



BÀI 1:

KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

• **Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y** là hệ thức có dạng $ax + by = c$ (1)

trong đó a , b và c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$)

Nếu tại $x = x_0$ và $y = y_0$ ta có $ax_0 + by_0 = c$ là một khẳng định đúng thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình (1)

• **Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn**

Một cặp gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ được gọi là một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Ta thường viết hệ phương trình đó dưới dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} (*)$$

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (*) nếu nó đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ (*)

BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng phương trình bậc nhất hai ẩn, nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn.

1. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào là phương trình bậc nhất hai ẩn?

$2x - 3y = 5$

$4x + 7y = 10$

$-3x + 5y = 2$

$0x + 2y = 4$

$2x - 0y = 3$

$0x - 0y = 6$

2. Kiểm tra cặp số sau có phải là nghiệm của phương trình $2x - y - 1 = 0$ hay không?

a) $(1; 1)$;

b) $(0, 5; 3)$.

c) $(0; 0)$

3. Trong các cặp số $(2; 1)$, $(3; -1)$, $(0; 5)$ cặp số nào là nghiệm của phương trình $x + 2y - 4 = 0$.

4. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau:

a) $3x - y = 2$;

b) $x + 5y - 3 = 0$

c) $4x + 0y = -2$

d) $0x + 2y = 5$

5. Tìm m trong mỗi trường hợp sau:

a) $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình $mx + y - 5 = 0$;

b) Điểm $A(0; 3)$ thuộc đường thẳng $4x + my - 6 = 0$.



6. Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y = 5$

a) Hoàn thành bảng sau đây:

x	-2	-1	0	?	?
y	?	?	?	1	2

Từ đó suy ra 5 nghiệm của phương trình đã cho.

b) Tính y theo x . Từ đó cho biết phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm.

7. Viết nghiệm và biểu diễn hình học tất cả các nghiệm của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $x + 2y = 3$

b) $0x + y = -2$

c) $x + 0y = 3$

8. Tìm nghiệm tổng quát và biểu diễn hình học tất cả các phương trình sau

a) $3x - y - 2 = 0$;

b) $0x + 2y = 3$.

9. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x - 3y = 4$

b) $3x + y = 6$

c) $4x - 5y = 8$

Dạng 2. Nhận biết hệ phương trình, nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

10. Trong các hệ phương trình sau, hệ nào không phải là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, vì sao?

a) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y = 8 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x = -8 \\ 0x + 0y = 13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x = 8 \\ 4y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 7 - 2x \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$. Trong hai cặp số $(2;1)$ và $(-1;3)$, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

12. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$. Trong hai cặp số $(2;-1)$ và $(-1;2)$, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

Dạng 3. Xây dựng phương trình hoặc hệ phương trình từ bài toán có văn.

13. Cô Hương có hai khoản đầu tư với lãi suất 8% và 10% mỗi năm. Cô Hương thu được tiền lại từ hai khoản đầu tư đó là 160 triệu đồng mỗi năm. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn cho hai khoản đầu tư của cô Hương và chỉ ra ba nghiệm của phương trình đó.

14. Hai bạn Dũng, Huy vào siêu thị mua vở và bút bi để ủng hộ các bạn học sinh vùng lũ lụt. Bạn Dũng mua 5 quyển vở và 3 chiếc bút bi với tổng số tiền phải trả 39000 đồng. Bạn Huy



mua 6 quyển vở và 2 chiếc bút bi với tổng số tiền phải trả là 42000 đồng. Giả sử giá của mỗi quyển vở là x đồng ($x > 0$), giá của mỗi chiếc bút bi là y (đồng) ($y > 0$).

a) Viết phương trình bậc nhất hai ẩn x, y lần lượt biểu thị tổng số tiền phải trả của bạn Dũng, bạn Huy.

b) Cặp số $(x; y) = (6000; 3000)$ có phải là nghiệm của từng phương trình bậc nhất đó hay không? Vì sao?

15. Bài toán:

“Một đàn em nhỏ đứng bên sông
To nhỏ bàn nhau chuyện chia hồng
Mỗi người năm trái thừa năm trái
Mỗi người sáu trái một người không
Hỡi người bạn trẻ đang dừng bước
Có mấy em thơ, mấy trái hồng?”

Làm thế nào để tính được số em nhỏ (em thơ) và số trái hồng?

Nếu gọi x là số em nhỏ, y là số quả hồng thì ta nhận được hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn nào?

16. Xét bài toán cổ sau:

“Quýt, cam mười bảy quả tươi
Đem chia cho một trăm người cùng vui
Chia ba mỗi quả quýt rồi,
Còn cam, mỗi quả chia mười vừa xinh.
Trăm người, trăm miếng ngọt lành.
Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao?”

Gọi x là số quả cam, y là số quả quýt cần tính ($x, y \in \mathbb{N}^*$), ta có hệ phương trình bậc nhất hai

ẩn sau:
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 10x + 3y = 100 \end{cases}$$

Trong hai cặp số $(10; 7)$ và $(7; 10)$, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình trên? Từ đó cho biết một phương án về số cam và số quýt thỏa mãn yêu cầu bài toán cổ.

Dạng 4. Đoan nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất.

Xét hệ
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} .$$
 Nếu

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

17. Không vẽ đồ thị, hãy đoán nhận số nghiệm các hệ phương trình sau





a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases};$

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$

18. Không vẽ đồ thị, hãy đoán nhận số nghiệm của các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 5 \\ 2y = 8 \end{cases}$

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ 2x + y = b \end{cases}$. Tìm a, b để hệ:

a) Có nghiệm duy nhất;

b) Vô nghiệm;

c) Vô số nghiệm.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $5x + 3y = 2;$

b) $38x + 117y = 15;$

c) $21x - 18y = 4$

Bài 2. Cho phương trình $mx + (m + 1)y = 3$.

a) Với $m = 1$, xét xem các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình.

i) $(3; -2);$

ii) $(0; 1);$

iii) $(-1; 0).$

b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trên ứng với

i) $m = -1;$

ii) $m = 2;$

iii) $m = 1.$

c) Tìm giá trị m tương ứng khi phương trình nhận các cặp số sau làm nghiệm.

i) $(3; 1)$

ii) $(2; 3);$

iii) $(1; -2);$

Bài 3:

a) Tìm giá trị thích hợp thay cho dấu “?” trong bảng sau rồi cho biết 6 nghiệm của phương trình $2x - y = 1$

x	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$y = 2x - 1$?	?	?	?	?	?

b) Viết nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

Bài 4: Không giải hệ phương trình, chỉ dựa vào các hệ số của các phương trình trong hệ hãy cho biết số nghiệm của hệ phương trình sau và giải thích tại sao?



a) $\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 3x - 1 \end{cases};$ b) $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 1 \\ y = -\frac{2}{3}x + 3 \end{cases};$ c) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 5: Năm bạn Châu, Hà, Khang, Minh, Phong cùng đi mua sticker để trang trí vở. Có hai loại sticker: Loại I giá 2 nghìn đồng/chiếc và loại II giá 3 nghìn đồng/chiếc. Mỗi bạn mua 1 chiếc và tổng số tiền năm bạn phải trả là 12 nghìn đồng. Gọi x và y lần lượt là số sticker loại I và loại II mà năm bạn đã mua

- a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y
b) Cặp số $(3; 2)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a) hay không? Vì sao?

Bài 6: Để chuẩn bị cho buổi liên hoan của gia đình, bác Ngọc mua hai loại thực phẩm là thịt lợn và cá chép. Giá tiền thịt lợn là 130 nghìn đồng/kg, giá tiền cá chép là 50 nghìn đồng/kg. Bác Ngọc đã chi 295 nghìn đồng để mua 3,5kg hai loại thực phẩm trên. Gọi x và y lần lượt là số kilogram thịt lợn và cá chép mà bác Ngọc đã mua

- a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y
b) Cặp số $(1, 5; 2)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a) hay không? Vì sao?



BÀI 2: GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

• Phương pháp thế

Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế:

Bước 1: Từ một phương trình của hệ, biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình chỉ còn chứa 1 ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Nhận xét: Tùy theo hệ phương trình ta có thể lựa chọn cách biểu diễn x theo y hoặc biểu diễn y theo x

• Phương pháp cộng đại số

Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số:

Để giải một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau, ta có thể làm như sau:

Bước 1: Cộng hay trừ từng vế của hai phương trình trong hệ để được phương trình chỉ còn chứa một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Trường hợp trong hệ phương trình đã cho không có hai hệ số của cùng một ẩn bằng nhau hay đối nhau, ta có thể đưa về trường hợp đã xét bằng cách nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (khác 0).

BÀI TẬP

Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đơn giản.

1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a)
$$\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x - 3y = 5. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số.

a)
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$



$$c) \begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt{3x} - \sqrt{2y} = 1 \\ \sqrt{2x} + 3\sqrt{3y} = 4\sqrt{6} \end{cases}$$

Dạng 2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

3. Giải các hệ phương trình

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} + \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1 \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

4. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y-1} = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{x-5} + \frac{y}{y-6} = 5 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases}$$

Dạng 3: Giải và biện luận hệ phương trình

3.1. Xác định tham số để hệ có nghiệm duy nhất

5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 3 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất.

6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax - y = 2 \\ x + ay = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi a thì hệ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

3.2. Xác định tham số để hệ vô nghiệm

7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + 2y = 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ vô nghiệm.

8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 3my = 2 \\ 2m^2x + 6m^2y = m \end{cases}$.

Chứng minh rằng hệ vô nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

3.3. Xác định tham số để hệ vô số nghiệm

9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m \\ mx + \sqrt{2}y = m \end{cases}$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có vô số nghiệm.



10. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + (m^2 + 1)y = 5m - 10 \\ -9x + (-3m^2 - 3)y = -15m + 30. \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ có vô số nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

3.4. Xác định tham số để m thỏa mãn các điều kiện khác và bài toán tổng hợp

11. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ (5m + 2)x + 3y = m - 2 & (2) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m .

12. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + my = 2 & (1) \\ x + (3m - 2)y = m & (2) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m .

13. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ mx - y = 4 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x, y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x = |y|$.

14. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases}$$

a) Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

b) Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m .

c) Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) mà x, y đều là số nguyên.

d) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) thì điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

e) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho x, y đạt giá trị nhỏ nhất.

15. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$$
. Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình

luôn có nghiệm. Gọi $(x_0; y_0)$ là một cặp nghiệm của phương trình.

Chứng minh: $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$.



16. Cho hệ phương $\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ với tham số a . Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số a sao cho hệ có nghiệm nguyên.

Dạng 4: Liên quan đến đồ thị hàm số.

17. Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm

a) $A(2; -2)$ và $B(-1; 3)$

b) $A(2; 1)$ và $B(1; 2)$

18. Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $(d_1): 2x - y = -1; (d_2): x + y = -2;$
 $(d_3): y = -2x - m$. Xác định m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

19. Cho ba đường thẳng $(d_1): x - 2y = -3; (d_2): \sqrt{2}x + y = \sqrt{2} + 2;$

$(d_m): mx - (1 - 2m)y = 5 - m$

a) Xác định m để ba đường thẳng $(d_1); (d_2)$ và (d_m) đồng quy.

b) Chứng minh rằng (d_m) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m .

Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{5}x - y = \sqrt{5}(\sqrt{3} - 1) \\ 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{5}y = 21 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1,7x - 2y = 3,8 \\ 2,1x + 5y = 0,4 \end{cases}$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x - 7y = 5 \\ 12x + 13y = -8. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5(x + 2y) = 3x - 1 \\ 2x + 4 = 3(x - 5y) - 12. \end{cases}$

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ

a) $\begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{7}{x-y+2} - \frac{5}{x+y-1} = 4,5 \\ \frac{3}{x-y+2} + \frac{2}{x+y-1} = 4 \end{cases}$

Bài 4: a) Với giá trị nào của m, n thì hệ $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + y = n \end{cases}$ có nghiệm $(-1; 0)$?

b) Xác định m, n để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = n \\ mx + ny = 2 \end{cases}$ vô nghiệm.



Bài 5 : Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(1; -2)$ và $B(-2; -11)$

b) $A(2; 8)$ và $B(-4; 5)$

Bài 6: Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

a) $(d): 2x - y = 3$ và $(d'): x + 2y = 4$

b) $(d): 2x + y = 2$ và $(d'): x + \frac{1}{2}y = 1$

Bài 7: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$

b) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất (x, y) sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên.

Bài 8: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m - 1)x - y = 2 \\ mx + y = m \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = \sqrt{2}$.

b) Xác định giá trị của m để hệ có nghiệm $(x; y)$ duy nhất thỏa điều kiện $x + y > 0$.

Mở rộng các bài toán sau khi học về căn thức

1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2 \\ 2\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{|2y-1|} = 1 \\ 3\sqrt{2x-1} - \frac{2}{|2y-1|} = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6} \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \sqrt{y} = -1 \\ \frac{1}{x+1} + 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \frac{2y}{y+1} = 2 \\ \sqrt{4x+4} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$



BÀI 3: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

• Các bước giải một bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Bước 1: Lập hệ phương trình;

- Chọn ẩn số (thường chọn hai ẩn số) và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng

Bước 2: Giải hệ phương trình.

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm tìm được của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn, nghiệm nào không thỏa mãn điều kiện của ẩn, rồi kết luận.

BÀI TẬP

Dạng 1. Toán có nội dung hình học

1. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 24 m. Nếu tăng độ dài một cạnh lên 2 m và giảm độ dài cạnh còn lại 1 m thì diện tích mảnh đất tăng thêm 1 mét vuông. Tìm độ dài các cạnh của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu.

2. Tính chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật. Biết rằng nếu tăng cả chiều dài và chiều rộng lên 4 cm thì ta được hình chữ nhật có diện tích tăng thêm 80 cm^2 so với diện tích hình chữ nhật ban đầu, còn nếu tăng chiều dài lên 5 cm và giảm chiều rộng xuống 2 cm thì ta được một hình chữ nhật có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật ban đầu.

3. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 100 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất biết rằng 5 lần chiều rộng hơn 2 lần chiều dài là 40 cm.

4. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 15 m. Nếu giảm chiều dài 2 m và tăng chiều rộng 3 m thì diện tích mảnh vườn tăng thêm 44 m^2 . Tính diện tích mảnh vườn.

Dạng 2: Toán số học, phần trăm

5. Tìm hai số tự nhiên biết rằng hiệu của số lớn với số nhỏ bằng 1814 và nếu lấy số lớn chia số nhỏ thì được thương là 9 và số dư là 182.

6. Cho số tự nhiên có hai chữ số, tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14. Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đã cho.

7. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị và khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị.



8. Một số tự nhiên có hai chữ số. Tỉ số giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là $\frac{2}{3}$.

Nếu viết thêm chữ số 1 xem vào giữa thì được số mới lớn hơn số đã cho là 370 đơn vị. Tìm số đã cho

9. Tìm hai số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng các chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì nó tăng thêm 27 đơn vị.

10. Tìm một số có hai chữ số biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 và nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 7 và dư 6.

Dạng 3. Toán năng suất, phần trăm, công việc.

11. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được giao làm 600 sản phẩm. Nhờ tăng năng suất lao động tổ 1 làm vượt mức 10% và tổ hai làm vượt mức 20% so với kế hoạch của mỗi tổ, nên cả hai tổ làm được 685 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ làm theo kế hoạch.

12. Tháng đầu, hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai, do cải tiến kỹ thuật nên tổ I vượt mức 10% và tổ II vượt mức 12% so với tháng đầu, vì vậy, hai tổ đã sản xuất được 1000 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy ?

13. Trong tháng thanh niên Đoàn trường phát động và giao chỉ tiêu mỗi chi đoàn thu gom 10 kg giấy vụn làm kế hoạch nhỏ. Để nâng cao tinh thần thi đua bí thư chi đoàn 10A chia các đoàn viên trong lớp thành hai tổ thi đua thu gom giấy vụn. Cả hai tổ đều rất tích cực. Tổ 1 thu gom vượt chỉ tiêu 30%, tổ hai gom vượt chỉ tiêu 20% nên tổng số giấy chi đoàn 10A thu được là 12,5 kg. Hỏi mỗi tổ được bí thư chi đoàn giao chỉ tiêu thu gom bao nhiêu kg giấy vụn?

14. Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ nhất may trong 3 ngày, tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong mỗi ngày tổ thứ nhất may được nhiều hơn tổ thứ hai 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ may trong một ngày được bao nhiêu chiếc áo?

15. Hai công nhân cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi công nhân làm một mình thì trong bao lâu làm xong công việc.

16. Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ 20 phút và người thứ hai làm trong 10 giờ thì xong công việc. Tính thời gian mỗi công nhân khi làm riêng xong công việc.

17. Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi mỗi đội làm riêng thì bao nhiêu ngày mới hoàn thành xong công việc trên.



18. Hai máy ủi cùng làm việc trong vòng 12 giờ thì san lấp được $\frac{1}{10}$ khu đất. Nếu máy ủi thứ nhất làm một mình trong 42 giờ rồi nghỉ và sau đó máy ủi thứ hai làm một mình trong 22 giờ thì cả hai máy ủi san lấp được 25% khu đất đó. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi máy ủi san lấp xong khu đất đã cho trong bao lâu ?

19. Một địa phương cấy 10 ha giống lúa loại I và 8 ha giống lúa loại II. Sau một mùa vụ, địa phương đó thu hoạch và tính toán sản lượng thấy:

+ Tổng sản lượng của hai giống lúa thu về là 139 tấn;

+ Sản lượng thu về từ 4 ha giống lúa loại I nhiều hơn sản lượng thu về từ 3 ha giống lúa loại II là 6 tấn.

Hãy tính năng suất lúa trung bình (đơn vị: tấn/ ha) của mỗi loại giống lúa.

20. Một đội công nhân A và B làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Khi làm chung được 8 ngày thì đội A được điều động đi làm việc khác, đội B tiếp tục làm phần việc còn lại. Kể từ khi làm một mình, do cải tiến cách làm nên năng suất của đội B tăng gấp đôi, do đó đội B đã hoàn thành phần việc còn lại trong 8 ngày tiếp theo. Hỏi với năng suất ban đầu thì mỗi đội làm một mình sẽ hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

21. Lớp 9A và lớp 9B của một trường THCS dự định làm 90 chiếc đèn ông sao để tặng các em thiếu nhi nhân dịp Tết Trung Thu. Nếu lớp 9A làm trong 2 ngày và lớp 9B làm trong 1 ngày thì được 23 chiếc đèn; nếu lớp 9A làm trong 1 ngày và lớp 9B làm trong 2 ngày thì được 22 chiếc đèn. Biết rằng số đèn từng lớp làm được trong mỗi ngày là như nhau, hỏi nếu cả hai lớp cùng làm thì hết bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc đã dự định ?

Dạng 4. Một số bài toán về vòi nước.

22. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 5 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ hai chảy trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể.

23. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không chứa nước thì sau 3 giờ đầy bể. nếu mở vòi thứ nhất chảy một mình trong 20 phút, rồi khóa lại, mở tiếp vòi thứ hai chảy trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{8}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

24. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì bể sẽ đầy trong 1 giờ 20 phút. Nếu mở riêng vòi thứ nhất trong 10 phút và vòi thứ hai trong 12 phút thì chỉ được $\frac{2}{15}$ bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu phút?



25. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 30 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ hai chảy trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu đầy bể?

26. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể.

Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và sau 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu sẽ đầy bể

Dạng 5. Toán chuyển động

27. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 5km và một đoạn xuống dốc dài 10km. Một người đi xe đạp từ A đến B hết 1 giờ 10 phút và đi từ B về A hết 1 giờ 20 phút (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc, lúc xuống dốc của người đi xe đạp

28. Một ca nô xuôi dòng một quãng sông dài 12 km rồi ngược dòng quãng sông đó mất 2 giờ 30 phút. Nếu cũng quãng đường sông ấy, ca nô xuôi dòng 4 km rồi ngược dòng 8 km thì hết 1 giờ 20 phút. Biết rằng vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước là không đổi, tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước.

29. Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20 cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc mỗi vật.

30. Hàng ngày, Nam đạp xe đi học với vận tốc không đổi trên quãng đường dài 10 km. Nam tính toán và thấy rằng đạp xe với vận tốc lớn nhất thì thời gian đi học sẽ rút ngắn 10 phút so với đạp xe với vận tốc hàng ngày. Tuy nhiên, thực tế sáng nay lại khác dự kiến. Nam chỉ đạp xe với vận tốc lớn nhất trên nửa đầu quãng đường (dài 5 km), nửa quãng đường còn lại đường phố đông đúc nên Nam đã đạp xe với vận tốc hàng ngày. Vì vậy thời gian đạp xe đi học sáng nay của Nam là 35 phút. Hãy tính vận tốc đạp xe hàng ngày và vận tốc đạp xe lớn nhất của Nam (lấy đơn vị vận tốc là km/h)

31. Theo các chuyên gia về sức khỏe, người trưởng thành cần đi bộ từ 5000 bước mỗi ngày sẽ rất tốt cho sức khỏe.

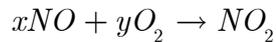
Để rèn luyện sức khỏe, anh Sơn và chị Hà đề ra mục tiêu mỗi ngày một người phải đi bộ ít nhất 6000 bước. Hai người cùng đi bộ ở công viên và thấy rằng, nếu cùng đi trong 2 phút thì anh Sơn bước nhiều hơn chị Hà 20 bước. Hai người cùng giữ nguyên tốc độ như vậy nhưng chị Hà đi trong 5 phút thì lại nhiều hơn anh Sơn đi trong 3 phút là 160 bước. Hỏi mỗi ngày anh Sơn và chị Hà cùng đi bộ trong 1 giờ thì họ đã đạt được số bước tối thiểu mà mục tiêu đề



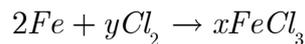
ra chưa? (Giả sử tốc độ đi bộ hằng ngày của hai người không đổi).

Dạng 6. Tìm hệ số để cân bằng phản ứng hoá học

32. Tìm các hệ số x, y trong phản ứng hoá học đã được cân bằng sau:



33. Tìm các hệ số x, y trong phản ứng hoá học đã được cân bằng sau:



Dạng 7. Một số bài tập khác

34. Để chuẩn bị tham gia Hội khỏe Phù Đổng cấp trường, thầy Thành là giáo viên chủ nhiệm của lớp 9A tổ chức cho học sinh trong lớp thi đấu môn bóng bàn ở nội dung đánh đôi nam nữ (một nam kết hợp với một nữ). Thầy Thành chọn $\frac{1}{2}$ số học sinh nam kết hợp với $\frac{5}{8}$ số học sinh nữ của lớp để lập thành các cặp thi đấu. Sau khi đã chọn được số học sinh tham gia thi đấu thì lớp 9A còn lại 16 học sinh làm cố động viên. Hỏi lớp 9A có tất cả bao nhiêu học sinh?

35. Để chuẩn bị cho năm học mới, học sinh hai lớp 9A và 9B ủng hộ thư viện 738 quyển sách gồm hai loại sách giáo khoa và sách tham khảo. Trong đó mỗi học sinh lớp 9A ủng hộ 6 quyển sách giáo khoa và 3 quyển sách tham khảo; mỗi học sinh lớp 9B ủng hộ 5 quyển sách giáo khoa và 4 quyển sách tham khảo. Biết số sách giáo khoa ủng hộ nhiều hơn số sách tham khảo là 166 quyển. Tính số học sinh của mỗi lớp.

36. Trong kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2023 – 2024, số thí sinh vào trường THPT chuyên bằng $\frac{2}{3}$ số thí sinh thi vào trường PTDT Nội trú. Biết rằng tổng số phòng thi của cả hai trường là 80 phòng thi và mỗi phòng thi có đúng 24 thí sinh. Hỏi số thí sinh vào mỗi trường bằng bao nhiêu?

37. Bạn Dũng trung bình tiêu thụ 15 ca-lo cho mỗi phút bơi và 10 ca-lo cho mỗi phút chạy bộ. Hôm nay, Dũng mất 1,5 giờ cho cả hai hoạt động trên và tiêu thụ hết 1200 ca-lo. Hỏi hôm nay, bạn Dũng đã mất bao nhiêu thời gian cho mỗi hoạt động này?

38. An đếm số bài kiểm tra một tiết đạt điểm 9 và điểm 10 của mình thấy nhiều hơn 16 bài. Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đạt điểm 9 và điểm 10 đó là 160. Hỏi An được bao nhiêu bài điểm 9 và bao nhiêu bài điểm 10?

39. Sau Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2024-2025, học sinh hai lớp 9A và 9B tặng lại thư viện trường 738 quyển sách gồm hai loại sách giáo khoa và sách tham khảo. Trong đó, mỗi học sinh lớp 9A tặng 6 quyển sách giáo khoa và 3 quyển sách tham khảo; mỗi học sinh lớp 9B tặng 5 quyển sách giáo khoa và 4 quyển sách tham khảo. Biết số sách giáo khoa nhiều hơn số sách tham khảo là 166 quyển. Tính số học sinh của mỗi lớp.



40. Lớp 9B có 42 học sinh. Vừa qua lớp đã phát động phong trào tặng sách cho các học sinh vùng sâu vùng xa có hoàn cảnh khó khăn. Tại buổi phát động, mỗi học sinh trong lớp đều tặng 3 quyển sách hoặc 5 quyển sách. Kết quả cả lớp đã tặng được 146 quyển sách. Hỏi lớp 9B có bao nhiêu bạn tặng 3 quyển sách và bao nhiêu bạn tặng 5 quyển sách?

41. Một dung dịch chứa 30% axit nitric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác chứa 55% axit nitric. Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100 lít dung dịch 50% axit nitric?

Bài tập tự luyện

Bài 1: Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu cho mỗi loại hàng?

Bài 2: Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ. Thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên 1 ha là bao nhiêu biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa cũ là 1 tấn.

Bài 3: Trong tháng đầu hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ 2 tổ 1 làm vượt mức 15%, tổ 2 vượt mức 20% do đó cuối tháng hai cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Bài 4: Mỗi ngày ba của bạn An chở bạn ấy từ nhà đến trường mất 30 phút. Vì hôm nay là ngày thi tuyển sinh nên ba bạn ấy muốn con mình đến trường sớm hơn, do đó ông ấy đã tăng vận tốc xe lên 15 (km / h) và đến sớm hơn thường ngày là 10 phút. Hỏi quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là bao nhiêu km ?

Bài 5: Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km / h rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45 km / h . Biết quãng đường tổng cộng dài 165 km và thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường.

Bài 6: Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2 .

Bài 7: Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội thứ nhất làm trong 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong công việc ?



Bài 8: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 4 giờ 48 phút bể đầy. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài 9: Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứ hai bằng $\frac{4}{5}$ số sách giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá.

Bài 10: Hai anh Quang và Bình góp vốn cùng kinh doanh. Anh Quang góp 13 triệu đồng, anh Bình góp 15 triệu đồng. Sau một thời gian kinh doanh lãi được 7 triệu đồng. Lãi được chia đều theo tỉ lệ góp vốn. Tính số lãi mỗi anh được hưởng.

Bài 11: Người ta trộn hai loại quặng sắt với nhau, một loại chứa 72% sắt, loại thứ hai chứa 58% sắt được một loại quặng chứa 62% sắt. Nếu tăng khối lượng của mỗi loại quặng thêm 15 tấn thì được một loại quặng chứa 62,25% sắt. Tìm khối lượng quặng của mỗi loại đã trộn.

Bài 12: Tháng đầu hai tổ sản xuất làm được 720 dụng cụ. Sang tháng thứ hai tổ 1 làm vượt mức 12%, tổ hai vượt mức 15% nên cả hai tổ làm được 819 dụng cụ. Hỏi tháng đầu mỗi tổ làm được bao nhiêu dụng cụ?

Bài 13: Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ 1 may trong 3 ngày, tổ thứ 2 may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong một ngày tổ 1 may được nhiều hơn tổ 2 là 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ trong 1 ngày may được bao nhiêu chiếc áo?

Bài 14: Một ô tô đi từ A đến B với một vận tốc xác định và trong một thời gian đã định. Nếu vận tốc của ô tô giảm 10km/h thì thời gian tăng 45 phút. Nếu vận tốc của ô tô tăng 10km/h thì thời gian giảm 30 phút. Tính vận tốc và thời gian dự định đi của ô tô?

Bài 15: Hai ca nô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 85 km và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng là 9 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h .

Bài 16: Nhân dịp Lễ giỗ tổ Hùng Vương, một siêu thị điện máy đã giảm giá nhiều mặt hàng để kích cầu mua sắm. Giá niêm yết một tủ lạnh và một máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng, nhưng trong đợt này giá một tủ lạnh giảm 40% giá bán và giá một máy giặt giảm 25% giá bán nên Cô Lan đã mua một tủ lạnh và một máy giặt trên với tổng số tiền là 16,77 triệu đồng. Hỏi giá mỗi món đồ trên khi chưa giảm giá là bao nhiêu tiền?



Bài 17: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Bài 18: Hai người thợ cùng sơn cửa cho một ngôi nhà thì 2 ngày xong việc. Nếu người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?



BÀI 4

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

• **Phương trình tích có dạng** $(ax + b)(cx + d) = 0$ ($a \neq 0; c \neq 0$)

Để giải phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$ với $a \neq 0$ và $c \neq 0$, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Giải hai phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$.

Bước 2: *Kết luận nghiệm*: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình bậc nhất vừa giải được ở Bước 1.

BÀI TẬP

Dạng 1. Các bài toán về phương trình tích đơn giản

1. Giải các phương trình sau

a) $(3x - 2)(x + 1) = 0$; b) $(x^2 + 3)(2x - 1) = 0$; c) $(x + 3)(2x + 3)(x - 5) = 0$

2. Giải các phương trình sau:

a) $(2x - 1)\frac{5x - 10}{10} + (2x - 1)\frac{3x + 12}{6} - (2x - 1)x = 0$;

b) $(x - 3)(2x + 1)(7 - x)(x^2 + 2) = 0$;

c) $(x + 7)\left(\frac{x + 5}{2} - \frac{4x}{3}\right) = 0$;

d) $(4x + 3)\left(\frac{3x + 7}{4} - \frac{x - 3}{12}\right) = 0$;

Dạng 2. Đưa về phương trình tích cơ bản

3. Giải phương trình

a) $2x(3x - 2) - (x + 1)(3x - 2) = 0$;

b) $(x - 2)(x^2 - 3x + 5) = x^3 - 2x^2$;

c) $\frac{1}{2}(x + 1)(3 - x) + x = 3$;

d) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

4. Giải phương trình

a) $(2x - 1)^2 + (x - 3)(2x - 1) = 0$;

b) $2(x - 5)(x + 2) = x^2 - 5x$;

c) $(2x + 1)(1 - x) + 2x = 2$;

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

5. Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$;

b) $x^3 + x^2 - 2 = 0$

c) $x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$;

d) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5(x + 1) = 0$

e) $(x + 1)^2(x + 2) + (x - 1)^2(x - 2) = 12$;

f) $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$

6. Giải các phương trình sau





a) $(x - 2)^2 = (2x + 3)^2$;

b) $x^2 + (2x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 3$

c) $x^3 - 1 + (x - 1)(2 - x^2) = 0$;

d) $\frac{x^3}{2} = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$

7. Giải các phương trình

a) $\frac{(x - 3)^2}{4} - (x + 2)^2 = 0$;

b) $(x - 2)(2x + 1) + x^2 = 4$

c) $x^3 + 1 = (x + 1)(x - 5)$;

d) $\frac{(x + 1)^3}{3} = x^2 + 2x + 1$

8. Giải các phương trình

a) $(x + 1)^3 - (1 - x)^3 = 0$;

b) $(x + 1)^3 - 9(x + 1) = 0$

c) $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$;

d) $9x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Dạng 3: Đặt ẩn phụ để đưa về phương trình tích

9. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

a) $(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) + 4 = 0$;

b) $(2x + 1)^2 - 2x - 1 = 2$

c) $(x^2 - 3x)^2 + 5(x^2 - 3x) + 6 = 0$;

d) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x) - 2 = 0$

10. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

a) $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) + 1 = 0$;

b) $(5 - 2x)^2 + 4x - 10 = 8$

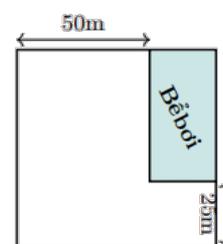
c) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 1) = 3$;

d) $(x - 1).x.(x + 4)(x + 5) - 84 = 0$

Dạng 4. Bài toán có lời

11. Tìm năm số tự nhiên liên tiếp, biết rằng tổng các lập phương của bốn số đầu hơn lập phương của số thứ năm là 8.

12. Trong một khu đất có dạng hình vuông, người ta dành một mảnh đất, có dạng hình chữ nhật ở góc khu đất để làm bể bơi (hình vẽ). Biết diện tích bể bơi bằng 1250 cm^2 . Tính độ dài cạnh khu đất đó.



Hình 1

13. Trong một khu vườn hình vuông có cạnh bằng 15 m người ta làm

một lối đi xung quanh có bề rộng là x (m). Để diện tích phần đất còn lại là 169 m^2 thì bề rộng x của lối đi là bao nhiêu?

**Bài tập tự luyện:****Bài 1:** Giải các phương trình sau:

a) $(5x - 4)(4x + 6) = 0$;

b) $(3,5x - 7)(2,1x - 6,3) = 0$;

c) $(4x - 10)(24 + 5x) = 0$;

d) $(x - 3)(2x + 1) = 0$;

e) $(5x - 10)(8 - 2x) = 0$;

f) $(9 - 3x)(15 + 3x) = 0$;

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x + 5}{6} - \frac{(2x + 5)(x - 10)}{3} = 0$;

b) $(4x - 1)(x + 5) = x^2 - 25$;

c) $2x^3 - 6x^2 = x^2 - 3x$;

d) $x(x + 3)^3 - \frac{x}{4}(x + 3) = 0$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $(x - 1)^2 = (2x + 5)^2$;

b) $\frac{(x - 3)^3}{2} = x^2 - 4x + 4$

c) $x^3 + 8 = -2x(x + 2)$;

d) $4x^2 + 8x - 5 = 0$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$;

b) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9 = 0$

c) $(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) + 9 = 0$;

c) $(4x - 5)^2 + 7(4x - 5) - 8 = 0$

e) $(x + 3)^2(x^2 + 6x + 1) = 9$;

f) $2x(8x - 1)(8x^2 - x + 2) - 126 = 0$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$.

b) $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$.

c) $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$;

d) $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24$;

b) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$.

c) $(x + 2)(x + 3)(x - 5)(x - 6) = 180$;

d) $2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9$.

e) $(12x + 7)^2(3x + 2)(2x + 1) = 3$;

f) $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18$.



• Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa tìm được.

Bước 4: *Kết luận nghiệm*: Trong các giá trị của ẩn vừa tìm được ở Bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định (ĐKXD) của biểu thức

1. Tìm ĐKXD của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$;

b) $B = \left(\frac{2}{x^2+1} + 3 \right) : \frac{x-1}{2x-3}$;

c) $C = \frac{5x+1}{3x-2} - \frac{x}{4}$

d) $D = \left(\frac{3}{3x^2+1} + \frac{1}{4} \right) : \frac{5x}{3-x}$

2. Chứng minh các biểu thức sau xác định với mọi giá trị của x

a) $A = \frac{5-7x}{x^2+x+1} - \frac{7}{3}$;

b) $B = \frac{x+10}{4x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+1}$

c) $C = \frac{|2-3x|}{x^2+4x+5} + \frac{x-1}{2}$

d) $B = \frac{x+1}{x^2-3x+3} - \frac{2x^2-3}{3}$

Dạng 2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu.

3. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4}{2x-3} - \frac{7}{3x-5} = 0$;

b) $\frac{4}{2x-3} + \frac{4x}{4x^2-9} = \frac{1}{2x+3}$;

c) $\frac{2}{2x+1} + \frac{x}{4x^2-1} = \frac{7}{2x-1}$

d) $\frac{x^2+5}{25-x^2} = \frac{3}{x+5} + \frac{x}{x-5}$

4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} = \frac{4x+5}{x^2+3x+2}$;

b) $\frac{2(x^2+x+6)}{x^3-8} + \frac{2}{2-x} = \frac{3}{x^2+2x+4}$;

c) $\frac{6}{-x^2+6x-8} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{x+1}{x-2}$;

d) $\frac{6}{x^3+1} - \frac{1-x}{x^2-x+1} = \frac{5}{x+1}$

5. Giải các phương trình sau

a) $x + \frac{2x-1}{x-2} = 3x + \frac{3}{x-2}$;

b) $\frac{5x+1}{5} - \frac{2x-1}{2x+2} = 2 + \frac{x^2+4x+1}{x+1}$



c) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}$; d) $\frac{x+5}{x^2-5x} + \frac{5-x}{2x^2+10x} = \frac{x-5}{2x^2-50}$

Dạng 3: Toán tổng hợp

6. Cho phương trình ẩn x : $\frac{x-1}{x+a} - \frac{x}{x-a} = \frac{x+2a}{a^2-x^2}$

a) Giải phương trình khi $a = 2$

b) Tìm các giá trị của a để phương trình có nghiệm $x = 1$

7. Tìm các giá trị của m để phương trình $\frac{1}{x+m} - \frac{5}{x-2m} = \frac{2m-4}{(x+m)(2m-x)}$ (m là tham số)

số) có nghiệm là $x = -2$.

8. Cho $A(x) = \frac{(x^2-x-6)(x-5)}{x(x^2+2x+2)}$ và $B(x) = \frac{(x^2-x-6)(x-4)}{3x^3+6x^2+6x}$

Tìm x để giá trị của hai biểu thức $A(x)$ và $B(x)$ bằng nhau;

9. Cho phương trình ẩn x : $\frac{x+2m}{x-5} - 1 = \frac{x+5}{2m-x} + 1$ (với m là hằng số).

a) Giải phương trình với $m = 5$;

b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = 10$;

c) Giải phương trình với tham số m .

10. Cho phương trình $x \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right) = \frac{5a(a+3x)}{4(x^2-a^2)} - \frac{x}{x-a}$ với a là hằng số.

a) Tìm a để phương trình trên có nghiệm là nghiệm của phương trình

$\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{-29}{25-x^2}$;

b) Giải phương trình với $a = 6$.

Dạng 4. Toán có lời văn

11. Hai bạn Phong và Khang cùng hẹn nhau đạp xe đến một vị trí cách vị trí bạn Phong 6km và cách vị trí bạn Khang 7 km. Hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc. Tính tốc độ của mỗi bạn, biết tốc độ của bạn Khang hơn tốc độ của bạn Phong là $2km/h$.



12. Hai thành phố A và B cách nhau 120 km. Một ô tô đi chuyển từ A đến B , rồi quay trở về A với tổng thời gian đi và về là 4 giờ 24 phút. Tính vận tốc lúc đi của ô tô, biết vận tốc lúc về lớn hơn vận tốc lúc đi 20%.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4x - 8 + (4 - 2x)}{x^2 + 1} = 0;$

b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0;$

c) $\frac{2x - 5}{x + 5} = 3;$

d) $\frac{4}{x - 2} - 2 = 0;$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2} = x + 8;$

b) $3x - \frac{1}{x - 2} = \frac{x - 1}{2 - x};$

c) $\frac{x^2 - 15x + 1}{x + 17} = x - 2;$

d) $\frac{x - 1}{x - 2} - 3 + x = \frac{1}{x - 2};$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x^3 - (x - 1)^3}{(4x + 3)(x - 5)} = \frac{7x - 1}{4x + 3} - \frac{x}{x - 5};$

b) $1 + \frac{2x - 5}{x - 2} - \frac{3x - 5}{x - 1} = 0;$

c) $\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{2}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x};$

d) $\frac{x + 2}{x - 3} + \frac{x - 2}{x + 3} - \frac{2(x^2 + 6)}{x^2 - 9} = 0;$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{-7x^2 + 4}{x^3 + 1} = \frac{5}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{1 + x};$

b) $\frac{4x}{x^2 + 4x + 3} - 1 = 6 \left(\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{2x + 2} \right)$

c) $\frac{-1}{1 - x} + \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 1} = \frac{4}{x^2 + x + 1};$

d) $\frac{12x + 1}{6x - 2} - \frac{9x - 5}{3x + 1} = \frac{108x - 36x^2 - 9}{4(9x^2 - 1)}$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3}{1 - 4x} = \frac{2}{4x + 1} - \frac{8 + 6x}{16x^2 - 1};$

b) $\frac{3}{5x - 1} + \frac{2}{3 - 5x} = \frac{4}{(1 - 5x)(5x - 3)}.$

c) $\frac{x + 2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2} = \frac{3}{x^2 - x - 2} + 1;$

d) $\frac{5 - x}{4x^2 - 8x} + \frac{7}{8} = \frac{x - 1}{2x(x - 2)} + \frac{1}{8x - 16}.$

e) $\frac{x + 6}{x - 5} + \frac{x - 5}{x + 6} = \frac{2x^2 + 23x + 61}{x^2 + x - 30};$

f) $\frac{x^2 - x}{x + 3} - \frac{x^2}{x - 3} = \frac{7x^2 - 3x}{9 - x^2}.$



Bài 6: Giải các phương trình sau (với a là tham số)

a) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} + 1;$

b) $\frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}.$

c) $(2x+3)\left(\frac{3x+8}{2-7x}+1\right) = (x-5)\left(\frac{3x+8}{2-7x}+1\right).$

d) $\frac{x}{2a+x} + \frac{2a+x}{2a-x} = \frac{8a^2}{x^2-4a^2}$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x-12}{x^2-4};$

b) $\frac{-x^2+12x+4}{x^2+3x-4} = \frac{12}{x+4} + \frac{12}{3x-3}$

c) $\frac{1}{2x^2+5x-7} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{3}{2x^2-5x-7}$

d) $\frac{x^2-2x+2}{x-1} + \frac{x^2-8x+20}{x-4} = \frac{x^2-4x+6}{x-2} + \frac{x^2-6x+12}{x-3}$

Bài 8: Cho phương trình ẩn x : $\frac{m}{x+m} + \frac{x}{x+2m} = \frac{3}{(x+m)(x+2m)} + 1$

a) Giải phương trình với $m = 1$

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x = 5$



BÀI 5:
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

• **Khái niệm bất đẳng thức**

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$; $a \leq b$; $a \geq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

• **Tính chất:** Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu của bất đẳng thức)

• **Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng:** Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c ta có:

Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$;

Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$;

Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$;

Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$

• **Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân:**

⌊ Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số *dương* ta được bất đẳng thức mới *cùng chiều* với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c và $c > 0$ ta có:

Nếu $a < b$ thì $a.c < b.c$;

Nếu $a \leq b$ thì $a.c \leq b.c$;

Nếu $a > b$ thì $a.c > b.c$;

Nếu $a \geq b$ thì $a.c \geq b.c$

⌊ Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số *âm* ta được một bất đẳng thức mới *ngược chiều* với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c và $c < 0$ ta có:

Nếu $a < b$ thì $a.c > b.c$;

Nếu $a \leq b$ thì $a.c \geq b.c$;

Nếu $a > b$ thì $a.c < b.c$;

Nếu $a \geq b$ thì $a.c \leq b.c$

BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng bất đẳng thức trong thực tế.

1. Biển R.306 “Tốc độ tối thiểu cho phép” nhằm báo cho người tham gia giao thông biết tốc độ tối thiểu các xe cơ giới được phép chạy.. Biển báo này có hiệu lực bắt buộc đối với các loại xe cơ giới có tốc độ không nhỏ hơn trị số ghi trên biển. Nếu một ô tô đi trên đường đó với vận tốc a (km/h) thì a phải thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau?



A. $a < 60$.

B. $a > 60$.

C. $a \geq 60$.

D. $a \leq 60$.

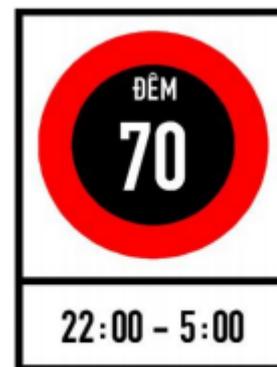


2. Biển số P.127b là biển hình chữ nhật nền màu xanh, trên đó thể hiện tốc độ tối đa trên các làn đường. Biển đặt bên đường hoặc treo trên giá long môn, cột cần vưon.



Nếu một ô tô đi trên đường đó với vận tốc a (km/h) ở làn ngoài cùng bên phải thì a phải thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau?

3. Áp dụng biển số P.127a cho một số trường hợp qua khu đông dân cư vào ban đêm nhằm mục đích nâng cao tốc độ vận hành khi đường ít xe chạy. Biển chỉ có hiệu lực trong thời gian ghi trên biển và trong phạm vi từ vị trí đặt biển đến vị trí biển số R.421 “Hết đoạn đường qua khu đông dân cư”. Số ghi trên biển tốc độ tối đa cho phép lớn nhất về ban đêm tính bằng km/h và không lớn hơn 80 km/h. Người tham gia giao thông về ban đêm không được vượt quá giá trị tốc độ ghi trên biển trừ một số trường hợp ưu tiên được quy định.



Hình B.27a - Biển số P.127a

Nếu một ô tô đi trên đoạn đường có biển báo đó với vận tốc a (km/h) thì a phải thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau?

A. $a \leq 80$.

B. $a \leq 70$.

C. $a < 70$.

D. $70 \leq a \leq 80$.

Dạng 2: Liên hệ thứ tự và phép cộng, liên hệ thứ tự và phép nhân

4. a) So sánh $-2004 + (-2024)$ và $-2005 + (-2024)$ mà không tính giá trị từng biểu thức.

b) Dựa vào thứ tự giữa $\sqrt{2}$ và 3 hãy so sánh $\sqrt{2} + 2$ và 5.

5. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $(-2) + 3 \geq 2$; b) $-6 = 2 \cdot (-3)$; c) $4 + (-8) < 15 + (-8)$; d) $x^2 + 1 \geq 1$

6.1 Cho $a < b$, hãy so sánh:

i) $a + 1$ và $b + 1$;

ii) $a - 2$ và $b - 2$

6.2 Hãy so sánh a và b nếu:

i) $a - 5 \geq b - 5$

ii) $15 + a \leq 15 + b$

7. Cho $-4a > -4b$, hãy so sánh a và b .

8. Số a là số âm hay dương nếu:

i) $12a < 15a$;

ii) $4a < 3a$

iii) $-3a > -5a$

9. Cho $a > b$, hãy so sánh:

a) $-3a + 4$ và $-3b + 4$

b) $2 - 3a$ và $2 - 3b$

10. Cho $a > b$, hãy so sánh:



a) $3a + 5$ và $3b + 5$;

b) $2a - 3$ và $2b - 4$

11. So sánh a và b nếu:

i) $a + 5 < b + 5$

ii) $-3a > -3b$

iii) $5a - 6 \geq 5b - 6$

iv) $-2a + 3 \leq -2b + 3$

Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tính chất bắc cầu

12. Cho $a > b$, $c > d$. Chứng minh rằng: $a + c > b + d$

13. Cho $a > b > 0$ và $c > d > 0$. Chứng minh rằng $ac > bd$

14. Cho $0 < a < b$. Hãy so sánh

i) a^2 và ab

ii) b^2 và ab

iii) a^2 và b^2

15. Chứng minh các bất đẳng thức sau: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

Dạng 4: Chứng minh bất đẳng thức bằng nhiều bước biến đổi

16. Cho $a > 2$ và $b > 2$. Chứng minh rằng $ab > a + b$.

17. Cho số thực $x \neq 0$. Chứng minh rằng:

a) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ nếu $x > 0$;

b) $x + \frac{1}{x} \leq -2$ nếu $x < 0$

18. Chứng minh bất đẳng thức sau: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \geq 2xy$

19. Chứng minh rằng: $(a - 1)(a - 2)(a - 3)(a - 4) + 1 \geq 0$

20. a) Chứng minh tổng các bình phương của hai số bất kỳ không nhỏ hơn hai lần tích hai số đó.

b) Chứng minh với $x > 0$ thì $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (tổng một số dương với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2).

c) Chứng minh với a, b, c, d là các số dương và thỏa mãn $abcd = 1$ thì $ab + cd \geq 2$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$.

* Tìm cách giải: a) Lưu ý $(a - b)^2 \geq 0$

b) Khử mẫu, chuyển về xuất hiện hằng bất đẳng thức.

c) Lưu ý do $abcd = 1$ nên $cd = \frac{1}{ab}$, sử dụng kết quả b) để chứng minh.

21. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$;

b) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$



22. Cho a và b cùng dấu. Chứng minh rằng

a) Nếu $a > b$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

23. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ với $a, b > 0$;

b) $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$.

24. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

i) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki với hai cặp số a, b và x, y).

ii) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ (BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki với hai bộ ba số a, b, c và x, y, z).

Bài tập tự luyện

Bài 1: So sánh x và y trong mỗi trường hợp sau:

a) $x - \frac{5}{3} \leq y - \frac{5}{3}$;

b) $-5 - x > -y - 5$

Bài 2: Cho $a < b$ hãy so sánh

a) $a + 26$ và $b + 26$

b) $a - 4$ và $b - 4$

c) a và $b + 4$

d) $a - 6$ và $b + 3$

Bài 3: Cho $a > b$, hãy so sánh:

a) $-3a + 4$ và $-3b + 4$

b) $2 + 3a$ và $2 + 3b$

c) $2a - 3$ và $2b - 3$

d) $2a - 4$ và $2b + 5$

Bài 4: Số a là âm hay dương nếu:

a) $-8a > 4a$;

b) $6a \leq 12a$;

c) $-6a \geq -12a$;

d) $-5a > 15a$

Bài 5: So sánh a và b nếu:

a) $2a + 2025 < 2b + 2025$

b) $2024a - 2025 \geq 2024b - 2025$

c) $-2024 - 5a > -2024 - 5b$

d) $(m^2 + 1)a - 9 \leq (m^2 + 1)b - 9$

Bài 6: Cho a, b, c, d, e thuộc \mathbb{R} . Chứng minh rằng:

a) $a^2 - a + 1 > 0$

b) $(a + 1)(a + 2)(a + 3)(a + 4) + 1 > 0$

c) $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

d) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

Bài 7: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:



a) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

b) $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$; với $a, b \geq 0$

Bài 8: Với mọi x, y, z chứng minh rằng:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Bài 9: Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$, $\forall a, b, c$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b + c + d)$, $\forall a, b, c, d$.

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$, $\forall a, b, c, d, e$

d) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 6$, $\forall a, b, c, d > 0$ và $abcd = 1$.

Bài 10: Một nhóm thiện nguyện dự định tổ chức cho trẻ em mồ côi ở C tham quan và tìm hiểu về văn hóa bản địa tại bản làng D. Biết chi phí thuê xe đưa đón là 1 triệu đồng, chi phí mua quà và học vật dụng làm thủ công là 200000 đồng/trẻ, chi phí ăn uống 2 bữa mỗi bữa 25000 đồng/trẻ và chi phí sinh hoạt khác là 50000 đồng/trẻ/ngày. Nếu tổng số tiền quỹ của nhóm là 25 triệu đồng, thì nhóm có thể tổ chức cho tối đa bao nhiêu trẻ em tham gia chương trình trong 2 ngày.



BÀI 6:

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

• **Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn**

Bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$ được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .

• **Nghiệm của bất phương trình:** Số x_0 là một nghiệm của bất phương trình $A(x) < B(x)$ nếu $A(x_0) < B(x_0)$ là khẳng định đúng.

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

• **Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn**

┌ Bất phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b < 0$ ($a \neq 0$) được giải như sau:

$$ax + b < 0$$

$$ax < -b$$

$$\text{Nếu } a > 0 \text{ thì } x < \frac{-b}{a}.$$

$$\text{Nếu } a < 0 \text{ thì } x > \frac{-b}{a}$$

Chú ý: các bất phương trình $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$ được giải tương tự

BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn, xét một giá trị có là nghiệm của bất phương trình một ẩn không.

1. Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không?

Nếu có hãy chỉ ra hệ số a và b .

a) $3x - 4 \geq 0$ b) $0x + 3 > 0$ c) $\frac{1}{2}x < 0$ d) $\frac{x^2}{3} - 7 \leq 0$

2. Tìm m để các bất phương trình sau là các bất phương trình bậc nhất ẩn x

a) $(m - 1)x + m + 1 \geq 0$ b) $(m^2 - 1)x + m > 0$

c) $(m + 1)x^2 + x - 1 < 0$ d) $\frac{m - 3}{m + 1}x - 6 \leq 0$

3. Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m

a) $(m^2 + 3)x + 1 \leq 0$ b) $-(m^2 + m + 4)x > -2m + 3$



4. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn. Kiểm tra xem giá trị $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình bậc nhất một ẩn.

a) $2x + 3y > 6y + 7$;

b) $-5x + 4 < 2 - 3x$;

c) $-5y + 8y + 4 < 3 - 2,5y$ (ẩn y);

d) $8x - 3 \geq 1 - 6x + 15x$;

e) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$.

5. Hãy xét xem $x = -1$ có là nghiệm của các bất phương trình sau không?

a) $3x - 7 > 2x + 1$

c) $7 - 3x < 2 - 5x$

b) $-3x - 1 > x + 1$

d) $5(x - 2) > 3x - 1$

Dạng 2. Giải bất phương trình cơ bản

6. Giải các bất phương trình sau

a) $2x - 8 > 0$;

b) $\frac{3}{2}x < -9$;

c) $3x - 3 > x + 5$;

d) $\frac{x + 4}{2} + x < -7$

7. Giải các bất phương trình sau

a) $3x + 15 < 0$

b) $5x + 4 > -11 + 2x$

c) $\frac{x}{2} - \frac{11}{5} \leq \frac{-1}{5}$

d) $\frac{3}{4}x + 1 \leq \frac{1}{4}x + 3$

8. Giải các bất phương trình sau và viết tập nghiệm bằng kí hiệu tập hợp

a) $\frac{7(x - 2)}{6} - 2 > \frac{2(x + 1)}{3}$;

b) $x - \frac{2x + 1}{2} > 2x - \frac{2}{3}$

c) $\frac{x + 2}{7} - \frac{1}{21} > \frac{3x + 1}{3}$;

d) $1 + \frac{x - 2}{3} > 5 - x + \frac{3(x - 2)}{3}$

9. Giải các bất phương trình:

a) $5x - 7 > 3(x - 2) + 2x$;

b) $4(1,5x + 2,5) < (x + 3)^2 + (5 - x)(x + 5)$;

c) $\frac{x - 4}{5} - x + 2 \leq \frac{x + 3}{4} - \frac{x - 2}{3}$;

d) $4x(x - 1,25) + \frac{3(1 - 3x)}{2} \geq (2x - 3)^2$.

