CỤM CHUYÊN MÔN SỐ 1
THCS: AN - ĐIỀN - PHÚ - THÁI

Đề chính thức

(Đề thi gồm có 01 trang)

ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI CỤM
Năm học: 2024 - 2025
Môn: Toán 8
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 28 tháng 12 năm 2024

Câu I. (4 điểm)

1) Thu gọn biểu thức: $P=\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}$
(với $x\neq 0; x\neq 1; x\neq 2; x\neq 3; x\neq 4; x\neq 5$).
Tìm các giá trị của x nguyên để $x.P$ đạt giá trị nguyên.

2) Các số $x;y;z$ khác 0 thỏa mãn $x+y+z=1$ và $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=-2$.
Tính giá trị của biểu thức: $P=x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}$.

Câu II. (4 điểm)

1) Tìm x, biết: $\frac{2x+5}{x^2+5x+4}-\frac{2x+2}{x^2+2x-8}=\frac{3}{2}$ (với $x\neq -4; x\neq -1; x\neq 2$)

2) Cho đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm a, b, c, d biết rằng khi chia đa thức $f(x)$ lần lượt cho các đa thức $x-1; x-2; x-3$ đều có số dư là 6 và tại $x=1$ thì đa thức $f(x)$ đó nhận giá trị bằng -18.

Câu III. (4 điểm)

1) Tìm các số tự nhiên n để $(n^2-8)^2+36$ là số nguyên tố.

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $5(a^3+b^3)=13(c^3+d^3)$.
Chứng minh rằng: $a+b+c+d$ chia hết cho 6

Câu IV. (6 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao điểm của AK và DE. Kẻ DM vuông góc với CE tại M.

1) Chứng minh rằng tam giác AKM vuông.

2) Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh ΔADM cân và tính $\widehat{ANB}$.

3) Tia phân giác của $\widehat{DCE}$ cắt AD tại F. Chứng minh rằng: $CF\le 2EF$.

Câu V. (2 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab+bc+ca=abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\frac{a}{bc(a+1)}+\frac{b}{ca(b+1)}+\frac{c}{ab(c+1)}$.

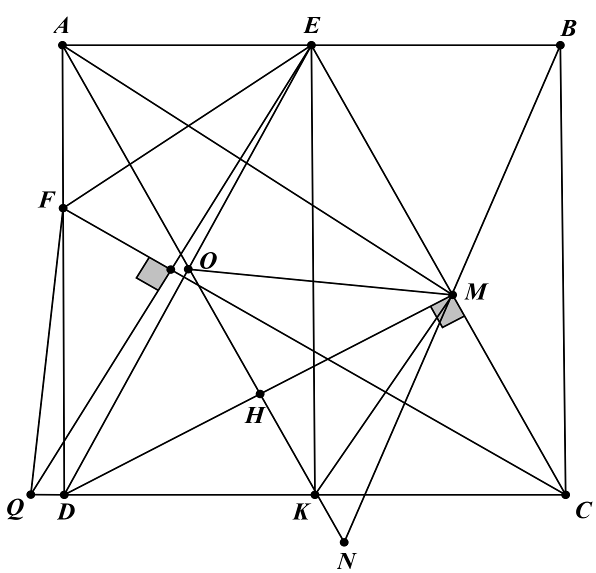
.... *Hết* ....

Họ tên học sinh: ....; Số báo danh: ....

HƯỚNG DẪN CHẤM
Môn thi: TOÁN 8

Câu	Nội dung cần đạt	Điểm
Câu I 4 điểm	1) Với $x\neq 0; x\neq 1; x\neq 2; x\neq 3; x\neq 4; x\neq 5$. Ta có: $P=\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-9x+20}$ $=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-5)}$	0,5 điểm
	$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-4}$	0,25 điểm
	$=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x}=\frac{5}{x(x-5)}$	0,25 điểm
	Ta có $x.P=x.\frac{5}{x(x-5)}=\frac{5}{x-5}$	0,25 điểm
	Nên $x.P$ đạt giá trị nguyên khi $x-5$ là ước của 5.	0,25 điểm
	Khi đó: $x-5\in\{-1;1;5;-5\}$ nên $x\in\{4;6;10;0\}$	0,25 điểm
	Kết hợp với đề bài $x\neq 0; x\neq 1; x\neq 2; x\neq 3; x\neq 4; x\neq 5$ ta được: $x\in\{6;10\}$ thì $x.P$ nguyên.	0,25 điểm
	2) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=-2$ $x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=-2$ $\left[x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+1\right]+\left[y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+1\right]+\left[z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+1\right]=1$	0,25 điểm
	$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}++\frac{1}{y}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$ $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$	0,25 điểm
	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{x}$	0,25 điểm
	$\frac{y+z}{yz}=\frac{x-(x+y+z)}{x(x+y+z)}$ $\frac{y+z}{yz}=\frac{-(y+z)}{x(x+y+z)}$	0,25 điểm

