BÀI 18: HÀM SỐ $y = ax^2$

• Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

• Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y.
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các cặp điểm $(x;y)$ trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

• Tính đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong, gọi là đường parabol, có các tính chất sau:
_ Có đỉnh là gốc toạ độ O;
_ Có trục đối xứng là Oy;
_ Nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$

BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định công thức hàm số, điểm thuộc, không thuộc đồ thị hàm số.

1. Cho hàm số $y = ax^2, (a \neq 0)$. Tìm giá trị của a để $x = 2$ thì $y = -8$.

2. Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$ biết đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(-3;1)$.

3. Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a (cm) và chiều cao 12 cm.
a) Viết công thức tính thể tích V của hình lăng trụ theo a và tính giá trị của V khi $a = 5$cm
b) Nếu độ dài đáy tăng lên ba lần thì thể tích của hình lăng trụ thay đổi thế nào?

4. Cho hàm số $y = f(x) = (m-2)x^2$ (m là tham số). Tìm m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0;y_0)$ với $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 5x + 2y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

5. Cho hàm số $y = f(x) = (m+1)x^2$ (m là tham số). Tìm m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(2;-6)$.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0;y_0)$ với $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$
.

6. Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định m để các điểm sau nằm trên parabol:

a) $A(\sqrt{2};m)$ b) $C\left(m;\frac{3}{4}\right)$

7. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{-1}{2}x^2$ có đồ thị (C). Trong các điểm $A\left(2;-2\right)$, $B\left(1;0\right)$, $C\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, điểm nào thuộc đồ thị (C), điểm nào không thuộc? Vì sao?

8. Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y = 5x^2$ biết:

a) Điểm đó có hoành độ bằng -2.

b) Điểm đó có tung độ bằng 5.

9. Tìm m để điểm $M(m;2m)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^2$.

Dạng 2: Vẽ đồ thị hàm số và bài toán liên quan

10. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị hàm số (P).

a) Xác định a biết (P) đi qua điểm $A(1;-2)$.

b) Vẽ đồ thị (P).

c) Tìm điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2 .

11. Cho parabol $(P): y = \dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x + 4$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

12. Cho hàm số $y = \dfrac{a}{2}x^2$ $(a \neq 0)$ có đồ thị là parabol (P).

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3};6)$.

b) Với giá trị a vừa tìm được ở trên, hãy:

i) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

ii) Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 3.

iii) Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

13. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P).
a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.
b) Dựa vào đồ thị, hãy biện luận số giao điểm của đường thẳng $\left(d\right): y = m + 2$ và $\left(P\right)$

14. Hãy xác định hàm số $y = f\left(x\right) = ax^2$ biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A\left(2;4\right)$.

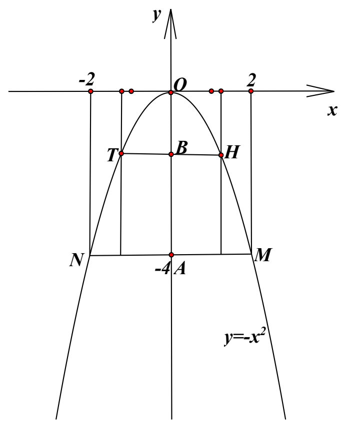
a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho

b) Tìm các điểm trên Parabol có tung độ bằng 16.

c) Tìm m sao cho $B\left(m;m^3\right)$ thuộc Parabol.

d) Tìm các điểm trên Parabol (khác gốc tọa độ) cách đều hai trục tọa độ.

15. Một xe tải có chiều rộng là $2,4$ m chiều cao là $2,5\,\text{m}$ muốn đi qua một cái cổng hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là $4\,\text{m}$ và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (Bỏ qua độ dày của cổng).



a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi Parabol $\left(P\right): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

b) Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

16. Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỉ lệ thuận với bình phương của thời gian. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y (mét) và thời gian chuyển động x (giây) được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$. Người ta thả một vật nặng từ độ cao 55 m trên tháp nghiêng Pi – da xuống đất (sức cản của không khí không đáng kể)

a) Hãy hãy cho biết sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?

b) Khi vật nặng còn cách đất $25\,\text{m}$ thì nó đã rơi được thời gian bao lâu?

17. Một hòn đá rơi xuống một cái hang, khoảng cách rơi xuống được cho bởi công thức $h = 4,9.t^2\left(\text{m}\right)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây.

a) Hãy tính độ sâu của hang nếu mất 3s để hòn đá chạm đáy.

b) Nếu hang sâu $122,5\text{m}$ thì phải mất bao lâu để hòn đá chạm tới đáy.

18. Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi vận tốc gió bằng $2\,\text{m/s}$ thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng $120\,\text{N}$ (Niu-tơn).

a) Tính hằng số a.

b) Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000 N, hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc gió $90\,\text{km/h}$ hay không?

19. Động năng (tính bằng Jun) của một quả bưởi rơi được tính bằng công thức $K = \dfrac{mv^2}{2}$ với m là khối lượng của quả bưởi $\left(\text{kg}\right)$, v là vận tốc của quả bưởi rơi $\left(\text{m / s}\right)$. Tính vận tốc rơi của quả bưởi nặng 1 kg tại thời điểm quả bưởi đạt được động năng là $32\,\text{J}$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2$. Biết đồ thị đi qua điểm $A(10;30)$.

Bài 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$. Hoàn thành bảng giá trị sau

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y							

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{5}x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Trong các điểm $A\left(1;\frac{2}{5}\right); B\left(-2;\frac{6}{5}\right); C\left(\frac{3}{2};\frac{9}{20}\right)$, điểm nào thuộc (P), điểm nào không thuộc (P)

Bài 4: Cho parabol $y = 2x^2$. Xác định m để các điểm sau nằm trên parabol:

a) $A(1;m)$ b) $B(2;m)$ c) $C(m;8)$

Bài 5: Xác định m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ đi qua điểm $A(1;2)$. Với m tìm được, đồ thị hàm số có đi qua điểm $B(2;9)$ hay không?

Bài 6: Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 - 1)x^2$ (m là tham số). Tìm m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2};2\right)$.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0;y_0)$ với $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

c) Vẽ đồ thị hàm số với các giá trị m tìm được trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Bài 7: Cho hàm số $y = \mathrm{ax}^2$ $(a \neq 0)$.

a) Xác định a để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;2)$.

b) Với giá trị a vừa tìm được ở trên, hãy:

i) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

ii) Tìm các điểm trên đồ thị có tung độ bằng 4.

iii) Tìm các điểm trên đồ thị và cách đều hai trục toạ độ.

Bài 8: a) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O và điểm $M(2;4)$.

b) Viết phương trình parabol dạng $y = \mathrm{ax}^2$ và đi qua điểm $M(2;4)$.

c) Vẽ parabol và đường thẳng trên trong cùng một hệ trục toạ độ và tìm toạ độ giao điểm của chúng.

BÀI 19:
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

• Phương trình b ậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $\mathrm{ax}^2 + bx + c = 0$. Trong đó x là ẩn, a, b, c, là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$
• Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt
✯ Nếu $A.B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
✯ Nếu $A^2 = B\left(B \geq 0\right)$ thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$
Chú ý: Để giải phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx = c$, ta có thể cộng thêm vào hai vế của phương trình với cùng một số thích hợp để vế trái có thể biến đổi thành một bình phương. Từ đó có thể giải phương trình đã cho
• Công thức nghiệm của phương trình bậc hai.
Xét phương trình bậc hai một ẩn $\mathrm{ax}^2 + bx + c = 0 \ \left(a \neq 0\right)$

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
• Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai.
Xét phương trình bậc hai một ẩn $\mathrm{ax}^2 + bx + c = 0 \ \left(a \neq 0\right)$ có $b = 2b'; \Delta' = b'^2 - ac$

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a}$

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a}$

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng và tìm hệ số của các phương trình bậc hai một ẩn

1. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c.

a) $3 - x^2 = 0$; b) $x^2 - x = 3x + 1$;

c) $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x + 2$; d) $(x-1)^2 = 3(x+1)$.

2. Phương trình nào sau dây đưa được về phương trình bậc hai? Xác định hệ số a của phương trình đó (m là hằng số)

a) $1 + mx = x^2$; b) $1 + mx = m^2$;

c) $m^2x^2 - 4mx = -\sqrt{2}x^2 + 1$; d) $m(x-1)^2 = mx^2 - 1$

Dạng 2: Giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt

3. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 2x = 0$; b) $\sqrt{3}x^2 = 2x$; c) $-3x^2 + 12 = 0$

4. Giải các phương trình sau

a) $4x^2-9=0$; b) $x^2-2\sqrt{2}x=0$ c) $x^2-5=0$

5. Biến đổi về phương trình tích và giải các phương trình sau:

a) $x^2+x-2=0$; b) $x^2-3x+2=0$ c) $x^2+3x-4=0$

6. Biến đổi về dạng bình phương để giải phương trình sau:

a) $(x+1)^2=4$. b) $x^2+2x=3$.

c) $2x^2+4x-7=0$. d) $4x^2+8x-5=0$.

7. Biến đổi về dạng bình phương để giải phương trình sau:

a) $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$. b) $x^2-4x=5$.

c) $2x^2-8x+5=0$. d) $4x^2-16x-9=0$.

8. Biến đổi về dạng bình phương để giải phương trình sau:

a) $x^2-x=2$; b) $2x^2-2x-5=0$; c) $x^2-x+1=0$

Dạng 3: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm cho trước thoả mãn

9. Với giá nào của m thì phương trình sau có nghiệm bằng 1

a) $x^2+m^2=4x$. b) $x^2-(m+3)x+m^2=0$.

10. Với giá nào của m thì phương trình sau có nghiệm bằng 1

a) $x^2-m^2+4=0$. b) $m^2+4mx-5=0=0$.

Dạng 4: Sử dụng công thức nghiệm để giải phương trình bậc hai.

11. Giải các phương trình:

a) $5x^2-7x-6=0$ b) $x^2+2x-1=0$

c) $2x^2+5x+1=0$ d) $2x^2-\left(2\sqrt{6}+3\right)x+3\sqrt{6}=0.$

12. Xác định các hệ số a,b,c; tính biệt thức Δ, từ đó áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình sau:

a) $x^2-3x+2=0$; b) $-2x^2+x+1=0$

c) $x^2-4x+4=0$; d) $x^2-x+4=0$

13. Giải các phương trình sau

a) $2x^2-2x+0,5=0$; b) $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$.

c) $x^2-\sqrt{3}x=-1$. d) $\sqrt{2}(x^2-2)=4x$.

14. Giải các phương trình sau

a) $x^2-x+1=0$ b) $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

c) $x^2+\sqrt{8}x=2$; d) $-x^2-\sqrt{5}x=1$

Dạng 5: Tìm điều kiện của tham số thoả mãn điều kiện cho trước

15. Cho phương trình $mx^2-3x+1=0$ (m là tham s?). Tìm m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt.

b) Có nghiệm kép.

c) Vô nghiệm.

d) Có đúng một nghiệm.

16. Chứng tỏ rằng khi một phương trình $ax^2+bx+c=0$ có các hệ số a và c trái dấu thì phương trình đó luôn có nghiệm.

Vận dụng: Không tính Δ, hãy giải thích vì sao các phương trình sau đây có nghiệm

a) $3x^2+2x-5=0$.

b) $-x^2+3x+\sqrt{2}-1=0$.

c) $5x^2+2x-m^2-1=\sqrt{2}x+2$.

d) $\sqrt{2}mx^2+x-m=0$ $(m\neq 0)$.

17. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì phương trình sau luôn có nghiệm.

a) $x^2-(m+2)x+2m=0$.

b) $x^2-2mx+(m-1)=0$.

18. Cho phương trình $mx^2-\left(2m+1\right)x+\left(m+1\right)=0$ (m là tham số) $\quad\left(1\right)$

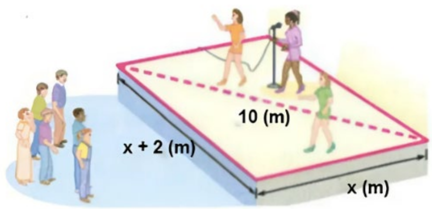
a) Giải phương trình $\left(1\right)$ với $m=-\dfrac{3}{5}$.

b) Chứng minh rằng phương trình $\left(1\right)$ luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Tìm giá trị của m để phương trình $\left(1\right)$ có một nghiệm lớn hơn 2.

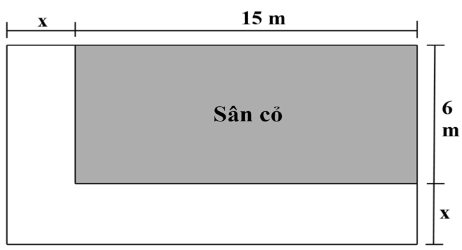
Dạng 6: Toán thực tế

19. Một sân khấu hình chữ nhật có các kích thước như hình dưới. Hãy tìm chiều dài, chiều rộng của sân khấu.



20. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 8 m và có diện tích là $128m^2$. Tính các kích thước của mảnh vườn đó.

21. Người ta làm một lối đi theo chiều dài và chiều rộng của một sân cỏ hình chữ nhật như hình. Em hãy tính chiều rộng x của lối đi. Biết rằng lối đi có diện tích bằng $46\,\text{m}^2$, sân cỏ có chiều dài $15\,\text{m}$, chiều rộng $6\,\text{m}$.



Bài tập tự luyện

Bài 1: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2+bx+c=0$ và chỉ rõ các hệ số a,b,c.

a) $3x-x^2=0$; b) $x^2-3x=2x-3$.

c) $3x^2-4x=\sqrt{2}x^2-2$; d) $(x+1)^2=2(x-1)$.

Bài 2: Phương trình nào sau dây đưa được về phương trình bậc 2? Xác định hệ số a của phương trình đó (m là hằng số)

a) $x=x^2-m$; b) $m=m^2-mx$

c) $(m^2-1)x^2-mx=-3x^2$; d) $m(x-1)^2=x(1+mx)$

Bài 3: Giải phương trình

a) $x^2-3x=0$; b) $x^2=\sqrt{2}x$; c) $x^2-2=0$

Bài 4: Biến đổi về phương trình tích và giải các phương trình sau:

a) $5x^2+6x-11=0.$ b) $3x^2-5x+2=0$ c) $x^2-3x+2=0$

Bài 5: Biến đổi về dạng bình phương để giải phương trình sau:

a) $x^2-3x+\frac{9}{4}=0$. b) $x^2-3x-4=0$.

c) $2x^2-6x+3=0$. d) $x^2-3x+3=0$.

Bài 6. Giải các phương trình sau

a) $x^2+2x=0$. b) $x^2-5=0$.

c) $x^2+2x-8=0$. d) $2x^2+4x-5=0$.\

Bài 7: Xác định các hệ số a,b,c; tính biệt thức Δ, từ đó áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình sau:

a) $x^2-x-2=0$; b) $-x^2-5x+6=0$.

c) $4x^2-4x+1=0$. d) $x^2-3x+4=0$.

Bài 8: Cho phương trình $mx^2-2x+1=0$ (m là tham số) Tìm m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt. b) Có nghiệm kép.

c) Vô nghiệm. d) Có đúng một nghiệm.

BÀI 20:
ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG

• Nếu x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình $\mathrm{ax}^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

• Cách nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình $\mathrm{ax}^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

✯Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \dfrac{c}{a}$

✯Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\dfrac{c}{a}$

• Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$

• Các hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm thường được vận dụng để giải toán.

1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

3) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2$.

4) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$.

5) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$ với $x_1, x_2 \neq 0$.

6) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$ với $x_1, x_2 \neq 0$

7) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.

BÀI TẬP

Dạng 1. Sử dụng hệ thức Viète để tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình

1. Đối với mỗi phương trình sau, ký hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (nếu có) Không giải phương trình hãy điền vào chỗ trống

a) $x^2 + 4x - 5 = 0, \Delta' = \ldots, x_1 + x_2 = \ldots, x_1x_2 = \ldots.$

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0, \Delta' = \ldots, x_1 + x_2 = \ldots, x_1x_2 = \ldots.$

c) $3x^2 - x - 3 = 0, \Delta = \ldots, x_1 + x_2 = \ldots, x_1x_2 = \ldots.$

d) $x^2 - 7x + 5 = 0, \Delta = \ldots, x_1 + x_2 = \ldots, x_1x_2 = \ldots.$

2. Không giải phương trình sau, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

a) $x^2 - 3x - 5 = 0$.

b) $5x^2 + 7x - 12 = 0$.

c) $4x^2 - 7x - 2 = 0$.

d) $\sqrt{3}x^2 - 21x - 12 = 0$.

Dạng 2. Sử dụng hệ thức Viète để tính giá trị biểu thức

3. Cho phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$. Không giải phương trình, gọi là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

a) $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) $B = \left|x_1 - x_2\right|$.

c) $C = \dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

4. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức

a) $A = 3(x_1 + x_2) + x_1x_2$.

b) $B = x_1^2 + x_2^2$.

c) $C = (x_1 - x_2)^2$.

d) $D = \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2}$.

Dạng 3. Sử dụng hệ thức Viète để tìm giá trị của tham số thoả mãn điều kiện cho trước.

5. Cho phương trình $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình trên khi $m = 6$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1 - x_2\right| = 3$.

6. Giải phương trình $x^2 - 2\left(m - 1\right)x - m - 3 = 0$ $\left(1\right)$ (với m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = -3$.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $\left(1\right)$có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

7. Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 4m - 5\ \left(1\right)$ (m là tham số).

a) Giải phương trình $\left(1\right)$ khi $m = -2$.

b) Chứng minh phương trình $\left(1\right)$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Gọi x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình $\left(1\right)$. Tìm m để: $\frac{1}{2}x_1^2 - \left(m-1\right)x_1 + x_2 - 2m + \frac{33}{2} = 762019$.

8. Cho phương trình: $x^2 - mx - 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1 < x_2$ và $\left|x_1\right| - \left|x_2\right| = 6$.

9. Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + 3m - 3 = 0\ \ \left(1\right)$, với x là ẩn, m là tham số.

a) Giải phương trình $\left(1\right)$ khi $m = -1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

10. Cho phương trình: $x^2 + 5x + m = 0$ (*) (m là tham số)

a) Giải phương trình (*) khi $m = -3$.

b) Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $9x_1 + 2x_2 = 18$.

11. Tìm các giá trị của tham số thực *m* để phương trình $x^2 - \left(2m-3\right)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $\left|x_1 - x_2\right| = 7$.

12. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị nguyên của m để biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Dạng 4. Sử dụng hệ thức Viète để tìm giá trị của tham số thoả mãn bất phương trình cho trước

13. Cho phương trình: $x^2 - \left(m-1\right)x - m = 0$ (1) (với x là ẩn số, m là tham số). Xác định các giá trị của *m* để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1\left(3 - x_2\right) + 20 \geq 3\left(3 - x_2\right)$.

14. Cho phương trình $x^2 - 2\left(m+2\right)x + m^2 + 3m - 2 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $A = 2018 + 3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

15. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x - m^2 - 1 = 0$,với m là tham số.

a) Chứng minh rằng với mọi m ,phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = {x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1x_2$

Dạng 5. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số.

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

Bước 2: Áp dụng định lí Vi-et, ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1x_2 = g(m) \end{cases}$ (I)

Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

16. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m - 5 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

17. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với $m = -3$.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào giá trị của m.

18. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m - 1 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m.

Dạng 6. Xét dấu hai nghiệm của phương trình bậc hai
Phương pháp

- Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \left(\Delta' \geq 0\right) \end{cases}$.

- Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi $\begin{cases} \Delta > 0 \left(\Delta' > 0\right) \\ P > 0 \end{cases}$

🌍 Phương trình có hai nghiệm trái dấu $P < 0$. (Khi phương trình có hai nghiệm trái dấu không cần điều kiện $\Delta > 0\left(\Delta' > 0\right)$ do khi $P < 0$ thì hiển nhiên $\Delta > 0\left(\Delta' > 0\right)$)

🌍 Phương trình có hai nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0\left(\Delta' > 0\right) \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1x_2 > 0 \end{cases}$

🌍 Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0\left(\Delta' > 0\right) \\ S = x_1 + x_2 < 0 \\ P = x_1x_2 > 0. \end{cases}$

19. Cho phương trình $x^2 - 2\left(m+1\right) + m^2 - 4m + 3 = 0$ (với m là tham số).

a) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.

c) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm khác dấu.

d) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương.

e) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm âm.

20. Cho phương trình$\left(m-1\right)x^2 - 2mx + 1 = 0 \quad \left(1\right)$ với m là tham số.

a) Tìmm để phươngt rình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

21. Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt.

b) Có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

d) Có hai nghiệm dương phân biệt.

e) Có hai nghiệm âm phân biệt.

Dạng 7. Tìm hai số khi biết tổng và tích của hai số

22. Tìm hai số x và y biết

a) $x + y = 18$ và $xy = 77$.

b) $x + y = -3$ và $xy = 5$.

c) $x - y = 2\sqrt{3}$ và $xy = 1$.

d) $x^2 + y^2 = 34$ và $xy = -15$.

23. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\sqrt{3}-1$ và $\sqrt{3}+1$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Đối với mỗi phương trình sau, ký hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (nếu có) Không giải phương trình hãy điền vào chỗ trống

a) $x^2+3x-4=0, \Delta=\ldots, x_1+x_2=\ldots, x_1x_2=\ldots.$

b) $x^2-6x+9=0, \Delta=\ldots, x_1+x_2=\ldots, x_1x_2=\ldots.$

c) $2x^2-x-5=0, \Delta=\ldots, x_1+x_2=\ldots, x_1x_2=\ldots.$

d) $x^2-5x-1=0, \Delta=\ldots, x_1+x_2=\ldots, x_1x_2=\ldots.$

Bài 2: Không giải phương trình sau, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

a) $x^2-2x-5=0$.

b) $-5x^2+3x+7=0$.

c) $5x^2-7x-3=0$.

d) $\sqrt{2}x^2-10x-2=0$.

Bài 3. Cho phương trình $x^2-2x-5=0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức
$B=x_1^2+x_2^2$; $C=x_1^5+x_2^5$

Bài 4. a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-2x-11=0$

Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T=x_1^2-x_1x_2+x_2^2$

b) Cho phương trình $3x^2-x-1=0$ có hai nghiệm là $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $A=x_1^2+x_2^2$

Bài 5. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$ (1), *m* là tham số.

a) Tìm *m* để $x=2$ là nghiệm của phương trình (1).
b) Xác định *m* để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:
$x_1^2+x_2^2=10$

Bài 6. Cho phương trình $x^2-x+m+1=0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với m = - 3

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $\left|x_1-x_2\right|=2$

Bài 7. Cho phương trình $x^2-2x-m+1=0$ (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 2 và tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm dương $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=2$

Bài 8. Cho phương trình $x^2 + 2mx + m^2 + m = 0 \left(1\right)$ (Với x là ẩn số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -1$.
b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt
c) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right) = 32$

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $2x^2 - \left(m+5\right)x - 3m^2 + 10m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - \left(x_1 + x_2\right) + x_1.x_2 = 4.$

Bài 10. Cho phương trình: $x^2 + (m-2)x + m - 3 = 0$ (ẩn x, tham số m).

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức

$A = 1 - x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 11. Cho phương trình $x^2 - mx + m - 4 = 0$ (1) (x là ẩn số và m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi m = 8

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của m để $\left(5x_1 - 1\right)\left(5x_2 - 1\right) < 0$

Bài 12. Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$.
a) Giải phương trình với $m = -11$.
b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình
a) Có hai nghiệm trái dấu.

b) Có hai nghiệm phân biệt.

c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

d) Có hai nghiệm dương phân biệt.

e) Có hai nghiệm âm phân biệt.

Bài 14. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

a) $u + v = 5$ và $uv = -14$.

b) $u + v = -4$ và $uv = -21$.

TƯƠNG GIAO GIỮA HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

• Để tìm tọa độ giao điểm của $(P)\ y = ax^2\ \left(a \neq 0\right)$ và $(d)\ y = mx + n$, ta tiến hành làm các bước như sau:

Bước 1: Lập phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$: $ax^2 = mx + n \qquad \left(I\right)$

Bước 2: Tìm số giao điểm.

Nếu $\left(I\right)$ vô nghiệm thì $\left(d\right)$ không cắt (P).

Nếu $\left(I\right)$ có 2 nghiệm phân biệt thì (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

Nếu $\left(I\right)$ có nghiệm kép nghiệm thì (d) tiếp xúc (P) tại 1 điểm.

Bước 3: Nếu phương trình $\left(I\right)$ có nghiệm x_i thì suy ra tung độ giao điểm là $y_i = ax_i^2$ hoặc $y_i = mx_i + n$.

BÀI TẬP

1. Tìm m để Parabol $\left(P\right): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2\left(m+1\right)x - m^2 - 9$. Tìm m để

a) d cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt.

b) d tiếp xúc với $\left(P\right)$.

c) d và $\left(P\right)$ không có điểm chung.

2. Cho Parabol $\left(P\right): y = -\frac{1}{2}x^2$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với $\left(P\right)$ tại điểm có hoành độ bằng -2.

3. Cho Parabol $\left(P\right): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $d: y = mx - m + 2$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì d và $\left(P\right)$ luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Giả sử $A\left(x_1; y_1\right)$ và $B\left(x_2; y_2\right)$ là các giao điểm của d và $\left(P\right)$. Chứng minh rằng

$$y_1 + y_2 \geq \left(2\sqrt{2} - 1\right)\left(x_1 + x_2\right)$$

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P): $y = mx^2\left(m > 0\right)$ và đường thẳng (d): $y = 2x - m^2$.

a) Tìm m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó chứng minh A và B cùng nằm về một phía với trục tung.

b) Với m tìm được ở câu a). Gọi x_A, x_B theo thứ tự là hoành độ các điểm A và B. Tìm m để biểu thức $K = \dfrac{2}{x_A + x_B} + \dfrac{1}{4x_Ax_B + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

6. Cho parabol $(P): y = \dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

7. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

b) Đường thẳng $y = 8$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A và B, trong đó điểm B có hoành độ dương. Gọi H là chân đường cao hạ từ A của tam giác OAB, với O là gốc tọa độ. Tính diện tích tam giác AHB (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).

8. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a) Vẽ đồ thị (P) trên hệ trục tọa độ Oxy.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng -1 và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng 1.

c) Với (d) vừa tìm được, tìm tọa độ giao điểm còn lại của (d) và (P).

9. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - m$ (m là tham số).

a) Vẽ parabol (P).

b) Với $m = 0$, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) bằng phương pháp đại số.

c) Tìm điều kiện của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

10. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + b$. Xác định giá trị của b bằng phép tính để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P).

11. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - 2$ (với m là tham số)
a) Vẽ parabol (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\left(x_1 + 2\right)\left(x_2 + 2\right) = 0$.

12. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x - 2m + 5$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ tương ứng là x_1, x_2 dương và $\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = 2$.

13. Tìm a, b để đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 4x + 5$ và cắt đồ thị hàm số $y = x^2$ tại hai điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = 2x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x + m$ (m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng d đi qua điểm $M(-2;3)$.

b) Tìm điều kiện của m để parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d), xác định m để

$$\left(1 - x_1x_2\right)^2 + 2\left(y_1 + y_2\right) = 16.$$

Bài tập tự luyện:
Bài 1: Trên cùng một hệ trục tọa độ vẽ đồ thị của hai hàm số $y = x + 2$ và $y = x^2$. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị đó.

Bài 2: a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2$ (P);

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng $(d): y = -x + 3$.

Bài 3: Cho Parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}x + 3$.

a) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 4: Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = -x + 2$.

a) Vẽ đồ thị các hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị đó.

Bài 5: a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$.

b) Đường thẳng song song với trục hoành, cắt trục tung có tung độ bằng 2 và cắt parabol $y = x^2$ tại hai điểm M, N. Tính diện tích tam giác OMN.

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = x - 2m$ và Parabol $(P): y = 2x^2$. Xác định giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 7: Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 5$.

Bài 8: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx + 1 - m^2$ (m là tham số)

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1; -9)$.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

Bài 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y = 2x - m + 1$ (với m là tham số)

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x^2 + x_1^2 = 2\left(x_1 + x_2\right)$.

BÀI 21:
GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

• Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình
Bước 1: Lập phương trình
- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình
Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem nghiệm nào trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận

BÀI TẬP

Dạng 1. Toán số học, phần trăm

Biểu diễn:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b\left(a, b \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9\right)$$

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c\left(a, b, c \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9\right)$$

Tỉ số của hai số a và b $\left(b \neq 0\right)$ là $\frac{a}{b}$.

Tổng số của hai số x và y là $x + y$.

Tổng bình phương hai số x và y là $x^2 + y^2$.

Tổng nghịch đảo của hai số x và y là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

1. Một số tự nhiên nhỏ hơn bình phương của nó 20 đơn vị. Tìm số tự nhiên đó.

2. Trong lúc học nhóm bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

3. Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của nó là 85.

4. Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 5 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Dạng 2. Toán năng suất, công việc

Khối lượng công việc = Năng suất × Thời gian.

Năng suất = Khối lượng công việc ÷ Thời gian

Thời gian = Khối lượng công việc ÷ Năng suất

5. Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kĩ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó, không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn làm thêm được 10 sản phẩm so với dự định. Tính năng suất dự định.

6. Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 30 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 2 xe nên mỗi xe chở ít hơn $0,5$ tấn hàng. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc xe?

7. Một đoàn xe nhận chở 480 tấn hàng. Khi sắp khởi hành, đoàn có thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 8 tấn so với dự định. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc? Biết rằng các xe chở khối lượng hàng bằng nhau.

8. Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

9. Hưởng ứng phong trào "*Vì biển đảo Trường Sa*" một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa dã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau?

10. Một công ty X dự định điều động một số xe để chở 100 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì 5 xe được điều đi làm việc khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 1 tấn hàng so với dự định. Tính số xe mà công ty X dự định điều động, biết mỗi xe chở khối lượng hàng bằng nhau.

11. Một nhóm học sinh được giao sắp xếp 270 quyển sách vào tủ ở thư viện trong một thời gian nhất định. Khi bắt đầu làm việc nhóm được bổ sung thêm học sinh nên mỗi giờ nhóm sắp xếp nhiều hơn dự định 20 quyển sách, vì vậy không những hoàn thành trước dự định 1 giờ mà còn vượt mức được giao 10 quyển sách. Hỏi số quyển sách mỗi giờ nhóm dự định sắp xếp là bao nhiêu?

12. Một phân xưởng theo kế hoạch phải may 1200 bộ quần áo trong một thời gian quy định. Khi thực hiện, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 4 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng may bao nhiêu bộ quần áo?

13. TSKH_2022. Theo kế hoạch, Công an tỉnh Khánh Hòa sẽ cấp 7200 thẻ Căn cước công dân cho địa phương A. Một tổ công tác được điều động đến địa phương A để cấp thẻ Căn cước công dân trong một thời gian nhất định. Khi thực hiện nhiệm vụ, tổ công tác đã cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày đã cấp tăng thêm được 40 thẻ Căn cước so với kế hoạch. Vì vậy, tổ công tác đã hoàn thành nhiệm vụ sớm hơn kế hoạch 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày tổ công tác sẽ cấp được bao nhiêu thẻ Căn cước?

14. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Dạng 3 : Toán chuyển động

Sử dụng công thức $S = V.t$; trong đó S là quãng đường, V là vận tốc, t là thời gian.

Suy ra $V = \dfrac{S}{t}; t = \dfrac{S}{V}$.

Nếu chuyển động dòng chảy thì

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$$

15. Một xe máy khởi hành tại địa điểm A đi đến địa điểm B cách A là 160 km, sau đó 1 giờ, một ô tô đi từ B đến A. Hai xe gặp nhau tại địa điểm C cách B là 72 km. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 20 km/giờ. Tính vận tốc của mỗi xe.

16. Một người đi xe máy từ huyện Ngân Sơn đến huyện Chợ Mới cách nhau 100 km. Khi về người đó tặng vận tốc thêm 10 km/h so với lúc đi, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi của xe máy.

17. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc tể đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau $120km$. Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là $10km/h$ nên ô tô thú hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

18. Hằng ngày bạn Mai đi học bằng xe đạp, quãng đường từ nhà đến trường dài 3 km. Hôm nay, xe đạp hư nên Mai nhờ mẹ chở đi đến trường bằng xe máy với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi xe đạp là 24 km/h, cùng một thời điểm khởi hành như mọi ngày nhưng Mai đã đến trường sớm hơn 10 phút. Tính vận tốc của bạn Mai khi đi học bằng xe đạp.

19. Một ô tô khách và một ô tô tải chở vật liệu xây dựng khởi hành cùng một lúc từ bến xe khách Lai Châu đến trung tâm thị trấn Mường Tè. Do trọng tải lớn nên xe tải chở vật liệu xây dựng đi với vận tốc chậm hơn xe khách 10 *km/h*. Xe khách đến trung tâm thị trấn Mường Tè sớm hơn xe tải 1 *giờ* 6 *phút*. Tính vận tốc mỗi xe biết quãng đường từ bến xe khách thành phố Lai Châu đến trung tâm thị trấn Mường Tè là 132 *km*.

20. Một cano xuôi dòng một khúc sông dài 40 km, rồi ngược dòng khúc sông ấy mất 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc thực của ca nô (khi nước yên lặng) biết vận tốc của dòng nước là 2 km/h.

21. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120km. Cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là $4\text{km}/\text{h}$.

22. Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cùng lúc đó, một chiếc bè trôi từ A đến B với vận tốc dòng nước là 4 km. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

23. Một chiếc ca nô theo dòng sông từ A đến B, rồi ngược dòng từ B về A hết 5 giờ. Tìm vận tốc riêng của ca nô (vận tốc của ca nô khi dòng nước đứng yên), biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h và khoảng cách từ A đến B là 48 km.

24. Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại một giờ ở thị trấn Nam Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường đi 5 km và với vận tốc lúc về nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

Dạng 4 : Dạng toán có nội dung hình học

Áp dụng các công thức sau:

Định lý Phythagore: ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Diện tích hình chữ nhật: $S = a.b$; với a là chiều dài, b là chiều rộng.

Diện tích hình thang: $S = \dfrac{\left(a+b\right)}{2}.h$ hoặc $S = m.h$. Trong đó a,b là độ dài hai đáy; h là chiều cao; m là độ dài đường trung bình.

25. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng $1,5\text{m}$. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là 4329m^2.

26. Nhà bạn An có một mảnh vườn hình chữ nhật, chiều dài lớn hơn chiều rộng 6m. Diện tích của mảnh vườn bằng $216m^2$. Tính chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn nhà bạn An.

27. Một mảnh đất hình chữ nhật có đường chéo là $13m$. Biết chiều dài mảnh đất lớn hơn chiều rộng mảnh đất là $7m$ .Hãy tính diện tích hình chữ nhật đó

28. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $6m$ và độ dài đường chéo bằng $\dfrac{\sqrt{65}}{4}$ lần chiều rộng. Tính diện tích của mảnh đất hình chữ nhật đã cho.