10. Tìm x sao cho: $2(3x - 4) < 8x - 10 < 7x - 2$.



Giải bất phương trình kép này thực chất là giải đồng thời hai bất phương trình $2(3x - 4) < 8x - 10$ và $8x - 10 < 7x - 2$.

Giá trị của x thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình là nghiệm.

11. Cho hai bất phương trình:

$$\frac{x-3}{5} + \frac{11+x}{4} > \frac{3x-5}{2} \quad (1) \text{ và } 5 + \frac{x-4}{5} < x - \frac{2x-9}{2} + \frac{3x+2}{3} \quad (2)$$

a) Tìm giá trị của x thỏa mãn hai bất phương trình.

b) Tìm giá trị nguyên của x thỏa mãn hai bất phương trình.

12. Giải các bất phương trình:

$$a) \frac{2x-1016}{1000} + \frac{2x-1000}{1016} < \frac{2x-16}{2000} + \frac{2x-1}{2015} \quad (1)$$

$$b) \frac{5x-100}{900} + \frac{5x-200}{800} \leq \frac{5x-500}{250} \quad (2)$$

$$c) \frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} > \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5} \quad (3)$$

Dạng 3. Biến đổi đưa về bất phương trình bậc nhất một ẩn

13. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số

$$a) (x+1)^2 + 2x^2 < (2x+3)^2 - (x-3)^2$$

$$b) 2x(x-7) + (3-x)^2 > 3(x+1)^2$$

14. Giải các bất phương trình:

$$a) 5(x+2)^2 < (2x+3)(2x-3) + (x-5)^2 + 30x;$$

$$b) 4(2,5x^2 + 1) \geq 9(x+3)(x-3) + (2-x)^2 + 1;$$

$$c) x^3 \leq 2x + 56.$$

Hướng dẫn giải: Sử dụng các quy tắc biến đổi bất phương trình đưa các bất phương trình về dạng $ax + b > 0$.

Dạng 4. Bài toán rút gọn biểu thức và tìm giá trị của ẩn để biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước

$$15. \text{ Cho biểu thức } A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

a) Rút gọn biểu thức A



b) Tìm x để $A > 0$

16. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x}{5} + \frac{5}{2x-5} \right) : \left(\frac{4x^2}{125-20x^2} + \frac{1}{2x+5} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A ;

b) Tìm x để $A \leq -2$;

c) Tìm x để $A > ax$ với a là một hằng số.

17. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn A ;

b) Tìm x để $A > 0$

Dạng 5. Một số bài toán thực tế.

18. Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

19. Trong cuộc thi bắn súng, mỗi xạ thủ được bắn 10 phát. Mỗi lần trúng đích được 5 điểm, mỗi lần trượt bị trừ 1 điểm. Xạ thủ nào đạt được 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi xạ thủ phải bắn trúng đích bao nhiêu lần thì được thưởng?

20. Bạn Minh có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 17 nghìn đồng. Hỏi bạn Minh mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

21. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là 7,4%. Bà Mai dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hàng năm ít nhất là 60 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Mai cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

22. Một đội bóng đá tham gia một giải đấu. Đội đấu 20 trận và được 41 điểm. Theo quy định của giải, mỗi trận thắng được 3 điểm, mỗi trận hòa được 1 điểm, mỗi trận thua 0 điểm. Gọi số trận thắng của đội đó là x , số trận hòa là y và số trận thua là z , tìm x, y, z . Biết rằng số trận thắng của đội đó là một số chẵn.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không?

a) $0x + 3 \geq 0$; b) $x - 1 = 0$; c) $\frac{2}{3}x \leq 0$; d) $\frac{2x^2}{5} + 1 > 0$.

Bài 2: Trong các bất phương trình sau đâu là bất phương trình bậc nhất một ẩn? Vì sao?

a) $|-2x + 3| > 0$; b) $\frac{x}{3} - \frac{5}{4} = 0$; c) $\frac{1}{x} + 4 \leq 0$ d) $\frac{-3x - 8}{4} \geq 0$.

Bài 3: Tìm m để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn x



a) $(m + 2)x - 1 \geq 0$

b) $(m - 2)x + 6 < 0$

c) $(m^2 - 4)x + 2m - 1 \leq 0$

d) $(m^2 - 4)x^2 + x - 1 \leq 0$

Bài 4: Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m

a) $(m^2 + 1)x - 2 > 0$

b) $(m^2 + 4m + 4)x < 2$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

a) $x - 5 \geq 0$

b) $x + 5 \leq 0$

c) $-2x - 6 > 0$

d) $4x - 12 < 0$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau:

a) $3x + 2 > 2x + 3$

b) $5x + 4 < -3x - 2$

c) $\frac{2}{3}(2x + 3) < 7 - 4x$

d) $\frac{1}{4}(x - 3) \leq 3 - 2x$

Bài 7: Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{x + 2}{6} + \frac{x + 5}{3} > \frac{x + 3}{5} + \frac{x + 6}{2}$;

b) $\frac{2x - 4}{2014} + \frac{2x - 2}{2016} < \frac{2x - 1}{2017} + \frac{2x - 3}{2015}$

c) $\frac{x + 81}{19} + \frac{x + 82}{18} > \frac{x + 84}{16} + \frac{x + 85}{15}$;

d) $\frac{x - 22}{8} + \frac{x - 21}{9} + \frac{x - 20}{10} + \frac{x - 19}{11} < 4$

Bài 8: Giải các bất phương trình sau và biểu diễn trên trục số

a) $\frac{x}{2}(4x - 3) + 2(3 - x)(x + 4) \leq 0$;

b) $x(1 - 2x) + (x + 1)^2 + (x - 2)^2 < 0$

c) $x^2(2x - 1) + (x + 2)^2 - 2x^3 - x + 3 > 0$;

d) $(x + 2)^2 - 2(x + 3)(x - 4) > x(3 - x)$

Bài 9: Tìm giá trị của x thỏa mãn cả hai bất phương trình:

$$\frac{2x}{5} + \frac{3 - 2x}{3} \geq \frac{3x + 2}{2} \text{ và } \frac{x}{2} + \frac{3 - 2x}{5} \geq \frac{3x - 5}{6}$$

Bài 10: Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình sau

$$\frac{3x - 2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8 \text{ và } 1 - \frac{2x - 5}{6} > \frac{3 - x}{4}$$

Bài 11: Tìm điều kiện của x để biểu thức sau có giá trị âm:

$$A = \left(\frac{1 - x}{x + 3} - \frac{x + 3}{x - 1} \right) : \left(\frac{x + 3}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 3} \right)$$



Bài 12: Tìm điều kiện của x và y để biểu thức sau có giá trị dương:

$$A = \left(\frac{x^2 - xy}{y^2 + xy} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} \right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x - y} \right)$$

Bài 13: Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng cho 3 km đầu tiên và giá 12 nghìn đồng cho mỗi ki lô mét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa là bao nhiêu ki lô mét (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 14: Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,5%. Hỏi nếu muốn có một số tiền lãi hằng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

BÀI 7: CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

• **Căn bậc hai** của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$

Nhận xét: Số âm không có căn bậc hai;

Số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0;

Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là \sqrt{a} (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

Tính chất của căn bậc hai: $\sqrt{a} = |a|$ với mọi số thực a .

• **Căn thức bậc hai** là biểu thức có dạng \sqrt{A} , trong đó A là một biểu thức đại số. A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

\sqrt{A} xác định khi A lấy giá trị không âm và ta thường viết là $A \geq 0$. Ta nói $A \geq 0$ là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của \sqrt{A}

Với $A \geq 0$ ta có $\sqrt{A} \geq 0$; $(\sqrt{A})^2 = A$; $\sqrt{A^2} = |A|$

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm căn bậc hai của một số

1. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

Số	25	0,64	0,01	$\frac{9}{16}$	2	0	-1
Căn bậc hai							
Căn bậc hai số học							

2. Tính căn bậc hai của các số sau

a) 1; b) 9; c) $\frac{16}{9}$; d) 0,36

3. Tính căn bậc hai số học của các số sau

a) 0,01; b) 0,04; c) 0,25 d) $\frac{4}{9}$.

4. Tính giá trị biểu thức

$$A = \sqrt{0,09} + 7\sqrt{0,36} - 3\sqrt{2,25} \qquad B = \sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$$

Dạng 2: So sánh các căn bậc hai

Với hai số a, b không âm ta có $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

5. So sánh các số sau:

a) $\sqrt{26}$ và 5; b) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7;
c) $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ và $\sqrt{3} + 5$ d) $-5\sqrt{35}$ và -30.

6. So sánh các số sau:

a) 6 và $\sqrt{41}$.

b) $2\sqrt{27}$ và $\sqrt{147}$.

c) $-3\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$.

d) $2\sqrt{2} - 1$ và 2.

7. Cho $a > 0$. Chứng minh rằng

i) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$.

ii) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

Dạng 3: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

8. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{2x - 6}$;

b) $\sqrt{5 - 2x}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x - 1}}$.

9. Tìm x để căn thức $\sqrt{\frac{1}{x^2 - 4x + 4}}$ có nghĩa.

10. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{\frac{-9}{2 - 5x}}$

b) $\sqrt{-\frac{1}{x - 1}}$

c) $\sqrt{x^2 + 2022}$

d) $\sqrt{\frac{3x - 15}{x^2 + 1}}$

e) $\sqrt{\frac{5 - x}{x^2 - 2x + 10}}$

11. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{x^2 - 36}$ b) $\sqrt{(x - 1)(x - 5)}$ c) $\sqrt{x^2 - 8x - 9}$ d) $\sqrt{\frac{5 + x}{12 - x}}$ e) $\sqrt{\frac{2x - 1}{5 - x}}$

Dạng 4. Rút gọn và biến đổi biểu thức chứa căn bậc hai.

12. Rút gọn biểu thức sau

a) $\sqrt{a^2}$ với $a \leq 0$

b) $\sqrt{(a - 2)^2}$ với $a > 2$

c) $\sqrt{49a^2} + 3a$ với $a \geq 0$

d) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ với $a \leq 0$

13. Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{x^2 - 7}{x + \sqrt{7}}$ với $x \neq -\sqrt{7}$

b) $\frac{x - 10\sqrt{x} + 25}{x - 25}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

c) $\frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

d) $\frac{x^2 - 2\sqrt{13}x + 13}{x^2 - 13}$ với $x \neq \pm\sqrt{13}$

14. Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$ với $x \neq -\sqrt{5}$

b) $\frac{x - 10\sqrt{x} + 25}{x - 25}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

c) $\frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

d) $\frac{4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3}{4x^2 - 3}$ với $x \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}$ với $x > 0$

f) $\frac{x - 8\sqrt{x} + 15}{x - 4\sqrt{x} - 5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

15. Hãy viết các biểu thức sau thành bình phương của biểu thức khác:

a) $4 - 2\sqrt{3}$

b) $7 + 4\sqrt{3}$

c) $13 - 4\sqrt{3}$

d) $19 + 6\sqrt{2}$

16. Phân tích thành nhân tử (với x không âm)

a) $x^2 - 3$

b) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$

c) $9x - 12\sqrt{x} + 4$

d) $4x^2 - 4\sqrt{5}x + 5$

e) $x\sqrt{x} - 1$

f) $x\sqrt{x} + 8$

g) $x\sqrt{x} - \sqrt{x}$

h) $x + 2\sqrt{x} - 8$ (2 cách)

Dạng 5. Tìm x

17. Tìm x thỏa mãn:

a) $\sqrt{x} = -2018.$

b) $\sqrt{x+1} - 1 = 2.$

c) $2\sqrt{3x} = 12$

d) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2$

18. Tìm x thỏa mãn

a) $\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4.$

b) $3 - \sqrt{x^2 + 5} = 4.$

19. Tìm số thực x thỏa mãn:

a) $\sqrt{-2x^2 - 9} = 2;$

b) $\sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0.$

c) $\sqrt{3x - 1} = 4$

d) $\sqrt{-3x + 4} = 12;$

e) $\sqrt{(x-7)(x+7)} = 2;$

f) $\sqrt{9(x-1)} - 19 = 2.$

Dạng 6. Rút gọn biểu thức dạng $\sqrt{A^2}$

20. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}};$

b) $(\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}.$

21. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}.$

b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

c) $(2 + \sqrt{7})\sqrt{11 - 4\sqrt{7}};$

d) $\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{9 - 3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

f) $\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

22. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

b) $\sqrt{12 + 3\sqrt{3} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} - 2\sqrt{3}$.

23. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{1}{2}\sqrt{12 - 8\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{10 + 4\sqrt{6}}$

c) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}$.

24. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1}$ với $x > \frac{-1}{2}$;

b) $9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2}$ với $x < 2$

25. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b}$ với $a \neq b$;

b) $\frac{2}{x - 1} \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{4x^2}}$ với $0 < x < 1$.

26. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} - x^2$;

c) $\frac{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{x + 1}$ với $x > 1$.

Dạng 7. Giải bất phương trình

27. Tìm giá trị của x, biết:

a) $\sqrt{2x} < \frac{1}{3}$

b) $\sqrt{-3x + \frac{1}{2}} \geq 5$

c) $\sqrt{-2x + 1} > 7$

d) $\sqrt{2x - 1} \leq \frac{3}{2}$

e) $\sqrt{x} < 3$

f) $\sqrt{3x} < 9$

Dạng 8: Chứng minh một số là số vô tỉ

28. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

29. Chứng minh rằng $\sqrt{5}$ là một số vô tỉ.

Dạng 9. Một số bài toán thực tế

30. Để ước tính tốc độ s (dặm/giờ) của một chiếc xe, cảnh sát sử dụng công thức $s = \sqrt{30fd}$, ở đó d là độ dài vết trượt của bánh xe tính bằng feet và f là hệ số ma sát.

a) Trên một đoạn đường (có gắn bảng báo tốc độ bên trên) có hệ số ma sát là 0,73 và vết trượt của một xe 4 bánh sau khi thắng lại là 49,7 feet. Hỏi xe có vượt quá tốc độ theo biển báo trên đoạn đường đó không? (Cho biết 1 dặm = 1,61km).

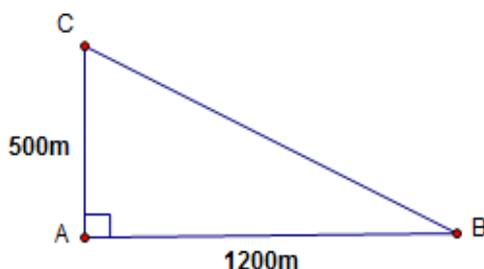
b) Nếu xe chạy với tốc độ 48km / giờ trên đoạn đường có hệ số ma sát là 0,45 thì khi thắng lại vết trượt trên nền đường dài bao nhiêu feet?

31. Để gắn một quạt thông gió hình vuông lên một bức tường hình vuông, anh thợ điện phải đục bỏ một phần tường hình vuông có diện tích $0,04m^2$.

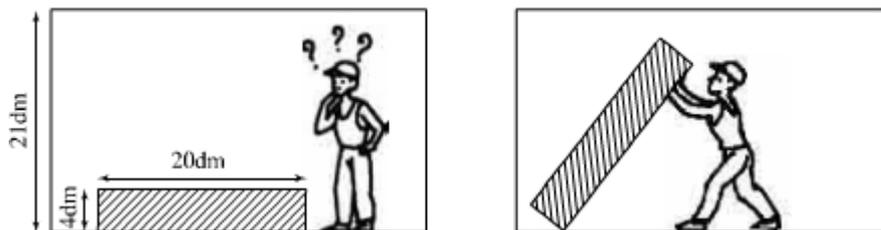
a) Tìm độ dài cạnh của phần bức tường hình vuông bị đục đó.

b) Diện tích bức tường còn lại sau khi đục bỏ $0,04m^2$ tường để gắn quạt là $15,96m^2$. Tìm độ dài mỗi cạnh của bức tường.

32. Nhà bạn Nam ở vị trí A , nhà bạn Minh ở vị trí B cách nhau $1200m$. Trường học ở vị trí C , cách nhà bạn Nam $500m$ và AB vuông góc với AC . Nam đi bộ đến trường với vận tốc $4km/h$, Minh đi xe đạp đến trường với vận tốc $12km/h$. Lúc 6 giờ 30 phút, cả hai cùng xuất phát từ nhà đến trường. Hỏi bạn nào đến trường trước?



33. Trong lúc bạn Nam dựng tủ cho đứng thẳng, tủ có bị vướng vào trần nhà cao $21dm$ không?



34. Một màn hình laptop 17 inch có tỉ lệ chiều rộng và chiều dài là $16 : 10$. Hỏi chiều rộng màn hình là bao nhiêu cm biết $1inch \approx 2,54cm$.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

Số	16	144	17	8^2	-4	0,01	$\frac{4}{49}$
Căn bậc hai							
Căn bậc hai số học							

Bài 2: Tìm căn bậc hai số học và căn bậc hai của các số sau:

- a) 0,25 b) 169; c) $(-9)^2$. d) 2,25.

Bài 3: Tìm x , biết:

- a) $x^2 = 121$ b) $4x^2 = 9$ c) $x^2 = 10$

Bài 4: Hãy viết các biểu thức sau thành bình phương của biểu thức khác:

a) $6 - 2\sqrt{5}$ b) $9 + 4\sqrt{5}$ c) $28 + 6\sqrt{3}$ d) $33 - 20\sqrt{2}$

Bài 5: Phân tích thành nhân tử (với x không âm)

a) $x - 1$ b) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$ c) $4x - 4\sqrt{x} + 1$ d) $25x^2 - 10\sqrt{2}x + 2$
e) $x\sqrt{x} + 1$ f) $x\sqrt{x} - 27$ g) $x - \sqrt{x}$ i) $x + \sqrt{x} - 6$

Bài 6: Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ với $x \geq 0$ b) $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$
c) $\frac{x^2-4\sqrt{3}x+12}{x-2\sqrt{3}}$ với $x \neq 2\sqrt{3}$ d) $\frac{x\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$

Bài 7: So sánh:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$ b) 3 với $\sqrt{10}$ c) 8 và $\sqrt{65}$

Bài 8: So sánh hai số sau:

a) 6 và $\sqrt{37}$ b) 2 và $\sqrt{2} + 1$ c) 1 và $\sqrt{3} - 1$
d) $2\sqrt{31}$ và 10 e) $-3\sqrt{11}$ và -12 g) $9 + 4\sqrt{5}$ và 17

Bài 9: Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

a) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ b) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$ c) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ d) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

Bài 10: Tìm x để biểu thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{5-2x}$; b) $\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$; c) $\sqrt{\frac{1}{x^2-100}}$; d) $\sqrt{25-x^2}$

Bài 11: Tìm điều kiện để biểu thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{3x-1}$ b) $\sqrt{5-3x}$ c) $\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}$ d) $\sqrt{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$
e) $\frac{1}{\sqrt{7x-14}}$ f) $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{7x+2}}$ g) $\sqrt{\frac{x+2}{7-2x}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}$
i) $\sqrt{\frac{3}{x-1}}$ j) $\sqrt{x^2-2}$ k) $\sqrt{x^2+3}$ l) $\sqrt{25-4x^2}$
n) $\sqrt{2x^2-5x+3}$ p) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ q) $\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ r) $\frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{3x}{\sqrt{5-x}}$

Bài 12: Thực hiện các phép tính sau

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$ b) $\sqrt{(-2)^6}$ c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$ e) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2}$

Bài 13: Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$

b) $B = \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25} \right) : \sqrt{169}$

c) $\left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121} \right) \sqrt{81}$

d) $D = 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2} - 3^2$

Bài 14: Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}$

c) $\sqrt{(4 + \sqrt{2})^2}$

d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$

e) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$

f) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$

g) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

h) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$

Bài 15: Thực hiện các phép tính.

a) $\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(5 - 2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5 + 2\sqrt{6})^2}$

c) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$

e) $\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2}$

f) $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2}$

Bài 16: Rút gọn rồi tính

a) $5\sqrt{(-2)^4}$

b) $-4\sqrt{(-3)^6}$

c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$

d) $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8}$

Bài 1: Tính

$A = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

$B = \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$

$C = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

$D = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

$E = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} ;$

$F = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} ;$

$G = \sqrt{12 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

$H = \sqrt{41 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}$

Bài 18: Tìm x , biết:

a) $5x^2 = 80$

b) $2\sqrt{x} = 1$

c) $\sqrt{3x} \leq 6$

Bài 19: Tìm x không âm biết :

a) $\sqrt{x} = 5$

b) $\sqrt{x} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt{x} = -2$

d) $\sqrt{2x + \frac{1}{3}} = 3$

e) $\sqrt{2x + 1} + 3 = 0$

f) $\sqrt{x^2 - 4x + 13} = 3$

Bài 20: Tìm x , biết:

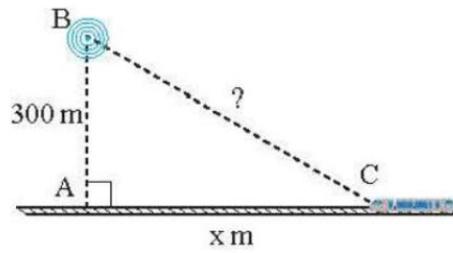
a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2$

b) $\sqrt{x^2} = 3x - 2$

c) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = x + 7$

Bài 21: Chứng minh $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.

Bài 22: Một trạm phát sóng được đặt ở vị trí B cách đường tàu một khoảng $AB = 300\text{m}$. Đầu tàu đang ở vị trí C cách vị trí A một khoảng $AC = x(\text{m})$.



- Viết biểu thức biểu thị khoảng cách từ trạm phát sóng đến đầu tàu.
- Tính khoảng cách trên với $x = 400\text{m}$, $x = 1000\text{m}$ (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI 8:
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA

• Khai căn bậc hai và phép nhân

Với A, B là các biểu thức không âm, ta có $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$

Chú ý: Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C} \text{ với } A \geq 0, B \geq 0; C \geq 0$$

• Khai căn bậc hai và phép chia

Với A, B là các biểu thức với $A \geq 0, B \geq 0$, thì $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$

BÀI TẬP

A. KHAI CĂN BẬC HAI VÀ PHÉP NHÂN

Dạng 1. Khai căn một tích, nhân các căn bậc hai

1. Tính

a) $\sqrt{27 \cdot 75}$; b) $\sqrt{200 \cdot 18}$; c) $\sqrt{160 \cdot 12 \cdot 1}$; d) $\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 6}$.

2. Tính

a) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180}$; b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{105}$; c) $\sqrt{250} \cdot \sqrt{0,9}$; d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{162}$;

3. Tính

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ b) $\sqrt{3 \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3 \frac{3}{7}} \cdot \sqrt{12}$; c) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50}$
d) $\sqrt{12,8} \cdot \sqrt{0,2}$ e) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{4,5}$; f) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

4. Tính

a) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24} \right) \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}$
c) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \cdot \sqrt{12}$ d) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{8}$

5. Tính

a) $\sqrt{55 \cdot 77 \cdot 35}$ b) $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$
c) $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ d) $2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$

6. Khai triển biểu thức sau

a) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$

b) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$

c) $(\sqrt{27} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{3})$

d) $(\sqrt{x} + 2) \cdot (\sqrt{x} - 3)$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức, tính giá trị của biểu thức**7. Tính**

a) $\sqrt{10,6^2 - 5,6^2}$;

d) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})$

b) $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$;

e) $(\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}})^2$

c) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{26}}{2\sqrt{5} + \sqrt{52}}$;

f) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

8. Chứng minh:

a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$

b) $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8$

c) $(\sqrt{2014} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2014} + \sqrt{2013}) = 1$.

d) $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$

9. Dùng hằng đẳng thức, rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{41^2 - 40^2}$;

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{7})$

c) $(2\sqrt{5} - \sqrt{8}) \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{8})$

d) $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{5})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5})$

e) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$;

f) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$;

g) $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2}$

h) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

i) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

j) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

k) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$

10. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sqrt{(a - 1)^2(2a + 1)^2}$ với $a > 1$;

b) $B = \sqrt{(b - 1)(b + 7) + 16}$ với $b < -3$;

c) $C = \sqrt{c^2 + 10c + 25} - \sqrt{c^2 - 10c + 5}$ với $-5 \leq c \leq 5$;

d) $D = \frac{1 - d}{\sqrt{d^2 - 2d + 1}} + \frac{\sqrt{d^2 - 4d + 4}}{d - 2}$ với $d > 2$

11. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}, (x \leq 3); & \text{b) } B &= |x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}, (x < 2) \\ \text{c) } C &= \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2}, (-2 \leq x \leq 0). & \text{d) } D &= 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}. \end{aligned}$$

Dạng 3: Phân tích thành nhân tử

12. Phân tích thành nhân tử (với điều kiện các biểu thức dưới dấu căn đều có nghĩa)

$$\begin{aligned} \text{a) } 3 - \sqrt{3}; & \quad \text{b) } 5 + \sqrt{5} & \quad \text{c) } a - \sqrt{a} \\ \text{d) } x + 3\sqrt{xy}; & \quad \text{e) } \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}; & \quad \text{f) } \sqrt{x^3} - 25\sqrt{x} \end{aligned}$$

13. Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 4x} \text{ với } x > 4 \\ \text{b) } B &= \sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x(x+2) + 4} \text{ với } x > 2; \\ \text{c) } C &= \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x} \text{ với } x > 0. \end{aligned}$$

14. Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp nhóm các số hạng hoặc thêm bớt

$$\begin{aligned} \text{a) } x - \sqrt{x} - \sqrt{xy} + \sqrt{y} & \quad \text{b) } \sqrt{ax} - \sqrt{by} - \sqrt{ay} + \sqrt{bx} \\ \text{c) } \sqrt{x^2 - 9} - 2\sqrt{x - 3} & \quad \text{d) } x - 3\sqrt{x} + 2. \\ \text{e) } x - \sqrt{x} - 6; & \quad \text{f) } x + \sqrt{x} - 12 \end{aligned}$$

B. KHAI CĂN BẬC HAI VÀ PHÉP CHIA

Dạng 4: Thực hiện phép tính

15. Tính:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{\frac{49}{81}} & \text{b) } B &= \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2}} & \text{c) } C &= \sqrt{98} : \sqrt{2}; \\ \text{d) } D &= (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}; & \text{e) } E &= (\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}; \end{aligned}$$

16. Tính

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}; & \quad \text{b) } \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}}; & \quad \text{c) } \frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}; & \quad \text{d) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} \end{aligned}$$

17. Thực hiện phép tính

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3} & \quad \text{b) } (\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5}; \\ \text{c) } (2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2}. & \quad \text{d) } \sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44}. \end{aligned}$$

$$e) \sqrt{36 - 12\sqrt{5}} : \sqrt{6}$$

$$f) \frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}}$$

Dạng 5: Rút gọn biểu thức

18. Rút gọn các biểu thức:

$$a) A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}}, \text{ với } b > 0;$$

$$b) B = b^5 \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 9}{b^8}}.$$

$$c) C = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}} \text{ với } x \geq 1;$$

$$d) D = \sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}} \text{ với } a < 1.$$

19. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}} \text{ với } x \geq 5;$$

$$b) \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9(x-4)^2}} \text{ với } x < 4.$$

$$c) \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} \text{ với } x \geq 0;$$

$$d) \sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2 - 1}{x - 3} \text{ với } x < 3;$$

20. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \sqrt{1 \frac{9}{16} \cdot 5 \frac{4}{9} \cdot 0,01};$$

$$b) \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}};$$

$$c) \sqrt{\frac{149^2 - 7^2}{457^2 - 384^2}}.$$

Dạng 6. Toán thực tế

21. Trong vật lí, ta có định lí Joule – Lenz để tính nhiệt lượng tỏa ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua: $Q = I^2 R t$

Trong đó:

+ Q là nhiệt lượng tỏa ra trên dây dẫn tính theo Jun (J)

+ I là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe (A)

+ R là điện trở dây dẫn tính theo Ohm (Ω)

+ t là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở $R = 80\Omega$. Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn tỏa ra trong 1 giây là $500J$.

22. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bởi độ dài đường chéo. Một loại ti vi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là $4 : 3$

a) Gọi x (inch) là chiều rộng của màn hình ti vi. Viết công thức tính độ dài đường chéo d (inch) của màn hình ti vi theo x

b) Tính chiều rộng và chiều dài (theo centimét) của màn hình ti vi loại 60 inch

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tính:

a) $\sqrt{0,04.25}$ b) $\sqrt{4.1,44.225}$ c) $\sqrt{2500 \cdot 4,9 \cdot 0,9}$ d) $\sqrt{2^4 \cdot (-3)^2}$

Bài 2: Tính:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$; b) $\sqrt{(-2)^6}$ c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$
d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$ e) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)^2}$ f) $\sqrt{(0,1-\sqrt{0,1})^2}$

Bài 3: Tính:

a) $\sqrt{13^2-12^2}$ b) $\sqrt{17^2-8^2}$ c) $\sqrt{117^2-108^2}$ d) $\sqrt{313^2-312^2}$

Bài 4: Tính:

a) $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$
c) $(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2$ d) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{0,16a^2}$ với $a < 0$ b) $\sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}}$ với $x > 0$;
c) $\sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2}$ với $x > 2$ d) $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$

Bài 6: Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{4(a-3)^2}$ với $a \geq 3$; b) $\sqrt{9(b-2)^2}$ với $b < 2$;
c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$; d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ với $b < 0$.
e) $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$; f) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ với $x, y \geq 0$;

Bài 7: Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

a) $\sqrt{0,36x^2}$ với $x < 0$ b) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 3$
c) $\sqrt{27.48(1-x)^2}$ với $x > 1$ d) $\frac{1}{x-y} \cdot \sqrt{x^4(x-y)^2}$ $x > y > 0$

e) $\sqrt{4 \cdot (x-3)^2}$ với $x \geq 3$

f) $\sqrt{9 \cdot (x-2)^2}$ với $x < 2$

h) $\sqrt{x^2(x-1)^2}$ với $x < 0$

i) $\sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3x}{8}}$ với $x \geq 0$

j) $\sqrt{13x} \sqrt{\frac{52}{x}}$ với $x > 0$

k) $6\sqrt{\frac{1}{2}}$ với x bất kỳ

g) $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2$ với $x > 0$ m) $(3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$,

Bài 8: Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

a) $x^2 - 2$;

b) $3x^2 - 1$

c) $4x^2 - 5$

d) $\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$;

e) $\sqrt{x^3} - 8$;

f) $9x + 6\sqrt{xy} + y$.

Bài 9: Phân tích thành nhân tử

a) $a - 5\sqrt{a}$;

b) $a - 7$ với $a > 0$;

c) $a + 4\sqrt{a} + 4$;

d) $\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 12$.

Bài 10: Tính

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

b) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$

c) $\sqrt{\frac{25}{64}}$

d) $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

f) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$

g) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$

h) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$

Bài 11: Tính

a) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}}$;

b) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{0,4}}$;

c) $\frac{\sqrt{9 + 6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$

Bài 12: Rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}}, \text{ với } b > 0;$$

$$B = b^5 \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 9}{b^8}} \text{ với } a < -3$$

$$C = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}} \text{ với } x \geq 1;$$

$$D = \frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}} \text{ với } x \geq 5$$

BÀI 9.1:
BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

• **Đưa thừa số ra ngoài dấu căn**

Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$

• **Đưa thừa số vào trong dấu căn**

Nếu a và b là một số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$

• **Trục căn thức ở mẫu**

Với các biểu thức A, B và $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0; A \neq B^2$ ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}$$

Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B^2$ ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B};$$

• **Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai**

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài dấu căn hoặc trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn, trục căn thức ở mẫu)

BÀI TẬP

Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{25.90}$ b) $\sqrt{96.125}$ c) $\sqrt{75.54}$ d) $\sqrt{245.35}$

2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{54}$ b) $\sqrt{108}$ c) $0,1\sqrt{20000}$ d) $-0,05\sqrt{28800}$

3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{8x^2}$ với $x \geq 0$; b) $\sqrt{27xy^2}$ với $x \geq 0; y \leq 0$

c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$; d) $\sqrt{48(x-1)^2 y^4}$ với $x < 1, y \in \mathbb{R}$

4. Rút gọn biểu thức:

a) $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}$. c) $C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$.

b) $B = \sqrt{147} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27}$. d) $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$.

5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}}$ với $x > 0$;

b) $B = \frac{1}{3}\sqrt{9+6y+y^2} + \frac{4y}{3} + 5$ với $y \leq -3$

Dạng 2: Đưa thừa số vào trong dấu căn

6. Đưa thừa số vào trong dấu căn.

$3\sqrt{5}$

b) $-5\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2}$

7. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $a\sqrt{11}$ với $a \geq 0$;

b) $a\sqrt{\frac{-23}{a}}$ với $a < 0$.

c) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}}$ với $a > 0$;

d) $(a-2)\sqrt{3}$ với $a < 2$.

Dạng 3: So sánh các căn bậc hai

8. So sánh các cặp số dưới đây:

a) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$;

b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

9. Tìm số bé hơn trong các cặp số sau:

a) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$

b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$

10. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}$ và $4\sqrt{2}$;

b) $5\sqrt{2}; \sqrt{39}; 3\sqrt{8}$ và $2\sqrt{15}$.

11. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự giảm dần:

a) $7\sqrt{2}; 2\sqrt{8}; \sqrt{28}$ và $5\sqrt{2}$;

b) $3\sqrt{10}; 5\sqrt{3}; \frac{20}{\sqrt{5}}$ và $12\sqrt{\frac{2}{3}}$.

12. So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{3} + 2$ và $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

c) 16 và $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17}$

d) 8 và $\sqrt{15} + \sqrt{17}$

Dạng 4: Khử mẫu trong dấu căn

13. Khử mẫu biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{5}{2}}$;

b) $\sqrt{\frac{5}{14}}$;

$$c) \sqrt{\frac{3m}{5n}} \text{ với } m.n > 0;$$

$$d) \sqrt{\frac{7x}{18y}} \text{ với } x.y > 0.$$

14. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$a) \sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}} \text{ với } x > -1;$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}}, \text{ với } a > 0 \text{ hoặc } a \geq 1.$$

15. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$a) -x^2y\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ với } x > 0; y \geq 0;$$

$$b) \sqrt{\frac{-2x}{15}} \text{ với } x < 0;$$

$$c) \sqrt{\frac{5x}{13y}} \text{ với } x \geq 0; y > 0;$$

$$d) \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} \text{ với } x \geq \frac{1}{2}.$$

Dạng 5: Trục căn thức ở mẫu

16. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau

$$a) \frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}};$$

$$b) \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1};$$

$$c) \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{15}}{\sqrt{5}};$$

$$d) \frac{1}{2 - 3\sqrt{3}}$$

17. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau, với các biểu thức đều có nghĩa.

$$a) \frac{1}{\sqrt{m} + n};$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{m} - \sqrt{n}};$$

$$c) \frac{3}{2\sqrt{m} + 1};$$

$$d) \frac{2ab}{2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}};$$

18. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn

$$a) \frac{1}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$$

$$b) \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}}$$

$$c) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

$$d) \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

19. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau

$$a) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{6 + \sqrt{35}}}$$

20. Trục căn thức ở mẫu

$$a) A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}};$$

$$b) B = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}};$$

$$c) C = \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

Bài tập tự luyện

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{2400}$ c) $\sqrt{147}$ d) $\sqrt{1,25}$ e) $\sqrt{12}$

Bài 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{27x^2}$ ($x \geq 0$) b) $\sqrt{8xy^2}$ ($x \geq 0; y \leq 0$)

c) $\sqrt{25x^3}$ ($x > 0$) d) $\sqrt{48xy^4}$ ($x \geq 0; y \in R$)

e) $\sqrt{48y^4}$ f) $\sqrt{8y^2}$ với $y > 0$

Bài 3. Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt{28} + \sqrt{63} - 2\sqrt{7}$ b) $B = 3\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

c) $C = \sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 5\sqrt{48}$ d) $D = 3\sqrt{a^2 + 3} - 3\sqrt{16a^2 + 48} + 4\sqrt{25a^2 + 75}$.

Bài 4. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $3\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{6}$; c) $\frac{2}{7}\sqrt{35}$; d) $-4\sqrt{\frac{1}{8}}$; e) $-0,06\sqrt{250}$.

Bài 5. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$ b) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 0$ c) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$ d) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ với $x > 0$

e) $a\sqrt{13}$ ($a \geq 0$) f) $a\sqrt{\frac{-15}{a}}$ ($a < 0$) g) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}}$ ($a > 0$) h) $a\sqrt{2}$ ($a \leq 0$)

Bài 6. So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$ b) 20 và $3\sqrt{5}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$

Bài 7. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

a) $6\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 15\sqrt{\frac{2}{5}}, 9\sqrt{1\frac{2}{9}}$; b) $-\sqrt{71}, \frac{2}{3}\sqrt{12}, \frac{1}{2}\sqrt{21}, -5\sqrt{3}$.

Bài 8. Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn (giả thiết rằng các biểu thức đã cho có nghĩa):

$\sqrt{\frac{1}{600}}$; $\sqrt{\frac{11}{540}}$; $\sqrt{\frac{3}{50}}$; $\sqrt{\frac{5}{98}}$; $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$.

Bài 9. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

$$\text{a) } \sqrt{\frac{5x^3}{49y}} \quad (x \geq 0; y > 0)$$

$$\text{b) } 7xy\sqrt{\frac{-3}{xy}} \quad (x < 0; y > 0)$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{5b}{49a^3}} \quad (a > 0, b \geq 0)$$

$$\text{d) } \frac{-1}{4}ab\sqrt{\frac{16}{ab}} \quad (a < 0, b < 0)$$

Bài 10. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

$$\text{b) } \frac{3}{\sqrt{15}+4};$$

$$\text{c) } \frac{4}{\sqrt{3}-1};$$

$$\text{d) } \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}};$$

$$\text{e) } \frac{5}{2+\sqrt{3}}$$

$$\text{f) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}};$$

$$\text{g) } \frac{7}{3-\sqrt{2}};$$

$$\text{h) } \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Bài 11. Trục căn thức ở mẫu:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{a}} \quad \text{với } a > 0;$$

$$\text{b) } \frac{5}{\sqrt{x}+3} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 9;$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 3;$$

$$\text{d) } \frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 1;$$

$$\text{e) } \frac{1}{\sqrt{x}+1} \quad \text{với } a > -1;$$

$$\text{f) } \frac{1}{\sqrt{x}-3} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 9;$$

BÀI 9.2:

BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

• Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài dấu căn hoặc trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn, trục căn thức ở mẫu)

BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức không chứa biến

1. Rút gọn các biểu thức sau.

a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$.

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$.

c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$.

d) $0,1 \cdot \sqrt{200} + 2 \cdot \sqrt{0,08} + 0,4 \cdot \sqrt{50}$.

2. Rút gọn các biểu thức sau.

a) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$.

b) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$

c) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$;

d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$

3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$;

b) $B = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$.

c) $C = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}}$.

d) $D = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

Dạng 2 : Chứng minh đẳng thức

4. Chứng minh đẳng thức

a) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$

b) $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ với $a > 0, b > 0$.

5. Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và $a \neq b$)

a) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

b) $\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}\right)^2 = 1$

6. Chứng minh các đẳng thức sau.

$$a) \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2 = 1 \text{ với } a \geq 0 \text{ và } a \neq 1$$

$$b) \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 + 2ab + b^2}} = |a| \text{ với } a+b > 0 \text{ và } b \neq 0$$

Dạng 3. Rút gọn, tính giá trị biểu thức khi biết giá trị của biến

7. Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A khi $a = 2021 - 2\sqrt{2020}$

8. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

9. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x} - 9}{x - 9} \right)$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}$

10. Cho biểu thức $P = \frac{a\sqrt{b} + \sqrt{a} - b\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}}$ với a, b là hai số thực dương

a) Rút gọn biểu thức $P : \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b)}$

b) Xác định giá trị của biểu thức P khi $a = 2019 + 2\sqrt{2018}$ và $b = 2020 + 2\sqrt{2019}$

11. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$ với $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của biểu thức P với $y = 9 + 4\sqrt{5}$

12. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a + 1} \right)$ với $0 \leq a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $\frac{a}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

Dạng 4. Rút gọn, giải phương trình.

13. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right) \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức Q

b) Tìm các giá trị của x để $Q = -1$

14. Cho biểu thức $P(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức $P(x)$

b) Tìm x để $P(x) = x + 1$

15. Cho $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$; $B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2}$. Tìm x sao cho $A = B$

16. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa và rút gọn A

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 2

17. Cho $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{2}{7}$

c) So sánh $2P$ và P^2

Dạng 5. Rút gọn, giải bất phương trình

18. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-3}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{7\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-8} \right) : \frac{\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}+4}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x sao cho $A < 2$

19. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh $P > 1$

20. Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định của A

b) Tính giá trị của A khi $\frac{x}{9} = \frac{2\sqrt{27+7\sqrt{5}}}{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}$

c) Cho $P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot A$. Tìm x để $P < 0$

Dạng 6. Rút gọn, tìm điều kiện của ẩn để biểu thức đạt giá trị nguyên.

Lưu ý: Tìm x nguyên để A nguyên và tìm x để A nguyên là hai dạng với hai cách làm khác nhau.

21. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{x + 9\sqrt{x}}{x - 9}$ với $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 100$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = A : B$ có giá trị nguyên

22. Cho biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm tất cả các giá trị x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

23. Cho biểu thức $A = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

24. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{5x - 10\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x sao cho A nhận một giá trị nguyên

25. Cho biểu thức $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$, với $x > 0; x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên

26. Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{3x + 2\sqrt{x}} - \frac{9x + \sqrt{x} + 1}{3x - \sqrt{x} - 2} \right) : \frac{3\sqrt{x} + 1}{7x - 7\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A , biết $x = 4$

Bài 2: Cho biểu thức $A = \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Tìm x để A có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức A .

c) Với giá trị nào của x thì $A < 1$?

Bài 3: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức A ; b) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{3}$

Bài 4: Cho $A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Đặt $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$. Chứng minh $B > 1$ với $x > 0, x \neq 1$

Bài 5: Cho biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

Bài 6: Cho biểu thức $P = \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-5} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm giá trị của P tại $x = 1$.

d) Tìm giá trị của x để $P = 2$.

e) Cho $P = -3$. Tính giá trị của biểu thức $Q = 9x^2 - 42x + 49$

Bài 7: Cho biểu thức $P = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} - \frac{18}{9-x^2}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm giá trị x để $P > 0$.

d) Tìm giá trị nguyên của x để P là số nguyên.

Bài 8: Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm x để $P = \frac{-3}{4}$.

d) Tìm các giá trị nguyên của x để P cũng có giá trị nguyên.

e) Tính giá trị của biểu thức P khi $x^2 - 9 = 0$.

Bài 9: Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

BÀI 9.3:**DẠNG TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC**

Phương pháp giải

└ Xác định điều kiện phương trình.

└ Dùng các hằng đẳng thức và tính chất của dấu giá trị tuyệt đối.

└ Phân tích đa thức thành nhân tử.

Một số công thức cần lưu ý.

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$$

$$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B \geq 0 \\ A = -B \end{cases}$$

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Dạng 1.**1. Giải phương trình**

a) $\sqrt{x^2} = 1.$

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3.$

2. Giải phương trình: $\sqrt{18x + 9} - \sqrt{8x + 4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x + 1} = 4$ (1)

3. Giải phương trình: $25\sqrt{\frac{x-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4x-12}{9}} - 7\sqrt{x^2-9} + 18\sqrt{\frac{9x^2-81}{81}} = 0$ (2)

4. Tìm x thỏa mãn

a) $\sqrt{\frac{(x-1)^4}{x^2-2x+1}} = 2;$

b) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}} = 3$

5. Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{(x-1)^2} = 3-x$

c) $\sqrt{x^2-4x+3} = x-3$

b) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$

d) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$

6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+x} = x-1;$

d) $\sqrt{x^2-3} = 0;$

b) $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{4x};$

e) $2 - \sqrt{x^2-2} = 0$

$$c) 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x};$$

$$f) x + \sqrt{3x+10} = 0$$

7. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{2x-3} - \sqrt{3} = 0$$

$$d) \sqrt{2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3} - \sqrt{5} - \sqrt{24} = 0$$

$$b) \sqrt{3-x} - \sqrt{x-5} = 0$$

$$e) \sqrt{25x+25} - \sqrt{16x+16} = 12 - \sqrt{4(x+1)}$$

$$c) \sqrt{x^2+4x} - \sqrt{\frac{x^2}{2}} - 8 = 0$$

8. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x^2-9} - \sqrt{x-3} = 0$$

$$b) \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$$

$$c) \frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$$

9. Tìm x thỏa mãn

$$a) \sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2;$$

$$b) \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x-4}} = 1.$$

10. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{\frac{(x+1)^4}{x}} = 4\sqrt{x};$$

$$b) (x-1)\sqrt{\frac{2x-x^2-1}{x}} - 2x = -2.$$

Giải phương trình chứa căn bậc ba:

11. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1$

12. Giải phương trình

$$a) \sqrt[3]{2x+1} = 3;$$

$$b) \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1}$$

13. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 0$

14. Giải các phương trình sau

$$a) \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}.$$

$$b) \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$$

15. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{x^2-9};$$

$$b) \sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x+1} = 1.$$

Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải phương trình

$$a) \sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2;$$

$$b) \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x-4}} = 1;$$

$$c) \sqrt{\frac{5x+7}{x+3}} = 4$$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a) $25\sqrt{\frac{x-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4x-12}{9}} - 7\sqrt{x^2-9} + 18\sqrt{\frac{9x^2-81}{81}} = 0$

b) $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a) $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$

b) $\sqrt{9x-9} - \sqrt{4x-4} + \sqrt{16x-16} - 3\sqrt{x-1} = 16$ với $x \geq 1$

c) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} + 2 = 0$ với $x \geq -1; x \neq 0$

d) $\sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5 + \sqrt{x-2})$ với $x \geq 2$

e) $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1$ với $x \geq 0$

Bài 4: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+9} = 3;$

b) $\sqrt{2x^2+2} = 3x-1;$

c) $\sqrt{x^2-2x+1} = 19x-1;$

d) $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3};$

e) $\sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{x^2+12x+36};$

g) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = 2.$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x+1} = 1$

b) $\sqrt[3]{2-3x} = 3\sqrt[3]{2-3x} = -3.$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-2} + 2 = x$

b) $\sqrt[3]{x^3+2x^2} = x+2$

BÀI 10:
CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA

• **Căn bậc ba**

Căn bậc ba của số thực a là số thức x thoả mãn $x^3 = a$

Chú ý: Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba. Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$

Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

• **Căn thức bậc ba**

Căn thức bậc ba là biểu thức có dạng $\sqrt[3]{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số

Ta có: $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

Để tính giá trị của $\sqrt[3]{A}$ tại những giá trị cho trước của biến, ta thay các giá trị cho trước của biến vào căn thức rồi tính giá trị của các biểu thức số nhận được.

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm căn bậc ba của một số

1. Tính

a) $\sqrt[3]{8}$; b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{0,008}}$ d) $\sqrt[3]{(-27).8}$

2. Tính các căn bậc ba sau:

a) $\sqrt[3]{64}$; b) $\sqrt[3]{-512}$; c) $\sqrt[3]{0,064}$
d) $\sqrt[3]{-0,216}$; e) $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$ f) $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

Dạng 2. So sánh các căn bậc ba

3. So sánh:

a) $\sqrt[3]{5}$ và $\sqrt[3]{4}$; b) $\sqrt[3]{5}$ và 2; c) $5\sqrt[3]{4}$ và $4\sqrt[3]{5}$

4. So sánh

a) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{12}$ b) $\sqrt{2} + 1$ và $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{3} - 2$ và $\sqrt[3]{15\sqrt{3} - 25}$.

5. So sánh các biểu thức sau

a) $\sqrt[3]{9}$ và 2; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ và $\frac{3}{4}$ c) $2\sqrt[3]{3}$ và $3\sqrt[3]{2}$
d) $-6\sqrt[3]{7}$ và $7\sqrt[3]{(-6)}$ e) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{11}$ f) $\sqrt[3]{10} - 2$ và $\sqrt[3]{2}$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba

6. Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$. b) $B = \sqrt[3]{72 - 32\sqrt{5}} \cdot \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$.

7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

b) $B = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$

8. Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt[3]{125x^3 + 75x^2 + 15x + 1} - 5x$

b) $B = \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x} - 1} - \sqrt[3]{1 - x^3}$

9. Cho $x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$. Chứng tỏ x là số tự nhiên.

10. Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{10}{\sqrt[3]{9 - \sqrt[3]{6}} + \sqrt[3]{4}} \cdot \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} : \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right]$

11. Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$Q = \left[\frac{1}{2} \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(a + 3)\sqrt{a} - 3a - 1} \right] : \left[\frac{a - 1}{2(\sqrt{a} + 1)} + 1 \right]$$

Bài tập tự luyện

Bài 1. Tính

a) $\sqrt[3]{27}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$;

c) $\sqrt[3]{64a^3}$;

d) $\sqrt[3]{-8a^3b^6}$

Bài 2. Tính

a) $\frac{\sqrt[3]{384}}{\sqrt[3]{3}} + 3\sqrt[3]{-54} + \sqrt[3]{432}$

b) $\sqrt[3]{\frac{-27}{512}} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{64} + \frac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}$

c) $\sqrt[3]{-343}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24}$

d) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$

Bài 3. So sánh cặp số sau:

a) $2\sqrt[3]{3}$ và $\sqrt[3]{23}$

b) 15 và $3\sqrt[3]{126}$

c) $3\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[3]{53}$;

d) 22 và $3\sqrt[3]{394}$

Bài 4. So sánh:

a) $\sqrt[3]{-45}$ và $\sqrt[3]{-50}$

b) -10 và $\sqrt[3]{-999}$

Bài 5. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$

b) $(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})$

Bài 6. Thực hiện phép tính

a) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{7,2}}{\sqrt[3]{0,9}}$

b) $2\sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{192}$

$$c) \frac{\sqrt[3]{384}}{\sqrt[3]{3}} + 3\sqrt[3]{-54} + \sqrt[3]{432}$$

$$d) \sqrt[3]{\frac{-27}{512}} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{64} + \frac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}$$

Bài 7. Rút gọn các biểu thức

$$a) \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64}$$

$$b) \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128}$$

$$c) (\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$$

$$d) (\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1)$$

Bài 8. Thực hiện phép tính:

$$a) \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \right) : \sqrt[3]{4}$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{5}{7}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{-9}{49}}$$

$$c) \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)(4 + 2\sqrt{3})}$$

$$d) \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 2)(7 + 4\sqrt{3})}$$

Bài 9. Tìm x biết

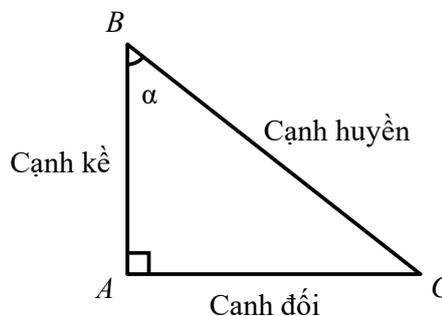
$$a) 2\sqrt[3]{27x} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{-343x} + \sqrt[3]{-729x} = 2;$$

$$b) \sqrt[3]{x^3 - 9x^2} = x - 3.$$



BÀI 11:
TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

- Cho góc nhọn α . Xét tam giác vuông ABC vuông tại A có góc nhọn B bằng α
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền gọi là sin của α , kí hiệu $\sin \alpha$
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền gọi là cosin của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của góc α gọi là tang của α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối của góc α gọi là cotang của α , kí hiệu $\cot \alpha$.



Chú ý:

□ $\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$

□ $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

□ $\sin \alpha; \cos \alpha; \tan \alpha; \cot \alpha$ gọi là các tỉ số lượng giác của góc nhọn α

• **Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau**

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

Chú ý: Cho α và β là hai góc phụ nhau, khi đó:

$\sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \cot \alpha = \tan \beta$

Bảng lượng giác của một số góc đặc biệt

Tỉ số lượng giác góc α	30^0	45^0	60^0
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

BÀI TẬP

Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn.





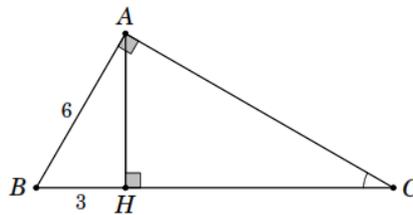
1. a) Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn B

b) Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc B

2. Tam giác ABC vuông tại A , $AB = 1,5\text{ cm}$; $BC = 3,5\text{ cm}$. Tính tỉ số lượng giác của góc C rồi suy ra các tỉ số lượng giác của góc B .

3. Tam giác ABC cân tại A , có $BC = 6$, đường cao $AH = 4$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B .

4. Tính $\tan C$ trong hình dưới đây.



4. Cho tam giác ABC vuông tại C . Trong đó $AC = 0,9\text{ m}$, $BC = 1,2\text{ m}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B . Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A .

Dạng 2: : So sánh các tỉ số lượng giác mà không dùng máy tính hoặc bảng số

Phương pháp giải: Để sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác cho trước, ta cần làm được hai bước sau:

Bước 1: Đưa về các tỉ số lượng giác trong bài toán cùng loại bằng cách sử dụng tính chất: “Nếu hai góc phụ nhau thì \sin góc này bằng \cos góc kia, \tan góc này bằng \cot góc kia”.

