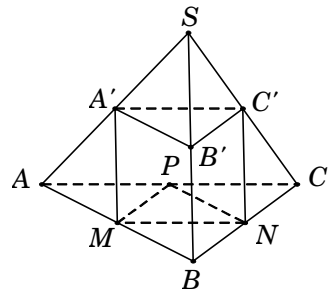
D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải. Kí hiệu tứ diện và các điểm như hình vẽ.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{V}{8}.$$

$$\text{Tương tự } V_{A.A'MP} = V_{B.B'MN} = V_{C.C'NP} = \frac{V}{8}.$$

$$\text{Do đó } V' = V_{S.ABC} - (V_{S.A'B'C'} + V_{A.A'MP} + V_{B.B'MN} + V_{C.C'NP}) \\ = V - \left(\frac{V}{8} + \frac{V}{8} + \frac{V}{8} + \frac{V}{8} \right) = \frac{V}{2} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}. \text{ Chọn A.}$$



Câu 89. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm SB , N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{11}}{36}$.

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{11}}{16}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{11}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{11}}{18}$.

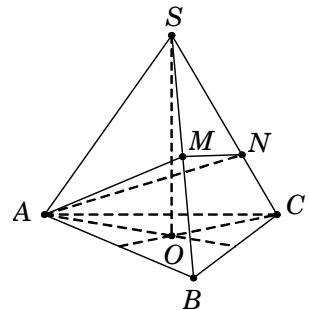
Lời giải. Gọi O là tâm của ΔABC , suy ra $SO \perp (ABC)$.

$$\text{Tam giác vuông } SOA, \text{ có } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3 \sqrt{11}}{12}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{ABCNM}}{V_{S.ABC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{ABCNM} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{11}}{18}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 90. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a . Mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Tính diện tích tam giác MNP biết mặt phẳng (P) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau.

- A. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. B. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. C. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$. D. $S_{\Delta MNP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải. Mặt phẳng $(P) \parallel (ABC)$ và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P .

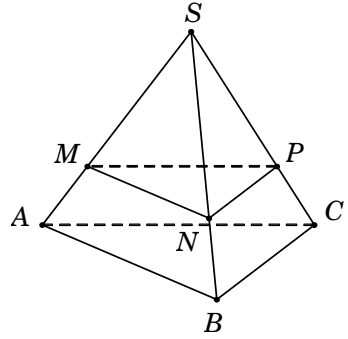
Theo Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = x$.

Do đó $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = x^3$.

Theo giả thiết $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Suy ra tam giác MNP là tam giác đều cạnh $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy diện tích $S_{\Delta MNP} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{4}}$. **Chọn D.**



Câu 91. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng (α) qua C và vuông góc với BD , cắt BD tại F và cắt AD tại E . Tính thể tích V của khối tứ diện $CDEF$.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{24}$. C. $V = \frac{a^3}{36}$. D. $V = \frac{a^3}{54}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CE$. (1)

Lại có $BD \perp (\alpha) \Rightarrow BD \perp CE$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CE \perp (ABD) \Rightarrow CE \perp AD$.

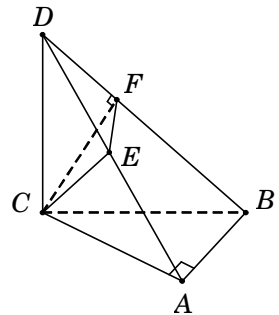
Tam giác vuông ABC , có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông DCB , có $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác vuông DCB , có $CD^2 = DF \cdot DB \Rightarrow \frac{DF}{DB} = \frac{CD^2}{DB^2} = \frac{1}{3}$.

Tương tự, ta cũng có $\frac{DE}{DA} = \frac{CD^2}{DA^2} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{V_{D.EFC}}{V_{D.ABC}} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DF}{DB} = \frac{1}{6} \rightarrow V_{D.EFC} = \frac{1}{6} \cdot V_{D.ABC} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a\right) = \frac{a^3}{36}$. **Chọn C.**



Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V và các điểm M, N, P thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

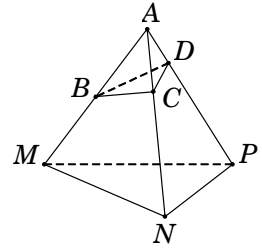
- A. $V_{AMNP} = \frac{V}{24}$. B. $V_{AMNP} = 8V$. C. $V_{AMNP} = 24V$. D. $V_{AMNP} = \frac{V}{8}$.

Lời giải. Từ giả thiết, suy ra

$$\frac{AB}{AM} = \frac{1}{2}; \quad \frac{AC}{AN} = \frac{1}{3}; \quad \frac{AD}{AP} = \frac{1}{4}.$$

Ta có $\frac{V_{A.BCD}}{V_{A.MNP}} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{AD}{AP} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$

Suy ra $V_{A.MNP} = 24.V_{A.BCD} = 24V.$ **Chọn C.**



Câu 92. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

- A. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. B. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. C. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

Lời giải. Thể tích khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a là $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

Gọi $P = EN \cap CD$ và $Q = EM \cap AD$.

Suy ra P, Q lần lượt là trọng tâm của $\triangle BCE$ và $\triangle ABE$.