Dạng 5 : Dạng toán làm chung, làm riêng

29. Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân thứ nhất hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu thì xong việc?

30. Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

Dạng 6 : Dạng toán khác

31. Chu vi bánh sau của một máy cày lớn hơn chu vi bánh trước là $1,5\,\mathrm{m}$. Khi đi trên đoạn đường dài $100\ \mathrm{m}$ thì bánh trước quay nhiều hơn bánh sau 15 vòng. Tính chu vi của mỗi bánh xe.

32. Miếng kim loại thứ nhất nặng $880\,\mathrm{g}$, miếng kim loại thứ hai nặng $858\ \mathrm{g}$. Thể tích của miếng kim loại thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng kim loại thứ hai là $10\,\mathrm{cm}^3$, nhưng khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất lớn hơn miếng kim loại thứ hai là $1\ \mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$. Tính khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại. (Biết rằng khối lượng riêng của một vật được xác định bởi công thức $D = \dfrac{M}{V}$ trong đó D là khối lượng riêng tính bằng đơn vị $\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3, m$ là khối lượng tính bằng đơn vị g, V là thể tích tính bằng đơn vị cm^3.)

Dạng 7. Kết hợp hệ phương trình và phương trình

33. Hai đội công nhân đắp đê ngăn triều cường. Nếu hai đội cùng làm thì trong 6 ngày là xong việc. Nếu làm riêng thì đội I hoàn thành công việc chậm hơn đội II là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội đắp xong đê trong bao nhiêu ngày?

34. Hai đội công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì hoàn thành được $\dfrac{2}{3}$ công việc. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của mỗi đội là bao nhiêu?

35. Một nhóm học sinh có kế hoạch trồng 200 cây tràm giúp gia đình bạn An. Vì có 2 học sinh bị bệnh không tham gia được nên mỗi học sinh còn lại phải trồng thêm 5 cây so với dự định để hoàn thành kế hoạch.(Biết số cây mỗi học sinh trồng là như nhau). Tính số học sinh thực tế đã trồng cây.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 90 km. Tốc độ của xe thứ hai nhanh hơn tốc độ xe thứ nhất là $10\ \mathrm{km}/\mathrm{h}$ nên đã đến sớm hơn xe thứ hai 27 phút. Tính tốc độ của mỗi xe..

Bài 2: Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau $30\ \mathrm{km}$. Khi đi từ B trở về A, nhờ xuôi gió nên tốc độ lúc về nhanh hơn tốc độ lúc đi là $5\ \mathrm{km/h}$, vì thế thời gian về ít hơn thời gian đi là 5 phút. Tính tốc độ của xe máy khi đi từ A đến B.

Bài 3: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là $12\ \mathrm{km}$. Một tàu du lịch đi từ bến A đến bến B, nghỉ 60 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Thời gian kể từ lúc khởi hành đến khi về đến bến A là $3,5$ giờ. Hãy tìm vận tốc thực của tàu du lịch (tức là vận tốc của tàu khi nước yên lặng), biết rằng vận tốc của dòng nước là $2\ \mathrm{km/h}$.

Bài 4: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi $80\ \mathrm{m}$. Người ta đề một lối đi xung quanh vườn rộng $2\ \mathrm{m}$. Phần đất còn lại dùng để trồng hoa có diện tích là $156\ \mathrm{m}^2$ Tính chiều rộng và chiều dài của khu vườn đó. Biết chiều rộng ngắn hơn chiều dài.

Bài 5: Một mành đất có dạng hình chữ nhật, chiều dài hơn chiều rộng $6\ \mathrm{m}$, độ dài đường chéo là $30\ \mathrm{m}$. Tính diện tích của mảnh đất đó. $120\ \mathrm{m}^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Bài 6: Một đoàn xe nhận chờ 480 tấn hàng. Khi sắp khởi hành, đoàn xe có thêm 3 xe nữa nên mồi xe chờ ít hơn 8 tấn so với dự định. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc? Biết rằng các xe chở khối lượng hàng bằng nhau.

Bài 7: Một tỉnh A dự dịnh dùng một số xe cùng loại chờ 12 tấn hàng hoá . Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được hỗ trợ thêm 5 xe cùng loại nữa, nên mỗi xe chờ ít hơn $200\ \mathrm{kg}$ hàng hoá. Hỏi lúc đi đoàn xe có bao nhiêu chiếc? (Biết khối lượng hàng mỗi xe chở là như nhau).

Bài 8: Một công ty vận tải dự định điều một số xe tải để vân chuyển 24 tấn hàng. Thực tế khi đến nơi thì công ty bổ sung thêm 2 xe nữa nên mỗi xe chở ít đi 2 tấn so với dự định. Hỏi số xe dự định được điều động là bao nhiêu? Biết số lượng hàng chở ở mỗi xe như nhau và mỗi xe chở một lượt.

Bài 9: Một nhóm gồm 15 học sinh (cà nam và nữ) tham gia buổi lao động trồng cây. Các bạn nam trồng được 30 cây, các bạn nữ trồng được 36 cây. Mỗi bạn nam trồng được số cây như nhau và mỗi bạn nữ trồng được số cây như nhau. Tính số học sinh nam và số học sinh nữ của nhóm? Biết rằng mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây.

Bài 10: Một đội máy xúc được thuê đào $20000\ \mathrm{m}^3$ đất đề mở rộng hồ Dầu Tiếng. Ban đầu đội dự định mỗi ngày đào một lượng đất nhất định đề hoàn thành công việc, nhưng khi đào được $5000\ \mathrm{m}^3$ thì đội được tăng cường thêm một số máy xúc nên mỗi ngày đào thêm được $100\ \mathrm{m}^3$, do đó đã hoàn thành công việc trong 35 ngày. Hỏi ban đầu đội dự định mỗi ngày đào bao nhiêu đất?

Bài 11: Một đội xe cần vận chuyển 160 tấn gạo với khối lương mỗi xe chở bằng nhau. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 4 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn dự định lúc đầu 2 tấn gạo (khối lượng mỗi xe chờ vẫn bằng nhau). Hỏi đội xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

Bài 12: Một đội xe dự định chở 120 tấn hàng. Để tăng sự an toàn nên đến khi thực hiện, đội xe được bổ sung thêm 4 chiếc xe, lúc này số tấn hàng của mỗi xe chở ít hơn số tấn hàng của mỗi xe dự định là 1 tấn. Tính số tấn hàng của mỗi xe dự định chở? Biết số tấn hàng của mỗi xe chở khi dự định là bằng nhau, khi thực hiện là bằng nhau.

Bài 13: Một xưởng có kế hoạch in xong 6000 quyển sách giống nhau trong một thời gian quy định, biết số quyển sách in được trong mỗi ngày là bằng nhau. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã in nhiều hơn 300 quyển sách so với số quyển sách phải in trong một ngày theo kế hoạch, nên xưởng in xong 6000 quyển sách nói trên sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Tính số quyển sách xưởng in được trong mỗi ngày theo kế hoạch.

Bài 14: Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Bài 15: Một lớp học có 42 học sinh dự buổi sinh hoạt ngoại khóa được sắp xếp đều nhau trên các băng ghế. Nếu ta bớt đi 1 băng ghế thì mỗi băng ghế còn lại phải xếp thêm 1 học sinh. Tính số băng ghế lúc đầu.

Bài 16: Ban đầu, khán đài của nhà thi đấu các nội dung thuộc môn Bơi tại SEA Games chứa 1188 ghế được xếp thành các dãy, số lượng ghế ở các dãy bằng nhau. Để phục vụ đông đảo khán giả hơn, khán đài sau đó đã được lắp thêm 2 dãy ghế và mỗi dãy được lắp thêm 4 ghế. Vì thế, khán đài được tăng thêm 254 ghế. Tìm số dãy ghế ban đầu của khán đài.

Bài 17: Một nhóm học sinh của lớp $9\,A$ được giao nhiệm vụ trồng 12 cây tùng. Nhưng khi thực hiện có 2 em được đi làm việc khác nên để hoàn thành kế hoạch mỗi học sinh còn lại phải trồng thêm một cây. Tính số học sinh lúc ban đầu của nhóm? Biết số cây tùng mỗi học sinh trồng đều bằng nhau.

Bài 18: Người ta đổ thêm 20 gam nước vào một dung dịch chứa 4 gam muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu gam nước.

Bài 19: Nếu đổ thêm 50 g nước vào một dung dịch chứa 30 g muối thì nồng độ dung dịch sẽ giảm 10%. Tính nồng độ dung dịch lúc đầu.

Bài 20. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi từ B trở về A, người đó tăng vận tốc 4 km/h so với lúc đi, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi biết rằng quãng đường AB dài 24 km.

Bài 21. Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ 2 tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

BÀI 22:
BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

• **Tần số** của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong mẫu dữ liệu.
• **Bảng tần số** là bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong mẫu dữ liệu. Bảng tần số có dạng sau:

Giá trị	x_1	x_2	…	x_k
Tần số	m_1	m_1	…	m_k

Chú ý: Người ta còn cho bảng tần số ở dạng cột: cột thứ nhất ghi các giá trị, cột thứ hai ghi tần số của các giá trị đó.

• **Biểu đồ tần số**

Biểu đồ biểu diễn bảng tần số được gọi là biểu đồ tần số. Biểu đồ tần số thường gặp đó là biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng.

Nhận xét. Để vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị trong dãy dữ liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số.

Bước 2. Với mỗi giá trị trên trục ngang và tần số tương ứng ta xác định một điểm. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

BÀI TẬP

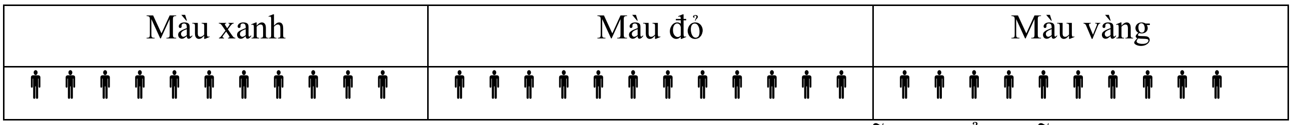
Dạng 1. Lập bảng tần số

1. Kết quả môn nhảy cao (tính theo cm) của học sinh lớp $7A$ được giáo viên thể dục ghi lại như sau:

95	95	100	105	105	110	100	100	105	95
105	110	115	100	105	100	95	105	90	90
120	100	90	100	100	100	100	105	115	100

Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét.

2. Cho biểu đồ tranh biểu diễn số lượng học sinh trong lớp 9A yêu thích các màu sắc xanh, đỏ và vàng như sau:



(Mỗi biểu diễn cho 1 học sinh)

Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

3. Điểm kiểm tra 1 tiết môn tiếng Anh của học sinh lớp $9A$ được ghi lại trong bảng sau:

7	6	7	6	7	3	5	6	6
4	6	3	4	6	5	3	8	4

4	7	8	10	5	7	7	7	4
7	7	7	9	4	9	6	6	6
6	6	6	7	7	6	8	8	6

a) Có bao nhiêu học sinh tham gia kiểm tra?

b) Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét.

4. Bảng sau đây ghi lại tên của các bạn đạt điểm tốt vào các ngày trong tuần của lớp 9E, mỗi điểm tốt ghi tên một lần.

Ngày	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu	Thứ Bảy
Tên bạn đạt điểm tốt	An, Minh	Đức, Lâm	An	Thảo, Lâm	An, Đức, Tuấn	Lâm, Thảo

a) Trong tuần những bạn nào đạt điểm tốt? Mỗi bạn đạt được mấy điểm tốt?

b) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu này. Bạn nào có số lần đạt điểm tốt nhiều nhất?

5. Số con trong mỗi hộ gia đình ở một khu vực được ghi lại trong bảng sau:

2	2	1	1	4	3	2	2	2	2
1	2	1	4	1	3	4	5	1	1
2	1	5	3	2	2	1	2	2	0

a) Có bao nhiêu hộ gia đình được điều tra?

b) Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét.

6. Một nhóm học sinh đã khảo sát ý kiến về ý thức giữ gìn vệ sinh công cộng của các bạn trong trường với các mức đánh giá Tốt, Khá, Trung bình, Kém và thu được kết quả như sau:

Tốt, Khá, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Tốt, Khá, Khá, Trung bình, Kém, Tốt, Khá, Tốt, Kém, Trung bình, Khá, Khá, Tốt, Trung bình, Tốt, Kém, Tốt, Tốt.

a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên.

b) Từ bảng tần số, hãy cho biết mức đánh giá nào chiếm ưu thế nhất. Vì sao?

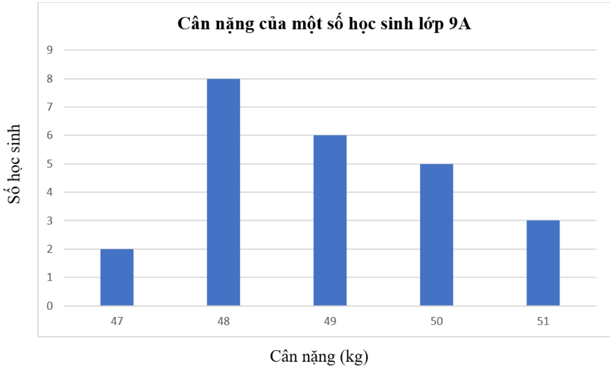
Dạng 2. Biểu đồ tần số

7. Điểm kiểm tra môn Toán (hệ số 2) của học sinh lớp 9D được ghi lại trong bảng sau :

Điểm	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	2	4	7	15	10	6	4

Vẽ biểu đồ tần số biểu diễn dữ liệu cho trong bảng trên.

8. Biểu đồ hình bên dưới cho biết số cân nặng của một số học sinh lớp 9A. Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.



9. Bảng tần số sau cho biết số học sinh của lớp 9A dự đoán đội bóng vô địch Euro 2024 khi đã biết 4 đội tuyển của các quốc gia góp mặt ở vòng bán kết và trước khi trận chung kết bắt đầu.

Đội bóng	Anh	Tây Ba Nha	Hà Lan	Pháp
Số bạn dự đoán	5	18	9	12

Vẽ biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số trên.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Người ta đếm số lượng người ngồi trên mỗi chiếc xe ô tô 5 chỗ đi qua một trạm thu phí trong khoảng thời gian từ 8 giờ đến 9 giờ sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

5	1	3	2	1	1	4	1	1	4	1	2	1	4	1
1	4	5	2	3	2	3	2	1	2	1	2	1	5	1
2	4	3	2	3	1	5	5	1	2	3	5	1	2	1
1	3	2	2	3	3	2	3	3	5	2	1	3	2	2

a) Lập bảng tần số cho mẫu số liệu trên.

b) Hãy cho biết số người ngồi trên xe phổ biến nhất là bao nhiêu?

Bài 2: Số lượng xe ô tô đi qua một trạm thu phí trong một ngày được ghi lại như sau:

120	90	150	110	130	150	140	120	110	130
95	140	120	120	135	130	150	135	150	150

a) Xác định cỡ mẫu

b) Lập bảng tần số cho mẫu số liệu trên.

c) Có bao nhiêu giá trị có tần số lớn hơn 3 .

Bài 3: Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 6/2023 được ghi lại như sau:

2	6	4	3	2	5	6	2	4	5	3	2	4	3	3	2
3	5	3	6	2	3	3	6	6	3	3	4	5	2	3	2

a) Xác định cỡ mẫu.

b) Lập bảng tần số cho mẫu số liệu trên.

c) Có bao nhiêu giá trị có tần số lớn hơn 4 ?

Bài 4: Đội bóng bàn tại một trường học ghi lại số trận thắng của mỗi thành viên trong một giải đấu nội bộ. Dữ liệu được thu thập như sau:

Số trận thắng	2	3	4	5	6
Sồ người	3	5	2	3	7

a)Hãy vẽ các biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số.

b) Theo biểu đồ ở câu I), số người có nhiều trận thắng nhất là mấy người?

Bài 5: Kết quả điều tra cân nặng của một số học sinh lớp 9 được ghi lại trong bàng sau:

Cân nặng (kg)	47	48	49	50	52
Số học sinh	2	8	3	5	2

a) Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễ số liệu ở bảng thống kè trên.

b) Theo biểu đồ ở câu a), số học sinh có cân nặng ít nhất là 49 kg là bao nhiêu em?

Bài 6: Một khu vui chơi dành cho trẻ em thống kê lại độ tuổi của một số trẻ em đến chơi trong một ngày ở bảng tần số như sau:

Tuổi	3	4	5	6	7	8
Tần số	5	3	6	4	12	6

a) Hãy vẽ các biểu đồ cột và biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn số liệu ở bảng tần số.

b) Theo biểu đồ ở câu a), trong số các trẻ em đến khu vui chơi, trẻ em ở độ tuổi nào là nhiều nhất?

Bài 7: Một nhóm học sinh đã khảo sát ý kiến về ý thức giữ gin vệ sinh công cộng của các bạn trong trường với các mức đánh giá Tốt, Khá, Trung binh, Kém và thu được kết quả như sau:

Tốt, Trung bình, Tốt, Trung bìh,, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Tốt, Khá, Trung bình, Kém, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Trung bình, Khá, Tốt, Tốt, Tốt, Khá, Kém, Tốt, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Tốt, Khá, Khá.

a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên.

b) Từ bảng tần số, hãy cho biết mức đánh giá nào chiếm ưu thế nhất. Vì sao?

Bài 8: Kết quả của 20 sinh viên tham gia cuộc thi “Thần đồng Toán học" được cho ở bảng sau:

Số báo danh	Điểm thi	Xếp hạng	Số báo danh	Điểm thi	Xếp hạng
01	8	Nhì	11	7	Ba
02	7	Ba	12	6	Ba
03	10	Nhất	13	10	Nhất
04	9	Nhì	14	5	Không đạt giải
05	5	Không đạt giải	15	6	Ba
06	8	Nhì	16	9	Nhì
07	9	Nhì	17	8	Nhì

08	10	Nhất	18	7	Ba
09	4	Không đạt giải	19	9	Nhì
10	9	Nhì	20	8	Nhì

a) Hãy lập bảng tần số theo điểm số của học sinh và vẽ biểu đồ đoạn thẳng tương ứng.

b) Hãy lập bảng tần số theo xếp hạng của học sinh và vẽ biểu dồ cột tương ứng.

Bài 9: Bảng thống kê dưới dây cho biết số người tham gia bảo hiểm y tế (BHYT) của Việt Nam ở một số năm trong giai đoạn từ năm 2010 đến năm 2019.

Năm	2010	2013	2016	2019
Số người tham gia BHYT (đơn vị: nghìn người)	$52407,1$	$61765,3$	$75915,2$	$85745,4$

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn các dữ liệu thống kê đó.

c) Một người đưa ra nhận định: Từ năm 2010 đến năm 2019, số người tham gia bảo hiểm y tế của nước ta đã tăng lên trên 65%. Hỏi nhận định của người đó là đúng hay sai?

Bài 10: Nhà máy kiểm tra 100 gói kẹo của một dây chuyền đóng gói kẹo đang trong thời gian chạy thử nghiệm. Tiêu chuẩn là mỗi gói nặng 500 gram. Những gói kẹo có khối lượng chênh lệch không quá 10 gram so với tiêu chuẩn được xem là đạt yêu cầu. Kết quả kiểm tra được thống kê trong bảng sau:

Khối lượng (g)	480	490	495	500	505	520
Tần số	2	2	30	46	15	5

a) Trong 100 gói được kiểm tra, có bao nhiêu gói đạt yêu cầu?

b) Vẽ biểu đồ tần số biểu diễn dữ liệu cho trong bảng.

BÀI 23:
BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

• Tần số tương đối

Cho dãy dữ liệu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là các giá trị khác nhau của mẫu dữ liệu cỡ n.

Tần số tương đối f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của m_i của x_i với n.

Bảng sau đây được gọi là bảng tần số tương đối.

Giá trị	x_1	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	...	f_k

trong đó $n = m_1 + \ldots + m_k$ và $f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của $x_1, \ldots,$

$f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100(\%)$ là tần số tương đối của x_k

• Biểu đồ tần số tương đối

Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối được gọi là **biểu đồ tần số tương đối**. Dạng thường gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt dùng để biểu diễn tần số tương đối của các giá trị theo công thức $360°.f_i$ với $i = 1, 2, \ldots, k$

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt có số đo cung tương ứng ở được xác định trong Bước 1.

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn (thường bằng cách tô màu), ghi tần số ương đối, chú giải và tiêu đề.

BÀI TẬP

Dạng: Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ để biểu diễn bảng tần số tương đối

1. Sau khi điều tra 48 hộ gia đình ở vùng dân cư về số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình, người ta được dãy số liệu sau:

5	4	6	7	5	5	4	3	6	5	6	7	5	8	6	5
4	5	5	6	6	4	5	7	6	4	5	6	5	7	4	5
6	5	4	4	6	7	5	6	5	4	5	7	6	4	5	6

a) Lập bảng tần số và tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn để biểu diễn bảng tần số tương đối

2. Quay 50 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành bốn hình quạt với các màu xanh, đỏ, tím, vàng. Quan sát mũi tên chỉ vào hình quạt màu gì và ghi lại, thu được kết quả sau:

Màu	Xanh	Đỏ	Tím	Vàng
Số lần	7	12	13	8

a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

b) Ước lượng các xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh, màu vàng.

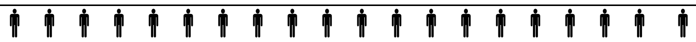
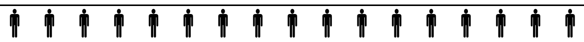
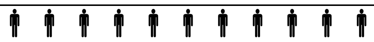
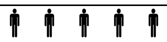
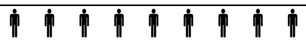
c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

3. Trong bảng số liệu sau có một số liệu bị điền sai. Hãy tìm số liệu đó và sửa lại cho đúng

Tần số	5	15	6	4
Tần số tương đối	$16,67\%$	50%	30%	$13,33\%$

4. Lớp 9A có 35 bạn, trong đó có 12 bạn mặc áo cỡ M, 14 bạn mặc áo cỡ S, 9 bạn mặc áo cỡ L. Hãy lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu này.

5. Biểu đồ tranh sau đây biểu diễn số lượng học sinh khối 9 bình chọn môn học được yêu thích nhất ở trường THCS A:

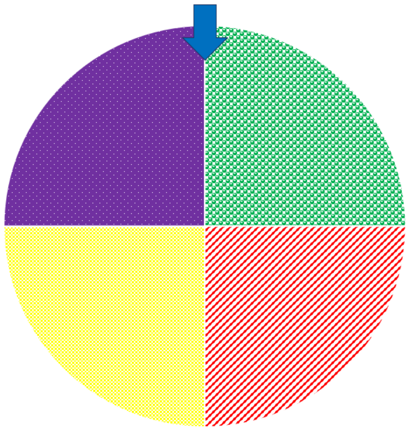
Môn Toán	
Môn Văn	
Môn Tiếng Anh	
Môn KHTN	
Môn KHXH	

(Mỗi  biểu diễn cho 1 học sinh)

a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trong biểu đồ tranh trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn biểu diễn mẫu số liệu trên.

6. Quay 70 lần một tấm bìa hình tròn được chia thành bốn hình quạt với các màu xanh, đỏ, vàng, tím. Quan sát và ghi lại mũi tên chỉ vào hình quạt có màu nào khi tấm bìa dừng lại. Kết quả thu được như sau:



Xanh ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////

Đỏ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///

Vàng ~~////~~ ~~////~~ /

Tím ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //

a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.

b) Ước lượng xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ.

7. Bạn Liên phỏng vấn một số bạn học sinh cùng lớp về thể loại phim yêu nhất. Mỗi bạn chỉ chọn đúng một thể loại phim. Kết quả được cho ở bảng sau:

Thể loại phim	Hài	Kinh dị	Khoa học viễn tưởng
Tần số	20	8	12

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn để biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn Liên.

8. Bảng thống kê sau cho biết số lượng các thiên tai xảy ra tại Việt Nam giai đoạn 1990-2021.

Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Số lượng	6	9	71	6	94

(Theo Vietnam.opendevelopmentmekong.net)

a) Lập bảng tần số tương đối biểu diễn số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn biểu diễn số liệu trên.

9. Hoàn thiện bảng tần số - tần số tương đối dưới đây về chiều cao của 120 cây thông.

Chiều cao (m)	7	$7,5$	8	$8,5$	
Tần số	$?$	18	$?$	$?$	$\text{N} = 120$
Tần số tương đối	15%	$?$	$?$	40%	

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình cột và dạng hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu trong bảng lập ở câu trên.

10. Một công ty điều tra ý kiến của nhân viên về chất lượng cuộc sống làm việc. Dưới đây là kết quả của 100 nhân viên được hỏi:

Chất lượng cuộc sống làm việc	Số lượng nhân viên
Rất Hài lòng	25
Hài lòng	40
Bình thường	20
Không hài lòng	15

a) Lập bảng tần số tương đối của mỗi loại đánh giá.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt thể hiện phân phối đánh giá của nhân viên.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Sau bài thi môn Ngữ văn, cô giáo ghi lại số lỗi chính tả mà một số học sinh mắc phải vào bảng thống kê sau:

5	2	2	2	3	3	0	0	5	2	4	1	2	1	1	5	1	0	3	1
4	2	1	4	3	1	2	4	4	5	5	5	1	4	4	1	0	3	1	4

a) Mẫu số liệu trên gồm những giá trị khác nhau nào?

b) Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của số lỗi chính tả mà học sinh mắc phải.

c) Trong số học sinh được khảo sát, cô giáo muốn chọn ra số học sinh mắc nhiều lỗi nhất. Hỏi cô giáo cần chọn các học sinh mắc bao nhiêu lỗi?

Bài 2: Một vận động viên bắn 30 viên đạn vào bia với các điểm số thu được như sau:

10	8	9	7	10	9	9	10	8	9	10	10	9	8	10
10	9	8	9	9	9	9	7	9	10	8	9	8	8	7

a) Lập bảng tần số và tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng cho bảng tần số thu được ở câu a).

Bài 3: Dữ liệu được thu thập về "Loại đồ ăn bạn muốn ăn nhất" từ các bạn trong lớp được ghi lại như sau:

Bánh mì	Pizza	Phở	Sushi	Bánh xèo
Pizza	Bánh mì	Phở	Bánh mì	Sushi
Sushi	Bánh xèo	Sushi	Bún riêu	Bánh mì
Phở	Pizza	Bánh mì	Sushi	Phở
Bánh xèo	Bánh mì	Bánh xèo	Phở	Pizza
Bún riêu	Sushi	Phở	Bánh xèo	Phở

a) Có bao nhiêu loại đồ ăn được các bạn nêu ra?

b) Hãy lập bảng tần số và bảng tần số tương đối của "Loại đồ ăn bạn muốn ăn nhất" từ các bạn trong lớp.

Bài 4: Thu thập dữ liệu về chất lượng không khí tại một địa điểm trong 30 ngày mùa xuân cho kết quả như sau:

M1, M1, M2, M2, M2, M2, M1, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2, M2,

M4, M3, M3, M3, M3, M4, M4, M1, M1, M1, M1, M3, M3, M3, M1.

(M1: Tốt; M2: Trung bình; M3: Kém; M4: Xấu)

a) Mẫu dữ liệu trên gồm những giá trị khác nhau nào?

b) Lập bảng tần số tương đối cho mẫu dữ liệu trên.

c) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất địa điểm này có chất lượng không khí ở mức nào?

d) Trong một ngày xuân, khả năng cao nhất là địa điểm này có chất lượng không khí ở mức M2, tức là mức Trung bình là bao nhiêu?

Bài 5: Trong một cuộc khảo sát về sở thích đọc sách của học sinh trong một trường, bạn Hải thu thập dữ liệu và tạo bảng thống kê tần số tương đối như sau:

Sở thích	Tiểu thuyết	Tâm lý học	Lịch sử	Hài hước	Phiêu lưu
Tần số tương đối	35%	18%	15%	10%	17% .

Hãy kiểm tra xem số liệu trong bảng tần số tương đối này có hợp lý không và giải thích tại sao.

Bài 6: Trong bảng số liệu sau có một số liệu không chính xác. Hãy tìm số liệu đó và sửa lại cho đúng.

Tần số	8	12	10	20
Tần số tương đối	16%	24%	25%	40%

Bài 7: Trong bảng số liệu sau có một số liệu không chính xác. Hãy tìm số liệu đó và sửa lại cho đúng.

n số	4	5	7	9
Tần số tương đối	16%	20%	28%	46%

Bài 8: Tại một trại hè thanh thiếu niên quốc tế, người ta tìm hiểu xem mỗi đại biểu tham dự có thể sử dụng được bao nhiêu ngoại ngữ. Kết quả được biểu diễn như bảng sau.

Số ngoại ngữ	1	2	3	4	≥ 5
Số đại biểu	84	64	24	20	8

a) Hãy lập bảng tần số tương đối của số ngoại ngữ của các đại biểu.

b) Tại trại hè thanh thiếu niên quốc tế tổ chức 1 năm trước đó, có 54 trong tổng số 220 đại biểu tham dự có thể sử dụng được từ 3 ngoại ngữ trở lên. Có ý kiến cho rằng: "Ti lệ đại biểu sử dụng được từ 3 ngoại ngữ trở lên có tăng giữa hai năm đó". Ý kiến đó đúng hay sai? Giải thích.

Bài 9: Bạn Mai thống kê lại số sách mà mỗi bạn trong lớp đã đọc sau tuần lễ đọc sách và ghi lại trong bảng dưới đây:

Số sách	0	1	2	3	4
Số học sinh	2	8	16	4	2

a) Lập bảng tần số tương đối biểu diễn số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn biểu diễn số liệu trên.

Bài 10: Bảng thống kê sau cho biết số lượt mượn các loại sách trong một tuần tại thư viện của một trường Trung học cơ sở.

Loại sách	Sách giáo khoa	Sách tham khảo	Tiểu thuyết	Truyện ngắn
Số lượt mượn	55	120	30	45

a) Lập bảng tần số tương đối biểu diễn cho bảng thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng hình quạt tròn biểu diễn tần số tương đối thu được ở câu a).

BÀI 24:
BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ

• **Bảng tần số ghép nhóm là bảng tần số của các nhóm dữ liệu**

Nhóm	$[a_1;a_2)$	$[a_2;a_3)$	...	$[a_k;a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

Tần số m_i của nhóm $[a_i;a_{i+1})$ là số giá trị của mẫu số liệu lớn hơn hoặc bằng a_i và nhỏ hơn a_{i+1}.

Bảng tần số tương đối ghép nhóm là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1;a_2)$	$[a_2;a_3)$	...	$[a_k;a_{k+1})$
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

Trong đó $n = m_1 + ... + m_k$ và

$f_1 = \frac{m_1}{n}.100$ là tần số tương đối của nhóm $[a_1;a_2)$; ...

$f_k = \frac{m_k}{n}.100$ là tần số tương đối của nhóm $[a_k;a_{k+1})$;

• **Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột** là biểu đồ gồm các cột liền nhau để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm. Trong biểu đồ này, chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số tương đối của nhóm dữ liệu.

- Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm số liệu có độ dài bằng nhau ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục đứng, trục ngang. Trên trục đứng xác định đơn vị độ dài phù hợp với các tần số tương đối. Trên trục ngang xác định các nhóm số liệu cần biểu diễn.

Bước 2. Dựng các hình cột (kề nhau) ứng với các nhóm dữ liệu, mỗi hình cột có chiều cao bằng tần số tương đối của nhóm số liệu.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề cho biểu đồ.

• **Cách vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng.**

Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chọn giá trị $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ đại diện cho nhóm số liệu $\left[a_i;a_{i+1}\right)$ với $i = 1,2,\ldots,k$

Bước 2. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số tương đối.

Bước 3. Với mỗi giá trị đại diện x_i trên trục ngang và tần số tương đối f_i tương ứng, ta xác định một điểm $M_i\left(x_j;f_i\right)$. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 4. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

BÀI TẬP

Dạng 1. Lập bảng tần số ghép nhóm, bảng tần số ghép nhóm tương đối.

Các nhóm số liệu phải chứa tất cả các giá trị của mẫu số liệu.

Các nhóm số liệu thường được chọn sao cho có độ rộng bằng nhau, thuận tiện cho việc tính toán và phù hợp với mục đích của việc thống kê.

1. Công ty điện lực thống kê lượng điện tiêu thụ (đơn vị: kWh) của một số hộ gia đình trong một khu vực trong tháng. Dữ liệu được ghi lại như sau:

150	120	180	200	130	100	160	190	219	210
170	140	110	130	160	180	150	200	210	190

Lập bảng tần số ghép nhóm theo các khoảng lương điện tiêu thụ sau: $[100;130)$; $[130;160)$; $[160;190)$; $[190;220)$.

2. Cho bảng tần số ghép nhóm về tuổi thọ của một số ong mật cái như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Tần số	12	23	15

a) Đọc và giải thích bảng thống kê trên.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê này.

3. Bạn Minh ghi lại thời gian học mỗi ngày (đơn vị: giờ) trong suốt 20 ngày như sau:

2,3	3,2	1,5	2,8	1,2	2,6	4,7	3,1	4,3	2,9
3,7	2,3	3,5	4,9	0,4	0,6	1,5	4,6	1,7	3,4

Hãy chia bảng số liệu thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu về thời gian học của bạn Minh.

4. Sau một khoá tập huấn, học viên được xếp loại A, B, C, D theo điểm kiểm tra mà mỗi người đạt được như sau:

Điểm kiểm tra (X)	$0 \le X < 2,5$	$2,5 \le X < 5$	$5 \le X < 7,5$	$7,5 \le X < 10$
Xếp loại	D	C	B	A

Điểm kiểm tra của các học viên được ghi lại ở bảng sau đây:

6,5	1,4	3,5	6,8	9,2	7,6	7,8	9,3	5,6	9,5
8,3	8,	6,3	9,1	7,2	4,7	7	7,4	9,1	9,9
8,5	7,5	6,7	1,7	9	8,7	7,2	3,2	8,1	6,4

a) Hãy chỉ ra các giá trị thuộc nhóm $[0;2,5)$ và tần số của nhóm này.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu.

5. Bảng sau ghi lại thời gian một bác sĩ khám cho một số bệnh nhân (đơn vị: phút):

9,1	7,7	9,4	9,1	6,7	5,9	6,9	6,0	6,9	8,7
11,7	5,8	5,4	6,4	6,5	12,3	7,4	10,0	11,8	5,3

a) Hãy chia số liệu thành 5 nhóm, với nhóm thứ nhất là các bệnh nhân có thời gian khám từ 5 phút đến dưới 6,5 phút và lập bảng tần số ghép nhóm.

b) Xác định nhóm có tần số cao nhất và nhóm có tần số thấp nhất.

6. Đo chiều cao (đơn vị là cm) của lớp 9A cho kết quả như sau:

156	157	161	158	166	160	161	157	163	160
163	164	158	159	166	162	162	165	163	163
162	159	165	163	162	161	155	159	158	164
165	162	161	160	154	162	161	162	166	160

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho mỗi số liệu này với các nhóm $[155;158)$, $[158;161)$, $[161;164)$, $[164;167)$.