Bước 2: Với hai góc nhọn $\alpha; \beta$, ta có:

$$\sin \alpha < \sin \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta; \quad \cos \alpha < \cos \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta;$$

$$\tan \alpha < \tan \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta; \quad \cot \alpha < \cot \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

6. Hãy viết tỉ số lượng giác của các góc sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°
 $\sin 75^\circ, \cos 60^\circ, \tan 80^\circ, \cot 50^\circ$

7. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần

a) $\sin 70^\circ, \cos 30^\circ, \cos 40^\circ, \sin 51^\circ$; b) $\cos 34^\circ, \sin 57^\circ, \cos 52^\circ$.

8. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần

a) $\cot 40^\circ, \tan 40^\circ, \cot 43^\circ, \tan 42^\circ$; b) $\tan 52^\circ, \cot 63^\circ, \tan 72^\circ, \cot 31^\circ$.

Dạng 3: Tính giá trị biểu thức lượng giác. Chứng minh hệ thức lượng giác.

Phương pháp: Áp dụng các tính chất:



Cho $0 < \alpha < 90^\circ$ ta có:

$$0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1; \tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

9. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = \frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ}$

b) $B = \tan 76^\circ - \cot 14^\circ$.

10. Biết $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$.

11. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 38^\circ + \cos^2 72^\circ$

b) $B = \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 87^\circ + \sin^2 89^\circ$

c) $C = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$

12. a) Cho góc nhọn α . Chứng minh rằng: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

b) Cho góc nhọn α có $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Hãy tính $\cos \alpha$; $\tan \alpha$; $\cot \alpha$

13. Cho góc nhọn α . Chứng minh rằng:

a) $\sin \alpha < \tan \alpha$;

b) $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

14. Chứng minh rằng $\frac{1 - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

15. Cho tam giác nhọn ABC có diện tích S , đường cao $AH = h$. Cho biết $S = h^2$. Chứng minh rằng $\cot B + \cot C = 2$

16. Cho tam giác nhọn ABC hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H . Biết $HD : HA = 1 : 2$. Chứng minh rằng $\tan B \cdot \tan C = 3$.

Dạng 4: Tính giá trị biểu thức lượng giác của các góc đặc biệt.

16. Tính giá trị của biểu thức

a) $M = 4 \cos^2 45^\circ + \sqrt{3} \cot 30^\circ - 16 \cos^3 60^\circ$;



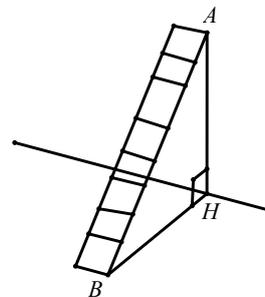
b) $N = \frac{2 \sin 30^\circ - \sin 60^\circ}{\cos^2 30^\circ - \cos 60^\circ}$.

17. Tính giá trị của biểu thức sau với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

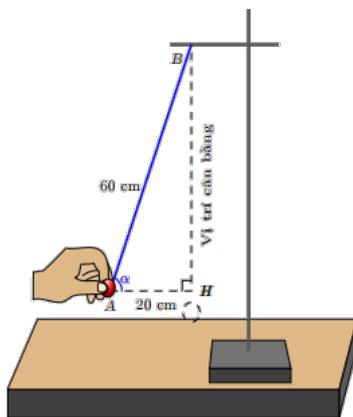
$$A = \cos^2 \alpha - \tan 60^\circ + \cot 45^\circ - 2 \sin 30^\circ + \cos^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha .$$

Dạng 5: Sử dụng máy tính cầm tay tính tỉ số lượng giác của một góc nhọn.

18. Hình bên mô tả một chiếc thang có chiều dài $AB = 4$ m được đặt dựa vào tường, khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $BH = 1,5$ m. Tính góc tạo bởi cạnh AB và phần tường nằm ngang trên mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



19. Treo quả cầu kim loại nhỏ vào giá thí nghiệm bằng sợi dây mảnh nhẹ không dẫn. Khi quả cầu đứng yên tại vị trí cân bằng, dây treo có phương thẳng đứng. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông ra thì quả cầu sẽ chuyển động qua lại quanh vị trí cân bằng. Khi kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng, giả sử tâm A của quả cầu cách B một khoảng $AB = 60$ cm và cách vị trí cân bằng một khoảng $AH = 20$ cm. Tính số đo góc α tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



20. Một con sông rộng 250m. Một chiếc đò ngang chèo vuông góc với dòng nước, nhưng vì nước chảy nên phải di chuyển 320m mới sang được đến bờ bên kia. Hãy xác định xem, dòng nước đã làm chiếc đò bơi lệch đi một góc bao nhiêu độ ?

21. Một vận động viên đánh quần vợt đang giao banh. Từ độ cao h , anh ta muốn banh rơi ở vị trí cách lưới 6m như hình bên dưới.

a) Tìm góc tạo bởi mặt sân và đường bay của banh ở hình bên dưới, biết banh bay chạm mép lưới.

b) Tìm độ cao h khi giao banh để banh không chạm lưới.



a) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$;

b) $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$.

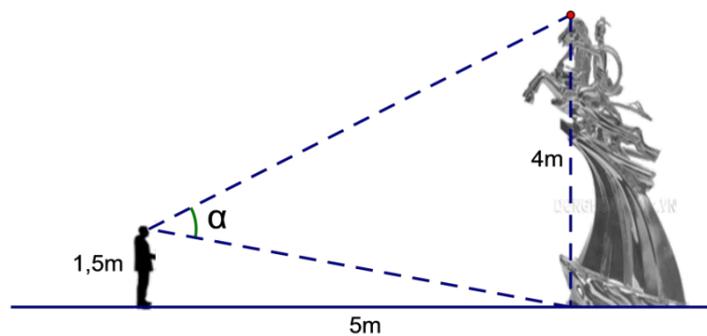
Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB < AC$; $\widehat{C} = 45^\circ = \alpha$ đường trung tuyến AM , đường cao AH và $MA = MB = MC = a$ Chứng minh:

a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ b) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ c) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

Bài 10: Đài quan sát ở Toronto, Ontario (Canada) cao 533m. Ở một thời điểm vào ban ngày, mặt trời chiếu thành bóng dài 1100m. Hỏi lúc đó góc tạo bởi tia sáng mặt trời và mặt đất là bao nhiêu (làm tròn đến độ)?

Bài 11: Trên một khúc sông với hai bờ song song với nhau, có một chiếc đò dự định chèo qua sông từ vị trí A ở bờ bên này sang vị trí B ở bờ bên kia, đường thẳng AB vuông góc với các bờ sông. Do bị dòng nước đẩy xiên nên chiếc đò đã cập bờ bên kia tại vị trí C cách B một khoảng bằng 30m. Biết khúc sông rộng 150m, hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc có số đo bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến giây).

Bài 12: Một bức tượng mỹ thuật có chiều cao 4m. Một người đang đứng cách chân tượng 5m và mắt người ấy cách mặt đất 1,5m (hình bên). Hỏi người đó nhìn toàn bộ bức tượng dưới góc bao nhiêu? (“góc nhìn”, làm tròn đến độ).





BÀI 12: MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

• Hệ thức giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông

Định lý 1: Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề.

Chú ý: Trong tam giác ABC vuông tại A , ta có:

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C ; c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$

• Hệ thức giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông

Định lý 2: Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

Chú ý: Trong tam giác ABC vuông tại A , ta có: $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$;

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$$

• Giải tam giác vuông

Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc còn lại của tam giác vuông đó khi biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn.

BÀI TẬP

Dạng 1. Giải tam giác vuông

1. a) Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 5$ và $AC = 8$.

b) Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 3,5$ và $AC = 4,2$.

2. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 3,0$ và $BC = 4,5$.

3. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $\widehat{B} = 50^\circ$ và $AB = 3,7$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

4. Giải tam giác ABC vuông tại A , biết $\widehat{B} = 57^\circ$ và $BC = 4,5$.

5. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 36^\circ, PQ = 7$. Hãy giải tam giác vuông OPQ .

6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12\text{cm}, \widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính độ dài

a) AC .

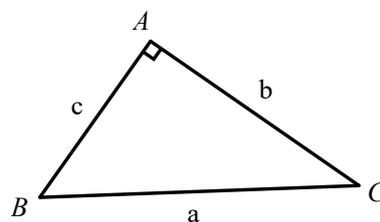
b) BC .

c) phân giác BD .

7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 2,5; BH = 1,5$. Tính $\widehat{B}; \widehat{C}$ và AC

Dạng 2: Giải tam giác thường

Phương pháp: Kẻ thêm đường cao để xuất hiện tam giác vuông; áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.





8. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 65^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ và $AB = 2,8\text{cm}$. Tính các góc và cạnh còn lại của tam giác đó (gọi là giải tam giác ABC).

9. Cho tam giác ABC , trong đó $BC = 11\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Hãy tính độ dài đoạn thẳng AN .

10. Cho tam giác ABC có $BC = 6\text{cm}$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$. Hãy tính

Chiều cao CH và cạnh AC .

b) Diện tích tam giác ABC

11. Giải tam giác ABC biết $\hat{B} = 65^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$ và $BC = 4,2\text{cm}$.

12. Giải tam giác nhọn ABC biết $AB = 2,1$, $AC = 3,8$ và $\hat{B} = 70^\circ$.

Dạng 3: Chứng minh một số đẳng thức, chứng minh hình học.

13. Cho tam giác ABC nhọn. Đặt $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

14. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC có diện tích là

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

15. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, đường cao $AH = h$, đường trung tuyến AM , đặt $\widehat{HAM} = \alpha$. Chứng minh rằng:

a) $HC - HB = 2h \cdot \tan \alpha$;

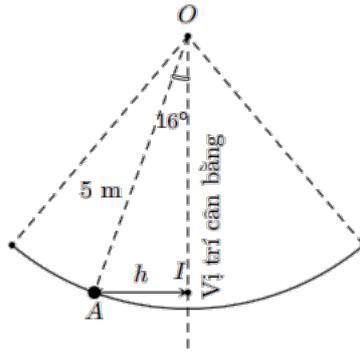
b) $\tan \alpha = \frac{\cot C - \cot B}{2}$

Dạng 4: Các bài toán thực tế

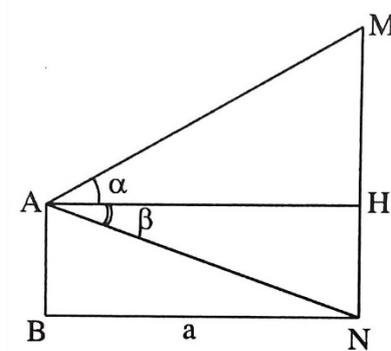
16. Một cột đèn AB cao 6m có bóng in trên mặt đất là AC dài $3,5\text{m}$. Hãy tính \widehat{BCA} (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

17. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° và có độ cao là $2,1\text{m}$. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

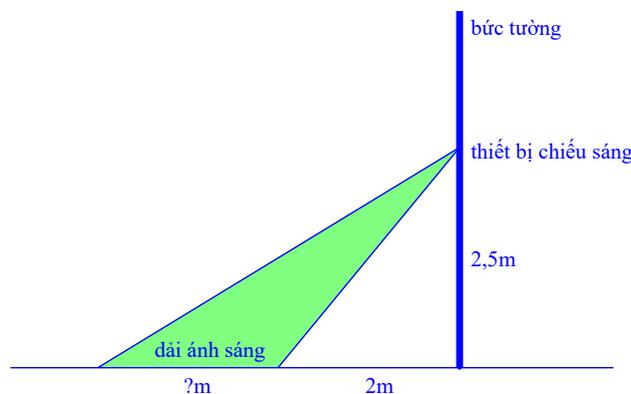
18. Trong trò chơi đánh đu của một lễ hội vào mùa xuân, khi người chơi nhún đều. Cây đu sẽ đưa người chơi dao động quanh vị trí cân bằng. Hình bên minh họa người chơi đang ở vị trí A với $OA = 5\text{m}$ và dây OA tạo với phương thẳng đứng một góc $\widehat{AOI} = 16^\circ$. Tính khoảng cách AI (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét)?



19. 19. Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là a (như hình vẽ). Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α . Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $a = 120\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 20^\circ$



20. Người ta cần lắp đặt một thiết bị chiếu sáng gắn trên tường cho một phòng triển lãm. Thiết bị này có góc chiếu sáng là 20° và cần đặt cao hơn mặt đất là $2,5\text{ m}$. Người ta đặt thiết bị này sát tường và căn chỉnh sao cho trên mặt đất dải ánh sáng bắt đầu từ vị trí cách tường 2 m . Hãy tính độ dài vùng được chiếu sáng trên mặt đất.

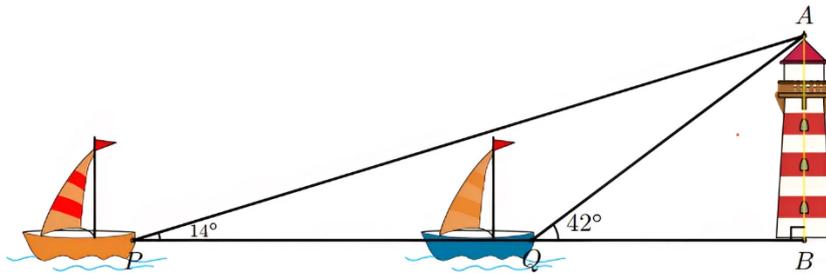




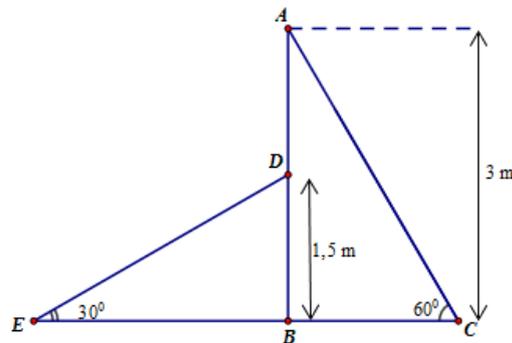
21. Hai con thuyền P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn thấy tháp hải đăng dưới các góc $\widehat{BPQ} = 14^\circ$ và $\widehat{BQA} = 42^\circ$. Đặt $h = AB$ là chiều cao của tháp hải đăng.

a) Tính BQ và BP theo h

b) Tính chiều cao của tháp hải đăng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

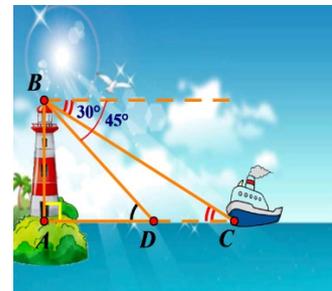


22. Một nhà trẻ muốn thiết kế hai cái cầu tuột trong sân chơi. Đối với trẻ dưới 5 tuổi, cầu tuột cao 1,5 m và nghiêng với mặt đất một góc 30° . Đối với trẻ trên 5 tuổi, cầu tuột cao 3 m và nghiêng với mặt đất một góc 60° . Tính chiều dài của mỗi máng tuột.



23.

Từ trên một ngọn hải đăng cao 75 m, người ta quan sát hai lần thấy một chiếc thuyền đang hướng về phía hải đăng với góc hạ lần lượt là 30° và 45° . Hỏi thuyền đi được bao nhiêu mét giữa hai lần quan sát?



Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác ABC, trong các trường hợp:

i) $b = 10\text{ cm}, \widehat{C} = 30^\circ$;

ii) $a = 21; b = 18$



Bài 2: Giải tam giác ABC vuông tại A , biết

a) $AB = 2,7$ và $AC = 4,5$;

b) $AC = 4,0$ và $BC = 4,8$.

Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao BH . Biết $\hat{A} = 50^\circ$, $BH = 2,3$. Tính chu vi của $\triangle ABC$.

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 15\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 42^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AH

b) Độ dài đoạn thẳng AC

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$.

a) Giải tam giác vuông ABC .

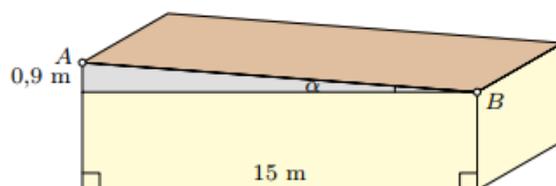
b) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D . Tính độ dài các đoạn thẳng AD và BD .

Bài 6: Tính diện tích $\triangle ABC$ có $BC = 2\text{cm}$, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$.

Bài 7: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 38^\circ$, $AB = 3,5$ và $AD = 3,1$.

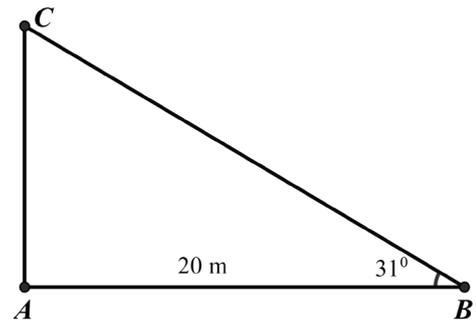
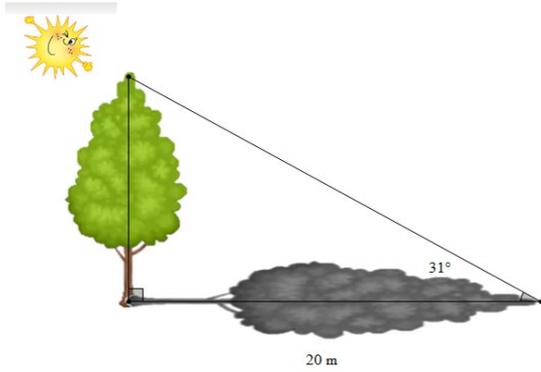
Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 8: Tính góc nghiêng α và chiều rộng AB của mái nhà kho trong hình sau:



Bài 9: Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $7,5\text{m}$. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

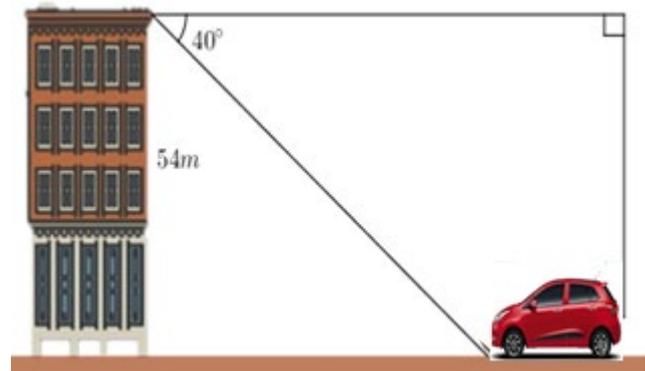
Bài 10: Một cái cây có bóng trên mặt đất dài 20m . Cho biết tia nắng qua ngọn cây nghiêng một góc 31° so với mặt đất. Tính chiều cao của cây.



Bài 11: Một cái thang dài 4,8m dựa vào tường làm thành một góc 58° so với mặt đất. Tính chiều cao của thang so với mặt đất (làm tròn đến mét).

Bài 12:

Từ đỉnh một toà nhà cao 54m, người ta nhìn thấy một ô tô đang đỗ dưới một góc nghiêng xuống là 40° . Hỏi ô tô đang đỗ cách toà nhà đó khoảng bao nhiêu mét?





BÀI 13: MỞ ĐẦU VỀ ĐƯỜNG TRÒN

• **Đường tròn tâm O, bán kính R** ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$ là hình gồm tất cả các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

Khi không cần đề ý đến bán kính ta kí hiệu đường tròn tâm O là (O) .

Nếu điểm A là một điểm của (O) thì ta viết $A \in (O)$. Khi đó, ta còn nói đường tròn (O) đi qua điểm A, hay điểm A nằm trên đường tròn (O) .

• **Tính đối xứng của đường tròn**

a) Đối xứng tâm

Hai điểm M và M' gọi là đối xứng nhau qua điểm I (hay qua tâm I) nếu I là trung điểm của đoạn MM'.

b) Đối xứng trục

Hai điểm M và M' gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng d (hay qua trục d) nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.

c) Tâm và trục đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình có tâm đối xứng, tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó
Đường tròn là hình có trục đối xứng, mỗi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn là một trục đối xứng của nó.

BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định đường tròn, tính bán kính đường tròn.

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác.
2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.
3. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.
4. Cho hình thang cân ABCD với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
5. Cho hình thang cân ABCD (với $AD \parallel BC$) có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $BC = 20$ cm. Chứng minh rằng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.
6. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M, N thuộc (O) sao cho $AM = BN$ và M, N nằm trên hai nửa đường tròn khác nhau. Chứng minh MN là đường kính của (O) .
7. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.



- a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
- b) Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?
8. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
9. Cho tam giác ABC , các đường cao BD và CE . Trên cạnh AC lấy điểm M . Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F . Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.
10. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Gọi H là trực tâm của tam giác, đường cao CE . Gọi D, M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB, CH . Chứng minh rằng 4 điểm D, M, E, N cùng nằm trên một đường tròn.
11. Cho tam giác ABC cân tại A , $BC = 12$ cm, chiều cao $AH = 4$ cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .
12. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(-1; -1)$, $B(-1; -2)$, $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.

Dạng 2. Tính đối xứng của đường tròn

13. Cho đường tròn (O) đường kính AB , M, N thuộc (O) sao cho $AM = BN$ và M, N nằm trên hai nửa đường tròn khác nhau. Chứng minh MN đối xứng nhau qua O .
14. Cho (O) với hai đường kính AC và DB vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình vuông.
15. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Điểm A di động trên (O) , gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB và AC .
- a) Chứng minh PQ có độ dài không đổi khi A di động trên (O) .
- b) Tìm quỹ tích trung điểm M của PQ .

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho tam giác ABC cân tại A có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) . Đường cao AH cắt (O) ở D . Biết $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O) .

Bài 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ tam giác AEC vuông tại E . Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.



Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Từ M là điểm bất kì trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 4: Cho tam giác ABC có AQ, BK, CI là ba đường cao và H là trực tâm.

a) Chứng minh A, B, Q, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

b) Chứng minh A, I, H, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

Bài 5: Chứng minh rằng bốn trung điểm của bốn cạnh hình thoi cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA . Chứng minh bốn điểm M, N, P và Q cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 6: Cho hai đường tròn $(A; 6\text{cm})$ và $(B; 4\text{cm})$ cắt nhau tại C và D , $AB = 8\text{cm}$. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của hai đường tròn đã cho với đoạn thẳng AB .

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng CA, CB, DA và DB .

b) Điểm I có phải là trung điểm của đoạn thẳng AB không?

c) Tính độ dài của đoạn thẳng IK .

Bài 7: Cho hình vuông $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo, $OA = \sqrt{2}\text{ cm}$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 2 cm . Hãy xác định vị trí của năm điểm A, B, C, D, O so với đường tròn.



BÀI 14:
CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

• **Dây và đường kính của đường tròn**

Đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của một đường tròn gọi là một dây (hay dây cung) của đường tròn.

Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn. Dễ thấy mỗi đường kính của đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2R$.

• Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

• Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

Cách xác định số đo của một cung

a) Số đo của một cung được xác định như sau:

- Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo cung nhỏ có chung hai mút.

b) Số đo của cung AB được kí hiệu là số \widehat{AB}

Chú ý: Cung có số đo n° còn gọi là cung n° . Cả đường tròn được coi là cung 360° . Đôi khi ta cũng coi một điểm là cung 0° .

Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo.

BÀI TẬP

Dạng 1. Tính độ dài dây, khoảng cách từ tâm đến dây.

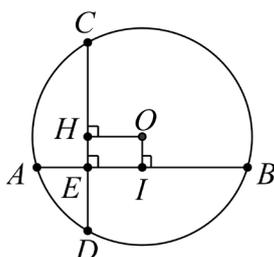
1. Cho đường tròn $(O; 10)$. Lấy một điểm A tùy ý thuộc (O) . Vẽ dây MN vuông góc với OA tại trung điểm của OA .

a) Chứng minh $OMAN$ là hình thoi.

b) Tính độ dài dây MN .

2. Cho đường tròn tâm O , hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M . Biết $AB = 18cm$, $CD = 14cm$, $MC = 4cm$. Hãy tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD .

3. Trong hình vẽ bên có $AB \perp CD$, $AE = 2$, $EB = 6$, $EC = 4$ và $ED = 3$. Tính độ dài đường kính của đường tròn (O) .





4. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và dây $AB = 8\text{ cm}$.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .

b) Lấy điểm I trên dây AB sao cho $AI = 1\text{ cm}$. Qua I kẻ dây CD vuông góc với AB .

Chứng minh rằng $AB = CD$.

5. Cho đường tròn (O) và bán kính 5 cm , dây $AB = 8\text{ cm}$.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .

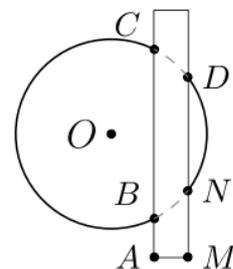
b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1\text{ cm}$. Kẻ dây CD qua I và vuông góc với AB . Chứng minh rằng $CD = AB$.

6. Trong hình vẽ bên có một mảnh giấy hình chữ nhật che khuất một phần của đường tròn (O) . Cho biết $AB = 1\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$ và

$$MN = 2\text{ cm}.$$

a) Tính độ dài đoạn DN .

b) Cho $AM = 1\text{ cm}$. Tính bán kính của đường tròn (O) .



7. Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 13\text{ cm}$. Dây $CD = 12\text{ cm}$ vuông góc với AB tại H .

a) Tính độ dài các đoạn HA, HB .

b) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H lên AC, BC . Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

8. Cho đường tròn tâm (O) , và điểm I nằm bên trong đường tròn.

Chứng minh rằng dây AB vuông góc với OI tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I .

9. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và điểm M cách O một đoạn là 3 cm

a) Tính độ dài dây cung ngắn nhất của (O) đi qua M .

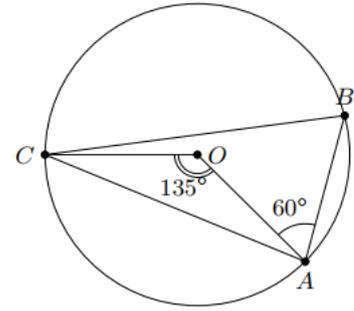
b) Tính độ dài dây cung dài nhất của (O) đi qua M .

Dạng 2: Tính số đo góc ở tâm, số đo cung



c) Chứng minh $AH = 2OI$.

Bài 4: Cho đường tròn tâm O bán kính 25cm. Hai dây AB, CD song song với nhau và có độ dài lần lượt là 40cm, 48cm. Tính khoảng cách giữa hai dây AB, CD .



Xác định số đo các cung \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CA} trong hình vẽ sau.

Bài 5: Cho (O) đường kính AB và dây cung AC . Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ số đo \widehat{BC}

Bài 6: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ; \widehat{C} = 50^\circ$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác đó tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự tại D, E, F . Tính số đo các cung \widehat{DE} , \widehat{EF} và \widehat{FD} . (Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với cả 3 cạnh của một tam giác)

Bài 7: Cho một nửa đường tròn (O) và hai dây cung $AB // CD$ nằm trong nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

Bài 8: Cho đường tròn $(O; R)$. Gọi H là trung điểm của bán kính OB . Dây CD vuông góc với OB tại H . Tính số đo cung nhỏ và cung lớn \widehat{CD} .

Bài 9: Cho $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K . Hãy tính:

a) Độ dài OK theo R .

b) Số đo các góc \widehat{MOK} và \widehat{MON} .

c) Số đo cung nhỏ và cung lớn \widehat{MN} .

Bài 10 : Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ dây AM của đường tròn (O) và dây BN của đường tròn (O') sao cho $AM // BN$. Chứng minh

$$\widehat{AM} = \widehat{BN}$$

HS biết thêm tính chất mở rộng:

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.



BÀI 15:

ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

• **Độ dài của cung tròn**

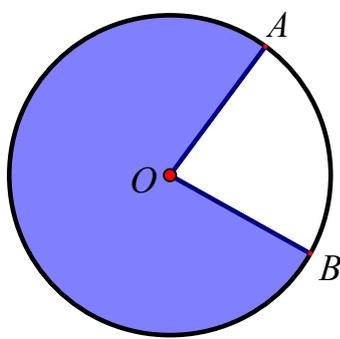
Ta có công thức tính độ dài l của cung n° trên đường tròn (O, R) :

$$l = \frac{n}{180} \pi R \text{ hay } l = \frac{n}{360} \pi d$$

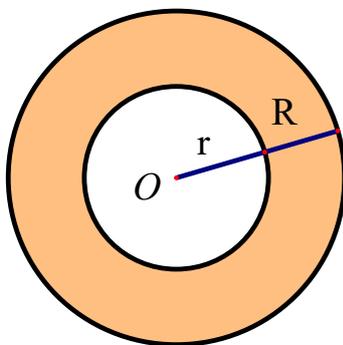
• **Hình quạt tròn và hình vành khuyên**

Hình quạt tròn là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó.

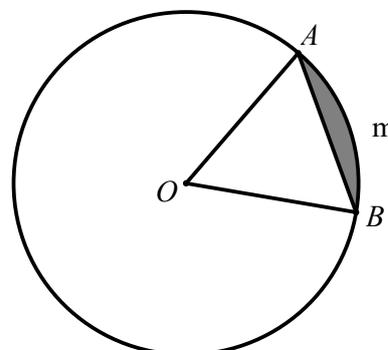
Hình vành khuyên (còn gọi là hình vành khăn) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (còn gọi là hai đường tròn đồng tâm)



Hình quạt tròn



Hình vành khuyên



Hình viên phân

• **Hình quạt tròn và hình vành khuyên**

⌊ Diện tích S_q của hình quạt tròn bán kính R ứng với cung n° :

$$S_q = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{l \cdot R}{2}$$

Ta có thể viết $\frac{S_q}{S} = \frac{n}{360} = \frac{l}{C}$ nghĩa là: Tỷ số giữa diện tích hình quạt tròn ứng với cung n°

và diện tích hình tròn (cùng bán kính) đúng bằng $\frac{n}{360}$ và bằng tỷ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn.

⌊ Diện tích S_v của hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r

$$S_v = \pi (R^2 - r^2) \text{ (với } R > r \text{)}$$

⌊ Hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy

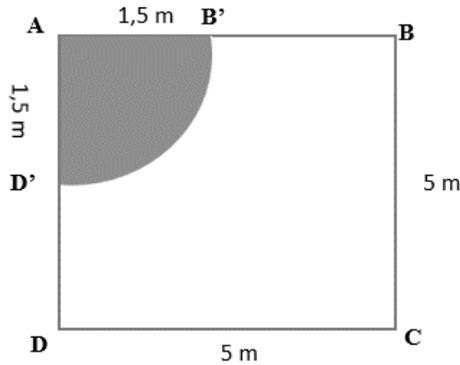
Diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AB và dây AB là $S_{vpAmB} = S_{q.AOB} - S_{\Delta AOB}$



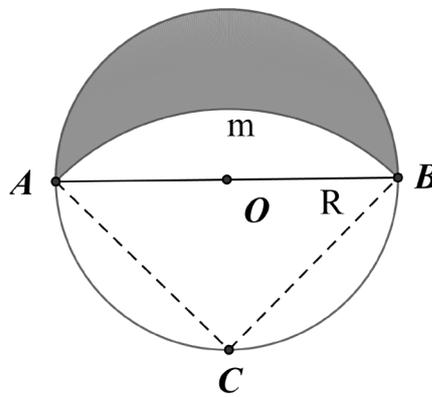
12. Cho tam giác đều AOB cạnh 4 cm. Vẽ đường tròn tâm O , bán kính OA . Hãy tính diện tích hình viên phân AmB (hình viên phân với cạnh chứa cung nhỏ AB)

Dạng 4: Ứng dụng thực tế

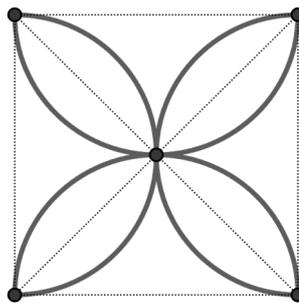
13. Một con bò được nhốt trong một mảnh vườn cỏ hình vuông cạnh là 5m. Con bò được buộc bằng một sợi dây dài 1,5m vào một cái cột ở góc vườn. Nếu diện tích cỏ mà con bò ăn được là nhiều nhất thì diện tích phần cỏ còn lại là bao nhiêu?



14. Bạn An có một tấm bìa là hình tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là điểm chính giữa của cung AB . Cung \widehat{AmB} có tâm C , bán kính CA . Bạn cắt miếng bìa đó để được hình như phần tô đậm. Diện tích phần tô đậm bằng bao nhiêu?



15. Cho hình vẽ sau, biết hình vuông có diện tích là 4 cm^2 . Diện tích hình bông hoa là : (Diện tích của 4 cánh hoa)

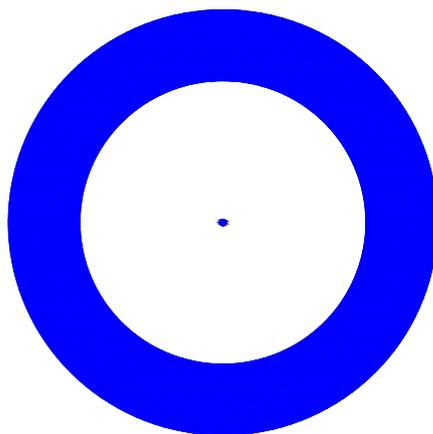




16. Để làm một chiếc quạt giấy, người thợ làm quạt thường sử dụng 18 thanh tre làm cốt và khâu thành một xâu ở đầu. Mỗi thanh tre dài 30cm . Để dán mỗi cái quạt cần hai phần giấy bằng nhau để dán cả hai bên (*tham khảo hình vẽ*). Phần không được dán giấy của mỗi thanh tre là $10(\text{cm})$. Khi mở rộng nhất, hai thanh ngoài cùng của quạt tạo với nhau một góc bằng 150° . Tính diện tích giấy tối thiểu cần để dán mỗi chiếc quạt?



17. Một bồn hoa có dạng hình vành khăn (tô đậm như hình vẽ) người ta muốn trồng hoa bên trong phần tô đậm. Tính diện tích phần trồng hoa, biết rằng bán kính đường tròn lớn là 10 m và bán kính đường tròn nhỏ là 8 m .

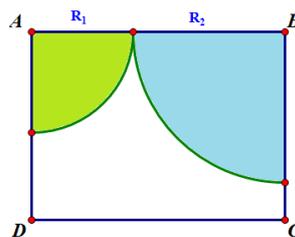
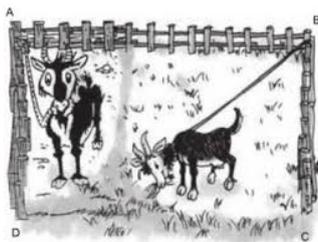


18. Một vườn cỏ hình chữ nhật ABCD có $AB = 40\text{ m}$, $AD = 30\text{ m}$. Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B. Có hai cách buộc:

Cách 1: Mỗi dây thừng dài 20 m .

Cách 2: Một dây thừng dài 30 m và dây thừng kia dài 10 m .

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn?



Bài tập tự luyện

Bài 1: Lấy giá trị gần đúng của π là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau (đơn vị độ dài: cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất và đến độ):

Bán kính R của đường tròn	14		20	4,2	
Số đo n° của cung tròn	90°	50°		35°	20°
Độ dài l của cung tròn		40,6	30,8		4,2

Bài 2: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây $CD = R$ (thuộc cung AD). Nối AC và BD cắt nhau tại M .

a) Chứng minh tam giác MCD đồng dạng với tam giác MBA . Tìm tỉ số đồng dạng.

b) Cho $\widehat{ABC} = 30^\circ$, tính độ dài cung nhỏ AC .

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5\text{cm}$, $B = 60^\circ$. Đường tròn tâm I , đường kính AB cắt BC ở D .

a) Chứng minh AD vuông góc với BC .

b) Chứng minh đường tròn tâm K đường kính AC đi qua D .

c) Tính độ dài cung nhỏ BD .

Bài 4: Tính diện tích của hình quạt tròn bán kính 4cm, ứng với cung 36°

Bài 5: Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 7cm và 5cm

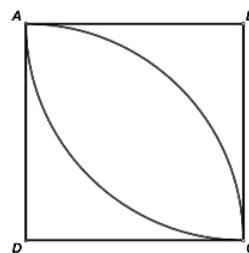
Bài 6: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = 5\sqrt{2}$. Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm A bán kính

AB rồi vẽ nửa đường tròn đường kính AC nằm trong $\frac{1}{4}$ hình tròn trên. Tính diện tích phần chung của hai hình tròn đó.



Bài 7:

Hoa văn của một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh 20cm là hai cung tròn tâm B và D bán kính 20cm có phần chung là hình quả trám như hình vẽ. Hãy tính diện tích phần chung này.



Bài 8: Cho nửa đường tròn (O) và đường kính AB . Gọi M là điểm trên nửa đường tròn, kẻ MH vuông góc với AB . Vẽ vào phía bên trong nửa đường tròn (O) các nửa đường tròn (O_1) đường kính BH , nửa đường tròn (O_2) đường kính AH . Tính diện tích hình giới hạn bởi ba nửa đường tròn trên, biết $MH = 6\text{ cm}$, $BH = 4\text{ cm}$, $AH = 9\text{ cm}$

Bài 9: Cho nửa đường tròn (O) và đường kính AB . Lấy M thuộc đoạn AB . Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M . Giả sử $AM = 2\text{ cm}$, $CD = 4\sqrt{3}\text{ cm}$. Tính

a) Độ dài đường tròn (O) và diện tích hình tròn (O) .

b) Độ dài cung CAD và diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OC , OD và cung nhỏ CD .



BÀI 16:

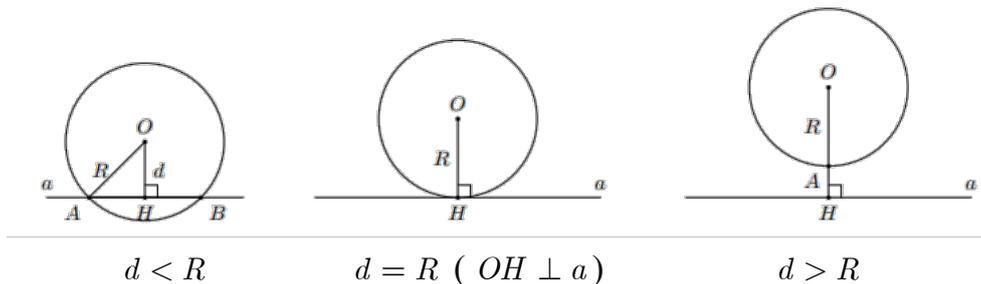
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẺ VÀ ĐƯỜNG TRÒN

• **Số điểm chung của đường thẳng và đường tròn**

⊥ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là cắt nhau nếu chúng có đúng hai điểm chung.

⊥ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là tiếp xúc nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung H . Điểm chung ấy gọi là tiếp điểm, khi đó, đường thẳng a còn gọi là tiếp tuyến của (O) tại H .

⊥ Đường thẳng a và đường tròn (O) gọi là không giao nhau nếu chúng không có điểm chung.



• **Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn**

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

• **Hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn.**

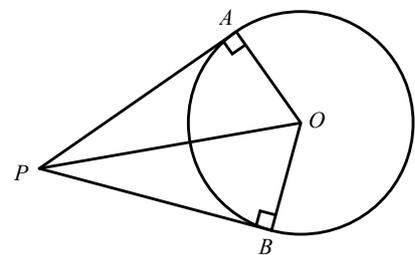
Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P

thì:

⊥ Điểm P cách đều hai tiếp điểm

⊥ PO là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến

⊥ OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua hai tiếp điểm



BÀI TẬP

Dạng 1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

1. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a là 3cm. Vẽ $(O; 5\text{cm})$.

a) Xét vị trí tương đối của a và đường tròn (O) .

b) Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và (O) . Tính độ dài BC .

2. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$ và $CD = 9\text{cm}$.

Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC .



c) Tìm vị trí của điểm A để H thuộc (O) .

11. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) ngoại tiếp đường tròn (O) , $OB = 15\text{cm}$ và $OC = 20\text{cm}$.

a) Chứng minh rằng $\triangle BOC$ vuông;

b) Tính bán kính R của đường tròn (O) ;

c) Tính độ dài các cạnh AB và CD .

12. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ngoại tiếp đường tròn $(O; r)$ và $CD = 4AB$.

a) Gọi H là hình chiếu của O lên AD . Chứng minh rằng $HD = 4HA$;

b) Tính AB và CD theo r .

13. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMO} = 30^\circ$.

a) Chứng minh $MO = 2R$;

b) Tính AB theo R .

c) Tính S_{AMB} theo R .

14. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên cùng nửa mặt phẳng vẽ hai tiếp tuyến Ax, By . Điểm M nằm trên (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lượt tại C, D . Đường thẳng AD cắt BC tại N

a) Chứng minh A, C, M, O thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh OC song song BM .

c) Tìm vị trí của M để S_{ABCD} nhỏ nhất.

d) Chứng minh MN và AB vuông góc với nhau

15. Cho SA và SB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AB . Tiếp tuyến của (O) tại M cắt SA tại E và cắt SB tại F .

a) Chứng minh rằng chu vi của tam giác SEF bằng $SA + SB$

b) Giả sử M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $SE = SF$

Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho điểm O cách đường thẳng a là 6cm . Vẽ đường tròn $(O, 10\text{cm})$.

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng a .

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C . Tính diện tích tam giác OBC .



Bài 2: Cho điểm M cách đường thẳng xy một đoạn bằng 6 cm, vẽ đường tròn $(M; 10)$

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm M và đường thẳng xy cắt nhau

b) Gọi hai giao điểm là P và Q . Tính PQ

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ hai đường tròn (B, BA) và (C, CA) cắt nhau tại D (khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (B) .

Bài 4: Cho đường tròn (O) và một dây AB . Gọi M là trung điểm của AB . Vẽ bán kính OI đi qua M . Từ I vẽ đường thẳng $xy \parallel AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI

Bài 6: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . I là điểm nằm giữa O và A . Vẽ dây $CD \perp AB$ tại I . Chứng minh rằng các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và D và đường thẳng AB đồng quy.

Bài 7: Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm A cách O một khoảng $2R$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Bài 8: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hai đường thẳng c, d qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B . Biết $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Chứng minh $AB = R$.

Bài 9: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn ùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là AB). Lấy M thuộc Ax , qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By tại N .

a) Chứng minh rằng $MN = AM + BN$

b) $AM \cdot BN$ không đổi

c) Tứ giác $AMNB$ có diện tích nhỏ nhất khi nào? Tính diện tích đó

Bài 10: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và các đường thẳng m, n, p lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại A, B, C . Chứng minh rằng:

a) $AD + BE = DE$.



b) $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$ và $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$.

c) Tam giác ODE vuông.

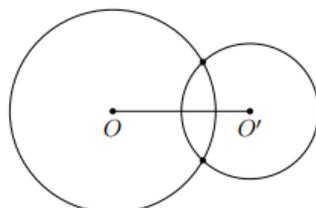


BÀI 17:

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

• **Hai đường tròn cắt nhau**

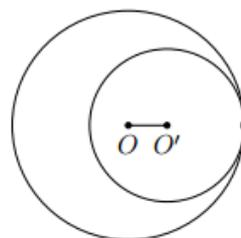
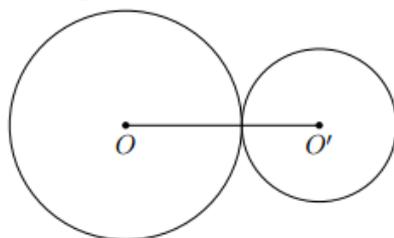
Nếu hai đường tròn có đúng hai điểm chung thì ta nói hai đường tròn đó cắt nhau. Hai điểm chung gọi là giao điểm của chúng.



⊥ $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau khi $R - R' < OO' < R + R'$ (với $R > R'$)

• **Hai đường tròn tiếp xúc nhau**

Nếu hai đường tròn có duy nhất một điểm chung thì ta nói hai đường tròn tiếp xúc nhau. Điểm chung gọi là tiếp điểm của chúng

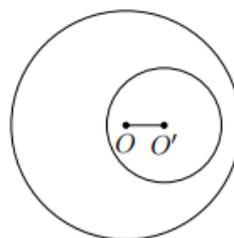
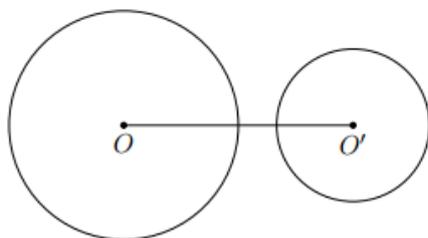


⊥ $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài khi $OO' = R + R'$ và tiếp xúc trong khi $OO' = R - R'$ (với $R > R'$)

⊥ Hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.

• **Hai đường tròn không giao nhau**

Nếu hai đường tròn không có điểm chung nào thì ta nói đó là hai đường tròn không giao nhau.



⊥ $(O; R)$ và $(O'; R')$ ngoài nhau khi $OO' > R + R'$

⊥ $(O; R)$ đựng $(O'; R')$ khi $R > R'$ và $OO' < R - R'$. Đặc biệt khi O trùng O' và $R \neq R'$ thì ta có hai đường tròn đồng tâm.



Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ ($R > r$)	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và r	Số tiếp tuyến chung
Hai đường tròn cắt nhau.	2	$R - r < OO' < R + r$	2
Hai đường tròn tiếp xúc nhau <ul style="list-style-type: none"> ▪ Tiếp xúc ngoài. ▪ Tiếp xúc trong. 	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r$	3 1
Hai đường tròn không giao nhau. <ul style="list-style-type: none"> ▪ Ngoài nhau. ▪ Đụng nhau. ▪ Đồng tâm. 	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$ $OO' = 0$	4 0 0

BÀI TẬP

Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

1. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và đường tròn $(I; 4\text{ cm})$. Xác định OI biết

- a) Hai đường tròn tiếp xúc trong.
- b) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
- c) Hai đường tròn cắt nhau.
- d) Hai đường tròn ngoài nhau.

2. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R = 12\text{ cm}$, $r = 5\text{ cm}$, $OO' = 13\text{ cm}$.

- a) Chứng minh hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B và OO' là đường trung trực của AB .
- b) Chứng minh AO là tiếp tuyến của đường tròn $(O'; r)$.
- c) Tính độ dài AB .

3. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn với $M \in (O)$ và $N \in (O')$.

- a) Tính số đo \widehat{MAN} .
- b) Tính độ dài MN biết $OA = 9\text{ cm}$; $O'A = 4\text{ cm}$.

4. Cho đường tròn $(O; OA)$ và đường tròn tâm I có đường kính OA .

- a) Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.
- b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở M . Chứng minh $AM = MD$.



11. Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB .

a) Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I) .

b) Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?

c) Gọi K giao điểm của DB và đường tròn (I) . Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

12. Cho đường tròn (O) , đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (O') có đường kính CB .

a) Hai đường tròn (O) và (O') có vị trí tương đối như thế nào?

b) Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?

c) Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (O') . Chứng minh rằng ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho điểm A nằm trên đường tròn $(O; 3\text{cm})$. Trên tiếp tuyến với đường tròn tại A , lấy 1 điểm I sao cho $IA = 4\text{cm}$. Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với đường tròn $(O; 3\text{cm})$. Tính bán kính đường tròn tâm I .

Bài 2: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc nhau tại A (A nằm giữa O và O'). Một đường thẳng đi qua A cắt $(O; R)$ tại B và cắt $(O'; r)$ tại C . Chứng minh $OB \parallel O'C$.

Bài 3: Cho đường tròn $(O; 9\text{ cm})$ và $(O'; 3\text{ cm})$ tiếp xúc ngoài tại A . Vẽ hai bán kính OB và $O'C$ song song với nhau và thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ OO' .

a) Tính số đo của \widehat{BAC} .

b) Gọi I là giao điểm của BC và OO' . Tính độ dài OI .

Bài 4: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A . Một đường thẳng (d) tiếp xúc với cả hai đường tròn trên tại B và C với $B \in (O)$, $C \in (O')$.



- a) Chứng minh tam giác ABC vuông;
b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') .

Bài 5: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB , $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE .

- a) Tính số đo của \widehat{DAE} .
b) Tứ giác $ADME$ là hình gì? Vì sao?
c) Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Bài 6: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$). Vẽ các đường kính AOB , $AO'C$. Dây DE của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC .

- a) Tứ giác $BDCE$ là hình gì? Vì sao?
b) Gọi I là giao điểm của DA và đường tròn (O') . Chứng minh rằng ba điểm E, I, C thẳng hàng;
Chứng minh rằng KI là tiếp tuyến của đường tròn (O') .



BÀI 1:

KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Dạng 1. Nhận dạng phương trình bậc nhất hai ẩn, nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn.

1.

Hệ thức $0x - 0y = 6$ có $a = b = 0$ nên không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn. Các hệ thức còn lại đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.

2.

a) Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào phương trình, ta có $2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0$. Vậy cặp số $(1; 1)$ là nghiệm của phương trình.

b) Thay $x = 0,5$ và $y = 3$ vào phương trình, ta có $2 \cdot 0,5 - 3 - 1 = -3 \neq 0$. Vậy cặp số $(0,5; 3)$ không là nghiệm của phương trình.

c) Thay $x = 0$, $y = 0$ vào phương trình ta có $-1 \neq 0$. Vậy cặp số $(0; 0)$ không phải là nghiệm của phương trình.

3.

Với $(2; 1)$, ta có $2 + 2 \cdot 1 - 4 = 0 \Rightarrow (2; 1)$ là nghiệm.

Với $(3; -1)$, ta có $3 + 2 \cdot (-1) - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow (3; -1)$ không là nghiệm.

Với $(0; 5)$, ta có $0 + 2 \cdot 5 - 4 = 6 \neq 0 \Rightarrow (0; 5)$ không là nghiệm.

4.

a) $3x - y = 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2$. Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $(x; 3x - 2)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý

b) $x + 5y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -5y + 3$. Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $(-5y + 3; y)$ với $y \in \mathbb{R}$

c) $4x + 0y = -2$. Phương trình có nghiệm tổng quát $\left(-\frac{1}{2}; y\right)$ với $y \in \mathbb{R}$ tùy ý.

d) $0x + 2y = 5$. Phương trình có nghiệm tổng quát $\left(x; \frac{5}{2}\right)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

5.

a) Thay $x = 1, y = 2$ vào phương trình ta có $m \cdot 1 + 2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.



b) Thay $x = 0, y = 3$ vào đường thẳng, ta có $4.0 + m.3 = 6 \Leftrightarrow m = 2$.

6.

a) Ta có:

x	-2	-1	0	3	1
y	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	1	2

Vậy 5 nghiệm của phương trình đã cho là: $\left(-2; \frac{7}{2}\right); (-1; 3); \left(0; \frac{5}{2}\right); (3; 1); (1; 2)$

b) Ta có: $y = \frac{5-x}{2}$. Với mỗi giá trị x tùy ý cho trước, ta luôn tìm được một giá trị y tương ứng. Do đó phương trình đã cho vô số nghiệm.

7.

a) Xét phương trình $x + 2y = 3$ (1)

Ta viết (1) dưới dạng: $y = -0,5x + 1,5$

Mỗi cặp số $(x; -0,5x + 1,5)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, là một nghiệm của (1).

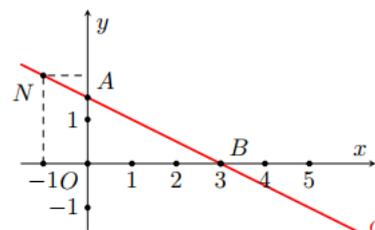
Khi đó ta nói phương trình (1) có nghiệm (tổng quát) là:

$(x; -0,5x + 1,5)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng $y = -0,5x + 1,5$.

Ta cũng gọi đường thẳng này là đường thẳng $d: x + 2y = 3$

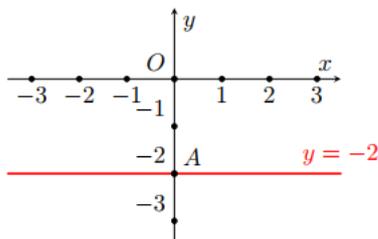
Để vẽ đường thẳng d , ta chỉ cần xác định hai điểm tùy ý của nó, chẳng hạn $A(0; 1,5)$ và $B(3; 0)$ rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.



b) Xét phương trình $0x + y = -2$ (2)

Ta viết gọn (2) thành $y = -2$. Phương trình (2) có nghiệm là $(x; -2)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$. Ta gọi đó là đường thẳng $y = -2$.

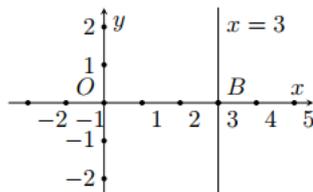


c) Xét phương trình $x + 0y = 3$ (3)

Ta viết gọn (3) thành $x = 3$. Phương trình (3) có nghiệm là $(3; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.



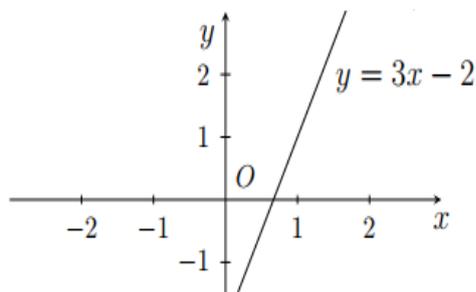
Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục tung và cắt trục tung tại điểm $(3;0)$. Ta gọi đó là đường thẳng $x = 3$



8.

