UBND HUYỆN ĐÔNG HƯNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN NGUỒN HỌC SINH GIỎI VÒNG 5
MÔN TOÁN 9
NĂM HỌC 2024 – 2025
(Thời gian làm bài: 120 phút)

<u>Bài 1:</u> (5,0 điểm).

1. Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\dfrac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$

a. Rút gọn P b. Tính giá trị của P khi $x=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ c. Tìm giá trị lớn nhất của P.

2. Cho $x=\dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của $\mathrm{P}=\left(12\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}-55\right)^{2025}$.

<u>Bài 2:</u> (4,0 điểm): Cho phương trình $(m^2+5)x^2-2mx-6m=0(1)$ với m là tham số.

a. Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b. Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện.

$$\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16$$

<u>Bài 3:</u> (4,0 điểm)

1. Bạn Phong đi siêu thị nếu mua 1 chiếc áo polo Lacoste và 1 đôi giày hãng Li-Ning theo giá niêm yết hết 800 000 đồng. Nhưng gặp đợt khuyến mãi nên 1 chiếc áo polo Lacoste giảm 5% và 1 đôi giày hãng Li-Ning giảm 10%, vì vậy bạn Phong chỉ phải trả 735 000 đồng.

a. Hãy tính giá niêm yết ban đầu của 1 chiếc áo polo Lacoste và 1 đôi giày hãng Li-Ning ?

b. Ngoài ra, siêu thị có thêm ưu đãi nếu khách hàng có hóa đơn từ 2 000 000 đồng trở lên sẽ được giảm tiếp 10% trên tổng số tiền đã mua. Trong dịp này, bạn Phong đã mua 4 chiếc áo polo Lacoste và 2 đôi giày hãng Li-Ning. Hỏi bạn Phong trả hết tất cả bao nhiêu tiền ?

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3+3x^2+6x-3y+4=0\\ x^2+y^2-3x=1\end{cases}$

<u>Bài 4</u> (6 điểm). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là một điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Trên MA lấy điểm I sao cho MI = MB.

a. Chứng minh rằng $\Delta ABI=\Delta CBM$ suy ra MA = MB + MC.

b. Gọi D là giao điểm của MA và BC. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{MC}=\dfrac{1}{MD}$

c. Chứng minh rằng $MA^2+MB^2+MC^2=2AB^2$

<u>Bài 5:</u> (1,0 điểm**)** Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn x + y + z = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\mathrm{T}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$

---Hết---

HƯỚNG DẪN CHẤM

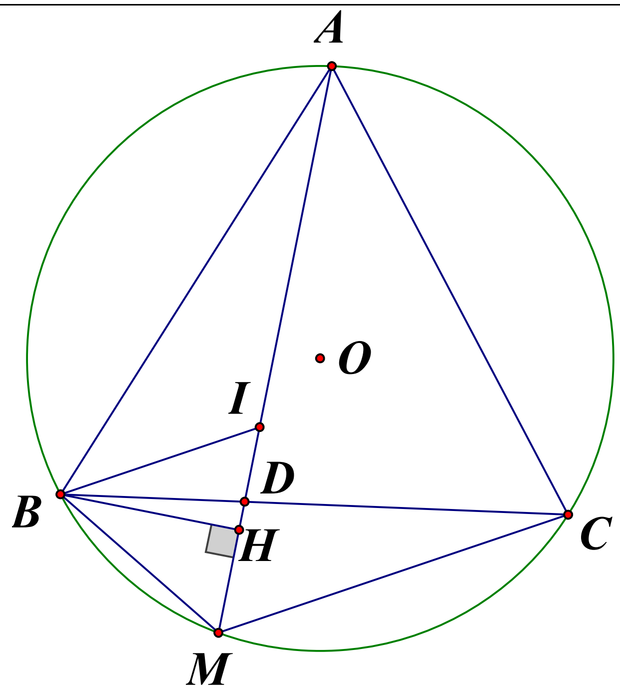
Bài	ý	Đáp án và hướng dẫn chấm	Điểm
1	1a) 1.5đ	$P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\dfrac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$	
		ĐKXĐ x, y≥ 0; xy $\neq 1$	0.25
		$P=\left(\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{xy}\right)}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}+\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}\right):\dfrac{1-xy+x+y+2xy}{1-xy}$	0.25
		$P=\dfrac{\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}:\dfrac{x+y+xy+1}{1-xy}$	0.25
		$P=\dfrac{2\sqrt{x}+2y\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}:\dfrac{(x+1)(y+1)}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}$	0.25
		$P=\dfrac{2\sqrt{x}\left(1+y\right)}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}.\dfrac{\left(1+\sqrt{xy}\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(x+1\right)\left(y+1\right)}$	0.25
		$P=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$	
		Với x ≥ 0 ; y≥ 0; xy $\neq 1$ thì $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$	0.25
	1b) 1.0đ	ĐKXĐ x, y≥ 0; xy $\neq 1$	
		$x=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{1}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2\,(tm)$	0.25
		suy ra $\sqrt{x}=\sqrt{3}+1$	0.25
		nên $P=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{4+2\sqrt{3}+1}=\dfrac{6\sqrt{3}-2}{13}$	0.25
		Với $x=\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ thì P $=\dfrac{6\sqrt{3}-2}{13}$	0.25