Dạng 2. Lập bảng tần số ghép nhóm, bảng tần số ghép nhóm tương đối.

7. Nam thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) mình đi bộ mỗi ngày trong tháng 10 ở bảng sau:

Quãng đường (X) (km)	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$
Tần số (số ngày)	5	12	8	3	2

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột, dạng đoạn thẳng biểu diễn mẫu số liệu trên.

8. Bảng sau thống kê cân nặng (đơn vi: kilogram) của các hoc sinh lớp 9A trong một trường trung học cơ sở

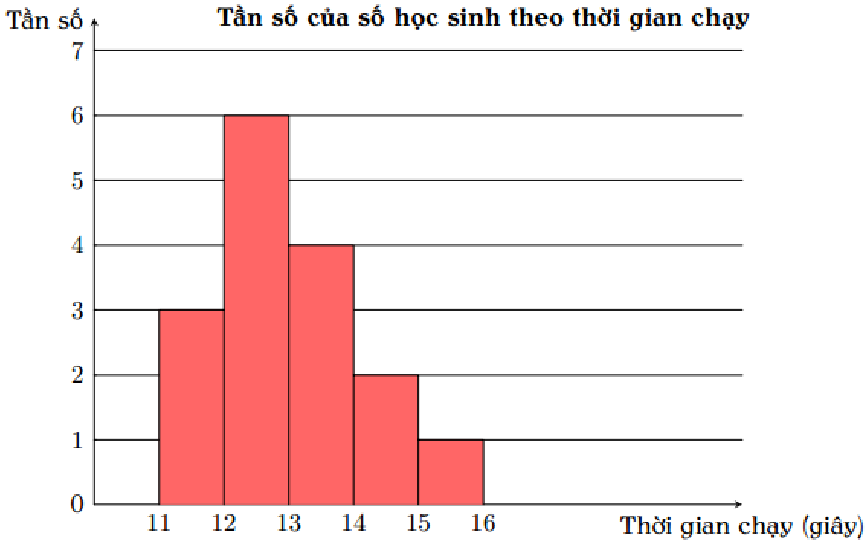
Cân nặng (X) (kg)	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$
Tần số tương đối	15%	25%	20%	30%	10%

Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên.

9. Biểu đồ dưới đây biểu diễn kết quả khảo sát thành tích chạy $100m$ của một số học sinh:

a) Có bao nhiêu học sinh chạy $100m$ hết ít hơn 13 giây?

b) Có tổng số bao nhiêu học sinh tham gia khảo sát?

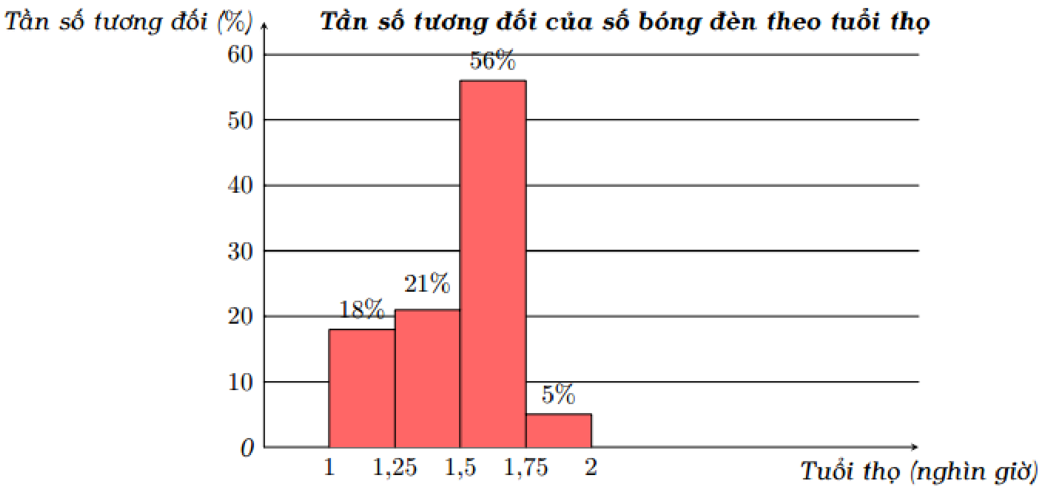


10. Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm sau về tuổi thọ của một loại bóng đèn (đơn vị: năm):

Tuổi thọ $(\mathbf{X})$ (năm)	$[1;1,5)$	$[1,5;2)$	$[2;2,5)$	$[2,5;3)$	$[3;3,5)$
Tần số tương đối	15%	30%	20%	25%	10%

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

11. Biểu đồ cột bên mô tả tuổi thọ (đơn vị: nghìn giờ) của 200 chiếc bóng đèn dây tóc trong một lô sản xuất.

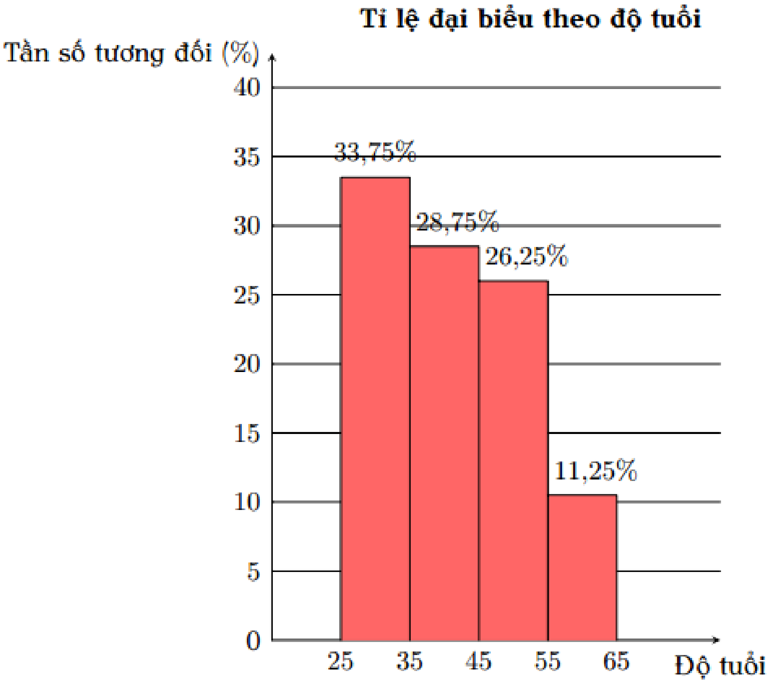


a) Hãy lập bảng tần số mô tả dữ liệu ở biểu đồ bên.

b) Một bóng đèn được cho là thuộc loại I nếu có tuổi thọ từ 1500 giờ trở lên. Hỏi có bao nhiêu bóng đèn thuộc loại I trong số các bóng đèn được thống kê?

c) Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu ở biểu đồ bên.

12. Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ đại biểu tham dự hội nghị theo độ tuổi. Biết rằng có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi.



a) Có bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị?
b) Lập bảng tần số ghép nhóm tương ứng.
c) Một người cho rằng có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi. Nhận định đó đúng hay sai? Tại sao?

Bài tập tự luyện.

Bài 1: Chú Kính thu thập chiều cao của một số cây chà là giống 3 tháng tuổi cho bởi bảng sau (đơn vị: cm):

45	36	38	30	38	33	34	41	31	40
43	42	44	36	37	39	33	34	37	35

a) Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, trong đó nhóm đầu tiên là chiều cao từ $30cm$ đến dưới $34cm$; lập bảng tần số và tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.
b) Hãy vẽ các biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng sau về chiều cao của một số cây chà là giống 3 tháng tuổi.

Bài 2: Cho bảng tần số ghép nhóm sau về thời gian gọi (phút) của một số cuộc điện thoại (đơn vị: phút):

Thời gian (X) (phút)	$[0,5;2,5)$	$[2,5;4,5)$	$[4,5;6,5)$	$[6,5;8,5)$	$[8,5;10,5)$
Tần số	10	20	10	5	5

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

Bài 3: Một cuộc điều tra về thời gian dùng mạng Internet trong ngày của học sinh lớp 9 tại một thành phố cho kết quả như sau:

Thời gian (X) (giờ)	$[0;0,5)$	$[0,5;1,0)$	$[1,0;1,5)$	$[1,5;2,0)$	$[2,0;2,5)$

Tần số tương đối	18%	30%	25%	15%	12%

a) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê trên.

b) Để thu được bảng thống kê trên, người ta đã lập phiếu điều tra và thu về tổng cộng 1500 phiếu trả lời. Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả thu được.

Bài 4: Ghi lại cấp độ động đất của các trận động đất xảy ra tại một vùng trong 10 năm người ta thu được kết quả sau:

I, V, II, III, VI, V, IV, II, III, V, VI, VII, VIII, I, I, II, VI, VII, IV.

Biết rằng theo thang Richter thì trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3; cấp II và III có độ lớn từ 3 đến dưới 4; cấp IV và V có độ lớn từ 4 đến dưới 5; cấp VI và VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6; cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới $6,9$.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter.

Bài 5: Kết quả đo tốc độ của 25 xe ô tô (đơn vị: km/h) khi đi qua một trạm quan sát được ghi lại ở bảng sau:

62	$54,2$	$53,3$	$45,3$	$48,2$	$46,3$	$57,4$	$62,6$	$61,4$	$49,4$	$40,9$	$45,5$	60
$49,8$	$54,3$	$58,9$	53	53	$48,6$	55	$48,4$	$47,8$	$41,2$	$42,8$	$48,8$	

a) Hãy lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng số liệu trên, trong đó nhóm đầu tiên là các xe có tốc độ từ $40km/h$ đến dưới $45km/h$.

b) Hãy xác định nhóm có tần số tương đối cao nhất và nhóm có tần số tương đối thấp nhất.

Bài 6: Thời gian hoàn thành một bài kiểm tra trực tuyến của một số học sinh được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: phút):

Thời gian (X) (phút)	$[10;12)$	?	$[14;16)$
Tần số	25	?	5
Tần số tương đối	?	?	$12,5\%$

a) Hãy xác định số học sinh tham gia kiểm tra.

b) Hoàn thành bảng trên vào vở.

Bài 7: Thời gian sử dụng điện thoại di động (đơn vị: giờ) của một nhóm người được ghi lại như sau:

$2,3$	$1,8$	$3,5$	$2,1$	$4,2$	$1,5$	$3,8$	$2,5$	$4,0$	$3,2$
$1,9$	$2,8$	$3,2$	$1,7$	$4,5$	$2,0$	$3,6$	$2,7$	$4,1$	$2,4$

a) Chia số liệu thành 4 nhóm, với nhóm thứ nhất là khoảng từ 1 đến dưới 2 giờ. Lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng mô tả bảng tần s tương đối ghép nhóm.

Bài 8: Thời gian đi từ nhà đến trường (đơn vị: phút) của các bạn học sinh lớp $9/3$ của một trường trung học cơ sở được ghi lại ở bảng sau:

$7,4$	$19,6$	$5,6$	$18,3$	$10,3$	$15,1$	$19,5$	$14,1$	$7,8$	$19,7$

15,1	11,1	16,6	11,6	7,2	18	11,6	6,2	6,2	16,7
7,8	18,2	17,7	7,7	11,4	7,7	5,5	18,2	9,5	19,8
19	5,2	13,2	14,7	14,1	13,9	10,4	7,2	12,5	13,9

a) Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, với nhóm thứ nhất là khoảng từ 5 phút đến dưới 9 phút và lập bảng tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm.
b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng mô tả bảng tần số tương đối ghép nhóm.
Bài 9: Một cửa hàng thực phẩm ghi lại doanh số bán hàng trong một số ngày như sau:

120	145	132	155	123	135	142	130	148	160
112	125	138	142	148	130	135	128	155	150

b) Lập bảng tần số - tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm ghép $[110;120)$, $[120;130)$, $[130;140)$, $[140;150)$, $[150;160)$.
b) Dựa vào bảng lập được, hãy đưa ra nhận xét về doanh số bán hàng hàng ngày của cửa hàng.
Bài 10: Trong 1 giờ, cửa hàng xăng dầu ghi lại số lít xăng mà mỗi khách hàng mua.

4	5	5	6	7	7	8	10	10	10
12	12	15	15	16	17	17	18	18	19
19	20	22	22	23	25	28	30	34	34
35	38	38	39	39	7	12	8	15	20

a) Lập bảng tần số ghép nhóm gồm 4 nhóm $[0;10)$, $[10;20)$, $[20;30)$, $[30;40)$.
b) Dựa vào bảng đã lập, hãy nói rõ:
- Bao nhiêu khách hàng mua dưới 10 lít xăng?
- Nhóm khách hàng đông nhất là nhóm mua bao nhiêu lít xăng?

Bài 11: Bảng dưới đây ghi lại kết quả điều tra do một ngân hàng thực hiện về thời gian (tính theo phút) mà khách hàng phải chờ để được phục vụ:

2	4	4	5	5	7	8	8	9	10
10	12	13	14	15	15	15	16	17	18
18	18	19	19	21	22	22	24	24	24
24	25	28	28	30	32	32	34	34	34

a) Lập bảng tần số - tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm ghép $[0;5)$, $[5;10)$, $[10;15)$, $[15;20)$, $[20;25)$, $[25;30)$, $[30;35)$.
b) Dựa vào kết quả của câu trên, hãy cho biết trong 40 người được khảo sát:
- Bao nhiêu người phải chờ dưới 15 phút?
- Số người phải chờ từ 20 đến dưới 35 phút chiếm bao nhiêu phần trăm?

Bài 12: Bảng dưới đây ghi lại số tiền lương (triệu đồng) của một nhóm nhân viên trong một công ty:

5	6	6	7	8	8	9	10	10	12
12	12	13	14	15	16	18	20	22	25

25	26	28	30	32	35	38	40	42	45
50	55	60	65	70	75	80	85	90	99

a) Lập bảng tần số - tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm ghép $[0;20)$, $[20;40)$, $[40;60)$, $[60;80)$, $[80;100)$

b) Dựa vào kết quả của câu trên, hãy cho biết trong 60 nhân viên được khảo sát

- Bao nhiêu nhân viên có mức lương dưới 40 triệu đồng?
- Số nhân viên có mức lương từ 60 đến 80 triệu đồng chiếm bao nhiêu phần trăm?

Bài 13: Giáo viên ghi lại thời gian chạy cự li 100 mét của các học sinh lớp 9A cho kết quả như sau (đơn vị: giây):

16	17	16	13	15	17	16	20	15	17	16	18	14
18	15	18	15	14	16	18	15	13	16	15	17	

a) Hãy chia số liệu thành 4 nhóm, nhóm đầu tiên là thời gian từ 13 phút đến dưới 15 phút, lập bảng tần số và tần số tương đối ghép nhóm cho mẫu số liệu trên

b) Hãy vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu trên

Bài 14: Người ta trồng cà rốt và thử nghiệm loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt thu được kết quả sau:

Chiều dài (X) (cm)	$[15;16)$	$[16;17)$	$[17;18)$	$[18;19)$	$[19;20)$	$[20;21)$
Tần số	10	15	25	28	12	10

Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột cho bảng thống kê trên

Bài 15: Thời gian chờ mua vé xem bóng đá của một số cổ động viên được cho như sau:

Thời gian (X) (phút)	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$
Tần số	15	40	50	25	20	10

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng cho bảng thống kê thu được ở câu trên.

Bài 16: Bạn Bình ghi lại cự li nhảy xa của các bạn trong câu lạc bộ thể thao trong bảng sau (đơn vị: mét):

5,4	4,1	3,8	4,7	4,3	4,1	4,4	5,4	3,7	4,6
4,2	3,5	4,2	4,4	4,6	4,8	5,4	4,7	4,2	5,4
4,5	5,4	4,4	5,1	3,6	4,4	4,8	4,8	3,5	4,7
5,3	3,6	4,7	4,2	4,4	4,8	3,7	4,7	3,8	3,6

a) Để thu gọn bảng dữ liệu thì nên chọn bảng tần số không ghép nhóm hay bảng tần số ghép nhóm để biểu thị số liệu trên? Tại sao?

b) Chia số liệu thành 4 nhóm, trong đó nhóm đầu tiên là cự li từ 3,5 m đến dưới 4 m; Lập bảng tần số và tần số tương đối ghép nhóm.

Bài 17: Một nhóm học sinh tham gia một cuộc thi viết văn. Dưới đây là số từ trong bài viết của từng học sinh (đơn vị: từ)

430	300	380	420	400	430	370	410
410	320	380	400	420	430	420	410
430	400	350	420	440	360	380	420
390	440	380	370	300	380	430	430

a) Để thu gọn bảng dữ liệu, bạn nên chọn bảng tần số không ghép nhóm hay bảng tần số ghép nhóm để biểu thị số liệu trên? Tại sao?

b) Hãy chia số liệu thành 3 nhóm, trong đó nhóm đầu tiên là số từ từ 300 đến dưới 350; lập bảng tần số và tần số tương đối ghép nhóm.

BÀI 25:
PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

- Một hoặc một số hành động, thực nghiệm được tiến hành liên tiếp hay đồng thời mà kết quả của chúng không thể biết được trước khi thực hiện nhưng có thể liệt kê được tất cả các kết quả có thể xảy ra, được gọi là một **phép thử ngẫu nhiên**, gọi tắt là phép thử.
- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử (gọi tắt là tập tất cả các kết quả có thể của phép thử) được gọi là **không gian mẫu của phép thử.**

Không gian mẫu của phép thử được kí hiệu là Ω

BÀI TẬP

Dạng 1. Phép thử ngẫu nhiên

1. Mỗi hành động sau có phải là phép thử ngẫu nhiên không? Giải thích vì sao.

a) Trong một túi có 3 viên bi màu đỏ, 2 viên bi màu xanh. Bạn Khôi lấy một viên bi ra khỏi túi mà không nhìn vào túi.

b) "Tấm Cám" là quyển truyện duy nhất có trên bàn. Bạn Lan lấy một quyển sách trên bàn để đọc.

2. Trên bàn có 10 phiếu giống hệt nhau. Trên 4 phiếu có in hình hoa hồng. Trên 6 phiếu còn lại có in hình hoa cúc. Bạn Trinh lấy một phiếu bất kì và quan sát hình vẽ trên đó. Hành động trên có phải là phép thử ngẫu nhiên không? Giải thích vì sao?

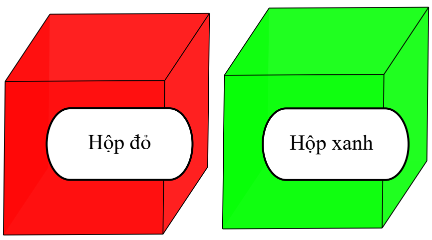
3. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Tại sao?

a) Chọn bất kì 1 cây bút bi từ hộp có 3 cây bút bi như Hình a

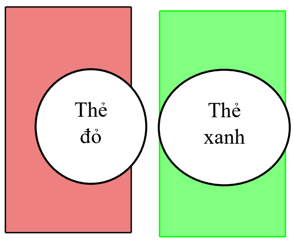
b) Gieo 2 đồng thời khối gỗ hình lập phương, mỗi hình được sơn một màu như Hình b và quan sát màu sắc của mặt xuất hiện bên trên.

c) Chọn ra đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp chỉ có 2 tấm thẻ như Hình c

Hình a



Hình b



Hình c

4. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Tại sao?

a) Chọn 1 lá bài từ một bộ bài Tây và ghi lại màu sắc và con số của lá bài được chọn.

b) Đọc 1 quyển sách từ 1 ngăn sách và ghi lại tựa đề của cuốn sách đó

c) Lấy 1 chiếc bút bi từ một hộp bút có nhiều loại bút

Dạng 2. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

5. Trên một đĩa CD, có 5 bài hát thuộc thể loại Pop, 3 bài thuộc thể loại Rock và 2 bài thuộc thể loại Jazz. Bạn Thành bấm ngẫu nhiên một bài hát để nghe. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra? Không giam mẫu của phép thử này gồm những phần tử nào?

6. Một hộp chứa 1 quả bóng màu xanh, 1 quả bóng màu vàng và 1 quả bóng màu đỏ. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên đó

a) Lấy bất kì 1 quả bóng từ hộp

b) Lấy đồng thời 3 quả bóng từ hộp

c) Lấy lần lượt 3 quả bóng từ hộp một cách ngẫu nhiên.

7. Xét phép thử "gieo một xúc xắc một lần"

a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.

b) Viết không gian mẫu của phép thử đó.

8. Một hộp có 10 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 10; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp".

a) Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra.

b) Viết không gian mẫu của phép thử đó.

9. Xác định không gian mẫu của các phép thử sau:

a) Gieo 2 lần một đồng xu có 1 mặt xanh và 1 mặt đỏ.

b) Lấy ra 1 quả bóng từ một hộp chứa 3 quả bóng được đánh số 1; 2; 3, xem số, trả lại hộp rồi lại lấy ra 1 quả bóng từ hộp đó.

10. Bạn Hoàng lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ một túi đựng 2 quả cầu gồm một quả màu đen và một quả màu trắng, có cùng khối lượng và kích thước. Bạn Hải rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp đựng 3 tấm thẻ A, B, C.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Xét các biến cố sau:

E: "Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu đen".

F: "Bạn Hoàng lấy được quả cầu màu trắng và bạn Hải không rút được tấm thẻ A".

Hãy mô tả các kết quả thuận lợi cho hai biến cố E và F.

11. Xếp ngẫu nhiên ba bạn Mai, Việt, Lan trên một chiếc ghế dài.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

12. Trong một hộp đựng 13 viên bi, có ba loại bi: bi đỏ, bi xanh và bi vàng. Số bi xanh gấp ba lần số bi đỏ, và số bi vàng ít hơn 2 viên so với số bi đỏ. Nếu bạn lấy một viên bi ngẫu nhiên, hãy viết không gian mẫu của các phép thử.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho hoạt động: Bạn Khánh gieo một con xúc xắc trước và sau đó Hạnh gieo một đồng xu. Quan sát số chấm xuất hiện trên con xúc xắc và mặt xuất hiện của đồng xu.

a) Hoạt động trên có phải là phép thửu ngẫu nhiên không? Tại sao?

b) Xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên

Bài 2: Một chiếc hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt là $3;5;6;7;9$. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp. Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

Bài 3: Trên kệ sách có 5 quyển thuộc thể loại Truyền cảm hứng, 4 quyển thuộc thể loại Văn học, 3 quyển thuộc thể loại Lịch sử. Bạn Tâm rút ngẫu nhiên một quyển. Có bao nhiêu kết q uà có thể xảy ra? Không gian mẫu của phép thử này gồm những phần tử nào?

Bài 4: BạnAn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2 chữ só.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Hãy xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

C: "Số được viết là số tròn chục";

D: "Số được viết là số chính phương".

Bài 5: Trên kệ sách có 1 quyển sách Khoa học, 1 quyển sách Lịch sử và 1 quyển sách Toán. Bạn Hà và bạn Thuý lần lượt lấy ra ngẫu nhiên 1 quyển sách từ kệ sách.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

M : "Có 1 quyển sách Khoa học trong 2 quyển sách được lấy ra";

N : "Cả 2 quyền sách được lấy ra đều là sách Lịch sử";

T : "Không có quyển sách Toán nào trong 2 quyển sách được lấy ra".

Bài 6: Bạn Cường giải một đề thi gồm có 3 bài được đánh số $1;2;3$. Cường chọn lần lượt các bài để giải theo một thứ tự ngẫu nhiên.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A: "Cường giải bài 3 đầu tiên";

B: "Cường giải bài 2 trước bài 1 ".

Bài 7: Xác định không gian mẫu của phép thử sau: Lấy ra một quả bóng từ một hộp chứa 1 quả bóng màu đỏ, 1 quả màu xanh, và 1 quả màu vàng. Sau đó, trả lại quả bóng vào hộp và lại lấy ra một quả bóng khác.

Bài 8: Một hộp chứa 3 thẻ có các chữ cái A, B và C. Lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc 2 thẻ từ hộp.

a) Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

M : "Trong 2 thẻ lấy ra có ít nhất 1 thẻ có chỡ cái A ";

N : "Trong 2 thẻ lấy ra có đúng 1 thẻ có chữ cái B ".

Bài 9: Một hộp có 5 quả bóng được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Bạn Lan và bạn An lần lượt lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp.

a) Xác định không gian mẫu của phép thừ.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

A: "Số ghi trên quả bóng của bạn Lan lớn hơn số ghi trên quá bóng của bạn An”

B: "Tổng các số ghi trên 2 quả bóng lấy ra lớn hơn 6 ".

Bài 10 : Có ba người A, B, C đến phòng họp cùng một lúc để phỏng vấn xin việc. Nhà tuyển dụng sẽ chọn lần lượt người trên để phỏng vấn theo một thứ tự ngẫu nhiên.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

M : “được phỏng vấn đầu tiên";

N: "được phỏng vấn trước C"

Bài 11: Một đồng xu được ném. Ghi kết quả (mặt sấp hoặc mặt ngưa).

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Bài 12: Trên một chiếc bàn có 5 quả táo đỏ, 3 quả táo xanh và 2 quả táo vàng. Hãy lập không gian mẫu cho việc lấy ngẫu nhiên một quả táo trên chiếc bàn này.

Bài 13: Một túi chứa 1 viên bi màu đỏ, 1 viên bi màu xanh, và 1 viên bi màu vàng. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử ngẫu nhiên? Hãy xác định không gian mẫu của các phép thử ngẫu nhiên đó.

a) Lấy bất kì 1 viên bi từ túi.

b) Lấy đồng thời 3 viên bi từ túi.

c) Lấy lần lươt 2 viên bi từ túi một cách ngẫu nhiên.

Bài 14: Một hộp có chứa 6 tấm thè cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 6 . Lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc 2 tấm thẻ từ hộp.

a) Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu của phép thử.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho mỗi biến cố sau:

M : "Trong 2 thẻ lấy ra có đúng 1 thẻ ghi số chẵn";

N : "Trong 2 thẻ lấy ra có í nhất 1 thè ghi số lè";

P : "Trong 2 thẻ lấy ra có ít nhất 1 thẻ ghi số là số nguyên tố".

BÀI 26:
XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN ĐẾN PHÉP THỬ

• Cho phép thử T. Xét biến cố E, ở đó việc xảy ra hay không xảy ra của E tuỳ thuộc vào kết quả của phép thử T. Kết quả của phép thử T làm cho biến cố E xảy ra gọi là kết quả thuận lợi cho E.
• Giả sử rằng các kết quả có thể của phép thử T là đồng khả năng. Khi đó xác suất $P(E)$ của biến cố E bằng tỉ số giưa số kết quả thuận lợi cho biến cố E và số phần tử của tập Ω :

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

trong đó Ω là không gian mẫu của T; $n(E)$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố E và $n(\Omega)$ là số phần tử của tập Ω.

• Việc tính xác suất của một biến cố E gồm các bước sau:

Bước 1. Mô tả không gian mẫu của phép thử. Từ đó xác định số phần tử của không gian mẫu Ω.

Bước 2. Chứng tỏ các kết quả có thể của phép thử là đồng khả năng.

Bước 3. Mô tả các kết quả thuận lợi cho biến cố E. Từ đó xác định số kết quả thuận lợi cho biến cố E.

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E với số phần tử của không gian mẫu Ω.

BÀI TẬP
Dạng 1. Kết quả đồng khả năng
Trong một phép thử ngẫu nhiên, hai kết quả được gọi là đồng khả năng nếu chúng có khả năng xảy ra như nhau.

⪼ Trong phép thử tung đồng xu (hoặc gieo xúc xắc), nếu có giả thiết đồng xu, xúc xắc là cân đối và đồng chất thì các mặt của đồng xu hay xúc xắc sẽ có cùng khả năng xuất hiện.
⪼ Trong phép thử lấy vật (quả bóng, viên bi, ...), nếu có giả thiết các vật có cùng kích thước và khối lượng thì mỗi vật đều có cùng khả năng được lựa chọn.
1. Kết quả của mỗi phép thử sau có đồng khả năng không? Tại sao?

a) Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất có 6 mặt từ 1 đến 6.
b) Rút một lá bài từ một hộp chứa 48 lá bài màu đen và 13 lá bài màu đỏ.
c) Chọn ngẫu nhiên lần lượt 3 quả banh tennis từ một hộp chứa 8 quả banh tennis có cùng kích thước và khối lượng.

2. Kết quả của mỗi phép thử sau có đồng khả năng không? Tại sao?

a) Rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 10.

b) Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ danh sách lớp.

c) Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ một hộp chứa 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ và 8 viên bi trắng rồi quan sát màu của nó, biết rằng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng.

Dạng 2. Không gian mẫu và xác suất của biến cố.

3. Ba bạn Bình, Châu, Dương được xếp ngẫu nhiên ngồi trên một hàng ghế có ba chỗ ngồi. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Bình không ngồi ngoài cùng bên phải";

b) F: "Châu và Dương không ngồi cạnh nhau".

4. Một hộp có 20 viên bi với kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó các số 1, 2, 3, ..., 20; hai viên bi khác nhau thì viết hai số khác nhau.

Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp".

a) Liệt kê các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên viên bi được lấy ra.

b) Viết không gian mẫu phép thử đó.

c) Tính xác suất biến cố: "Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1".

5. Hộp thứ nhất chứa 1 quả bóng màu xanh và 1 quả bóng đỏ. Hộp thứ hai chứa 1 quả bóng màu vàng và 1 quả bóng đỏ. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả bóng.

a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Biết rằng các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- M: "2 quả bóng lấy ra có cùng màu";
- N: "2 quả bóng lấy ra khác màu";
- Q: "Có ít nhất 1 quả bóng màu đỏ trong 2 quả bóng lấy ra".

6. Một hộp chứa 4 tấm thẻ cùng loại được đánh số 2; 3; 5; 8. Bạn Phi và bạn Thanh lần lượt mỗi người lấy ra 1 tấm thẻ từ hộp (Biết trong mỗi đợt lấy thì bạn Phi lấy tấm thẻ trước và không bỏ tấm thẻ lại vào hộp). Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

M: "Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ";

N: "Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ";

Q: "Số ghi trên tấm thẻ của bạn Phi lớn hơn số ghi trên tấm thẻ của bạn Thanh".

7. Một bó hoa gồm 3 bông hoa màu đỏ và 1 bông hoa màu vàng. Bạn Vi chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Liệt kê các cách chọn mà bạn Vi có thể thực hiện.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

R: "Trong 2 bông hoa được chọn ra, có đúng 1 bông hoa màu vàng";

T: "Trong 2 bông hoa được chọn ra, có ít nhất 1 bông hoa màu đỏ".

Dạng 3. Tìm giá trị ban đầu khi biết xác suất của biến cố

8. Một hộp chứa 9 quả bóng màu cam và một số quả bóng màu trắng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Biết xác suất của biến cố "Lấy được quả bóng màu trắng" là $\frac{2}{5}$. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu trắng?

9. Một túi chứa 5 viên bị màu vàng và một số viên bi màu đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Tuấn lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi. Biết rằng xác suất của biến cố “Lấy được viên bi màu vàng” là 0,5. Hỏi trong hộp có tổng số bao nhiêu viên bi?

10. Một hộp đựng 20 viên bi đỏ và xanh có cùng kích thước, khối lượng. Tìm số viên bi mỗi màu, biết rằng xác suất của biến cố A: "Lấy được bi đỏ" khi thực hiện phép thử lấy ngẫu nhiên một viên bi là $P(A) = 0{,}6$.

11. Bạn Tú có n tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến n . Bạn Tú rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ. Biết rằng xác suất của biến cố: "Lấy được tấm thẻ ghi số có hai chữ số" là $0{,}2$. Hỏi bạn Tú có bao nhiêu tấm thẻ?

Bài tập tự luyện

Bài 1: Hộp thứ nhất đựng 1 quả bóng trắng, 1 quả bóng đỏ. Hộp thứ hai đựng 1 quả bóng đó, 1 quả bóng cam. Hộp thứ ba đựng 1 quả bóng trắng, 1 quả bóng cam. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả bóng.

a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Biết rằng các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Hãy tính xác suất của mỗi biến cố sau:

C: "3 quả bóng lấy ra có khác màu";

D: "3 quả bóng lấy ra có cùng màu";

E: "Có đúng 2 quả bóng màu trắng trong 3 quả bỏng lấy ra".

Bài 2: Một chiếc hộp có chứa 5 tấm thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt là 4; 5; 6; 7; 8. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp.

a) Xác định không gian mẫu và số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

S: "Tích các số ghi trên 2 tấm thẻ chia hết cho 4";

Q: "Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ nhỏ hơn 12".

Bài 3: Ba bạn Bích, Cường, Dung được xếp ngẫu nhiên ngồi trên một hàng ghế có ba chỗ ngồi.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.
b) Tính xác suất của các biến cố sau:
E: "Bích không ngồi ngoài cùng bên phải";
F: "Cường và Dung không ngồi cạnh nhau".

Bài 4: Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất I và II. Tính xác suất các biến cố sau:

A: "Có đúng một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm";

B: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm";

C: "Tích của hai số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 6".

Bài 5: Phân xưởng 5 của nhà máy có 2 kỹ sư, 25 kỹ thuật viên và 7 thợ học việc. Người ta chọn ngẫu nhiên một người trong số này để phỏng vấn về chế độ đãi ngộ của nhà máy.

Hãy tính xác suất của các biến cố:

a) Chọn được một thợ học việc;

b) Chọn được một kỹ sư hoặc kỹ thuật viên.

Bài 6: Hai bạn nam Thăng, Long và hai bạn nữ Hà, Vi tham gia đợt biểu diễn nghệ thuật của lớp 9B. Giáo viên chọn ngẫu nhiên hai bạn để tham gia tiết mục hát chung.

a) Liệt kê các cách chọn ngẫu nhiên hai bạn để tham gia tiết mục hát chung.

b) Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

D: "Trong hai bạn được chọn ra, có một bạn nam và một bạn nữ";

E: "Trong hai bạn được chọn ra, có bạn Vi".

Bài 7: Một hộp chứa 2 quả bóng màu đỏ và một số quả bóng màu xanh. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Biết xác suất của biến cố "Lấy được quả bóng màu đỏ" là $\frac{1}{6}$. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu xanh ?

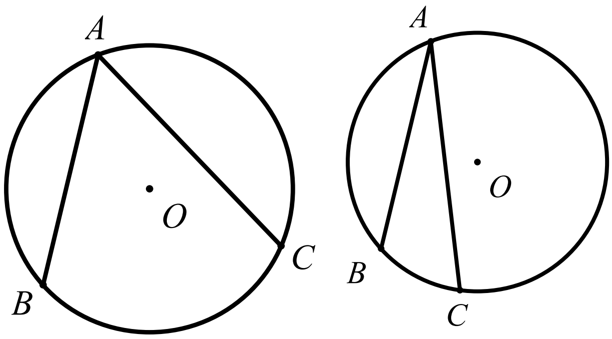
Bài 8: Một hộp chứa 4 quả bóng màu xanh và một số quả bóng màu vàng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Biết xác suất của biến cố "Lấy được quả bóng màu xanh" là 0,25. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu vàng?