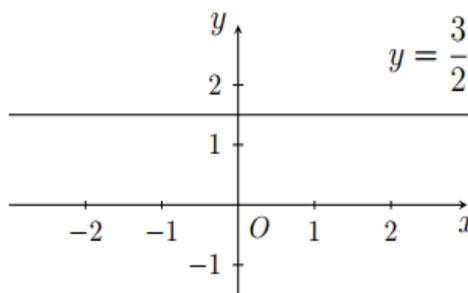
a) $3x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 2$

Nghiệm TQ: $(x; 3x - 2)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý



b) $0x + 2y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

Nghiệm TQ: $(x; \frac{3}{2})$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý



9.

a) Biến đổi phương trình về dạng $x = 3y + 4$

Nhận xét rằng, với mọi $y \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $x = 3y + 4 \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(3y + 4; y)$ với $y \in \mathbb{Z}$

b) Biến đổi phương trình về dạng $y = -3x + 6$

Nhận xét rằng, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $y = -3x + 6 \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(x; -3x + 6) \in \mathbb{Z}$ với $x \in \mathbb{Z}$

c) Biến đổi phương trình về dạng $4x = 5y + 8 \Leftrightarrow x = y + 2 + \frac{y}{4}$ (1)

Đặt $k = \frac{y}{4}$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = 4k, k \in \mathbb{Z}$

Thay $y = 4k$ vào (1) ta được: $x = 4k + 2 + 2 = 5k + 2 \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(5k + 2; 4k)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Dạng 2. Nhận biết hệ phương trình, nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn
10.

Hệ phương trình không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn gồm các hệ:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} -3x = -8 \\ 0x + 0y = 13 \end{cases} \text{ vì } 4x^2 - y^2 = 0 \text{ và } 0x + 0y = 13 \text{ không phải là phương}$$

trình bậc nhất hai ẩn.



11.

Cặp số $(-5; 3)$ là nghiệm của hệ phương trình vì
$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \\ 2 - 3 \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

Cặp số $(-1; 3)$ không là nghiệm của hệ phương trình vì
$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 7 \\ -1 - 3 \cdot 3 = -10 (\neq -1) \end{cases}$$

12.

Cặp số $(2; -1)$ là nghiệm của hệ phương trình vì
$$\begin{cases} 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 3 \\ 2 - 3 \cdot (-1) = 5 \end{cases}$$

Cặp số $(-1; 2)$ không là nghiệm của hệ phương trình vì
$$\begin{cases} 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \neq 3 \\ (-1) - 3 \cdot 2 \neq 5 \end{cases}$$

Dạng 3. Xây dựng phương trình hoặc hệ phương trình từ bài toán có văn.

13.

Gọi x (triệu đồng) là khoản đầu tư với lãi suất là 8% mỗi năm ($x > 0$). Khi đó, tiền lãi thu được mỗi năm từ khoản đầu tư này là: $8\% \cdot x = \frac{2x}{25}$ (triệu đồng)

Gọi y (triệu đồng) là khoản đầu tư với lãi suất là 10% mỗi năm ($y > 0$). Khi đó, tiền lãi thu được mỗi năm từ khoản đầu tư này là: $10\% \cdot y = \frac{y}{10}$ (triệu đồng)

Ta có phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho hai khoản đầu tư của cô Hương là:

$$\frac{2x}{25} + \frac{y}{10} = 160 \text{ hay } 4x + 5y = 8000$$

Ba nghiệm của phương trình trên là $(100; 1520), (5000; 1200), (1000; 800)$

14.

Lời giải

a) Hai phương trình tương ứng là: $5x + 3y = 39000$ và $6x + 2y = 42000$

b) Vì x, y đồng thời thỏa mãn cả hai phương trình nói trên nên ta nói cặp

$(x; y) = (6000; 3000)$ là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x + 3y = 39000 \\ 6x + 2y = 42000 \end{cases}$$

15.

Gọi x là số em nhỏ, y là số quả hồng.

Vì mỗi người 5 quả thì thừa 5 quả nên ta có: $5x + 5 = y$ (1)

Vì mỗi người 6 quả thì một người không có nên ta có: $6(x - 1) = y$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 5x + 5 = y \\ 6(x - 1) = y \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 5x - y = 5 \\ 6x - y = 6 \end{cases}$$



16.

* Ta thấy khi $x = 10$ và $y = 7$ thì: $10x + 3y = 10 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 121 \neq 100$ nên $(10;7)$ không là nghiệm của phương trình thứ hai. Vậy $(10;7)$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

* Ta thấy khi $x = 7$ và $y = 10$ thì: $x + y = 7 + 10 = 17$ nên $(7;10)$ là nghiệm của phương trình thứ nhất.

$10x + 3y = 10 \cdot 7 + 3 \cdot 10 = 100$ nên $(7;10)$ là nghiệm của phương trình thứ hai.

Vậy $(7;10)$ là nghiệm chung của hai phương trình, nghĩa là $(7;10)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. Vậy nên chia 7 quả cam mỗi quả thành 10 phần bằng nhau và chia 10 quả quýt mỗi quả thành 3 phần bằng nhau thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 4. Đoan nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất.

Xét hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. Nếu

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

17.

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Ta có $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases}$. Ta có $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{3}$ nên hệ vô nghiệm.

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$. Ta có $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$ nên vô số nghiệm.

18.

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Do $\frac{4}{1} \neq \frac{3}{1}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$. Do $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} \neq \frac{5}{3}$ nên hệ vô nghiệm.



c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 5 \\ 2y = 8 \end{cases}$. Do $\frac{0}{2} \neq \frac{2}{\frac{3}{2}}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

19.

a) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{a}{1} \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2}$.

b) Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{1} \neq \frac{5}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{a}{1} \\ \frac{3}{2} \neq \frac{5}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b \neq \frac{10}{3} \end{cases}$.

c) Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{1} = \frac{5}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{a}{1} \\ \frac{3}{2} = \frac{5}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{10}{3} \end{cases}$.

**BÀI 2:**
GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đơn giản.
1.

a) Từ phương trình thứ hai ta có $x = 5 + 3y$. Thế vào phương trình thứ nhất, ta được $4(5 + 3y) + 5y = 3$ hay $17y = -17$ suy ra $y = -1$. Từ đó $x = 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; -1)$.

b) Từ phương trình thứ hai ta có $y = 6 - 3x$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được $7x - 2(6 - 3x) = 1$ hay $13x = 13$ suy ra $x = 1$. Từ đó $y = 3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (1; 3)$.

c) Từ phương trình thứ hai ta có $y = -1 - 2x$. Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $5x + 3(-1 - 2x) = 1$ hay $x = -4$. Từ đó $y = 7$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (-4; 7)$.

d) Từ phương trình thứ nhất ta có $x = -y\sqrt{5}$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được $-y\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5}$ hay $y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Từ đó $x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

2.

a) Cộng từng vế của hai phương trình ta được $3x = 12$, suy ra $x = 4$.

Thế $x = 4$ vào phương trình thứ nhất ta được $4 - 3y = 1$ suy ra $y = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (4; 1)$.

b) Trừ từng vế của hai phương trình ta được $x = 2$. Thế $x = 2$ vào phương trình thứ hai ta có $2 - y = 1$ suy ra $y = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$.

c) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 4 và nhân hai vế của phương trình thứ hai với 3, ta được

$$\begin{cases} 12x + 16y = 72 \\ 12x - 9y = -3 \end{cases}$$
. Cộng từng vế hai phương trình mới của hệ ta được $25y = 75$ suy ra $y = 3$.



Thế $y = 3$ vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta có $12x - 9 \cdot 3 = -3$ suy ra $x = 2$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 3)$.

d) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với $\sqrt{2}$ và nhân hai vế của phương trình thứ hai với

$$\sqrt{3}, \text{ ta được } \begin{cases} \sqrt{6}x - 2y = \sqrt{2} \\ \sqrt{6}x + 9y = 12\sqrt{2} \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình mới của hệ ta được $11y = 11\sqrt{2}$ suy ra $y = \sqrt{2}$.

Thế $y = \sqrt{2}$ vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta có $\sqrt{6}x + 9\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ suy ra $\sqrt{6}x = 3\sqrt{2}$ suy ra $x = \sqrt{3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

Dạng 2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

3.

a) Điều kiện xác định $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, \text{ hệ phương trình đã cho trở thành } \begin{cases} a - b = 1 \\ 3a + 4b = 5 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ mới ta có $a = 1 + b$. Thế $a = 1 + b$ vào phương trình thứ hai của hệ mới ta có $3(1 + b) + 4b = 5$ hay $7b = 2$ suy ra $b = \frac{2}{7}$. Từ đó $a = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{9}{7} \\ \frac{1}{y} = \frac{2}{7} \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} x = \frac{7}{9} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \quad (\text{nhận})$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{7}{9}; \frac{7}{2}\right)$.

b) Điều kiện xác định $x \neq 2, y \neq 1$.

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{x-2}, b = \frac{1}{y-1}, \text{ hệ phương trình đã cho trở thành } \begin{cases} a - b = 2 \\ 2a + 3b = 1 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ mới ta có $a = 2 + b$. Thế $a = 2 + b$ vào phương trình thứ hai của hệ mới ta được $2(2 + b) + 3b = 1$ suy ra $b = -\frac{3}{5}$. Từ đó $a = \frac{7}{5}$



Từ đó thay vào $a = \frac{1}{x-2}, b = \frac{1}{y-1}$ ta tìm được $\begin{cases} x = \frac{1}{a} + 2 = \frac{19}{7} \\ y = \frac{1}{b} + 1 = \frac{2}{5} \end{cases}$ (nhận)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{19}{7}; \frac{2}{5}\right)$.

c) Điều kiện xác định $x \neq 0, y \neq 0$.

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}$, hệ phương trình đã trở thành $\begin{cases} 4a + 4b = 3 \\ \frac{1}{6}a + \frac{1}{5}b = \frac{2}{15} \end{cases}$

Nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất của hệ mới với 5, nhân cả hai vế của phương trình thứ hai của hệ mới với 120 ta được hệ phương trình

$\begin{cases} 20a + 20b = 15 \\ 20a + 24b = 16 \end{cases}$. Trừ từng vế của hai phương trình ta được $-4b = -1$ suy ra $b = \frac{1}{4}$.

Thế $b = \frac{1}{4}$ vào phương trình $4a + 4b = 3$ ta được $a = \frac{1}{2}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ (nhận).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 4)$.

4.

a) Điều kiện $x \neq 0; y \neq 0$. Đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$. Theo đề bài ra ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} u + v = 3 \\ 3u - 2v = -1 \end{cases}$. Từ phương trình thứ nhất thế $v = 3 - u$ vào phương trình thứ hai ta được

$3u - 2(3 - u) = -1$ hay $5u = 5$ suy ra $u = 1$. Từ đó $v = 2$.

Ta suy ra: $x = \frac{1}{u} = 1; y = \frac{1}{v} = \frac{1}{2}$ (thoả mãn điều kiện)

b) Điều kiện: $x \neq -1; y \neq 1$. Đặt $u = \frac{x}{x+1}, v = \frac{y}{y-1}$. Theo đề bài ra ta có hệ phương trình:



$$\begin{cases} u - v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 3 + v + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 4v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{y}{y-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2 \\ y = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) Điều kiện: $x \neq 5; y \neq 6$. Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} \frac{x-5+5}{x-5} + \frac{y-6+6}{y-6} = 5 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x-5} + \frac{6}{y-6} = 3 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x-5} + \frac{12}{y-6} = 6 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x-5} + \frac{12}{y-6} = 6 \\ \frac{21}{y-6} = 7 \end{cases}$$

Từ $\frac{21}{y-6} = 7 \Rightarrow y = 6 - 3 \Rightarrow y = 9$ thay vào ta tìm được $x = 10$. Vậy hệ phương trình có

nghiệm là $(x; y) = (10; 9)$.

Dạng 3: Giải và biện luận hệ phương trình

3.1. Xác định tham số để hệ có nghiệm duy nhất

5.

Xét $m = 0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, rõ ràng có nghiệm duy nhất.

Xét $m \neq 0$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Vậy tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất là $m \neq \pm 1$.

6.

Xét $a = 0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} -y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$, rõ ràng có nghiệm duy nhất là $(3; -2)$.

Xét $a \neq 0$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{a} \Leftrightarrow a^2 + 1 \neq 0$.

Ta thấy rằng $a^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi a . Do đó rõ ràng $a^2 + 1 \neq 0$ với mọi a . Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất.

Ta có hệ tương đương:

$$\begin{cases} ax - 2 = y \\ x + ay = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax - 2 \\ x + a(ax - 2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax - 2 \\ (a^2 + 1)x = 2a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3a - 2}{a^2 + 1} \\ x = \frac{2a + 3}{a^2 + 1} \end{cases}$$



Kết luận: Với mọi a , hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = \left(\frac{2a + 3}{a^2 + 1}; \frac{3a - 2}{a^2 + 1} \right)$.

3.2. Xác định tham số để hệ vô nghiệm

7.

Viết lại hệ đã cho thành $\begin{cases} ax + 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Do đó hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\frac{a}{1} = \frac{2}{1} \neq \frac{0}{1} \Leftrightarrow a = 2$.

8.

Xét $m = 0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 0x + 0y = 2 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$, rõ ràng hệ vô nghiệm.

Xét $m \neq 0$. Khi đó hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\frac{m}{2m^2} = \frac{3m}{6m^2} \neq \frac{2}{m}$ (*)

Ta thấy với mọi $m \neq 0$ thì $\frac{m}{2m^2} = \frac{3m}{6m^2} = \frac{1}{2m}$.

Mặt khác $\frac{2}{m} - \frac{1}{2m} = \frac{3}{2m} \neq 0$ với mọi m khác 0. Do đó $\frac{2}{m} \neq \frac{1}{2m}$ với mọi m khác 0.

Vậy (*) đúng với mọi m khác 0. Kết hợp với trường hợp trên, ta suy ra hệ vô nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

3.3. Xác định tham số để hệ vô số nghiệm

9.

Xét $m = 0$. Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy khi $m = 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất. Ta loại giá trị này.

Xét $m \neq 0$. Khi đó hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\frac{2}{m} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{m}{m}$

Khi đó $\begin{cases} \frac{2}{m} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{m} = 1 \end{cases}$. Ta thấy hệ này vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của tham số m để hệ có vô số nghiệm.

10.





Xét $m = 2$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ -9x - 15y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$.

Vậy hệ có vô số nghiệm khi $m = 2$.

Xét $m \neq 2$. Khi đó hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\frac{3}{-9} = \frac{m^2 + 1}{-3m^2 - 3} = \frac{5m - 10}{-15m + 30}$ (*)

Ta thấy với mọi $m \neq 2$ thì $\frac{3}{-9} = \frac{m^2 + 1}{-3m^2 - 3} = \frac{5m - 10}{-15m + 30} = \frac{1}{3}$.

Do đó (*) đúng với mọi $m \neq 2$. Kết hợp với trường hợp trên, ta suy ra hệ có vô số nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

3.4. Xác định tham số để m thỏa mãn các điều kiện khác và bài toán tổng hợp

11.

Từ phương trình (1) suy ra $x = 1 - my$, thay vào phương trình (2) ta được

$$(5m + 2)(1 - my) + 3y = m - 2 \Leftrightarrow (5m^2 + 2m - 3)y = 4m + 4 \Leftrightarrow (m + 1)(5m - 3)y = 4(m + 1). \quad (3)$$

Nếu $m = -1$ thì (3) suy ra $0 \cdot y = 0$ luôn đúng với mọi $y \in \mathbb{R}$. Vậy phương trình có vô số nghiệm.

Nếu $m = \frac{3}{5}$ thì phương trình (3) suy ra $0 \cdot y = \frac{-32}{5}$ (vô lý). Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \neq -1$ và $m \neq \frac{3}{5}$ thì (3) suy ra $y = \frac{4}{5m - 3}$, do đó $x = \frac{m - 3}{5m - 3}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{m - 3}{5m - 3}; \frac{4}{5m - 3} \right)$.

12.

Từ phương trình (2) suy ra $x = m - (3m - 2)y$, thay vào phương trình (1) ta được $3m - 3(3m - 2)y + my = 2 \Leftrightarrow (-8m + 6)y = 2 - 3m$.

Nếu $m = \frac{3}{4}$ thì (3) suy ra $0 \cdot y = -\frac{1}{4}$ (vô lý) nên hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \neq \frac{3}{4}$ thì (3) suy ra $y = \frac{2 - 3m}{-8m + 6}$, do đó $x = \frac{m^2 - 6m + 4}{-8m + 6}$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{m^2 - 6m + 4}{-8m + 6}; \frac{2 - 3m}{-8m + 6} \right)$.

13.



a) Với $m = 2$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$. Giải hệ bằng phương pháp thế $x = 2y + 5$

vào phương trình thứ hai ta được $2(2y + 5) - y = 4$ từ đó suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

b) Từ phương trình (1) ta có $x = 2y + 5$. Thay $x = 2y + 5$ vào phương trình (2) ta được:

$$m(2y + 5) - y = 4 \Leftrightarrow (2m - 1)y = 4 - 5m \quad (3)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với:

$$2m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}. \text{ Từ đó ta được: } y = \frac{4 - 5m}{2m - 1}; x = 5 + 2y = \frac{3}{2m - 1}.$$

Ta có: $x.y = \frac{3(4 - 5m)}{(2m - 1)^2}$. Do đó $x.y < 0 \Leftrightarrow 4 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m > \frac{4}{5}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có: $x = |y| \Leftrightarrow \frac{3}{2m - 1} = \left| \frac{4 - 5m}{2m - 1} \right| \quad (4)$

Từ (4) suy ra $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$. Với điều kiện $m > \frac{1}{2}$ ta có:

$$(4) \Leftrightarrow |4 - 5m| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 5m = 3 \\ 4 - 5m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{5} \\ m = \frac{7}{5} \end{cases} (L). \text{ Vậy } m = \frac{7}{5}.$$

14.

a) Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 3m^2 - 2m - 1 \quad (3)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, tức là $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

b) Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x + m(3m - 1 - mx) = m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 3m^2 - 2m - 1 \quad (3)$$

Trường hợp 1: $m \neq \pm 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất



$$\begin{cases} x = \frac{3m^2 - 2m - 1}{m^2 - 1} = \frac{(m-1)(3m+1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{3m+1}{m+1} \\ y = 3m - 1 - m \cdot \frac{3m+1}{m+1} = \frac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m = 1$. Khi đó phương trình (3) thành: $0 \cdot x = 0$. Vậy hệ có vô số nghiệm dạng $(x; 2 - x), x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 3: $m = -1$ khi đó phương trình (3) thành: $0 \cdot x = 4$ (3) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

c) Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq \pm 1$.

Ta có: $\begin{cases} x = \frac{3m+1}{m+1} = 3 - \frac{2}{m+1} \\ y = \frac{m-1}{m+1} = 1 - \frac{2}{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3m+1}{m+1} = 3 - \frac{2}{m+1} \\ y = \frac{m-1}{m+1} = 1 - \frac{2}{m+1} \end{cases}$. Vậy x, y nguyên khi và chỉ khi

$\frac{2}{m+1}$ nguyên. Do đó $m+1$ chỉ có thể là $-2; -1; 1; 2$. Vậy $m = -3; -2; 0$ (thỏa mãn) hoặc

$m = 1$ (loại).

Vậy m nhận các giá trị là $-3; -2; 0$.

d) Khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) ta có: $x - y = 3 - \frac{2}{m+1} - \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) = 2$

Vậy điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên đường thẳng cố định có phương trình $y = x - 2$.

e) Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ theo (d) ta có: $y = x - 2$. Do đó:

$$xy = x(x - 2) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$x = 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{m+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy với $m = 0$ thì x, y đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ $x - y = 2$ theo cách khác: Khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất } (m \neq \pm 1) \text{ lấy phương trình (2) trừ đi phương}$$

trình (1) của hệ ta thu được: $(m - 1)x - (m - 1)y = 2(m - 1) \Rightarrow x - y = 2$.

15.



Từ phương trình (2) của hệ phương trình ta có $y = 3m + 1 - mx$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có: $(m^2 + 1)x = 3m^2 - 3m + 2$. Do $m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên phương trình này luôn có nghiệm duy nhất x_0 . Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi m .

Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ: Từ hệ phương trình ta có:
$$\begin{cases} x_0 - 2 = m(y_0 - 4) \\ y_0 - 1 = m(3 - x_0) \end{cases}$$
. Nhân cả

hai vế phương trình thứ nhất với $(3 - x_0)$, phương trình thứ hai với $(y_0 - 4)$ rồi trừ hai phương trình cho nhau ta được:

$$(3 - x_0)(x_0 - 2) - (y_0 - 4)(y_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0.$$

16.

Xét $a = 1$. Hệ trở thành
$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy ta nhận giá trị $a = 1$.

Xét $a \neq 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\frac{a+1}{1} \neq \frac{-1}{a-1} \Leftrightarrow a \neq 0$.

Vậy xét $a \neq 0$. Khi đó, hệ tương đương

$$\begin{cases} y = (a+1)x - (a+1) \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (a+1)x - (a+1) \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (a+1)x - (a+1) \\ a^2x - a^2 + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a+1}{a^2} \\ x = 1 + \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm nguyên thì x phải nguyên. Do đó $1 + \frac{1}{a^2}$ phải nguyên. Vậy a^2 phải là ước của 1.

Mặt khác, $a^2 \geq 0$. Vậy $a^2 = 1$. Suy ra a chỉ có thể nhận giá trị ± 1 .

Ta không xét $a = 1$. Xét $a = -1$, khi đó $y = 0, x = 2$ (thỏa)

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất, và nghiệm đó là nghiệm nguyên khi và chỉ khi $a = \pm 1$.

Dạng 4: Liên quan đến đồ thị hàm số.

17.

a) Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(2; -2)$ nên ta có phương trình $2a + b = -2$ (1)

Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $B(-1; 3)$ nên ta có phương trình $-a + b = 3$ (2)



Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -a + b = 3 \end{cases}$. Giải hệ ta được $\begin{cases} a = \frac{-5}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$

Vậy khi $a = -\frac{5}{3}; b = \frac{4}{3}$ thì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(2; -2)$ và $B(-1; 3)$

b) Ta có hệ phương trình ẩn a, b là $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$. Nghiệm của hệ là: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

Vậy với $a = -1; b = 3$ thì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(2; 1)$ và $B(1; 2)$

18.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = -2 \end{cases} \text{ . Giải hệ phương trình này ta được } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi (d_3) đi qua $(-1; -1)$. Tức là

$$-1 = -2 \cdot (-1) - m \Leftrightarrow m = 3. \text{ Vậy } m = 3 \text{ là giá trị cần tìm.}$$

19.

a) Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ \sqrt{2}x + y = \sqrt{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(1; 2)$.

Ba đường thẳng $(d_1); (d_2)$ và (d_m) đồng quy khi và chỉ khi:

$$M \in (d_m) \Leftrightarrow m \cdot 1 - (1 - 2m) \cdot 2 = 5 - m \Leftrightarrow m = \frac{7}{6}.$$

Vậy với $m = \frac{7}{6}$ thì ba đường thẳng $(d_1); (d_2)$ và (d_m) đồng quy.

b) Đặt $E(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc (d_m) . Khi đó

$$mx_0 - (1 - 2m)y_0 = 5 - m, \forall m \in \mathbb{R}$$



$$\Leftrightarrow (x_0 + 2y_0 + 1)m = y_0 + 5, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 9 \\ y_0 = -5. \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua là $E(9; -5)$.

Mở rộng các bài toán sau khi học về căn thức

1.

a) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, x - y > 0$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x - 1} \\ b = \frac{1}{\sqrt{x - y}} \end{cases}$ ta có hệ phương trình mới

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 1} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x - y}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = 1; y = 0$.

b) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, y \neq \frac{1}{2}$. Ta nhân phương trình thứ nhất của hệ với 2 thì thu được:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x - 1} + \frac{2}{|2y - 1|} = 2 \\ 3\sqrt{2x - 1} - \frac{2}{|2y - 1|} = -2 \end{cases}, \text{ cộng hai phương trình của hệ mới ta có:}$$

$$5\sqrt{2x - 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Với } x = \frac{1}{2} \text{ thay vào phương trình ban đầu của hệ ta}$$

$$\text{có: } \frac{1}{|2y - 1|} = 1 \Leftrightarrow |2y - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 1 = 1 \\ 2y - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 0\right), \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\text{c) Điều kiện } x > 7, y > -6, \text{ ta viết lại hệ thành: } \begin{cases} \frac{21}{\sqrt{x - 7}} - \frac{12}{\sqrt{y + 6}} = 5 \\ \frac{20}{\sqrt{x - 7}} + \frac{12}{\sqrt{y + 6}} = \frac{26}{3} \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình của hệ ta thu được:

$$\frac{41}{\sqrt{x - 7}} = \frac{41}{3} \Rightarrow \sqrt{x - 7} = 3 \Leftrightarrow x - 7 = 9 \Rightarrow x = 16 \text{ thay vào ta tìm được:}$$



$$\frac{7}{3} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{y+6} = 6 \Leftrightarrow y+6 = 36 \Rightarrow y = 30 \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (16; 30)$.

2.

a) Điều kiện $y \geq 0, x \neq -1$. Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} \frac{2x+2-2}{x+1} + \sqrt{y} = -1 \\ \frac{1}{x+1} + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{x+1} + \sqrt{y} = -3 \\ \frac{2}{x+1} + 4y = 8 \end{cases}, \text{ cộng 2 phương trình của hệ thu được:}$$

$$\sqrt{y} + 4y = 5 \Leftrightarrow 4y + \sqrt{y} - 5 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)(4\sqrt{y} + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 1 \text{ (TM)} \\ \sqrt{y} = -\frac{5}{4} \text{ (L)} \end{cases}$$

Suy ra $y = 1$ thay vào phương trình thứ 2 ta tìm được: $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

b) Điều kiện: $x \geq -1; y \neq -1$, ta viết hệ lại dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \frac{2y+2-2}{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - \frac{2}{y+1} = 0 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - \frac{4}{y+1} = 0 \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{y+1} = \frac{3}{2} \\ 2\sqrt{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (0; 1)$.

**BÀI 3:**
GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH**BÀI TẬP****Dạng 1. Toán có nội dung hình học****1.**

Gọi x (m) và y (m) lần lượt là cạnh thứ nhất và cạnh thứ hai của mảnh đất hình chữ nhật.

Điều kiện: $0 < x < 12$, $1 < y < 12$.

Diện tích mảnh đất ban đầu: $x.y$ (m²).

Theo đề ta có phương trình: $2(x + y) = 24$ (m). (1)

Giả sử tăng độ dài một cạnh lên 2 m và giảm độ dài cạnh còn lại 1 m.

Độ dài cạnh thứ nhất khi tăng 2 m: $x + 2$ (m).

Độ dài cạnh còn lại khi giảm 1 m: $y - 1$ (m).

Diện tích mảnh đất khi thay đổi: $(x + 2)(y - 1)$ (m²).

Theo đề ta có phương trình: $(x + 2)(y - 1) - xy = 1$. (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x + y) = 24 \\ (x + 2)(y - 1) - xy = 1 \end{cases}$$
 . Đơn giản hệ ta được
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Cộng hai vế của hệ phương trình ta được $3y = 15$ suy ra $y = 5$. Từ đó tìm được $x = 7$

Vậy kích thước mảnh đất lúc đầu là: 7 m; 5 m.

2.

Gọi x ; y (cm) lần lượt là chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật ban đầu. ĐK: $x \geq y > 2$.

Diện tích hình chữ nhật sau khi tăng hai kích thước là: $(x + 4)(y + 4)$ (cm²).

Diện tích hình chữ nhật sau khi tăng chiều dài và giảm chiều rộng là: $(x + 5)(y - 2)$ (cm²).

Theo đề ta có hệ:
$$\begin{cases} (x + 4)(y + 4) - xy = 80 \\ (x + 5)(y - 2) - xy = 0 \end{cases}$$
 . Đơn giản hệ ta được
$$\begin{cases} x + y = 16 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$$
 .

Thế $x = 16 - y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta có $-32 + 2y + 5y = 10$ hay $7y = 42$ suy ra $y = 6$. Do đó $x = 10$. (Thỏa mãn ĐK).



Vậy chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 10 cm và 6 cm .

3.

Gọi x (m) là chiều dài hình chữ nhật ($x > 0$)

y (m) là chiều rộng hình chữ nhật ($y > 0, m$)

Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 5y - 2x = 40 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được:
$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 30 m, chiều rộng hình chữ nhật là 20 m.

4.

Gọi x, y (m) lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn, điều kiện $x > 0, y > 0$ suy ra diện tích mảnh vườn là: xy (m^2).

Do chiều dài lớn hơn chiều rộng của mảnh vườn là 15 m nên ta có phương trình:

$$x - y = 15 \quad (1).$$

Khi giảm chiều dài 2 m, tăng chiều rộng 3 m thì diện tích mảnh vườn tăng $44 m^2$ nên ta có phương trình : $(x - 2)(y + 3) = xy + 44$ hay $3x - 2y = 50$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 3x - 2y = 50 \end{cases} .$$

Giải hệ phương trình ta được : $x = 20, y = 5$ (TMDK).

Vậy diện tích của mảnh vườn là: $S = xy = 100 m^2$.

Dạng 2: Toán số học, phần trăm

5.

Gọi x, y là hai số tự nhiên cần tìm, trong đó y là số lớn, x là số bé. Theo đề bài ta có hệ

phương trình
$$\begin{cases} y - x = 1814 \\ y = 9x + 182 \end{cases} .$$
 Từ phương trình thứ nhất thế $y = x + 1814$ vào phương trình

thứ hai ta được $x + 1814 = 9x + 182$ hay $8x = 1632$ suy ra $x = 204$. Từ đó thế tìm được $y = 204 + 1814 = 2018$



Vậy hai số cần tìm là 204 và 2018 .

6.

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là x , điều kiện $x \in \mathbb{N}, (0 < x \leq 9)$

Gọi chữ số hàng đơn vị của số cần tìm là y , điều kiện $y \in \mathbb{N}, (0 \leq y \leq 9)$

Tổng chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14 nên có phương trình: $x + y = 14$

Đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị nên có phương trình: $10y + x - (10x + y) = 18$ hay $x - y = 1$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 14 \\ y - x = 2 \end{cases}$$
 . Giải hệ ta được
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$$
 (thỏa mãn điều kiện)

Số cần tìm là 68.

7.

Gọi chữ số hàng chục là a ($a \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9$)

Gọi chữ số hàng đơn vị là b ($b \in \mathbb{N}, 0 \leq b \leq 9$)

Số cần tìm là $\overline{ab} = 10a + b$

Ta có chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị nên ta có phương trình:

$$b - a = 5 \text{ hay } -a + b = 5 \quad (1)$$

Lại có khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới là

$$\overline{a1b} = 100a + 10 + b$$

Do số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị nên ta có phương trình :

$$(100a + 10 + b) - (10a + b) = 280 \text{ hay } 90a = 270 \quad (2).$$
 Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -a + b = 5 \\ 90a = 270 \end{cases}$$
 . Từ phương trình thứ hai ta tìm được $a = 3$. Thế vào phương trình thứ nhất ta

được $b = 8$ (thỏa mãn). Vậy số cần tìm là 38.

8.

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y . Điều kiện: $0 < x, y \leq 9, x, y \in \mathbb{N}$

Theo bài ra ta có hệ phương trình



$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ x1y = xy + 370 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 100x + 10 + y = 10x + y + 370 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số cần tìm là 46

9.

Gọi số tự nhiên có hai chữ số là \overline{ab} ($a, b \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$).

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ \overline{ba} - \overline{ab} = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases}. \text{ Vậy số cần tìm là } 47.$$

10.

Gọi số cần tìm có 2 chữ số là \overline{ab} , với ($a, b \in \mathbb{N}; 0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$)..

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 10a + b = 7(a + b) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ 3a - 6b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 3 \end{cases}$$

$a = 8; b = 3$ thỏa mãn điều kiện. Vậy số cần tìm là: 83

Dạng 3. Toán năng suất, phần trăm, công việc.

11.

Gọi số sản phẩm tổ 1 làm theo kế hoạch là x (sản phẩm), ĐK: $x \in \mathbb{N}^*, x < 600$)

Gọi số sản phẩm tổ 2 làm theo kế hoạch là y (sản phẩm), ĐK: $y \in \mathbb{N}^*, y < 600$)

Vì hai tổ sản xuất được giao làm 600 sản phẩm nên ta có phương trình:

$$x + y = 600 \quad (1)$$

Số sản phẩm vượt mức của tổ 1 là: $10\% \cdot x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm vượt mức của tổ 2 là: $20\% \cdot y$ (sản phẩm)

Vì tăng năng suất 2 tổ đã làm được 685 sản phẩm, nên ta có phương trình:

$$110\% \cdot x + 120\% \cdot y = 685 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 600 \\ 110\% \cdot x + 120\% \cdot y = 685 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y = 600 \\ 0,1y = 25 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $y = 250$ từ đó suy ra $x = 350$ (thỏa mãn)

Vậy số sản phẩm tổ 1 làm theo kế hoạch là 350 sản phẩm

Số sản phẩm tổ 2 làm theo kế hoạch là 250 sản phẩm.



12.

Gọi số chi tiết máy tháng đầu của tổ 1 là x chi tiết máy (x nguyên dương, $x < 900$)

Gọi số chi tiết máy tháng đầu của tổ 2 là y chi tiết máy (y nguyên dương, $y < 900$)

$$\text{Theo đề bài ta có hệ } \begin{cases} x + y = 900 \\ 1,1x + 1,12y = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 500 \end{cases} \text{ (thoả mãn)}$$

Đáp số : 400; 500 chi tiết máy.

13.

Gọi số kg giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là x (kg) (Đk : $0 < x < 10$)

Số kg giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là y (kg) (Đk : $0 < x < 10$)

$$\text{Theo đầu bài ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 10 \\ 1,3x + 1,2y = 12,5 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $(x; y) = (5; 5)$

Trả lời: Số giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg.

Số giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg.

14.

Số áo tổ thứ nhất may được trong 1 ngày là x (chiếc áo) ($x \in \mathbb{N}; x > 10$)

Số áo tổ thứ hai may được trong 1 ngày là y (chiếc áo) ($y \in \mathbb{N}, y \geq 0$)

Tổ thứ nhất may được nhiều hơn tổ thứ hai là 10 chiếc áo nên ta có phương trình:

$$x - y = 10$$

Tổng số áo tổ thứ nhất may trong 3 ngày, tổ thứ hai may trong 5 ngày là: $3x + 5y = 1310$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} x - y = 10 \\ 3x + 5y = 1310 \end{cases} \cdot \text{Thế } y = x - 10 \text{ vào phương trình thứ hai ta được}$$

$$3x + 5(x - 10) = 1310 \text{ hay } 8x - 50 = 1310 \text{ hay } y = 160. \text{ Từ đó tìm ra } x = 170 \text{ (thoả mãn)}$$

Kết luận: Mỗi ngày tổ thứ nhất may được 170 (áo), tổ thứ hai may được 160 (áo)

15.

Gọi x (giờ), y (giờ) lần lượt là thời gian một mình công nhân I và một mình công nhân II làm xong công việc. ĐK: $x, y > 16$.



Trong 1 giờ: Công nhân thứ nhất làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc)

Công nhân thứ hai làm được: $\frac{1}{y}$ (công việc)

Cả hai công nhân làm được: $\frac{1}{16}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1)

Trong 3 giờ công nhân thứ nhất làm được: $3 \cdot \frac{1}{x}$ (công việc)

Trong 6 giờ công nhân thứ hai làm được: $6 \cdot \frac{1}{y}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} . \text{ Trừ từng vế hai}$$

phương trình ta được $\frac{3}{y} = \frac{1}{16}$ hay $y = 48$. Từ đó tìm được $x = 24$ (thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Một mình công nhân thứ nhất làm xong công việc hết: 24 giờ

Một mình công nhân thứ hai làm xong công việc hết: 48 giờ

16.

Gọi x (h) là thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc ($x > 6$) . thì trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Gọi y (h) là thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc ($y > 6$) trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Trong 3h20 phút người thứ nhất làm được $\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x}$ (công việc), trong 10 h người thứ hai làm được $10 \cdot \frac{1}{y}$ (công việc)



ta có phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x} + 10 \cdot \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$
 Đặt ẩn phụ ta có
$$\begin{cases} u + v = \frac{1}{6} \\ \frac{10}{3}u + 10v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{10} \\ v = \frac{1}{15} \end{cases} \text{ (thỏa)}$$

Suy ra $x = 10 ; y = 15$. Kết luận.

17.

Gọi thời gian để đội thứ nhất và đội thứ hai làm riêng một mình hoàn thành xong công việc lần lượt là x và y ($x > 15, y > 15$), đơn vị (ngày).

Một ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Một ngày đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Vì hai đội cùng làm trong 15 ngày thì hoàn thành xong công việc. Như vậy trong một ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{15}$ (công việc). Suy ra, ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$ (1).

Ba ngày đội đội thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc).

Năm ngày đội thứ hai làm được $\frac{5}{y}$ (công việc).

Vì đội thứ nhất làm trong 3 ngày rồi dừng lại đội thứ hai làm tiếp trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành xong $25\% = \frac{1}{4}$ (công việc). Suy ra, ta có phương trình : $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{40} \end{cases}$$
 suy ra
$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 40 \end{cases}$$
.

Vậy thời gian để đội thứ nhất làm riêng một mình hoàn thành xong công việc là 24 (ngày) và thời gian để đội thứ hai làm riêng một mình hoàn thành xong công việc là 40 (ngày).

18.

Gọi x (giờ) và y (giờ) lần lượt là thời gian làm một mình của máy thứ nhất và máy thứ hai để san lấp toàn bộ khu đất ($x > 0; y > 0$)



Nếu làm một mình thì trong 1 giờ máy ủi thứ nhất san lấp được $\frac{1}{x}$ khu đất, và máy thứ hai san lấp được $\frac{1}{y}$ khu đất.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{42}{x} + \frac{22}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} .$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} 12u + 12v = \frac{1}{10} \\ 42u + 22v = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được $u = \frac{1}{300}$; $v = \frac{1}{200}$, Suy ra: $(x; y) = (300; 200)$

Trả lời: Để san lấp toàn bộ khu đất thì: Máy thứ nhất làm một mình trong 300 giờ, máy thứ hai làm một mình trong 200 giờ

19.

Gọi năng suất lúa trung bình của loại I là x (tấn/ ha) ($0 < x < 139$)

Gọi năng suất lúa trung bình của loại II là y (tấn/ ha) ($0 < y < 139$)

Theo bài ra ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 10x + 8y = 139 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} .$$

Giải hệ này ta được $x = 7,5$ và $y = 8$ (thoả mãn)

Vậy năng suất lúa trung bình của loại I là: 7,5 (tấn / ha)

Vậy năng suất lúa trung bình của loại II là: 8 (tấn / ha)

20.

Gọi thời gian đội A và đội B làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (ngày).

Điều kiện: $x, y > 12$

Mỗi ngày, đội A làm được $\frac{1}{x}$ công việc, đội B làm được $\frac{1}{y}$ công việc

Mỗi ngày, hai đội làm được $\frac{1}{12}$ công việc.



Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1)

Trong 8 ngày làm chung, hai đội làm được $\frac{2}{3}$ công việc

Trong 8 ngày tiếp theo, do tăng năng suất gấp đôi nên đội B làm được $\frac{16}{y}$ công việc

Ta có phương trình: $\frac{2}{3} + \frac{16}{y} = 1$ (2). Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} + \frac{16}{y} = 1 \end{cases}$$

Từ phương trình 2 của hệ ta có $\frac{16}{y} = \frac{1}{3}$ hay $y = 48$. Từ đó ta tìm được $x = 16$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian đội A và đội B làm một mình xong công việc lần lượt là 16; 48 (ngày).

21.

Gọi số đèn mà lớp 9A, lớp 9B làm được trong 1 ngày lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}$).

Theo bài ra ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 23 \\ x + 2y = 22 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta thu được
$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$$

Suy ra trong một ngày cả 2 lớp làm được $8 + 7 = 15$ chiếc đèn.

Vậy nếu cả 2 lớp cùng làm thì hết $\frac{90}{15} = 6$ ngày sẽ xong công việc đã dự định.

Dạng 4. Một số bài toán về vòi nước.

22.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ), thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y (giờ). Điều kiện $x, y > 5$

Trong 1 giờ: vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể; vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể

Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{5}$ bể.



Vì hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước thì trong 5 giờ sẽ đầy bể nên ta có phương

$$\text{trình: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \quad (1)$$

Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ 2 chảy trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể nên ta có phương

$$\text{trình: } 3 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $x = 7,5$; $y = 15$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là 7,5 giờ, thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 15 giờ.

23.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ), thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y (giờ) (ĐK: $x; y > 0$)

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể

Vì hai vòi cùng chảy trong 3 giờ đầy bể nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ (1)

Trong 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{3x}$ (bể)

Trong 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ tiếp theo vòi thứ hai chảy được là $\frac{1}{2y}$ (bể)

Vì nếu mở vòi thứ nhất chảy một mình trong 20 phút, rồi khóa lại, mở tiếp vòi 2 chảy một mình trong 30 phút thì được $\frac{1}{8}$ bể nên ta có phương trình $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{8}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{8} \end{cases}$$
 . Giải hệ ta được
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 12 \end{cases}$$
 (thỏa mãn)



Vậy thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là 4 giờ, thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 12 giờ.

24.

Gọi x, y (phút) lần lượt là thời gian mỗi vòi chảy đầy bể nếu mở riêng từng vòi

Trong một giờ, vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể) và vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)

Hai vòi cùng chảy vào bể thì sau 1 giờ 20 phút = 80 phút thì đầy bể nên $\frac{80}{x} + \frac{80}{y} = 1$

Nếu vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì chảy được $\frac{2}{15}$ bể

nên ta có phương trình: $\frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15}$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{80}{x} + \frac{80}{y} = 1 \\ \frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$, ta đưa về hệ phương trình
$$\begin{cases} 80u + 80v = 1 \\ 10u + 12v = \frac{2}{15} \end{cases}$$
, giải hệ phương

trình ta được
$$\begin{cases} u = \frac{1}{120} \\ v = \frac{1}{240} \end{cases}$$
 tức là
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{120} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{240} \end{cases}$$
 suy ra
$$\begin{cases} x = 120 \\ y = 240 \end{cases}$$

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 120 phút và người thứ hai hoàn thành công việc trong 240 phút

25.

Ta có 1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ h; 15 phút = $\frac{1}{4}$ h; 20 phút = $\frac{1}{3}$ h

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (h; $x > 0$)

Thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y (h; $y > 0$)



Hai vòi cùng chảy thì sau 1 giờ 30 phút sẽ đầy bể, ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{4}$

Vòi thứ nhất chảy trong 15 phút và vòi thứ hai chảy trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể ta có

phương trình $\frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5}$

Từ đó ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nếu chảy riêng thì vòi I chảy đầy bể trong $\frac{15}{4}$ h, vòi II chảy đầy bể trong $\frac{5}{2}$ h

26.

Gọi x (giờ) và y (giờ) là thời gian để vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình thì đầy bể ($x > 0; y > 0$)

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ phần của bể, vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ phần của bể

Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ phần của bể

Hai vòi cùng chảy thì trong $4\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ giờ sẽ đầy bể, nên mỗi giờ hai vòi chảy được

$1 : \frac{24}{5} = \frac{5}{24}$ (bể). Do đó, ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$ (1)

Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và sau 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ

nữa mới đầy bể. Do đó, ta có phương trình $\frac{9}{x} + \frac{5}{24} \cdot \frac{6}{5} = 1$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{9}{x} + \frac{5}{24} \cdot \frac{6}{5} = 1 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $36 + x = 4x$ hay $x = 12$. Từ đó tìm được $y = 8$ (thỏa mãn). Vậy nếu vòi thứ hai chảy một mình thì sau 8 giờ sẽ đầy bể

Dạng 5. Toán chuyển động



27.

Đổi 1 giờ 10 phút = $\frac{7}{6}$ (h), 1 giờ 20 phút = $\frac{4}{3}$ (h).

Gọi vận tốc lên dốc và xuống dốc của người đó lần lượt là x (km/h) và y (km/h) với $y > x > 0$

Lúc đi: Thời gian lên dốc là $\frac{5}{x}$ (h), xuống dốc là $\frac{10}{y}$ (h)

Tổng thời gian đi hết 1 giờ 10 phút nên ta có phương trình: $\frac{5}{x} + \frac{10}{y} = \frac{7}{6}$ (1)

Lúc về: Thời gian lên dốc là $\frac{10}{x}$ (h), xuống dốc là $\frac{5}{y}$ (h)

Tổng thời gian đi hết 1 giờ 20 phút nên ta có phương trình: $\frac{10}{x} + \frac{5}{y} = \frac{4}{3}$ (2)

Từ (1) và (2), ta lập hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{10}{y} = \frac{7}{6} \\ \frac{10}{x} + \frac{5}{y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{x}$ và $b = \frac{1}{y}$ với $a > 0, b > 0$, ta được:
$$\begin{cases} 5a + 10b = \frac{7}{6} \\ 10a + 5b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất của hệ với 2 và trừ từng vế của hai phương trình ta được $15b = 1$ hay $b = \frac{1}{15}$. Từ đó suy ra $a = \frac{1}{10}$ (nhận)

Từ đây ta suy ra
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (Nhận)}$$

Vậy vận tốc lúc lên dốc là 10(km/h) và vận tốc xuống dốc là 15(km/h).

28.

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước lần lượt là x, y (km/h; $0 < y < x$).

Vận tốc ca nô xuôi dòng là: $x + y$ (km/h).



Vận tốc ca nô ngược dòng là: $x - y$ (km/h).

Đôi: 2 giờ 30 phút = $\frac{5}{2}$ giờ; 1 giờ 20 phút = $\frac{4}{3}$ giờ.

Vì ca nô xuôi dòng một quãng sông dài 12km rồi ngược dòng quãng sông đó mất 2 giờ 30 phút nên ta có phương trình: $\frac{12}{x+y} + \frac{12}{x-y} = \frac{5}{2}$ (1).

Vì ca nô xuôi dòng 4km rồi ngược dòng 8km thì hết 1 giờ 20 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{4}{x+y} + \frac{8}{x-y} = \frac{4}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{12}{x+y} + \frac{12}{x-y} = \frac{5}{2} \\ \frac{4}{x+y} + \frac{8}{x-y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{x+y}; b = \frac{1}{x-y}$ ($a > 0; b > 0$), ta có hệ
$$\begin{cases} 12a + 12b = \frac{5}{2} \\ 4a + 8b = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (I)$$

Giải hệ phương trình (I) ta được:
$$\begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 12 \\ x-y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 10 km/h và vận tốc riêng của dòng nước là 2 km/h

29.

Gọi x (cm/s) và y (cm/s) là vận tốc các vật ($x, y > 0$)

Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau, ta có phương trình

$$\frac{20\pi}{x-y} = 20$$

Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau, ta có $\frac{20\pi}{x+y} = 4$



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{20\pi}{x-y} = 20 \\ \frac{20\pi}{x+y} = 4 \end{cases}$. Quy đồng và khử mẫu ta được hệ $\begin{cases} 20\pi = 20x - 20y \\ 20\pi = 4x + 4y \end{cases}$ từ

đó giải ra $\begin{cases} x = 3\pi \\ y = 2\pi \end{cases}$

Vậy vận tốc của vật thứ nhất là 3π cm/s, vận tốc vật thứ hai là 2π cm/s.

30.

Gọi vận tốc đạp xe hàng ngày của Nam là x (km/h, $x > 0$)

Vận tốc đạp xe lớn nhất của Nam là y (km/h, $y > x$)

Thời gian đi hàng ngày của Nam từ nhà đến trường là $\frac{10}{x}$ (h)

Thời gian đi của Nam từ nhà đến trường với vận tốc lớn nhất là $\frac{10}{y}$ (h)

Theo bài ra Nam tính toán và thấy rằng nếu đạp xe với vận tốc lớn nhất thì thời gian đi học sẽ rút ngắn 10 phút ($\frac{1}{6}$ (h)) nên ta có phương trình: $\frac{10}{x} - \frac{10}{y} = \frac{1}{6}$

Thời gian đi học thực tế của Nam trong 5 km đầu là $\frac{5}{y}$ (giờ)

Thời gian đi học thực tế của Nam trong 5 km cuối là $\frac{5}{x}$ (giờ)

Theo bài ra vì thời gian đạp xe đi học sáng nay của Nam là 35 phút ($\frac{7}{12}$ (h)) nên ta có

phương trình $\frac{5}{x} + \frac{5}{y} = \frac{7}{12}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{10}{x} - \frac{10}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{5}{x} + \frac{5}{y} = \frac{7}{12} \end{cases}$. Giải hệ ta được $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 15 \\ y = 20 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc đạp xe hàng ngày của Nam là 15 (km/h)

Vận tốc đạp xe lớn nhất của Nam là 20 (km/h)

31.

- Gọi số bước anh Sơn đi bộ trong 1 phút là x (bước) ($x \in \mathbb{N}^*$)



- Số bước chị Hà đi trong 1 phút là y (bước)

- Vì nếu cùng đi trong 2 phút thì anh Sơn bước nhiều hơn chị Hà 20 bước nên ta có phương trình: $2x - 2y = 20 \Leftrightarrow x - y = 10$

- Vì chị Hà đi trong 5 phút thì lại nhiều hơn anh Sơn đi trong 3 phút là 160 bước nên ta có phương trình: $5y - 3x = 160$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 10 \\ 5y - 3x = 160 \end{cases}$. Giải hệ ta được $\begin{cases} x = 105 \\ y = 95 \end{cases}$

Vậy mỗi ngày số bước anh Sơn đi bộ trong 1 giờ là: $105 \cdot 60 = 6300$ (bước)

Và mỗi ngày số bước chị Hà đi bộ trong 1 giờ là: $95 \cdot 60 = 5700$ (bước)

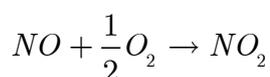
Dạng 6. Tìm hệ số để cân bằng phản ứng hoá học

32.

Cân bằng số nguyên tử của NO , số nguyên tử của O_2 ở cả hai vế ta được hệ

$\begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$. Với $x = 1$ thế vào phương trình thứ hai của hệ ta có $y = \frac{1}{2}$

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hóa học, ta được



Do các hệ số của phương trình hóa học phải là số nguyên nên nhân hai vế của phương trình hóa học trên với 2, ta được



33.

Cân bằng số nguyên tử Fe và số nguyên tử Cl_2 ở hai vế ta được hệ $\begin{cases} 2 = x \\ 2y = 3x \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $x = 2$ và $y = 3$

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hóa học, ta có $2Fe + 3Cl_2 \rightarrow 2FeCl_3$

Dạng 7. Một số bài tập khác

34.

Gọi số học sinh nam của lớp 9A là x (học sinh), $x > 0$.



Số học sinh nữ của lớp 9A là y (học sinh), $y > 0$.

$\frac{1}{2}$ số học sinh nam của lớp 9A là: $\frac{1}{2}x$ (học sinh).

$\frac{5}{8}$ số học sinh nữ của lớp 9A là: $\frac{5}{8}y$ (học sinh).

Thầy Thành chọn $\frac{1}{2}$ số học sinh nam kết hợp với $\frac{5}{8}$ số học sinh nữ nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{2}x - \frac{5}{8}y = 0 \quad (1)$$

Tổng số học sinh của lớp 9A là: $x + y$ (học sinh).

Tổng số học sinh được chọn để tham gia thi đấu là: $\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}y$ (học sinh).

Sau khi đã chọn được số học sinh tham gia thi đấu thì lớp 9A còn lại 16 học sinh làm cố động viên nên ta có phương trình: $(x + y) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}y\right) = 16 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}y = 0 \\ (x + y) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}y\right) = 16 \end{cases} . \text{ Thu gọn phương trình thứ hai của hệ ta được hệ phương trình}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}y = 16 \end{cases} . \text{ Giải hệ này ta có } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{5}{8} \cdot 16 = 0 \\ y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 16 \end{cases} \quad (\text{thoả mãn})$$

Số học sinh nam của lớp 9A là 20 học sinh.

Số học sinh nữ của lớp 9A là 16 học sinh.

Vậy số học sinh lớp 9A là 36 học sinh.

35.

Gọi số học sinh của hai lớp 9A và 9B lần lượt là x và y ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Số sách giáo khoa hai lớp ủng hộ là $6x + 5y$.

Số sách tham khảo hai lớp ủng hộ là $3x + 4y$.



Vì cả hai lớp ủng hộ số sách là 738 cuốn nên ta có $6x + 5y + 3x + 4y = 738$ và

Số sách giáo khoa ủng hộ nhiều hơn sách tham khảo 166 cuốn nên

$$6x + 5y - (3x + 4y) = 166.$$

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 9x + 9y = 738 \\ 3x + y = 166 \end{cases}$. Chia cả hai vế của phương trình thứ nhất cho

9 ta được hệ $\begin{cases} x + y = 82 \\ 3x + y = 166 \end{cases}$. Trừ hai vế của hệ phương trình ta được $2x = 84$ suy ra $x = 42$

từ đó tìm được $y = 40$. (Thỏa mãn)

Vậy lớp 9A có 42 học sinh, lớp 9B có 40 học sinh.

36.

Gọi số thí sinh vào trường THPT Chuyên và số thí sinh vào trường PTDT Nội trú lần lượt là x, y (thí sinh) (điều kiện $x > 0, y > 0$)

Vì số thí sinh vào trường THPT Chuyên bằng $\frac{2}{3}$ số thí sinh vào trường PTDT Nội trú nên ta

$$\text{có: } x = \frac{2}{3}y \quad (1)$$

Vì tổng số phòng thi của cả hai trường là 80 phòng thi và mỗi phòng thi có đúng 24 thí sinh nên tổng số thí sinh của cả hai trường là: $24.80 = 1920$ (thí sinh)

Do đó ta có phương trình; $x + y = 1920$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ x + y = 1920 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}y + y = 1920 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ \frac{5}{3}y = 1920 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1152 \\ x = 768 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x = 768; y = 1152$ đều thỏa mãn.

Vậy số thí sinh vào trường THPT Chuyên và số thí sinh vào trường PTDT Nội trú lần lượt là 768 thí sinh, 1152 thí sinh.

37.

Đổi: 1,5 giờ = 90 phút.