Gọi S là diện tích tam giác BCD , suy ra $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BNE} = S.$

Ta có $S_{\triangle PDE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CDE} = \frac{S}{3}.$

Gọi h là chiều cao của tứ diện $ABCD$, suy ra

$$d[M, (BCD)] = \frac{h}{2}; \quad d[Q, (BCD)] = \frac{h}{3}.$$

Khi đó $V_{M.BNE} = \frac{1}{3} S_{\triangle BNE} \cdot d[M, (BCD)] = \frac{S \cdot h}{6}; \quad V_{Q.PDE} = \frac{1}{3} S_{\triangle PDE} \cdot d[Q, (BCD)] = \frac{S \cdot h}{27}.$

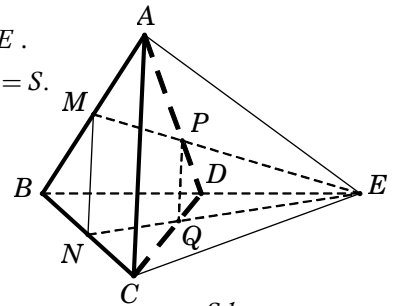
Suy ra $V_{PQD.NMB} = V_{M.BNE} - V_{Q.PDE} = \frac{S \cdot h}{6} - \frac{S \cdot h}{27} = \frac{7S \cdot h}{54} = \frac{7}{18} \cdot \frac{S \cdot h}{3} = \frac{7}{18} V_{ABCD}.$

Vậy thể tích khối đa diện chứa đỉnh A là $V = V_{ABCD} - V_{PQD.NMB} = \frac{11}{18} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}.$

Chọn B.

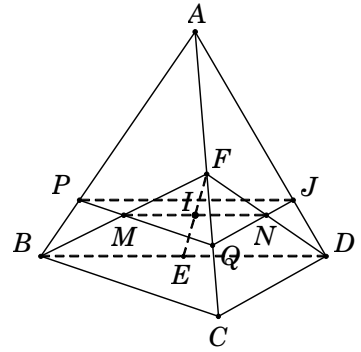
Câu 94. Mặt phẳng đi qua trọng tâm của tứ diện, song song với một mặt phẳng của tứ diện và chia khối tứ diện thành hai phần. Tính tỉ số thể tích (phần bé chia phần lớn) của hai phần đó.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{27}{37}$. D. $\frac{3}{4}$.



Lời giải. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, EF khi đó I là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Ta sẽ dựng mặt phẳng qua I song song với (BCD) .

Trong mặt phẳng (EBD) dựng đường thẳng qua I song song với BD cắt EB, ED lần lượt tại M, N . Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng lần lượt song song với BC, CD cắt AB, AC, AD lần lượt tại P, Q, J .



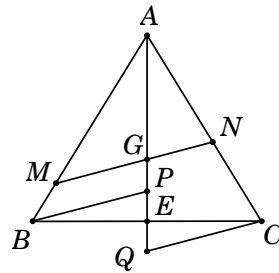
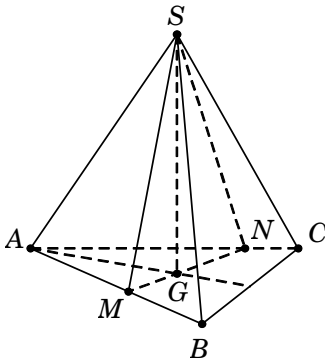
Do Q là trung điểm của $EC \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{3}{4}$, suy ra $\frac{AP}{AB} = \frac{AJ}{AD} = \frac{AQ}{AC} = \frac{3}{4}$.

Ta có $\frac{V_{A.PQJ}}{V_{A.BCD}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC} \cdot \frac{AJ}{AD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{V_{A.PQJ}}{V_{PQJBCD}} = \frac{27}{37}$. **Chọn C.**

Câu 95. Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh bằng 1. Mặt phẳng (P) đi qua điểm S và trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Tính thể tích nhỏ nhất V_{\min} của khối tứ diện $SAMN$.

- A. $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{18}$. B. $V_{\min} = \frac{4}{9}$. C. $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{27}$. D. $V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải. Gọi E là trung điểm của BC . Qua B, C lần lượt kẻ đường thẳng song song với MN và cắt đường thẳng AE tại P, Q .



Theo định lí Talet, ta có $\begin{cases} \frac{AB}{AM} = \frac{AP}{AG} \\ \frac{AC}{AN} = \frac{AQ}{AG} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AP}{AG} + \frac{AQ}{AG} = \frac{AP + AQ}{AG}$.

Mặt khác $\triangle BPE = \triangle CQE \rightarrow PE = QE \Rightarrow AP + AQ = (AE - PE) + (AE + QE) = 2AE$.

Do đó $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{2AE}{AG} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = 3$. Đặt $\begin{cases} AM = x \\ AN = y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

Vì $SABC$ là tứ diện đều $\Rightarrow SG \perp (ABC)$ và $SG = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $V_{SAMN} = \frac{1}{3} S_{\triangle AMN} \cdot SG = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AM \cdot AN \sin 60^\circ \right) \cdot SG = \frac{\sqrt{2}}{12} AM \cdot AN = \frac{\sqrt{2}}{12} xy$.

Ta có $3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow xy \geq \frac{4}{9} \Rightarrow V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{27}$. **Chọn C.**

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Gọi M, N lần lượt là điểm thuộc các cạnh AB, CD sao cho $MA = MB, ND = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MBCN$.

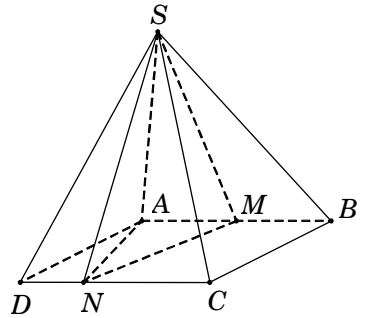
- A. $V = 8$. B. $V = 20$. C. $V = 28$. D. $V = 40$.

