

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
QUẢNG TRỊ

NĂM HỌC 2025 - 2026

Khóa ngày 30 tháng 5 năm 2025

Môn thi: TOÁN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\frac{a+1}{4\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \right)$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Chứng minh $P > \frac{3}{a+\sqrt{a}+1}$, với mọi $a > 0, a \neq 1$.

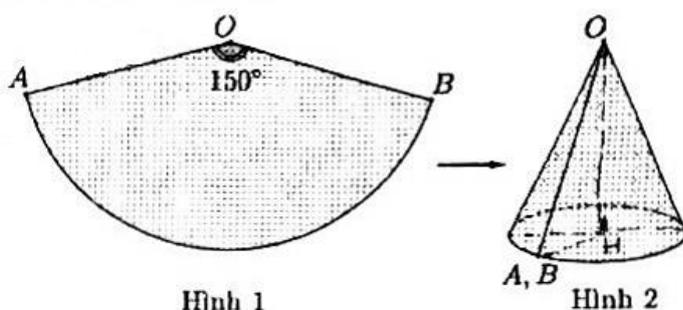
Câu 2 (2,0 điểm).

1. Một trường học có 80 giáo viên, với tuổi trung bình là 45. Biết rằng tuổi trung bình của các giáo viên nam và giáo viên nữ trong trường lần lượt là 50 và 42. Hỏi trường đó có bao nhiêu giáo viên nam, bao nhiêu giáo viên nữ?

2. Giải phương trình $\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{1-x} = 2 + \sqrt{1+3x-4x^2}$.

Câu 3 (3,5 điểm).

1. Từ một mảnh bìa hình quạt tròn bán kính 24 (cm) ứng với cung 150° (hình 1), Nam gắn hai mép giấy dọc theo các bán kính OA, OB lại với nhau để tạo một chiếc mũ sinh nhật có dạng hình nón không đáy (hình 2). Hãy xác định chiều cao của chiếc mũ.



Hình 1

Hình 2

2. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có các tia AB và DC cắt nhau tại F , các tia AD và BC cắt nhau tại E .

a) Chứng minh rằng $\frac{BD}{AC} = \frac{ED}{EC} = \frac{FB}{FC}$.

b) Đường phân giác của góc AEB cắt các cạnh AB và CD tương ứng tại M và P , đường phân giác của góc AFD cắt các cạnh CB và DA tương ứng tại N và Q .

i) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì, tại sao?

ii) Chứng minh rằng giao điểm của MP và NQ nằm trên đoạn thẳng nối các trung điểm của hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.

Câu 4 (1,5 điểm). An và Bình mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 10 lên bảng.

a) Tính xác suất để số An viết bé hơn số Bình viết.

b) Tính xác suất để An viết được số a và Bình viết được số b thoả mãn điều kiện: $a^3 + b^3 - 6ab + 8$ là một số nguyên tố.

Câu 5 (1,5 điểm).

1. Giả sử a và b là các số nguyên sao cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ nhận số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ làm nghiệm (p và q nguyên tố cùng nhau). Chứng minh p chia hết cho q .

2. Tìm tất cả các số hữu tỉ dương x, y sao cho xy và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ đều là các số nguyên.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN QUẢNG TRỊ Năm học 2025 - 2026

Câu 1:

a. ĐKXĐ: $a > 0, a \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\frac{a+1}{4\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{(\sqrt{a}-1)(a-1)} \right) \cdot \left(\frac{a+1-2\sqrt{a}}{4\sqrt{a}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}-1+3\sqrt{a}+5}{(\sqrt{a}-1)(a-1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{4(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+1) \cdot 4\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

b. Thật vậy, ta có

$$\frac{3}{a+\sqrt{a}+1} < \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow 3\sqrt{a} < a+\sqrt{a}+1 \Leftrightarrow 0 < (\sqrt{a}-1)^2, \forall a > 0, a \neq 1.$$

Câu 2:

1. Gọi số giáo viên nam trong trường là x , thì số giáo viên nữ là $80 - x$ (người).

Tổng số tuổi của tất cả 80 giáo viên là $80.45 = 3600$.

Tổng số tuổi của tất cả giáo viên nam và nữ lần lượt là: $50x$ và $(80 - x).42$.

Khi đó: $50x + (80 - x).42 = 3600 \Leftrightarrow x = 30$.