	$\frac{y+z}{yz}+\frac{y+z}{x(x+y+z)}=0$ $(y+z)\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{x(x+y+z)}\right)=0$ $(y+z).\frac{x(x+y+z)+yz}{xyz(x+y+z)}=0$ $(y+z).\frac{(x+y)(x+z)}{xyz(x+y+z)}=0$ $(x+y)(x+z)(y+z)=0$ - Nếu $x+y=0$ thay vào $x+y+z=1$ ta được $z=1$ và $x=-y$ Khi đó: $P=x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}=(-y)^{2023}+y^{2023}+1^{2023}=1$ Tương tự $y+z=0$ và $x+z=0$ ta có $P=1$. Vậy $P=1$.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
Câu II **4 điểm**	1) Với $x\neq -4; x\neq -1; x\neq 2$. Ta có: $\frac{2x+5}{x^2+5x+4}-\frac{2x+2}{x^2+2x-8}=\frac{3}{2}$ $\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}-\frac{2x+2}{(x-2)(x+4)}=\frac{3}{2}$ $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}\right)-\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+4}\right)=\frac{3}{2}$ $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$ $\frac{x-2-x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{3}{2}$ $\frac{-3}{(x+1)(x-2)}=\frac{3}{2}$ $(x+1)(x-2)=-2$ $x^2-x=0$ $x(x-1)=0$ $x=0$ hoặc $x=1$ Vậy $x=0$ hoặc $x=1$.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
	2) Từ đề bài ta suy ra được $f(x)-6$ chia hết cho $x-1; x-2; x-3$. Vì f(x) là đa thức bậc 3 nên ta có: $f(x)-6=m.(x-1)(x-2)(x-3)$, trong đó m là hằng số khác 0. Lại có $f(-1)=-18$ nên $-18-6=m.(-2).(-3).(-4)$ $\Rightarrow m=1$ Vậy $f(x)-6=(x-1)(x-2)(x-3)$ Suy ra $f(x)=x^3-6x^2+11x$ Vậy $a=1; b=-6; c=11; d=0$.	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Câu III
4 điểm</td>
<td>1) $\left(n^2-8\right)^2+36=n^4-16n^2+100=\left(n^2+10\right)^2-36n^2$
$=\left(n^2-6n+10\right)\left(n^2+6n+10\right)$
Để $\left(n^2-8\right)^2+36$ là số nguyên tố thì:
$n^2-6n+10=1$ hoặc $n^2+6n+10=1$
- Nếu $n^2-6n+10=1$ thì $(n-3)^2=0$. Suy ra $n=3$
Khi đó $\left(n^2-8\right)^2+36=37$ là số nguyên tố (thoả mãn)
- Nếu $n^2+6n+10=1$ thì $(n+3)^2=0$. Suy ra $n=-3$ (loại do n là số tự nhiên)
Vậy n = 3 thoả mãn bài toán.</td>
<td>0,5 điểm
0,5 điểm
0,5 điểm
0,5 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>2) Ta có: $5\left(a^3+b^3\right)=13\left(c^3+d^3\right)$
$a^3+b^3+c^3+d^3=6\left(a^3+b^3-2c^3-2d^3\right)$
Do $6\left(a^3+b^3-2c^3-2d^3\right)$ chia hết cho 6 nên $a^3+b^3+c^3+d^3$ chia hết cho 6
Xét hiệu $\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)-(a+b+c+d)$
$=\left(a^3-a\right)+\left(b^3-b\right)+\left(c^3-c\right)+\left(d^3-d\right)$
mà $\left(a^3-a\right)=a(a-1)(a+1)$ là tích của ba số thự nhiên liên tiếp nên $\left(a^3-a\right)\vdots 3$
Tương tự: $\left(b^3-b\right)\vdots 3$; $\left(c^3-c\right)\vdots 3$; $\left(d^3-d\right)\vdots 3$
Mà $a^3+b^3+c^3+d^3$ chia hết cho 6 nên $a+b+c+d$ chia hết cho 6.</td>
<td>0,5 điểm
0,5 điểm
0,5 điểm
0,5 điểm</td>
</tr>
<tr>
<td>Câu IV
6 điểm</td>
<td>

1) Chứng minh được tứ giác $AEKD$ là hình chữ nhật.</td>
<td>0,5 điểm</td>
</tr>
</table>