Lời giải. Gọi d là khoảng cách từ đỉnh A đến cạnh CD .

Diện tích hình bình hành $S_{ABCD} = AB.d$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{MBCN} &= S_{ABCD} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle ADN} \\ &= AB.d - \frac{1}{2}AM.d - \frac{1}{2}DN.d = AB.d - \frac{1}{4}AB.d - \frac{1}{6}AB.d \\ &= \frac{7}{12}AB.d = \frac{7}{12}S_{ABCD}. \end{aligned}$$

Vậy $V_{S.MBCN} = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} = \frac{7}{12}.48 = 28$. **Chọn C.**



Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính tỷ số k của thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ chia cho thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = \frac{1}{4}$. C. $k = \frac{1}{8}$. D. $k = \frac{1}{16}$.

Lời giải. Lưu ý: Tỷ số thể tích chỉ áp dụng cho khối chóp tam giác nên nếu đây là tứ giác ta chia đáy thành hai tam giác.

Ta có $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'}$.

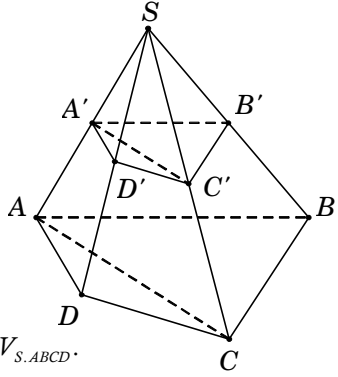
$$\text{Mà } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Suy ra $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{8}V_{S.ABC}$.

Tương tự ta cũng có $V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{8}V_{S.ADC}$.

$$\text{Vậy } V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} + \frac{1}{8}V_{S.ADC} = \frac{1}{8}(V_{S.ABC} + V_{S.ADC}) = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$$

Suy ra $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$. **Chọn C.**



Câu 98. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng V . Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng (α) qua A' và song song với đáy $(ABCD)$ cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D' . Tính thể tích V' của khối chóp $S.A'B'C'D'$.

- A. $V' = \frac{V}{3}$. B. $V' = \frac{V}{9}$. C. $V' = \frac{V}{27}$. D. $V' = \frac{V}{81}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3}$. Tương tự $\frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{3}$.

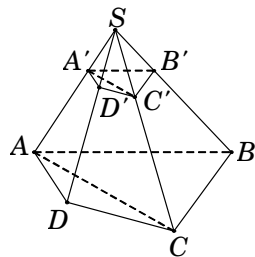
Ta có $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'}$.

$$\text{Mà } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

$$\longrightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{27} V_{S.ABC}.$$

Tương tự ta cũng có $V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{27} V_{S.ADC}$.

$$\text{Vậy } V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{27} V_{S.ABC} + \frac{1}{27} V_{S.ADC} = \frac{1}{27} (V_{S.ABC} + V_{S.ADC}) = \frac{1}{27} V_{S.ABCD} = \frac{V}{27}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC . Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{8}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{8}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$.

Lời giải. Kẻ $MN \parallel CD$ ($N \in CD$), suy ra $ABMN$ là thiết diện của khối chóp.

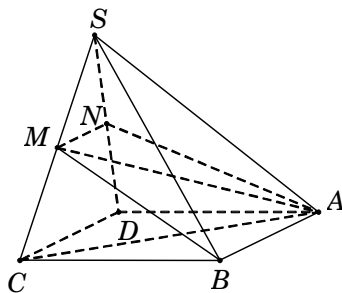
Ta có $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}$.

$$\bullet \frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}.$$

$$\bullet \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABMN} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} + \frac{1}{8} V_{S.ABCD} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABMNDC} = \frac{5}{8} V_{S.ABCD} \text{ nên } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $BA = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính thể tích V của khối chóp $S.AHCD$.

- A. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. C. $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. D. $V = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

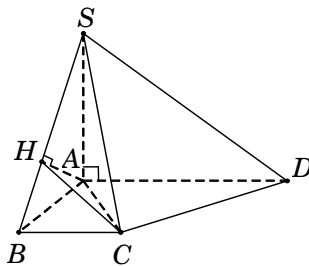
Lời giải. Tam giác vuông SAB , có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{3}$.

Ta có $V_{S.AHCD} = V_{S.ACD} + V_{S.AHC}$.

$$\bullet V_{S.ACD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ACD} \cdot SA = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AD \cdot AB \right) SA = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\bullet \frac{V_{S.AHC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.AHC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.AHCD} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}. \text{ Chọn B.}$$



Câu 101. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi N là trung điểm SB , M là điểm đối xứng với B qua A . Mặt phẳng (MNC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$.

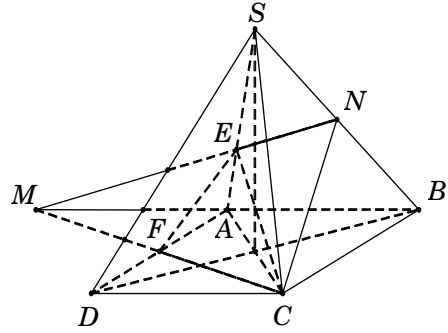
C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{9}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{13}$.

Lời giải. Gọi h, S lần lượt là chiều cao và diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S.h$.

Nối MN cắt SA tại E , MC cắt AD tại F . Tam giác SBM có A, N lần lượt là trung điểm của BM và SB suy ra E là trọng tâm tam giác SBM . Tứ giác $ACDM$ là hình vuông nên F là trung điểm MC .