Như vậy số giáo viên nam là 30, thì số giáo viên nữ là 50 (người).

2. ĐKXĐ: $1 \geq x \geq -\frac{1}{4}$. Ta đặt $\sqrt{4x+1} = a, \sqrt{1-x} = b, (a, b \geq 0)$.

Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$$a + 2b = 2 + ab \Leftrightarrow (a-2)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $a = 2$. Ta có: $\sqrt{4x+1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$, (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $a = 1$. Ta có: $\sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$, (thỏa mãn).

Câu 3:

1. Giả sử độ dài cung tròn AB trên hình vẽ là a , thì $a = \frac{150}{180} \pi \cdot 24 = 20\pi$ (cm).

Ở hình vẽ 2, ta có chu vi đáy của hình nón là a .

Khi đó, gọi bán kính đáy là r , thì ta có: $a = 2r\pi \Rightarrow r = 10$ (cm).

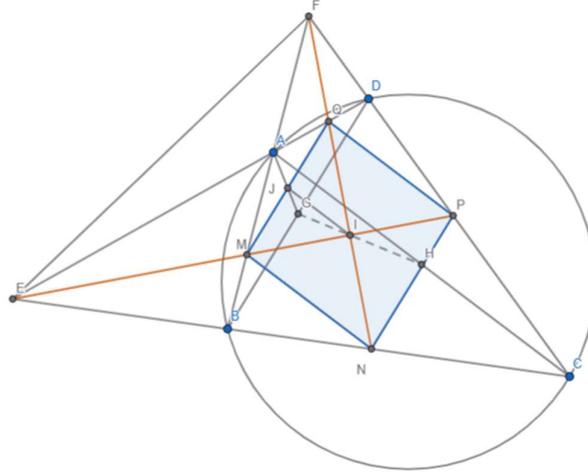
Và độ dài đường sinh của hình nón là $OA = 24$ cm.

Theo định lý Pitago, ta có chiều cao h hình nón là:

$$h^2 + r^2 = OA^2 \Rightarrow h = \sqrt{24^2 - 10^2} = 2\sqrt{119}(cm).$$

Vậy chiều cao hình nón: $2\sqrt{119}(cm)$.

2.



a. Do tứ giác ABCD nội tiếp nên $\angle EAB = 180 - \angle BAD = \angle DCB$, kết hợp với $\angle DEC$ chung.

Suy ra $\triangle EAB \sim \triangle ECD(g.g) \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED}, \angle DEC$ chung.

Khi đó: $\triangle EBD \sim \triangle EAC(c.g.c) \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{BD}{AC}. (1)$

Chứng minh tương tự thì $\frac{FD}{FA} = \frac{FB}{FC}, \triangle FBD \sim \triangle FCA(c.g.c) \Rightarrow \frac{FB}{FC} = \frac{BD}{AC}. (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

b.

i. Ta thấy $MNPQ$ là hình thoi. Thật vậy

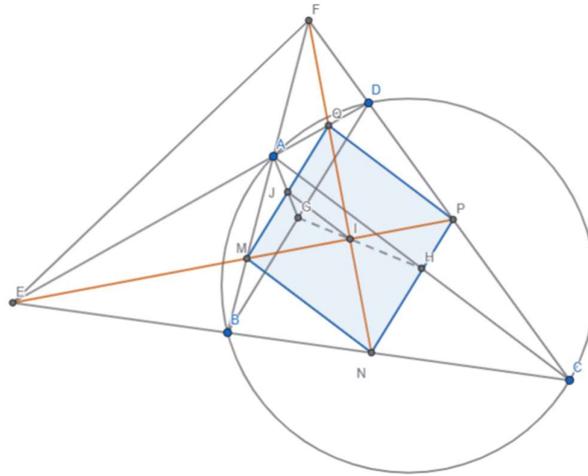
Theo tính chất đường phân giác: $\frac{QD}{QA} = \frac{FD}{FA} = \frac{FB}{FC} = \frac{NB}{NC}$, và $\frac{MB}{MA} = \frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EC} = \frac{PD}{PC}$.

Mặt khác theo câu a ta có: $\frac{ED}{EC} = \frac{FB}{FC}$. Suy ra $\frac{QD}{QA} = \frac{MB}{MA}, \frac{NB}{NC} = \frac{PD}{PC} \Rightarrow MQ \parallel BD \parallel NP$.