Gọi x (phút) là thời gian Dững bơi và y (phút) là thời gian Dững chạy bộ

Theo giải thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 15x + 10y = 1200 \\ x + y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 30 \end{cases}$

Vậy Dững mất 60 phút để bơi và 30 phút để chạy bộ để tiêu thụ hết 1200 ca-lo.

**38.**

Gọi số bài điểm 9 và điểm 10 của An đạt được lần lượt là x, y (bài) ($x, y \in \mathbb{N}$).

Theo giả thiết $x + y > 16$.

Vì tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đó là 160 nên $9x + 10y = 160$.

Ta có $160 = 9x + 10y \geq 9(x + y) \Rightarrow x + y \leq \frac{160}{9}$.

Do $x + y \in \mathbb{N}$ và $16 < x + y \leq \frac{160}{9}$ nên $x + y = 17$.

Ta có hệ $\begin{cases} x + y = 17 \\ 9x + 10y = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ 9(17 - y) + 10y = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy An được 10 bài điểm 9 và 7 bài điểm 10.

39.

Gọi x, y (quyển sách) lần lượt là số học sinh lớp 9A, 9B ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có hệ pt: $\begin{cases} x + y = 82 \\ 3x + y = 166 \end{cases}$ Giải hệ ta được $\begin{cases} x = 42 \\ y = 40 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy số học sinh của lớp 9A là 42 học sinh; của lớp 9B là 40 học sinh.

40.

Gọi số học sinh tặng 3 quyển sách là x (học sinh), ($x \in \mathbb{N}^*, x < 42$).

Số học sinh tặng 5 quyển sách là y (học sinh), ($y \in \mathbb{N}^*, y < 42$).

Tổng số bạn học sinh của lớp 9B là 42 bạn nên ta có: $x + y = 42$ (1)

Số sách mà x học sinh tặng được là: $3x$ (quyển)

Số sách mà y học sinh tặng được là: $5y$ (quyển).

Tổng số sách lớp 9B tặng được là 146 quyển nên ta có phương trình: $3x + 5y = 146$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 42 \\ 3x + 5y = 146 \end{cases}$. Giải hệ ta được $x = 32; y = 10$

Vậy lớp 9B có 32 học sinh tặng 3 quyển sách và 10 học sinh tặng 5 quyển sách.

41.



Gọi x, y theo thứ tự là số lít dung dịch loại 1 và 2 ($x, y > 0$).

Lượng axit nitric chứa trong dung dịch loại 1 là $\frac{30}{100}x$ và loại 2 là $\frac{55}{100}y$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{30}{100}x + \frac{55}{100}y = 50. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $x = 20$ và $y = 80$.

Vậy lượng dung dịch loại 1 là 20 lít và loại 2 là 80 lít.



BÀI 4

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

• Phương trình tích

BÀI TẬP

Dạng 1. Các bài toán về phương trình tích đơn giản

1.

$$a) (3x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy PT có tập nghiệm } S = \left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$$

$$b) (x^2 + 3)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Vậy PT có tập nghiệm } S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$c) (x + 3)(2x + 3)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-3; -\frac{3}{2}; 5\right\}. \text{ Vậy PT có tập nghiệm } S = \left\{-3; -\frac{3}{2}; 5\right\}.$$

2.

$$a) (2x - 1)\frac{5x - 10}{10} + (2x - 1)\frac{3x + 12}{6} - (2x - 1)x = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)\left(\frac{5x - 10}{10} + \frac{3x + 12}{6} - x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(15x - 30 + 15x + 60 - 30x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$b) (x - 3)(2x + 1)(7 - x)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{7; 3; -\frac{1}{2}\right\}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{7; 3; -\frac{1}{2}\right\}$.

$$c) (x + 7)\left(\frac{x + 5}{2} - \frac{4x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow (x + 7)(3x + 15 - 8x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-7; 3\}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-7; 3\}$.

$$d) \Leftrightarrow (4x + 3)(9x + 21 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow (4x + 3)(8x + 24) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{4}; -3\right\}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{3}{4}; -3\right\}$.

Dạng 2. Đưa về phương trình tích cơ bản

3.



$$\text{a) } \Leftrightarrow (3x - 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \left\{1; \frac{2}{3}\right\}.$$

$$\text{b) } \Leftrightarrow (x - 2)(-3x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-5}{3} \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \left\{2; \frac{-5}{3}\right\}.$$

$$\text{c) } \Leftrightarrow (3 - x)\left(\frac{x + 1}{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{1; 3\}.$$

$$\text{d) } 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{-1}{3}\right\}$.

4.

$$\text{a) Ta có } (2x - 1)^2 + (x - 3)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right\}$

$$\text{b) } 2(x - 5)(x + 2) = x^2 - 5x \Leftrightarrow 2(x - 5)(x + 2) = x(x - 5) \Leftrightarrow (x - 5)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{5; -4\}$

$$\text{c) } (2x + 1)(1 - x) + 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$

$$\text{d) } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm}$$

$S = \{2; 3\}$



5.

$$a) \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{1; -2\}$$

$$b) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{1\}$$

$$c) \Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

$$d) \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2-x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{1; -3\}$$

$$e) \Leftrightarrow 2x^3 + 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1\}$

$$f) \Leftrightarrow 6x^4 - 6x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 2x^2 + 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x^3 + 5x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(6x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(2x-1)(3x+1) = 0 \Rightarrow x \in \{1; -1; \frac{1}{2}; \frac{-1}{3}\}$$

6.

$$a) (x-2)^2 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow (-x-5)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$b) x^2 + (2x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 3 \Leftrightarrow (x + \sqrt{3})(3x - 2\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$c) x^3 - 1 + (x-1)(2-x^2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$d) \frac{x^3}{2} = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1 \Leftrightarrow \frac{x^3}{2} = (x+1-1)^2 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{x}{2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$$

7.

$$a) \frac{(x-3)^2}{4} - (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{2} - x - 2 \right) \left(\frac{x-3}{2} + x + 2 \right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -7; \frac{-1}{3} \right\}$$

$$b) (x-2)(2x+1) + x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1+x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; -1\}$$

$$c) x^3 + 1 = (x+1)(x-5) \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1 - x + 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; \pm 2\}$$



$$d) \frac{(x+1)^3}{3} = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^3}{3} = (x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 \left(\frac{x+1}{3} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$$

8.

$$a) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (1 - 3x + 3x^2 + x^3) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Cách khác: $(x+1)^3 - (1-x)^3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow x+1 = 1-x \Leftrightarrow x = 0$

$$b) \Leftrightarrow (x+1) \left[(x+1)^2 - 9 \right] = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; -1; 2\}$$

$$c) x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \left[(x+1)^2 + 3 \right] = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$d) 9x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x)^3 + (x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Dạng 3: Đặt ẩn phụ để đưa về phương trình tích

9.

$$a) \text{Đặt } t = x^2 - x \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = -1; x = 2$$

$$b) \text{Đặt } t = 2x + 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$c) \text{Đặt } (x^2 - 3x) = t \Rightarrow t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t \in \{-2; -3\} \Rightarrow x \in \{1; 2\}$$

$$d) \text{Đặt } x^2 - x = t \Rightarrow (t-1).t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t \in \{-1; 2\} \Rightarrow x \in \{-1; 2\}$$

10.

$$a) \text{Đặt } x^2 - 2x = t \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$b) (5-2x)^2 + 4x - 10 = 8 \Leftrightarrow (5-2x)^2 - 2(5-2x) - 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 9 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow t \in \{-2; 4\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{7}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

$$c) \text{Đặt } x^2 + 2x + 1 = t \Rightarrow (t+2).t = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1; -3\} \Rightarrow x \in \{0; 2\}$$

$$d) \Leftrightarrow (x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 5) - 84 = 0. \text{Đặt } x^2 + 4x = t$$

$$\Rightarrow t^2 - 5t - 84 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{vonghiem} \\ x^2 + 4x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{2; -6\}$$



Dạng 4. Bài toán có lời

11.

Gọi năm số tự nhiên liên tiếp đó là $a; a+1; a+2; a+3; a+4; a+5$.

$$\text{Ta có: } a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + (a+3)^3 - (a+4)^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + a^3 + 9a^2 + 27a + 27 - a^3 - 12a^2 - 48a - 64 = 8$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 + 6a^2 - 6a - 36 = 0 \Leftrightarrow 3a^3 - 6a^2 + 12a^2 - 24a + 18a - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2(a-2) + 12a(a-2) + 18(a-2) = 0 \Leftrightarrow (a-2)(3a^2 + 12a + 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(a-2)(a^2 + 4a + 6) = 0. \text{ Do } a^2 + 4a + 6 = (a+2)^2 + 2 > 0 \forall a \text{ nên } a-2 = 0 \text{ hay } a = 2$$

Vậy năm số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 2; 3; 4; 5; 6.

12.

Gọi độ dài cạnh khu đất có dạng hình vuông là x (m). Khi đó, mảnh đất có dạng hình chữ nhật để làm bể bơi có các kích thước là $x - 50$ (m), ($x > 50$) và $x - 25$ (m).

Do đó, diện tích của mảnh đất là $(x - 50)(x + 25)$ (cm²)

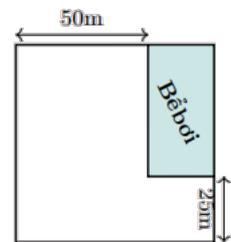
Giải phương trình $(x - 50)(x + 25) = 1250$

$$(x - 50)(x + 25) - 1250 = 0$$

$$x^2 - 75x = 0$$

$$x(x - 75) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 75$$



Hình 1

Do $x > 50$ nên $x = 75$. Vậy độ dài cạnh khu đất là 75 (m).

13.

Phần đất còn lại vẫn là hình vuông có cạnh $15 - 2x$ (m) nên diện tích phần đất còn lại là $(15 - 2x)^2$

Do cạnh của hình vuông là một số dương nên $15 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{15}{2}$

Theo bài ra ta có phương trình $(15 - 2x)^2 = 169$. Khi đó:

$$(15 - 2x)^2 - 13^2 = 0 \text{ nên } (15 - 2x - 13)(15 - 2x + 13) = 0$$





$(2 - 2x)(28 - 2x) = 0$. Với $2 - 2x = 0$ suy ra $x = 1$ (thỏa mãn)

Với $28 - 2x = 0$ suy ra $x = 14$ (loại). Vậy lối đi rộng 1(m).

• Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định (ĐKXD) của biểu thức

1.

$$\text{a) } A \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

$$\text{b) } B \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } C \text{ xác định} \Leftrightarrow 3x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{2}{3}$$

$$\text{d) } D \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 3 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

2.

$$\text{a) Ta có } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x \Rightarrow \text{đpcm}$$

$$\text{b) Ta có } 4x^2 + 2x + 3 = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \forall x; x^2 + 1 > 0 \forall x \Rightarrow \text{đpcm}$$

$$\text{c) Ta có } x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0 \forall x \Rightarrow \text{đpcm}$$

$$\text{d) Ta có } x^2 - 3x + 3 = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dạng 2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu.

3.

$$\text{a) Điều kiện xác định: } x \neq \frac{3}{2}; x \neq \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{2x - 3} - \frac{7}{3x - 5} = 0 \Leftrightarrow \frac{4(3x - 5) - 7(2x - 3)}{(2x - 3)(3x - 5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 1}{(2x - 3)(3x - 5)} = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$



Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

b) Điều kiện xác định: $x \neq \pm \frac{3}{2}$

$$\frac{4}{2x-3} + \frac{4x}{4x^2-9} = \frac{1}{2x+3} \Rightarrow 4(2x+3) + 4x = 2x-3 \Leftrightarrow 10x = -15 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-3}{2} \right\}$

c) Điều kiện xác định $x \neq \pm \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{2x+1} + \frac{x}{4x^2-1} = \frac{7}{2x-1} \Rightarrow 2(2x-1) + x = 7(2x+1) \Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1\}$

d) Điều kiện xác định $x \neq \pm 5$

$$\frac{x^2+5}{25-x^2} = \frac{3}{x+5} + \frac{x}{x-5} \Rightarrow -x^2-5 = 3(x-5) + x(x+5) \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1\}$

4.

a) Điều kiện xác định $x \neq -1; x \neq -2$

$$\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} = \frac{4x+5}{x^2+3x+2} \Rightarrow 3(x+2) - 2(x+1) = 4x+5 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$

b) Điều kiện xác định $x \neq 2$

$$\frac{2(x^2+x+6)}{x^3-8} + \frac{2}{2-x} = \frac{3}{x^2+2x+4} \Rightarrow 2(x^2+x+6) - 2(x^2+2x+4) = 3(x-2) \Leftrightarrow x = 2$$

(thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2\}$

c) Ta có: $-x^2+6x-8 = -(x^2-6x+8) = -(x-4)(x-2)$

Điều kiện xác định $x \neq 4; x \neq 2$



$$\frac{6}{-x^2 + 6x - 8} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{-6}{(x-4)(x-2)} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow -6 + (x+3)(x-2) = (x+1)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow -6 + x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 - 4x + x - 4 \Leftrightarrow x - 12 = -3x - 4 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

d) Điều kiện xác định $x \neq -1$

$$\frac{6}{x^3 + 1} - \frac{1-x}{x^2 - x + 1} = \frac{5}{x+1} \Leftrightarrow 6 - (1-x)(x+1) = 5(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{0; \frac{5}{4}\right\}$

5.

a) Điều kiện xác định: $x \neq 2$

$$x + \frac{2x-1}{x-2} = 3x + \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} - \frac{3}{x-2} = \frac{2x(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow x = 1$$

b) Điều kiện xác định: $x \neq -1$

$$\frac{5x+1}{5} - \frac{2x-1}{2x+2} = 2 + \frac{x^2+4x+1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{5x+1}{5} - \frac{2x-1}{2(x+1)} = 2 + \frac{x^2+4x+1}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{-3}{58}$$

c) Điều kiện xác định: $x \neq 0; x \neq \pm 2$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x(x-2)} = \frac{8}{x(x-2)(x+2)} \Rightarrow x = 3$$

d) Điều kiện xác định: $x \neq 0; x \neq \pm 5$

$$\frac{x+5}{x^2-5x} + \frac{5-x}{2x^2+10x} = \frac{x-5}{2x^2-50} \Leftrightarrow \frac{x+5}{x(x-5)} + \frac{5-x}{2x(x+5)} = \frac{x-5}{2(x-5)(x+5)} \Rightarrow x = \frac{-5}{7}$$

Dạng 3: Toán tổng hợp

6.

a) Thay $a = 2$ vào phương trình ta được $x = \frac{3}{2}$

b) Thay $x = 1$ và $\Rightarrow a = 0$

7.



Thay $x = -2$ vào phương trình $\frac{1}{x+m} - \frac{5}{x-2m} = \frac{2m-4}{(x+m)(2m-x)}$ ta có:

$$\frac{1}{-2+m} - \frac{5}{-2-2m} = \frac{2m-4}{(-2+m)(2m+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m-2} + \frac{5}{2+2m} = \frac{2m-4}{(m-2)(2m+2)}$$

Điều kiện: $\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ 2m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$

$$\frac{1}{m-2} + \frac{5}{2+2m} = \frac{2m-4}{(m-2)(2m+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m+2}{(m-2)(2m+2)} + \frac{5 \cdot (m-2)}{(m-2)(2m+2)} = \frac{2m-4}{(m-2)(2m+2)}$$

$$\Rightarrow 2m+2+5 \cdot (m-2) = 2m-4 \Leftrightarrow 2m+2+5m-10 = 2m-4 \Leftrightarrow 5m = 4$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{4}{5} \text{ (nhận)}$$

8.

a) Để $A(x) = B(x)$ thì $\frac{(x^2-x-6)(x-5)}{x(x^2+2x+2)} = \frac{(x^2-x-6)(x-4)}{3x(x^2+2x+2)}$

ĐKXD: $x(x^2+2x+2) \neq 0$ và $3x^3+6x^2+2x \neq 0$ hay $3x(x^2+2x+2) \neq 0$

Do $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \neq 0, \forall x$ nên ĐKXD là $x \neq 0$.

Từ phương trình trên suy ra: $3(x^2-x-6)(x-5) = (x^2-x-6)(x-4)$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-6)(3x-15) - (x^2-x-6)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-6)(3x-15-x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)(2x-11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+2=0 \\ 2x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \\ x=5,5 \end{cases}$$



Cả ba giá trị này đều thỏa mãn ĐKXD

Vậy với $x = -2; x = 3; x = 5,5$ thì $A(x) = B(x)$.

9.

$$\frac{x+2m}{x-5} - 1 = \frac{x+5}{2m-x} + 1 \Leftrightarrow \frac{x+2m}{x-5} + \frac{x+5}{x-2m} = 2$$

Khi $m = 5$ ta có: $\frac{x+10}{x-5} + \frac{x+5}{x-10} = 2$ (1)

Với ĐKXD $x \neq 5$ và $x \neq 10$ thì từ (1) $\Rightarrow x^2 - 100 + x^2 - 25 = 2x^2 - 30x + 100$

$$\Leftrightarrow 30x = 225 \Leftrightarrow x = 7,5 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

b) Nếu $x = 10$ ta có $(\frac{10+2m}{5} + \frac{15}{10-2m} = 2$ (2)

Với ĐKXD $m \neq 5$ (2) $\Rightarrow 100 - 4m^2 + 75 = 100 - 20m$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m - 75 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-15)(2m+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-15=0 \\ 2m+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7,5 \\ m=-2,5 \end{cases}$$

Nhận xét: Câu b) có cách giải khác như sau:

$$\frac{10+2m}{5} + \frac{15}{10-2m} = 2 \Rightarrow 100 - 4m^2 + 75 = 100 - 20m$$

$$\Leftrightarrow 100 = 4m^2 - 20m + 25$$

$$\Leftrightarrow 10^2 = (2m-5)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-5=10 \\ 2m-5=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m=15 \\ 2m=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7,5 \\ m=-2,5 \end{cases}$$

c) Điều kiện của nghiệm nếu có là $x \neq 5$ và $x \neq 2m$

Biến đổi phương trình $\frac{x+2m}{x-5} + \frac{x+5}{x-2m} = 2$ thành

$$(x+2m)(x-2m) + (x+5)(x-5) = 2(x-5)(x-2m)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4m^2 + x^2 - 25 = 2x^2 - 4mx - 10x + 20m$$

$$\Leftrightarrow 4mx + 10x = 4m^2 + 20m + 25 \Leftrightarrow 2x(2m+5) = (2m+5)^2 \quad (*)$$



Nếu $m \neq -2,5$ thì $x = \frac{2m+5}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình nếu

$$\frac{2m+5}{2} \neq 2m \Rightarrow 2m+5 \neq 4m \Leftrightarrow m \neq 2,5 \text{ và } \frac{2m+5}{2} \neq 5 \Rightarrow 2m+5 \neq 10 \Rightarrow m \neq 2,5$$

Nếu $m = -2,5$ thì (*) có dạng $0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng $\forall x \neq \pm 5$

Kết luận: Nếu $m \neq \pm 2,5$ phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{2m+5}{2}$

Nếu $m = 2,5$ phương trình vô nghiệm;

Nếu $m = -2,5$ phương trình nghiệm đúng $\forall x \neq \pm 5$

10.

a) ĐKXD: $x \neq \pm a$

Với ĐKXD trên ta biến đổi phương trình thành:

$$\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2 + 15ax}{4(x^2 - a^2)}. \text{ Quy đồng và khử mẫu được phương trình}$$

$$4x(x-a) + 8x(x+a) = 5a^2 - 15ax$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 11ax - 5a^2 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 4ax - 15ax - 5a^2 = 0 \Leftrightarrow (3x+a)(4x-5a) = 0$$

Giải phương trình $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{-29}{25-x^2}$ với $x \neq \pm 5$ ta có nghiệm $x = 4$

$$\text{Với } x = 4 \text{ ta có: } (12+a)(16-5a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1,2 \\ a = 3,2 \end{cases}$$

$$\text{b) Khi } a = 6 \text{ thì } (3x+6)(4x-30) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 7,5 \end{cases} \text{ thỏa mãn ĐKXD.}$$

Dạng 4. Toán có lời văn

11.

Gọi tốc độ của bạn Phong là $x \text{ km/h}$, ($x > 0$). Khi đó, tốc độ của bạn Khang là $x + 2 \text{ km/h}$

Thời gian đi của bạn Phong là $\frac{6}{x}$ (giờ)



Thời gian đi của bạn Khang là $\frac{7}{x+2}$ (giờ)

Do hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc nên thời gian đi của hai bạn là như nhau. Ta có phương trình $\frac{6}{x} = \frac{7}{x+2}$

Giải phương trình $\frac{6}{x} = \frac{7}{x+2}$

$$\frac{6.(x+2)}{x.(x+2)} = \frac{7x}{x.(x+2)}$$

$$6.(x+2) = 7x$$

$$x = 12 \text{ (thỏa mãn } x > 0)$$

Vậy tốc độ của bạn Phong là 12 km/h, tốc độ của bạn Khang là 14 km/h.

12.

Gọi x là vận tốc lúc đi.

Vận tốc lúc về bằng $x + 20\%.x = 1,2x$

Thời gian 4 giờ 24 phút = 4,4 giờ

Theo đề bài ta có tổng thời gian đi và về là 4 giờ 24 phút nên ta có phương trình

$$\frac{120}{x} + \frac{120}{x+0,2x} = 4,4 \text{ suy ra } \frac{120}{x} + \frac{120}{1,2x} = 4,4 \text{ hay } 120.1,2 + 120 = 4,4.1,2x$$

$$x = 50 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy vận tốc xe lúc đi là 50 (km/h).



BÀI 5:
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng bất đẳng thức trong thực tế.

1.

Vì a không nhỏ hơn 60 nên ta có $a \geq 60$. Chọn đáp án C.

2.

Vì a là tốc độ tối đa trên làn đường ngoài cùng bên phải nên $a \leq 80$. Chọn đáp án D.

3.

Người tham gia giao thông về ban đêm không được vượt quá giá trị tốc độ ghi trên biển nên với xe ô tô không ở trường hợp ưu tiên thì vận tốc xe $a \leq 70$. Chọn đáp án B.

Dạng 2: Liên hệ thứ tự và phép cộng, liên hệ thứ tự và phép nhân

4.

a) Ta có $-2004 > -2005$ nên khi cộng cả hai vế của bất đẳng thức này với -2024 , ta được $-2004 + (-2024) > -2005 + (-2024)$

b) Ta có $\sqrt{2} < 3$ nên khi cộng cả hai vế của bất đẳng thức này với 2, ta được $\sqrt{2} + 2 < 5$

5.

a) Khẳng định $(-2) + 3 \geq 2$ là sai vì $(-2) < (-1)$ nên $(-2) + 3 < (-1) + 3$ hay $(-2) + 3 < 2$

b) Khẳng định $-6 = 2 \cdot (-3)$ là đúng vì $2 = 2$ và $2 \cdot (-3) = 2 \cdot (-3)$ hay $-6 = 2 \cdot (-3)$

c) Khẳng định $4 + (-8) < 15 + (-8)$ là đúng vì $4 < 15$ nên khi cộng với (-8) vào cả hai vế thì bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức ban đầu.

d) Khẳng định $x^2 + 1 \geq 1$ là đúng vì: $x^2 \geq 0, \forall x \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1, \forall x$

6.1

i) Ta có: $a < b \Leftrightarrow a + 1 < b + 1$

ii) Ta có: $a < b \Leftrightarrow a - 2 < b - 2$

6.2

a) Ta có: $a - 5 \geq b - 5 \Leftrightarrow a - 5 + 5 \geq b - 5 + 5 \Leftrightarrow a \geq b$

b) Ta có: $15 + a \leq 15 + b \Leftrightarrow 15 + a - 15 \leq 15 + b - 15 \Leftrightarrow a \leq b$

7.

Bằng cách nhân hai bất đẳng thức với $\frac{-1}{4}$, ta được $a < b$.



8.

i) Ta có: $12 < 15$ và $12a < 15a$ nên $a > 0$

ii) $4 > 3$ và $4a < 3a$ nên $a < 0$

iii) $-3 > -5$ và $-3a \geq 5a$ nên $a > 0$

9.

Sử dụng mỗi liên hệ giữa thứ tự và phép nhân, phép cộng, ta thu được:

a) $a > b \Leftrightarrow -3a < -3b \Leftrightarrow -3a + 4 < -3b + 4$;

b) $a > b \Leftrightarrow -3a < -3b \Leftrightarrow 2 - 3a < 2 - 3b$

10.

Sử dụng mỗi liên hệ giữa thứ tự và phép nhân, phép cộng, ta thu được:

a) $a > b \Leftrightarrow 3a > 3b \Leftrightarrow 3a + 5 > 3b + 5$

b) $a > b \Leftrightarrow 2a > 2b \Leftrightarrow 2a - 3 > 2b - 3 > 2b - 4 \Rightarrow 2a - 3 > 2b - 4$

11.

i) Ta có biến đổi: $a + 5 < b + 5 \Rightarrow a + 5 + (-5) < b + 5 + (-5) \Rightarrow a < b$

ii) Ta có biến đổi: $-3a > -3b \Rightarrow -3a \cdot \frac{-1}{3} < -3b \cdot \frac{-1}{3} \Rightarrow a < b$

iii). Ta có biến đổi: $5a - 6 \geq 5b - 6 \Rightarrow 5a \geq 5b \Rightarrow 5a \cdot \frac{1}{5} \geq 5b \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow a \geq b$

iv) Ta có biến đổi: $-2a + 3 \leq -2b + 3 \Rightarrow -2a \leq -2b \Rightarrow -2a \cdot \frac{-1}{2} \geq -2b \cdot \frac{-1}{2} \Rightarrow a \geq b$

Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tính chất bắc cầu

12.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} a > b \Rightarrow a + c > b + c \\ c > d \Rightarrow b + c > b + d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$ (tính chất bắc cầu)

13.

Ta có: $c > 0$ nên $a > b \Rightarrow a.c > b.c$

$d > 0$ nên $c > d \Rightarrow b.c > b.d$. Vậy ta có $a.c > b.c > b.d$ hay $ac > bd$ (tính chất bắc cầu)

14.

i) Ta có: $a < b \Rightarrow a.a < a.b \Rightarrow a^2 < ab$ (1)

ii) Ta có: $a < b \Rightarrow a.b < b.b \Rightarrow ab < b^2$ (2)

iii) Từ (1) và (2) $\Rightarrow a^2 < b^2$

15.



Xét hiệu: $3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

Xét hiệu: $(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

Theo tính chất bắc cầu suy ra $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

Dạng 4: Chứng minh bất đẳng thức bằng nhiều bước biến đổi

16.

Ta có: $a > 2 \Rightarrow a.b > 2.b$ (do $b > 0$) và $b > 2 \Rightarrow a.b > 2.a$ (do $a > 0$)

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức ta có $2ab > 2(a + b)$ hay $ab > a + b$

17.

a) Ta có: $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x - 1)^2}{x} \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$ với mọi giá trị của $x > 0$

b) Ta có $x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{(x + 1)^2}{x} \leq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$ với mọi giá trị của $x < 0$.

18.

Xét hiệu: $x^2 + y^2 - \frac{(x + y)^2}{2} = \frac{(x - y)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$ (1)

Xét hiệu: $\frac{(x + y)^2}{2} - 2xy = \frac{(x - y)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x + y)^2}{2} \geq 2xy$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \geq 2xy$ (đpcm)

19.

Ta có:

$(a - 1)(a - 2)(a - 3)(a - 4) + 1 \geq 0$

$(a - 1)(a - 4)(a - 2)(a - 3) + 1 \geq 0$

$(a^2 - 5a + 4)(a^2 - 5a + 6) + 1 \geq 0$

$(a^2 - 5a + 4)^2 + 2(a^2 - 5a + 4) + 1 \geq 0$

$(a^2 - 5a + 5)^2 \geq 0$ luôn đúng với mọi giá trị của a . Vậy $(a - 1)(a - 2)(a - 3)(a - 4) + 1 \geq 0$

20.

a) Gọi hai số a và b . Hiển nhiên $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ hay $a^2 + b^2 \geq 2ab$

b) Với $x > 0$; $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$ đúng.



Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

c) Đặt $ab = x$. Do $a, b, c, d > 0$ và $abcd = 1$ nên $cd = \frac{1}{ab}$

$$\Rightarrow ab + cd = ab + \frac{1}{ab} = x + \frac{1}{x} \geq 2$$

* Ta luôn có $a^2 + b^2 \geq 2ab$ và $c^2 + d^2 \geq 2cd$

Nên $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ab + cd) \geq 4$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

21.

a) Ta có: $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$

Do đó $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

b) Ta có $3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$

$$= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \quad (1)$$

Ta có $(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) - 3(ab + bc + ca)$$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

22.

a) Ta có $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} < 0$

Vì $b - a < 0$, $ab > 0$. do đó $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

b) Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab} \geq 0$ (vì $ab > 0$). Do đó $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với

$ab > 0$.



23.

a) Xét hiệu $a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2 \geq 0$ (do $a, b > 0$)

Do đó $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ với $a, b > 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

b) Xét hiệu $a^4 + b^4 - ab(a^2 + b^2) = a^3(a - b) - b^3(a - b) = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$ (do $a, b > 0$)

Do đó $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

24.

i) Ta có $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$

$$= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2$$

$$= (ay - bx)^2 \geq 0. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } ay = bx$$

ii) Ta có $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$

$$= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx, az = cx, bz = cy$

**BÀI 6:****BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**

Dạng 1. Nhận dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn, xét một giá trị có là nghiệm của bất phương trình một ẩn không.

1.

a) Là phương trình bậc nhất một ẩn với $a = 3; b = -4$

b) Không là phương trình bậc nhất một ẩn vì vi phạm $a = 0$

c) Là phương trình bậc nhất một ẩn với $a = \frac{1}{2}; b = 0$

d) Không là phương trình bậc nhất một ẩn vì có chứa x^2

2.

a) Điều kiện $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

b) Điều kiện $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

c) Điều kiện $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

d) Điều kiện $m \neq 3; m \neq -1$

3.

a) Ta có: $m^2 + 3 > 0, \forall m \in R \Rightarrow (m^2 + 3)x + 1 \leq 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn

b) Ta có: $m^2 + m + 4 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} < 0, \forall m \Rightarrow -(m^2 + m + 4)x > -2m + 3$ là phương trình bậc nhất một ẩn.

4.

Các bất phương trình: b) $-5x + 4 < 2 - 3x$ (ẩn x); c) $-5y + 8y + 4 < 3 - 2,5y$ (ẩn y);

d) $8x - 3 \geq 1 - 6x + 15x$ (ẩn x); là các bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Do $x = 4$ nên chỉ xét các bất phương trình ẩn x

Thay $x = 4$ vào bất phương trình b) ta có $8.4 - 3 \geq 1 - 6.4 + 15.4$ hay $-16 < -10$ là một khẳng định đúng. Vậy nên $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình $-5x + 4 < 2 - 3x$.

Thay $x = 4$ vào bất phương trình d) ta có $-5.4 + 4 < 2 - 3.4$ hay $29 \leq 37$ là một khẳng định sai. Vậy nên $x = 4$ là không là nghiệm của bất phương trình $8x - 3 \geq 1 - 6x + 15x$.

5.

a) Thay $x = -1$ vào $3x - 7 > 2x + 1$, ta được: $3.(-1) - 7 > 2.(-1) + 1$ hay $-10 > 1$ là khẳng định sai. Vậy $x = -1$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x = -1$ vào $-3x - 1 > x + 1$, ta được $-3.(-1) - 1 > -1 + 1$ hay $2 > 0$ là khẳng định đúng. Vậy $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình.



c) Thay $x = -1$ vào $7 - 3x < 2 - 5x$, ta được: $7 - 3.(-1) < 2 - 5(-1)$ hay $10 < 7$ là khẳng định sai. Vậy $x = -1$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

d) Thay $x = -1$ vào $5(x - 2) > 3x - 1$, ta được: $5(-1 - 2) > 3.(-1) - 1$ hay $-15 > -4$ là khẳng định sai. Vậy $x = -1$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

Dạng 2. Giải bất phương trình cơ bản

6.

a) $2x - 8 > 0$

$2x > 8$

$x > 4$

b) $\frac{3}{2}x < -9$

$3x < -18$

$x < -6$

c) $3x - 3 > x + 5$

$3x - x > 5 + 3$

$2x > 8$

$x > 4$

d) $\frac{x+4}{2} + x < -7$

$x + 4 + 2x < -14$

$3x < -18$

$x < -6$

7.

a) $3x + 15 < 0$

$3x < -15$

$x < -5$

b)

$5x + 4 > -11 + 2x$

$5x - 2x > -11 - 4$

$3x > -15$

$x < -5$

c) $\frac{x}{2} - \frac{11}{5} \leq \frac{-1}{5}$

$\frac{x}{2} \leq \frac{11}{5} - \frac{1}{5}$

$\frac{x}{2} \leq 2$

$x \leq 4$

d) $\frac{3}{4}x + 1 \leq \frac{1}{4}x + 3$

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x \leq 2$

$\frac{1}{2}x \leq 2$

$x \leq 4$

8.

a)

$\frac{7(x-2)}{6} - 2 > \frac{2(x+4)}{3}$

$7x - 14 - 12 > 4x + 4$

$3x > 30$

$x > 10$

b)

$x - \frac{2x+1}{2} > 2x - \frac{2}{3}$

$6x - 6x - 3 > 12x - 4$

$12x < 1$

$x < \frac{1}{12}$

c)

$\frac{x+2}{7} - \frac{1}{21} > \frac{3x+1}{3}$

$3x + 6 - 1 > 21x + 7$

$18x < -2$

$x < \frac{-1}{9}$

d)

$1 + \frac{x-2}{3} > 5 - x + \frac{3(x-2)}{3}$

$3 + x - 2 > 15 - 3x + 3x - 2$

$x > 8$

9.

a) $5x - 7 > 3(x - 2) + 2x \Leftrightarrow 5x - 7 > 3x - 6 + 2x$

$\Leftrightarrow 5x - 3x - 2x > -6 + 7 \Leftrightarrow 0x > 1$ (vô lý). Vậy bất phương trình vô nghiệm.

b) $4(1,5x + 2,5) < (x + 3)^2 + (5 - x)(x + 5)$



$$\Leftrightarrow 6x + 10 < x^2 + 6x + 9 + 25 - x^2 \Leftrightarrow 6x - 6x < 25 + 9 - 10$$

$\Leftrightarrow 0x < 24$ luôn đúng. Vậy BPT có nghiệm đúng với mọi giá trị của x .

Nghiệm của bất phương trình là $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{c) } \frac{x-4}{5} - x + 2 \leq \frac{x+3}{4} - \frac{x-2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 12(x-4) - 60x + 120 \leq 15(x+3) - 20(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 12x - 48 - 60x + 120 \leq 15x + 45 - 20x + 40$$

$$\Leftrightarrow 12x - 60x + 20x - 15x \leq 45 - 120 + 40 + 48$$

$$\Leftrightarrow -43x \leq 13 \Leftrightarrow x \geq -\frac{13}{43}. \text{ Bất phương trình có nghiệm } x \geq -\frac{13}{43}$$

$$\text{d) } 4x(x-1,25) + \frac{3(1-3x)}{2} \geq (2x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 8x(x-1,25) + 3(1-3x) \geq 2(4x^2 - 12x + 9)$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 10 + 3 - 9x \geq 8x^2 - 24x + 18$$

$$\Leftrightarrow 24x - 9x \geq 18 + 10 - 3 \Leftrightarrow 15x \geq 25 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}. \text{ Bất phương trình có nghiệm } x \geq \frac{5}{3}$$

1.

$$2(3x-4) < 8x-10 < 7x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8 < 8x-10 \\ 8x-10 < 7x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8x < 8-10 \\ 8x-7x < 10-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x < -2 \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 : (-2) \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 8.$$

11.

Giải bất phương trình (1): $\frac{x-3}{5} + \frac{11+x}{4} > \frac{3x-5}{2}$

$$\Leftrightarrow 4(x-3) + 5(11+x) > 10(3x-5)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 12 + 55 + 5x > 30x - 50 \Leftrightarrow 9x - 30x > -50 - 55 + 12$$

$$\Leftrightarrow -21x > -93 \Leftrightarrow x < \frac{93}{21}$$



Giải bất phương trình (2): $5 + \frac{x-4}{5} < x - \frac{2x-9}{2} + \frac{3x+2}{3}$

$$\Leftrightarrow 150 + 6(x-4) < 30x - 15(2x-9) + 10(3x+2)$$

$$\Leftrightarrow 150 + 6x - 24 < 30x - 30x + 135 + 30x + 20$$

$$\Leftrightarrow 6x - 30x < -150 + 24 + 135 + 20$$

$$\Leftrightarrow -24x < 29 \Leftrightarrow x > -\frac{29}{24}.$$

a) Giá trị của x thỏa mãn hai bất phương trình là $-\frac{29}{24} < x < \frac{93}{21}$

b) Giá trị nguyên của x thỏa mãn hai bất phương trình là:

$$x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

12.

a) (1) $\Leftrightarrow \frac{2x-1016}{1000} - 1 + \frac{2x-1000}{1016} - 1 < \frac{2x-16}{2000} - 1 + \frac{2x-1}{2015} - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2016}{1000} + \frac{2x-2016}{1016} < \frac{2x-2016}{2000} + \frac{2x-2016}{2015}$$

$$\Leftrightarrow (2x-2016) \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1016} - \frac{1}{2000} - \frac{1}{2015} \right) < 0$$

Do $\frac{1}{1000} + \frac{1}{1016} - \frac{1}{2000} - \frac{1}{2015} > 0$ nên $2x - 2016 < 0 \Leftrightarrow 2x < 2016 \Leftrightarrow x < 1008$.

b) (2) $\Leftrightarrow \frac{5x-100}{900} - 1 + \frac{5x-200}{800} - 1 \leq \frac{5x-600}{200} - 2$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1000}{900} + \frac{5x-1000}{800} - \frac{5x-1000}{200} \leq 0 \Leftrightarrow (5x-1000) \left(\frac{1}{900} + \frac{1}{800} - \frac{1}{200} \right) \leq 0$$

Do $\frac{1}{900} + \frac{1}{800} - \frac{1}{200} = -\frac{19}{7200} < 0$. Nên $5x - 1000 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 200$.

c) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} > \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5}$

$$\Leftrightarrow 30(x+1) + 20(x+2) > 15(x+3) + 12(x+4)$$

$$\Leftrightarrow 23x > 23 \Leftrightarrow x > 1.$$



* *Chú ý:* Nếu thêm (-1) vào mỗi hạng tử ở hai vế rồi quy đồng từng cặp ta thấy xuất hiện nhân tử chung là $(x - 1)$. Do đó còn cách sau:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} > \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{3} - 1\right) > \left(\frac{x+3}{4} - 1\right) + \left(\frac{x+4}{5} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ do } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) > 0.$$

Dạng 3. Biến đổi đưa về bất phương trình bậc nhất một ẩn
13.

a)

$$(x+1)^2 + 2x^2 < (2x+3)^2 - (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2x^2 < (2x+3+x-3)(2x+3-x+3)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 1 < 3x(x+6) \Leftrightarrow 2x + 1 < 18x \Leftrightarrow 16x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{16}$$

b) $2x(x-7) + (3-x)^2 > 3(x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 9 - 6x + x^2 > 3x^2 + 6x + 6$

$$\Leftrightarrow -20x + 9 > 6x + 6$$

$$\Leftrightarrow 26x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{26}$$

14.

a) $5(x+2)^2 < (2x+3)(2x-3) + (x-5)^2 + 30x \Leftrightarrow 0x < -4$ (vô lí). Vậy bất phương trình vô nghiệm.

c) $4(2,5x^2 + 1) \geq 9(x+3)(x-3) + (2-x)^2 + 1 \Leftrightarrow 4x \geq -80 \Leftrightarrow x \geq -20.$

d) Thêm vào hai vế -64 làm xuất hiện dạng $x^3 - 4^3$ ở vế trái và $2(x-4)$ ở vế phải.

Ta có $x^3 \leq 2x + 56 \Leftrightarrow x^3 - 64 \leq 2x + 56 - 64$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 4x + 16) - 2(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 4x + 14) \leq 0$$

Do $x^2 + 4x + 14 = (x+2)^2 + 10 > 0, \forall x$ nên ta có $x-4 \leq 0$ hay $x \leq 4.$

Dạng 4. Bài toán rút gọn biểu thức và tìm giá trị của ẩn để biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước



15.

Điều kiện xác định: $x \neq \frac{1}{2}, x \neq \pm 1$

a) Ta có $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} = \frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^2}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1}$

b) $A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{2x-1} > 0 \\ x \neq \frac{1}{2}, x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq x < \frac{1}{2}$

16.

a) ĐKXD: $x \neq \pm 2, 5$

$$A = \frac{4x^2 - 10x + 25}{5(2x-5)} \cdot \frac{5(2x+5)(5-2x)}{4x^2 - 10x + 25} = -(2x+5)$$

b) Để $A \leq -2$ ta có: $-(2x+5) \leq -2 \Leftrightarrow 2x+5 \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq -3$

$$\Leftrightarrow x \geq -1,5.$$

c) $A > ax$ tức là $-2x-5 > ax \Leftrightarrow ax+2x < -5 \Leftrightarrow (a+2)x < -5$

Nếu $a > -2$ thì $x < \frac{-5}{a+2}$; Nếu $a < -2$ thì $x > \frac{-5}{a+2}$;

Nếu $a = -2$ ta có $0x < -5$ vô lý.

17.

Điều kiện xác định: $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$

a) Thực hiện rút gọn được $A = \frac{2}{1-2x}$

b. $A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1-2x} > 0 \\ x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq x < \frac{1}{2}$

Dạng 5. Một số bài toán thực tế.

18.

Gọi x là số tờ giấy bạc loại 5000 đồng ($0 < x < 15$, đơn vị: tờ).

Do đó, số giấy bạc loại 2000 đồng là: $15 - x$ (tờ).



Theo đề bài, ta có bất phương trình:

$$5000x + (15 - x) \cdot 2000 \leq 70000 \Leftrightarrow 3000x \leq 40000 \Leftrightarrow x \leq \frac{40}{3} \Leftrightarrow x \leq 13,3$$

Vì x là nguyên dương, nên x nhận được các giá trị từ 1 đến 13.

Vậy, số tờ giấy bạc mệnh giá 5000 đồng là một trong các số nguyên từ 1 đến 13.

19.

Gọi số lần bắn trúng đích là x , điều kiện $x \in \mathbb{N}$, $0 \leq x \leq 10$ (*)

Theo giả thiết:

Mỗi hạ thủ được bắn 10 phát nên số lần bắn trượt là $10 - x$, khi đó tổng số điểm đạt được là $5x - (10 - x)$.

Muốn được thưởng, tổng số điểm phải đạt từ 30 điểm trở lên, do đó:

$$5x - (10 - x) \geq 30 \Leftrightarrow 5x - 10 + x \geq 30 \Leftrightarrow 6x \geq 40 \Leftrightarrow x \geq \frac{20}{3}$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được: $x \in \mathbb{N}$, $\frac{20}{3} \leq x \leq 10 \Rightarrow x = 7, x = 8, x = 9, x = 10$.

Vậy, để nhận được thưởng thì số lần bắn trúng đích phải là 7 lần, hoặc 8 lần, hoặc 9 lần, hoặc 10 lần.

20.

Gọi x (quyển) là số vở mà Minh có thể mua. Theo bài ta ta có bất phương trình

$$7x + 18 \leq 100 \text{ ta được } x \leq \frac{82}{7} \approx 11,71$$

Vì số vở là số tự nhiên nên Minh có thể mua nhiều nhất 11 quyển vở.

21.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền bà Mai cần gửi tiết kiệm

Ta có số tiền lãi gửi gửi tiết kiệm x (triệu đồng) trong một năm là $0,074x$ (triệu đồng)

Để có số tiền lãi ít nhất là 60 triệu đồng/năm thì ta phải có:

$$\begin{aligned} 0,074x &\geq 60 \\ x &\geq 60 : 0,074 \\ x &\geq 810,81 \end{aligned}$$

Vậy bà Mai cần gửi ngân hàng ít nhất 811 triệu đồng





22.

Ta lập các phương trình biểu thị tổng số trận và tổng số điểm, xét xem x bị chặn bởi hai giá trị nào. Từ đó tìm ra các giá trị của x và y, z .

* Gọi số trận thắng của đội đó là x , số trận hòa là y và số trận thua là z ($x, y, z \in \mathbb{N}$). Ta có

$$x + y + z = 20 \quad (1); \text{ đồng thời } 3x + 1.y + 0.z = 41 \quad (2).$$

$$\text{Từ (2) ta có } 3x + y = 41 \text{ suy ra } 3x \leq 41 \Leftrightarrow x \leq \frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 2x - z = 21 \Rightarrow 2x \geq 21 \Leftrightarrow x \geq \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

$$\text{Nhu vậy } 10\frac{1}{2} \leq x \leq 13\frac{2}{3}. \text{ Do } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 11; 12; 13.$$

$$\text{Do } x \text{ là số chẵn nên } x = 12. \text{ Từ đó có } 3.12 + y = 41 \Rightarrow y = 5 \text{ và } z = 3.$$

BÀI 7:
CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

ĐÁP ÁN BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm căn bậc hai của một số

1.

Số	25	0,64	0,01	$\frac{9}{16}$	2	0	-1
Căn bậc hai	5, -5	0,8; -0,8	0,1; -0,1	$\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}; -\sqrt{2}$	0	/
Căn bậc hai số học	5	0,8	0,1	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$	0	/

2.

Căn bậc hai của số 1 là ± 1 vì $1^2 = (-1)^2 = 1$.

Căn bậc hai của số 9 là ± 3 vì $3^2 = (-3)^2 = 9$.

Căn bậc hai của số $\frac{16}{9}$ là $\pm \frac{4}{3}$ vì $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

Căn bậc hai của số 0,36 là $\pm 0,6$ vì $(0,6)^2 = (-0,6)^2 = 0,36$.

3.

a) $\sqrt{0,01} = 0,1$ vì $0,1^2 = 0,01$.

c) $\sqrt{0,25} = 0,5$ vì $0,5^2 = 0,25$.

b) $\sqrt{0,04} = 0,2$ vì $0,2^2 = 0,04$.

d) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ vì $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

4. Đáp số: $A = 0$; $B = 3$

Dạng 2: So sánh các căn bậc hai

5.

a) Ta có $26 > 25 \Rightarrow \sqrt{26} > \sqrt{25}$ hay $\sqrt{26} > 5$.

b) Ta có $\begin{cases} 7 < 9 \\ 15 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} < \sqrt{9} \\ \sqrt{15} < \sqrt{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} < 3 \\ \sqrt{15} < 4 \end{cases}$. Vậy $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 3 + 4 = 7$.

c) Ta có $\begin{cases} 2 < 3 \\ 11 < 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \sqrt{11} < \sqrt{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \sqrt{11} < 5 \end{cases}$. Vậy $\sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{3} + 5$.

d) Ta có $35 < 36 \Rightarrow \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6 \Rightarrow -5\sqrt{35} > (-5).6 \Rightarrow -5\sqrt{35} > -30$

6.

a) Ta có $6 = \sqrt{36}$. Mà $\sqrt{36} < \sqrt{41}$ nên $6 < \sqrt{41}$.

b) Ta có $2\sqrt{27} = \sqrt{108}$. Mà $108 < 147$ nên $2\sqrt{27} < \sqrt{147}$.

c) Ta có $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ và $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$. Mà $45 < 75$ nên $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3} \Rightarrow -3\sqrt{5} > -5\sqrt{3}$

d) Ta có $2\sqrt{2} - 1 = \sqrt{8} - 1$ và $2 = 3 - 1 = \sqrt{9} - 1$. Mà $8 < 9$ nên $2\sqrt{2} - 1 < 2$.

7.

i) Ta có tính chất, nếu $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, do đó từ giả thiết $a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{1} = 1$.

Nhân cả hai vế với $\sqrt{a} > 0$ ta được $a > \sqrt{a}$.

ii) Tương tự như trên ta có $a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{1} = 1$.

Nhân cả hai vế với $\sqrt{a} > 0$ ta được $a < \sqrt{a}$.

Dạng 3: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

8. Đáp số: a) $x \geq 3$ b) $x \leq \frac{5}{2}$ c) $x > 1$

9. Đáp số: $x \neq 2$

10. Đáp số:

a) $x > \frac{2}{5}$ b) $x < 1$ c) với mọi x d) $x \geq 5$ e) $x \leq 5$

11. Đáp số:

a) $\begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 9 \end{cases}$ d) $-5 \leq x < 12$ e) $\frac{1}{2} \leq x < 5$

Dạng 4. Rút gọn và biến đổi biểu thức chứa căn bậc hai.

12. Đáp số:

a) $-a$ b) $a - 2$ c) $10a$ d) $6a^3$

13. Đáp số:

a) $x - \sqrt{7}$ b) $\frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 5}$ c) $\sqrt{x} + 3$ d) $\frac{x - \sqrt{13}}{x + \sqrt{13}}$

14. Đáp số:

a) $x - \sqrt{5}$ b) $\frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 5}$ c) $\sqrt{x} + 3$

d) $\frac{2x - \sqrt{3}}{2x + \sqrt{3}}$

e) $\frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

f) $\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1}$

15. Đáp số:

a) $(\sqrt{3} - 1)^2$

b) $(2 + \sqrt{3})^2$

c) $(2\sqrt{3} - 1)^2$

d) $(3\sqrt{2} + 1)^2$

16. Đáp số:

a) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ b) $(x + \sqrt{3})^2$ c) $(3\sqrt{x} - 2)^2$ d) $(2x - \sqrt{5})^2$

e) $x\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x})^3 - 1^3 = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$

f) $x\sqrt{x} + 8 = (\sqrt{x})^3 + 2^3 = (\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)$

g) $x\sqrt{x} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

h) $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 4)$

Dạng 5. Tìm x**17.**a) Vì $\sqrt{x} \geq 0$ và $-2018 < 0$ nên không tồn tại x thỏa mãn.b) Điều kiện $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.Khi đó $\sqrt{x+1} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x + 1 = 9 \Leftrightarrow x = 8$ (thỏa mãn điều kiện).Vậy $x = 8$.c) $\sqrt{3x} = 6 \Rightarrow 3x = 36$ nên $x = 12$ d) $x = 5$ hoặc $x = 1$ **18.**a) Ta có $x^2 + 5x + 20 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} + \frac{55}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{55}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 20 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4. \end{cases}$$

Vậy $x = -1$ hoặc $x = -4$.b) Điều kiện $x^2 + 5 \geq 0$ (luôn đúng). Ta có $3 - \sqrt{x^2 + 5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 3 - 4 = -1$.Vì $\sqrt{x^2 + 5} > 0$ còn $-1 < 0$ nên không tồn tại x thỏa mãn.**19.**

a) Điều kiện xác định $-2x^2 - 9 \geq 0$ (vô lí).

Vậy không tồn tại x thỏa mãn đề bài.

b) Điều kiện xác định $x^2 + 1 \geq 0$ (luôn đúng).

Ta có $\sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -2$ (vô lí vì $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ với mọi x).

Vậy không tồn tại x thỏa mãn đề bài.

c) Điều kiện xác định $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

Ta có $\sqrt{3x - 1} = 4 \Leftrightarrow 3x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{17}{3}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $x = \frac{17}{3}$

d) Điều kiện xác định $-3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$.

Ta có $\sqrt{-3x + 4} = 12 \Leftrightarrow -3x + 4 = 144 \Leftrightarrow x = -\frac{140}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x = -\frac{140}{3}$.

e) Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x} - 7)(\sqrt{x} + 7) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 49 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 49$

Ta có $\sqrt{(\sqrt{x} - 7)(\sqrt{x} + 7)} = 2 \Leftrightarrow x - 49 = 4 \Leftrightarrow x = 53$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $x = 53$.

f) Điều kiện xác định $9(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Ta có $\sqrt{9(x - 1)} - 19 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9(x - 1)} = 21 \Leftrightarrow 9(x - 1) = 441 \Leftrightarrow x - 1 = 49 \Leftrightarrow x = 50$

(thỏa mãn điều kiện). Vậy $x = 50$.

Dạng 6. Rút gọn biểu thức dạng $\sqrt{A^2}$

20.

$$a) \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + 2\sqrt{3})^2} + 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 1 + 2\sqrt{3} + 2(2 - \sqrt{3}) = 5.$$

$$b) (\sqrt{10} - \sqrt{2})\sqrt{3 + \sqrt{5}} = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 4.$$

21.

$$a) \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} = 3 - \sqrt{2} - 3 - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{b) } \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2 + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5} = 1.$$

$$\text{c) } (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}} = (2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} = (\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2) = 7-4 = 3.$$

$$\text{d) } \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 5.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } & \sqrt{9-3\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6+3-2\sqrt{6}\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } & \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3-\sqrt{3})+(2\sqrt{2}+\sqrt{6})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

22. Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } \sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(4-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 4-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sqrt{12+3\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} - 2\sqrt{3} = \sqrt{12+3\sqrt{3}+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} - 2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{12+3\sqrt{3}+1+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = \sqrt{13+4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3} = 1. \end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} - 4\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2}|2\sqrt{2}-2| + |3-2\sqrt{2}| - 4\sqrt{2} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}-2) + 3-2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -5\sqrt{2}+2. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sqrt{10+4\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}+2)^2} = \sqrt{6}+2.$$

$$\text{c) } \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}-1+3-\sqrt{2} = 2.$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } & \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} - \sqrt{2(4 + \sqrt{15})} + \frac{6\sqrt{3}}{3} = \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} + 2\sqrt{3} \\
&= \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{3} - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 0.
\end{aligned}$$

24.