Bài 9: Bạn Long có n tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến n. Bạn Long rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được tấm thẻ ghi số có một chữ số" là 0,25 . Hỏi bạn Long có bao nhiêu tấm thẻ?

Bài 10: Bạn Trang có n tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến n. Bạn Trang rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được tấm thẻ ghi số nhỏ hơn 16" là 0,25. Hỏi bạn Trang có bao nhiêu tấm thẻ?

BÀI 27:
GÓC NỘI TIẾP

• **Góc nội tiếp** là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường trong đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn



• Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn
• Nhận xét
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chăn một
- cung
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM.

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$.

c) Gọi N là giao điểm AH với (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

2. Cho đường tròn $\left(O\right)$ và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB.

a) Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm của AK và BI. Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAS.

3. Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung nhỏ AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S. Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2 \cdot \widehat{MBA}$.

4. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm nằm ngoài đường tròn. Các đường thẳng SA và SB lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai M, N. Gọi H là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng

a) $SH \perp AB$.

b) $HM \cdot HB = HN \cdot HA$.

5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60°.

a) So sánh các góc của tam giác ABC.

b) Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC. Hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh tia CI tia phân giác của góc ACB.

6. Cho (O) và điểm M cố định. Qua M kẻ hai đường thẳng, đường thẳng thứ nhất cắt đường tròn (O) tại A và B, đường thẳng thứ hai cắt đường tròn tại C và D. Chứng minh $MA.MB = MC.MD$.

7. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. Đường thẳng CA cắt nửa đường tròn ở M, CB cắt nửa đường tròn ở N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh CH vuông góc với AB.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

8. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong góc B và C cắt (O) tại E và D.

1. Chứng minh $\Delta ACE = \Delta ABD$.

2. Gọi I là giao điểm của CD và BE. Tứ giác $ADIE$ là hình gì? Tại sao?

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt đường tròn tại M. Tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường tròn tại N. Chứng minh

a) Tam giác MBC cân.

b) Ba điểm M, O, N thẳng hàng.

10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh ba điểm H, M, E thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

11. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $\left(O';R'\right)$ cắt nhau tại A và $B.$ Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB $\left(C \in (O), D \in \left(O'\right)\right)$. Tia CB cắt $\left(O'\right)$ tại E, tia BD cắt (O) tại $F.$

Chứng minh rằng $CD^2 = CB.CE + BD.CF$.

12. Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên cung nhỏ $BC.$ Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

13. Cho tam giác ABC cân tại $A, A < 90^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại $E.$ Chứng minh rằng:

a) ΔDBE cân.

b) $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

14. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O).$ Vẽ đường kính MN vuông góc với BC (M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng AM, AN là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}.$

15. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE. Chứng minh rằng

a) $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

b) Tứ giác $ABEC$ là hình thang cân

c) Tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O)

16. Cho tam giác ABC nhọn với các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng AA' là phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$

17. Cho (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D .

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AC , có bán kính OB vuông góc với AC . Điểm M thuộc cung AB. Tính $\widehat{\mathrm{BMC}}$, $\widehat{\mathrm{AMB}}$.

Bài 2: Cho điểm K nằm trên đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của OK. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với OK, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm A và B.

a) Chứng minh: tam giác OAK đều.

b) Tính số đo của các cung $\overset{\frown}{AKB}$ và $\overset{\frown}{ABK}$.

Bài 3: Cho tam giác ABC cân ở A và có ba đỉnh nằm trên một đường tròn. Lấy D thuộc, cung BC không chứa A. Chứng minh: $\widehat{ADC} = \widehat{ACB}$.

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH $(H \in BC)$ và có ba đỉnh nằm trên một đường tròn (O) và $AB < AC$. Vẽ đường kính AK của (O).

a) Chứng minh: tam giác ACK vuông.

b) Chứng minh: $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.

Bài 5: Cho hai đường tròn tâm O và O' cùng có bán kính bằng R, cắt nhau tại A và B sao cho O và O' nằm ơ hai bên đường thẳng AB. Cát tuyến đi qua A cắt (O) và (O') lần lượt tại C, và D (A nằm giữa C và D). Tứ giác $AOBO'$ là hình gì? Chứng minh $BC = BD$.

Bài 6: Cho $\widehat{BAC} = 30^\circ$ nội tiếp đường tròn O (B và C thuộc (O)). Vẽ đường tròn tâm I đi qua O sao cho hai điểm B và C nằm ơ bên trong (I). Hai tia OB và OC cắt (I) lần lượt tại E và F. Tính $\widehat{EIF}$.

Bài 7: Cho AB là đường kính của đường tròn tâm O, bán kính bằng R. Vẽ hai dây cung AD và BC cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc với AB ở F. Chứng minh: $\triangle AFE \# \triangle ADB$; $\triangle BFE \# \triangle BCA$.

Bài 8: Cho hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau ở A và B. Vẽ AC và AD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'). Chứng minh: C, B, D thẳng hàng.

Bài 9: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Đường vuông góc vơi AB kẻ qua B cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm C, D. Lấy N trên cung nhỏ BC của đường tròn (O). Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng NB với đường tròn (O') là M. Chứng minh:

a) $AC = AD$.

b) $\triangle AMN$ cân tại A.

Bài 10: Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD. Đường tròn đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại F và E. Chứng minh AD, BE và CF đồng quy.

Bài 11: Cho tam giác ABC nhọn có ba đỉnh nằm trên $(O;R)$, có hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H. AD cắt (O) tại K. Chứng minh:

a) $BH.BE = BD.BC$;

b) $DH = DK$.

Bài 12: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính MN. Kẻ Nx là tiếp tuyến tại N của (O) và lấy điểm E thuộc nửa đường tròn. Gọi D là giao điểm của tia ME và Nx. Lấy điểm F thuộc cung nhỏ NE của (O). Gọi C là giao điểm của tia MF và Nx. Chứng minh:

a) $ME.MD = 4R^2$;

b) $\widehat{MFE} = \widehat{CDE}$.

Bài 13: Cho AB và CD là hai dây song song của một đường tròn (tia AB và tia DC cùng chiều). Chứng minh: sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Bài 14: Cho AB là đường kính của đường tròn O. CD là dây song song với AB (tia CD cùng chiều với tia AB). Chứng minh:

a) $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$;

b) $\widehat{ACD} - \widehat{ADC} = 90^\circ$.

Bài 15: Cho tam giác ABC nhọn có ba đỉnh nằm trên đường tròn tâm O. Gọi OM là bán kính vuông góc với cạnh BC (M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh: AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Bài 16: Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn. Vẽ MH vuông góc với tiếp tuyến đó tại H. So sánh $\widehat{MAH}$ và $\widehat{MBA}$, chứng minh: $MH.AB = MA^2$.

Bài 17: Trên nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, có điểm C di động. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D.

a) Chứng minh: OD vuông góc BC

b) Tia AC cắt tia BD tại K. Tam giác ABK có gì đặc biệt? Chứng minh: khi C di động thì K chạy trên một đường cố định.

Bài 18: Cho tam giác ABC nhọn có ba đỉnh nằm trên đường tròn tâm O và có hai đường cao BE và CF lần lượt cắt (O) ở I và K. Chứng minh:

a) $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$;

b) OA vuông góc với IK.

Bài 19: Cho đường tròn tâm O có dây AB . Gọi M là trung điểm của dây AB . Vẽ dây CD bất kỳ đi qua $\mathrm{M}(\mathrm{CD}$ không trùng với $\mathrm{AB})$ . . Chứng minh dây CD dài hơn dây AB .

Bài 20: Cho điểm I bên trong đường tròn tâm O . Cho hai dây cung AC và BD cùng đi qua I sao cho OI là tia phân giác của $\widehat{\mathrm{AIB}}$. Vẽ OH vuông góc với AC ở H,OK vuông góc vơi BD ở K.

a) Chứng minh: $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$.

b) Chứng minh: sđ $\overset{\frown}{AD}=$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ và tứ giác ABCD là hình thang cân.

c) Chứng minh: OI vuông góc với AB .

Bài 21: Cho AB là đường kính của đường tròn tâm O bán kính R . Vẽ hai dây cung AD và BC cắt nhau tại E . Vẽ EF vuông góc với AB ở F . Chứng minh:

a) $\mathrm{AE.AD}=\mathrm{AF.AB}$ và phát biểu kết quả tương tự.

b) $AE\cdot AD+BE\cdot BC=4R^2$.

Bài 22: Trên nửa đường tròn tâm O bán kính R , đường kính AB , lấy điểm M sao cho $\mathrm{AM}=$ MO. Vẽ tiếp tuyến tại A . Vẽ MH vuông góc với tiếp tuyến đó tại H .

a) Chứng minh $\mathrm{AM}^2=\mathrm{MH.AB}$.

b) Tính MH và AH theo R .

Bài 23: Tam giác ABC nhọn có đường cao AH và có ba đỉnh nằm trên trong đường tròn bán kíhh R. AD là đường kính của đường tròn. Chứng minh:

a) $2\mathrm{R}\cdot\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$; b) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot BC}{4R}$.

Bài 24: Hai tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại A. OA cắt BC ở H và cung nhỏ BC ở I . Chứng minh:

a) Sđ $\overset{\frown}{IB}=$ sđ $\overset{\frown}{IC}$ và I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle\mathrm{ABC}$.

b) $\mathrm{IA.BC}=2\mathrm{IH.AB}$ (Gợi ý: Hệ quả định lí Thalès về tính chất đường phân giác trong $\triangle\mathrm{ABH}$)

Bài 25: Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC . Gọi O là tâm của đường tròn (BIC) . Chứng minh: $\widehat{\mathrm{ICC}}=\widehat{\mathrm{ABC}}$ và $\widehat{\mathrm{IOB}}=\widehat{\mathrm{ACB}}$.

BÀI 28:
ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

• **Đường tròn ngoại tiếp** của một tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó.
• Đường tròn ngoại tiếp của tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng một nửa cạnh huyền.
• Đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và có bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.
• Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là **đường tròn nội tiếp** tam giác. Tam giác đó được gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác.
• Đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và có bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Đường tròn bàng tiếp tam giác

• Đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC trong góc A là đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và tiếp xúc với các tia đối của tia BA và tia CA.

LƯU Ý: Ở phần bài tập này em **Toán Hoạ 0942014265** có chèn bài tập thêm về tứ giác nội tiếp ở nội dung sau. Để cung cấp đủ dạng toán và phong phú bài tập về đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác. Khi thầy cô sử dụng có thể dạy các bài toán này sau khi học sinh học xong dạng toán về ***Tứ giác nội tiếp***.

BÀI TẬP

Dạng 1. So sánh các cung tạo bởi tam giác nội tiếp đường tròn.

1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Cho biết $\widehat{BAC} = 50^\circ$. So sánh các cung nhỏ AB, AC và BC.

2. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Cho biết $\widehat{BAC} = 75^\circ$. So sánh các cung nhỏ AB, AC và BC.

Dạng 2. Tính bán kính, diện tích hình tròn, hình quạt tròn tạo bởi tam giác nội tiếp đường tròn.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm nội tiếp đường tròn (O). Tính diện tích hình tròn (O).

4. Cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $R = 3$ (cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OM, OP và cung nhỏ MP khi $\widehat{MNP} = 45^\circ$.

5. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 6cm$ và $AC = 8cm$ ngoại tiếp đường tròn $\left(I;r\right)$. Tính r

6. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 9cm, AC = 12cm$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG

Dạng 3. Chứng minh một điểm là tâm đường tròn nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp tam giác.

7. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Lấy $M \in (O)$ với $AM < BM$. Trên cạnh MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Gọi OD là bán kính vuông góc với AB(M và D ở hai bên đường thẳng $\overrightarrow{AB}$)

a) Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$. Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABD$.

b) Chứng tỏ MD là phân giác $\widehat{AMB}$ và $MD \perp AC$.

c) Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d) Đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt MD tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB.

8. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C cùng trên một nửa đường tròn đường kính AD tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.

b) E là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCH.

Dạng 4. Các bài tập liên quan đến đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \dfrac{1}{2}AH$.

10. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn; AD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là điểm đối xứng với B qua O, I là giao điểm của BM và DE, K là giao điểm của AC và HM.

a) Chứng minh các tứ giác $AEDC$ và $DIMC$ nội tiếp.

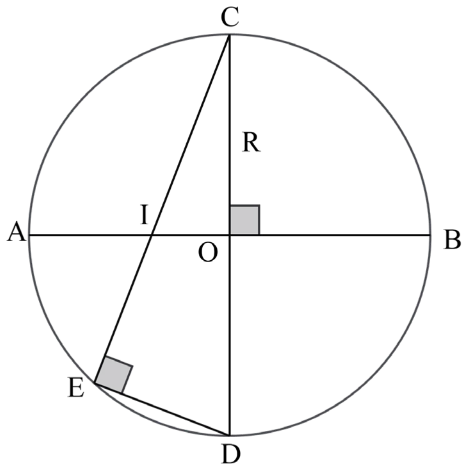
b) Chứng minh $OK \perp AC$.

c) Cho $\widehat{AOK} = 60^{0}$. Chứng minh ΔHBO cân.

11. Cho ΔABC vuông tại A $\widehat{BAC}=90^0\left(AB\le AC\right)$. Đường tròn $\left(I\right)$ nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng:

a) $BD=\dfrac{BC+AB-AC}{2}$.   b) $S_{ABC}=BD.DC$

12. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ và hai đường kính vuông góc AB,CD. Trên bán kính AO lấy đoạn $AI=\dfrac{2AO}{3}$, vẽ tia CI cắt $\left(O\right)$ tại E. Tính R theo CE



Dạng 5. Các bài tập liên quan đến đường tròn bàng tiếp tam giác

13. Cho ΔABC, đường tròn tâm I bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB,AC theo thứ tự tại E,F. Cho $BC=a,CA=b,AB=c$. Chứng minh rằng:

a) $AE=AF=\dfrac{a+b+c}{2}$;   b) $BE=\dfrac{a+b-c}{2}$;   c) $CF=\dfrac{c+a-b}{2}$

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tam giác MNP cân tại M nội tiếp trong đường tròn (O). Cho biết $\widehat{NMP}=30°$. So sánh các cung nhỏ MN, MP và NP.

Bài 2: Cho tam giác $A B C$ vuông tại A có $AB=9\text{cm}, AC=12\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3: Cho tam giác vuông cân DEF tại D có $\mathrm{DE}=\mathrm{DF}=12\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Bài 4: Cho tam giác đều ABC có đường cao $\mathrm{AH}=6\text{cm}$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 5: Cho tam giác đều MNK có cạnh bằng 10cm. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác MNK.

Bài 6: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(\text{O};12\text{cm})$. Tính BC.

Bài 7: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 15cm. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 8: Một mảnh vườn có dạng tam giác đều ABC cạnh 18m. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Bài 9: Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn $(\text{O};3\text{cm})$. Tính AB.

Bài 10: Cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều bằng 6cm. Tính cạnh của tam giác đều đó.

Bài 11: Từ điểm A ngoài đường tròn $(\text{O};5\text{cm})$ sao cho $\text{OA}=12\text{cm}$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) tại B và C.

a) Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Gọi M là giao điểm của đoạn OA với (O). Chứng minh: M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC rồi tính bán kính của đường tròn này.

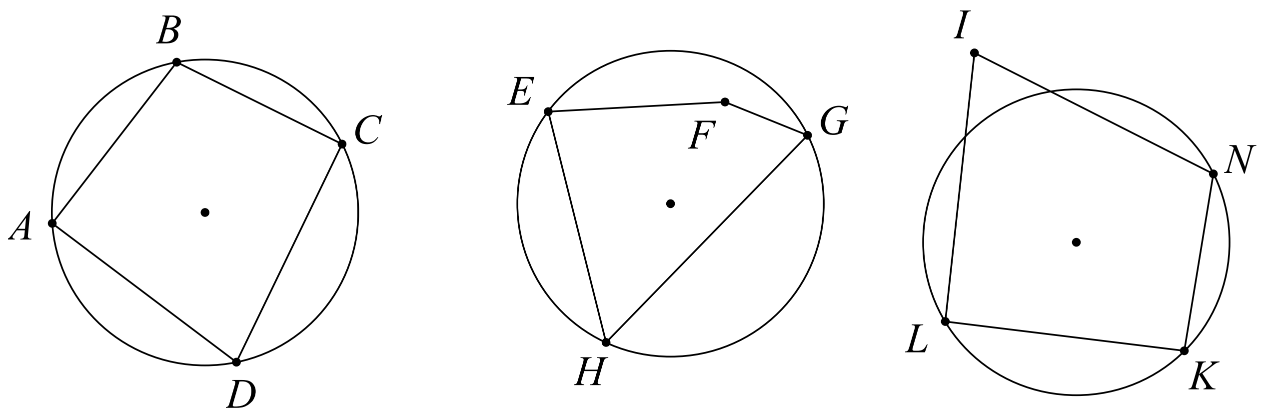
BÀI 29: TỨ GIÁC NỘI TIẾP

• Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là **tứ giác nội tiếp** đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
• **Định lí:** Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng $180°$
• Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông: Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

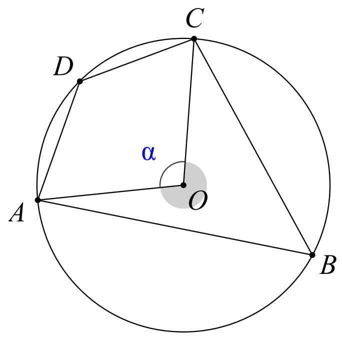
BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng, tính số đo của góc còn lại của tứ giác nội tiếp

1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào là tứ giác nội tiếp

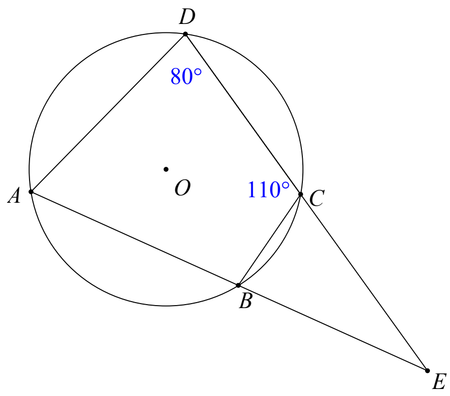


2. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\alpha = 100^0$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ của tứ giác $ABCD$. b) Tính $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$.

3. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\widehat{ADC} = 80°, \widehat{BCD} = 110°$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BAD}$ của tứ giác $ABCD$.   b) Tính $\widehat{BEC}$.

4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 110^0$ và $\widehat{B} = 50^0$ b) $\widehat{B} = 60^0$ và $\widehat{C} = 85^0$

c) $\widehat{C} = 55^0$ và $\widehat{D} = 127^0$

Dạng 2. Chứng minh tứ giác nội tiếp

5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

6. Cho đường tròn đường kính AB và D là một điểm thuộc đường tròn. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng AD tại M. Chứng minh tứ giác $MCBD$ nội tiếp được đường tròn, xác định tâm đường tròn đó.

7. Cho tam giác ABC biết $\widehat{A} < 90^0$,các đường cao AD và BE cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc AC). Chứng minh tứ giác $DHEC$ và $ABDE$ nội tiếp đường tròn.

8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D. Gọi E đối xứng với B qua C.

a) Chứng minh: $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: ΔABD” ΔMBC.

c) $CKMB$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng vuông góc với AO tại trung điểm I của AO cắt AC tại M và cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn ở E. Chứng minh tứ giác $OCEI$ và $IMCB$ là các tứ giác nội tiếp, xác định tâm của các đường tròn đó.

10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A, B). Kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I, tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E, cắt tia BM tại F. Tia BE cắt tia Ax tại H và cắt tia AM tại K. Chứng minh tứ giác $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc $\widehat{HAC}$. Phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ cắt AH, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng: $MHDN$ là tứ giác nội tiếp

Dạng 3. Các bài toán tổng hợp.

12. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE, BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M. Chứng minh $BM = BN$.

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC.

13. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại F. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B, M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E

a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD

c) Chứng minh $AC^2 = AE.AM$

14. Cho nửa đường tròn đường kính $AD.$ Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D). Hai dây AC, BD cắt nhau tại điểm $E.$ Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với $AD\left(F \in AD\right)$

a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

15. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Dựng đường thẳng d qua A song song BC, đường thẳng d' qua C song song BA, gọi D là giao điểm của d và d'. Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $\widehat{\mathrm{AOF}} = 2\widehat{\mathrm{CAE}}$

c) Tứ giác AECF là hình bình hành.

d) $\mathrm{DF} \cdot \mathrm{DB} = 2\mathrm{AB}^2$.

16. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây cung MN vuông góc với AB, ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB.

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB \,.\, HK = AN \,.\, HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

17. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, N là trung điểm của đoạn BC.

a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

18. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Hai tiếp tuyến tại *B* và *C* của đường tròn (*O*) cắt nhau tại *M*, tia *AM* cắt đường tròn (*O*) tại điểm *D*.

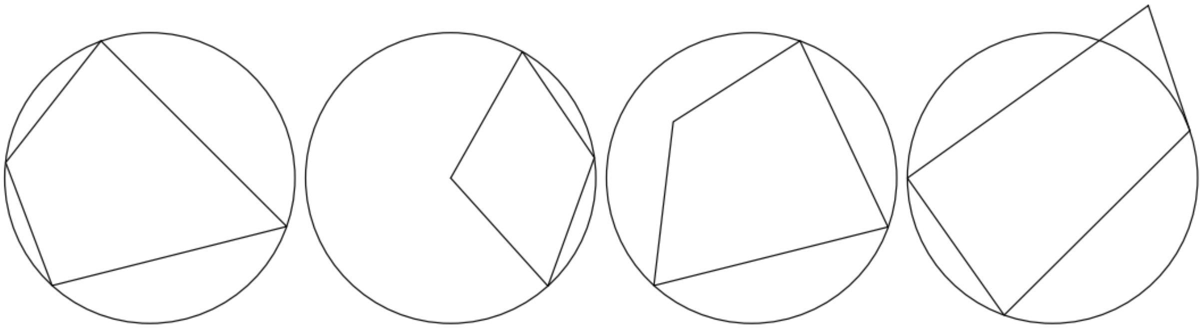
a) Chứng minh rằng tứ giác $OBMC$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

c) Gọi *E* là trung điểm đoạn thẳng *AD*; tia *CE* cắt đường tròn (O) tại điểm *F*. Chứng minh rằng: $BF // AM$

Bài tập tự luyện

Bài 1. Tìm tứ giác nội tiếp trong các hình vẽ sau:



Bài 2. Vẽ một tứ giác nội tiếp và một tứ giác không nội tiếp đường tròn

Bài 3: Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BE và CF cắt nhau ở H.Chứng minh hai tứ giác $AEHF$ và $BCEF$ nội tiếp.

Bài 4. Hai tiếp tuyến tại D và E của đường tròn (O) cắt nhau ở C Vẽ cát tuyến CBA sao cho D thuộc cung nhỏ AB Gọi I là trung điểm của AB

a) Chứng minh tứ giác $CDIO$ nội tiếp

b) Chứng minh năm điểm C, D, I, O, E cùng thuộc một đường tròn

Bài 5. Cho ABCD là tứ giác nội tiếp. Hoàn thành các giá trị còn thiếu của bảng sau:

Trường hợp	1	2	3	4
$\widehat{A}$	$90°$			$48°$
$\widehat{B}$	$140°$		$73°$	
$\widehat{C}$		$70°$	$85°$	
$\widehat{D}$		$60°$		$96°$

Bài 6. Xác định tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ trong các trường hợp sau:

a) $AB = 6cm, BC = 8cm$;

b) $AC = 9cm$

Bài 7. Cho hình vuông $MNPQ$ nội tiếp đường tròn bán kính R. Tính độ dài cạnh và đường chéo của hình vuông theo R

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn AC, đường tròn đường kính CM cắt hai đường thẳng BM và BC lần lượt tại D và N. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

b) Các đoạn thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm.

Bài 9. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại $H\left(E \in AC, F \in AB\right)$. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn

b) $AE.BC = EF.AB$

Bài 10: Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d không đi qua O cắt (O) tại hai điểm A; B. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M; qua M kẻ hai tiếp tuyến MC; MD với đường tròn (O) (C; D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh tứ giác $OMCH$ nội tiếp.

b) OM cắt đường tròn (O) tại I và cắt CD tại K. Chứng minh $\mathrm{OK.OM=R^2}$

Bài 11: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O), $\mathrm{AB < AC}$ và các đường cao $\mathrm{AD, BE, CF}$ cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: tứ giác $AEHF$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp.

b) Chứng minh: tứ giác $ABDE$ nội tiếp và $\mathrm{DB.DC = DA.DH}$. .

c) Gọi K là giao điểm khác A của hai đường tròn (O) và (I). Chứng minh: $\mathrm{OI // HK}$.

Bài 12: Cho đường tròn tâm O, đường kính $\mathrm{AB = 2R}$. Trên đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C không trùng với A và B). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BC ở điểm D. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng DO. Tia AH cắt đường tròn (O) tại điểm F (không trùng với A).

a) Chứng minh: $\mathrm{DA^2 = DC.DB}$ và $\widehat{\mathrm{DAC}} = \widehat{\mathrm{HFC}}$.

b) Chứng minh: tứ giác $AHCD$ nội tiếp.

c) Chứng minh: $\triangle\mathrm{DAH} \# \triangle\mathrm{HFC}$, rồi suy ra $\mathrm{CH \perp CF}$.

Bài 13: Cho tam giác ABC nhọn $\mathrm{(AB < AC)}$ nội tiếp trong $(\mathrm{O,R})$ có hai đường cao lần lượt là BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: tứ giác $ADHE$ và tứ giác $BEDC$ là các tứ giác nội tiếp. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADHE$ và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BEDC$

b) Chứng minh: IK // OA.

Bài 14: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao $\mathrm{AD, BE, CF}$ cắt nhau tại $\mathrm{H}\left(\mathrm{D} \in \mathrm{BC}, \mathrm{E} \in \mathrm{AC}, \mathrm{F} \in \mathrm{AC}\right)$, tia FE cắt đường tròn tại M. Chứng minh:

a) Tứ giác $BFEC$ nội tiếp và $\mathrm{AH} \cdot \mathrm{AD} = \mathrm{AF} \cdot \mathrm{AB}$.

b) $\widehat{\mathrm{AFM}} = \widehat{\mathrm{AMB}}$ và $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AH} \cdot \mathrm{AD}$.

Bài 15: Cho đường tròn tâm O bán kính $\mathrm{R} = 4\ \mathrm{cm}$, có dây BC cố định $(\mathrm{BC} < 2\mathrm{R})$. A là một điểm trên cung lớn BC sao cho $\triangle\mathrm{ABC}$ có ba góc nhọn. Các đường cao BM và CN của tam giác ABC cắt nhau tại H (với $\mathrm{M} \in \mathrm{AC}, \mathrm{N} \in \mathrm{AB}$).

a) Chứng minh: tứ giác $AMHN$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Tia AO cắt đường tròn (O) tại P và tia AH cắt BC tại D. Chứng minh: tứ giác $BNMC$ nội tiếp và $\widehat{\mathrm{BCN}} = \widehat{\mathrm{PAC}}$.

c) Cho biết $\widehat{\mathrm{BOC}} = 120^\circ$. Tính độ dài của đoạn AH.

Bài 16: Cho tam giác ABC nhọn $(\mathrm{AB} < \mathrm{AC})$. Đường tròn (O) đường kính BC cắt các cạnh $\mathrm{AB, AC}$ lần lượt tại D và E. BE và CD cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\mathrm{BE} \perp \mathrm{AC}$ và tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

b) AH cắt BC tại K. Chứng minh: $\mathrm{AH} \perp \mathrm{BC}$ và $\mathrm{KB}.KC = \mathrm{KH.KA}$.

c) Chứng minh: tứ giác $DKOE$ nội tiếp.

d) Gọi M là giao điểm của KE và HC. Chứng minh: $\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MC}} \cdot \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DH}} = 1$.

Bài 17: Cho bốn điểm $\mathrm{A, B, C, D}$ nằm trên đường tròn tâm O theo đúng thứ tự sao cho $\mathrm{BA} = \mathrm{BD}$. Hai đường thẳng CD và AB cắt nhau ở E. Tiếp tuyến tại A cắt đường thẳng BC tại F. Chứng minh:

a) $\widehat{\mathrm{EAF}} = \widehat{\mathrm{BAD}} = \widehat{\mathrm{ECF}}$.

b) Tứ giác $ACEF$ nội tiếp và $\mathrm{AD}//\mathrm{EF}$.

Bài 18: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn ($\mathrm{O;R}$). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

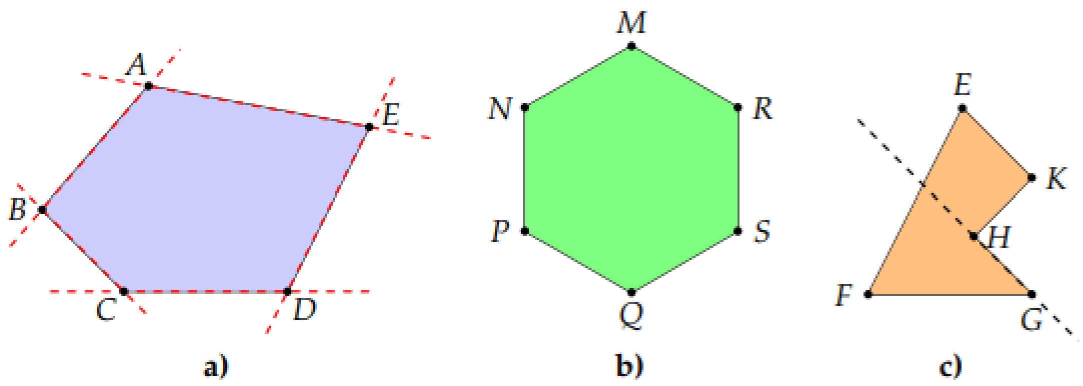
b) Tia BE cắt $\left(O\right)$ tại P, tia CF cắt $\left(O\right)$ tại Q. Chứng minh: $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ và $EF//PQ$.

c) Chứng minh: OA vuông góc với PQ.

d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle EFH$ theo R khi $BC = R\sqrt{3}$

BÀI 30: ĐA GIÁC ĐỀU

• Đa giác $ABCDE$ là hình gồm các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.



Trong hình vẽ trên ta có các đa giác $ABCDE$, $MNPQRS$; $EFGHK$

Xét đa giác $ABCDE$ ta có:

- Các điểm A, B, C, D, E gọi là các đỉnh
- Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA gọi là các cạnh.
- Các góc $\widehat{ABC}$; $\widehat{BCD}$; $\widehat{CDE}$; $\widehat{DEA}$; $\widehat{EAB}$ gọi là các góc của đa giác

• Nếu với một cạnh bất kì, các đỉnh không thuộc cạnh đó đều nằm về một phía đối với đường thẳng chứa cạnh đó thì đa giác được gọi là đa giác lồi.

Đa giác ở hình a, hình b là các đa giác lồi. Đa giác ở hình c không phải là đa giác lồi.

• **Đa giác đều** là một đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

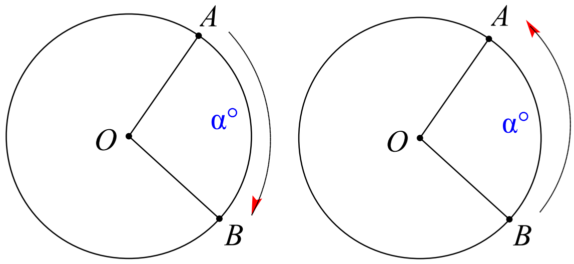
- Đa giác đều có n cạnh gọi là n - giác đều.
- Khi n lần bằng $3, 4, 5, 6, ...$ ta có tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều, lục giác đều, ...

- Từ nay về sau, khi nói về đa giác mà nếu không giải thích gì thêm, thì hiểu đó là đa giác lồi.

• **Phép quay:**

Phép quay thuận chiều $\alpha^\circ \left(0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ\right)$ tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn (O, OA) sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α°.

Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tâm O (H.9.48b). Phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.



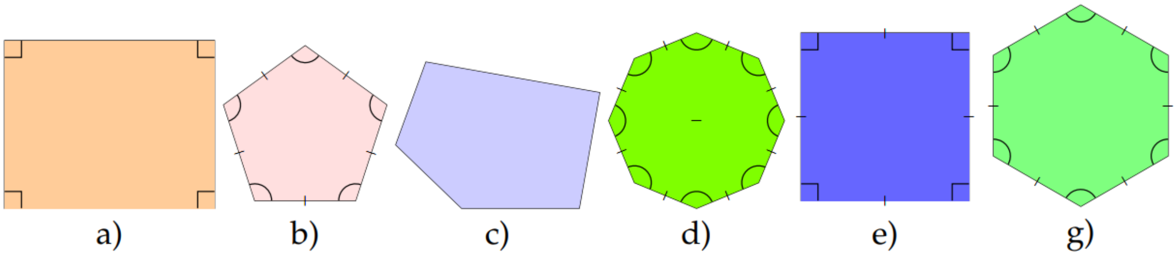
• Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều $\mathcal{H}$ nếu phép quay đó biến mỗi điểm của $\mathcal{H}$ thành một điểm của $\mathcal{H}$

• Người ta chỉ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều $\mathcal{H}$ thành các đỉnh của $\mathcal{H}$ thì phép quay đó giữ nguyên $\mathcal{H}$.

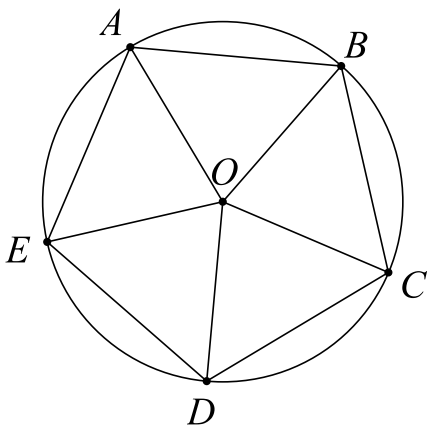
BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm đa giác đều, chứng minh đa giác đều

1. Tìm và gọi tên các đa giác đều trong hình dưới đây



2. Cho đường tròn $(O;R)$. Lấy các điểm A,B,C,D,E trên đường tròn $(O;R)$ sao cho số đo các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EA}$ bằng nhau. Đa giác $ABCDE$ có là đa giác đều không? Vì sao?



3. Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng $DKFIEM$ là lục giác đều.

4. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trên cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA lấy các điểm A', B', C', D', E', F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

Dạng 2. Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp đa giác đều. Diện tích đa giác đều

5. Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a. Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

6. Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

7. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

Phương pháp:

Đa giác đều có n cạnh bằng nhau và cũng có n góc bằng nhau nên có công thức tính số đo mỗi góc là: $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$

8. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng $135°$.