Ta có $V_{BNC.AEF} = V_{ABCEN} + V_{E.ACF}$.

• $\frac{V_{S.ENC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow V_{S.ENC} = \frac{1}{3}V_{S.ABC}$

$\rightarrow V_{ABCEN} = \frac{2}{3}V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}V_{S.ABCD} \right) = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

• $V_{E.ACF} = \frac{1}{3}S_{\Delta ACF} \cdot d[E, (ACF)] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{12}V_{S.ABCD}$.

Do đó $V_{BNC.AEF} = V_{ABCEN} + V_{E.ACF} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} + \frac{1}{12}V_{S.ABCD} = \frac{5}{12}V_{S.ABCD} = V_1$.

Suy ra $V_2 = \frac{7}{12}V_{S.ABCD} \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{7}$. **Chọn A.**

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k$. Xác định k sao cho mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $k = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

B. $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $k = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

D. $k = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải. Kẻ $MN \parallel AD$ ($N \in SD$) $\rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SA} = k$. Khi đó mặt phẳng (MBC) chia khối chóp thành hai phần là $S.MBCN$ và $AMBDNC$.

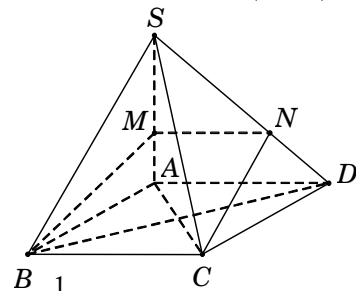
Ta có $V_{S.MBCN} = V_{S.MBC} + V_{S.MCN}$.

• $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow V_{S.MBC} = k.V_{S.ABC}$.

• $\frac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = k^2 \Rightarrow V_{S.MCN} = k^2.V_{S.ACD}$.

Từ giả thiết, ta có $V_{S.MBCN} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Rightarrow k.V_{S.ABC} + k^2.V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

$\rightarrow k \cdot \frac{V_{S.ABCD}}{2} + k^2 \cdot \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \rightarrow k + k^2 = 1 \rightarrow k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn B.**



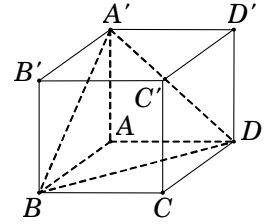
Câu 103. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $V = 6V_1$. B. $V = 4V_1$. C. $V = 3V_1$. D. $V = 2V_1$.

Lời giải. Ta có $V = S_{ABCD} \cdot AA'$ và $V_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot AA'$.

$$\text{Mà } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \longrightarrow \frac{V}{V_1} = 6.$$

Suy ra $V = 6V_1$. **Chọn A.**



Câu 104. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi D là trung điểm AC . Tính tỉ số k của thể tích khối tứ diện $B'BAD$ và thể tích khối lăng trụ đã cho.

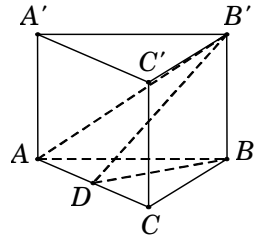
- A. $k = \frac{1}{4}$. B. $k = \frac{1}{12}$. C. $k = \frac{1}{3}$. D. $k = \frac{1}{6}$.

Lời giải. Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot BB'$ và

$$V_{B'BAD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BAD} \cdot BB'.$$

$$\text{Mà } S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \longrightarrow k = \frac{V_{B'BAD}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}.$$

Chọn D.



Câu 105. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Mặt phẳng $(A'DE)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích (phần bé chia phần lớn) của chúng.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{23}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{4}{27}$.

Lời giải. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Gọi } E \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}.$$

Đường thẳng d đi qua G và song song BC , cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N .

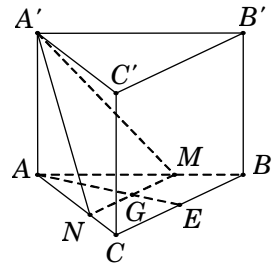
$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = \frac{2}{3} AB \\ AN = \frac{2}{3} AC \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' \text{ và } V_{A'.AMN} = \frac{1}{3} S_{\triangle AMN} \cdot AA'. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } V_{A'.AMN} = \frac{4}{27} V_{ABC.A'B'C'} \longrightarrow V_{BMNC.A'B'C'} = \frac{23}{27} V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{A'.AMN}}{V_{BMNC.A'B'C'}} = \frac{4}{23}. \text{ **Chọn B.**}$$



Câu 106. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCC'B'$.

- A. $V = 8\sqrt{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

Suy ra HC' là hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

$$\text{Do đó } 60^\circ = \widehat{AC', (A'B'C')} = \widehat{AC', HC'} = \widehat{AC'H}.$$

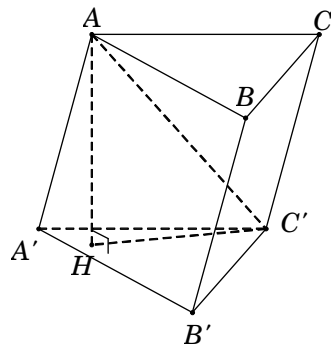
$$\text{Tam giác } AHC', \text{ có } AH = AC' \cdot \sin \widehat{AC'H} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } S_{\Delta ABC} = \frac{AC^2}{2} = 4.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AH = 8\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} S_{\Delta A'B'C'} \cdot AH = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = \frac{16\sqrt{3}}{3}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 107. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Các điểm M, N, P thỏa mãn điều kiện $\overline{AM} = 2\overline{AC}$, $\overline{AN} = 3\overline{AB'}$ và $\overline{AP} = 4\overline{AD'}$. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$ theo V .