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1} = \frac{\sqrt{(2x + 1)^2}}{(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{|2x + 1|}{(2x + 1)(2x - 1)}.$$

Do $x > -\frac{1}{2}$ nên $2x + 1 > 0$. Suy ra $A = \frac{2x + 1}{(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{1}{2x - 1}$.

$$\text{b) } 9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2} = 9 + x + \sqrt{(2 - x)^2} = 9 + x + |2 - x|.$$

Do $x < 2$ nên $2 - x > 0$. Suy ra $B = 9 + x + 2 - x = 11$.

25.

$$\text{a) } \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a - b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$$\text{b) } \frac{2}{x - 1} \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{4x^2}} = \frac{2}{x - 1} \sqrt{\frac{(x - 1)^2}{(2x)^2}} = \frac{2}{x - 1} \frac{|x - 1|}{2|x|}.$$

Do $0 < x < 1$ nên $|x - 1| = 1 - x$; $|x| = x$. Suy ra $\frac{2}{x - 1} \frac{|x - 1|}{2|x|} = -\frac{1}{x}$.

26.

$$\text{a) } \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} - x^2 = \sqrt{(x^2 - 2)^2} - x^2 = |x^2 - 2| - x^2.$$

Trường hợp 1: $x \leq -\sqrt{2}$ hoặc $x \geq \sqrt{2}$ ta có: $|x^2 - 2| - x^2 = x^2 - 2 - x^2 = -2$

Trường hợp 2: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ta có: $|x^2 - 2| - x^2 = -x^2 + 2 - x^2 = -2x^2 + 2$

$$\text{b) } \text{Vì } x > 1 \text{ nên } \frac{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{x + 1} = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)^2}}{x + 1} = \frac{|x^2 - 1|}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1.$$

Dạng 7. Giải bất phương trình

27.

$$\text{a) } \text{Ta có } \sqrt{2x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2x} < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 \leq 2x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{18}$$

b) ĐK : $-3x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{6}$

Ta có $\sqrt{-3x + \frac{1}{2}} \geq 5 \Leftrightarrow -3x + \frac{1}{2} \geq 25 \Leftrightarrow x \leq -\frac{49}{6}$ (TMĐK)

c) ĐK: $x \leq \frac{1}{2}$. Ta có $-2x + 1 > 49 \Leftrightarrow x < -24$ (TMĐK)

d) ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$. Ta cần $2x-1 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \leq \frac{13}{8}$ Kết hợp ĐK ta được $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{13}{8}$

e) $\sqrt{x} < 3 \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{9} \Rightarrow 0 \leq x < 9$

f) $\sqrt{3x} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{3x} < \sqrt{81} \Leftrightarrow 0 \leq 3x < 81 \Leftrightarrow 0 \leq x < 27$

Dạng 8: Chứng minh một số là số vô tỉ
28.

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ. Suy ra $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in N^*$ và phân số $\frac{m}{n}$ là phân số tối

giản. Khi đó $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$ (1)

Do $2n^2 : 2$ nên $m^2 : 2 \Rightarrow m : 2 \Rightarrow m = 2m_1, m_1 \in N^* \Rightarrow m^2 = 4m_1^2$.

Thay vào (1) suy ra $2n^2 = 4m_1^2 \Leftrightarrow n^2 = 2m_1^2 : 2 \Rightarrow n^2 : 2 \Rightarrow n : 2$.

Do đó m, n cùng chia hết cho 2 nên phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản, điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên.

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

29.

Giả sử $\sqrt{5}$ là số hữu tỉ. Suy ra $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in N^*$ và phân số $\frac{m}{n}$ là phân số tối

giản. Khi đó $\sqrt{5} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 5 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = 5n^2$ (1)

Do $5n^2 : 5$ nên $m^2 : 5 \Rightarrow m : 5 \Rightarrow m = 5m_1, m_1 \in N^* \Rightarrow m^2 = 25m_1^2$.

Thay vào (1) suy ra $5n^2 = 25m_1^2 \Leftrightarrow n^2 = 5m_1^2 : 5 \Rightarrow n^2 : 5 \Rightarrow n : 5$.

Do đó m, n cùng chia hết cho 5 nên phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản, điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên. Vậy $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Dạng 9. Một số bài toán thực tế
30.

a) Tốc độ xe 4 bánh là: $s = \sqrt{30fd} = \sqrt{30 \cdot 0,73 \cdot 49,7} \simeq 33$ (dặm/giờ) $\simeq 53,13$ (Km/giờ).

Mà theo biển báo thì xe 4 bánh chỉ được chạy tốc độ 50 (Km/h)

Vậy xe đã vượt quá tốc độ.

b) Có $s = 48$ (Km/giờ) $\simeq \frac{4800}{161}$ (dặm/giờ).

Xét $s = \sqrt{30fd} \Leftrightarrow \frac{4800}{161} = \sqrt{30 \cdot 0,45 \cdot d} \Leftrightarrow 13,5 \cdot d \simeq 888,9 \Leftrightarrow d \simeq 65,8$ (feet)..

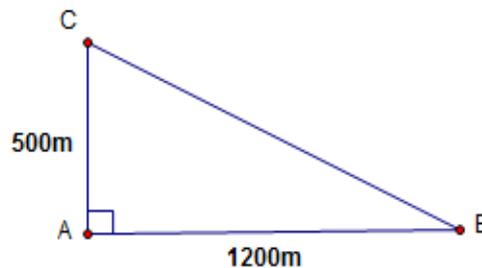
31.

a) Chiều dài cạnh của quạt thông gió hình vuông là: $d = \sqrt{0,04} = 0,02$ (m).

b) Diện tích bức tường trước khi bị đục bỏ để gắn quạt là: $15,96 + 0,04 = 16$ (m²).

Chiều dài mỗi cạnh của bức tường hình vuông là: $d' = \sqrt{16} = 4$ (m).

32.



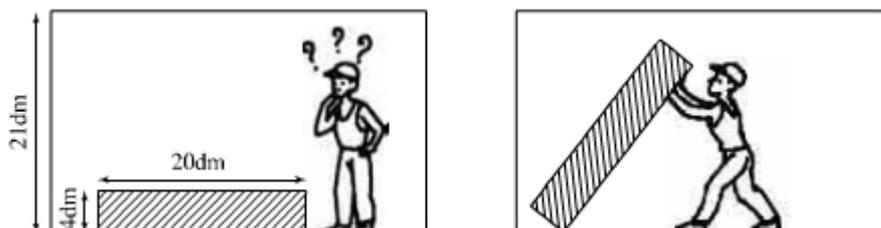
Quãng đường từ nhà Minh đến trường là: $BC = \sqrt{500^2 + 1200^2} = 1300$ m.

Thời gian Nam đi từ nhà đến trường là: $t_A = \frac{0,5}{4} = \frac{1}{8}$ giờ = 7,5 phút.

Thời gian Minh đi từ nhà đến trường là: $t_B = \frac{1,3}{1,2} = \frac{13}{120}$ giờ = 6,5 phút.

Lúc 6 giờ 30 phút, cả hai cùng xuất phát từ nhà đến trường thì bạn Minh đến trường sớm hơn bạn Nam.

33.



Độ dài đường chéo của hình chữ nhật tạo bởi cái tủ là: $\sqrt{4^2 + 20^2} = 4\sqrt{26} \approx 20,4$ (dm).

Ta có: $20,4 < 21$ do đó khi bạn Nam dựng tủ cho đứng thẳng, tủ không bị vướng vào trần nhà.

34.

Gọi x là chiều rộng, y là chiều dài của màn hình ($x > y > 0$).

Đổi đơn vị: $17\text{inch} \approx 43,18\text{cm}$.

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{64}{25} \Leftrightarrow \frac{x^2}{64} = \frac{y^2}{25} = \frac{x^2 + y^2}{89} = \frac{43,18^2}{89} \approx 20,95$$

$$\frac{x^2}{64} \approx 20,95 \Rightarrow x \approx 36,6\text{cm}.$$

Vậy chiều rộng màn hình là khoảng $36,6\text{cm}$.

BÀI 8:
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA

ĐÁP ÁN BÀI TẬP

A. KHAI CĂN BẬC HAI VÀ PHÉP NHÂN

Dạng 1. Khai căn một tích, nhân các căn bậc hai

1.

a) $\sqrt{27.75} = \sqrt{9.9.25} = \sqrt{9}.\sqrt{9}.\sqrt{25} = 3.3.5 = 45.$

b) $\sqrt{200.18} = \sqrt{100.4.9} = \sqrt{100}.\sqrt{4}.\sqrt{9} = 10.2.3 = 60.$

c) $\sqrt{160.12,1} = \sqrt{16.100.1,21} = \sqrt{16}.\sqrt{100}.\sqrt{1,21} = 4.10.1,1 = 44.$

d) $\sqrt{3,6.25,6} = \sqrt{0,36.100.2,56} = \sqrt{0,36}.\sqrt{100}.\sqrt{2,56} = 0,6.10.1,6 = 9,6$

2.

a) $\sqrt{45}.\sqrt{180} = \sqrt{45.180} = \sqrt{8100} = 90.$

b) $\sqrt{7}.\sqrt{175} = \sqrt{7.175} = \sqrt{1225} = 35.$

c) $\sqrt{250}.\sqrt{0,9} = \sqrt{250.0,9} = \sqrt{225} = 15.$

d) $\sqrt{8}.\sqrt{162} = \sqrt{8.162} = \sqrt{1296} = 36.$

3.

a) $\frac{16}{10};$ b) 12; c) 20; d) 60;

e) 1,6; f) 60; g) $\frac{2}{5}$

4.

a) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24}\right).\sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}}.6 + \sqrt{\frac{50}{3}}.6 - \sqrt{24}.6 = 0$

b) $\sqrt{3 + \sqrt{5}}.\sqrt{2} = \sqrt{3.2 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = \sqrt{5} + 1$

c) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}\right).\sqrt{12} = 7$

d) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}.\sqrt{8} = 2(\sqrt{5} - 1)$

5.

a) $\sqrt{55.77.35} = \sqrt{5.11.7.11.5.7} = 5.7.11 = 385$

$$b) \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 125 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 125}{8 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$c) \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2-1} = 1$$

$$d) 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{6} = 9$$

6.

$$a) 10 + 2\sqrt{21}; \quad b) 2; \quad c) 24; \quad d) x - \sqrt{x} - 6;$$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức, tính giá trị của biểu thức

7.

$$a) \sqrt{10,6^2 - 5,6^2} = \sqrt{16,2 \cdot 5} = \sqrt{81} = 9$$

$$b) \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} = 3 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3 = 4\sqrt{5}$$

$$c) \frac{\sqrt{10} + \sqrt{26}}{2\sqrt{5} + \sqrt{52}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{13})}{2 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{13})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d) (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 1 - (5 - 2\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} - 4$$

$$e) \left(\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}} \right)^2 = 5 + \sqrt{21} + 2\sqrt{5 + \sqrt{21}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{21}} + 5 - \sqrt{21}$$

$$= 10 + 2\sqrt{(5 + \sqrt{21})(5 - \sqrt{21})} = 10 + 2\sqrt{4} = 14$$

$$f) \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \sqrt{2} + 1$$

8.

$$a) (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1.$$

$$b) \sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}} = \sqrt{81 - 17} = \sqrt{64} = 8.$$

$$c) (\sqrt{2014} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2014} + \sqrt{2013}) = 2014 - 2013 = 1.$$

$$d) 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 1 + 8 + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6} = 9.$$

9. Dùng hằng đẳng thức, rút gọn biểu thức sau:

$$a) 9; \quad b) -4; \quad c) 12; \quad d) -1 + 2\sqrt{3}$$

e) $2 - \sqrt{3}$; f) $\sqrt{3} - 1$; g) -4 ; h) $1 + \sqrt{3}$

i) $\sqrt{5} - 2$ j) $2\sqrt{2}$ k) $2\sqrt{2}$

10.

a) $A = \sqrt{(a-1)^2} \cdot \sqrt{(2a+1)^2} = (a-1)(2a+1)$ (vì $a > 1$)

b) $B = \sqrt{b^2 + 6b + 9} = \sqrt{(b+3)^2} = -(b+3)$ (vì $b < -3$)

c) $C = \sqrt{(c+5)^2} - \sqrt{(c-5)^2} = (c+5) - (5-c) = 2c$ (vì $-5 \leq c \leq 5$)

d) $D = \frac{1-d}{\sqrt{(d-1)^2}} + \frac{\sqrt{(d-2)^2}}{d-2} = \frac{1-d}{d-1} + \frac{d-2}{d-2} = (-1) + 1 = 0$ (vì $d > 2$)

11.

a) $A = x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x + 3 + |x - 3| = x + 3 + (3 - x) = 6.$

b) $B = |x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} = -(x - 2) + \frac{|x - 2|}{x - 2} = -x + 2 + \frac{2 - x}{x - 2} = -x + 1.$

c) $C = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2} = |x + 2| + |x| = x + 2 - x = 2.$

d) $D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{|x - 5|}{x - 5}$

Với $x \geq 5$ thì $D = 2x - 1 - \frac{x - 5}{x - 5} = 2x - 1 - 1 = 2x - 2.$

Với $x < 5$ thì $D = 2x - 1 - \frac{-(x - 5)}{x - 5} = 2x - 1 + 1 = 2x.$

Dạng 3: Phân tích thành nhân tử

12.

a) $\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$; b) $\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)$; c) $\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)$

d) $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})$; e) $\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$; f) $\sqrt{x}(|x| - 25)$

13.

a) Với $x > 4$, ta có: $A = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{x - 4} \cdot \sqrt{x + 4} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 4} = \sqrt{x - 4}(\sqrt{x + 4} + \sqrt{x}).$

b) Với $x > 2$, ta có: $B = \sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x(x + 2) + 4} = \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$

c) Với $x > 0$, ta có: $C = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x} = \sqrt{(2x + 1)^2} - \sqrt{4x(x + 1)}$

$$= 2x + 1 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^2$$

14.

a) $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$;

b) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

c) $\sqrt{x-3} \cdot (\sqrt{x+3} - 2)$

d) $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$.

e) $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)$;

f) $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 4)$

B. KHAI CĂN BẬC HAI VÀ PHÉP CHIA

Dạng 4: Thực hiện phép tính

15.

a) $A = \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$.

b) $B = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

c) $C = \sqrt{98} : \sqrt{2} = \sqrt{98 : 2} = \sqrt{49} = 7$.

d) $D = (\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3} = \sqrt{48 : 3} - \sqrt{27 : 3} + \sqrt{3 : 3} = \sqrt{16} - \sqrt{9} + 1 = 2$.

e) $E = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15} - (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : (\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

16. a) 6 b) $\frac{4}{5}$; c) 5. d) $\frac{3}{10}$.

17. a) 3 b) 0 ; c) 6. d) $\frac{5}{9}$. e) $\sqrt{5} - 1$ f) 9

Dạng 5: Rút gọn biểu thức

18.

a) $A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot a^6}{b \cdot b^3}} = \sqrt{\frac{a^8}{b^4}} = \frac{\sqrt{a^8}}{\sqrt{b^4}} = \frac{a^4}{b^2}$.

b) $B = b^5 \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 9}{b^8}} = b^5 \cdot \sqrt{\frac{(a+3)^2}{b^8}} = b^5 \cdot \frac{\sqrt{(a+3)^2}}{\sqrt{b^8}} = b^5 \cdot \frac{|a+3|}{b^4} = b \cdot |a+3|$

$B = b \cdot (a+3)$ nếu $a \geq -3$

$B = -b \cdot (a+3)$ nếu $a < -3$

c) $\forall (x-1)^2 \geq 0$ và $16 > 0$ nên ta có

$$C = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{16}} = \frac{|x-1|}{4} = \frac{x-1}{4}; \text{ do } x \geq 1$$

d) $\forall x^4 \geq 0$ và $(a-1)^2 > 0$ nên ta có $D = \sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{(a-1)^2}} = \frac{x^2}{|a-1|} = \frac{x^2}{1-a}$ (\forall

$a < 1$)

19.

a) Với $x \geq 5$ ta có

$$\frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27(x-5)^2}{3}} = \sqrt{9(x-5)^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{(x-5)^2} = 3 \cdot |x-5| = 3(x-5) \text{ vì } x \geq 5$$

b) Với $x < 4$ ta có

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^2}{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^2}{9}} = \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|x-4|}{3} = \frac{4-x}{3} \text{ (}\forall x < 4\text{)}.$$

c) Với $x \geq 0$; ta có $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{|\sqrt{x}+1|} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$

d) Với $x < 3$ ta có

$$\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{\sqrt{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{(x-2)^2}{|3-x|} + \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{x^2-4x+4}{3-x} - \frac{x^2-1}{3-x} = \frac{-4x+5}{3-x}$$

20.

a) $\sqrt{1 \cdot \frac{9}{16} \cdot 5 \cdot \frac{4}{9} \cdot 0,01} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{49}{9} \cdot \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{25}{16}} \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{24}.$

b) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165-124)(165+124)}{164}} = \sqrt{\frac{41 \cdot 289}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{4}} = \frac{17}{2}.$

c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} = \sqrt{\frac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}} = \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} = \sqrt{\frac{225}{841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{15}{29}.$

Dạng 6. Toán thực tế

21. Áp dụng công thức $Q = I^2 R t$, suy ra $I = \sqrt{\frac{Q}{R t}} = \sqrt{\frac{500}{80.1}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ (A)

22.

a) Gọi chiều dài màn hình ti vi là y , ta có $\frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$ (inch)

Theo Pythagore ta có: $d^2 = x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = x^2 + \frac{16}{9}x^2 = \frac{25x^2}{9} \Rightarrow d = \frac{5}{3}x$

b) Ta có : $d = \frac{5}{3}x \Rightarrow x = \frac{3d}{5}$.

Do đó chiều rộng của ti vi loại 60 inch là $x = \frac{3d}{5} = \frac{180}{5} = 36$ (inch)

Chiều dài của ti vi loại 40 inch là $\frac{4}{3}x = \frac{4}{3}.36 = 48$ (inch)

BÀI 9:
BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI
ĐÁP ÁN BÀI TẬP

Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

1.

a) $\sqrt{25.90} = 15\sqrt{10}$

b) $\sqrt{96.125} = \sqrt{16.6.5.25} = 20\sqrt{30}$

c) $\sqrt{75.54} = 45\sqrt{2}$

d) $\sqrt{245.35} = \sqrt{49.5.5.7} = 35\sqrt{7}$

2. a) $\sqrt{54} = \sqrt{9.6} = 3\sqrt{6}$;

b) $\sqrt{108} = \sqrt{36.3} = 6\sqrt{3}$

c) $0,1\sqrt{20000} = 0,1\sqrt{2.10000} = 0,1.100\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

d) $-0,05\sqrt{28800} = -0,05\sqrt{144.100.2} = -0,05.12.10\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$

3.

a) Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{8x^2} = \sqrt{2^2 x^2 \cdot 2} = 2|x|\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}$.

b) Vì $x \geq 0$ và $y \leq 0$ nên $\sqrt{27xy^2} = \sqrt{3^2 y^2 \cdot 3x} = 3|y|\sqrt{3x} = -3y\sqrt{3x}$.

c) $\sqrt{25x^3} = \sqrt{5^2 x^2 \cdot x} = 5|x|\sqrt{x} = 5x\sqrt{x}$ (do $x > 0$)

d) $\sqrt{48(x-1)^2 y^4} = 4|x-1|y^2\sqrt{3} = 4(1-x)y^2\sqrt{3}$ (do $x < 1$).

4.

a) $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48} = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

b) $B = \sqrt{147} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27} = 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 0$.

c) $C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$
 $= 12\sqrt{2} - 6 + 3(1 - 4\sqrt{2} + 8) = 12\sqrt{2} - 6 + 27 - 12\sqrt{2} = 21$.

d) $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605} = 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 11\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

5.

a) Vì $x > 0$; nên ta có $A = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} = 5.2\sqrt{x} - 3.\frac{10}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{x}.\frac{x}{2}\sqrt{x}$
 $= 10\sqrt{x} - 10\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -2\sqrt{x}$

b) Vì $y \leq -3$ nên $\sqrt{9+6y+y^2} = \sqrt{(3+y)^2} = |3+y| = -3-y$.Do đó

$$B = \frac{1}{3}(-3 - y) + \frac{4y}{3} + 5 = y + 4$$

Dạng 2: Đưa thừa số vào trong dấu căn

6.

$$a) 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$b) -5\sqrt{2} = -\sqrt{5^2 \cdot 2} = -\sqrt{50}$$

$$c) 2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{8}$$

$$d) 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

7. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

$$a) \text{ Vì } a \geq 0 \text{ nên } a\sqrt{11} = \sqrt{11a^2}$$

$$b) \text{ Vì } a < 0 \text{ nên } a\sqrt{\frac{-23}{a}} = -\sqrt{a^2 \cdot \frac{-23}{a}} = -\sqrt{-23a}$$

$$c) \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } \frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{2^2} \cdot \frac{12}{a}} = \sqrt{3a}$$

$$d) \text{ Vì } a < 2 \text{ nên } (a-2)\sqrt{3} = -\sqrt{3(2-a)^2}$$

Dạng 3: So sánh các căn bậc hai

8.

$$a) \text{ Ta có } 2\sqrt{29} = \sqrt{2^2 \cdot 29} = \sqrt{116} \text{ và } 3\sqrt{13} = \sqrt{3^2 \cdot 13} = \sqrt{117}.$$

Mà $\sqrt{116} < \sqrt{117}$ nên $2\sqrt{29} < 3\sqrt{13}$.

$$b) \text{ Ta có } \frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}} \text{ và } \frac{3}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 3} = \sqrt{\frac{27}{8}}.$$

$$\text{Mà } \sqrt{\frac{25}{8}} < \sqrt{\frac{27}{8}} \text{ nên } \frac{5}{4}\sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$9. a) \text{ Ta có } 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50} \text{ và } 4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

$$\text{Mà } \sqrt{50} > \sqrt{48} \text{ nên số bé hơn là } 4\sqrt{3}.$$

$$b) \text{ Ta có } \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{24}} \text{ và } 6\sqrt{\frac{1}{37}} = \sqrt{6^2 \cdot \frac{1}{37}} = \sqrt{\frac{36}{37}}.$$

$$\text{Mà } \sqrt{\frac{25}{24}} > \sqrt{\frac{36}{37}} \text{ nên số bé hơn là } 6\sqrt{\frac{1}{37}}.$$

10.

$$a) \text{ Ta có: } 3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}; 2\sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}; 4\sqrt{2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}$$

$$\text{Do } \sqrt{24} < \sqrt{29} < \sqrt{32} < \sqrt{45} \text{ nên } 2\sqrt{6} < \sqrt{29} < 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5}.$$

b) Ta có $5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$; $3\sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 8} = \sqrt{72}$; $2\sqrt{15} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{60}$

Do $\sqrt{39} < \sqrt{50} < \sqrt{60} < \sqrt{72}$ nên $\sqrt{39} < 5\sqrt{2} < 2\sqrt{15} < 3\sqrt{8}$.

11.

a) $7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$; $2\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{32}$; $5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$

Do $\sqrt{98} > \sqrt{50} > \sqrt{32} > \sqrt{28}$ nên $7\sqrt{2} > 5\sqrt{2} > 2\sqrt{8} > \sqrt{28}$.

b) $3\sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{90}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$; $\frac{20}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{400}{5}} = \sqrt{80}$

$$12\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{144 \cdot 2}{3}} = \sqrt{96}$$

Do $\sqrt{96} > \sqrt{90} > \sqrt{80} > \sqrt{75}$ nên $12\sqrt{\frac{2}{3}} > 3\sqrt{10} > \frac{20}{\sqrt{5}} > 5\sqrt{3}$

12.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} < 5 + 2\sqrt{\frac{25}{4}} = 5 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 10$. Do đó $\sqrt{2} + \sqrt{3} < 10$.

b) $(\sqrt{3} + 2)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$.

$(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 2\sqrt{12} = 8 + 4\sqrt{3} > 7 + 4\sqrt{3}$. Do đó $\sqrt{2} + \sqrt{6} > \sqrt{3} + 2$.

c) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{15 \cdot 17} = \sqrt{(16-1)(16+1)} = \sqrt{16^2 - 1} < \sqrt{16^2} = 16$. Do đó $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17} < 16$.

d) $(\sqrt{15} + \sqrt{17})^2 = 32 + 2\sqrt{15 \cdot 17}$; $8^2 = 32 + 2 \cdot 16 > 32 + 2\sqrt{15 \cdot 17}$.

Do đó $8 > \sqrt{15} + \sqrt{17}$.

Dạng 4: Khử mẫu trong dấu căn

13.

a) $\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

b) $\sqrt{\frac{5}{14}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 14}{14 \cdot 14}} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{(14)^2}} = \frac{\sqrt{70}}{14}$.

c) $\sqrt{\frac{3m}{5n}} = \sqrt{\frac{3m \cdot 5n}{5n \cdot 5n}} = \frac{\sqrt{15mn}}{\sqrt{(5n)^2}} = \frac{\sqrt{15mn}}{5|n|}$.

$$d) \sqrt{\frac{7x}{18y}} = \sqrt{\frac{7x \cdot 18y}{18y \cdot 18y}} = \frac{\sqrt{126xy}}{\sqrt{(18y)^2}} = \frac{3\sqrt{14xy}}{18|y|} = \frac{\sqrt{14xy}}{6|y|}$$

Trong câu d) ta có cách xử lý bài toán đơn giản hơn

$$\sqrt{\frac{7x}{18y}} = \sqrt{\frac{7x \cdot 2y}{18y \cdot 2y}} = \frac{\sqrt{14xy}}{\sqrt{(6y)^2}} = \frac{\sqrt{14xy}}{6|y|}$$

14.

$$a) \sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}} = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^4}} = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2}$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}} = \sqrt{\frac{a-1}{a^3}} = \sqrt{\frac{a(a-1)}{a^4}} = \frac{\sqrt{a(a-1)}}{a^2}.$$

15.

$$a) -x^2y\sqrt{\frac{y}{x}} = -x^2y\sqrt{\frac{x \cdot y}{x^2}} = \frac{-x^2y\sqrt{x \cdot y}}{x} = -xy\sqrt{x \cdot y}$$

$$b) \sqrt{\frac{-2x}{15}} = \sqrt{\frac{-30x}{15^2}} = \frac{\sqrt{-30x}}{15}.$$

$$c) \sqrt{\frac{5x}{13y}} = \sqrt{\frac{65xy}{(13y)^2}} = \frac{\sqrt{65xy}}{13y}$$

$$d) \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} = \sqrt{\frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)^2}} = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{2x+1}.$$

Dạng 5: Trục căn thức ở mẫu

$$16. a) \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{3};$$

$$b) \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)} = \sqrt{5};$$

$$c) \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \frac{(3\sqrt{5}+\sqrt{15}) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{15+5\sqrt{3}}{5} = 3+\sqrt{3};$$

$$d) \frac{1}{2-3\sqrt{3}} = \frac{2+3\sqrt{3}}{(2-3\sqrt{3})(2+3\sqrt{3})} = \frac{2+3\sqrt{3}}{4-27} = -\frac{2+3\sqrt{3}}{23}.$$

$$17. a) \frac{1}{\sqrt{m}+n} = \frac{\sqrt{m}-n}{(\sqrt{m}-n)(\sqrt{m}+n)} = \frac{\sqrt{m}-n}{m-n^2};$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \frac{2(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})} = \frac{2(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{m-n};$$

$$c) \frac{3}{2\sqrt{m}+1} = \frac{3(2\sqrt{m}-1)}{(2\sqrt{m}-1)(2\sqrt{m}+1)} = \frac{6\sqrt{m}-3}{4m-1};$$

$$d) \frac{2ab}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}} = \frac{2ab(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})} = \frac{2ab(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{4a-9b};$$

$$18. a) \frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{8-27} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{-19} = \frac{-(\sqrt{8}+\sqrt{27})}{19}$$

$$b) \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})^2}{4}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$c) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{10} + \sqrt{6}$$

$$d) \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}} = 2-\sqrt{3}$$

$$19. a) \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}+4}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(2\sqrt{6}-4)}{24-16} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(2\sqrt{6}-4)}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{6 + \sqrt{35}}} &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7} - \sqrt{12 + 2\sqrt{35}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{20. a) } A &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7})(2\sqrt{3} + \sqrt{7})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{7})(2\sqrt{3} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{\sqrt{2}(6 + 2\sqrt{21} + \sqrt{21} + 7)}{12 - 5} = \frac{\sqrt{2}(13 + 3\sqrt{21})}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{(3 + 4\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5})} \\ &= \frac{(3 + 4\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{3 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{c) } C = \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 2)}{(2 - 1)(5 - 4)} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} - 2)$$

BÀI 9.2:
BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI
ĐÁP ÁN BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức không chứa biến

1.

$$a) 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5} = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{9}}{2} + \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

c)

$$\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (2 - 3)\sqrt{5} + (9 + 6)\sqrt{2} = -\sqrt{5} + 15\sqrt{2}$$

$$d) 0,1 \cdot \sqrt{200} + 2 \cdot \sqrt{0,08} + 0,4 \cdot \sqrt{50} = 0,1 \cdot 10\sqrt{2} + 2 \cdot 0,2\sqrt{2} + 0,4 \cdot 5\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0,4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= (1 + 0,4 + 2)\sqrt{2} = 3,4\sqrt{2}.$$

2.

$$a) \sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 5} + 3\sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{6^2 \cdot 2}$$

$$= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (2 - 3)\sqrt{5} + (9 + 6)\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - \sqrt{5}.$$

$$b) (\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84} = \sqrt{2^2 \cdot 7} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{2^2 \cdot 21}$$

$$= 2 \cdot 7 - 2\sqrt{21} + 7 + 2\sqrt{21} = 14 + 7 + (2 - 2)\sqrt{21} = 21.$$

$$c) (\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120} = 6 + 2\sqrt{30} + 5 - \sqrt{2^2 \cdot 30} = 6 + 5 + 2\sqrt{30} - 2\sqrt{30} = 11.$$

$$d) \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{10^2 \cdot 2}\right) : \frac{1}{8}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right) \cdot 8 = 2\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 64\sqrt{2} = 54\sqrt{2}.$$

3.

$$a) A = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = -\sqrt{3}.$$

$$b) B = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{|\sqrt{3} - 1|}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) C = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}} = \sqrt{(8 - 3\sqrt{7})^2} - \sqrt{(8 + 3\sqrt{7})^2}$$

$$= |8 - 3\sqrt{7}| - |8 + 3\sqrt{7}| = 8 - 3\sqrt{7} - 8 - 3\sqrt{7} = -6\sqrt{7} \text{ vì } (8 > 3\sqrt{7}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D &= \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) + \sqrt{6}(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\
 &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Dạng 2 : Chứng minh đẳng thức

4.

a) Biến đổi vế trái ta có

$$VT = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2} = VP.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } VT &= \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - b(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
 &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a - b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = VP. \text{ Vậy ta có điều phải chứng minh.}
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 \text{a) Ta có } VT &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{2b}{b - a} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4b}{2(a - b)} \\
 &= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - a + 2\sqrt{ab} - b + 4b}{2(a - b)} = \frac{4\sqrt{ab} + 4b}{2(a - b)} = \frac{4\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{2(a - b)} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = VP
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có: } VT &= \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2 \\
 &= \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right]^2 \\
 &= (a - 2\sqrt{ab} + b) \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = 1 = VP
 \end{aligned}$$

6. Với $a \geq 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
 VT &= \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2 = \left[\frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right] \cdot \left[\frac{1 - \sqrt{a}}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})} \right]^2 \\
 &= (1 + 2\sqrt{a} + a) \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} = (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} = 1 = VP.
 \end{aligned}$$

b) Với $a + b > 0$ và $b \neq 0$ ta có

$$VT = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 + 2ab + b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{(ab^2)^2}{(a+b)^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a|b^2}{a+b} = |a| = VP$$

Dạng 3. Rút gọn, tính giá trị biểu thức khi biết giá trị của biến

7.

a) Ta có $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right) = \frac{a+1-2\sqrt{a}}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(a+1)}$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a - 2\sqrt{a} + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow A = \sqrt{a} + 1$

b) Lại có

$a = 2021 - 2\sqrt{2020} = (\sqrt{2020} - 1)^2 \Rightarrow A = \sqrt{(\sqrt{2020} - 1)^2} + 1 = |\sqrt{2020} - 1| + 1 = \sqrt{2020}$

Vậy $A = \sqrt{2020}$ khi $a = 2021 - 2\sqrt{2020}$

8.

a) Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases}$

Ta có $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1\right)$
 $= \frac{\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 3)} \cdot \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 3}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{x - \sqrt{3}}$

b) Ta có

$29 - 12\sqrt{5} = (a\sqrt{5} - b)^2 \Rightarrow a = \dots; b = \dots \Rightarrow 29 - 12\sqrt{5} = (2\sqrt{5} - 3)^2$

$\Rightarrow 3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2} = 3 - 2\sqrt{5} + 3 = 6 - 2\sqrt{5}$

$= (\sqrt{5} - 1)^2 \Rightarrow x - \sqrt{3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow A = 1.$

Vậy $A = 1$ khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

9.

a) Ta có $A = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9}\right) = \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

$$\text{b) Ta có } x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3(\sqrt{3}-1)}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}} = 2$$

$$\text{Vậy } A = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

10.

a) Ta có

$$P = \frac{a\sqrt{b} + \sqrt{a} - b\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{1 + \sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 + \sqrt{ab})}{(1 + \sqrt{ab})} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$P : \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b)} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\text{b) } a = 2019 + 2\sqrt{2018} = (\sqrt{2018} + 1)^2; b = (\sqrt{2019} + 1)^2$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{2018} + 1 - \sqrt{2019} - 1 = \sqrt{2018} - \sqrt{2019}$$

11.

a) Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

$$P = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{xy})(1 - \sqrt{xy})} \right) : \left(\frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$$

$$P = \left(\frac{-2x\sqrt{y} - 2\sqrt{y}}{1 - xy} \right) \left(\frac{1 - xy}{1 + x + y + xy} \right) = \left[\frac{-2\sqrt{y}(x + 1)}{1 - xy} \right] \left[\frac{1 - xy}{(1 + x)(1 + y)} \right]$$

$$P = \frac{-2\sqrt{y}}{1 + y}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{-2\sqrt{y}}{1 + y} \text{ với } x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1.$$

b) Với $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$

$$y = 9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2} = \sqrt{5} + 2 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{Thay vào biểu thức } P \text{ ta được } P = \frac{-2(\sqrt{5} + 2)}{1 + 9 + 4\sqrt{5}} = \frac{-2(\sqrt{5} + 2)}{2\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

12.

a) Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(\sqrt{a}-1)} \right) : \left(\frac{a+1-2\sqrt{a}}{a+1} \right)$$

$$= \left(\frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(\sqrt{a}-1)} \right) : \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{(a+1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{a+1}{(\sqrt{a}-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{a}-1}$$

Vậy $A = \frac{1}{\sqrt{a}-1}$ với $a \geq 0, a \neq 1$

b) Ta có: $\frac{a}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$\frac{a}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} \Leftrightarrow \frac{a}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow \frac{a}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Leftrightarrow a = (1+\sqrt{3})^2$$

Thay $a = (1+\sqrt{3})^2$ (thỏa mãn $a \geq 0, a \neq 1$) vào biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{a}-1}$ ta được:

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}-1} = \frac{1}{1+\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dạng 4. Rút gọn, giải phương trình

13.

a) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ \sqrt{x}-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có $Q = \frac{(\sqrt{x}+1)-2}{x-1} \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{x-\sqrt{x}}{x}$

b) $Q = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = -\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = \frac{1}{4}$.

14.

a) Điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$

Ta có $P(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1 + \sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$

$$b) P(x) = x + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = x + 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

(loại)

Vậy không có giá trị nào để $P(x) = x + 1$.

15.

Ta có $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ xác định khi $x \geq 0; x \neq 4$

$$A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1$$

Lại có $B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2}$ xác định khi $x \geq 0$

$$B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x} + 2)(x + 1)}{\sqrt{x} + 2} = x + 1$$

$$\text{Ta có } A = B \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 0$

Vậy $x = 0$ khi $A = B$

16.

a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \left[\frac{x+2 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \frac{x+2 + x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

b) Ta có

$$A = 2 \Rightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa}$$

mãn) (vì $\sqrt{x} + 1 > 0$ với mọi x)

17.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right] \\
 &= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\
 &= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 1$

Ta có

$$P = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$$

Vì $\sqrt{x}+3 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x=4$

c) Vì

$$x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2 \Leftrightarrow 0 < P \leq 2 \Leftrightarrow P(P-2) \leq 0 \Leftrightarrow P-2P \leq 0 \Leftrightarrow P^2 \leq 2P$$

Dấu “=” xảy ra khi $P=2 \Leftrightarrow x=0$. Vậy $P^2 \leq 2P$

Dạng 5. Rút gọn, giải bất phương trình

18.

a) Điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Đặt $A = B : C$

$$B = \frac{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+4) - (x-3)(\sqrt{x}-2) - (7\sqrt{x}+10)}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} = \frac{x\sqrt{x}+2x+4\sqrt{x}-x\sqrt{x}+2x+3\sqrt{x}-6-7\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}$$

$$B = \frac{4x-16}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{x+2\sqrt{x}+4}$$

$$\Rightarrow A = B : C = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+7}$$

$$b) A < 2 \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+7} < 2 \Leftrightarrow 4(\sqrt{x}+2) < 2(\sqrt{x}+7) \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}+2) < \sqrt{x}+7 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < 9. \text{ Vậy } \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

19.

a) Điều kiện P có nghĩa $x > 0; x \neq 1$

$$\text{Ta có } P = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right)$$

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}+x} \right) = \frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$$

b) $P = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 1$ (bất đẳng thức Côsi)

Vì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy $P > 1$

20.

a) ĐKXD $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$

$$A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

$$A = \left[\frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(\sqrt{x} + 7)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \right] : \left(\frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

$$A = \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - x + 1 - x - 10\sqrt{x} - 21}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{2\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$A = \frac{x - 6\sqrt{x} - 27}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 9)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2}$$

b) Ta thấy

$$\frac{x}{9} = \frac{2\sqrt{27 + 7\sqrt{5}}}{\sqrt{10} + 7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{54 + 14\sqrt{5}}}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + 7)} = \frac{\sqrt{49 + 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5} + 5}}{7 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(7 + \sqrt{5})^2}}{7 + \sqrt{5}} = 1$$

$\Leftrightarrow x = 9$ (Thỏa mãn ĐKXD)

Thay $x = 9$ vào biểu thức A , ta tính được $A = \frac{\sqrt{9} - 9}{\sqrt{9} - 2} = \frac{3 - 9}{3 - 2} = -6$.

c) ĐKXD $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$

Ta có: $P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} + 2}$.

Khi đó, $P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} + 2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 9 < 0$ (vì $\sqrt{x} + 2 > 0$) $\Rightarrow 0 \leq x < 81$

Kết hợp với ĐKXD ta được $0 \leq x < 81; x \neq 1; x \neq 4$ thì $P < 0$

Dạng 6. Rút gọn, tìm điều kiện của ẩn để biểu thức đạt giá trị nguyên.**21.**a) Điều kiện $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

Khi $x = 100$ (thỏa mãn điều kiện) thì $A = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$$b) B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - x - 9\sqrt{x}}{x-9} = \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

$$c) \text{Ta có } M = A : B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$$

Để M nguyên thì $\sqrt{x}-2 \in U(5)$ và $\sqrt{x}-2 > -2$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-2 \in \{-1; 1; 5\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{1; 3; 7\} \Leftrightarrow x \in \{1; 9; 49\}$$

22.

a) Ta có

$$P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (x - 1) - (x - 4)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$b) P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{Z}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}, x > 0; x \neq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ và $x \geq 2$

$$\text{Để } \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{x} - 1 \in U(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \{4; 9\}$ **23.**a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$A = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}} = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 2)^2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$.

b) Ta có $A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$.

Với $x \in \mathbb{Z}$, để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(\sqrt{x} - 1)$ là ước của 2.

Suy ra $\sqrt{x} - 1 \in \{\pm 2; \pm 1\}$.

Lập bảng

$\sqrt{x} - 1$	-2	2	-1	1
\sqrt{x}	-1 (loại)	3	0	2
x		9	0	4

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 1$ thì $x \in \{0; 4; 9\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

24.

a) Với $x > 0$ và $x \neq 4$, biểu thức A có nghĩa, ta có

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{5x - 10\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2(2\sqrt{x} + 1) + 3(\sqrt{x} - 2) - (5\sqrt{x} - 7)}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} : \frac{2\sqrt{x} + 3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \\
 &= \frac{2\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}.
 \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0$, $x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} > 0$.

b) Ta có: $\forall x > 0$, $x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} > 0$.

$$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x} + 1)} < \frac{5}{2}, \quad x > 0, \quad x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}.$$

Kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1; 2\}$.

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}.$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị nguyên

25.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } P &= \frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + 2x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Ta có điều kiện

$$x > 0; x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1 \Rightarrow 0 < P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2$$

$$\text{Do } P \text{ nguyên nên } \Rightarrow P = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại)}$$

Vậy không có giá trị nào của x để P nguyên.

26.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } P &= \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}} - \frac{9x+\sqrt{x}+1}{3x-\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{3\sqrt{x}+1}{7x-7\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(3\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-1) - 9x - \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{7\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{3\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+2} \cdot \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} = \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \forall x > 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow P = \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2} > 0$$

$$P = \frac{7\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+2} = \frac{7}{3} - \frac{14}{3(3\sqrt{x}+2)} < \frac{7}{3} \Rightarrow 0 < P < \frac{7}{3}, \forall x > 0, x \neq 1$$

P nhận giá trị là một số nguyên $\Rightarrow P \in \{1; 2\}$

$$P = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (tmđk)}$$

$$P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (tmđk)}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 16 \right\}$ thì P nhận giá trị là một số nguyên.

BÀI 9.3:
DẠNG TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC
ĐÁP ÁN BÀI TẬP

1.

a) $\sqrt{x^2} = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)^2} = 3 \Leftrightarrow |2x - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

2. Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}.$

(1) $\Leftrightarrow 3\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = 4.$

3. **Cách 1.** Điều kiện $x \geq 3.$

(2) $\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 3\sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-3) = 9(x^2-9) \end{cases} \Rightarrow x = 3$

Vậy phương trình (2) có nghiệm là $x = 3.$

Cách 2. Điều kiện $x \geq 3.$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-9}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} \left(\frac{1}{3} - \sqrt{x+3} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 0 \\ \sqrt{x+3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{t.m}) \\ x = -\frac{26}{9} & (1) \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm là $x = 3$

4.

a) Điều kiện là $\frac{(x-1)^4}{x^2-2x+1} \geq 0.$ Vì $(x-1)^4 \geq 0$ với mọi x nên điều kiện là $x^2-2x+1 > 0$

hay $(x-1)^2 > 0$ nghĩa là $x \neq 1.$ Khi đó ta có

$$\sqrt{\frac{(x-1)^4}{x^2-2x+1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x-1)^4}{(x-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow |x-1| = 2$$

Ta xét hai trường hợp:

TH1: $x - 1 = 2$ hay $x = 3$;

TH2: $x - 1 = -2$ hay $x = -1$.

Đổi chiếu điều kiện ta nhận $x = 3$ và $x = -1$.

b) Điều kiện là $x - 1 \geq 0$ và $x^2 - x > 0$. Vì $x^2 - x = x(x - 1)$ nên điều kiện sẽ là $x - 1 > 0$ và $x > 0$. Từ đó suy ra điều kiện là $x > 1$. Khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2-x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}.$$

Sử dụng định nghĩa của căn bậc hai số học ta có: $x = \frac{1}{9}$.

Đổi chiếu điều kiện ta loại $x = \frac{1}{9}$. Vậy không có giá trị x thỏa mãn đề bài.

5.

$$\text{a) } \sqrt{(x-1)^2} = 3-x \Leftrightarrow |x-1| = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 = 3-x \Leftrightarrow x=2. \\ x-1 = -(3-x) \end{cases}$$

$$\text{b) } \sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2x+5 = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{c) } \sqrt{x^2-4x+3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2-4x+3 = (x-3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{d) } \sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 = 0 \\ x^2+4x+4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-2) = 0 \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2. \end{cases}$$

6.

$$\text{a) Ta có } \sqrt{x^2+x} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2+x = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2+x = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ loãii}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

b) Ta có

$$\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{4x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 0 \\ x^2 + 3 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{1; 3\}$.

c) Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

$$2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} = 27 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 27 \Leftrightarrow 3x = 729 \Leftrightarrow x = 243$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 243$.

$$d) \sqrt{x^2 - 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.

$$e) 2 - \sqrt{x^2 - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq 0 \text{ luôn đúng} \\ x^2 - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{6}$.

$$f) \text{ Ta có } x + \sqrt{3x + 10} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x + 10} = -x$$

Điều kiện xác định: $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

$$3x + 10 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

So với điều kiện xác định, ta có nghiệm của phương trình $x = -2$.

7.

$$a) \text{ Ta có } \sqrt{2x - 3} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

b) Ta có

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x - 5} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3 - x} = \sqrt{x - 5} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ 3 - x = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

$$c) \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{\frac{x^2}{2} - 8} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 8} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 8 \geq 0 & (1) \\ x^2 + 4x = \frac{x^2}{2} - 8 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \Leftrightarrow |x| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ (thỏa (1) nên nhận)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -4$.

$$d) \text{ Ta có } \sqrt{2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3} - \sqrt{5 - \sqrt{24}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x} - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2x} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = 0 \Leftrightarrow |\sqrt{2x} - \sqrt{3}| = |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \sqrt{2x} - \sqrt{3} = -(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \sqrt{2x} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} - 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 1$ hoặc $x = \sqrt{6} - 1$.

8.

$$a) \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt{(x-3)(x+3)} - \sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}(\sqrt{x+3} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 0 \\ \sqrt{x+3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \\ x+3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

So với điều kiện xác định, ta có nghiệm $x = 3$.

$$b) \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow 1+x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} = x+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

c) Biến đổi phương trình về dạng

$$\frac{3}{2}\sqrt{4(x-2)} - 9\sqrt{\frac{x-2}{9^2}} = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{x-2} - 9 \cdot \frac{1}{9}\sqrt{x-2} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow x-2 = 9 \Leftrightarrow x = 11$$

Thay $x = 11$ vào phương trình ban đầu, ta thấy thỏa, vậy $x = 11$ là nghiệm cần tìm.

9.

a) Điều kiện $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$; nghĩa là x thỏa mãn một trong hai trường hợp sau:

TH1. $2x-3 \geq 0$ và $x-1 > 0$, ta tìm được $x \geq \frac{3}{2}$.

TH1. $2x-3 \leq 0$ và $x-1 < 0$, ta tìm được $x < 1$.

Khi đó ta có $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2 \Rightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 4 \Rightarrow 2x-3 = 4x-4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Đổi chiếu điều kiện ta thấy $x = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

b) Điều kiện là $x-2 \geq 0$ và $3x-4 > 0$; suy ra $x \geq 2$ là điều kiện. Khi đó:

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x-4}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{3x-4}} = 1 \Rightarrow \frac{x-2}{3x-4} = 1 \Rightarrow x = 1$$

Đổi chiếu điều kiện ta loại $x = 1$. Vậy không có giá trị x thỏa mãn đề bài.

10.

a) Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{(x+1)^4}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

$$\frac{\sqrt{(x+1)^4}}{\sqrt{x}} = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4x \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

b) Điều kiện: $\frac{2x-x^2-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)^2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x < 0 \end{cases}$

Khi đó ta có phương trình

$$(x-1)\sqrt{\frac{(x-1)^2}{-x}} - 2(x-1) = 0$$

$$(x-1) \left(\sqrt{\frac{(x-1)^2}{-x}} - 2 \right) = 0$$

$$x-1=0 \text{ hoặc } \sqrt{\frac{(x-1)^2}{-x}} - 2 = 0$$

$$x=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện) hoặc } \sqrt{\frac{(x-1)^2}{-x}} = 2 \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1): } \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{-x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2\sqrt{-x}$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{-4x} \Leftrightarrow (x-1)^2 = -4x$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \pm 1$.

Giải phương trình chứa căn bậc ba:

$$11. \sqrt[3]{x+7} - 3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} = 4 \Leftrightarrow x+7 = 64 \Leftrightarrow x = 57$$

12.

$$a) \text{ Ta có } \sqrt[3]{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 27 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13$$

$$b) \text{ Ta có } \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1} \Leftrightarrow x+1 = x^2-1 \Leftrightarrow x+1 = (x-1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

$$13. \text{ Chuyển vế ta có } \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x+2}$$

$$\text{Lũy thừa bậc ba cả hai vế ta được } x + x + 1 + 3\sqrt[3]{x(x+1)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}) = -x - 2$$

$$3x + 3 + 3\sqrt[3]{x(x+1)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}) = 0$$

$$x + 1 - \sqrt[3]{x(x+1)}(x+2) = 0$$

$$x(x+1)(x+2) = (x+1)^3$$

$$x = -1$$

Thử lại ta thấy $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

14.

a) Ta có $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$

$$\Leftrightarrow 2x-1 + x-1 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 3x-2$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)(3x-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{2}{3} \right\}$.

b) Ta có $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

$$\Leftrightarrow x+5 + x+6 + 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)}(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}) = 2x+11$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -6 \\ x = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -5; -\frac{11}{2}; -6 \right\}$.

15. a) Ta có :

$$\sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{x^2-9} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3}(\sqrt[3]{x-3}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+3} = 0 \\ \sqrt[3]{x-3}-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 0 \\ x-3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$ hoặc $x = 4$

b) $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x+1} = 1$

Điều kiện xác định: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = t^2 - 1$. Phương trình đã cho trở thành :

$$\sqrt[3]{t^2+1} - t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{t^2+1} = 1+t$$

$$\Leftrightarrow t^2+1 = t^3+3t^2+3t+1 \Leftrightarrow t^3+2t^2+3t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t^2+2t+3) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ (vì } \Leftrightarrow t^2+2t+3 > 0 \text{)}$$

Khi đó ta có $\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. So với điều kiện ta có nghiệm của bài toán là $x = -1$

BÀI 10:
CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA
ĐÁP ÁN BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm căn bậc ba của một số

1.

a) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

b) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{0,008}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{0,008}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,2^3}} = \frac{1}{0,2} = 5$

d) $\sqrt[3]{(-27) \cdot 8} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{-3^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} = -3 \cdot 2 = -6$

2.

a) $\sqrt[3]{64} = 4.$

b) $\sqrt[3]{-512} = -8$

c) $\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{4}{10}.$

d) $\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-6)^3} = -6.$

e) $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\frac{500}{4}} + \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216} = 5 + 6 = 11$

f) $\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}} - \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6}{576}} - \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[3]{8} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$

Dạng 2. So sánh các căn bậc ba

3.

a) Ta có: $4 < 5 \Rightarrow \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{5}$

b) Ta có: $8 > 5 \Leftrightarrow 2^3 > 5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2^3} > \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow 2 > \sqrt[3]{5}$

c) Ta có: $5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{500}$

$$4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{320}$$

Suy ra $\sqrt[3]{500} > \sqrt[3]{320} \Leftrightarrow 5\sqrt[3]{4} > 4\sqrt[3]{5}$

4.

a) $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7})^3 = 5 + 3\sqrt[3]{5^2 \cdot 7} + 3\sqrt[3]{5 \cdot 7^2} + 7 = 12 + 3\sqrt[3]{175} + 3\sqrt[3]{245} > 12 = (\sqrt[3]{12})^3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{12}$

b) $(\sqrt{2} + 1)^3 = 2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1 = 7 + 5\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}.$

c) $(\sqrt{3} - 2)^3 = 3\sqrt{3} - 18 + 12\sqrt{3} - 8 = 15\sqrt{3} - 26 < 15\sqrt{3} - 25 \Rightarrow \sqrt{3} - 2 < \sqrt[3]{15\sqrt{3} - 25}$

5.

$$\text{a) } \sqrt[3]{9} > 2. \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{1}{8}} < \frac{3}{4}. \quad \text{c) } \begin{cases} 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24} \\ 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} -6\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(-6)^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{-1512} \\ 7\sqrt[3]{(-6)} = \sqrt[3]{7^3 \cdot (-6)} = \sqrt[3]{-2058} \end{cases} \Rightarrow -6\sqrt[3]{7} > 7\sqrt[3]{(-6)}.$$

$$\text{e) } \left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{7}\right)^3 = 4 + 3\sqrt[3]{112} + 3\sqrt[3]{196} + 7 = 11 + 3\sqrt[3]{112} + 3\sqrt[3]{196} > 11 = \left(\sqrt[3]{11}\right)^3 \\ \Rightarrow \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{11}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \left(\sqrt[3]{10}\right)^3 = 10 \\ \left(\sqrt[3]{2} + 2\right)^3 = 2 + 6\sqrt[3]{4} + 12\sqrt[3]{2} + 8 = 10 + 6\sqrt[3]{4} + 12\sqrt[3]{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \left(\sqrt[3]{10}\right)^3 < \left(\sqrt[3]{2} + 2\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{2} + 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{10} - 2 < \sqrt[3]{2}.$$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba

6.

$$\text{a) } A = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1^2 + 1^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1^2 - 1^3} \\ = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{2} - 1)^3} = (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{b) } B = \sqrt[3]{(3)^3 - 3 \cdot (3)^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^3} \cdot \frac{\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\ = \sqrt[3]{(3 - \sqrt{5})^3} \cdot \frac{\sqrt{(3 + \sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

7.

$$\text{a) } A = \sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2(\sqrt{2}) + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{2^3 - 3 \cdot 2^2(\sqrt{2}) + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3} \\ = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$$

$$\text{b) } B^3 = 182 + \sqrt{33125} + 182 - \sqrt{33125} + 3\sqrt[3]{182^2 - 33125}. B = 364 - 3B.$$

$$\text{Nên } B^3 + 3B - 364 = 0 \Leftrightarrow (B - 7)(B^2 + 7B + 52) = 0 \Leftrightarrow B = 7$$

$$\text{(do } B^2 + 7B + 52 = \left(B + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{159}{4} > 0)$$

8.

$$a) A = \sqrt[3]{125x^3 + 75x^2 + 15x + 1} - 5x = \sqrt[3]{(5x + 1)^3} - 5x = 1$$

$$b) B = \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x} - 1} - \sqrt[3]{1 - x^3} = \sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 1} = 2\sqrt[3]{x^3 - 1}$$

9. Áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ ta có

$$x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$$

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}} \right)^3$$

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} \right)^3 + \left(\sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}} \right)^3 + 3\sqrt[3]{(182 + \sqrt{33125})(182 - \sqrt{33125})} \left(\sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}} \right)$$

$$x^3 = 182 + \sqrt{33125} + 182 - \sqrt{33125} + 3\sqrt[3]{182^2 - (\sqrt{33125})^2} \left(\sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}} \right)$$

$$x^3 = 364 + 3\sqrt[3]{-1} \cdot x \text{ với } x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$$

$$x^3 + 3x - 364 = 0$$

$$x^3 - 7x^2 + 7x^2 - 49x + 52x - 364 = 0$$

$$x^2(x - 7) + 7x(x - 7) + 52(x - 7) = 0$$

$$(x - 7)(x^2 + 7x + 52) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } x^2 + 7x + 52 = x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 52 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{159}{4} > 0 \text{ với mọi } x.$$

Nên từ (1) $\Leftrightarrow x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ là số tự nhiên.