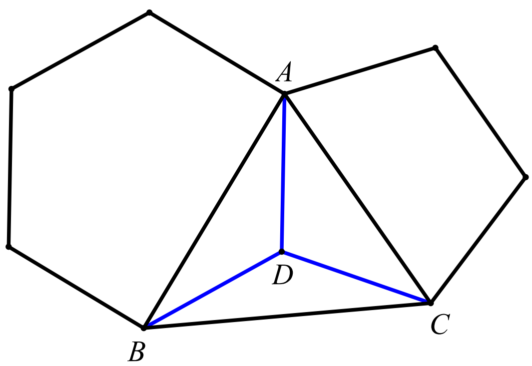
9. a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

Dạng 3. Các bài toán liên quan về đa giác đều, đa giác lồi.

10. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của EF, N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

11. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC.



12. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi I là giao diểm của AD và BE. Chứng minh rằng

a) $DIBC$ là hình bình hành;

b) $DI^2 = AI \cdot AD$.

13*. Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M. Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng

a) Các tam giác DFO và BOE đồng dạng.

b) ME song song với AF.

14. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

b) Chứng minh ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều.

15. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

Dạng 4. Các bài toán về phép quay.

16. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O.

a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Tìm các số thích hợp cho các ô ? trong bảng bên dưới:

Tên hình	Số đỉnh	Số cạnh	Số đường chéo
Hình vuông	?	?	?
Ngũ giác đều	?	?	?
Lục giác đều	?	?	?

Bài 2: Tính số đo mỗi góc của một ngũ giác đều.

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$.

a) Vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều có các đỉnh nằm trên $(O; R)$.

b) Tính các cạnh của các hình vừa vẽ theo R.

Bài 4: Cho một lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Đa giác $MNPQRS$ có phải là một đa giác đều hay không. Vì sao?

Bài 6: Nếu một lục giác đều (đa giác có 6 cạnh) nội tiếp đường tròn bán kính 5 cm, thì độ dài của các cạnh của lục giác đều là bao nhiêu centimét? Số đo của các góc của lục giác đều là bao nhiêu độ?

Bài 7 : Tìm phép quay biến hình ngũ giác đều tâm I thành chính nó

Bài 8: Một vòng quay may mắn có dạng hình đa giác đều 10 cạnh. Tìm các phép quay biến đa giác này thành chính nó.

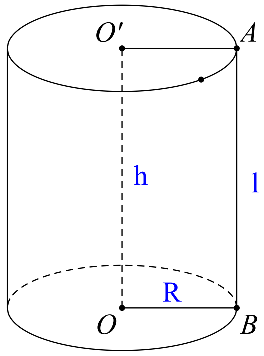
Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A\left(2;3\right)$. Thực hiện phép quay 90° ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc tọa độ. Tìm tọa độ mới của điểm A sau khi quay.

Bài 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A\left(2;2\right)$, $B\left(4;2\right)$, $C\left(3;5\right)$. Thực hiện phép quay 60° theo chiều kim đồng hồ với tâm quay là $O\left(0,0\right)$. Tìm tọa độ mới của các đỉnh sau khi quay.

Bài 11: Cho hình vuông $ABCD$ tâm I. Hãy cho biết các góc quay thuận chiều giữ nguyên hình vuông đó.

BÀI 31. HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

• Hình trụ



Chiều cao: $h = OO'$

Đường kính đáy: $OB = R$

Đường sinh: $l = AB$

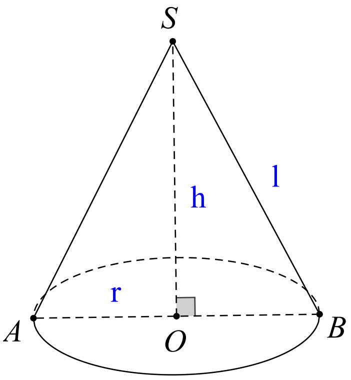
Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh$ trong đó R là bán kính đáy và h là chiều cao.

Thể tích: $V = S_{day}.h = \pi R^2 h$ trong đó

S_{day} là diện tích đáy,

R là bán kính đáy và h là chiều cao.

• Hình nón



Đỉnh: S

Chiều cao: $h = SO$

Đường sinh: $l = SA = SB$

Bán kính đáy: $r = OA = OB$

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl$ trong đó r là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.

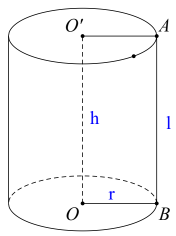
Thể tích: $V = \frac{1}{3}.S_{day}.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ trong đó

S_{day} là diện tích đáy, r là bán kính đáy, h là chiều cao.

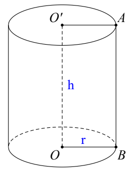
BÀI TẬP

Dạng 1. Các bài toán về hình trụ

1. Thay dấu "?"bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình trụ	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Diện tích toàn phần (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	3	7	?	?	?
	4	?	20π	?	?
	?	8	?	18π	?
	?	5	?	?	150π

2. Điền đầy đủ các kết quả vào bảng sau

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm^2)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	2	20				
	10	8				
		16	8π			

3. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 2 cm, chiều cao là 6 cm. Hãy tính:

a) Diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Diện tích toàn phần của hình trụ.

c) Thể tích hình trụ.

4. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính của đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là $314\ \text{cm}^2$. Tính:

a) Bán kính của đường tròn đáy (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

b) Thể tích của khối trụ.

5. Một hình trụ có bán kính của đường tròn đáy là 16 cm, chiều cao là 9 cm. Tính

a) Diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Thể tích của hình trụ. (Lấy $\pi = 3{,}142$ làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

6. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi\ cm^2$ và diện tích toàn phần là $28\pi\ cm^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.

7. Một hình trụ có chiều cao bằng 5cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính thể tích hình trụ.

8. Một thùng phuy hình trụ có số đo diện tích xung quanh (tính bằng mét vuông) đúng bằng số đo thể tích (tính bằng mét khối). Tính bán kính đáy của hình trụ.

9 . Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4, BC = 2$. Quay hình chữ nhật đó quanh AB thì được hình trụ có thể tích V_1; quay quanh BC thì được hình trụ có thể tích V_2. Trong các đẳng thức dưới đây đẳng thức nào đúng?

A. $V_1 = V_2$. B. $V_1 = 2V_2$. C. $V_2 = 2V_1$. D. $V_2 = 3V_1$.

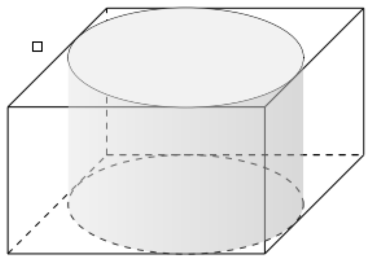
10. Cho hình chữ nhật ABCD cạnh $AB = 6\,cm; AD = 4\,cm$

a) Quay quanh cạnh AB ta được 1 hình trụ có diện tích xung quanh bằng ?

b) Quay quanh cạnh AD ta được 1 hình trụ có thể tích bằng ?

c) Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Nếu quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh trục MN, ta được một hình trụ có diện tích toàn phần là?

11. Một lọ hình trụ được "đặt khít" trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là $270\,\text{cm}^3$, tính thể tích của hộp giấy.



12. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a, BC = a$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có thể tích V_1 và khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có thể tích V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

13. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính là $3\,\text{cm}$. Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $292,5\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hộp sữa đó.

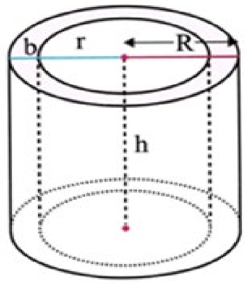
14. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > BC$. Biết diện tích hình chữ nhật là $48\,\text{cm}^2$, chu vi là $28\,\text{cm}$. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính dện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ này.

Dạng 2 : Các bài toán chọn lọc thực tế về hình trụ.

15. Hiện nay các văn phòng thường sử dụng loại thùng rác văn phòng, màu sắc, chất liệu thân thiện với môi trường. Trong ảnh là một thùng rác văn phòng có đường cao $0,8\text{m}$, đường kính $0,4\text{m}$. Tính thể tích của thùng rác này (Coi thùng rác văn phòng là hình trụ).

16. Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30cm, chiều cao 20cm đựng đầy nước, lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40cm, chiều cao 12cm. Hỏi nếu đổ hết nước từ lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài không? Tại sao?

17. Người ta xây một bể ga hình trụ có bán kính $R = 1\text{m}$ (tính từ tâm bể đến mép ngoài), chiều dày của thành bể là $b = 0,05\ \text{m}$,chiều cao của bể là $h = 1,5\text{m}$. Tính dung tích của bể ga (làm tròn đến hai chữ số thập phân).



18. Một khúc gỗ quý hình trụ có đường kính đáy bằng 1,2 *m*, chiều cao bằng bán kính đáy

a) Tính diện tích xung quanh của khúc gỗ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Với thành hiện tại, $1\ m^3$ gỗ trên bán được 5 triệu đồng. Hãy tính giá thành khúc gỗ trên nếu đem đi bán.

19. Một bồn nước inox Đại Thành có dạng hình trụ với chiều cao $1,75m$ và diện tích đáy là $0,32m^2$.

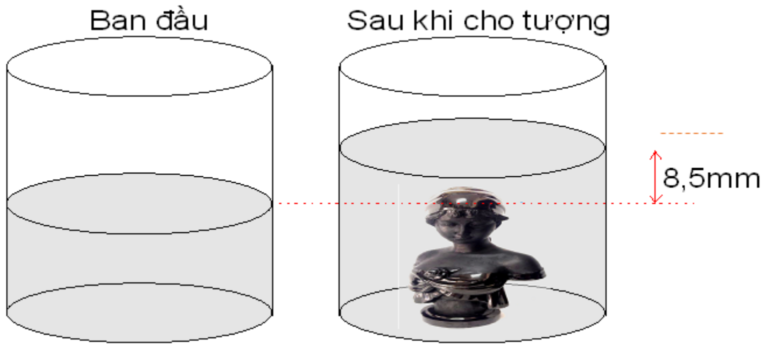
a) Tính bán kính đáy của bồn nước inox Đại Thành (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn).

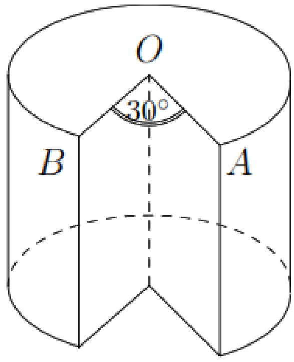
20. Khi uống nước giải khát, người ta hay sử dụng ống hút nhựa dạng hình trụ đường kính đáy là $0,4\,cm$, chiều dài ống hút là $18cm$. Hỏi khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến phần ngàn).

21.

Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $12,8\ \mathrm{cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm $8,5\ \mathrm{mm}$. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu?



22. Một hình trụ có bán kính đáy là 3 cm, chiều cao 4 cm được đặt đứng trên mặt bàn. Một phần của hình trụ bị cắt rời theo các bán kính OA, OB và theo chiều dài thẳng đứng từ trên xuống dưới với $\widehat{AOB} = 30^\circ$.



a) Tính thể tích của phần bị cắt.

b) Tính thể tích của phần còn lại.

c) Diện tích toàn phần của hình trụ sau khi đã bị cắt.

Dạng 3: Các bài toán về hình nón

Dạng 3. Các bài toán về hình nón

Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón :

$S_{\mathrm{xq}} = \pi r l$; $S_{\mathrm{tp}} = \pi r l + \pi r^2$

(r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón).

Thể tích hình nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ (h là chiều cao).

1. Cho hình nón có bán kính r, đường kính đáy là d, chiều cao h, đường sinh l, thể tích V, diện tích xung quanh S_{xq}, diện tích toàn phần S_{tp}. Hoàn thành bảng sau:

$r\,(\mathrm{cm})$	$d\,(\mathrm{cm})$	$h\,(\mathrm{cm})$	$l\,(\mathrm{cm})$	$S_{xq}\,(\mathrm{cm}^2)$	$S_{tp}\,(\mathrm{cm}^2)$	$V\,(\mathrm{cm}^3)$
3			5			
		8				96π
	10			65π		
15		20				

2. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI = 4cm$ và $IM = 3cm$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón.

a) Tính độ dài đường sinh hình nón.

b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

c) Tính diện tích toàn phần hình nón.

d) Tính thể tích hình nón.

3. Cho tam giác $\Delta SO'A$ vuông tại cân ΔSOB, gọi $\frac{R'}{R} = \frac{SO'}{SO}$ là trung điểm của $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} == \frac{R'^2.SO'}{R^2.SO} = \left(\frac{SO'}{SO}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $BC = 2dm$. Khi quay tam giác 60° xung quanh trục $30\ cm$ ta được hình nón.

a) Tính diện t ích xung quanh hình nón.

b) Tính thể tích hình nón.

4. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy.
Tính theo r

a) Diện tích xung quanh của hình nón;

b) Thể tích của hình nón.

5. Cho tam giác ABC vuông tại $A, BC = 10\text{cm}$, đường cao $AH = 4\text{cm}$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC. Tính thể tích hình tạo thành.

6. Một hình nón có bán kính đáy bằng 20cm, số đo thể tích (tính bằng cm^3) bằng bốn lần số đo diện tích xung quanh (tính bằng cm^2). Tính chiều cao của hình nón.

7. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, đường sinh bằng l. Khai triển mặt xung quanh hình nón ta được một hình quạt. Tính số đo cung của hình quạt theo r và l.

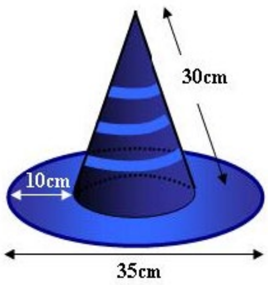
8. (Áp dụng **bài 7**) Một hình nón có bán kính đáy bằng 7cm, chiều cao bằng 24cm.

a) Tính số đo cung hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón;

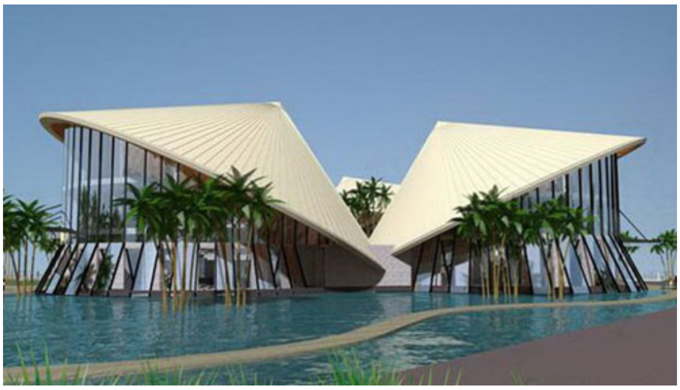
b) Tính diện tích toàn phần của hình nón.

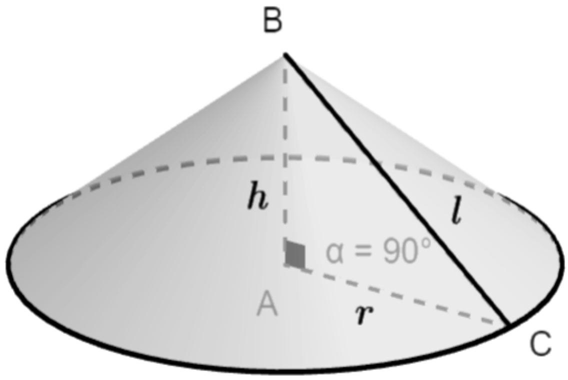
9. Một chiếc nón có đường kính đáy bằng $28\ cm$ và đường sinh bằng $30\ cm$. Tính diện tích lá dùng để làm nón, biết tỉ lệ hao hụt là 10% (lấy $\pi = 3{,}14$).

10. Tính lượng vải cần mua để tạo ra nón của chú Hề trong hình bên. Biết rằng tỉ lệ khấu hao vải khi may nón là 15%.



11. Nhà hát Cao Văn Lầu và Trung tâm triển lãm văn hóa nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng 3 chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam, mái nhà hình nón làm bằng vật liệu composite và được đặt hướng vào nhau. Em hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của mái nhà hình nón biết đường kính là 45m và chiều cao là 24m (lấy $\pi \approx 3{,}14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

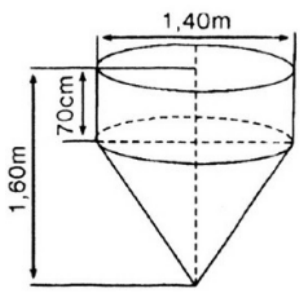




12. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình bên. Hãy tính:

a) Thể tích của dụng cụ này.

b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy).



Bài tập tự luyện về hình trụ

Bài 1: Một hình trụ có độ dài đường cao gấp đôi đường kính đáy. Biết thể tích hình trụ là $108\pi\ cm^3$. Tính S_{xq}

Bài 2: Một hình trụ có bán kính là $3\,\text{cm}$. Biết diện tích toàn phần của hình trụ gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ.

Bài 3: Một hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao. Khi cắt hình trụ này bằng một mặt phẳng đi qua trục thì mặt cắt là một hình chữ nhật có diện tích $54cm^2$. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ?

Bài 4: Một hình trụ có diện tích toàn phần là $120\pi\left(cm^2\right)$ và có bán kính đáy bằng $6\,cm$. Tính chiều cao của hình trụ.

Bài 5: Một hình trụ có thể tích bằng $81\pi\left(cm^3\right)$ và đường sinh gấp ba lần bán kính đáy. Độ dài đường sinh của hình trụ là?

Bài 6: Tính chiều cao của hình trụ có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh và bán kính đáy là 3cm

Bài 7: Tính chiều cao của hình trụ có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh và bán kính đáy là $4\,\text{cm}$

Bài 8: Một hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là $8\,\text{cm}, 5\,\text{cm}$. Quay hình chữ nhật đó một vòng quanh chiều dài hay chiều rộng thì thể tích lớn hơn?

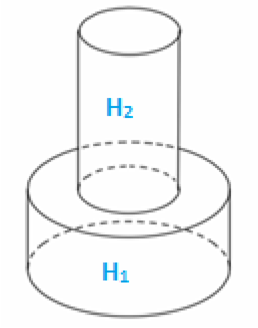
Bài 9: Một hình trụ có chu vi đáy là $24\pi\,\text{cm}$ và diện tích toàn phần là $768\pi\,\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ.

Bài 10: Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một hình trụ là $\frac{3}{5}$. Biết bán kính đáy là $6\,\text{cm}$, tính chiều cao của hình trụ.

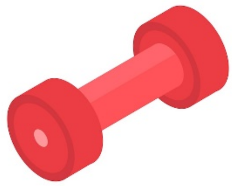
Bài 11: Một hình trụ có thể tích là $300\,\text{cm}^3$ và diện tích xung quanh là $120\,\text{cm}^2$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó.

Bài 12: Một hình trụ có diện tích xung quanh là $24\pi\text{cm}^2$ và diện tích toàn phần là $42\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.

Bài 13: Một khối đồ chơi gồm hai hình trụ $(H_1),(H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1,h_1,r_2,h_2 thỏa mãn $r_2=\frac{1}{2}r_1,h_2=2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30cm^3$. Tính thể tích khối trụ (H_1).



Bài 13



Bài 14

Bài 14: Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng $12(cm)$, chiều cao bằng $6(cm)$, chiều dài tạ bằng $30(cm)$ và bán kính tay cầm là $2(cm)$. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

Bài 15: Một thùng nước hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy và bằng 1 m. Thùng nước này có thể đựng được 1 m^3 nước không? Tại sao? (lấy $\pi = 3,14$)

Bài 16: Một hộp đựng chè hình trụ có đường kính đáy bằng 8 cm và chiều cao bằng 12 cm. Tính diện tích giấy carton để làm một hộp chè đó, biết tỉ lệ giấy carton hao hụt khi làm một hộp chè là 5% (lấy $\pi = 3,14$).

Bài 17: Để hưởng ứng cuộc vận động "*Nói không với rác thải nhựa dùng một lần*", một nhà hàng dùng hộp giấy để đựng sữa chua. Hộp giấy có dạng hình trụ có đường kính đáy là 6 cm; chiều cao 7 cm và có lắp đậy làm bằng nhựa. Tính số m^2 giấy để sản xuất 100 hộp giấy trên. (Biết $1m^2=10000cm^2$; lấy $p=3,14$ và bỏ qua các mép dán vỏ hộp).

Bài tập tự luyện về hình nón

Bài 1: Cho tam giác vuông H tại ABC, A và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Khi quay tam giác $R=HC=2$ xung quanh trục ΔAHC, ta thu được hình nón.

a) Tính độ dài đường sinh $\widehat{HAC}=30^\circ$ của hình nón

b) Tính thể tích hình nón.

Bài 2: Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6{,}13\,m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường trình vành nón $50\,cm$, chiều cao $30\,cm$ thì cần bao nhiêu khối lượng lá? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

Bài 3: Một chiếc nón lá có đường kính đáy nón bằng $41{,}25\,\text{cm}$, chiều cao của nón bằng $18{,}15\,\text{cm}$.

a) Tính diện tích lá tối thiểu cần để làm chiếc nón lá trên (không kể viền, mép và phần thừa).

b) Khung của một chiếc nón lá có dạng hình nón được làm bởi các thanh gỗ nối từ đỉnh tới đáy nón như các đường sinh. Mỗi thanh gỗ có 16 nấc tương ứng với 16 vành nón. Người ta lấy chiếc nón đựng gạo. Biết lượng gạo cao đến vành nón thứ 14 (tính từ đỉnh nón), khối lượng riêng của gạo là $1200\,\text{kg}/\text{m}^3$. Tính khối lượng gạo đựng trong nón. Biết diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi rl$, thể tích hình nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, khối lượng riêng $D = \frac{m}{V}$, trong đó r là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 4: Tính diện tích phần lá phủ xung quanh của chiếc nón lá (không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến 2 chữ số thập phân). Biết diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$.
Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 10\,\text{cm}$, đường cao $AH = 4\,\text{cm}$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC. Tính thể tích hình tạo thành.

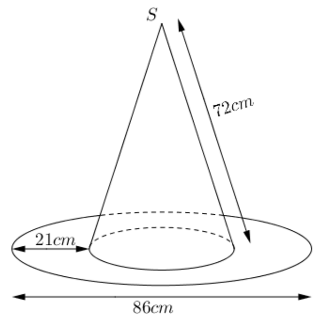
Bài 5: Cho tam giác ABC vuông cân, $\widehat{A} = 90^\circ, BC = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AB cố định. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 2a$ (đơn vị độ dài). Quay xung quanh tam giác một vòng quanh cạnh huyền BC. Tìm diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

Bài 7: Một chiếc nón lá có độ dài đường sinh là $25\,\text{cm}$, bán kính đường tròn đáy là $15\,\text{cm}$.

Tính thể tích của chiếc nón trên? Biết $V = \frac{1}{3}S.h$, trong đó V là thể tích hình nón; S là diện tích đáy, h là chiều cao hình nón.

Bài 8: Cái mũ có vành của chú hề với các kích thước cho theo hình vẽ.

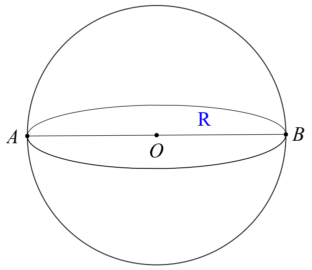


a) Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ của chú hề (không kể riềm, mép, phần thừa).

b) Chú hề dự định mua bột đổ đầy nón để làm ảo thuật. Chú hề cần mua khối lượng bột là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? (Biết rằng khối lượng riêng của loại bột đó là $1\,\text{gam/cm}^3$ nghĩa là $1\,\text{cm}^3$ tương ứng với $1\,\text{g}$).

BÀI 32. HÌNH CẦU

• Hình cầu



Tâm mặt cầu: O

Bán kính mặt cầu: $R = OA = OB$

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$

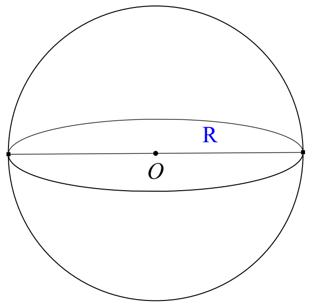
Thể tích: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

trong đó R là bán kính

BÀI TẬP

Dạng 1. Các bài toán về hình cầu

1. Cho hình cầu có bán kính R như hình vẽ. Hãy thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình cầu	Bán kính (dm)	Diện tích mặt cầu (dm^2)	Thể tích hình cầu (dm^3)
	4	?	?
	?	144π	?
	?	?	36π
	?	196π	

2. Một phao cơ hình cầu tự động đóng nước chảy vào bể khi bể đầy. Biết diện tích bề mặt của phao là $804\,\text{cm}^2$, tính bán kính của phao.

3. Một trái dưa có dạng hình cầu. Bổ đôi trái dưa này ra thì mặt cắt có diện tích là $314\,\text{cm}^2$. Tính thể tích của trái dưa đó.

4. Trái đất có bán kính $6400\,\text{km}$. Diện tích biển và đại dương chiếm $\dfrac{3}{4}$ bề mặt Trái đất. Hãy tính diện tích biển và đại dương của Trái đất (làm tròn đến triệu km^2).

5. Bạn An lấy thước dây đo vòng theo đường xích đạo của quả địa cầu trong thư viện được độ dài $94{,}2\,\text{cm}$. Hãy tính

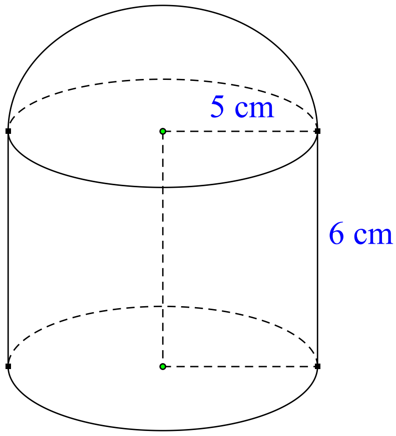
a) Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu.

b) Thể tích của quả địa cầu.

6. Hình bên minh họa bộ phận lọc của một bình nước. Bộ phận này gồm một hình trụ và một nửa hình cầu với kích thước ghi trên hình. Hãy tính:

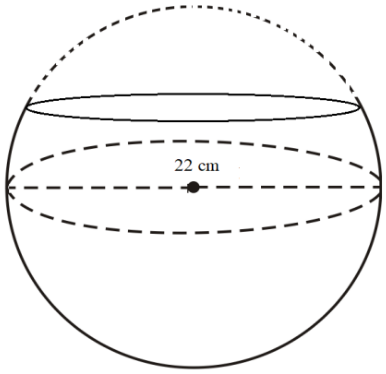
a) Thể tích của bộ phận đó;

b) Diện tích mặt ngoài của bộ phận này.

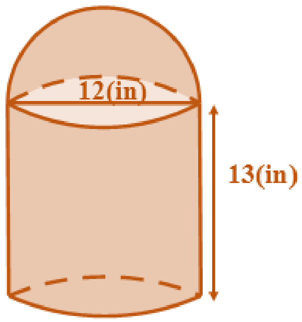


7. Một hình cầu đặt vừa khít trong một hình trụ có chiều cao là $18\,\text{cm}$. Tính thể tích phần không gian nằm trong hình trụ nhưng nằm bên ngoài hình cầu.

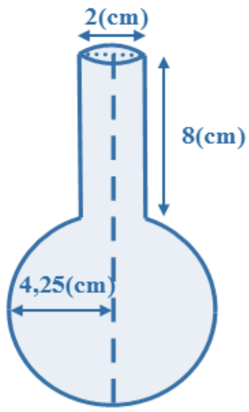
8. Cần phải có ít nhất bao nhiêu lít nước để thay nước ở liễn nuôi cá cảnh ? Liễn được xem như một phần mặt cầu có đường kính 22cm. Lượng nước đổ vào liễn chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích của hình cầu. (lấy $\pi \approx 3{,}14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



9. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một khối linh kiện máy (gồm một hình trụ và một nửa hình cầu có cùng đáy) với các kích thước đã cho ở hình vẽ sau theo đơn vị in^2.



10. Người ta đổ đầy nước vào một bình đong với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính thể tích của phần nước trong bình (giả sử bề dày của ống nghiệm không đáng kể).

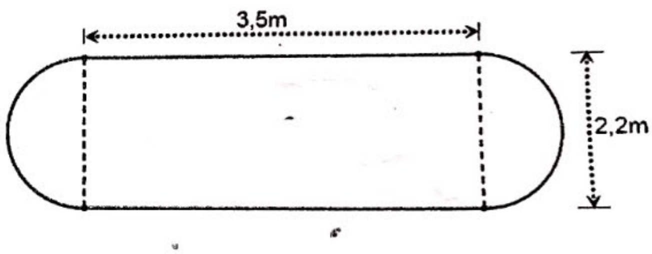


11. Các viên kẹo mút có dạng hình cầu, bán kính $1,6\,(\text{cm})$. Người ta dùng một que nhựa hình trụ tròn, bán kính $0,2\left(\text{cm}\right)$ cắm vào đến phân nửa viên kẹo để người dùng tiện sử dụng.

a) Tính thể tích phần ống nhựa hình trụ cắm vào phân nửa viên kẹo.

b) Tính thể tích thực của viên kẹo sau khi trừ phần ống nhựa cắm vào.

12. Một bồn chứa xăng đặt trên xe gồm hai nửa hình cầu có đường kính là $2,2\text{m}$ và một hình trụ có chiều dài $3,5\text{m}$ (hình 2). Tính thể tích của bồn chứa xăng (*kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy*)



Hình 2

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho hình cầu có bán kính $R=\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

a) Tính diện tích mặt cầu.

b) Tính thể tích của khối cầu tương ứng.

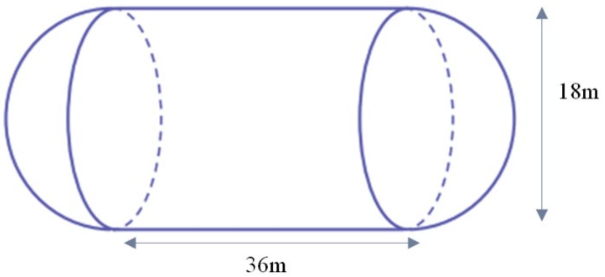
Bài 2: Một trái bưởi hình cầu có đường kính $18\,\text{cm}$. Lớp vỏ dày $1\,\text{cm}$. Tính thể tích của lớp vỏ bưởi.

Bài 3: Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

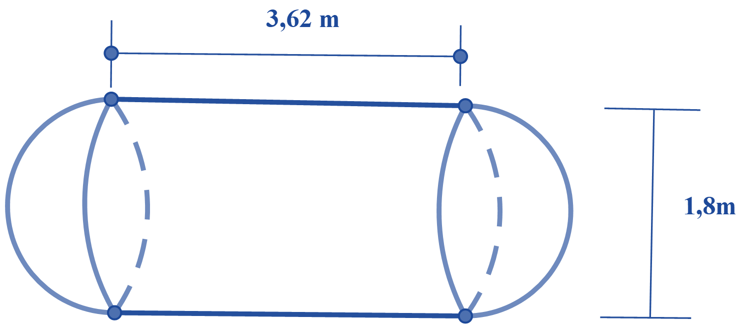
Bài 4: Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi\text{m}^2$. Tính thể tích của hình cầu đó.

Bài 5: Một hình cầu đặt vừa khít vào bên trong một hình lập phương có cạnh bằng $6cm$. Tính thể tích hình cầu ?

Bài 6: Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (hình vẽ) có kích thước như hình dưới đây. Tính thể tích của bồn.



Bài 7: Một xe bồn chở nước sạch cho một tổ dân phố gồm 200 hộ dân. Bồn chứa nước có dạng hình trụ và mỗi đầu của bồn là nửa hình cầu (kích thước như hình vẽ). Trung bình mỗi hộ dân nhận được 200 lít nước sạch mỗi ngày? Hỏi mỗi ngày, xe cần phải chở ít nhất bao nhiêu chuyến để cung cấp đủ nước cho 200 hộ dân trên. Biết mỗi chuyến bồn đều chứa đầy nước.



Bài 8. Có một quả bóng rổ (loại số 7 cho nam) và một quả bóng tennis. Biết rằng diện tich bề mặt của quả bóng rổ khoảng $1884,75\,\text{cm}^2$ và bán kính của quả bóng rổ gấp khoảng 2 lần đường kính của quả bóng tennis. Hỏi diện tích bề mặt của quả bóng tennis đó là bao nhiêu centimét vuông (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Bài 9: Một bồn nước hình trụ có bán kính đáy là $3\ \text{m}$, chiều cao là $4\ \text{m}$. Người ta đổ nước vào trong bồn sao cho chiều cao của nước bằng đúng một nửa chiều cao của bồn và tiếp tục đặt vào trong bồn một phao nước dạng hình cầu bằng kim loại không thấm nước có bán kính $50\ \text{cm}$ và chìm hoàn toàn trong nước.

a) Hỏi khi đó mực nước trong bồn cao thêm bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

b) Sau đó, người ta lại bơm thêm nước vào bồn bằng một vòi có công suất chảy là $0,0024\,m^3$ cho mỗi giây. Hỏi sao bao nhiêu phút thì bồn đầy nước (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 10: Một cốc nước hình trụ cao 15 cm, đường kính đáy là 6 cm. Lượng nước ban đầu cao 10 cm. Thả vào cốc 5 viên bi hình cầu cùng đường kính 2 cm. Hỏi sau khi thả 5 viên bi thì mực nước cách miệng cốc bao nhiêu cm ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

BÀI 18: HÀM SỐ $y = ax^2$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định công thức hàm số, điểm thuộc, không thuộc đồ thị hàm số.

1.

Thay $x = 2$ thì $y = -8$ vào công thức hàm số ta có $a = -2$

2.

Thay $x = -3$ thì $y = 1$ vào công thức hàm số ta có $a = \dfrac{1}{9}$

3.

a) $V = 12a^2\left(cm^3\right)$. Khi $a = 5$cm ta có $V = 12.5^2 = 300\left(cm^3\right)$

b) Nếu độ dài đáy tăng lên 3 lần ta có thể tích mới $V_1 = 12.\left(3a\right)^2 = 108a^2$.

Có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{108a^2}{12a^2} = 9$. Vậy thể tích mới của hình lăng trụ gấp 9 lần thể tích cũ.

4.

a) $\dfrac{3}{2} = (m-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ suy ra $m - 2 = 6$ vậy $m = 8$.

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ giải hệ được nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ thay vào công thức hàm số ta được $5 = (m-2)\cdot(-1)^2$ từ đó tìm được $m = 7$.

5.

a) $-6 = (m+1).2^2$ suy ra $m + 1 = -\dfrac{3}{2}$ tìm được $m = -\dfrac{5}{2}$.

b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ giải hệ được nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ thay vào công thức hàm số ta có $2 = (m+1)(-1)^2$ tìm được $m = 1$.

6. a) $m = \dfrac{1}{2}$ b) $m = \pm\sqrt{3}$

7. Điểm A thuộc đồ thị (C) vì $f(x_A) = \dfrac{-1}{2}.2^2 = -2 = y_A$.

Điểm B thuộc đồ thị (C) vì $f(x_B) = \dfrac{-1}{2}.1^2 = -\dfrac{1}{2} \neq y_B$.