Tương tự $\frac{QD}{QA} = \frac{PD}{PC}, \frac{NB}{NC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow PQ \parallel AC \parallel MN$.

Như vậy $MNPQ$ là hình bình hành. Đồng thời, do tam giác QEN có EM vừa là phân giác vừa là trung tuyến nên EM là đường cao hay MP vuông QN .

Vậy $MNPQ$ là hình thoi.



ii. Gọi I là giao của MP, NQ . Khi đó I là trung điểm của NQ, MP . Gọi G, H là trung điểm của BD, AC . Gọi J là trung điểm MQ .

Khi đó do $MQ \parallel BD$, ta dễ dàng chứng minh: A, J, G thẳng hàng. (Thales đảo)

Ta thấy IJ là đường trung bình của tam giác QMN .

Ta có: $\frac{IJ}{AH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MN}{AH} = \frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} = \frac{JG}{AG} \Rightarrow G, I, H$ thẳng hàng.

Như vậy ta có giao điểm I của NQ, MP nằm trên GH .

Nhận xét: Bổ đề hình thang.

Bài 4:

Xét phép thử: “An và Bình, mỗi bạn biết ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 10 lên bảng”. Không gian mẫu của phép thử đó là: $10 \cdot 10 = 100$.

a. Xét biến cố A: “Số của An viết ra bé hơn số của Bình”

Nếu Bình viết số $a > 1$ thì An có $a - 1$ khả năng để viết ra số bé hơn Bình.

Như vậy số kết quả thuận lợi là: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 = 45$.

Như vậy xác suất để An viết số bé hơn của Bình là $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.

b. Xét biến cố B: “Số của An và Bình viết ra là a và b , thỏa mãn $a^3 + b^3 - 6ab + 8$ là số nguyên tố.”

Giả sử $p = a^3 + b^3 - 6ab + 8$ là số nguyên tố. Khi đó:

$$p = a^3 + b^3 - 6ab + 8 = (a + b + 2)(a^2 + b^2 + 4 - 2a - 2b - ab)$$

Do $a + b + 2 > 1 \Rightarrow a + b + 2 = p, a^2 + b^2 + 4 - 2a - 2b - ab = 1$.

Mà $2 = 2(a^2 + b^2 + 4 - 2a - 2b - ab) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (a - b)^2$.

Suy ra hai trong ba số $a-2, b-2, a-b$ là 1 và số còn lại là 0.

Nếu $a-2=b-2=1 \Rightarrow a=b=3, a-b=0 \Rightarrow p=3+3+2=8$, (loại).

Nếu $a-2=a-b=1, b-2=0 \Rightarrow a=3, b=2 \Rightarrow p=3+2+2=7$.TM

Tương tự $a=2, b=3$ TM.

Như vậy có hai kết quả thuận lợi cho biến cố B .

Vậy xác suất để Số của An và Bình viết ra là a và b , thoả mãn $a^3+b^3-6ab+8$ là số nguyên tố là $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$.

Câu 5:

1. Ta thấy $\frac{p}{q}$ là nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$ nên $\left(\frac{p}{q}\right)^2+a\frac{p}{q}+b=0$.

Suy ra $p^2+apq+bq^2=0$, nên $p^2:q$ mà $(p, q)=1$ dẫn đến $q=1$.

Như vậy p chia hết cho q .

2. Giả sử tồn tại x, y thoả mãn điều kiện bài toán.

Đặt $x=\frac{a}{b}, y=\frac{c}{d}$, với $(a,b)=1, (c,d)=1$, a, b, c, d là các số nguyên dương.

Khi đó: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$ nguyên dương nên $ac|bc+ad$.

Do đó: $\begin{cases} a|bc+ad \\ c|bc+ad \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|bc \\ c|ad \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|c \\ c|a \end{cases} \Leftrightarrow a=c$.

Mà $xy=\frac{ac}{bd}$ nên $bd|ac$ hay $b|a^2 \Rightarrow b=1$, do $(a,b)=1$.

Tương tự $d=1$. Như vậy x, y nguyên dương. Ta có: $1 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$.

Trường hợp 1: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$. (thoả mãn).

Trường hợp 2: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow x + y = xy \Leftrightarrow 1 = (x-1)(y-1) \Leftrightarrow x = y = 2$. (thoả mãn).

Như vậy các bộ (x, y) thoả mãn bài toán là: $(1,1)$ và $(2,2)$.