	1c) **1.0đ**	ĐK: x ≥ 0 ; y ≥ 0; xy ≠ 1 Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số không âm ta được: $x+1\geq 2\sqrt{x}$ $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\leq\dfrac{x+1}{x+1}=1$ P_{max} = 1 khi và chỉ khi x = 1 Kết hợp với đk suy ra x =1; y ≥ 0; y ≠ 1 Vậy x =1; y ≥ 0; y ≠ 1 thì P_{max} = 1	**0.25** **0.25** **0.25** **0.25**
	2) **1.5đ**	Ta có : $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}\left(\sqrt{3}-1\right)$	**0,25**
		$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}$	**0,25**
		$x=\dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-\sqrt{5}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}=\dfrac{3-1}{1}=2$ (TMĐK)	**0,5**
		Thay giá trị của x vào P ta được: $\text{P}=\left(12.2^2+4.\,2-55\right)^{2025}=1^{2025}=1$ Vậy giá trị của $P=1$ tại $x=\dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$	**0,5**
2	**a)** **2.0đ**	$(m^2+5)x^2-2mx-6m=0$ (1) * Phương trình (1) có $a=m^2+5>0$ $\Delta'=m^2+(m^2+5).6m$ $\Delta'=m^2+6m^3+30m$ Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thì $\Delta'>0$ suy ra $m^2+6m^3+30m>0$ suy ra $m(6m^2+m+30)>0$ suy ra $m\left[5m^2+\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{119}{4}\right]>0$ suy ra $m>0$ vì $5m^2+\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{119}{4}>0$	**0,25** **0.25** **0.25**

		Vậy với m > 0 thì phương trình có hai nghiệm phân biệt. * Khi đó theo định lý Viète ta có: $x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5}$ Xét $m^2+5-2m=(m-1)^2+4>0$. Mà m > 0 => $m^2+5>2m>0$ $=>0<\dfrac{2m}{m^2+5}<1=>0<x_1+x_2<1$ Vậy tổng hai nghiệm của phương trình (1) không thể là số nguyên.	**0,25** **0,25** **0,25** **0,25** **0,25**
	b) **2.0đ**	Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ suy ra $\Delta'\geq 0$ suy ra m$\left[5m^2+\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{119}{4}\right]\geq 0$ suy ra $m\geq 0$ Với $m\geq 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ Khi đó, theo định lý Viète: $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5}\\x_1x_2=\dfrac{-6m}{m^2+5}\end{cases}$ Ta có: $(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2})^4=16$ suy ra $x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2$ hoặc $x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2$ $TH1: x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2$ suy ra $\dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=2(2)$ Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}\geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2-t-2=0$	**0,25** **0,25** **0,25** **0,25** **0,25**

		Xét $\Delta = 1^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0$ suy ra phương trình (2) vô nghiệm. $TH2: x_1x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2$ suy ra $\frac{-6m}{m^2+5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}} = -2(3)$ Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}} \geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2 - t + 2 = 0$ suy ra : t = -1(ktm) hoặc t = $\frac{2}{3}$(tm) $t = \frac{2}{3}$ $\frac{2m}{m^2+5} = \frac{4}{9}$ $4m^2 - 18m + 20 = 0$ $(m-2)(4m-10) = 0$ Suy ra : m = 2 (tm) hoặc m = $\frac{5}{2}$(tm) Vậy $m \in \left\{2; \frac{5}{2}\right\}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.	**0,25** **0,25** **0.25**
3	**1a)** **1.25đ**	Gọi giá niêm yết của 1 chiếc áo polo Lacoste và 1 đôi giày hãng Li-Ning lần lượt là x, y (nghìn đồng) ($x, y > 0$) Theo bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 800 \\ 0,95x + 0,9y = 735 \end{cases}$ Giải được $\begin{cases} x = 300(tm) \\ y = 500(tm) \end{cases}$ Vậy giá niêm yết của chiếc áo polo Lacoste và 1 đôi giày hãng Li-Ning lần lượt là 300.000 đồng và 500.000 đồng.	**0.25** **0.25** **0.5** **0.25**