	Khi đó O là trung điểm của DE. ΔDEM vuông tại M có MO là đường trung tuyến ứng với cạnh DE nên $OM = OD = OE = \frac{1}{2}DE$ mà DE = AK (tứ giác $AEKD$ là hình chữ nhật) nên $OM = \frac{1}{2}AK$ ΔAMK có MO là đường trung tuyến ứng với cạnh AK và $OM = \frac{1}{2}AK$ Suy ra ΔAMK vuông tại M.	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm
	2) Gọi H là giao điểm của AK và DM. Chứng minh được tứ giác AECK là hình bình hành nên $AK // MC$ mà $DM \perp MC$. Suy ra $AK \perp DM$ tại H. Xét ΔDMC vuông tại M có MK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền DC nên $KM = KD = KC = \frac{1}{2}DC$ Khi đó ΔDMK cân tại K có $KH \perp DM$ nên AK là đường trung trực của DM. Do AK là đường trung trực của DM nên AD = AM. Khi đó ΔADM cân tại A. mà AD = AM và AM = AB nên ΔABM cân tại A. Do ΔADM cân tại A nên $\widehat{AMD} = \frac{180^0 - \widehat{MAD}}{2}$ Do ΔABM cân tại A nên $\widehat{AMB} = \frac{180^0 - \widehat{MAB}}{2}$ Suy ra $\widehat{AMD} + \widehat{AMB} = \frac{180^0 - \widehat{MAD}}{2} + \frac{180^0 - \widehat{MAB}}{2} = \frac{360^0 - \left(\widehat{MAD} + \widehat{MAB}\right)}{2}$ $\widehat{AMD} + \widehat{AMB} = \frac{360^0 - 90^0}{2} = 135^0$ Khi đó $\widehat{HMN} = 45^0$ nên ΔHMN vuông cân tại M Vậy $\widehat{ANB} = 45^0$.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
	3) Qua E kẻ đường vuông góc với CF cắt CD tại Q. Do tứ giác $AEKD$ là hình chữ nhật nên $EK \perp KD$ nên ΔEKQ vuông cân tại K. Xét ΔEKQ và ΔCDF có: $EK = AD = CD$; $\widehat{EKQ} = \widehat{CDF} = 90^0$; $\widehat{QEK} = \widehat{FCD}$ (cùng phụ $\widehat{EQK}$) Suy ra $\Delta EKQ = \Delta CDF$ (cạnh góc vuông - góc nhọn kề) nên $EQ = CF$ ΔECQ có CF vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên ΔECQ cân tại C. Suy ra: $CQ = CE$ Xét ΔCFQ và ΔCFE có: $CE = CQ$; $\widehat{ECF} = \widehat{QCF}$; FC chung	0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm

	Nên $\Delta CFQ = \Delta CFE$ (c-g-c) Khi đó: $FE = FQ$ nên $FE + FQ = 2EF$ Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có: $QE \le FE + FQ = 2EF$ mà $EQ = CF$ nên $CF \le 2EF$.	0,25 điểm 0,25 điểm
Câu V 2 điểm	Do $ab+bc+ca=abc$ nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ Chứng minh được $\frac{4}{m+n} \le \frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ với mọi m, n dương. Dấu "=" xảy ra khi m = n. Vận dung ta có: $\frac{a}{bc(a+1)} = \frac{a}{abc+bc} = \frac{a}{ab+bc+ca+bc} \le \frac{a}{4}\left(\frac{1}{ab+bc}+\frac{1}{ca+bc}\right)$; dấu " = " xảy ra khi b = c Tương tự: $\frac{b}{ca(b+1)} \le \frac{b}{4}\left(\frac{1}{ab+ca}+\frac{1}{bc+ca}\right)$ dấu "=" xảy ra khi c = a $\frac{c}{ab(c+1)} \le \frac{c}{4}\left(\frac{1}{ab+bc}+\frac{1}{ca+ab}\right)$ dấu "=" xảy ra khi a = b Suy ra $\frac{a}{bc(a+1)}+\frac{b}{ca(b+1)}+\frac{c}{ab(c+1)}$ $\le \frac{a}{4}\left(\frac{1}{ab+bc}+\frac{1}{ca+bc}\right)+\frac{b}{4}\left(\frac{1}{ab+ca}+\frac{1}{bc+ca}\right)+\frac{c}{4}\left(\frac{1}{ab+bc}+\frac{1}{ca+ab}\right)$ $\frac{a}{bc(a+1)}+\frac{b}{ca(b+1)}+\frac{c}{ab(c+1)}$ $\le \frac{1}{4}.\frac{1}{ab+bc}(a+c)+\frac{1}{4}.\frac{1}{bc+ca}(a+b)+\frac{1}{4}.\frac{1}{ca+ab}(b+c)$ $\frac{a}{bc(a+1)}+\frac{b}{ca(b+1)}+\frac{c}{ab(c+1)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ $\frac{a}{bc(a+1)}+\frac{b}{ca(b+1)}+\frac{c}{ab(c+1)} \le \frac{1}{4}$ Vậy GTLN của biểu thức bằng $\frac{1}{4}$ khi a = b = c = 3	 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm

Lưu ý: - Điểm toàn bài làm tròn đến 0,25 đ;
- HS làm cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.