- A. $V_{AMNP} = 8V$. B. $V_{AMNP} = 4V$. C. $V_{AMNP} = 6V$. D. $V_{AMNP} = 12V$.

Lời giải. Ta có $V = V_{AB'D'C} + (V_{AA'B'D'} + V_{CC'B'D'} + V_{D'DAC} + V_{B'BAC})$.

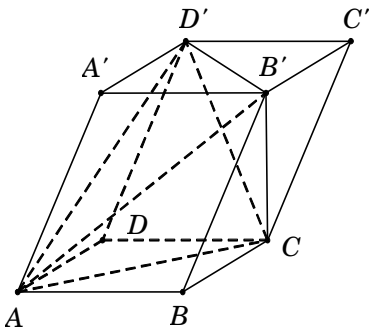
$$\text{Mà } V_{AA'B'D'} = V_{CC'B'D'} = V_{D'DAC} = V_{B'BAC} = \frac{V}{6}.$$

$$\text{Suy ra } V_{AB'D'C} = \frac{V}{3}.$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có } \frac{AB'}{AN} = \frac{1}{3}, \frac{AC}{AM} = \frac{1}{2}, \frac{AD'}{AP} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{A.B'D'C}}{V_{A.NPM}} = \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AD'}{AP} \cdot \frac{AC}{AM} = \frac{1}{24}$$

$$\longrightarrow V_{A.NPM} = 24V_{A.B'D'C} = 24 \cdot \frac{V}{3} = 8V. \text{ Chọn A.}$$



Nhận xét: Công thức giải nhanh: Thể tích của khối tứ diện (4 đỉnh nằm trên hai đường chéo của hai mặt đối diện) có thể tích bằng $\frac{1}{3}$ của khối lăng trụ tam giác.

Câu 108. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích V' của khối đa diện $ABC.MNP$.

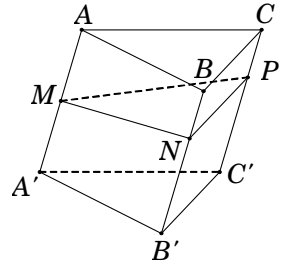
- A. $V' = \frac{2}{3}V$. B. $V' = \frac{9}{16}V$. C. $V' = \frac{20}{27}V$. D. $V' = \frac{11}{18}V$.

Lời giải. Công thức giải nhanh $V_{ABC.MNP} = \left(\frac{m+n+p}{3}\right)V$

với $m = \frac{AM}{AA'}$, $n = \frac{BN}{BB'}$, $p = \frac{CP}{CC'}$.

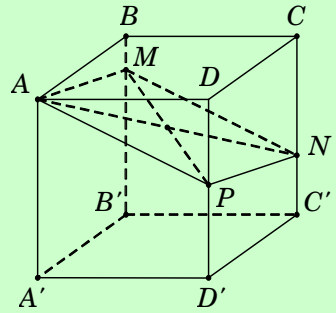
Áp dụng: $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{2}{3}$, ta được $V_{ABC.MNP} = \frac{11}{18}V$.

Chọn D.



Câu 109. Người ta cần cắt một khối lập phương thành hai khối đa diện bởi một mặt phẳng đi qua A (như hình vẽ) sao cho phần thể tích của khối đa diện chứa điểm B bằng một nửa thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{CN}{CC'}$.

- A. $k = \frac{1}{3}$. B. $k = \frac{2}{3}$.
C. $k = \frac{3}{4}$. D. $k = \frac{1}{2}$.



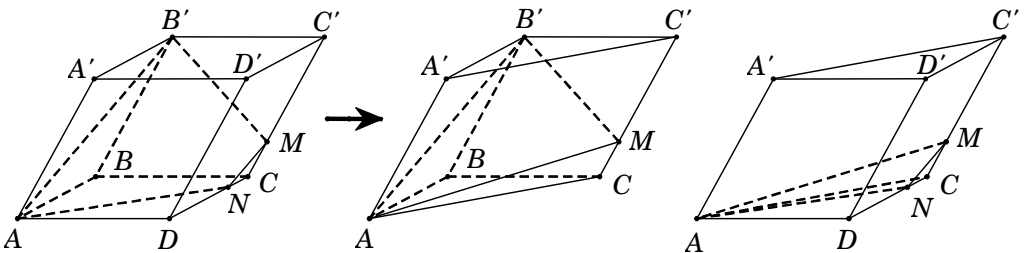
Lời giải. Công thức giải nhanh $\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{0 + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'}}{2}$.

Theo giả thiết, ta có $\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{0 + \frac{CN}{CC'}}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{CN}{CC'} = \frac{2}{3}$. **Chọn B.**

Câu 110. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $CC' = 4CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 . Gọi V_1 là phần có chứa điểm B . Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

- A. $k = \frac{7}{32}$. B. $k = \frac{7}{16}$. C. $k = \frac{7}{25}$. D. $k = \frac{25}{32}$.

Lời giải. Trong mặt phẳng $(CDD'C')$, kẻ $MN \parallel C'D$ với $N \in CD$. Suy ra $CN = \frac{1}{4}CD$ và V_1 là khối đa diện $ABB'NCM$.