Điểm C thuộc đồ thị (C) vì $f(x_C) = \dfrac{-1}{2}.(-1)^2 = -\dfrac{1}{2} = y_C$.

8. a) $x=-2 \Rightarrow y=5.(-2)^2=20$. Vậy tọa độ điểm là $(-2;5)$.

b) $y=5 \Rightarrow 5x^2=5 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$. Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là $(1;5)$ và $(-1;5)$.

9. Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)=-2x^2$ khi và chỉ khi

$$-2m^2=2m \text{ giải được } \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right..$$

Vậy với $m=0$ hoặc $m=-1$ thì điểm M thuộc đồ thị của hàm số $y=f(x)=-2x^2$.

Dạng 2: Vẽ đồ thị hàm số và bài toán liên quan

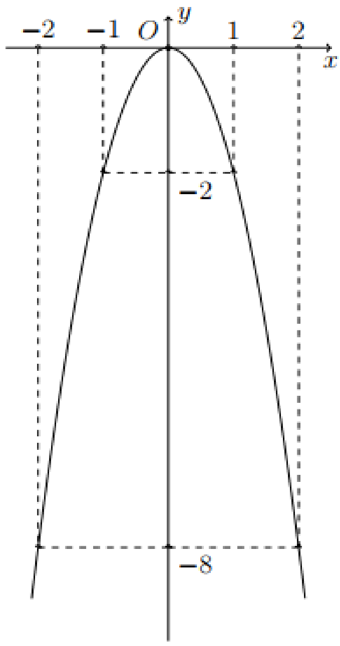
10. a) (P) đi qua điểm $A(1;-2)$ khi và chỉ khi

$-2=a.1^2 \Leftrightarrow a=-2$.

b) Bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y

x	-2	-1	0	1	2
$y=-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Vẽ đồ thị: Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;-8)$; $(-1;-2)$; $(0;0)$; $(1;-2)$; $(2;-8)$



11.

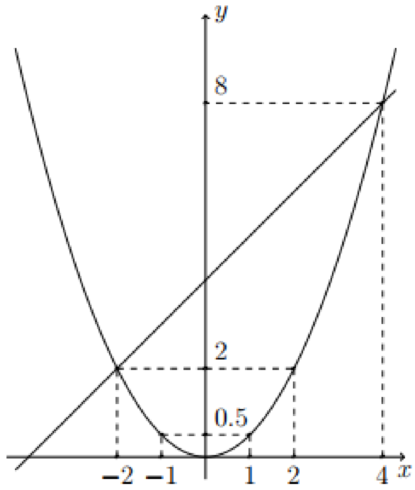
a) Vẽ đường thẳng (d). Cho $x=0 \Rightarrow y=4$. Cho $y=0 \Rightarrow x=-4$.

Đồ thị hàm số (d) là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;4)$ và $(-4;0)$

Vẽ parabol (P) :Bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y

x	-2	-1	0	1	2
$y=\frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vẽ đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm

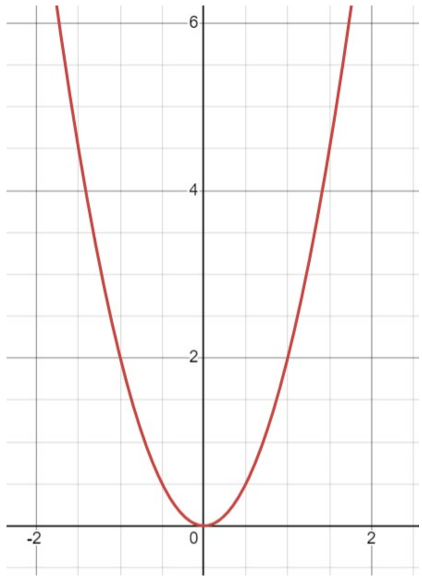
$\dfrac{x^2}{2} = x + 4$ ta có $x^2 - 2x - 8 = 0$ hay $\left(x+2\right)\left(x-4\right) = 0$. Giải phương trình được nghiệm

$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$.

Với $x = 4 \Rightarrow y = 8$.

Vậy (d) và (P) có hai điểm chung có tọa độ là $(-2;2)$ và $(4;8)$.



12.

a) (P) đi qua điểm $A(\sqrt{3};6)$ nên $6 = \dfrac{a}{2}\left(-\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow a = 4$.

b) i) Với $a = 4$ ta có hàm số $y = 2x^2$.

ii) Ta có với $x = 3$ thì $y = 2\cdot 3^2 = 18$ suy ra $B(3;18)$.

iii) $y = 2x^2$; Các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ nên ta có $\left|x\right| = \left|y\right|$ mặt khác $y \geq 0$ với mọi x nên $y = \left|x\right|$

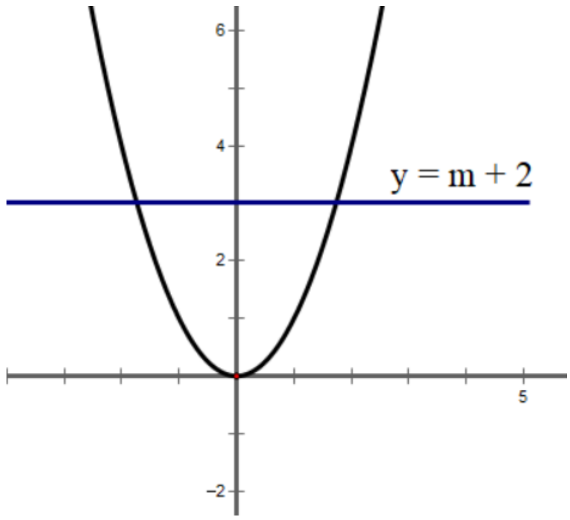
Với $y = x$ ta có $2x^2 = x$ tìm được $x = 0$ và $x = \dfrac{1}{2}$. Ta được điểm $\left(0;0\right)$; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Với $y = -x$ ta có $2x^2 = -x$ tìm được $x = 0$ và $x = -\dfrac{1}{2}$. Ta được điểm $\left(0;0\right)$; $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Vậy các điểm trên P cách đều hai trục toạ độ là $\left(0;0\right)$; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

13.

a) HS tự vẽ đồ thị



b) Từ đồ thị ta thấy:
+ Với $m+2<0$ hay $m<-2$, d không cắt (P).
+ Với $m+2=0$ hay $m=-2$, d tiếp xúc (P).
+ Với $m+2>0$ hay $m>-2$, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

14.

Ta có $A\in(P)\Leftrightarrow 4=a.2^2\Leftrightarrow a=1$. Công thức hàm số $y=x^2$

a) HS tự vẽ đồ thị hàm số.

b) Gọi C là điểm thuộc (P) có tung độ bằng 16.

Ta có: $y_C=16\Leftrightarrow x^2{}_C=16\Leftrightarrow x_C=\pm 4$. Vậy $C(4;16)$ hoặc $C(-4;16)$.

c) Thay tọa độ điểm B vào (P) ta được:
$m^3=m^2\Leftrightarrow m^3-m^2=0\Leftrightarrow m^2(m-1)=0\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=1$.

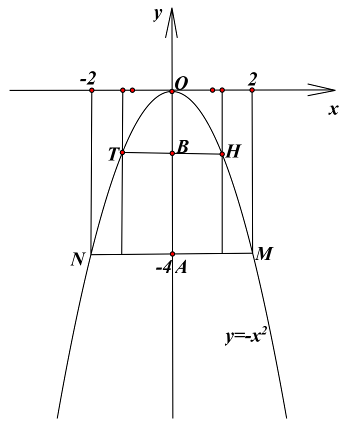
d) Gọi D là điểm thuộc (P) cách đều hai trục tọa độ.

Ta có khoảng cách từ D đến Ox là $|y_D|$ và khoảng cách từ D đến Oy là $|x_D|$. Ta có $|y_D|=|x_D|$ và $y\geq 0$ nên $y_D=|x_D|$

Vậy $x_D^2=|x_D|\Leftrightarrow|x_D|=0$ (loại) hoặc $|x_D|=1$. Ta tìm được 2 điểm thoả mãn là $D(1;1)$ hoặc $D(-1;1)$.

15.

a) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét. Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2m$. Theo giả thiết ta có $OM = ON = 2\sqrt{5}$, áp dụng định lý Pythagore ta tính được: $OA = 4$ vậy $M\left(2;-4\right), N\left(-2;-4\right)$. Do $M\left(2;-4\right)$ thuộc parabol nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $\left(P\right): y = ax^2$ hay $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$ và $\left(P\right): y = -x^2$.



b) Để đáp ứng chiều cao trước hết xe tải phải đi vào chính giữa cổng.

Xét đường thẳng $\left(d\right): y = -\dfrac{3}{2}$ (ứng với chiều cao của xe). Đường thẳng này cắt Parabol tại 2 điểm

có tọa độ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Suy ra tọa độ hai giao điểm là $T\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{3}{2}\right); H\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow HT = 3\sqrt{2} > 2,4$.

Vậy xe tải có thể đi qua cổng.

16.

a) Hãy hãy cho biết sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?

Ta có $y = 5x^2$, với $x = 3 \Rightarrow y = 45\left(m\right)$.

Từ độ cao 55 m thả vật nặng xuống đất trong 3 (giây) thì vật rơi được 45 m.

Nên vật còn cách mặt đất một khoảng là: $55 - 45 = 10\left(\text{m}\right)$.

b) Khi vật nặng còn cách đất $25\,\text{m}$ thì nó đã rơi được thời gian bao lâu?

Khi vật cách mặt đất $25\,\text{m}$ thì vật đã rơi được: $55 - 25 = 30\left(\text{m}\right)$.

Có $y = 5x^2$ với $y = 30\left(\text{m}\right) \Rightarrow x^2 = 6, x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{6} \approx 2,45\left(\text{s}\right)$.

Vậy khi vật nặng còn cách đất $25\,\text{m}$ thì nó đã rơi được thời gian khoảng $2,45\left(\text{s}\right)$.

17.

a) Với $t = 3$ thì $h = 4,9.3^2 = 44,1(\text{m})$. Như vậy, độ sâu của hang nếu mất 3s để hòn đá chạm đáy là: $44,1\text{m}$.

b) Với $h = 122,5$ thì $t = \sqrt{\frac{h}{4,9}} = \sqrt{\frac{122,5}{4,9}} = 5(\text{s})$. Như vậy nếu hang sâu $122,5\text{m}$ thì phải mất 5s để hòn đá chạm tới đáy.

18.

a) Ta có $F = av^2, v = 2\,m\,/\,s, F = 120\,N \Rightarrow 120 = a.2^2 \Rightarrow a = 30$.

Vậy hằng số $a = 30$.

b) Ta có $F = 30v^2, v = 90\,\text{km/h} = \frac{90\,000}{3600} = 25\left(\text{m/s}\right)$

Thay $v = 25\left(\text{m/s}\right)$ vào $F = 30v^2 \Rightarrow F = 18\,750\left(N\right)$.

Nếu con thuyền đi với vận tốc $v = 25\left(\text{m/s}\right)$ thì lực tác đông lên cánh buồm là $F = 18\,750\left(N\right)$.

Mà cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là $12000N$.

Do đó con thuyền không thể đi được trong gió bão với vận tốc gió $90\,\text{km/h}$.

19.

Ta có $K = \frac{mv^2}{2}$, với $m = 1\left(\text{kg}\right)$, $K = 32\left(J\right)$.

Suy ra $v^2 = \frac{2K}{m} = 64$, $v > 0$. Suy ra $v = 8\left(\text{m/s}\right)$.

BÀI 19:
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng và tìm hệ số của các phương trình bậc hai một ẩn

1.

a) $-x^2 + 3 = 0$, với $a = -1, b = 0, c = 3$. .

b) $x^2 - 4x - 1 = 0$, với $a = 1, b = -4, c = -1$.

c) $3x^2 - \left(4 + \sqrt{2}\right)x - 2 = 0$, với $a = 3, b = -4 - \sqrt{2}, c = -2$.

d) $x^2 - 5x - 2 = 0$, với $a = 1, b = -5, c = -2$.

2.

a) $x^2 - mx - 1 = 0; a = 1$

b) Không đưa được về phương trình bậc 2

c) $\left(m^2 + \sqrt{2}\right)x^2 - 4mx - 1 = 0, a = m^2 + \sqrt{2}$

d) Không đưa được về phương trình bậc hai.

Dạng 2: Giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt

3.

a) $x = 0; x = 2$ b) $x = 0; x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ c) $x = -2; x = 2$

4.

a) $x = \pm\dfrac{3}{2}$; b) $x = 0; x = 2\sqrt{2}$; c) $x = \pm\sqrt{5}$

5.

a) Biến đổi $x^2 + x - 2 = 0$ thành $(x-1)(x+2) = 0$, từ đó tìm được $x = 1; x = -2$.

b) Biến đổi $x^2 - 3x + 2 = 0$ thành $(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x - 2 = 0$, từ đó tìm được

$x = 1; x = 2$.

c) Biến đổi $x^2 + 3x - 4 = 0$ thành $(x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x + 4 = 0$, từ đó tìm được

$x = 1;\ x = -4$

6.

a) Ta có PT $(x+1)^2 = 4$ suy ra $x+1 = \pm 2$ vậy $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

b) Biến đổi $x^2 + 2x = 3$ ta được $(x+1)^2 = 4$ ta tìm được $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

c) Biến đổi $2x^2 + 4x - 7 = 0$ ta được $2x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{9}{2}$, từ đó tìm được $x = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1; x = -\frac{3}{\sqrt{2}} - 1$.

d) Biến đổi $4x^2 + 8x - 5 = 0$ thành $x^2 + 2x = \frac{5}{4}$ ta được $(x+1)^2 = \frac{9}{4}$, từ đó tìm được $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{5}{2}$

7.

a) Ta có PT $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, từ đó tìm được $x = \frac{1}{2}$.

b) Biến đổi $x^2 - 4x = 5$ ta được $\left(x-2\right)^2 = 9$ từ đó tìm được $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5. \end{array}\right.$

c) Biến đổi $2x^2 - 8x + 5 = 0$ ta được $\left(x-2\right)^2 = \frac{3}{2}$, từ đó tìm được $x = \sqrt{\frac{3}{2}} + 2; x = -\sqrt{\frac{3}{2}} + 2$

d) Biến đổi $4x^2 - 16x - 9 = 0$ thành $\left(x-2\right)^2 = \frac{25}{4}$, từ đó tìm được $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{9}{2}$.

8.

a) Biến đổi $x^2 - x = 2$ thành $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, từ đó tìm được $x = -1; x = 2$

Cách khác: chuyển vế đưa PT về dạng tích $(x+1)(x-2) = 0$.

b) Biến đổi PT đã cho $2x^2 - 2x - 5 = 0$ thành $x^2 - x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$, từ đó tìm được $x = \frac{\sqrt{11}+1}{2}; x = \frac{-\sqrt{11}+1}{2}$.

c) Biến đổi PT đã cho $x^2 - x + 1 = 0$ thành $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow$ PT vô nghiệm.=

Dạng 3: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm cho trước thoả mãn
9.

a) PT có nghiệm là 1 nên ta có $1+m^2=4$, từ đó tìm được $m=\pm\sqrt{3}$.

b) PT có nghiệm là 1 nên ta có $1-(m+3)+m^2=0$, biến đổi thành $(m-2)(m+1)=0$ suyra $m=2, m=-1$

10.

a) PT có nghiệm là $1 \Leftrightarrow 1-m^2+4=0$, từ đó tìm được $m=\pm\sqrt{5}$.

b) PT có nghiệm là $1 \Leftrightarrow m^2+4m-5=0=0$, biến đổi thành $(m-1)(m+5)=0$ suyra $m=1, m=-5$.

Dạng 4: Sử dụng công thức nghiệm để giải phương trình bậc hai.

11.

a) Ta có: $\Delta=\left(-7\right)^2-4.5.\left(-6\right)=169=13^2>0.$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1=\dfrac{7+13}{2.5}=2; x_2=\dfrac{7-13}{2.5}=-\dfrac{3}{5}.$

Vậy phương trình có tập nghiệm : $S=\left\{2;-\dfrac{3}{5}\right\}$

b) Ta có : $\Delta'=1+1=2>0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1=-1+\sqrt{2}; x_2=-1-\sqrt{2}.$

Vậy phương trình có tập nghiệm : $S=\left\{-1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right\}$

c) Ta có : $\Delta=5^2-4.2.1=17>0.$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$x_1=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2.2}=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{4}; x_2=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2.2}=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{4}.$

Vậy phương trình có tập nghiệm : $S=\left\{\dfrac{-5+\sqrt{17}}{4};\dfrac{-5-\sqrt{17}}{4}\right\}$

d) Ta có : $\Delta=\left[-\left(2\sqrt{6}+3\right)\right]^2-4.2.3\sqrt{6}=33-12\sqrt{6}=\left(2\sqrt{6}-3\right)^2>0.$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$x_1=\dfrac{\left(2\sqrt{6}+3\right)+\left(2\sqrt{6}-3\right)}{2.2}=\sqrt{6}; x_2=\dfrac{\left(2\sqrt{6}+3\right)-\left(2\sqrt{6}-3\right)}{2.2}=\dfrac{3}{2}.$

Vậy phương trình có tập nghiệm : $S=\left\{\sqrt{6};\dfrac{3}{2}\right\}.$

12.

a) $x_1=1; x_2=2$;

b) $x_1=1; x_2=\dfrac{-1}{2}.$

c) $x_1 = x_2 = 2$. d) PT vô nghiệm

13.

a) $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$; b) $x_1 = x_2 = -\sqrt{2}$; c) PT vô nghiệm. d) $x_{1,2} = \sqrt{2} \pm 2$

14.

a) PT vô nghiệm. b) $x_1 = x_2 = \sqrt{3}$

c) $x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$; d) $x_1 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}; x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$

Dạng 5: Tìm điều kiện của tham số thoả mãn điều kiện cho trước

15.

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$. Tìm được $m < \frac{9}{4}, m \neq 0$.

b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$. Tìm được $m = \frac{9}{4}$.

c) Xét $m = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$.Suyra $m = 0$ loại

Xét $m \neq 0$ phương trình vô nghiệm khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{4}$.

d) Có đúng một nghiệm khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

16.

Do $a \cdot c < 0 \Rightarrow -a \cdot c > 0$. Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4(-ac) > 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vận dụng:

a) Do $a.c = 3(-5) = -15 < 0$. b) Do $a.c = -1(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2} < 0$.

c) Do $a.c = 5(-m^2 - 3) < 0$. d) Do $a.c = -\sqrt{2} \cdot m^2 < 0$.

17.

a) $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$. Có $\Delta = (m-2)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên với mọi giá trị của m thì phương trình sau luôn có nghiệm

b) $x^2 - 2mx + (m-1) = 0$. Có $\Delta = (2m-1)^2 + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên với mọi giá trị của m thì phương trình sau luôn có nghiệm.

18.

a) Với $m = -\frac{3}{5}$. thì phương trình (1)trở thành :

$$-\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0.$$

Ta có : $\Delta = 1 - 4.3.(-2) = 25 > 0.$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{1+5}{6} = 1.$

b) Ta có :

Nếu $m = 0$ thì phương trình (1) trở thành $-x + 1 = 0.$

Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Nếu $m \neq 0$ thì phương trình (1)là phương trình bậc hai có :

$\Delta = \left[-(2m+1)\right]^2 - 4.m.(m+1) = 1 > 0.$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Tóm lại, với mọi giá trị của m thì phương trình (1) luôn có nghiệm.

c) Nếu $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là :

$x_1 = \frac{(2m+1)-1}{2m} = 1; x_2 = \frac{(2m+1)+1}{2m} = \frac{m+1}{m}.$

Vì nghiệm $x_1 = 1 < 2$ nên ta phải xét nghiệm $x_2 > 2.$

$\frac{m+1}{m} > 2 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$

Vậy khi $0 < m < 1$thì phương trình (1)có một nghiệm lớn hơn 2.

Dạng 6: Toán thực tế

19.

Theo định lý Phythagore ta có: $(x+2)^2 + x^2 = 10^2$

Biến đổi ta được phương trình bậc hai $x^2 + 2x - 48 = 0$. Giải phương trình này được hai nghiệm là$x = 6$; $x = -8$

Vì chiều rộng là số dương nên chọn $x = 6$.

Vậy chiều rộng và chiều dài của sân khấu lần lượt là: $6(\text{m}), 8(\text{m})$.

20.

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là x (m) $(x > 0)$, ta có chiều dài của mảnh vườn là $x + 8$ (m).

Diện tích của mảnh vườn là $x\left(x+8\right)=128$ Tìm được $x_1=8$ (thoả mãn(, $x_2=-16$(Loại)

Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 8 m, chiều dài 16 m.

21.

Diện tích sân cỏ: $15.6=90\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Tổng diện tích sân cỏ và lối đi: $90+46=136\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\left(x+15\right)\left(x+6\right)=136$ hay $x^2+21x-46=0$

giải phương trình được $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-23 \end{array}\right.$

Vì $x>0$ nên chiều rộng của lối đi là $2\ \mathrm{m}$.

BÀI 20:
ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG

BÀI TẬP

Dạng 1. Sử dụng hệ thức Viète để tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình

1.

a) $x^2 + 4x - 5 = 0, \Delta' = (2)^2 - (-5) = 9$, $x_1 + x_2 = -4$, $x_1x_2 = -5$.

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0, \Delta' = 0$, $x_1 + x_2 = -1$, $x_1x_2 = \frac{1}{4}$.

c) $3x^2 - x - 3 = 0, \Delta = 37$, $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}$, $x_1x_2 = -1$.

d) $x^2 - 7x + 5 = 0, \Delta = 29$, $x_1 + x_2 = 7$, $x_1x_2 = 5$.

2.

Các phương trình trình đã cho đều có tích $ac < 0$ suy ra $\Delta > 0$ nên luôn có nghiệm.

Áp dụng hệ thức Viète ta có:

a) $x^2 - 3x - 5 = 0$. $x_1 + x_2 = 3$, $x_1x_2 = -5$.

b) $5x^2 + 7x - 12 = 0$. $x_1 + x_2 = -\frac{7}{5}$, $x_1x_2 = -\frac{12}{5}$.

c) $4x^2 - 7x - 2 = 0$. $x_1 + x_2 = \frac{7}{4}$, $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$.

d) $\sqrt{3}x^2 - 21x - 12 = 0$. $x_1 + x_2 = 7\sqrt{3}$, $x_1x_2 = -4\sqrt{3}$.

Dạng 2. Sử dụng hệ thức Viète để tính giá trị biểu thức

3.

Vì $\Delta = 5^2 - 4.1.2 = 17 > 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = 2$

a) Ta có: $A = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2 \cdot 2 = 21$

b) Ta có: $B = \left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2} = \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2} = \sqrt{17}$

c) Vì $x_1 + x_2 > 0$ và $x_1x_2 > 0$ nên $x_1 > 0, x_2 > 0$. Ta có

$$C = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{\left(x_1 + x_2\right)^3 - 3x_1x_2\left(x_1 + x_2\right)}{\left(x_1x_2\right)^3} = \frac{5^3 - 3 \cdot 2 \cdot 5}{2^3} = \frac{95}{8}$$

d) Ta có: $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}=\sqrt{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Suy ra $D=\dfrac{x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}}=\dfrac{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)\left(x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right)}{\sqrt{x_1x_2}}=\dfrac{\left(5-\sqrt{2}\right)\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

4. Do $a.c<0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Theo định lý Viète, ta có $x_1+x_2=3$ và $x_1x_2=-5$.

a) $A=3(x_1+x_2)+x_1x_2=3\cdot 3+(-5)=4$.

b) $B=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2\cdot(-5)=19$.

c) $C=(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=19-2\cdot(-5)=29$.

d) $D=\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{19}{-5}=-\dfrac{19}{5}$.

Dạng 3. Sử dụng hệ thức Viète để tìm giá trị của tham số thoả mãn điều kiện cho trước.

5. a) Với $m=6$, ta có phương trình $x^2-5x+6=0$.

$\Delta=25-4\cdot 6=1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1=3;x_2=2$.

b) Ta có $\Delta=25-4\cdot m$.

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta\ge 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{25}{4}(*)$

Theo hê thức Viète, ta có $x_1+x_2=5$ suy ra $x_2=5-x_1\quad(1)$

$x_1x_2=m\qquad(2)$

Mặt khác theo đề bài ta có $\left|x_1-x_2\right|=3$. $\quad(3)$

Từ (1) và (3) suy ra $\left|x_1-5+x_1\right|=3$

Hay $\left|2x_1-5\right|=3$ khi đó $\left[\begin{array}{l}2x_1-5=3\\2x_1-5=-3\end{array}\right.$ vậy $\left[\begin{array}{l}x_1=4\\x_1=1\end{array}\right.$

Suy ra $x_1=4;x_2=1$ hoặc $x_1=1;x_2=4\quad(4)$

Từ (2) và (4) suy ra $m=4$. Thử lại thì thỏa mãn. Vậy với $m=4$ phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=3$.

6.

a) Với $m=-3$ ta có phương trình $x^2+8x=0$

$x(x+8)=0$ giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l}x=0 \\ x=-8\end{array}\right.$.

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi $\Delta' \geq 0$ khi đó $(m-1)^2+(m+3) \geq 0$ hay

$m^2-2m+1+m+3 \geq 0$

$m^2-m+4 \geq 0$

$\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$ đúng với mọi m

Vậy chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Viète ta có $\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=2(m-1) \\ x_1x_2=-m-3\end{array}\right.$

Ta có:

$x_1^2+x_2^2=10$

$\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=10$

$4(m-1)^2+2(m+3)=10$

$4m^2-6m+10=10$

$2m(2m-3)=0$ ta có $m=0$ hoặc $m=\dfrac{3}{2}$

Vậy với $m=0$ hoặc $m=\dfrac{3}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán

7.

a) Thay $m=-2$ vào phương trình (1) ta có:

$x^2+4x+3=0$

$x(x+3)+(x+3)=0$

$(x+3)(x+1)=0$ giải được $x=-1;\ x=-3$

Vậy với $m=-2$ thì phương trình có tập nghiệm $S=\{-3;-1\}$

b) Ta có: $\Delta' = m^2-(-4m-5)=(m+2)^2+1>0,\ \forall m$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Do phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của m, gọi $x_1;\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1)

Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=-4m-5 \end{cases}$

Ta có: $\frac{1}{2}x_1^2-(m-1)x_1+x_2-2m+\frac{33}{2}=762019$

$x_1^2-2(m-1)x_1+2x_2-4m+33=1524038$

$x_1^2-2mx_1-4m-5+2(x_1+x_2)=1524000$

$2(x_1+x_2)=1524000$ (do x_1 là nghiệm của (1) nên $x_1^2-2mx_1-4m-5=0$)

$2.2m=1524000 \Rightarrow m=381000$

Vậy $m=381000$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

8. $a=1; b=-m;\ c=-1.$

Vì a và c khác dấu, phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ khác dấu.

Theo hệ thức Viete ta có: $x_1+x_2=m\,(1)$

Vì $x_1;x_2$ khác dấu mà $x_1<x_2 \Rightarrow x_1<0<x_2 \Rightarrow |x_1|=-x_1;|x_2|=x_2$.

Ta có: $|x_1|-|x_2|=6 \Leftrightarrow -x_1-x_2=6 \Leftrightarrow x_1+x_2=-6$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $m=-6$.

9.

a) Với $m=-1$ thì phương trình (1) trở thành $x^2-x-6=0$. Giải được $x=-2\ ; x=3$.
Vậy khi $m=-1$ thì phương trình có hai nghiệm $x=3$ và $x=-2$.

b) Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=25$.

b) Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Khi đó $\begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(3m-3) > 0 \\ x_1 + x_2 = m+2 > 0 \\ x_1.x_2 = 3m-3 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$ hay $\begin{cases} (m-4)^2 > 0 \\ m > -2 \\ m > 1 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25 \end{cases}$

$$\begin{cases} m \neq 4 \\ m > 1 \\ (m+2)^2 - 2(3m-3) = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 4 \\ m > 1 \\ m^2 - 2m - 15 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} m \neq 4 \\ m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -3 \end{array}\right. \end{cases}$. Vậy $m = 5$. Vậy m phải tìm là $m = 5$.

10.

a) Với $m = -3$ ta có phương trình: $x^2 + 5x - 3 = 0$

Ta có: $\Delta = 37 > 0$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5+\sqrt{37}}{2} \\ x = \dfrac{-5-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$

b) Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $9x_1 + 2x_2 = 18$.

Ta có $\Delta = 25 - 4m$

Phương trình (*) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ hay $25 - 4m \geq 0$ khi đó $m \leq \dfrac{25}{4}$

Theo hệ thức Viète, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ 9x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$ nên $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -9 \end{cases}$

nên $m = x_1.x_2 = 4(-9) = -36$ (thỏa điều kiện). Vậy $m = -36$

11.

$x^2 - (2m-3)x + m^2 - 2m = 0$ có

$\Delta = (2m-3)^2 - 4(m^2 - 2m) = 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 8m = -4m + 9$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$ hay $-4m + 9 > 0$. Vậy $m < \frac{9}{4}$

Áp dụng định lý Viète ta có:

$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m - 3 \\ P = x_1.x_2 = m^2 - 2m \end{cases}$

$|x_1 - x_2| = 7 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 49 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1.x_2 = 49 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 = 49$

Thay $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 3 \\ x_1.x_2 = m^2 - 2m \end{cases}$

Ta được $(2m-3)^2 - 4(m^2 - 2m) = 49 \Leftrightarrow -4m + 9 = 49 \Leftrightarrow m = -10$ *(t/m đk)*

12.

a) $\Delta' = m^2 - (2m-3) = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 3 > 0\ \forall m$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Áp dụng hệ thức Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = 2m - 3 \end{cases}$.

Ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2m}{2m-3} = \frac{2m-3+3}{2m-3} = 1 + \frac{3}{2m-3}$.

Để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên thì $2m - 3$ là một ước của 3.

- Nếu $2m - 3 = -1$ thì $m = 1$.

- Nếu $2m - 3 = 1$ thì $m = 2$.

- Nếu $2m - 3 = -3$ thì $m = 0$.

- Nếu $2m - 3 = 3$ thì $m = 3$.

Vậy $m \in \{0; 1; 2; 3\}$ thì $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

Dạng 4. Sử dụng hệ thức Viète để tìm giá trị của tham số thoả mãn bất phương trình cho trước

13.

Ta có $\Delta = (m-1)^2 + 4m = (m+1)^2$

phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1.x_2 = -m \end{cases}$.

Theo đề bài ta có: $x_1(3 - x_2) + 20 \geq 3(3 - x_2)$

$3(x_1 + x_2) - \ x_1x_2 \geq -11$

$3(m-1) + m \geq -11$

$4m \geq -8$

$m \geq -2.$

Vậy $m \geq -2; m \neq -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1(3 - x_2) + 20 \geq 3(3 - x_2)$.

14.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

Khi $\mathrm{m} = 3$ thì phương trình (1) trở thành $x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x(x-2) - 8(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy $S = \{2; 8\}$

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $A = 2018 + 3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0$ hay $[-(m+2)]^2 - (m^2 + 3m - 2) > 0$

Ta có $m^2 + 4m + 4 - m^2 - 3m + 2 > 0$ vậy $m > -6$

Lúc đó, áp dụng Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1x_2 = m^2 + 3m - 2 \end{cases}$

Ta có: $A = 2018 + 3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$

$= 2018 + 3x_1x_2 - \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] = 2018 + 5x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2$

Thay Viète vào A ta có:

$A = 2018 + 5x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 2018 + 5(m^2 + 3m - 2) - 4(m+2)^2$

$= 2018 + 5m^2 + 15m - 10 - 4m^2 - 16m - 16 = m^2 - m + 1992$

$= \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7967}{4} \Rightarrow A \geq \dfrac{7967}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (thoả mãn). Vậy $m = \dfrac{1}{2}$

15.

a) Vì $a.c = -m^2 - 1 < 0, \forall m \in R$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Theo hệ thức Viète : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = \text{-m}^2\text{-1} \end{cases}$

Ta có $T = (x_1 + x_2)^2 - x_1.x_2 = (2m+2)^2 + m^2 + 1 = 5m^2 + 8m + 5$

$= 5\left(m^2 + \dfrac{8}{5}m + \dfrac{16}{25}\right) + 5 - \dfrac{16}{5} = 5\left(m + \dfrac{4}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{5} \geq \dfrac{9}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\dfrac{9}{5}$ khi $m = -\dfrac{4}{5}$

Dạng 5. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số.

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

Bước 2: Áp dụng định lí Vi-et, ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1x_2 = g(m) \end{cases} \quad (I)$

Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

16.

Điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ 2m - 11 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq m \leq \frac{11}{2}$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m-5}{m-1} \end{cases}$

Khử m từ hệ (I) ta được $2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 1$. Vậy đây là hê thức cần tìm.

17.

a) Với $m = -3$ ta có phương trình $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8. \end{array}\right.$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4} \geq 0$ đúng với mọi m.

Chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1x_2 = -m - 3. & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $m = -x_1x_2 - 3$ thế vào (1) ta có

$x_1 + x_2 = 2(-x_1x_2 - 3 - 1) = -2x_1x_2 - 8 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0.$ Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

18.

a) Vì $\Delta' = (m+1)^2 - (4m-1) = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 \geqslant 1, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Hệ thức Viète $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = 4m - 1 \end{cases}$

Theo đề: $x_1^2 + x_2^2 = 10$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(4m-1) = 10 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy $m = -1, m = 1$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ thức Ví - ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 & (1) \\ x_1x_2 = 4m - 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta được: $2m = x_1 + x_2 - 2$

Thay vào (2) ta được: $x_1.x_2 = 2(x_1 + x_2 - 2) - 1 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 5.$

Biểu thức : $2x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 5$ luôn đúngvới mọi m.

Vậy đây là biểu thức cần tìm.

Dạng 6. Xét dấu hai nghiệm của phương trình bậc hai

Phương pháp

🌍 Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 (\Delta' \geq 0) \end{cases}$.

🌍 Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi $\begin{cases} \Delta > 0 (\Delta' > 0) \\ P > 0 \end{cases}$

🌍 Phương trình có hai nghiệm trái dấu $P < 0$. (Khi phương trình có hai nghiệm trái dấu không cần điều kiện $\Delta > 0 (\Delta' > 0)$ do khi $P < 0$ thì hiển nhiên $\Delta > 0 (\Delta' > 0)$)

🌍 Phương trình có hai nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 (\Delta' > 0) \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1x_2 > 0 \end{cases}$

🌍 Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 (\Delta' > 0) \\ S = x_1 + x_2 < 0 \\ P = x_1x_2 > 0. \end{cases}$

19.

a) Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow 6m - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$. Vậy khi $m \geq \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu khi:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2-\left(m^2-4m+3\right)>0\\ m^2-4m+3>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}m<1\\ m>3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\ \dfrac{1}{3}<m<1\end{array}\right.$$

Vậy khi $m>3$ hoặc $\frac{1}{3}<m<1$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

c) Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi và chỉ khi

$P<0 \Leftrightarrow m^2-4m+3<0 \Leftrightarrow 1<m<3$

d) Phương trình đã cho có hai nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\\ S=x_1+x_2>0\\ P=x_1x_2>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\neq 0\\ (m+1)^2-\left(m^2-4m+3\right)>0\\ 2\left(m+1\right)>0\\ m^2-4m+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{1}{3}\\ m>-1\\ \left[\begin{array}{l}m<1\\ m>3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\ \dfrac{1}{3}<m<1\end{array}\right.$$

Vậy khi $m>3$ hoặc $\frac{1}{3}<m<1$ phương trình có hai nghiệm dương.

e) Phương trình đã cho có hai nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\\ S=x_1+x_2<0\\ P=x_1x_2>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\neq 0\\ (m+1)^2-\left(m^2-4m+3\right)>0\\ 2\left(m+1\right)<0\\ m^2-4m+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{1}{3}\\ m<-1\\ \left[\begin{array}{l}m<1\\ m>3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$$

Vậy không tìm được m để phương trình có hai nghiệm âm.