	1b) **0.75đ**	Số tiền bạn Phong trả khi mua 4 chiếc áo polo Lacoste và 2 đôi giày hãng Li-Ning là: $4.300.0,95+2.500.0,9=2040$ (nghìn đồng) Do hóa đơn từ 2 000 000 đồng trở lên sẽ được giảm tiếp 10% nên số tiền bạn Phong phải trả là: $2040.0,9=1836$ (nghìn đồng) Vậy số tiền bạn Phong đã trả là 1 836 000 đồng	**0.25** **0.25** **0.25**
	2) **2.0đ**	$\begin{cases} x^3-y^3+3x^2+6x-3y+4=0(1) \\ x^2+y^2-3x=1(2) \end{cases}$ Từ PT(1) ta được: $x^3+3x^2+3x+1-y^3+3x-3y+3=0$ $(x+1)^3-y^3+3x-3y+3=0$ $(x+1-y)\left[(x+1)^2+(x+1)y+y^2\right]+3\cdot(x+1-y)=0$ $(x+1-y)\left[(x+1)^2+(x+1)y+y^2+3\right]=0$ suy ra x + 1 – y = 0 do $(x+1)^2+(x+1)y+y^2+3>0$ mọi x, y. suy ra y = x + 1 Thay y = x + 1 vào phương trình (2) ta được: $2x^2-x=0$ $x(2x-1)=0$ x = 0 hoặc x = $\frac{1}{2}$ + Với x = 0 suy ra r = 1 + Với x = $\frac{1}{2}$ suy ra y = $\frac{3}{2}$ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là (0;1); $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$	**0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25**

4			
	a **(2đ)**	C/m được tam giác MBI đều	**0,5**
		Suy ra $\widehat{IBM} = 60^0$	**0,25**
		Do đó $\widehat{ABI} = \widehat{CBM}$	**0,25**
		C/m $\Delta ABI = \Delta CBM\,(c.g.c)$	**0,5**
		Suy ra AI = MC	**0,25**
		Từ đó suy ra MA = MB + MC	**0,25**
	b **(2đ)**	C/m $\Delta MCD \backsim \Delta MAB(g.g)$	**1,0**
		Do $\Delta MCD \backsim \Delta MAB(g.g)$ nên $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MC}{MA}$ và $\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{MB}{MA}$	**0,5**
		Do đó: $\dfrac{MD}{MB} + \dfrac{MD}{MC} = \dfrac{MC}{MA} + \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MC + MB}{MA} = \dfrac{MA}{MA} = 1$ Suy ra $\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC} = \dfrac{1}{MD}$	**0,25** **0,25**
	c **(2đ)**	Đặt MA = x, MB = y. Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + \left(x - y\right)^2$	**0,25**

		$=2\left(x^2+y^2-xy\right)$ (1)	**0,25**
		Kẻ $BH \perp AM$ Do $\widehat{BMH}=60^0$ nên $MH=\dfrac{y}{2},\quad BH^2=y^2-\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\dfrac{3y^2}{4}$	**0,5**
		Do đó $AB^2=AH^2+BH^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}=x^2+y^2-xy$ (2)	**0,5**
		Từ (1) và (2) suy ra $MA^2+MB^2+MC^2=2AB^2$	**0,5**
5		Do x, y, z dương. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có :	
		+) $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y+z}{4}\ge 2.\sqrt{\dfrac{x^2}{y+z}.\dfrac{y+z}{4}}=x$ (1)	**0.25**
		Dấu "=" xảy ra khi : $\dfrac{x^2}{y+z}=\dfrac{y+z}{4}$ *suy ra* $4x^2=(y+z)^2$ *hay* $2x=y+z$	
		Chứng minh tương tự :+) $\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z+x}{4}\ge 2.\sqrt{\dfrac{y^2}{z+x}.\dfrac{z+x}{4}}=y$ (2)	**0.25**
		Dấu "=" xảy ra khi : $\dfrac{y^2}{z+x}=\dfrac{z+x}{4}$ *suy ra* $4y^2=(z+x)^2$ *hay* $2y=z+x$	
		+) $\dfrac{z^2}{x+y}+\dfrac{x+y}{4}\ge 2.\sqrt{\dfrac{z^2}{x+y}.\dfrac{x+y}{4}}=z$ (3)	
		Dấu "=" xảy ra khi : $\dfrac{z^2}{x+y}=\dfrac{x+y}{4}$ *suy ra* $4z^2=(x+y)^2$ *hay* $2z=x+y$	
		Cộng theo vế 3 bất đẳng thức cùng chiều (1), (2) và (3) ta có :	**0.25**

		$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{y+z}{4}+\frac{z+x}{4}+\frac{x+y}{4}\ge x+y+z$ $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}=1$	
		Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases}2x=y+z\\2y=z+x\\2z=x+y\\x+y+z=2\\x;y;z>0\end{cases}$	**0.25**
		ta được $x=y=z=\frac{2}{3}$	
		Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 1 khi $x=y=z=\frac{2}{3}$	