Ta chia khối hộp thành hai phần (như hình vẽ). Khi đó $V_{ABB'.NCM} = V_{ABB'CM} + V_{MACN}$.

$$\bullet V_{ABB'CM} = \frac{0 + \frac{1}{4} + 1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}V\right).$$

$$\bullet V_{MACN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V_{C'.ADC} = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{3}V_{ADC.A'D'C'}\right) = \frac{1}{96}V.$$

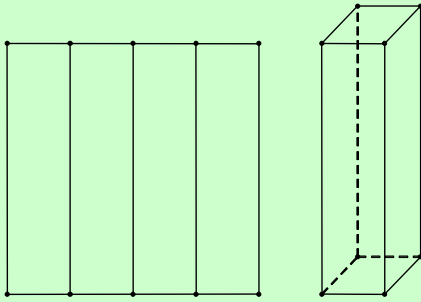
Vậy $V_1 = V_{ABCMB'} + V_{MACN} = \frac{7}{32}V \longrightarrow V_2 = \frac{25}{32}V \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{25}$. **Chọn C.**

Nhận xét. Ta có $V_{MACN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V_{C'.ADC}$ vì diện tích giảm 4 lần và chiều cao giảm 4 lần.

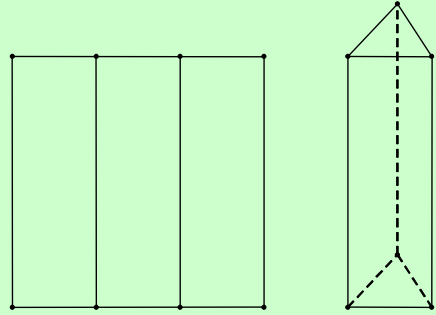
Câu 141. Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh a , người ta gấp thành hình lăng trụ theo hai cách sau:

● Cách 1. Gấp thành 4 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tứ giác đều có thể tích là V_1 (Hình 1).

● Cách 2. Gấp thành 3 phần đều nhau rồi dựng lên thành một hình lăng trụ tam giác đều có thể tích là V_2 (Hình 2).



Hình 1



Hình 2

Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $k = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

C. $k = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

D. $k = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải. Gọi cạnh hình vuông là a .

Khi đó $V_1 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot a = \frac{a^3}{16}$ và $V_2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. Suy ra $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn C.**

Câu 142. Một người cần làm một hình lăng trụ tam giác đều từ tấm nhựa phẳng để có thể tích là $6\sqrt{3}\text{cm}^3$. Để ít hao tổn vật liệu nhất thì cần tính độ dài các cạnh của khối lăng trụ tam giác đều này bằng bao nhiêu?

A. Cạnh đáy bằng $2\sqrt{6}\text{cm}$ và cạnh bên bằng 1cm .

B. Cạnh đáy bằng $2\sqrt{3}\text{cm}$ và cạnh bên bằng 2cm .

C. Cạnh đáy bằng $2\sqrt{2}\text{cm}$ và cạnh bên bằng 3cm .

D. Cạnh đáy bằng $4\sqrt{3}\text{cm}$ và cạnh bên bằng $\frac{1}{2}\text{cm}$.

Lời giải. Giả sử hình lăng trụ tam giác đều cần làm là

$ABC.A'B'C'$ có độ dài $AB = x$, $AA' = h$.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ và $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2h$.

Theo giả thiết $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2h = 6\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{24}{x^2}$.

Để ít tổn vật liệu nhất thì diện tích toàn phần của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là nhỏ nhất.

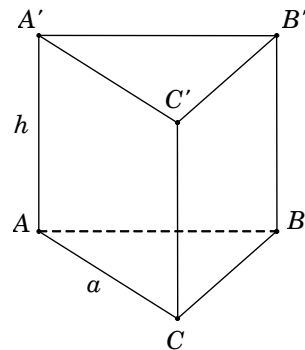
Gọi S_p là tổng diện tích các mặt của khối lăng trụ

$ABC.A'B'C'$, ta có

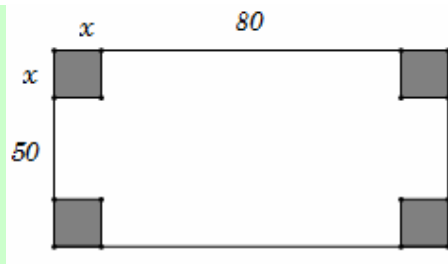
$$S_p = 2S_{\Delta ABC} + 3S_{ABB'A'} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3hx = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{72}{x}.$$

Khảo sát $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{72}{x}$ trên $(0; +\infty)$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 2\sqrt{3}$.

Với $x = 2\sqrt{3}\text{cm} \rightarrow h = 2\text{cm}$. **Chọn B.**



Câu 143. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $80\text{cm} \times 50\text{cm}$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$, rồi gập tấm nhôm lại thì được một cái thùng không nắp dạng hình hộp. Tính thể tích lớn nhất V_{\max} của hộp tạo thành.



A. $V_{\max} = 18000\text{cm}^3$.

B. $V_{\max} = 28000\text{cm}^3$.

C. $V_{\max} = 38000\text{cm}^3$.

D. $V_{\max} = 8000\text{cm}^3$.

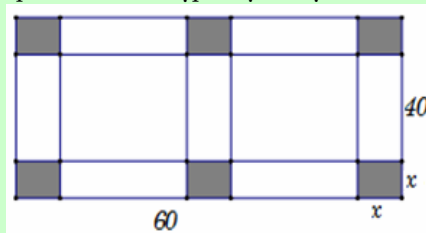
Lời giải. Hình hộp được tạo thành có kích thước: chiều dài $80 - 2x(\text{cm})$, chiều rộng $50 - 2x(\text{cm})$, chiều cao $x(\text{cm})$.