Vậy x là số tự nhiên.

$$10. \text{ Ta có } M = \frac{10(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})} \cdot \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} + 1} \right]$$

$$M = \frac{10(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})}{3 + 2} \cdot \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} + 1} \right] = 2(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) \cdot \frac{2 - 1}{3 - 1} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$$

11.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{1}{2} \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2\sqrt{2} + 12 + 12\sqrt{2} + 8} \cdot \sqrt{4 - 4\sqrt{2} + 2} \\ & = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 2)^3} \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 2)(2 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} (4 - 2) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} = \sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1} = \sqrt[3]{(\sqrt{a}-1)^3} = \sqrt{a}-1$$

$$\text{Ta có: } \frac{a-1}{2(\sqrt{a}+1)} + 1 = \frac{\sqrt{a}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{a}+1}{2}$$

$$\text{Suy ra } Q = \left(1 + \frac{1}{2}(\sqrt{a}-1)\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{2} = \frac{\sqrt{a}+1}{2} : \frac{\sqrt{a}+1}{2} = 1$$



BÀI 11:

TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn.

1.

a) ΔABC vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (cm)

Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$; $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$; $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$; $\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$.

b) Xét ΔABC vuông tại A nên $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ (cm)

Ta có $\sin A = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$; $\cos A = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$; $\tan A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}$; $\cot A = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$

2.

ΔABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{3,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{10}$ (cm)

$\cos B = \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{1,5}{3,5} \approx 0,4286$; $\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{3,5} \approx 0,9035$

$\cot B = \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{1,5}{\sqrt{10}} \approx 0,4743$; $\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{1,5} \approx 2,1082$

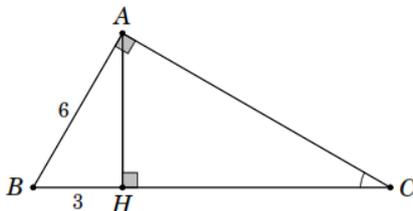
3.

ΔABC cân tại A , đường cao AH nên H là trung điểm của BC nên $BH = HC = 3$ và áp dụng định lý Pythagore tính được $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = 5$.

Từ đó tính được:

$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$; $\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{3}{5}$; $\tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{3}$; $\cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{3}{4}$.

4.



Do góc B và góc C là hai góc phụ nhau nên ta có: $\tan C = \cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5.

Áp dụng định lý Pythagore ta có:

$AB = \sqrt{CA^2 + CB^2} = \sqrt{0,9^2 + 1,2^2} = 1,5$ (m).





Vì góc A và góc B phụ nhau nên

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{0,9}{1,5} = \frac{3}{5} = \cos A; \quad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4} = \cot A$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5} = \sin A; \quad \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{1,2}{0,9} = \frac{4}{3} = \tan A$$

Dạng 2: : So sánh các tỉ số lượng giác mà không dùng máy tính hoặc bảng số
6.

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ; \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ \quad \tan 80^\circ = \cot 10^\circ; \quad \cot 50^\circ = \tan 40^\circ$$

7.

a) $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ; \sin 51^\circ = \cos 39^\circ$ từ đó ta có: $\cos 40^\circ < \sin 51^\circ < \cos 30^\circ < \sin 70^\circ$

b) $\sin 57^\circ = \cos 33^\circ$ từ đó ta có: $\sin 57^\circ < \cos 34^\circ < \cos 52^\circ$

8.

a) $\cot 40^\circ = \tan 50^\circ; \cot 43^\circ = \tan 47^\circ$ từ đó ta có: $\tan 40^\circ < \tan 42^\circ < \cot 43^\circ < \cot 40^\circ$

b) $\cot 63^\circ = \tan 27^\circ; \cot 31^\circ = \tan 59^\circ$ từ đó ta có: $\cot 63^\circ < \tan 52^\circ < \cot 31^\circ < \tan 72^\circ$,

Dạng 3: Tính giá trị biểu thức lượng giác. Chứng minh hệ thức lượng giác.

9.

a) Ta có $32^\circ + 58^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 32^\circ = \cos 58^\circ \Rightarrow A = 1$.

b) Ta có $76^\circ + 14^\circ = 90^\circ \Rightarrow \tan 76^\circ = \cot 14^\circ \Rightarrow B = 0$.

10.

Cách 1. Xét $\triangle ABC$ vuông tại A .

Đặt $\widehat{B} = \alpha$. Ta có: $\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$

suy ra $\frac{AC}{5} = \frac{BC}{13} = k$, do đó $AC = 5k, BC = 13k$.

Tam giác ABC vuông tại A nên: $AB^2 = BC^2 - AC^2 = (13k)^2 - (5k)^2 = 144k^2$

suy ra $AB = 12k$.

Vậy $\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}; \tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}; \cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$



Cách 2. Ta có $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{25}{169}$, mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

do đó $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, suy ra $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} = \frac{5}{12}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5}.$$

11.

a) $A = \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 38^\circ + \cos^2 72^\circ = (\cos^2 18^\circ + \cos^2 72^\circ) + (\cos^2 52^\circ + \cos^2 38^\circ)$

$$\Rightarrow A = 1 + 1 = 2$$

b) Nhận xét: Tổng B có 45 số hạng

$$B = \cos^2 89^\circ + \cos^2 87^\circ + \dots + \cos^2 1^\circ \Rightarrow 2B = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ)$$

$$= 45 \Rightarrow B = \frac{45}{2}$$

c) Tổng C có $(80 - 5) : 5 + 1 = 17$ thừa số

$$C = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \dots \cdot \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ \Rightarrow C^2 = (\tan 5^\circ \cdot \cot 5^\circ) \cdot \dots \cdot (\tan 85^\circ \cdot \cot 85^\circ)$$

$$\Rightarrow C^2 = 1 \Rightarrow C = 1.$$

12.

a) Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot \alpha = 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

b) $0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 0 < \cos \alpha < 1; \tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

Do $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$



13.

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , gọi $\hat{C} = \alpha$. Cạnh huyền BC là cạnh lớn nhất.

Ta có $\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$; $\tan \alpha = \frac{AB}{AC}$. Vì $BC > AC$ nên $\frac{AB}{BC} < \frac{AB}{AC}$, suy ra $\sin \alpha < \tan \alpha$.

b) Ta biến đổi vế trái

$$T = \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

Ta thấy vế trái bằng vế phải.

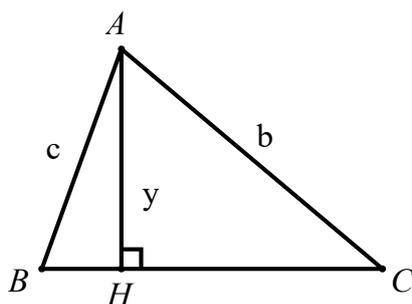
14.

Xét vế trái

$$\begin{aligned} T &= \frac{(1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)(1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \end{aligned}$$

Ta thấy vế trái đúng bằng vế phải.

15.



Ta có $S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = h^2 \Rightarrow BC = 2h$

Lại có $\cot B = \frac{BH}{AH}$; $\cot C = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \cot B + \cot C = \frac{BH}{AH} + \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{h} = \frac{2h}{h} = 2$ (đpcm).

16.



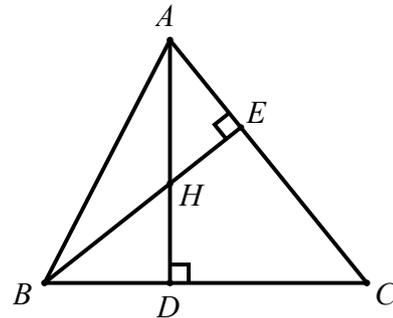


Ta có: $\tan B = \frac{AD}{BD}$; $\tan C = \frac{AD}{CD}$.

Suy ra $\tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD}$ (1)

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với \widehat{ACB});

$\widehat{HDB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$.



Do đó $\triangle BDH \sim \triangle ADC$ (g.g), suy ra $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, do đó $BD \cdot DC = DH \cdot AD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{DH \cdot AD} = \frac{AD}{DH}$ (3).

Theo giả thiết $\frac{HD}{AH} = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{HD}{AH + HD} = \frac{1}{2 + 1}$ hay $\frac{HD}{AD} = \frac{1}{3}$, suy ra $AD = 3HD$.

Thay vào (3) ta được: $\tan B \cdot \tan C = \frac{3HD}{DH} = 3$.

Dạng 4: Tính giá trị biểu thức lượng giác của các góc đặc biệt.

17.

a) $M = 4 \cos^2 45^\circ + \sqrt{3} \cot 30^\circ - 16 \cos^3 60^\circ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 + 3 - 2 = 3$.

b) $N = \frac{2 \sin 30^\circ - \sin 60^\circ}{\cos^2 30^\circ - \cos 60^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = 4 - 2\sqrt{3}$.

18.

$A = \cos^2 \alpha - \tan 60^\circ + \cot 45^\circ - 2 \sin 30^\circ + \cos^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha$
 $= \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha - \sqrt{3} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) - \sqrt{3} + 1 - 1$



$$= \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3}$$

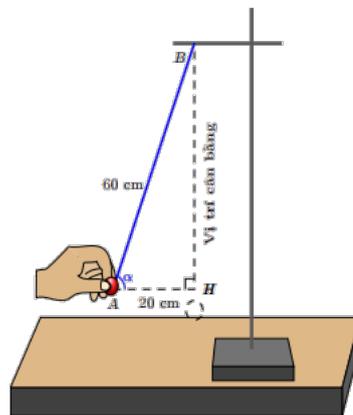
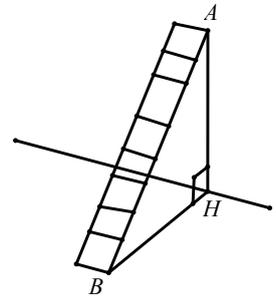
Dạng 5: Sử dụng máy tính cầm tay tính tỉ số lượng giác của một góc nhọn.

19. Ta có, góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất là \widehat{ABH}

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có $\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{1,5}{4} = 0,375$

Vậy $\widehat{ABH} \approx 68^\circ$.

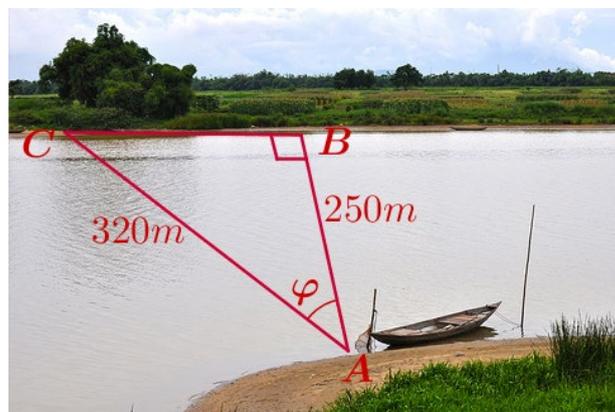
20.



Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có $\sin \alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$. Do đó $\alpha \approx 19^\circ$

Vậy góc tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng có số đo khoảng 19° .

21.



Ta ký hiệu các điểm đường như hình vẽ. Trong đó : $AB = 250\text{m}$ là chiều rộng của khúc sông.

$AC = 320\text{m}$ là chiều dài mà chiếc đò bơi đến bờ bên kia và $\widehat{BAC} = \varphi$ là góc lệch của con đò khi bị dòng nước đẩy.

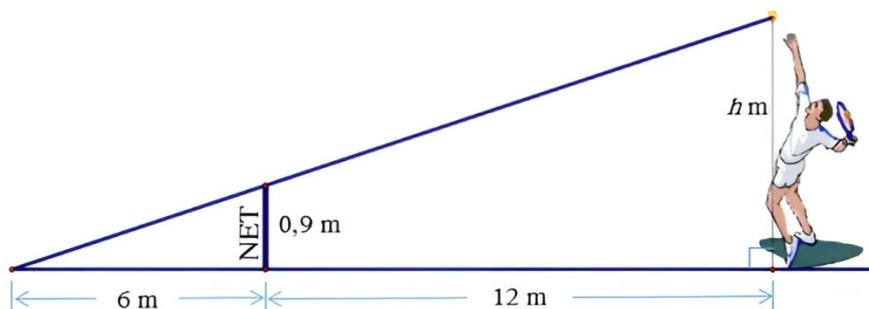


AB vuông góc với BC . Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$$\cos BAC = \cos \varphi = \frac{AB}{AC} = \frac{25}{32} \Rightarrow \varphi \approx 38,62^\circ$$

Vậy chiếc đồ bị dòng nước đẩy lệch một góc là: $\varphi = 38,62^\circ$.

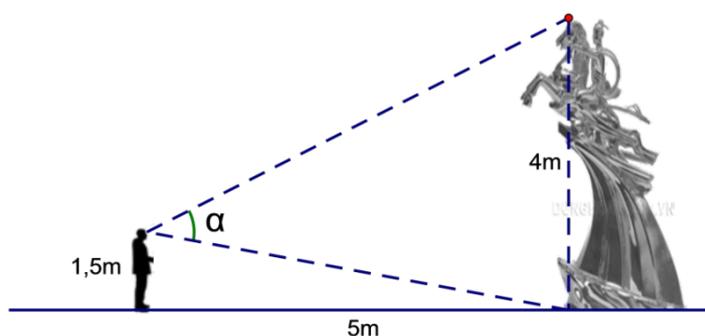
22.



a) Trong tam giác vuông ABC ta có: $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{0,9}{6} = 0,15 \Rightarrow \widehat{BAC} = 8,5^\circ$.

b) Khi giao banh để banh không chạm lưới $\widehat{BAC} > 8,5^\circ \Leftrightarrow \frac{DE}{AE} > 0,15 \Leftrightarrow \frac{h}{18} > 0,15$

$$\Leftrightarrow h > 18 \cdot 0,15 = 2,7 \text{ (m)}.$$





BÀI 12:
MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

Dạng 1. Giải tam giác vuông

1.

a) Theo định lí Pythagore ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} \approx 9,43$

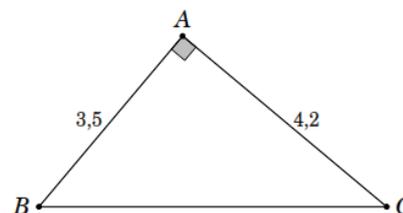
Mặt khác $\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8} = 0,625$.

Dùng máy tính bỏ túi, ta tìm được $\widehat{C} \approx 32^\circ$. Do đó $\widehat{B} \approx 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

b) Ta có $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{4,2}{3,5} = \frac{6}{5}$

Suy ra $\widehat{B} \approx 50^\circ 12'$ mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$

nên $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 50^\circ 12' = 39^\circ 48'$.



Mặt khác, theo định lí Pythagore ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3,5^2 + 4,2^2} \approx 5,5$.

2.

Do giả thiết ta có $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3,0}{4,5} \approx \sin 41^\circ 49'$ suy ra $\widehat{C} = 41^\circ 49'$.

Mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ nên $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 41^\circ 49' = 48^\circ 11'$.

Mặt khác theo định lí Pythagore $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$ suy ra $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4,5^2 - 3,0^2} \approx 3,4$.

3.

Ta có $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Mặt khác $AC = AB \cdot \tan B = 3,7 \cdot \tan 50^\circ \approx 4,4$.

Tương tự $BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{3,7}{\cos 50^\circ} \approx 5,8$.

4.

Ta có $\widehat{C} = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$. Mặt khác $AB = BC \cdot \cos B = 4,5 \cdot \cos 57^\circ \approx 2,5$

và $AC = BC \cdot \sin B = 4,5 \cdot \sin 57^\circ \approx 3,8$.

5.

Ta có $\widehat{Q} = 90^\circ - \widehat{P} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.



Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$OP = PQ \cdot \sin Q = 7 \cdot \sin 54^\circ \approx 5,663 \text{ và } OQ = PQ \cdot \sin P = 7 \cdot \sin 36^\circ \approx 4,114$$

6.

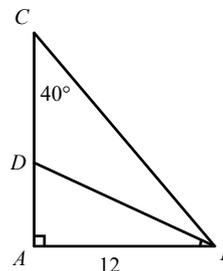
$$\text{Ta có } \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan 40^\circ} = \frac{12}{\tan 40^\circ} \approx 14,3 \text{ cm,}$$

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin 40^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \approx 18,7 \text{ cm}$$

$$\text{Ta có } \widehat{ABC} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

Vì BD là phân giác góc \widehat{ABC} nên $\widehat{ABD} = 25^\circ$.

$$\text{Do đó } \cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB}{\cos 25^\circ} = \frac{12}{\cos 25^\circ} \approx 13,2 \text{ cm.}$$

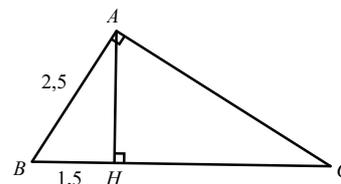


7. Xét tam giác ABH vuông tại H ta có

$$\cos \widehat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{1,5}{2,5} \approx \cos 53^\circ 8' \text{ suy ra } \widehat{B} \approx 53^\circ 8'$$

Mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông)

$$\text{Suy ra } \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 53^\circ 8' = 36^\circ 52'$$



Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có: $AC = AB \cdot \tan \widehat{B} = 2,5 \tan 53^\circ 8' \approx 3,3$

Dạng 2: Giải tam giác thường

$$8. \text{ Ta có } \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ.$$

Kẻ đường cao AH . Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$AH = AB \cdot \sin B = 2,8 \cdot \sin 65^\circ \approx 2,54 \text{ (cm).}$$

$$\text{Tương tự } BH = AB \cdot \cos B = 2,8 \cdot \cos 65^\circ \approx 1,18 \text{ (cm).}$$

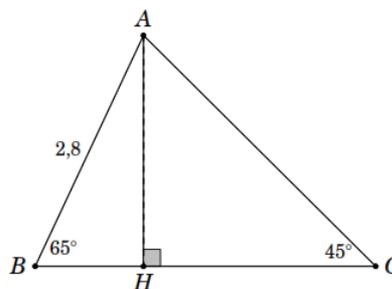
Mặt khác, do giả thiết suy ra $\triangle HAC$ vuông cân tại H nên

$$HA = HC. \text{ Do đó } BC \approx 2,54 + 1,18 = 3,7 \text{ (cm).}$$

$$\text{Xét } \triangle AHC \text{ vuông tại } H, \text{ ta có } AC = \frac{HA}{\sin C} \approx \frac{2,54}{\sin 45^\circ} \approx 3,6 \text{ (cm).}$$

9.

$$\text{Ta có } \tan 38^\circ = \frac{AN}{BN} \Rightarrow BN = \frac{AN}{\tan 38^\circ}. \text{ Tương tự } NC = \frac{AN}{\tan 30^\circ}.$$

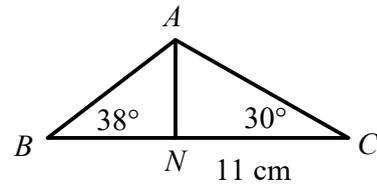




ta có: $BC = BN + NC \Leftrightarrow 11 = \frac{AN}{\tan 38^\circ} + \frac{AN}{\tan 30^\circ}$

$$\Leftrightarrow 11 = AN \cdot \left(\frac{1}{\tan 38^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ} \right)$$

$$\Rightarrow AN = \frac{11}{\frac{1}{\tan 38^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ}} \approx 3,65$$



10.

Tam giác BHC vuông tại H : $\sin \widehat{HBC} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH = BC \cdot \sin \widehat{HBC} = 6 \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$

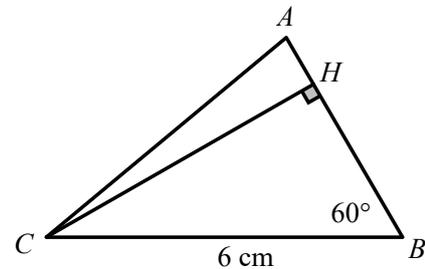
Mà $\widehat{CAB} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$

Tam giác AHC vuông tại H :

$$\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx 5,28 \text{ cm}$$

a) Ta có $\tan \widehat{CAH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan 80^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\tan 80^\circ}$

Do vậy $\tan \widehat{HBC} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow HB = \frac{CH}{\tan 60^\circ} = 3 \text{ cm}$.



Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot (AH + HB) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{\tan 80^\circ} + 3 \right) \approx 10,17 \text{ cm}^2$

11.

Ta có $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ$.

Kẻ đường cao BH . Xét $\triangle BCH$ vuông tại H , ta có

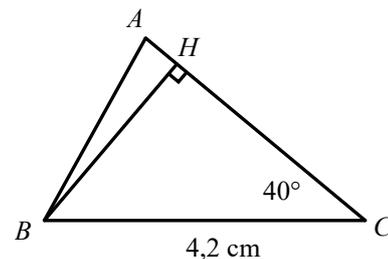
$$BH = BC \cdot \sin C = 4,2 \cdot \sin 40^\circ \approx 2,70 \text{ (cm)}$$

Tương tự, xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{2,70}{\sin 75^\circ} \approx 2,8 \text{ (cm)}$$

Mặt khác, ta có:

$$AC = AH + CH = BH \cdot (\cot A + \cot C) \approx 2,70 \cdot (\cot 75^\circ + \cot 40^\circ) \approx 3,9 \text{ (cm)}$$



12.



Vẽ $AH \perp BC$. Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có

$$AH = AB \cdot \sin B = 2,1 \cdot \sin 70^\circ \approx 1,97.$$

Tương tự, xét $BH = AB \cdot \cos B = 2,1 \cdot \cos 70^\circ \approx 0,72$.

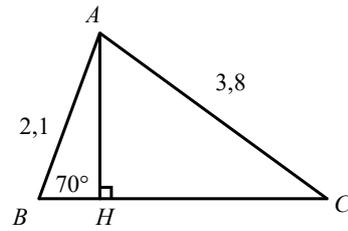
Mặt khác, xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \approx \frac{1,97}{3,8} \approx \sin 31^\circ 14' \text{ do đó } \widehat{C} \approx 31^\circ 14'.$$

$$\text{Mà } \widehat{A} = 180^\circ - (70^\circ + 31^\circ 14') = 78^\circ 46'.$$

Ta có $HC = AC \cdot \cos C \approx 3,80 \cdot \cos 31^\circ 14' \approx 3,25$.

$$\text{Mà } BC = BH + HC = 0,72 + 3,25 = 3,97.$$



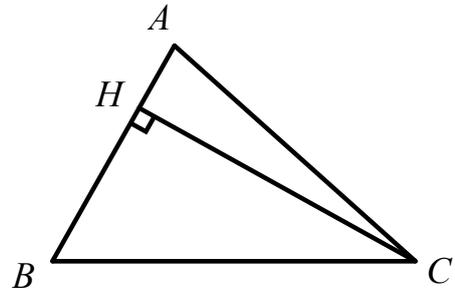
Dạng 3: Chứng minh một số đẳng thức, chứng minh hình học.

13.

Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$)

$$\text{Xét } \triangle AHC \text{ có } \widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow \sin A = \frac{CH}{AC} \quad (1)$$

$$\text{Xét } \triangle BHC \text{ có } \widehat{BHC} = 90^\circ \Rightarrow \sin B = \frac{CH}{BC} \quad (2)$$

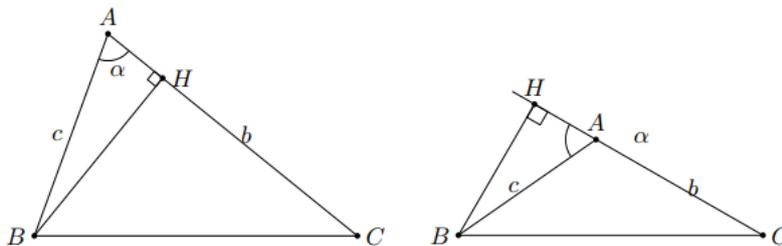


$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\frac{CH}{AC}}{\frac{CH}{BC}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad (3)$$

$$\text{Chứng minh tương tự} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ (đpcm)}$$

14.



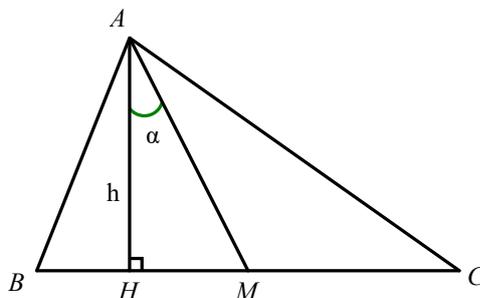


Vẽ đường cao BH của tam giác ABC .

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có $BH = AB \cdot \sin A$

Do đó diện tích S của tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \alpha$

15.



a) Xét vuông tại H có $AH = h$; $\widehat{HAM} = \alpha$

Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có

$$HM = AH \cdot \tan \widehat{HAM} = h \cdot \tan \alpha \quad (1)$$

Ta có $HC - HB = (HM + MC) - (MB - MH)$

$$= HM + MC - MB + MH = 2HM \quad (\text{vì } MB = MC) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HC - HB = 2h \cdot \tan \alpha$ (*)

b) Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông $\triangle AHC$ vuông tại H ta có

$$HC = AH \cdot \cot C = h \cdot \cot C \quad (3)$$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H

Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông ta có: $HB = AH \cdot \cot B = h \cdot \cot B$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow HC - HB = h \cdot \cot C - h \cdot \cot B = h \cdot (\cot C - \cot B)$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\cot C - \cot B}{2}$ (đpcm).

Dạng 4: Các bài toán thực tế

16.





Tam giác ABC vuông tại A , ta có $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3,5} \approx 1,71$. Suy ra $\widehat{BCA} = 59^\circ 73'$.

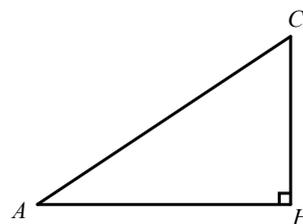
17.

Đặt độ dốc là $\widehat{CAH} = 28^\circ$; độ cao là $CH = 2,1\text{m}$; chiều dài mặt cầu trượt là cạnh AC .

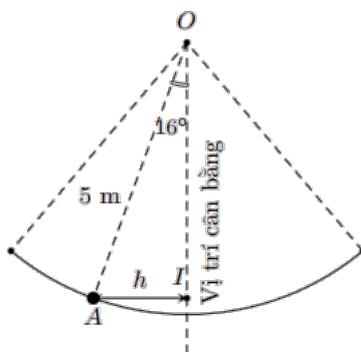
Ta cần tính độ dài cạnh AC .

Tam giác AHC vuông tại H , ta có

$$\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 28^\circ} = \frac{2,1}{\sin 28^\circ} \approx 6,8\text{m}.$$

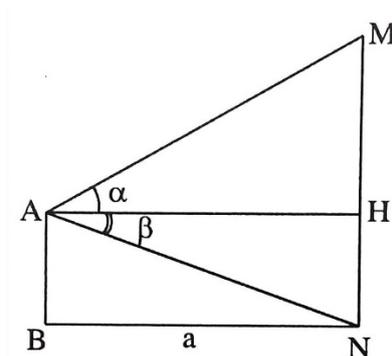


18.



Vì tam giác AOI vuông tại I nên $AI = OA \cdot \sin \widehat{AOI} = 5 \cdot \sin 16^\circ \approx 1,38(m)$

19.

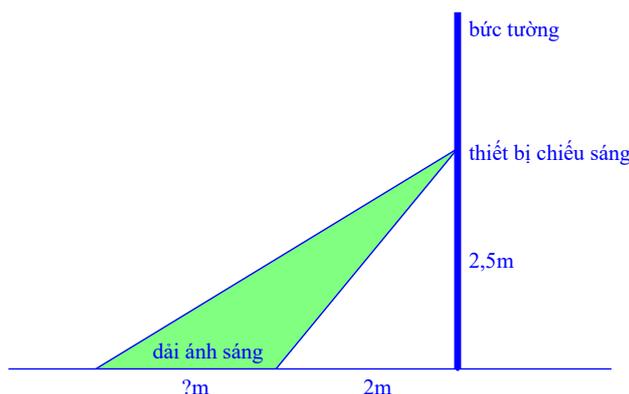


Xét tam giác MAH vuông tại H có $HM = AH \tan \alpha$.

Xét tam giác NAH vuông tại H có $HN = AH \tan \beta$.

Do đó $MN = MH + HN = AH(\tan \alpha + \tan \beta) = 120 \cdot (\tan 30^\circ + \tan 20^\circ) \approx 113\text{m}$.

20.



Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , ta có: $\tan BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{2,5} = 0,8$ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

$$\Rightarrow \widehat{BAC} \approx 38,7^\circ$$

Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 38,7^\circ + 20^\circ = 58,7^\circ$

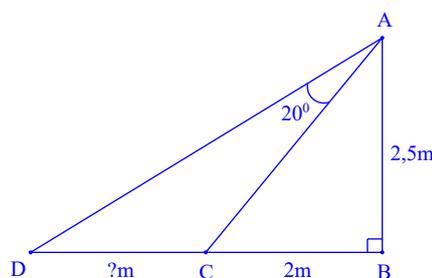
Xét $\triangle ABD$ vuông tại B , ta có:

$$\tan BAD = \frac{BD}{AB} \quad (\text{tỉ số lượng giác của góc nhọn})$$

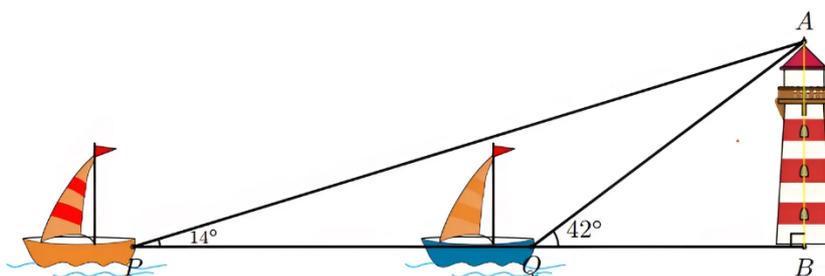
$$\Rightarrow BD = AB \cdot \tan BAD = 2,5 \cdot \tan 58,7^\circ \approx 4,1$$

$$\Rightarrow CD = BD - BC = 4,1 - 2 = 2,1$$

Vậy độ dài vùng được chiếu sáng trên mặt đất là 2,1 m



21.



a) Xét tam giác BQA vuông tại B , ta có $\tan Q = \frac{AB}{QB}$ nên $BQ = \frac{AB}{\tan 42^\circ} = \frac{h}{\tan 42^\circ}$

Xét tam giác BPA vuông tại B ta có $\tan \widehat{P} = \frac{AB}{PB}$ nên $PB = \frac{AB}{\tan 14^\circ} = \frac{h}{\tan 14^\circ}$

b) Ta có $BP - BQ = 300$ suy ra $\frac{h}{\tan 42^\circ} - \frac{h}{\tan 14^\circ} = 300$



$$h = \frac{300}{\frac{1}{\tan 14^\circ} - \frac{1}{\tan 42^\circ}} \approx 103,4(m)$$

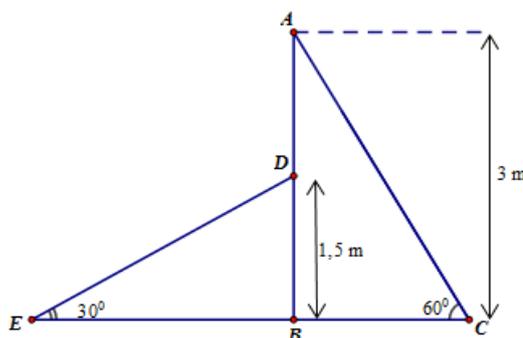
Vậy chiều cao của tháp hải đăng là khoảng 103,4(m)

22. Chiều dài máng tuột cho trẻ dưới 5 tuổi và trên 5 tuổi lần lượt là DE, AC .

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$$AB = AC \cdot \sin C \Rightarrow AC = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} \approx 3,464(m)$$



Cách 1: Xét $\triangle BDE$ vuông tại B có: $DB = DE \cdot \sin E \Rightarrow DE = \frac{DB}{\sin E} \Rightarrow DE = \frac{1,5}{\frac{1}{2}} = 3(m)$.

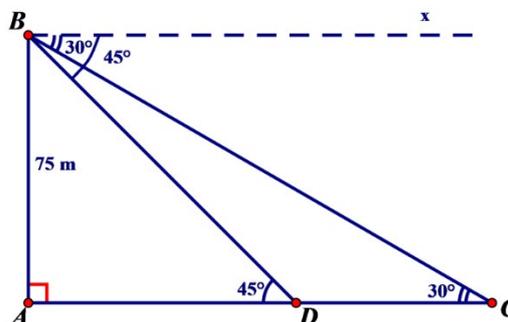
Cách 2: Xét $\triangle BDE$ vuông tại B có: $\widehat{E} = 30^\circ$, BD là cạnh đối diện với \widehat{E} .

Nên $DE = 2 \cdot BD = 2 \cdot 1,5 = 3(m)$. Vậy chiều dài máng tuột cho trẻ dưới 5 tuổi là 3m, chiều dài máng tuột cho trẻ trên 5 tuổi là 3,464m.

23.

Gọi chiều cao của ngọn hải đăng là $AB(m) \Rightarrow AB = 75(m)$.

Vị trí chiếc thuyền hướng về phía ngọn hải đăng mà từ trên ngọn hải đăng quan sát với góc hạ lần lượt là 30° và 45° lần lượt là C, D .



Vì $Bx \parallel AD$ nên: $\begin{cases} \widehat{xBD} = \widehat{BDA} = 45^\circ \\ \widehat{xBC} = \widehat{BCA} = 30^\circ \end{cases}$ (Hai góc so le trong)



Xét $\triangle ABD$ vuông tại A có: $\widehat{BCA} = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A .

$$\Rightarrow AB = AD = 75(\text{m}).$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có: $AC = AB \cdot \cot 30^\circ \Rightarrow AC = 75 \cdot \sqrt{3} \approx 129,9038(\text{m})$.

$$DC = AC - AD \Rightarrow DC \approx 129,9038 - 75 \approx 54,9038(\text{m}).$$

Vậy thuyền đi được 54,9038 mét giữa hai lần quan sát.



BÀI 13:
MỞ ĐẦU VỀ ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 1. Xác định đường tròn, tính bán kính đường tròn.

1.

Gọi M là trung điểm của BC .

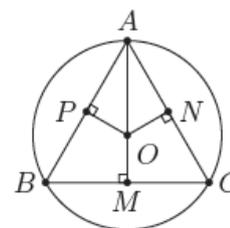
Ta có AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \frac{BC}{2}$.

Suy ra $MA = MB = MC = \frac{BC}{2}$. Vậy đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC có tâm là điểm M và bán kính $R = \frac{BC}{2}$.

2.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

Dựng các đường trung trực của các cạnh AB, BC, AC , các đường trung trực này đồng quy tại O , suy ra O là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC . Bán kính của (O) là $R = OA = OB = OC$.



Vì tam giác ABC là tam giác đều nên các đường trung trực này cũng là đường trung tuyến của tam giác ABC . Suy ra O cũng là trọng tâm của tam giác ABC .

Trong tam giác ABM vuông tại M ta có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $OA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

3.



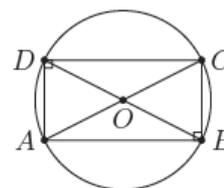
Gọi O là giao điểm AC và BD .

Khi đó O là trung điểm của AC, BD .

Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$.

Do đó $OA = OB = OC = OD$ hay bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc

một đường tròn (O) , bán kính $R = OA = \frac{AC}{2}$.



Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Suy ra

$$R = \frac{AC}{2} = 6,5 \text{ cm}.$$

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) bán kính $R = 6,5 \text{ cm}$

4.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Do $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AB, CD nên MN là đường trung trực của AB, CD .

Gọi P là trung điểm của BC . Qua P dựng đường trung trực của BC cắt MN tại O . Ta cần chứng minh $OA = OB = OC = OD$.

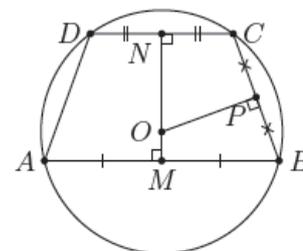
Thật vậy, vì O nằm trên đường trung trực của AB nên $OA = OB$.

Mà MN cũng là trung trực của CD nên $OC = OD$.

Hơn nữa, O nằm trên đường trung trực của BC nên $OB = OC$. Từ đó suy ra

$$OA = OB = OC = OD.$$

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) bán kính $R = OA$.



5.

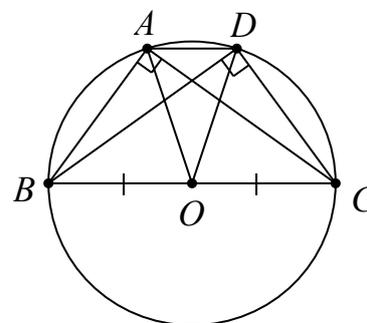
Vì $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AD, BC nên

$$AB = CD = 12 \text{ cm} \text{ và } BD = AC = 16 \text{ cm}.$$

Gọi O là trung điểm của BC .

Xét tam giác ABC có:

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400 \\ BC^2 = 20^2 = 400 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A$$



Do tam giác ABC vuông tại A nên ba đỉnh của tam giác ABC cùng thuộc đường tròn (O) .



Tương tự ta cũng có tam giác BCD vuông tại D nên ba đỉnh của tam giác BCD cùng thuộc đường tròn (O) .

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) có bán kính $R = \frac{BC}{2} = 10 \text{ cm}$.

6.

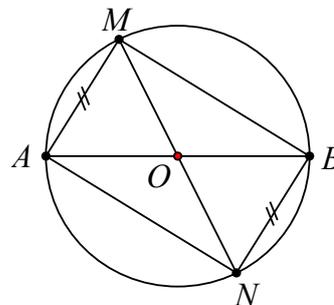
Vì M, N thuộc (O) đường tròn đường kính AB nên tam giác ABM, ABN là các tam giác vuông lần lượt tại M, N .

$\triangle ABM$ vuông tại M và $\triangle ABN$ vuông tại N có cạnh huyền AB chung và $AM = BN$ nên $\triangle ABM = \triangle ABN$, suy ra $BM = AN$.

Tứ giác $AMBN$ có $AM = BN$ và $BM = AN$ nên $AMBN$ là hình bình hành.

Lại có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

Do đó MN là đường kính của đường tròn (O) .



7.

a) Gọi O là trung điểm của AC .

Vì tam giác ABC vuông tại B nên ba đỉnh A, B, C cùng thuộc đường tròn (O) .

Vì tam giác ADC vuông tại D nên ba đỉnh A, D, C cùng thuộc đường tròn (O) .

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) có đường kính AC .

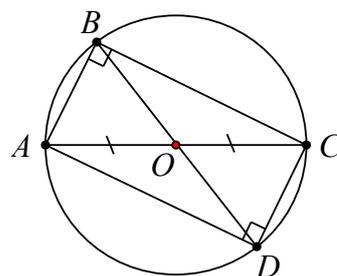
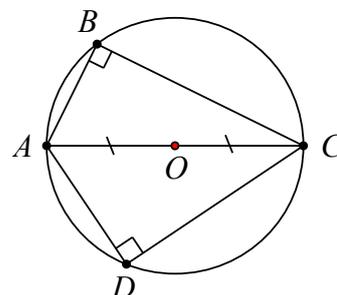
b) Nếu $BD = AC$ thì BD là đường kính của đường tròn (O) , suy ra $\widehat{BAD} = 90^\circ$.

Khi đó tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

8. Gọi I là giao điểm của AC và BD .

Do $AC \perp BD$ nên $\widehat{BIC} = \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = 90^\circ$.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA nên MN, NP, PQ, QM lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC, BCD, CDA, DAB .





Suy ra $MN \parallel AC \parallel PQ$, $MQ \parallel BD \parallel NP$.

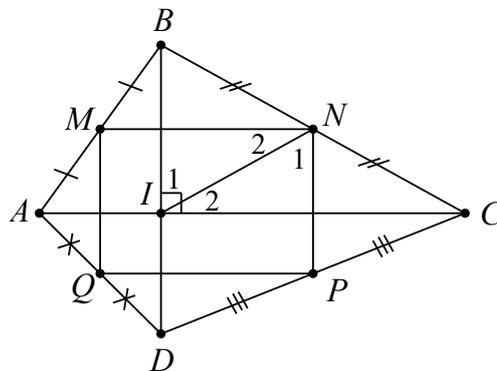
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases} \widehat{I_1} = \widehat{N_1} \\ \widehat{I_2} = \widehat{N_2} \end{cases}$ (góc so le trong của cặp đường thẳng song song)

Khi đó $\widehat{MNP} = \widehat{N_1} + \widehat{N_2} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 90^\circ$.

Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.



9.

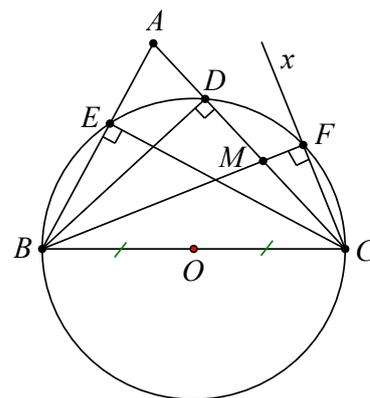
Gọi O là trung điểm BC .

Vì tam giác BCD vuông tại D nên ba điểm B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC .

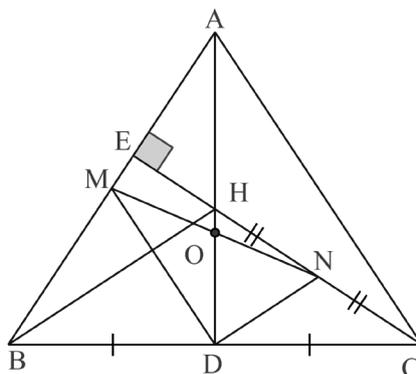
Vì tam giác BCE vuông tại E nên ba điểm B, C, E cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC .

Vì tam giác BCF vuông tại F nên ba điểm B, C, F cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC .

Vậy năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC .



10.





Gọi O là trung điểm của MN .

Ta có $\triangle MEN$ vuông tại E có trung tuyến $EO \Rightarrow OE = OM = ON$

Theo định lí đường trung bình của tam giác $\Rightarrow \begin{cases} DN // BH \\ MD // AC \end{cases} \Rightarrow DN \perp DM$

Tam giác DMN vuông tại D có trung tuyến DO , Tam giác MEN vuông tại E có trung tuyến $EO \Rightarrow OD = OM = ON$ và $OM = ON = OE$. Vậy $OM = ON = OD = OE$

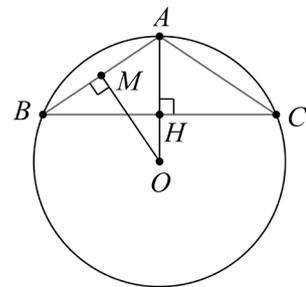
Vậy 4 điểm D, M, E, N cùng nằm trên một đường tròn.

11

Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực của đoạn BC .

Qua trung điểm M của AB kẻ đường trung trực của AB cắt đường thẳng AH tại O . Khi đó O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC .

Bán kính của đường tròn (O) là $R = OA = OB$.



Tam giác BOH vuông tại H nên $BO^2 = BH^2 + OH^2 \Leftrightarrow BO^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + (OA - AH)^2$

$$\Leftrightarrow R^2 = 36 + (R - 4)^2 \quad \Leftrightarrow 8R = 52 \Leftrightarrow R = 6,5.$$

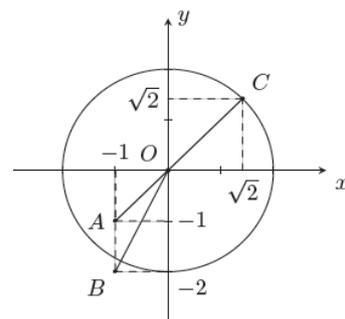
Vậy bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC bằng 6,5 cm.

12.

OA là cạnh huyền trong tam giác vuông cân cạnh bằng 1 nên $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} < 2$, suy ra A nằm bên trong $(O; 2)$.

OB là cạnh huyền trong tam giác vuông có hai cạnh là 1 ; 2 nên $OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} > 2$, suy ra B nằm bên ngoài $(O; 2)$.

OC là cạnh huyền trong tam giác vuông cân cạnh bằng $\sqrt{2}$ nên $OC = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$, suy ra C nằm trên $(O; 2)$.



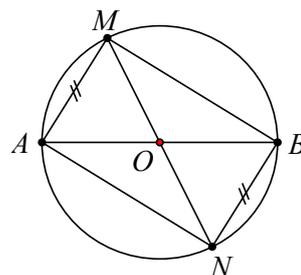
Dạng 2. Tính đối xứng của đường tròn



13.

Vì M, N thuộc (O) đường tròn đường kính AB nên tam giác ABM, ABN là các tam giác vuông lần lượt tại M, N .

$\triangle ABM$ vuông tại M và $\triangle ABN$ vuông tại N có cạnh huyền AB chung và $AM = BN$ nên $\triangle ABM = \triangle ABN$, suy ra $BM = AN$.



Tứ giác $AMBN$ có $AM = BN$ và $BM = AN$ nên $AMBN$ là hình bình hành.

Lại có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

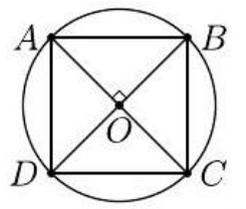
Do đó MN là đường kính của đường tròn (O) hay MN đối xứng nhau qua O .

14.

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và DB là đường kính của đường tròn (O) nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

Lại có $AC \perp BD$.

Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau nên $ABCD$ là hình vuông.

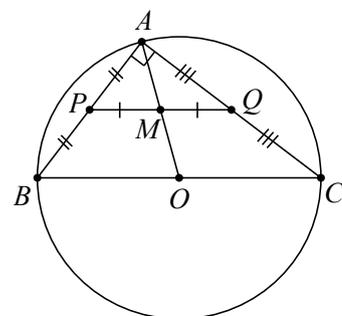


15.

a) Khi A không trùng với các điểm B, C thì PQ là đường trung bình của tam giác ABC . Do đó $PQ = \frac{BC}{2} = R$ (không đổi).

Khi $A \equiv B$ thì $P \equiv B$ và $Q \equiv O$ nên $PQ = OB = R$ (không đổi).

Khi $A \equiv C$ thì $Q \equiv C$ và $P \equiv O$ nên $PQ = OC = R$ (không đổi).



Vậy PQ có độ dài không đổi (luôn bằng R) khi A di động trên (O) .

b) Vì O, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC nên OP, OQ là các đường trung bình của tam giác ABC , suy ra $OP \parallel AQ, OQ \parallel AP$.

Do đó tứ giác $APOQ$ là hình bình hành, nên AO, PQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra M là trung điểm của AO . Khi đó $OM = \frac{AO}{2} = \frac{R}{2}$ (không đổi).

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn $\left(O; \frac{R}{2}\right)$.



BÀI 14:
CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 1. Tính độ dài dây, khoảng cách từ tâm đến dây.

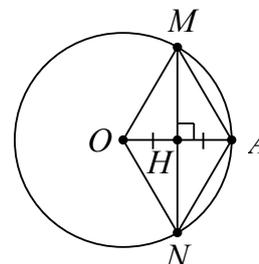
1.

a) Gọi H là trung điểm của OA . Vì $MN \perp OA$ tại H nên H cũng là trung điểm của MN , do đó $OMAN$ là hình thoi.

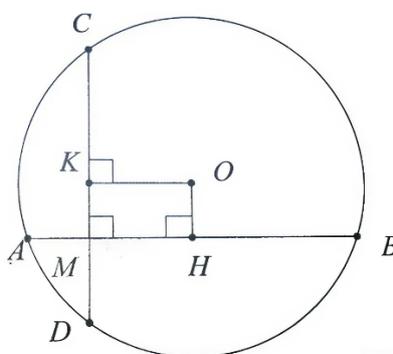
b) Xét $\triangle OHM$ vuông tại H có $OH = 5$ và $OM = 10$ do đó

$$HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MN = 2MH = 10\sqrt{3}$$



2.



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của O trên AB và CD

$$\text{Ta có: } \begin{cases} OH \perp AB \Rightarrow HA = HB = 9\text{cm} \\ OK \perp CD \Rightarrow KD = KC = 7\text{cm} \end{cases}$$

$$\text{Mà: } KC = KM + MC \Rightarrow KM = KC - MC = 7 - 4 = 3\text{cm} \Rightarrow OH = MK = 3\text{cm}$$

$$\text{Xét } \triangle OHB \Rightarrow OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow OB = OD = 3\sqrt{10}\text{(cm)}$$

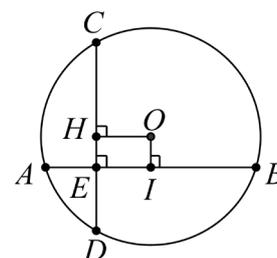
$$\text{Xét } \triangle OKD \Rightarrow OD^2 = OK^2 + DK^2 \Rightarrow OK = \sqrt{41}\text{(cm)}$$

3.

$$\text{Ta có } AB = AE + EB = 2 + 6 = 8 \text{ (cm)},$$

$$CD = CE + ED = 4 + 3 = 7 \text{ (cm)}$$

Kẻ $OI \perp AB$ tại I và $OH \perp CD$ tại H . Khi đó I, H lần lượt là trung điểm của AB, CD .





Do vậy $IA = IB = \frac{AB}{2} = 4$ (cm) và $HC = HD = \frac{CD}{2} = \frac{7}{2}$ (cm).

Ta có $OI = HE = CE - CH = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$ (cm)

Do đó $OB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{65}}{2} \Rightarrow 2R = \sqrt{65}$ cm.

4.

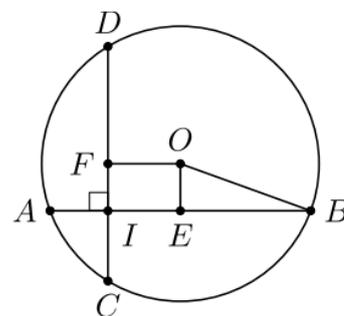
a) Kẻ $OE \perp AB$ tại E . Khi đó E là trung điểm của AB , do vậy

$$EA = EB = \frac{AB}{2} = 4$$

Ta có $OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ cm.

b) Kẻ $OF \perp CD$ tại $F \Rightarrow F$ là trung điểm của CD .

$$\text{Do vậy } FC = FD = \frac{CD}{2}.$$



Ta có $IE = AE - AI = 4 - 1 = 3$ cm, suy ra $OEIF$ là hình vuông. Do đó $OF = 3$ cm.

Xét tam giác OFD vuông tại F , ta có $FD = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm.

Do vậy $CD = 2FD = 8$ cm, suy ra $AB = CD$.

5.

a) Gọi H là trung điểm của AB , suy ra $OH \perp AB$.

Khoảng cách từ O đến dây AB là

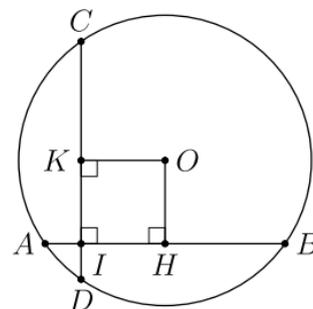
$$OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$
 cm

b) Kẻ $OK \perp CD$ tại K . Suy ra $OKIH$ là hình chữ nhật

$$\text{mà } IH = AH - AI = 3 \text{ cm} \Rightarrow IH = OH.$$

suy ra $OKIH$ là hình vuông $\Rightarrow OK = OH$.

Do đó khoảng cách từ tâm O đến hai dây AB và CD bằng nhau, suy ra $AB = CD$.





6. a) Kẻ $OH \perp BC$ tại H , OH cắt DN tại I . Khi đó H, I lần lượt là trung điểm của BC, DN .

Ta có $HB = HC = \frac{BC}{2} = 2\text{cm}$. Vì $AMIH$ là hình chữ nhật

nên $IM = AH = AB + BH = 1 + 2 = 3\text{cm}$

Do đó $IN = IM - MN = 3 - 2 = 1\text{cm}$

Vậy $DN = 2IN = 2\text{cm}$.

b) Xét tam giác OHB vuông tại H có $OB = \sqrt{OH^2 + 4}$

Xét tam giác OIN vuông tại I có $OI = OH + HI = OH + 1$,

do đó $ON = \sqrt{OI^2 + IN^2} = \sqrt{(OH + 1)^2 + 1}$

Mà $ON = OB \Leftrightarrow \sqrt{OH^2 + 4} = \sqrt{(OH + 1)^2 + 1} \Leftrightarrow OH^2 + 4 = OH^2 + 2OH + 2 \Leftrightarrow OH = 1$

Khi đó $OB = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}\text{cm}$

7.

a) Vì $CD \perp AB$ tại H nên $CH = \frac{CD}{2} = 6\text{cm}$.