20.

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$a.c<0 \Leftrightarrow m-1<0 \Leftrightarrow m<1$.

b) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ \mathrm{S}>0\\ \mathrm{P}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-m+1>0\\ \dfrac{2m}{m-1}>0\\ \dfrac{1}{m-1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0\\ \mathrm{m}>0\\ \mathrm{m}>1\end{cases} \Leftrightarrow m>1$$

21.

$\Delta = [-2(m+2)]^2 - 4(m-1) = 4m^2 + 12m + 20 = (2m+3)^2 + 11$; $S = 2(m+2)$, $P = m-1$.

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+3)^2 + 11 > 0$, đúng với mọi m.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

d) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ 2(m+2) > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

e) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ 2(m+2) < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$

(Vô lý. Vậy không tồn tại m.

Dạng 7. Tìm hai số khi biết tổng và tích của hai số
22.

Vì $x + y = 18$ và $xy = 77$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 18t + 77 = 0$.

Giải phương trình trên ta được $t = 7, t = 11$.

Vậy hai số x, y cần tìm là $(x;y) = (7;11), (x;y) = (11;7)$.

b) Vì $x + y = -3$ và $xy = 5$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2 + 3t + 5 = 0$

Phương trình trên có $\Delta = -11 < 0$ nên vô nghiệm.

Vậy không tồn tại hai số x, y thỏa đề bài.

c) Vì $x + (-y) = 2\sqrt{3}$ và $x \cdot (-y) = -1$ nên $x, -y$ là hai nghiệm của phương trình

$t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 = 0$

Giải phương trình trên ta được các nghiệm $t = 2 - \sqrt{3}, t = 2 + \sqrt{3}$.

Do đó $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ -y = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 + \sqrt{3} \\ -y = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$

Vậy hai số x, y cần tìm là $\left(x;y\right)=\left(2+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right),\left(x;y\right)=\left(-2+\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\right)$.

d) Ta có: $x^2+y^2=34 \Leftrightarrow (x+y)^2-2xy=34 \Leftrightarrow (x+y)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=2\\x+y=-2.\end{array}\right.$

Với $x+y=2$, ta được hệ $\begin{cases}x+y=2\\xy=-15\end{cases}$

Suy ra, x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2-2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-3\\t=5\end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases}x=-3\\y=5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}$

Với $x+y=-2$, ta được hệ $\begin{cases}x+y=-2\\xy=-15\end{cases}$

Suy ra, x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3\\t=-5\end{array}\right.$

Do đó $\begin{cases}x=3\\y=-5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-5\\y=3\end{cases}$

Vậy hai số x, y cần tìm là $\left(x;y\right)=\left\{\left(-3;5\right),\left(5;-3\right),\left(3;-5\right);\left(-5;3\right)\right\}$.

23.

Ta có $(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}$ và $(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}-1)=2$ nên hai số đã cho là nghiệm của phương trình $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$.

TƯƠNG GIAO GIỮA HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và d là $x^2 = 2\left(m+1\right)x - m^2 - 0$

Hay $x^2 - 2\left(m+1\right)x + m^2 + 9 = 0$. Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - \left(m^2+9\right) = 2m - 8.$

a) d cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta' > 0$ hay $2m - 8 > 0$, vậy $m > 4$

b) d tiếp xúc với $\left(P\right)$ nên phương trình (1) có nghiệm kép hay $\Delta' = 0$ hay $2m - 8 = 0$ vậy $m = 4$

c) d và $\left(P\right)$ không có điểm chung khi phương trình (1) vô nghiệm tức là $\Delta' < 0$ hay $2m - 8 < 0$ vậy $m < 4$.

2.

Giả sử đường thẳng cần lập là $d: y = ax + b$. Thay $x = -2$ vào $\left(P\right)$ ta được

$y = -\dfrac{1}{2}(-2)^2 = -2$, suy ra tiếp điểm $M\left(-2;-2\right)$. Vì $M \in d$ nên $-2 = a \cdot \left(-2\right) + b$ nên $b = 2a - 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và d là $-\dfrac{1}{2}x^2 = ax + b$ hay $x^2 + 2ax + 2b = 0$

$\Delta' = a^2 - 2b$.

Vì d tiếp xúc với $\left(P\right)$ nên phương trình (1) có nghiệm kép $\Delta' = 0$ hay $a^2 - 2b = 0$. Thay (1) vào (3) ta được $a^2 - 2\left(2a - 2\right) = 0$

$$a^2 - 4a + 4 = 0$$
$$(a-2)^2 = 0$$
$$a = 2 \quad .$$

Thay $a = 2$ vào (1) được $b = 2$. Vậy $d: y = 2x + 2$.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và d là $\dfrac{x^2}{2} = mx - m + 2$ hay

$x^2 - 2mx + 2m - 4 = 0$

Ta có $\Delta' = m^2 - \left(2m - 4\right) = m^2 - 2m + 4 = (m-1)^2 + 3 > 0 \forall m.$

Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$. Vậy d và $\left(P\right)$ luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

Theo định lý Viète $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m$. Ta có $y_1 = mx_1 - m + 2, y_2 = mx_2 - m + 2$. Suy ra

$$y_1 + y_2 = (mx_1 - m + 2) + (mx_2 - m + 2) = m(x_1 + x_2) - 2m + 4$$

$$= 2m^2 - 2m + 4 = \left[\left(\sqrt{2}m\right)^2 - 4\sqrt{2}m + 4\right] + \left(2\sqrt{2} - 1\right).2m$$

$$= \left[\sqrt{2}m - 2\right]^2 + \left(2\sqrt{2} - 1\right).2m = \left[\sqrt{2}m - 2\right]^2 + \left(2\sqrt{2} - 1\right).(x_1 + x_2)$$

Vậy $y_1 + y_2 \geq \left(2\sqrt{2} - 1\right).(x_1 + x_2)$.

4.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P), ta được $mx^2 - 2x + m^2 = 0$.

Để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta = 1 - m^3 > 0 \Rightarrow m < 1$.

Kết hợp điều kiện $m > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt

Áp dụng hệ thức Viète $x_1.x_2 = m > 0$.

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm cùng một phía với trục tung.

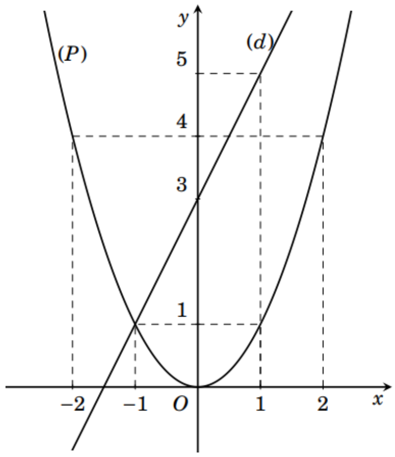
b) Theo hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2}{m}$; $x_1.x_2 = m > 0$

Ta có $K = m + \frac{2}{4m+1} = \frac{1}{4}(4m+1) + \frac{1}{4m+1} - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{1}{4}$.

5. a) Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



Đồ thị hàm số $y = x^2$ là parabol (P) đi qua 5 điểm $(-2;4)$, $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$ và $(2;4)$.

Hàm số $y = 2x + 3$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 3$; $x = 1 \Rightarrow y = 5$.

Đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;3)$ và $(1;5)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$x^2 = 2x + 3$ hay $x^2 - 2x - 3 = 0$. Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1^2 = 1$.

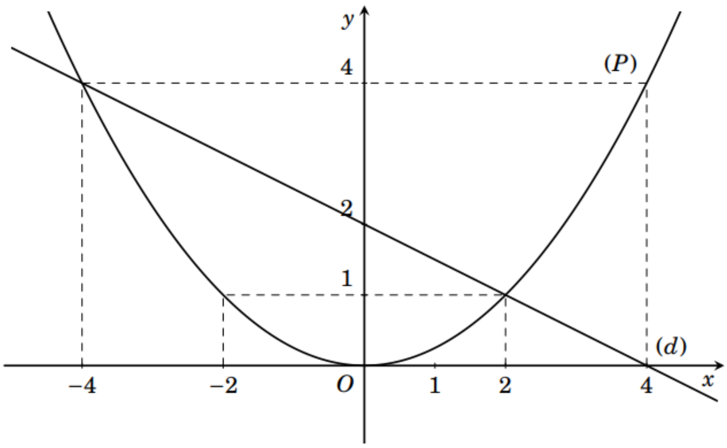
Với $x = 3 \Rightarrow y = 3^2 = 9$.

Vậy giao điểm của (P) và (d) là hai điểm có tọa độ $(-1;1)$ và $(3;9)$.

6.

a) Bảng giá trị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{x^2}{4}$	4	1	0	1	4



Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là parabol (P) đi qua 5 điểm $(-4;4)$, $(-2;1)$, $(0;0)$, $(2;1)$ và $(4;4)$.

Hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 2$; $x = 2 \Rightarrow y = 0$.

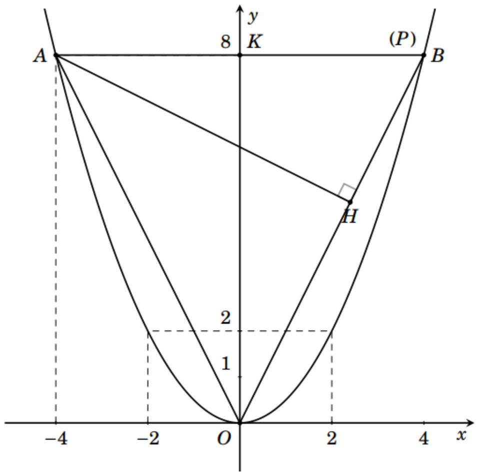
Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 2$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0;2)$ và $(2;0)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2$ hay $x^2 + 2x - 8 = 0$ giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = -4 \Rightarrow y = 4. \end{array}\right.$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(2;1)$ và $(-4;4)$.

7.



a) Bảng giá trị của hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$.

x	-4	-2	0	2	4
$y=\frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ là parabol (P) đi qua 5 điểm $(-4;8)$, $(-2;2)$, $(0;0)$, $(2;2)$ và $(4;8)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với đường thẳng $y=8$ là

$$\frac{1}{2}x^2=8 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=4. \end{array}\right.$$

- Với $x=-4 \Rightarrow y=8 \Rightarrow A(-4;8)$.
- Với $x=4 \Rightarrow y=8 \Rightarrow B(4;8)$ (do B có hoành độ dương).

Gọi K là giao điểm của AB với trục tung, suy ra $K(0;8)$.

Tam giác ABO cân tại O có đường cao $OK=8$ cm, $AB=8$ cm, $KA=KB=8$ cm.

Áp dụng định lý Phytagore cho tam giác vuông OBK, ta có

$$OB=\sqrt{OK^2+BK^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}\ (\text{cm}).$$

Diện tích $\triangle ABO$: $S_{ABO}=\frac{1}{2}OK\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32\ (\text{cm}^2)$.

Lại có $S_{ABO}=\frac{1}{2}AH\cdot OB \Rightarrow AH=\frac{2S}{OB}=\frac{2\cdot 32}{4\sqrt{5}}=\frac{16\sqrt{5}}{5}$ (cm).

Áp dụng định lý Phytagore cho tam giác vuông AHB, ta được

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{8^2-\left(\frac{16\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{5}}{5}\ (\text{cm}).$$

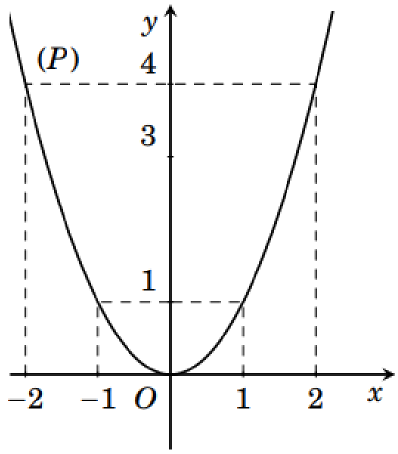
Vậy diện tích tam giác AHB là: $S_{AHB}=\frac{1}{2}AH\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot\frac{16\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{5}=12,8\ (\text{cm}^2)$..

8.

a) Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là parabol (P) đi qua 5 điểm $(-2;4)$, $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$ và $(2;4)$.



b) Giả sử $(d): y = ax + b$.

Vì (d) có hệ số góc là -1 nên $a = -1$.

Do (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 1 nên (d) đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$. Do đó

$$1 = (-1)\cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 2.$$

Vậy $(d): y = -x + 2$.

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$x^2 = -x + 2$ hay $x^2 + x - 2 = 0$. Giải phương trình này ta được $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

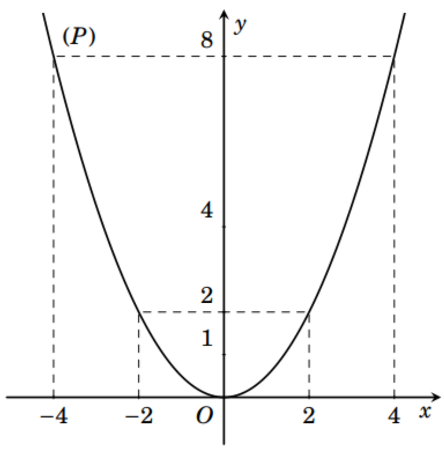
Với $x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 = 4$.

Vậy giao điểm thứ hai của (P) và (d) là $(2;4)$.

9.

a) Bảng giá trị của hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

x	-4	-2	0	2	4
$y = \dfrac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8



Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$ là parabol (P) đi qua 5 điểm $(-4;8)$, $(-2;2)$, $(0;0)$, $(2;2)$ và $(4;8)$.

b) Với $m = 0 \Rightarrow (d): y = x$. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$\frac{1}{2}x^2 = x$$

$x^2-2x=0$ giải và tìm được $\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=0 \\ x=2\Rightarrow y=2. \end{array}\right.$

Vậy giao điểm của (P) và (d) là $(0;0)$ và $(2;2)$.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$\frac{1}{2}x^2=x-m$

$x^2-2x+2m=0.\ (*)$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt, tức là

$\Delta'>0\Rightarrow(-1)^2-1\cdot 2m>0$

$1-2m>0$ vậy $m<\frac{1}{2}$.

Vậy với $m<\frac{1}{2}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

10.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $2x^2=3x+b$ hay $2x^2-3x-b=0.\quad(*)$

Để đường thẳng (d) tiếp xúc với (P) thì phương trình (*) phải có nghiệm kép, tức là $\Delta=0$

$\Rightarrow\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-b)=0$

$9+8b=0$

$b=-\frac{9}{8}$

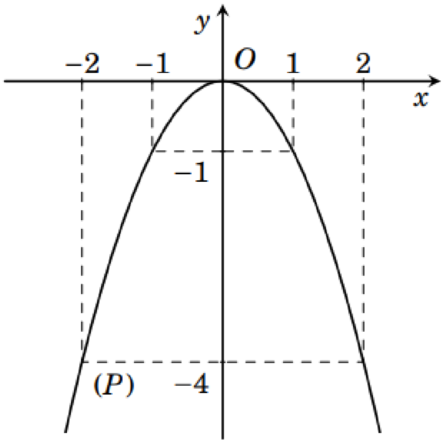
Vậy với $b=-\frac{9}{8}$ thì đường thẳng (d) tiếp xúc với (P).

11.

a) Bảng giá trị của hàm số $y=-x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$y=-x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị hàm số $y=-x^2$ là parabol (P) đi qua 5 điểm $(-2;-4)$, $(-1;-1)$, $(0;0)$, $(1;-1)$ và $(2;-4)$.



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (p) và (d)

$$-x^2=mx-2 \Leftrightarrow x^2+mx-2=0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) có

$$\Delta=m^2-4\cdot 1\cdot(-2)=m^2+8>0, \text{ với mọi } m.$$

Do đó phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Theo hệ thức Viète, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-m}{1}=-m \\ x_1x_2=\dfrac{-2}{1}=-2. \end{cases}$

Xét biểu thức

$(x_1+2)(x_2+2)=0$

$x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=0$ thay Viète ta có $-2+2\cdot(-m)+4=0$ hay $m=1$

Vậy $m=1$ thỏa yêu cầu đề bài.

12.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), ta có

$$x^2=2(m-1)x-2m+5 \Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+2m-5=0. \qquad (*)$$

Ta có $\Delta'=(m-1)^2-2m+5=m^2-2m+1-2m+5$

$$=m^2-4m+4+2=(m-2)^2+2.$$

Vì $(m-2)^2\geqslant 0$, với mọi m nên $(m-2)^2+2>0$ với mọi m.

Do đó phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m hay đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ dương thì phương trình (*) phải có hai nghiệm dương phân biệt, tức là

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0, \forall m\\ 2(m-1) > 0\\ 2m-5 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 1\\ m > \dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{5}{2}.$$

Theo hệ thức Viète, ta có $\begin{cases}x_1 + x_2 = 2m-2\\ x_1x_2 = 2m-5.\end{cases}$

Theo đề bài, ta có

$\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = 2$, bình phương hai vế: $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 = 2^2$ ta được $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} = 4$

Thay Viète vào ta có $2m - 2 - 2\sqrt{2m-5} = 4$ hay $2m - 6 = 2\sqrt{2m-5}$

$m - 3 = \sqrt{2m-5}$ (với $m - 3 \geqslant 0$ ta có $2m - 5 = (m-3)^2$

$$\begin{cases}m \geqslant 3\\ 2m - 5 = m^2 - 6m + 9\end{cases}$$

$$\begin{cases}m \geqslant 3\\ m^2 - 8m + 14 = 0\end{cases}$$

$\begin{cases}m \geqslant 3\\ \left[\begin{array}{l}m = 4 + \sqrt{2}\\ m = 4 - \sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}$. Vậy $m = 4 + \sqrt{2}$ $\left(\text{thoûa maõn ñieàu kieän } m > \dfrac{5}{2}\right)$.

Vậy $m = 4 + \sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

13.

Giả sử $(d): y = ax + b$. Vì (d) song song với đường thẳng $y = 4x + 5$ nên $a = 4$, $b \neq 5$ và $(d): y = 4x + b$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2 = 4x + b$ hay $x^2 - 4x - b = 0.(*)$

Đường thẳng (d) cắt parabol $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt, tức là

$\Delta' = (-2)^2 + b = 4 + b > 0$ vậy $b > -4$

Theo hệ thức Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = -b \end{cases}$. Theo đề bài thì $x_1^2 + x_2^2 = 10$ hay $\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 10$.

Thay Viète vào ta có $4^2 + 2b = 10$ nên $b = -3$

Vậy $a = 4$, $b = -3$ thỏa yêu cầu bài toán.

14.

a) Vì $M(-2;3) \in (d)$ nên thay $x = -2$, $y = 3$ vào phường trình đường thẳng $(d): y = 2x + m$, ta được $3 = 2\cdot(-2) + m \Leftrightarrow m = 7$.

Vậy với $m = 7$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2;3)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $2x^2 = 2x + m$ hay $2x^2 - 2x - m = 0$. $\left(*\right)$

Để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt. Tức là $\Delta' > 0$ hay $(-1)^2 - 2\cdot(-m) > 0$ vậy $m > -\dfrac{1}{2}$.

Khi đó theo hệ thức Viềt, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -\dfrac{m}{2} \end{cases}$.

Theo đề bài, ta lại có

$\left(1 - x_1x_2\right)^2 + 2\left(y_1 + y_2\right) = 16$ hay $\left(1 - x_1x_2\right)^2 + 2\left(2x_1^2 + 2x_2^2\right) = 16$

$$\left(1 - x_1x_2\right)^2 + 4\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 16$$

$$\left(1 - x_1x_2\right)^2 + 4\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right] = 16$$

$$\left(1 + \frac{m}{2}\right)^2 + 4\left(1^2 + 2\cdot\frac{m}{2}\right) = 16$$

$$1 + m + \frac{m^2}{4} + 4 + 4m = 16$$

$\frac{m^2}{4}+5m-11=0$. Giải phương trình được $m=2$ (thoả mãn) và $m=-22$ (không thoả mãn)

Vậy $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI 21:
GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

1.

Gọi số tự nhiên cần tìm là a, ($a \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có phương trình: $a^2 - a = 20$.

Giải phương trình, ta được $a = -4$ (loại) và $a = 5$(nhận)

Vậy số cần tìm là 5.

2.

Gọi số mà một bạn đã chọn là x và số bạn kia là $x + 5$.
Tích của hai số là $x\left(x + 5\right)$.

Theo đầu bài, ta có phương trình: $x\left(x + 5\right) = 150 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 150 = 0$ $

Giải phương trình $\Delta = 25 - 4\cdot(-150) = 625 = 25^2$ nên $x_1 = 10, x_2 = -15$.
Trả lời:
- Nếu bạn Minh chọn số 10 thì bạn Lan chọn số 15 hoặc ngược lại.
- Nếu bạn Minh chọn số -15 thì bạn Lan chọn số -10 hoặc ngược lại.

3.

Gọi số bé là x ($x \in \mathbb{N}$). Số tự nhiên kề sau là $x + 1$.

Vì tổng các bình phương của nó là 85 nên ta có phương trình: $x^2 + \left(x + 1\right)^2 = 85$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 85$

$2x^2 + 2x - 84 = 0$

$x^2 + x - 42 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-42) = 169 > 0$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \dfrac{-1+13}{2} = 6$ (thoả mãn) $\mathrm{x}_2 = \dfrac{-1-13}{2} = -7$ (loại)

Vậy số bé là 6, số lớn là 7.

4.

Gọi tử số của phân số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần là $x + 11$ (đk: $x \in \mathbb{Z}; x \neq 0, x \neq -11$)

Phân số cần tìm là $\dfrac{x}{x+11}$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số 4 đơn vị ta được phân số

$\frac{x-7}{x+15}$ (Điều kiện : $x \neq -15$)

Theo bài ra ta có phương trình : $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7}$

Biến đổi rồi giải phương trình tìm $x = -5$. Vậy phân số cần tìm là $\frac{-5}{6}$.

Dạng 2. Toán năng suất, công việc

5.

Gọi năng suất dự định là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}^*\big)$;

Thời gian dự định làm 70 sản phẩm là $\frac{70}{x}$ giờ.

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm với năng suất $x+5$ (sản phẩm/giờ) là .$\frac{80}{x+5}$. giờ.

Theo đề bài, công nhân hoàn thành trước kế hoạch 40 phút (= $\frac{2}{3}$ giờ).

Ta có phương trình: $\frac{70}{x} - \frac{80}{x+5} = \frac{2}{3}$ biến đổi ta được $x^2 + 20x - 525 = 0$

$\Delta = 20^2 - 4 \cdot (-525) = 2500 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 15$ (nhận); $x_2 = -35$ (loại).

Vậy năng suất dự định là 15 sản phẩm/giờ.

6.

Gọi số xe trong đoàn xe lúc đầu là x (chiếc) $\left(x \in \mathbb{Z}, x > 0\right)$.

Số xe trong đoàn xe khi bổ sung thêm là $x+2$ (chiếc).

Lúc đầu, lượng hàng mỗi xe phải chở là $\frac{30}{x}$ (tấn)

Lúc thêm 2 xe, lượng hàng mỗi xe phải chở là $\frac{30}{x+2}$ (tấn)

Do bổ sung thêm 2 xe thì mỗi xe chở ít hơn $0,5 = \frac{1}{2}$ tấn hàng nên ta có phương trình :

$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+2} = \frac{1}{2}$. Biến đổi và khử mẫu ta được

$60\left(x+2\right)-60x=x\left(x+2\right)$

$x^2+2x-120=0$

$\Delta'=1^2-1.\left(-120\right)=121>0$, $\sqrt{\Delta'}=\sqrt{121}=11$.

$x_1=-1+11=10$ (nhận) ; $x_2=-1-11=-12$ (loại).

Vậy lúc đầu đoàn xe có 10 chiếc.

7.

Gọi x (chiếc) là số xe ban đầu của đoàn xe (x nguyên dương).

Khối lượng hàng mà mỗi xe phải chở theo dự định là $\dfrac{480}{x}$ (tấn).

Số xe thực tế: $x+3$ (chiếc).

Khối lượng hàng thực tế mà mỗi xe phải chở là $\dfrac{480}{x+3}$ (tấn).

Theo đề bài ta có phương trình: $\dfrac{480}{x}-\dfrac{480}{x+3}=8$.

Giải phương trình, ta được $\left[\begin{array}{l}x=12\ \text{(nhaän)}\\x=-15\ \text{(loaïi)}\end{array}\right.$.

Vậy ban đầu đoàn xe có 12 chiếc.

8.

Gọi số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là x (sản phẩm). (ĐK: $x>10; x\in\mathbb{Z}$)

Do đó:

Số sản phẩm tổ dự định làm trong mỗi ngày là: $x-10$ (sản phẩm).

Thời gian tổ hoàn thành công việc trong thực tế là: $\dfrac{240}{x}$ (ngày)

Thời gian tổ hoàn thành công việc theo dự định là: $\dfrac{240}{x-10}$ ngày

Vì tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày, do đó ta có phương trình:

$\dfrac{240}{x-10}-\dfrac{240}{x}=2$ hay $\dfrac{120}{x-10}-\dfrac{120}{x}=1$. Biến đổi và khử mẫu ta được phương trình

$120x-120x+1200=x^2-10x$

$x^2-10x-1200=0$. Giải phương trình ta được $x=40$ (nhận) và $x=-30$ (loại)

Vậy số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là 40 sản phẩm.

9.

Gọi x (chiếc) số tàu dự định của đội($x\in\mathbb{N}^*$, $x<140$)

Số tàu tham gia vận chuyển là $x+1$ (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định: $\dfrac{280}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế: $\dfrac{286}{x+1}$ (tấn)

Theo đề bài ta có pt: $\dfrac{280}{x}-\dfrac{286}{x+1}=2$

Biến đổi và khử mẫu ta được phương trình $x^2+4x-140=0$. Giải phương trình ta có $x_1=10$ (nhận) và $x_2=-14$ (loại).

Vậy đội tàu lúc đầu là 10 chiếc.

10.

Gọi x (xe) là số xe mà công ty X dự định điều động ($x>5$, $x\in\mathbb{N}^*$).

Suy ra mỗi xe sẽ chở số tấn hàng theo dự định là $\dfrac{100}{x}$ (tấn hàng).

Sau khi điều động 5 xe đi làm việc khác thì Số xe còn lại để chở hàng là $x-5$ (xe).

Do đó thực tế, mỗi xe phải chở số tấn hàng là $\dfrac{100}{x-5}$ (tấn hàng).

Theo đề bài, ta có phương trình $\dfrac{100}{x-5}-\dfrac{100}{x}=1$. Biến đổi và khử mẫu ta có $100x-100(x-5)=x(x-5)$

$x^2-5x-500=0$. Giải phương trình được $x_1=25$ (nhận); $x_2=-20$ (loại)

Vậy theo dự định ban đầu thì xe điều động là 25 xe.

11.

Gọi x (quyển) là số quyển sách mà mỗi giờ nhóm dự định sắp xếp (x nguyên dương).

Suy ra thời gian dự định sắp xếp 270 quyển sách là $\frac{270}{x}$ (giờ).

Vì mỗi giờ nhóm sắp xếp được nhiều hơn dự định 20 quyển nên số quyển sách thực tế mỗi giờ nhóm sắp xếp được là $x+20$ (quyển).

Vì nhóm sắp xếp vượt mức được giao 10 quyển nên nhóm đã sắp xếp được $270+10=280$ (quyển).

Suy ra thời gian thực tế sắp xếp xong 280 quyển sách là $\frac{280}{x+20}$ (giờ).

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{270}{x}-\frac{280}{x+20}=1$.

Biến đổi và giải phương trình, ta được $x=60$ (nhận) hoặc $x=-90$ (loại).

Vậy số quyển sách mỗi giờ nhóm dự định sắp xếp là 60 quyển.

12.

Gọi x (bộ) là số bộ quần áo mỗi ngày phân xưởng may theo kế hoạch.

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$

Số ngày để may 1200 bộ quần áo theo kế hoạch là: $\frac{1200}{x}$ (ngày)

Thực tế, do mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo nên số bộ quần áo mỗi ngày phân xưởng may trên thực tế là $x+10$ (bộ) .

Số ngày để may 1200 bộ quần áo theo trên thực tế là: $\frac{1200}{x+10}$ (ngày)

Do phân xưởng đã may 1200 bộ quần áo hoàn thành trước kế hoạch 4 ngày nên:

$\frac{1200}{x}-\frac{1200}{x+10}=4$. Biến đổi và khử mẫu ta được

$1200x+12000-1200x=4x^2+40x$

$4x^2+40x-12000=0$

$x^2+10x-3000=0$

Giải phương trình ta được: $x_1=50$ (nhận); $x_2=-60$ (loại).

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải may 50 bộ quần áo.

13.

Gọi số thẻ Căn cước trong một ngày mà tổ công tác cấp theo kế hoạch là x thẻ $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$ Số ngày cần đề cấp hết 7200 thẻ theo kế hoạch là $\dfrac{7200}{x}$ (ngày).

Số thẻ cấp được trong một ngày theo thực tế là: $x+40$ (thẻ).

$\Rightarrow$ Số ngày cấp hết 7200 thẻ theo thực tế là $\dfrac{7200}{x+40}$ (ngày)

Vi tổ công tác đã hoàn thành nhiệm vụ sóm hon kế hoạch 2 ngày nên ta có phương trình:

$\dfrac{7200}{x}-\dfrac{7200}{x+40}=2$ hay $\dfrac{3600}{x}-\dfrac{3600}{x+40}=1$. Biến đổi và khử mẫu ta được

$3600(x+40)-3600x=x(x+40)$

$3600x+144000-3600x=x^2+40x$

$x^2+40x-144000=0$

Ta có $\Delta'=20^2+144000=144400>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=-20+\sqrt{144400}=360$ (thoả mãn); $x_2==-20-\sqrt{144400}=-400$ (không thoả mãn)

Vậy theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày tổ công tác sẽ cấp được 360 thẻ Căn cước.

14.

Gọi năng suất dự định là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}, 0<x<20$);

Năng suất thực tế là $x+1$ (sản phẩm/giờ)

Thời gian dự định làm 72 sản phẩm là $\dfrac{72}{x}$ giờ;

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm với năng suất $x+1$ (sản phẩm/giờ) là $\dfrac{80}{x+1}$ giờ.

Theo đề bài, thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn so với dự định là 12 phút ($=\dfrac{1}{5}$ giờ).

Ta có phương trình: $\dfrac{80}{x+1}-\dfrac{72}{x}=\dfrac{1}{5}$. Khử mẫu và biến đổi ta được phương trình

$80.5.x-72.5.\left(x+1\right)=x\left(x+1\right)$

$x^2-39x+360=0.$

$\Delta=39^2-4\cdot(360)=81>0$ nên phương trình có nghiệm $x_1=15$ (nhận); $x_2=24$ (loại).

Vậy năng suất dự định là 15 sản phẩm/giờ.

Dạng 3 : Toán chuyển động

Sử dụng công thức $S = V.t$; trong đó S là quãng đường, V là vận tốc, t là thời gian.

Suy ra $V = \dfrac{S}{t}; t = \dfrac{S}{V}$.

Nếu chuyển động dòng chảy thì

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}$$

15.

Gọi x $\left(km/h\right)$ là vận tốc của xe máy $\left(x > 0\right)$. Suy ra vận tốc của ô tô là $x + 20$ $\left(km/h\right)$

Quãng đường ô tô đi từ B đến C là 72 km và thời gian ô tô đi từ B đến C là $\dfrac{72}{x+20}$ $\left(h\right)$.

Quãng đường xe máy đi từ A đến C là $160 - 72 = 88$ km và thời gian xe máy đi từ A đến C là $\dfrac{88}{x}\left(h\right)$.

Vì ô tô xuất phát sau xe máy 1h và hai xe gặp nhau tại C nên ta có phương trình

$\dfrac{88}{x} - \dfrac{72}{x+20} = 1$ biến đổi và khử mẫu ta được $88\left(x+20\right) - 72x = x\left(x+20\right)$.

$x^2 + 4x - 1760 = 0$. Giải phương trình ta có $x_1 = 40$ (thoả mãn) và $x_2 = -44$ (không thoả mãn).

Vậy vận tốc của xe máy là 40 km/h, vận tốc của ô tô là $40 + 20 = 60$ km/h.

16.

Gọi vận tốc lúc đi của xe máy là x (km/h; $x > 0$)

Thời gian lúc đi của xe máy là: $\dfrac{100}{x}$ (giờ)

Vận tốc lúc về của xe máy là: $x + 10$ (km/h)

Thời gian lúc về của xe máy là: $\dfrac{100}{x+10}$ (giờ)

Vì lúc về xe máy tăng tốc nên thời gian về ít hơn so với thời gian đi là 30 phút $= \dfrac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình:

$\dfrac{100}{x} - \dfrac{100}{x+10} = \dfrac{1}{2}$. Khử mẫu và biến đổi ta được $200(x+10) - 200x = x(x+10)$

hay $x^2+10x-2000=0$. Giải phương trình ta có $x_1=40$ (thoả mãn) và $x_2=-50$ (không thoả mãn).

Vậy vận tốc lúc đi của xe máy là 40 km/h.

17.

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là $x\ (km/h)$ (ĐK: $x>0$).

Suy ra vận tốc của ô tô thứ hai là $x+10\ (km/h)$

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $\dfrac{120}{x}\ (h)$

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là $\dfrac{120}{x+10}$ (h)

Vì ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút $=\dfrac{2}{5}$ giờ nên ta có phương trình:

$\dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{x+10}=\dfrac{2}{5}$. Khử mẫu và biến đổi ta được phương trình $x^2+10x-3000=0$

Ta có: $\Delta'=(-5)^2+3000=3025=55^2>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-5+55=50\quad (tm)\\ x_2=-5-55=-60(ktm)\end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là $50km/h$ và vận tốc của ô tô thứ hai là $60km/h$.

18.

Đặt t là vận tốc của bạn Mai khi đi học bằng xe đạp $t>0$. Ta có thời gian mai đến trường là $\dfrac{3}{t}$ giờ.

Vậy vận tốc Mai nhờ mẹ chở đi đến trường bằng xe máy $t+24$. Ta có thời gian mai đến trường là $\dfrac{3}{t+24}$ giờ.