Suy ra thể tích thùng tạo thành $V = x(80 - 2x)(50 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

Khảo sát $f(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$ trên $(0; 25)$, được $\max_{(0; 25)} f(x) = f(10) = 18000\text{cm}^3$.

Chọn A.

Câu 144. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước $60\text{cm} \times 40\text{cm}$. Người ta cắt 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng $x\text{cm}$, rồi gập tấm bìa lại để được một hộp có nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = \frac{20}{3}\text{cm}$.

B. $x = 4\text{cm}$.

C. $x = 5\text{cm}$.

D. $x = \frac{10}{3}\text{cm}$.

Lời giải. Các kích thước khối hộp lần lượt là: $\frac{60 - 3x}{2}$; $40 - 2x$; x .

Khi đó $V_{\text{hộp}} = \left(\frac{60 - 3x}{2}\right)(40 - 2x)x = 3x^3 - 120x^2 + 1200x = f(x)$.

Khảo sát hàm $f(x)$ với $0 < x < 20$, ta được $f(x)$ lớn nhất khi $x = \frac{20}{3}$.

Chọn A.

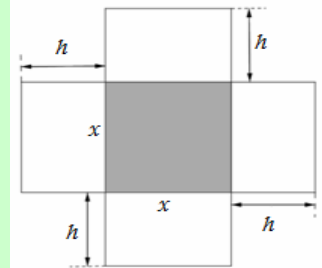
Câu 145. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao là $h(\text{cm})$ và thể tích là 500cm^3 . Tìm độ dài cạnh hình vuông x sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.

A. $x = 2\text{cm}$.

B. $x = 3\text{cm}$.

C. $x = 5\text{cm}$.

D. $x = 10\text{cm}$.



Lời giải. Thể tích khối hộp $V = x.x.h = x^2h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}$.

Để chiếc hộp làm ra ít tốn bìa các tông nhất khi và chỉ khi diện tích toàn phần của hộp là nhỏ nhất.

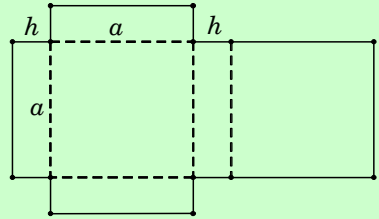
Diện tích toàn phần của hộp (không nắp) $S_{\text{tp}} = S_{\text{đáy}} + S_{\text{xung quanh}} = x.x + 4.hx = x^2 + 4hx$

$$x^2 + 4x \cdot \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x} = x^2 + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{x} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 3\sqrt[3]{1000^2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1000}{x} = \frac{1000}{x} \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10$. **Chọn D.**

Cách 2. Xét hàm $f(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$ với $x > 0$.

Câu 146. Một người đã cắt tấm bìa các tông và đặt kích thước như hình vẽ. Sau đó bạn ấy gấp theo đường nét đứt thành cái hộp hình hộp chữ nhật. Hình hộp có đáy là hình vuông cạnh a (cm), chiều cao h (cm) và diện tích toàn phần bằng $6m^2$. Tổng $(a+h)$ bằng bao nhiêu để thể tích hộp là lớn nhất.



- A. $x+h=2\text{cm}$. B. $x+h=3\text{cm}$. C. $x+h=4\text{cm}$. D. $x+h=6\text{cm}$.

Lời giải. Diện tích toàn phần $S_{\text{tp}} = 4ah + 2a^2 = 6 \Rightarrow h = \frac{6-2a^2}{4a}$.

Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.a.h = a^2 \cdot \frac{6-2a^2}{4a} = \frac{6a-2a^3}{4}$.

Khảo sát hàm $f(a) = \frac{6a-2a^3}{4}$ trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, ta được $f(a)$ lớn nhất tại $a=1$.

Với $a=1 \rightarrow h=1 \rightarrow a+h=2\text{cm}$. **Chọn A.**

Câu 147. Một xưởng sản xuất những thùng bằng nhôm hình hộp chữ nhật không nắp và có các kích thước x, y, z (dm). Biết tỉ số hai cạnh đáy là $x:y=1:3$, thể tích khối hộp bằng 18dm^3 . Để tốn ít vật liệu nhất thì tổng $x+y+z$ bằng:

- A. 10dm. B. $\frac{19}{2}$ dm. C. 26dm. D. $\frac{26}{3}$ dm.

Lời giải. Ta có $x:y=1:3 \Rightarrow y=3x$.

Theo giả thiết, ta có $xyz=18 \Rightarrow z=\frac{6}{x^2}$.

Tổng diện tích vật liệu (nhôm) cần dùng là:

$$S_{\text{tp}} = S_{\text{day}} + S_{\text{xungquanh}} \quad (\text{do hộp không nắp})$$

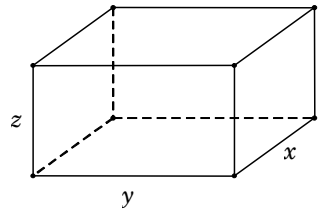
$$= xy + 2(xz + yz) = x \cdot 3x + 2\left(x \cdot \frac{6}{x^2} + 3x \cdot \frac{6}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{48}{x}.$$

Xét hàm $f(x) = 3x^2 + \frac{48}{x}$ trên $(0; +\infty)$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x=2$.

Khi $x=2 \rightarrow y=6, z=\frac{3}{2} \rightarrow x+y+z = \frac{19}{2}$ dm. **Chọn A.**

Cách 2. BĐT Côsi $3x^2 + \frac{48}{x} = 3\left(x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}\right) \geq 3 \cdot 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 36$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{x} = \frac{8}{x} \rightarrow x=2$.