Giả sử $HA < HB$. Xét tam giác OCH vuông tại H có

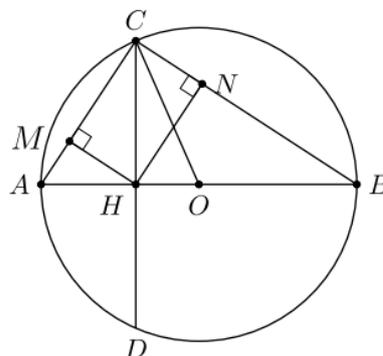
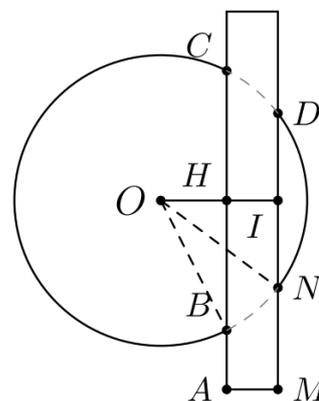
$$OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \sqrt{6.5^2 - 6^2} = 2,5\text{cm}$$

Do đó $HA = 6,5 - 2,5 = 4\text{cm}$ và $HB = 13 - 4 = 9\text{cm}$

b) Vì $\triangle CHN \sim \triangle ABC$ nên

$$\frac{S_{CHN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CH}{AB}\right)^2 = \frac{6^2}{13^2} = \frac{36}{169}$$

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39\text{cm}^2$ nên $S_{CHN} = 39 \cdot \frac{36}{169} = \frac{108}{13}\text{cm}^2 \Rightarrow S_{CMHN} = \frac{216}{13}\text{cm}^2$

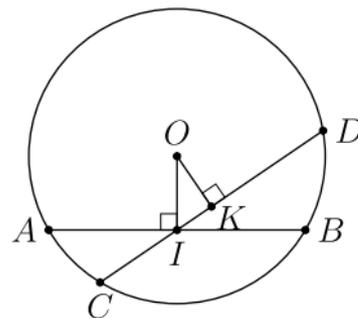




8.

Gọi CD là dây bất kỳ (khác AB) đi qua I . Ta cần chứng minh $AB < CD$

Kẻ $OI \perp CD$ tại K . Tam giác OKI vuông tại K nên $OI > OK$. Trong đường tròn (O) , ta có $OI > OK \Rightarrow AB < CD$



9.

Giả sử EF là một dây cung tùy ý qua M , CD là dây cung đi qua M và vuông góc với OM , AB là đường kính chứa M của đường tròn (O) .

Kẻ $OH \perp EF$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm EF .

a) Ta có $HE = \sqrt{OE^2 - OH^2}$. Vì $EF = 2HE, OE = 5\text{cm}$

nên EF nhỏ nhất khi OH lớn nhất.

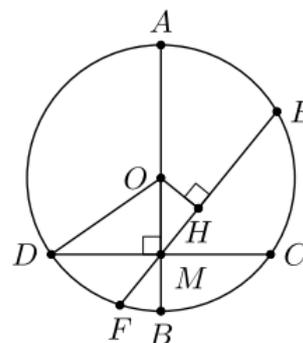
Lại có tam giác OHM vuông tại H nên $OH \leq OM$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $H \equiv M \Leftrightarrow EF \equiv CD$

Ta có $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow CD = 8\text{cm}$.

Vậy EF nhỏ nhất bằng 8cm khi $EF \perp OM$.

b) Vì AB là đường kính đi qua $M \Rightarrow EF \leq AB$. Do vậy EF lớn nhất bằng 10cm khi EF là đường kính đi qua M .



Dạng 2: Tính số đo góc ở tâm, số đo cung

10. Ta sẽ xem mặt đồng hồ như hình tròn nên cung cả đường tròn có số đo là 360° .

a) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 3 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ : 12 \times 3 = 90^\circ$

b) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 5 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ : 12 \times 5 = 150^\circ$

c) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 6 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ : 12 \times 6 = 180^\circ$

d) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 22 giờ hay 10 giờ đêm thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ : 12 \times 10 = 300^\circ$.



11.

Vì $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên số đo cung nhỏ AB là 90° và số đo cung lớn AB là $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

12.

a) Vì $AB = R$ nên $\triangle OAB$ đều hay $\widehat{AOB} = \widehat{OAB} = \widehat{ABO} = 60^\circ$.

b) Do $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên số đo cung lớn AB là $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

13. Vì AC, BD cắt nhau tại O nên $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (hai góc đối đỉnh).

Mà số $\widehat{AD} = \widehat{AOD}$ và số $\widehat{BC} = \widehat{BOC}$ do đó số $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.

Vậy $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ (đpcm).

14.

Xét $\triangle OAB$ ta có: $AB^2 = 2R^2 = OA^2 + OB^2$

Nên tam giác vuông tại O .

Suy ra $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Vậy số đo cung nhỏ AB là số $\widehat{AB} = 90^\circ$.

Và số đo cung nhỏ AB là số \widehat{AB} lớn = $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

15.

Kẻ $OH \perp MN$ tại H .

$\Rightarrow HM = HN$ (định lý về đường kính vuông góc dây cung).

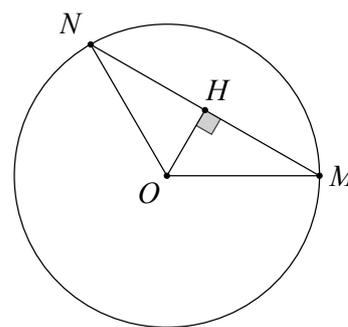
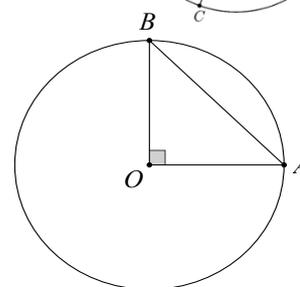
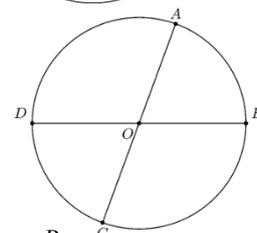
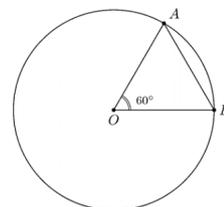
$$\text{Do đó } HM = HN = \frac{MN}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \cos HMO = \frac{MH}{MO} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nên $\widehat{HMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 120^\circ$.

Suy ra số đo cung nhỏ số $\widehat{MN} = \widehat{MON} = 120^\circ$.

Và số đo cung lớn số \widehat{MN} lớn = $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.





16.

ΔOAB đều nên ta có $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

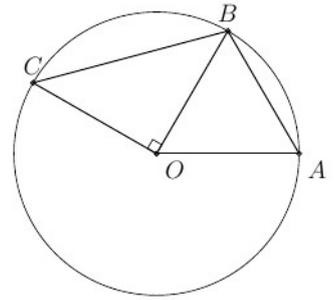
ΔBOC vuông cân tại O nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

Suy ra số đo $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 60^\circ$.

số đo $\widehat{BC} = \widehat{BOC} = 90^\circ$.

$\widehat{ACB} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

số đo $\widehat{AC} = \widehat{ACB} = 150^\circ$.





BÀI 15:
ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

Dạng 1. Tính độ dài cung tròn

1.

$$a) l = \frac{n}{180} \pi R = \frac{60}{180} \pi 3 = \pi \text{ (dm)}$$

$$b) l = \frac{n}{360} \pi d = \frac{40}{360} \pi \cdot 10 = \frac{10}{9} \pi \text{ (dm)}$$

2. Ta có $C = 64\pi \text{ (dm)} \Rightarrow 2\pi R = 64\pi \Leftrightarrow R = \frac{64\pi}{2\pi} = 32 \text{ (dm)}$.

Vậy độ dài cung 90° chia cái bàn tròn là: $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 32 \cdot 90}{180} = 16\pi \approx 50,3 \text{ (dm)}$.

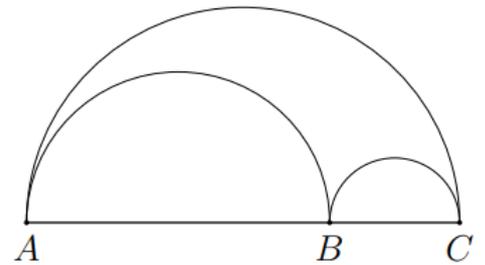
3.

Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là độ dài của các nửa đường tròn đường kính AC, AB và BC. Khi đó

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AC = \frac{\pi}{2} AC$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AB = \frac{\pi}{2} AB$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot BC = \frac{\pi}{2} BC.$$



Xét $C_2 + C_3 = \frac{\pi}{2} AB + \frac{\pi}{2} BC = \frac{\pi}{2} (AB + BC) = \frac{\pi}{2} AC = C_1$.

Vậy $C_1 = C_2 + C_3$ (điều phải chứng minh).

Dạng 2. Một số bài toán tổng hợp về độ dài cung tròn

4.

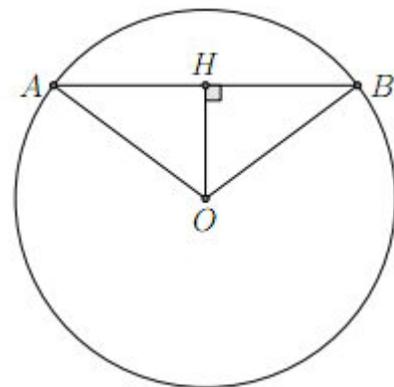
a) Kẻ $OH \perp AB$. Khi đó $HA = HB$ (tính chất đường kính và dây cung).

$$\Rightarrow HB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5 \text{ (cm)}$$

Trong tam giác vuông OHB , ta có

$$+ \sin B = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ$$

$$+ \cos B = \frac{HB}{OB} \Rightarrow OB = \frac{HB}{\cos B} = \frac{4,5}{\cos 30^\circ} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$





Chu vi đường tròn:

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} \approx 32,65(\text{cm}).$$

b) Ta có $\widehat{B} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BOH} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{BOH} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

sđ $\widehat{AB} = 120^\circ$

Độ dài cung nhỏ AB là $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi 3\sqrt{3} \cdot 120}{180} \approx 10,88(\text{cm}).$

5.

a) Ta có $AB \perp CD$ tại M (giả thiết) nên

$MC = MD = CD : 2 = \sqrt{3}(\text{cm})$ (tính chất đường kính và dây cung).

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Do đó, ΔACB vuông tại C có đường cao $CM(CD \perp AB$ tại M). Theo hệ thức liên hệ giữa đường cao trong tam giác vuông ACB ta có

$$MC^2 = MA \cdot MB \Rightarrow MB = \frac{MC^2}{MA} = \frac{(\sqrt{3})^2}{1} = 3$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}(AM + MB) = 2(\text{cm}).$$

Độ dài đường tròn: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12,57(\text{cm}).$

b) Ta có $AM = 1\text{cm}, OA = 2\text{cm} \Rightarrow MA = MO = 1\text{cm}.$

Xét tứ giác $OCAD$ có

$$\begin{cases} MC = MD \\ MA = MO \\ CD \perp OA \end{cases} \Rightarrow OCAD \text{ là hình thoi.}$$

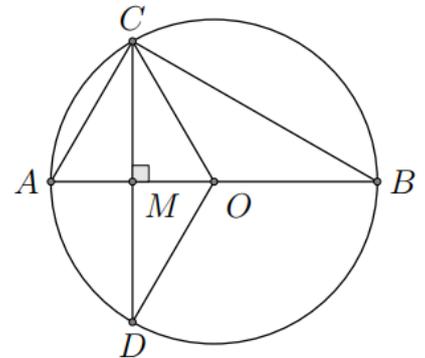
$\Rightarrow CA = CO = OA$ (cùng bằng 2cm) nên ΔOAC đều $\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 120^\circ$

Độ dài của \widehat{CAD} là: $l_{\widehat{CAD}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 120}{180} = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19(\text{cm})$

Dạng 3. Tính diện tích hình quạt tròn

6.

a) Diện tích hình quạt tròn là: $S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot n}{360} = 6\pi(\text{cm}^2)$





b) Diện tích hình quạt tròn là: $S_q = \frac{l \cdot R}{2} = \frac{4\pi \cdot 5}{2} = 10\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

7. $\widehat{BOC} = 120^\circ$ hay số đo $\widehat{BC} = 120^\circ$

Diện tích hình quạt cần tìm: $S_q = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{120}{360} \pi \cdot 3^2 = 3\pi$

8. Diện tích mỗi hình quạt là: $S_q = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 10}{360} \approx 1,40 \text{ (dm}^2\text{)}$

Dạng 3. Tính diện tích hình quạt tròn, hình vành khuyên, hình viên phân.

9.

Diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính 3m và 5m là:

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

10.

Diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính $(O; 10\text{cm})$ và $(O; 20\text{cm})$ là:

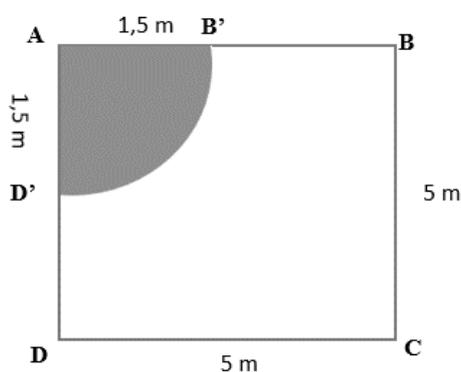
$$S = \pi(20^2 - 10^2) = \pi(20^2 - 10^2) = 300\pi \approx 942,48 \text{ (cm}^2\text{)}$$

11. Diện tích hình viên phân là: $S = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$

12. Diện tích hình viên phân là: $S = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} \approx 1,45 \text{ (cm}^2\text{)}$

Dạng 4: Ứng dụng thực tế

13.

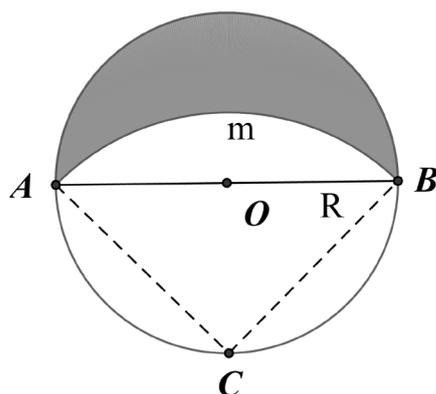


Ta có diện tích cỏ bò ăn được nhiều nhất bằng diện tích hình quạt $AB'D'$:

Diện tích phần còn lại là $S = S_{ABCD} - S_{qAB'D'} = 5^2 - \frac{\pi \cdot 1,5^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 25 - \frac{9}{16} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$.



14.



Ta có $\triangle CAB$ vuông cân tại $C \Rightarrow CA = CB = R\sqrt{2}$.

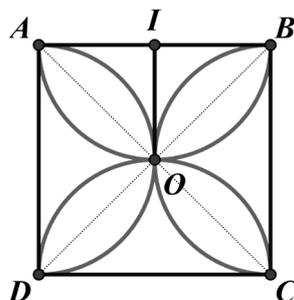
Diện tích hình viên phân AmB bằng

$$S_{AmB} = S_{\text{quạt}CAB} - S_{\triangle CAB} = \frac{\pi CA^2 \cdot 90}{360} - \frac{CA^2}{2} = \frac{\pi (R\sqrt{2})^2}{4} - \frac{(R\sqrt{2})^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2} - R^2$$

Diện tích nửa hình tròn đường kính AB bằng $\frac{\pi R^2}{2}$.

Vậy diện tích phần tô đậm bằng $\frac{\pi R^2}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{2} - R^2 \right) = R^2$.

15.



Ta có diện tích hình vuông là 4 cm^2 nên cạnh hình vuông là 2 cm .

Gọi hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của AB , O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

Ta có diện tích hình quạt IAO là: $S_{\text{quạt}IAO} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} = \pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích tam giác IAO là: $S_{\triangle IAO} = \frac{1}{2} AI \cdot IO = \frac{1}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$



Diện tích hình viên phân tạo bởi dây AO và cung AO là: $S_{vp} = S_{qAIO} - S_{\Delta AIO} = \pi - \frac{1}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích bông hoa 4 cánh là: $S = 8S_{vp} = 8 \cdot \left(\pi - \frac{1}{2} \right) = 8\pi - 4 \text{ (cm}^2\text{)}$.

16.



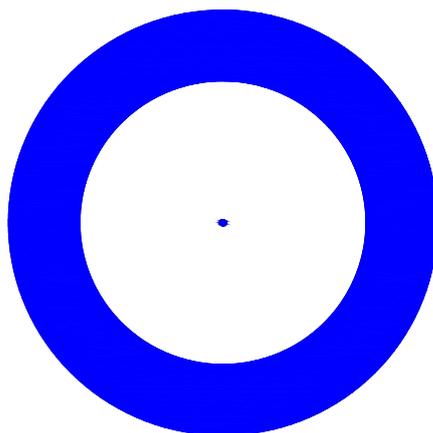
Diện tích phần dán giấy là hiệu giữa diện tích phần quạt với bán kính bằng 30cm với diện tích phần quạt với bán kính 10cm cùng có góc ở tâm là 150°

Diện tích giấy tối thiểu dùng để dán một mặt quạt là:

$$S = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 150}{360} - \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 150}{360} = \frac{1000\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

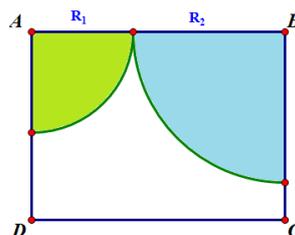
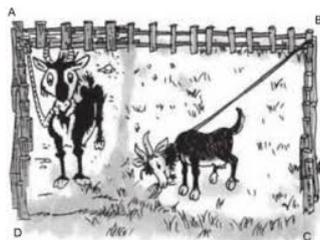
Diện tích giấy tối thiểu dùng để dán quạt là: $2S = \frac{2000\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

17.



Diện tích cần trồng hoa là : $S = \pi(R^2 - r^2) = (100 - 64)\pi = 36\pi \text{ (m}^2\text{)}$

18.



Diện tích cỏ hai con dê có thể ăn là dạng hai hình quạt có số đo cung cùng bằng 90° .

Trường hợp 1: Mỗi dây thừng dài 20 m $\Rightarrow R_1 = R_2 = 20$ m.

Diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi R_1^2 \cdot 90}{360} + \frac{\pi R_2^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 90}{360} + \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 90}{360} = 200\pi (\text{m}^2).$$

Trường hợp 2: Giả sử dây thừng cột dê ở A dài 30 m, dây thừng cột dê ở B dài 10 m.

$$\Rightarrow R_1 = 30 \text{ m}, R_2 = 10 \text{ m}.$$

Diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi R_1^2 \cdot 90}{360} + \frac{\pi R_2^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 90}{360} + \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360} = 250\pi (\text{m}^2).$$

Vậy dùng hai sợi dây 30 m và 10 m thì diện tích cỏ hai con dê ăn sẽ nhiều hơn.



BÀI 16:

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

BÀI TẬP

Dạng 1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

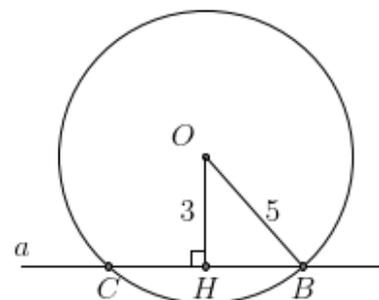
1. a) Vì $\begin{cases} R = 5 \\ d = 3 \end{cases}$, nên $R > d$, do đó a cắt (O) tại hai điểm

phân biệt B và C .

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống a .

Suy ra $OH = 3\text{cm}$ và H là trung điểm của BC .

Do đó $BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 = 8$. Vậy $BC = 8\text{cm}$.



2.

Dựng $BH \perp CD \Rightarrow ABHD$ là hình chữ nhật. Suy ra

$$AD^2 = BH^2 = BC^2 - CH^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AD = 12$$

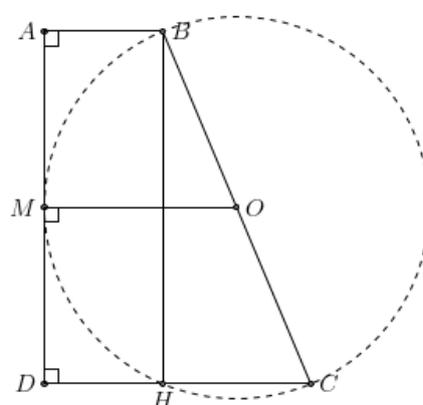
Gọi O và M lần lượt là trung điểm BC và AD .

Ta được $MO \perp AD$ và $MO = \frac{AB + CD}{2} = \frac{13}{2} = \frac{BC}{2}$.

Do đó, AD là đường thẳng vuông góc với bán kính

của đường tròn (O) tại tiếp điểm M . Nên AD là

tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC .

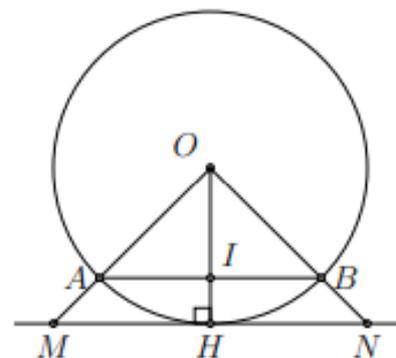


3.

Gọi I là trung điểm AB , ta có $AI = \frac{4R}{5}$. Suy ra

$$OM^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - \frac{16R^2}{25} = \frac{9R^2}{25}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{3R}{5} \text{ nên } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OI \cdot AB = \frac{12R^2}{25}$$





Gọi H là tiếp điểm của tiếp tuyến MN . Do $MN \parallel AB$ nên ta có:

$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OMN}} = \frac{OI^2}{OH^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle OMN} = \frac{25}{9} S_{\triangle OAB} = \frac{4R^2}{3}.$$

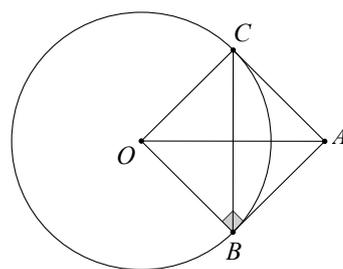
Vậy diện tích tam giác OMN bằng $\frac{4R^2}{3}$.

4.

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 45^\circ.$$

Suy ra $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

Vậy số đo $\widehat{BC} = \widehat{BOC} = 90^\circ$



Dạng 2: Chứng minh tiếp tuyến của đường tròn

5.

$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ có } \begin{cases} BC^2 = 5^2 = 25 \\ AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

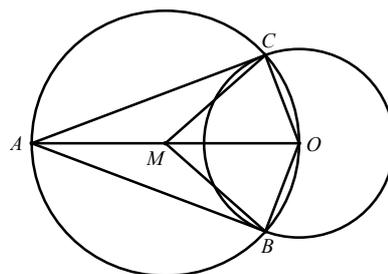
Suy ra tam giác ABC vuông tại B . Hay $CA \perp BA$. Vậy CA là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BA)$

6. Xét tam giác ABO có $MA = MB = MO = \frac{AO}{2}$

Suy ra tam giác ABO vuông tại B . Hay $AB \perp OB$.

Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Tương tự AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O) .





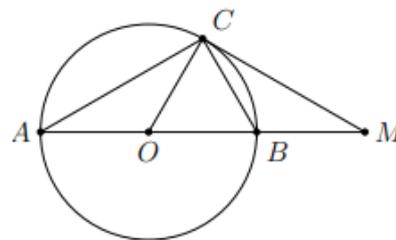
7.

a) Xét tam giác ABC có $OC = OA = OB = R$ nên tam giác ABC vuông tại C .

$$\Rightarrow \widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{CAB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Tam giác OCB có $OB = OC = R$ và $\widehat{CBO} = 60^\circ$ nên tam giác OCB đều. Suy ra $CB = OB = R$

Xét tam giác OCM có $CB = OB = BM = R$ nên tam giác OCM vuông tại C . Suy ra $MC \perp OC$, do đó MC là tiếp tuyến của đường tròn O .

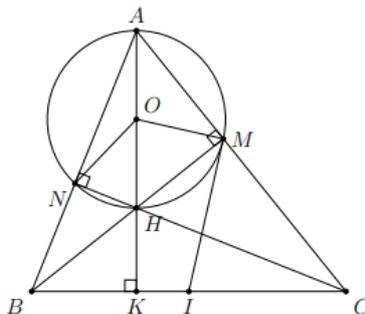


b) Ta có $\widehat{BCM} = 90^\circ - \widehat{BCO} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Ta có $\triangle BCM \sim \triangle CAM$ (g - g).

$$\text{Suy ra } \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA \cdot MB = 3R^2 \text{ (dpcm)}$$

8.



a) Lấy O là trung điểm của AH . Áp dụng định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong giác AMH vuông tại M và tam giác ANH vuông tại N , ta có

$$OM = OA = OH \text{ và } ON = OA = OH$$

Do đó, $OM = ON = OA = OH$.

Vậy bốn điểm A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn tâm O .



b) Gọi K là giao điểm của AH và BC , ta có H là trực tâm của tam giác ABC nên $AK \perp BC$. Tam giác HBK vuông tại K nên $\widehat{KBH} + \widehat{KHB} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{KHB} = \widehat{MHO}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{KBH} + \widehat{MHO} = 90^\circ$. (1)

Tam giác MBC vuông tại M nên $MI = IB = IC$. Suy ra $\triangle IMB$ cân tại I .

Do đó $\widehat{IMB} = \widehat{IBM}$. (2)

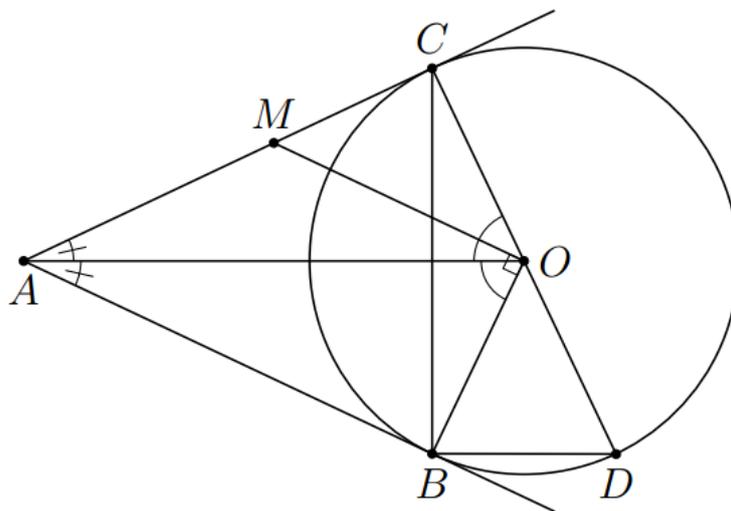
Theo chứng minh trên ta có $OM = OH$ nên $\triangle OHM$ cân tại O .

Do đó $\widehat{OMH} = \widehat{OHM}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có $\widehat{IMB} + \widehat{OMH} = 90^\circ$. Suy ra $OM \perp MI$. Vậy IM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Dạng 3: Hai tiếp tuyến cắt nhau

9.



a) Vì AB, AC là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AC = AB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC . Mặt khác $OA = OB$ (cùng bằng bán kính) $\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của $BC \Rightarrow AO$ là đường trung trực của BC

b) Vì BO là trung tuyến của tam giác $DBC, BO = \frac{1}{2}CD$



$\Rightarrow \triangle DBC$ vuông tại B hay $BD \perp BC$ Mặt khác $AO \perp BC$ (do AO là trung trực của BC)

$\Rightarrow AO \parallel BD$

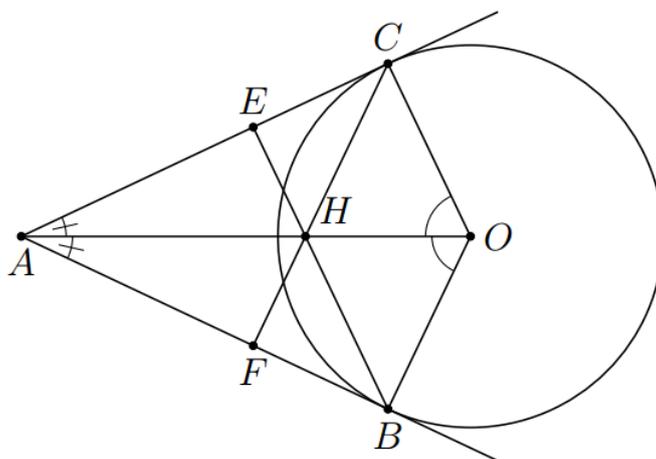
c) Vì $OM \perp OB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MOA} + \widehat{AOB} = 90^\circ$ (1)

Ta có $\widehat{MAO} = \widehat{BAO}$ (vì A là giao điểm của hai tiếp tuyến chung của (O))

Vì $\widehat{OAB} + \widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{AOB} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{MOA}$ suy ra $\triangle AMO$ cân tại M hay $MA = MO$.

10.



a) Vì $AC \perp OC$ (tính chất tiếp tuyến) mà $BE \perp AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow BE \parallel OC$ hay BH song song với OC . Chứng minh tương tự CH song song với $OB \Rightarrow OCHB$ là hình bình hành. Mà $OB = OC$ (cùng bằng bán kính) $\Rightarrow BOCH$ là hình thoi

b) Vì $OBHC$ là hình thoi $\Rightarrow OH$ là tia phân giác góc BOC . Mặt khác OA là tia phân giác $\widehat{BOC} \Rightarrow O, H, A$ thẳng hàng

c) Để $H \in (O)$ suy ra $OH = R$.

Vì $OH = OC = CH = R \Rightarrow \widehat{OCH} = 60^\circ \Rightarrow \cos \widehat{COH} = \frac{CO}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow AO = 2R$

Vậy A cách O một khoảng bằng $2R$ thì H nằm trên đường tròn tâm (O)



11.

a) Ta có BA, BC là hai tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow BO$ là phân giác góc BOC suy ra

$$\widehat{BOC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{BCO} = \frac{1}{2} \widehat{BCD}$ (2)

Lại có tứ giác $ABCD$ là hình thang nên

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{BOC} + \widehat{BCO} = 90^\circ$. Vậy tam giác BOC vuông tại O .

b) Tam giác OBC vuông tại O ta có $BC^2 = OB^2 + OC^2 = 625$. Do đó $BC = 25$.

Gọi K là hình chiếu của O lên BC . Xét tam giác OBC vuông tại O , ta có

$$OB \cdot OC = OK \cdot BC \Rightarrow OK = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

Vậy $R = 24$.

c) Gọi H là hình chiếu của B lên CD . Ta có $BH = AD = 2R = 24$.

Tam giác BHD vuông tại H , ta có $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.

Ta có $HC = CD - AB$. Suy ra $CD - AB = 7$.

Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$ suy ra $AB + CD = 49$. Do đó $AB = 21, CD = 28$.

12.

a) Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của O lên AB và CD .

Ta

$$\text{có } AI = \frac{AB}{2}; DK = \frac{CD}{2}. \quad (1)$$

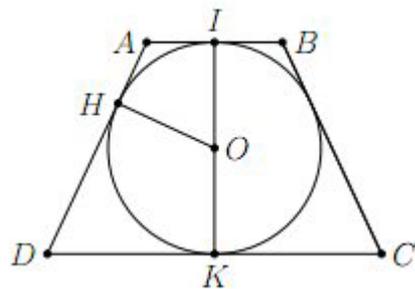
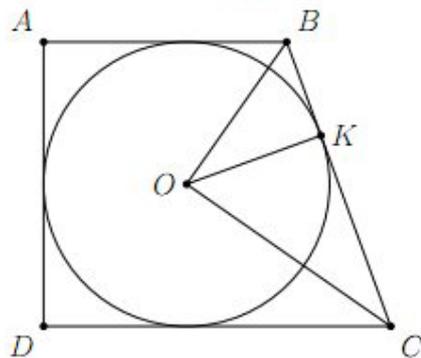
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $HA = AI$,
 $HD = DK$ (2)

Lại có $CD = 4AB$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $HD = 4HA$. (3)

b) Tam giác AOD vuông tại O có đường cao OH , ta có

$$r^2 = OH^2 = HA \cdot HD = 4 \cdot HA^2.$$





Vậy $HA = \frac{r}{2}$.

13.

a) Xét $\triangle OAM$ có $\widehat{OAM} = 90^\circ$

Ta có: $\sin \widehat{AMO} = \frac{OA}{OM} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = 2R$

b) Vì $MA; MB$ là tiếp tuyến của (O) suy ra $MA = MB; MO$ là tia phân giác AMB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M ,

$\widehat{AMB} = 2\widehat{AMO} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle AMB$ là tam giác đều

$\Rightarrow AB = AM$.

Xét $\triangle OAM$ có $\widehat{OAM} = 90^\circ$

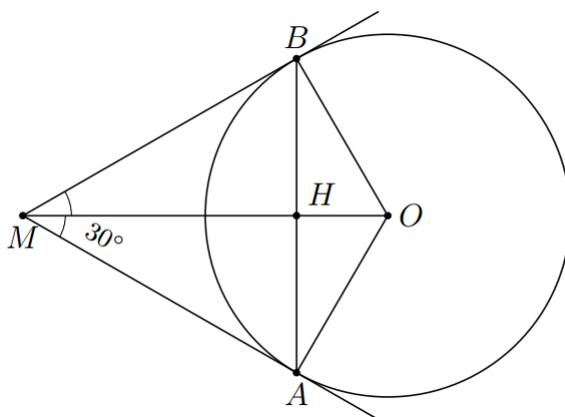
$\Rightarrow AM^2 = OM^2 - OA^2$

$\Rightarrow AM = \sqrt{3}R \Rightarrow AB = \sqrt{3}R$

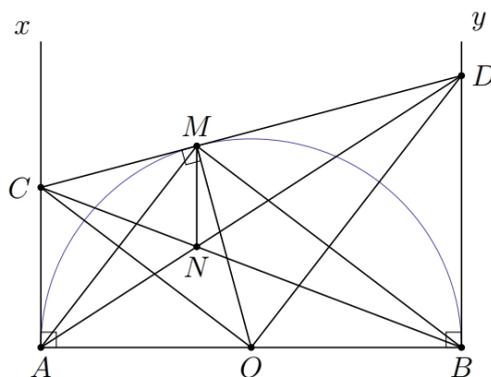
Xét tam giác vuông MHA có:

$\cos \widehat{AMH} = \cos 30^\circ = \frac{MH}{AM} \Rightarrow MH = \frac{3R}{2}$

$\Rightarrow S_{AMB} = \frac{1}{2} MH \cdot AB = \frac{3\sqrt{3}}{2} R$



14.



a) Vì Ax là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow Ax \perp OA$.

Xét $\triangle OAC$ có $\widehat{OAC} = 90^\circ \Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính CO (1)

Vì MC là tiếp tuyến của (O)



$$\Rightarrow \widehat{CMO} = 90^\circ \Rightarrow M \text{ thuộc đường tròn đường kính } CO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A, C, O, M cùng thuộc đường tròn đường kính CO

b) Vì $CM; CA$ là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OC$ là phân giác \widehat{AOM}

Mà ΔAOM cân tại O suy ra $OC \perp AM$ (tính chất tam giác cân) (3)

Vì $M \in (O) \Rightarrow MO = OA = OB$, hay ΔAMO có đường trung tuyến MO bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền.

$$\Rightarrow \Delta AMO \text{ vuông tại } M \Rightarrow BM \perp AM \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $OC // BM$.

c) Tìm vị trí của M để S_{ABCD} nhỏ nhất

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vì } OC \text{ là phân giác } \widehat{AOM} \\ OD \text{ là phân giác } \widehat{BOM} \\ \widehat{AOM} \text{ và } \widehat{BOM} \text{ là hai góc kề bù} \end{array} \right\} \Rightarrow CO \perp OD \text{ (Tính chất phân giác hai góc kề bù).}$$

Xét ΔCOD có $\widehat{COD} = 90^\circ; OM \perp CD$

$$\Rightarrow CM \cdot MD = OM^2 \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).}$$

Mà $CM = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$DM = DA \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \quad OM^2 = CA \cdot DB = R^2$$

Ta có $AC + BD \geq 2R$

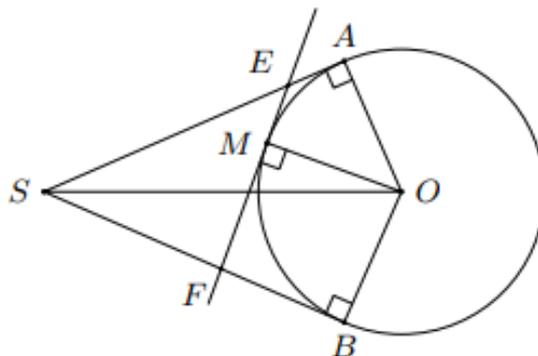
$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(AC + BD) \cdot AB}{2} \geq \frac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2$$

Vậy S_{ABCD} nhỏ nhất bằng $2R^2 \Leftrightarrow AC = BD$ hay M là điểm chính giữa cung AB

d) Vì $AC // BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD} = \frac{CM}{MD}$ (vì $CM = CA; DM = DB$)

$$\Rightarrow MN // BD \text{ mà } BD \perp AB \text{ (do } BD \text{ là tiếp tuyến)} \Rightarrow MN \perp AB$$

15.





a) Tiếp tuyến tại A và M cắt nhau tại E nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AE = EM$

Tiếp tuyến tại B và M cắt nhau tại F nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $BF = FM$

Suy ra chu vi của tam giác SEF là:

$$SE + EF + FS = SE + EM + MF + FS = SE + EA + BF + FS = SA + SB$$

b) Tiếp tuyến tại A và B cắt nhau tại S nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có SO là tia phân giác của \widehat{ASB} .

Vì M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) nên SM là tia phân giác của \widehat{ASB} hay SM là tia phân giác của \widehat{ESF} ($E \in SA, F \in SB$)

Vì M là giao điểm của đoạn SO với đường tròn (O) nên S, O, M thẳng hàng.

Mà $OM \perp EF \Rightarrow SM \perp EF$

Xét $\triangle SEF$ có SM vừa là đường cao, vừa là tia phân giác nên $\triangle SEF$ cân tại S .

Do đó $SE = SF$



BÀI 17:
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

BÀI TẬP

Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

1.

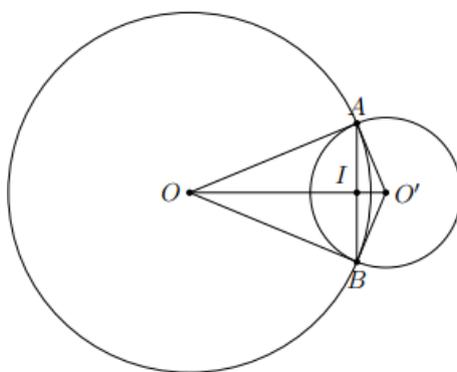
a) $OI = 5 - 4 = 1 (cm)$

b) $OI = 5 + 4 = 9 (cm)$

c) $R - r < OI < R + r \Leftrightarrow 5 - 4 < OI < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < OI < 9$

d) $OI > R + r \Rightarrow OI > 9$

2.



a) Vì $12 - 5 < 13 < 12 + 5$ nên $R - r < d < R + r$. Vậy hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B .

Mặt khác ta có $OA = OB = R$ và $O'A = O'B = r$ nên OO' là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

b) Ta có $OO'^2 = OA^2 + O'A^2$ nên tam giác AOO' vuông tại A . Từ đó suy ra AO là tiếp tuyến của đường tròn $(O'; r)$.

c) Gọi I là giao điểm của OO' và AB . Áp dụng công thức tính diện tích tam giác AOO' vuông tại A , AI là đường cao ta có: $OO'.AI = OA.OA' \Rightarrow AI = \frac{OA.OA'}{OO'} = \frac{60}{13} (cm)$.

Do đó $AB = 2AI = \frac{120}{3} (cm)$.

3.

a) Từ A kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn cắt MN tại I .

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau $IM = IA = IN$.

Từ đó suy ra $\triangle MAN$ vuông tại A



$$\Rightarrow \widehat{MAN} = 90^\circ.$$

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có

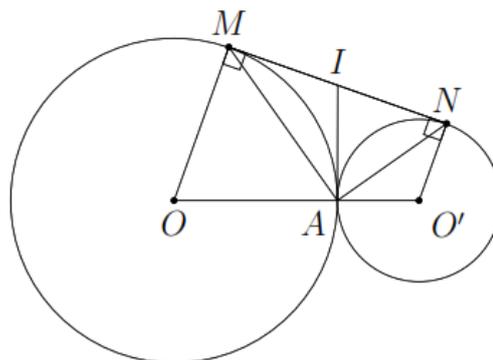
$$\begin{cases} IO \text{ là phân giác } \widehat{AIM} \\ IO' \text{ là phân giác } \widehat{AIN}. \end{cases}$$

Mà \widehat{AIM} kề bù \widehat{AIN}

$$\Rightarrow IO \perp IO'$$

$$\Rightarrow IA = \sqrt{OA \cdot O'A} = 6 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow MN = 2IA = 12 \text{ cm}.$$



4.

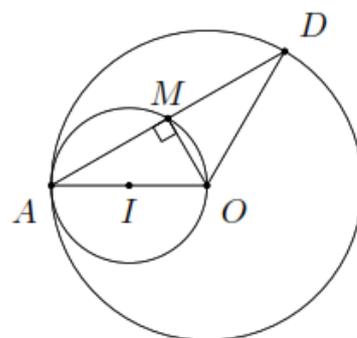
a) $OI = OA - IA$ nên hai đường tròn tiếp xúc trong.

b) Ta có $\triangle AMO$ có AO là đường kính của đường tròn (I) nên

$$\widehat{AMO} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AMO} = 90^\circ \Rightarrow OM \perp AD.$$

Mà $\triangle AOD$ cân tại O nên OM là đường trung tuyến.



Dạng 2. Các bài toán chứng minh

5.

a) Ta có $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BC.$$

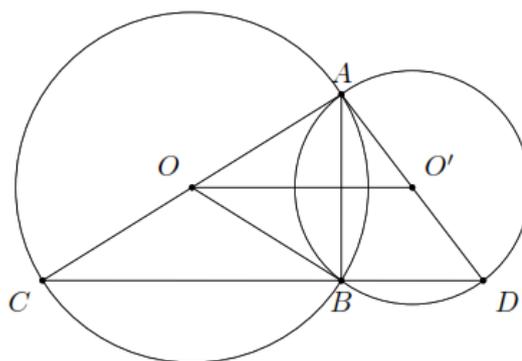
b) Ta có $\triangle ABD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BD.$$

Do đó $\widehat{CBD} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$

$$\Rightarrow B, C, D \text{ thẳng hàng}.$$

c) Ta có $\begin{cases} OO' \perp AB \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel CD.$



6.



Trường hợp 1: O và O' nằm khác phía đối với AB .

Gọi $I = OO' \cap AB$. Theo tính chất đường nối tâm

$\Rightarrow OO'$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow IA = IB = \frac{AB}{2} = 6$ cm.

Khi đó ta có

$$OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm.}$$

$$O'I = \sqrt{O'A^2 - IA^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7} \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow OO' = OI + O'I = 8 + 2\sqrt{7} \text{ cm.}$$

Trường hợp 2: O và O' nằm cùng về một phía đối với AB .

$$\Rightarrow OO' = OI - O'I = 8 - 2\sqrt{7} \text{ cm.}$$

7.

Ta có $\triangle OMA$ cân tại O . Do đó $\widehat{OMA} = \widehat{OAM}$ (1)

Lại có $\triangle O'BA$ cân tại O' . Do đó $\widehat{O'BA} = \widehat{O'OA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OMA} = \widehat{O'OA}$.

Mà \widehat{OMA} và $\widehat{O'OA}$ đồng vị nên $OM \parallel O'B$.

8.

a) $\triangle IMK$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính IK .

$$\Rightarrow \widehat{IMK} = 90^\circ \Rightarrow KM \perp IM.$$

$\Rightarrow KM$ là tiếp tuyến của (I) .

Tương tự: KN là tiếp tuyến của (I) .

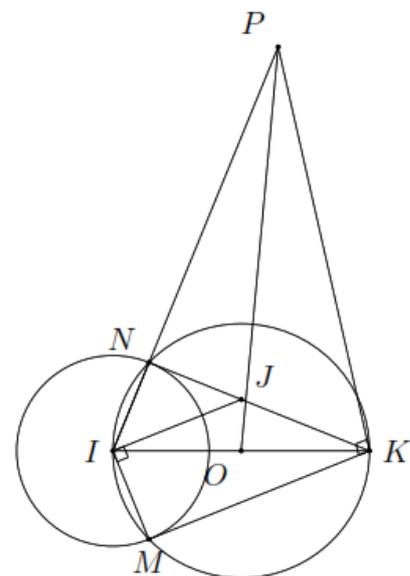
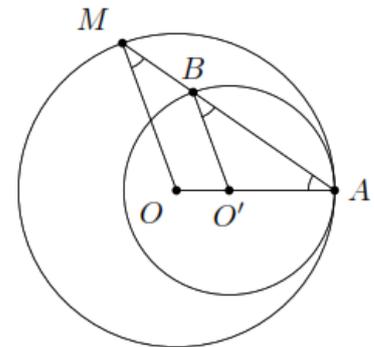
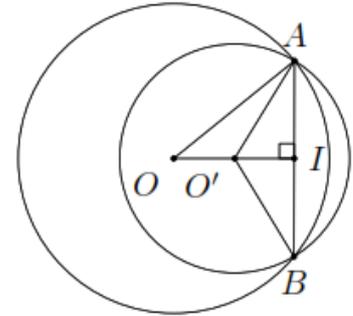
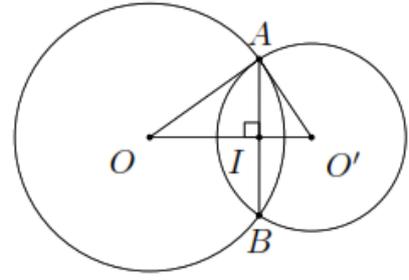
b) Ta có $\widehat{KMI} = 90^\circ \Rightarrow KM \perp IM$.

Mà $IJ \perp IM$. Do đó $IJ \parallel KM \Rightarrow \widehat{JIK} = \widehat{IKM}$.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có

$$\widehat{IKM} = \widehat{JKI} \Rightarrow \widehat{JIK} = \widehat{JKI}$$

$$\Rightarrow \triangle IJK \text{ cân tại } J \Rightarrow JI = JK.$$





c) Ta có $\widehat{PKO} + \widehat{IKM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PKO} + \widehat{JKI} = 90^\circ$ (1).

Ta lại có $\widehat{PIK} + \widehat{NKI} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PIK} = \widehat{PKI}$.

$\Rightarrow \Delta PIK$ cân tại $P \Rightarrow PI = PK$.

Do đó suy ra ba điểm O, P, J cùng thuộc đường trung trực của IK nên O, J, P thẳng hàng.

9. a) Gọi $H = OO' \cap AB$. Theo tính chất đường nối tâm

$\Rightarrow OO'$ là đường trung trực của AB . Do đó $OO' \perp AB$ và H là trung điểm của AB .

$\Rightarrow IH$ là đường trung bình của ΔABC .

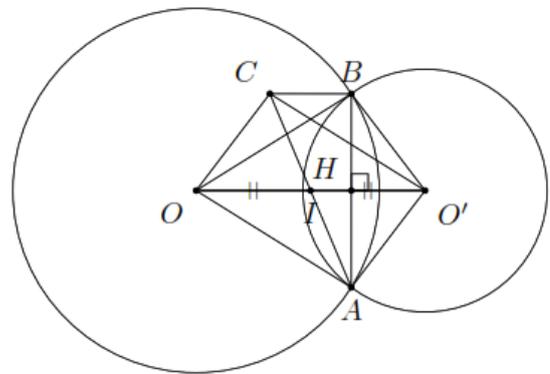
$\Rightarrow IH // BC$ mà $IH \perp AB \Rightarrow BC \perp AB$.

b) Tứ giác $AOCO'$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên tứ giác $AOCO'$ là hình bình hành.

c) Ta có $OA = O'C$ do $AOCO'$ là hình bình hành.

Mà $OA = OB \Rightarrow OB = O'C$.

Tứ giác $OO'BC$ có $OO' // BC$ và $OB = O'C$ nên tứ giác $OO'BC$ là hình thang cân.



10.

a) $\widehat{BDH} = 90^\circ$ nên D thuộc đường tròn đường kính BH .

b) Tương tự, E thuộc đường tròn đường kính CH .

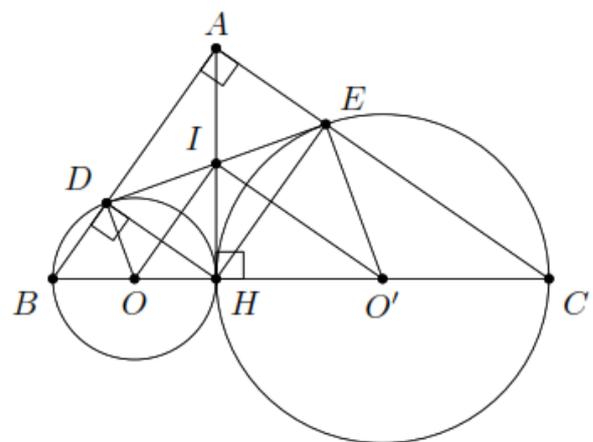
c) $OO' = OH + O'H$ nên (O) và (O') tiếp xúc ngoài.

d) $AH \perp OO'$ nên AH là tiếp tuyến chung của (O) và (O') .

e) $ADHE$ là hình chữ nhật nên $AH = DE$.

Ta có $OH = OD$ do đó ΔODH cân tại O .

$\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OHD}$.





Ta lại có $ADHE$ là hình chữ nhật nên $\widehat{IDH} = \widehat{IHD}$.

Mà $\widehat{IHD} + \widehat{DHO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IDH} + \widehat{ODH} = 90^\circ \Rightarrow OD \perp DE$ tại D .

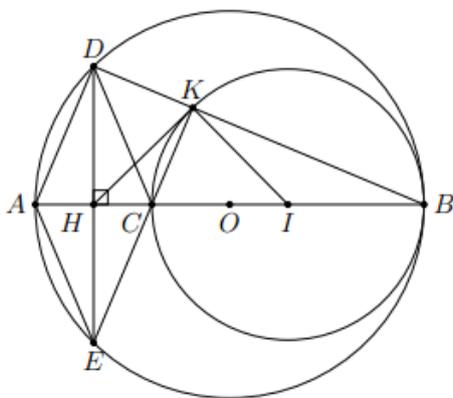
Từ đó ta có DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Chứng minh tương tự ta cũng có DE là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

Vậy DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') .

$$f) S_{DEO'O} = \frac{1}{2}(OD + O'E) \cdot DE = \frac{1}{2} \left(\frac{BH}{2} + \frac{CH}{2} \right) \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}.$$

11. a) Vì điểm C nằm giữa A và O , I là trung điểm của BC nên I nằm giữa B và O , do đó $IO = OB - IB$. Vậy hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau tại I .



b) Vì H là trung điểm của AC và DE , $DE \perp AC$ tại H nên tứ giác $ADCE$ là hình thoi.

c) Ta có $CK \perp AB$, $AD \perp DB$ nên $CK \parallel AD$ mà $CE \parallel AD$ do đó ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Ta có $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}$, $\widehat{IKB} = \widehat{IBK}$ nên
 $\widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HDK} + \widehat{IBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IKH} = 90^\circ$

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

12.

a) Ta có $OO' = OB - O'B \Rightarrow$ hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại B .

b) Dây DE của (O) vuông góc với đường kính $AB \Rightarrow AB$ đi qua trung điểm của DE hay H là trung điểm của AB .

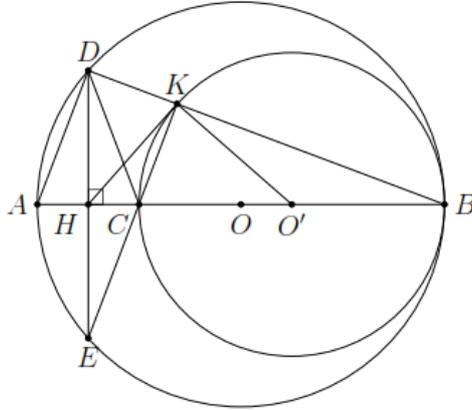
Xét tứ giác $ADCE$ có H là trung điểm của AB , H cũng là trung điểm của AC

\Rightarrow Tứ giác $ADCE$ là hình bình hành. Lại có $AC \perp DE \Rightarrow$ Tứ giác $ADCE$ là hình thoi.



c) ΔKCB có trung tuyến $KO' = \frac{BC}{2}$ nên vuông tại $K \Rightarrow \widehat{CKB} = 90^\circ$ hay $CK \perp BD$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ hay $AD \perp BD$ (2)



Từ (1) và (2) $\Rightarrow CK \parallel AD$.

Lại có $CE \parallel AD$ (vì tứ giác $ADCE$ là hình thoi) $\Rightarrow C, E, K$ thẳng hàng.

d) Xét tam giác DEK vuông tại K có KH là trung tuyến nên $KH = HE$.

Tam giác KHE có $KH = HE \Rightarrow \Delta KHE$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{HKE} = \widehat{KEH}$.

Lại có: $\Delta O'CK$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{O'CK} = \widehat{O'KC}$

$$\Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{O'KC} = \widehat{KEH} + \widehat{O'CK} \Leftrightarrow \widehat{O'KH} = \widehat{KEH} + \widehat{O'CK}.$$

Mặt khác $\widehat{O'CK} = \widehat{HCE}$ (đối đỉnh)

Tam giác HEC vuông tại H nên $\widehat{KEH} + \widehat{HEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KEH} + \widehat{O'CK} = 90^\circ$ hay $\widehat{O'KH} = 90^\circ \Rightarrow KH$ là tiếp tuyến của (O') .