Câu 148. Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là 60cm, thể tích 96000cm^3 . Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100.000 đồng/ m^2 . Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

- A. 320.000 đồng. B. 32.000 đồng. C. 83.200 đồng. D. 68.800 đồng.

Lời giải. Gọi $x(m)$, $y(m)$ ($x > 0, y > 0$) là chiều dài và chiều rộng của đáy bể.

Theo giả thiết, ta có: $0,6xy = 0,096 \Rightarrow y = \frac{0,16}{x}$.

Diện tích mặt đáy: $S_{\text{day}} = xy = x \cdot \frac{0,16}{x} = 0,16$

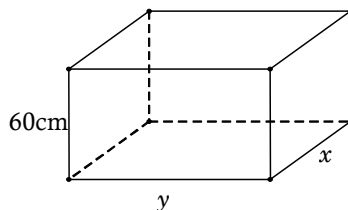
→ giá tiền $0,16 \times 100.000 = 16.000$ đồng.

Diện tích xung quanh: $S_{\text{xung quanh}} = 2x \cdot 0,6 + 2y \cdot 0,6 = 1,2 \left(x + \frac{0,16}{x} \right)$

→ giá tiền $1,2 \left(x + \frac{0,16}{x} \right) \cdot 70000 = 84000 \left(x + \frac{0,16}{x} \right)$ đồng.

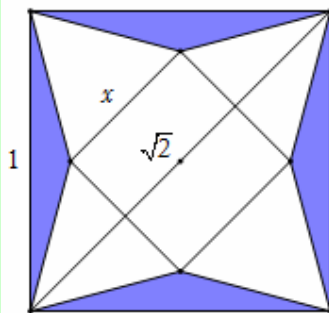
Suy ra tổng chi phí $f(x) = 84000 \left(x + \frac{0,16}{x} \right) + 16000$

$\stackrel{\text{Così}}{\geq} 84000 \cdot 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{0,16}{x}} + 16000 = 83.200$ đồng. **Chọn C.**



Câu 149. Người ta cắt một tờ giấy hình vuông cạnh bằng 1 để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp như hình vẽ. Để thể tích khối chóp lớn nhất thì cạnh đáy x của hình chóp bằng:

- A. $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$. B. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.
 C. $x = 2\sqrt{2}$. D. $x = \frac{2}{5}$.



Lời giải. Ta có

$$BM = BO - MO = \frac{1}{2} AB - MO = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}.$$

Chiều cao của hình chóp:

$$h = \sqrt{BM^2 - MO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 - x\sqrt{2}}{2}}.$$

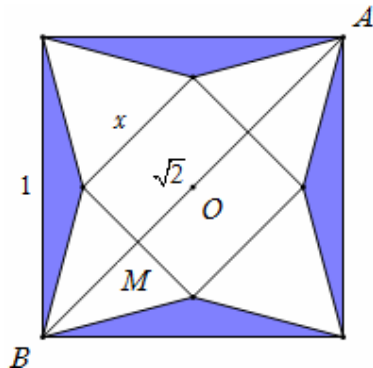
Suy ra thể tích của khối chóp:

$$V = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{\frac{1 - x\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x^4 - x^5\sqrt{2}}{2}}.$$

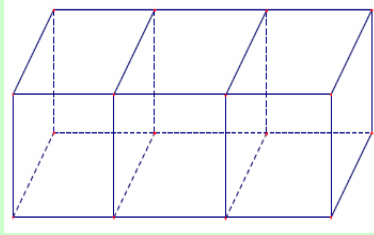
Khảo sát hàm $f(x) = x^4 - x^5\sqrt{2}$ trên $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ta được $f(x)$ lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Chọn B.

Cách làm trắc nghiệm. Đầu tiên ta loại đáp án C do $x = 2\sqrt{2} \notin \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Thay ba đáp án còn lại vào hàm số $f(x) = x^4 - x^5\sqrt{2}$. So sánh kết quả nào lớn nhất ta chọn. Nếu đề bài hỏi giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp thì ta không làm theo cách này được.

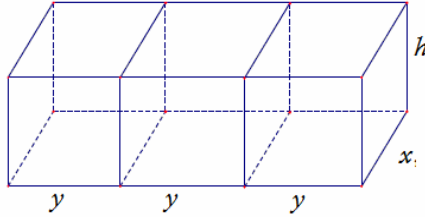


Câu 150. Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152m^2 và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).



- A. $16\text{m} \times 24\text{m}$. B. $8\text{m} \times 48\text{m}$. C. $12\text{m} \times 32\text{m}$. D. $24\text{m} \times 32\text{m}$.

Lời giải. Đặt x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao mỗi phòng.



Theo giả thiết, ta có $x \cdot 3y = 1152 \longrightarrow y = \frac{384}{x}$.

Để tiết kiệm chi phí nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có $S_{\text{tp}} = 4xh + 6yh + 3xy = 4xh + 6 \cdot \frac{384}{x}h + 1152 = 4h \left(x + \frac{576}{x} \right) + 1152$.

Vì h không đổi nên S_{tp} nhỏ nhất khi $f(x) = x + \frac{576}{x}$ (với $x > 0$) nhỏ nhất.

Khảo sát $f(x) = x + \frac{576}{x}$ với $x > 0$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 24 \longrightarrow y = 16$.

Chọn A.

Cách 2. BĐT Côsi $x + \frac{576}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{576}{x}} = 48$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{576}{x} \rightarrow x = 24$.