Biết rằng cùng một thời điểm nhưng khi đi xe máy thì Mai đến trường nhanh hơn xe đạp là 10 phút $=\dfrac{1}{6}$ giờ:

$$\frac{3}{t}-\frac{3}{t+24}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{3\cdot6\cdot(t+24)}{t}-\frac{3\cdot6\cdot t}{t+24}=\frac{t\cdot(t+24)}{6}\Leftrightarrow t^2+24t-432=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=12(N)\\ t=-36(L)\end{array}\right..$$

Vậy vận tốc của bạn Mai khi đi học bằng xe đạp là 12 km/h.

19.

Gọi vận tốc của xe tải là x *(km/h)* $(x > 0)$

Vận tốc của xe khách là $x + 10$ *(km/h)*

Thời gian đi hết quãng đường của xe tải là $\frac{132}{x}(h)$ và xe khách là $\frac{132}{x+10}(h)$

Vì xe khách đi nhanh hơn xe tải là 1 giờ 6 phút = $\frac{11}{10}(h)$

Nên ta có phương trình: $\frac{132}{x} - \frac{132}{x+10} = \frac{11}{10}$.

Biến đổi và khử mẫu ta được $x^2 + 10x - 1200 = 0$

Giải phương trình ta được $x_1 = -40$ *(loại)*; $x_2 = 30$ *(thỏa mãn)*

Vậy vận tốc của xe tải là 30 *km/h* và xe khách là 40 *km/h*.

20.

4 giờ 30 phút = $4,5$ giờ

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h) $(x > 2)$

Vận tốc ca nô khi xuôi dòng là: $x + 2$ (km/h)

Vận tốc ca nô khi ngược dòng là: $x - 2$ (km/h)

Thời gian ca nô xuôi dòng là: $\frac{40}{x+2}$ (giờ)

Thời gian ca nô ngược dòng là: $\frac{40}{x-2}$ (giờ)

Vì cano xuôi dòng một khúc sông dài 40 km, rồi ngược dòng khúc sông ấy mất 4 giờ 30 phút nên ta có phương trình: $\frac{40}{x+2} + \frac{40}{x-2} = 4,5$. Thu gọn ta được phương trình

$9x^2 - 160x - 36 = 0$

$\Delta' = (-80)^2 - 9(-36) = 6724$

$x_1 = \frac{-(-80) + \sqrt{6724}}{9} = 18$ (nhận); $x_2 = \frac{-(-80) - \sqrt{6724}}{9} = \frac{-2}{9}$ (loại)

Vậy vận tốc thực của ca nô là 18 km/h.

21.

Ta có 6 giờ 45 phút= $\dfrac{27}{4}$ giờ.

Gọi vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng là $x\,(\text{km}/\text{h}, x > 4)$

Suy ra vận tốc của tàu thủy khi xuôi dòng là $x + 4\,(\text{km}/\text{h})$.

Vận tốc của tàu thủy khi ngược dòng là $x - 4\,(\text{km}/\text{h})$.

Thời gian tàu thủy đi xuôi dòng 120km là $\dfrac{120}{x+4}$ (giờ).

Thời gian tàu thủy đi ngược dòng 120km là $\dfrac{120}{x-4}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian cả đi lẫn về mất $\dfrac{27}{4}$ giờ. Ta có phương trình: $\dfrac{120}{x+4} + \dfrac{120}{x-4} = \dfrac{27}{4}$

Khử mẫu ta có $9x^2 - 320x - 144 = 0$

Khi đó $\Delta = 320^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-144) = 107584 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -\dfrac{4}{9}$ (loại); $x_2 = 36$ (nhận).

Vậy vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng là $36\text{km}/\text{h}$.

22.

Gọi vận tốc thực của ca nô là $x\ (\text{km/h}; x > 4)$.

Vận tốc ca nô lúc xuôi dòng là $x + 4\ (\text{km/h})$.

Vận tốc ca nô lúc ngược dòng là $x - 4\ (\text{km/h})$.

Theo đề bài, thời gian ca nô đi bằng thời gian bè trôi đến chỗ gặp nhau nên ta có phương trình $\dfrac{24}{x+4} + \dfrac{16}{x-4} = \dfrac{8}{4}$. Biến đổi và khử mẫu ta được phương trình $x^2 - 20x = 0$

Giải ra ta có $x_1 = 20$ (thỏa mãn), $x_2 = 0$ (không thỏa mãn).

Vậy vận tốc thực của ca nô là $20\ (\text{km/h})$.

23.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là $x\ (\text{km/h}), (x > 4)$.

Vận tốc ca nô đi từ A đến B là $x + 4$ km/h.

Vận tốc ca nô đi từ B về A là $x - 4$ km/h.

Thời gian ca nô đi từ A đến B là $\dfrac{48}{x+4}$ h.

Vận tốc ca nô đi từ B về A là $\frac{48}{x-4}$ h.

Tổng thời gian cả đi và về h hết 5 giờ nên ta có phương trình: $\frac{48}{x+4}+\frac{48}{x-4}=5$.

Biến đổi và khử mẫu ta được phương trình: $5x^2-96x-80=0$

Giải phương trình ta có $x_1=20$ (nhận) và $x_2=-\frac{4}{5}$ (loại).

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 20 km/h.

24.

Gọi vận tốc của xuồng lúc đi là $x(\text{km}/\text{h}), x>0$, thì vận tốc lúc về là $x-5(\text{km}/\text{h})$.

Thời gian đi 120km là $\frac{120}{x}$ (giờ).

Vì khi đi có nghỉ một giờ nên thời gian đi hết tất cả là $\frac{120}{x}+1$ (giờ).

Độ dài quãng đường về $120+5=125(\text{km})$

Thời gian về là $\frac{125}{x-5}$ (giờ).

Theo đầu bài, ta có phương trình: $\frac{120}{x}+1=\frac{125}{x-5}$. Biến đổi và khử mẫu ta được phương trình $x^2-10x-600=0$.

Ta có $\Delta=10^2-4\cdot(-600)=2500>0$, nên phương trình có nghiệm $x_1=30($ nhận $);x_2=-20$ (loại).

Vậy vận tốc của xuồng đi là $30\text{km}/\text{h}$.

Dạng 4 : Dạng toán có nội dung hình học

Áp dụng các công thức sau:

Định lý Phythagore: ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow BC^2=AB^2+AC^2$.

Diện tích hình chữ nhật: $S=a.b$; với a là chiều dài, b là chiều rộng.

Diện tích hình thang: $S=\frac{(a+b)}{2}.h$ hoặc $S=m.h$. Trong đó a,b là độ dài hai đáy; h là chiều cao; m là độ dài đường trung bình.

25.

Gọi chiều rộng của khu vườn là x (mét; $x > 0$).

Vì chiều dài gấp 3 lần chiều rộng nên chiều dài của khu vườn là $3x(m)$.

Do lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng $1,5\,\mathrm{m}$ nên:

Chiều dài phần đất để trồng trọt là: $3x - 1,5.2 = 3x - 3$ (mét)

Chiều rộng phần đất để trồng trọt là: $x - 1,5.2 = x - 3$ (mét)

Vì diện tích vườn để trồng trọt là $4329\,\mathrm{m}^2$ nên ta có phương trình: $(x-3)(3x-3) = 4329$.

Biến đổi ta được $x^2 - 4x - 1440 = 0$

Ta có $\Delta' = 2^2 + 1440 = 1444 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$x_1 = 2 + \sqrt{1444} = 40$ (thoả mãn); $x_2 = 2 - \sqrt{1444} = -36$ (không thoả mãn)

Vậy chiều rộng của khu vườn là 40 mét và chiều dài của khu vườn là 120 mét.

26.

Gọi chiều rộng của mảnh vườn nhà bạn An là: x (m) (x > 0)

Khi đó: Chiều dài mảnh vườn nhà bạn An là: $x + 6$ (m)

Vì diện tích của mảnh vườn là $216m^2$ nên ta có phương trình:

$x\left(x+6\right) = 216$ hay $x^2 + 6\mathrm{x} - 216 = 0$

$\Delta' = 3^2 - 1.\left(-216\right) = 225 > 0$ Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-6+\sqrt{225}}{2.1} = 12\ \left(tm\right);\ x_2 = \frac{-6-\sqrt{225}}{2.1} = -18\ \left(ktm\right)$$

Chiều dài của mảnh vườn nhà bạn An là: 12 + 6 =18 (m)

Vậy chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn nhà bạn An lần lượt là 12m và 18m

27.

Gọi chiều rộng mảnh đất là $x\left(m\right)\left(x>0\right)$

Chiều dài mảnh vườn là $x + 7\left(m\right)$

Vì độ dài đường chéo là $13m$ nên ta có phương trình $x^2 + \left(x+7\right)^2 = 13^2$

Hay $x^2 + 7x - 60 = 0$; $\Delta = 7^2 - 4\left(-60\right) = 17^2 > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = 5\left(tm\right)$; $x_2 = -12$ (không thoả mãn)

Vậy diện tích mảnh vườn là $5.12 = 60\ (m^2)$

28.

Gọi chiều rộng mảnh đất là $x\ (\text{m}),\ (x > 0)$.

Suy ra chiều dài mảnh đất là $x + 6\ (\text{m})$

Đường chéo mảnh đất là $\dfrac{\sqrt{65}}{4}x\ (\text{m})$

Theo đề bài ta có phương trình: $x^2 + (x+6)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{65}}{4}x\right)^2$. Biến đổi ta được

$$33x^2 - 192x - 576 = 0$$

Giải phương trình ta có $x_1 = 8$ (thoả mãn) và $x_2 = \dfrac{-24}{11}$ (loại)

Vậy chiều rộng $8m$, chiều dài $14m$. Diện tích mảnh đất là : $8.14 = 112(\text{m}^2)$

Dạng 5 : Dạng toán làm chung, làm riêng

29.

Ta có 6 giờ 40 phút $= 6\dfrac{2}{3}$ giờ.

Gọi thời gian công nhân thứ nhất làm một mình xong công việc là x (giờ, $x > 6\dfrac{2}{3}$).

Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong việc là $x + 3$ (giờ).

Mỗi giờ công nhân thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc).

Mỗi giờ công nhân thứ hai làm được $\dfrac{1}{x+3}$ (công việc).

Theo đầu bài, hai công nhân cùng làm thì hoàn thành công việc trong $6\dfrac{2}{3}$ giờ. Nên mỗi giờ họ cùng làm được $1 : 6\dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{20}$ (công việc). Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}.$$ Biến đổi và khử mẫu ta được $3x^2 - 31x - 60 = 0$.

Ta có $\Delta = 31^2 - 4.3.(-60) = 1681 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = -\frac{5}{3}$(loại);$x_2 = 12$ (nhận).

Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 12 giờ. Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 15 giờ.

30. Đổi 7 giờ 12 phút $= 7\frac{1}{5}$ giờ.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x giờ $(0 < x < 30)$.

Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là $30 - x$ (giờ).

Theo đề bài, hai vòi cùng chảy mà đầy bể sau $7\frac{1}{5}$ (giờ) nên ta có phương trình

$7\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{30-x}\right) = 1$. Biến đổi và khử mẫu ta được phương trình $x^2 - 30x + 216 = 0$.

Ta có $\Delta = 30^2 - 4.(216) = 36 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = 18$(nhận);$x_2 = 12$ (nhận).

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng sẽ đầy bể sau 12 giờ, vòi thứ hai đầy bể sau 18 giờ. Hoặc ngược lại.

Dạng 6 : Dạng toán khác

31.

Gọi $x\,(\mathrm{m})$ là chu vi bánh trước $(x > 0)$.

Chu vi của bánh sau $x + 1{,}5\,(\mathrm{m})$.

Vì hai bánh này cùng lăn trên quãng đường $100(\mathrm{m})$.

Số vòng quay được của bánh trước $\frac{100}{x}$.

Số vòng quay được của bánh sau $\frac{100}{x+15}$.

Ta có phương trình $\frac{100}{x} - \frac{100}{x+15} = 15$. Quy đồng và khử mẫu ta được $x^2 + 15x - 100 = 0$.

Ta có $\Delta = 15^2 - 4\cdot(-100) = 625 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = -20$(loại);$x_2 = 5$ (nhận).

Kết luận: Chu vi bánh trước là $5\,(\mathrm{m})$, chu vi bánh sau là $6{,}5\,(\mathrm{m})$.

32.

Gọi $x\left(\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3\right)$ là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất $(x > 1)$.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x - 1\left(\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3\right)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ nhất $\dfrac{880}{x}\left(\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3\right)$.

Thể tích của miếng kim loại thứ hai $\dfrac{858}{x-1}\left(\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3\right)$.

Ta có phương trình $\dfrac{858}{x-1} - \dfrac{880}{x} = 10$. Quy đồng và khử mẫu ta được phương trình $5x^2 + 6x - 440 = 0$

Ta có $\Delta = 6^2 + 4 \cdot 5 \cdot 440 = 8836 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -10$ (loại); $x_2 = 8{,}8$ (nhận). Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là $8{,}8\left(\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3\right)$.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $7{,}8\left(\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3\right)$.

Dạng 7. Kết hợp hệ phương trình và phương trình

33.

Gọi thời gian đội I làm riêng đắp xong đê là x (ngày). Điều kiện : $x > 6$.

Gọi thời gian đội II làm riêng đắp xong đê là y (ngày). Điều kiện: $x > y > 6$.

Đối tượng		Số ngày hoàn thành công việc (ngày)	Số công việc làm trong một ngày.
Làm chung		6	$\dfrac{1}{6}$
Làm riêng	Đội thứ I	x	$\dfrac{1}{x}$
	Đội thứ II	y	$\dfrac{1}{y}$
Phương trình			$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}$ (1)

Nếu làm riêng thì đội I hoàn thành công việc chậm hơn đội II là 9 ngày nên ta có phương trình:

$$x-y=9\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\\ x-y=9\end{cases}$. Rút $x=9+y$ thế vào phương trình thứ nhất và khử mẫu ta được $6y+6x=xy$ hay $6y+6\left(9+y\right)=\left(9+y\right)y$ nên $y^2-3y-54=0$

Ta có: $\Delta'=\left(-3\right)^2-4.1.\left(-54\right)=225>0$

Suy ra $y_1=9$ (nhận), $y_2=-6$ (loại).

Thay $y=9$ vào (4) ta được $x=9+9=18$.

Vậy thời gian đội I làm riêng đắp xong đê là 18 ngày.

Thời gian đội II làm riêng đắp xong đê là 9 ngày.

34.

Gọi thời gian đội thứ nhất làm riêng hoàn thành công việc là x (giờ, $x>5$).

Thời gian đội thứ hai làm riêng hoàn thành công việc là y (giờ, $y>0$).

Mỗi giờ đội thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc, đội thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Trong 4 giờ đội thứ nhất làm được $\dfrac{4}{x}$ công việc, đội thứ hai làm được $\dfrac{4}{y}$ công việc.

Theo đề ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{2}{3} & (1)\\ x-y=5 & (2)\end{cases}$. $(2)\Leftrightarrow x=y+5$ thế vào (1) ta được

$\dfrac{4}{y+5}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{2}{3}$. Quy đồng và khử mẫu ta được $6y+6(y+5)=y(y+5)$

Hay $y^2-7y-30=0$. Giải phương trình ta có $y_1=-3$ (loại) và $y_2=10$ (nhận)

Với $y_2=10$ ta có $x=15$.

Vậy nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ nhất là 15 giờ, đội thứ hai là 10 giờ.

35.

Gọi x là số học sinh, y là số cây mỗi em đã trồng ($x>0\,;y>0$)

Tổng số cây các em trồng: $x.y=200\quad(1)$

Hai học sinh bị bệnh không tham gia nên số học sinh thực tế là $x-2$ (học sinh)

Mỗi học sinh trồng thêm 5 cây nên số cây mỗi học sinh trồng thực tế là $y+5$ (cây)

Khi đó tổng số cây : $(x-2)(y+5)=200 \quad (2)$

Biến đổi phương trình (2) và thế $x.y=200$ ta có $5x-2y=10$ hay $x=\dfrac{10+2y}{5}$.

Thế $x=\dfrac{10+2y}{5}$ vào phương trình (1) ta được $\dfrac{10+2y}{5}.y=200$ hay $2y^2+10y-1000=0$

Giải phương trình này ta được $y_1=20$ (thoả mãn) và $y_2=-25$ (loại)

Với $y_1=20$ tìm được $x=10$

Vậy có tất cả 10 em tham gia trồng cây, mỗi em trồng 20 cây.

BÀI 22:
BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

BÀI TẬP

Dạng 1. Lập bảng tần số

1.

Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét.

Chiều cao (cm)	90	95	100	105	110	115	120
Tần số	3	4	11	7	2	2	1

- Các bạn HS lớp 7A nhảy thấp nhất là $90cm$, cao nhất là $120cm$ và tập trung nhiều ở $100cm$.

2.

Lời giải

Màu sắc yêu thích	Màu xanh	Màu đỏ	Màu vàng
Tần số	11	12	10

3.

a) Có 45 học sinh tham gia kiểm tra.

b) Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét.

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	3	6	3	14	12	4	2	1

- Có 8 giá trị điểm số khác nhau.
- Điểm thấp nhất là 3, cao nhất là 10 và tập trung nhiều ở điểm $6;7$.

4.

a) Trong tuần có những bạn sau đạt điểm tốt: An, Minh, Đức, Lâm, Thảo, Tuấn

- Bạn An đạt được 3 điểm tốt;
- Bạn Minh đạt được 1 điểm tốt;
- Bạn Đức đạt được 2 điểm tốt;
- Bạn Lâm đạt được 3 điểm tốt;
- Bạn Thảo đạt được 2 điểm tốt;
- Bạn Tuấn đạt được 1 điểm tốt;

b) Bảng tần số:

Tên bạn đạt điểm tốt	An	Minh	Đức	Lâm	Thảo	Tuấn
Tần số	3	1	2	3	2	1

Từ bảng tần số trên ta thấy bạn An và bạn Lâm có số lần đạt điểm tốt nhiều nhất.

5.

a) Có 30 hộ gia đình được điều tra.

b) Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét.

Số con trong mỗi hội gia đình	0	1	2	3	4	5
Tần số	1	9	12	3	3	2

- Các 30 hộ gia đình được điều tra, số con ở mỗi hộ gia đình từ 0 đến 6.
- Số con thấp nhất là 0 con, cao nhất là 5 con cho mỗi hộ và số con chủ yếu mỗi hộ là từ 1 con đến 2 con.

6.

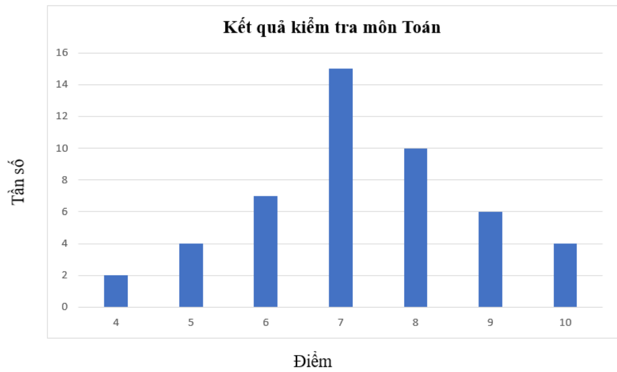
a) Bảng tần số:

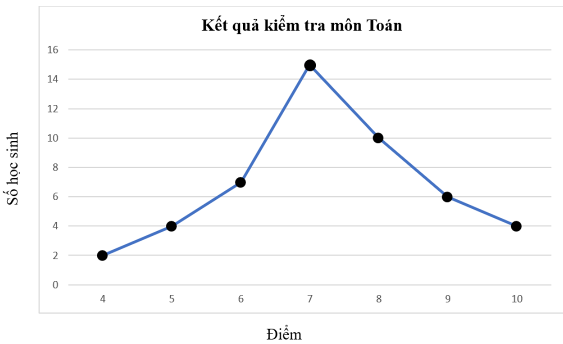
Mức đánh giá	Tốt	Khá	Trung bình	Kém
Tần số	10	7	4	3

b) Mức đánh giá Tốt chiếm ưu thế nhất. Vì nó có tần số cao nhất.

Dạng 2. Biểu đồ tần số

7.





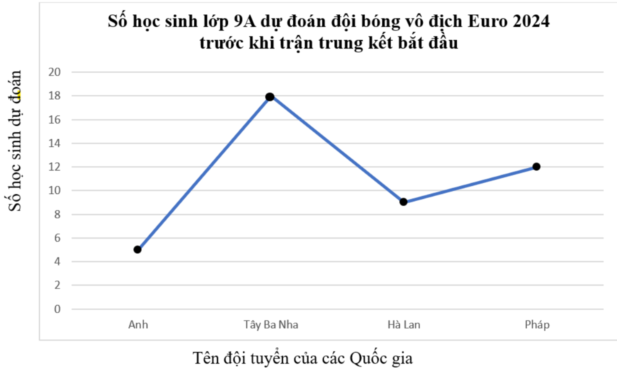
8.

Bảng tần số

Cân nặng (kg)	47	48	49	50	51
Tần số	2	8	6	5	3

9.


Số học sinh lớp 9A dự đoán đội bóng vô địch Euro 2024
trước khi trận trung kết bắt đầu
Số học sinh dự đoán
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Anh
Tây Ba Nha
Hà Lan
Pháp
Tên đội tuyển của các Quốc gia


Số học sinh lớp 9A dự đoán đội bóng vô địch Euro 2024
trước khi trận trung kết bắt đầu
Số học sinh dự đoán
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Anh
Tây Ba Nha
Hà Lan
Pháp
Tên đội tuyển của các Quốc gia

BÀI 23:
BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

BÀI TẬP

Dạng: Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ để biểu diễn bảng tần số tương đối

1.

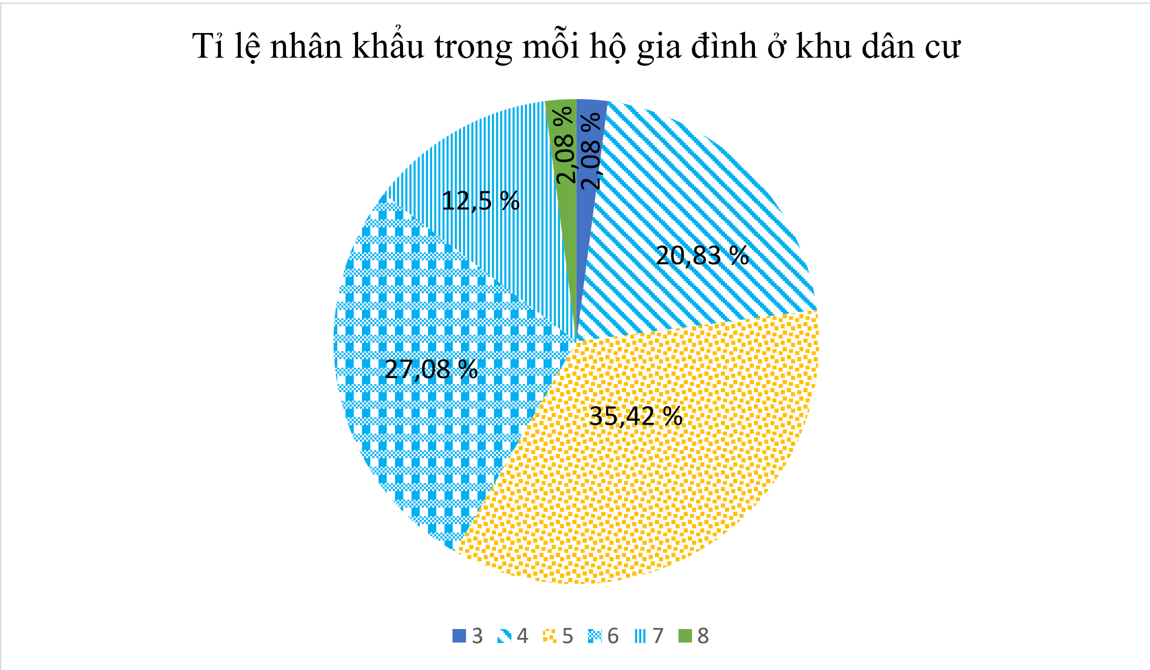
Bảng tần số

Số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình	3	4	5	6	7	8
Tần số	1	10	17	13	6	1

Bảng tần số tương đối

Số nhân khẩu của mỗi hộ gia đình	3	4	5	6	7	8
Tần số tương đối $(\%)$	$2,08$	$20,83$	$35,42$	$27,08$	$12,50$	$2,08$

b) Vẽ biểu đồ



2.

a) Ta có bảng tần số tương đối sau:

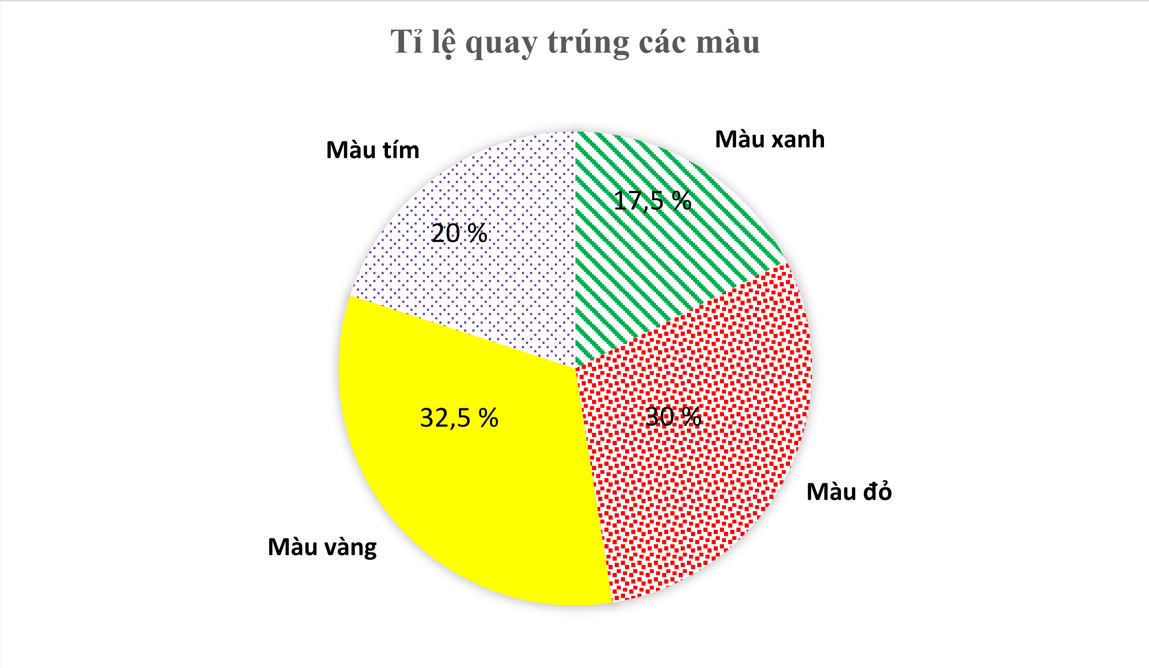
Số lần quay trúng	Màu xanh	Màu đỏ	Màu vàng	Màu tím

Tần số tương đối	$17,5\%$	30%	$32,5\%$	20%

b Xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu xanh là $17,5\%$

Xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu vàng là $32,5\%$

c) Biểu đồ hình quạt



3.

Số liệu không chính xác ở đây là 30%. Sửa lại thành 20% vì $\frac{6}{5+15+6+4}.100\% = 20\%$

Bảng số liệu khi sửa lại đúng là:

Tần số	5	15	6	4
Tần số tương đối	$16,67\%$	50%	20%	$13,33\%$

4.

Ta có bảng tần số tương đối sau:

Cỡ áo	M	S	L
Tần số tương đối	34,28%	40%	25,72%

5.

a) Ta có bảng tần số tương đối sau:

Môn học được yêu thích	Môn Toán	Môn Văn	Môn Tiếng Anh	Môn KHTN	Môn KHXH
Tần số tương đối	$32,26\%$	$27,42\%$	$17,74\%$	$8,06\%$	$14,52\%$

b) HS tự vẽ biểu đồ

6.

a)Ta có bảng tần số tương đối sau:

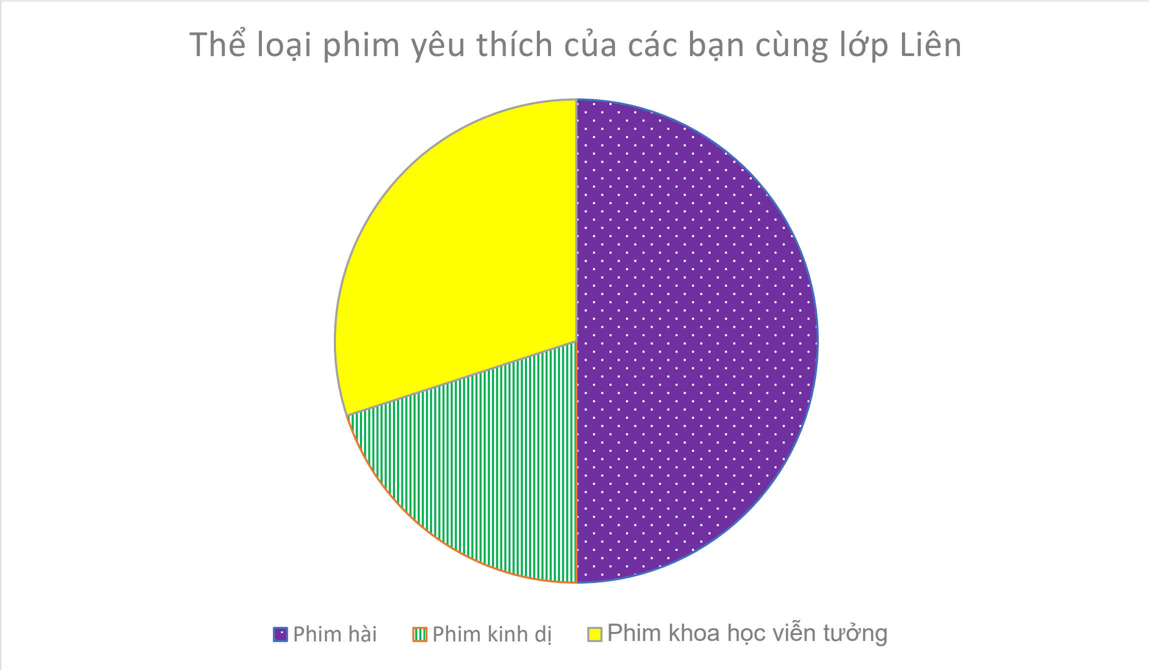
Số lần quay trúng	Màu xanh	Màu đỏ	Màu vàng	Màu tím
Tần số tương đối	$34,29\%$	$25,71\%$	$15,71\%$	$24,29\%$

b) Xác suất mũi tên chỉ vào hình quạt màu đỏ là $25,71\%$

7.

Lập bảng tần số tương đối

Thể loại phim	Hài	Kinh dị	Khoa học viễn tưởng
Tần số tương đối	50%	20%	30%



8.

a) Bảng tần số tương đối

Loại thiên tai	Hạn hán	Bệnh dịch	Lũ lụt	Sạt lở đất	Bão
Tần số tương đối	$3,23\%$	$4,84\%$	$38,17\%$	$3,23\%$	$50,54\%$

b) Biểu đồ HS tự vẽ.

9.

Chiều cao (m)	7	$7,5$	8	$8,5$	
Tần số	18	18	36	48	$\mathrm{N}=120$
Tần số tương đối	15%	15%	30%	40%	

15% của 120 là $15\%.120=18$; 40% của 120 là $40\%.120=48$

18 của 120 là $\frac{18}{120}.100\%=15\%$.

Tần số của 8 là $120-48-18-18=36$. Tần số tương đối là $\frac{36}{120}.100\%=30\%$

b) HS tự vẽ biểu đồ tần số tương đối

10.

Ý kiến của nhân viên về chất lượng cuộc sống làm việc	Rất Hài lòng	Hài lòng	Bình thường	Không hài lòng
Tần số tương đối	25%	40%	25%	15%

b) HS tự vẽ biểu đồ.

BÀI 24:
BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ

Dạng 1. Lập bảng tần số ghép nhóm, bảng tần số ghép nhóm tương đối.
1.

Bảng tần số ghép nhóm cho lượng điện tiêu thụ của hộ gia đình (đơn vị: kWh)

Khoảng lượng điện	$[100;130)$	$[130;160)$	$[160;190)$	$[190;220)$
Tần số	3	5	5	7

2.

a) Tuổi thọ từ 30 ngày tuổi đến dưới 40 ngày tuổi có 12 con ong

Tuổi thọ tử 40 ngày tuổi đến dưới 50 ngày tuổi có 23 con ong

Tuổi thọ từ 50 ngày tuổi đến dưới 60 ngày tuổi có 15 con ong

Có tất cả 50 con ong được tiến hành khảo sát nghiên cứu theo dõi.

b) Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm

Tuổi thọ (ngày)	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$
Tần số tương đối	24%	46%	30%

3.

Bảng tần số ghép nhóm.

Thời gian (X) (giờ)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Tần số	2	4	5	5	4

Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Thời gian (X) (giờ)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Tần số tương đối	10%	20%	25%	25%	20%

Chú ý: Tương tự như bảng tần số - tần số tương đối, ta có thể ghép được bảng tần số ghép nhóm - tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Thời gian (X) (giờ)	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Tần số	2	4	5	5	4
Tần số tương đối	10%	20%	25%	25%	20%

4.

a) Các giá trị thuộc nhóm $[0;2,5)$ là $1,4$; $1,7$ và tần số của nhóm này là 2.

b) Bảng tần tố ghép nhóm

Nhóm $[0;2,5)$: Giá trị: $1,4;1,7$. Tần số: 2

Nhóm $[2,5;5)$: Giá trị: $3,5;4,7;3,2$. Tần số: 3

Nhóm $[5;7,5)$: Giá trị: $6,5;6,8;5,6;6,3;7,2;7,0;7,4;6,7;7,2;6,4$. Tần số: 10

Nhóm [7,5; 10): Giá trị: $9,2;7,6;7,8;9,3;9,5;8,3;8,0;9,1;9,1;9,9;8,5;7,5;9,0;8,7;8,1$.

Tần số: 15

Điểm kiểm tra	$[0;2,5)$	$[2,5;5)$	$[5;7,5)$	$[7,5;10)$
Tần số	2	3	10	15

5.

Nhóm 1: $[5;6,5)$. Nhóm 2: $[6,5;8)$. Nhóm 3: $[8;9,5)$. Nhóm 4: $[9,5;11)$. Nhóm 5: $[11;12,5)$

Bảng tần số ghép nhóm

Thời gian khám (phút)	$[5;6,5)$	$[6,5;8)$	$[8;9,5)$	$[9,5;11)$	$[11;12,5)$
Tần số	6	6	4	1	3

b) Nhóm có tần số cao nhất: $[5;6,5)$ và $[6,5;8)$ (cùng tần số là 6)

Nhóm có tần số thấp nhất: $[9,5;11)$ (tần số là 1)

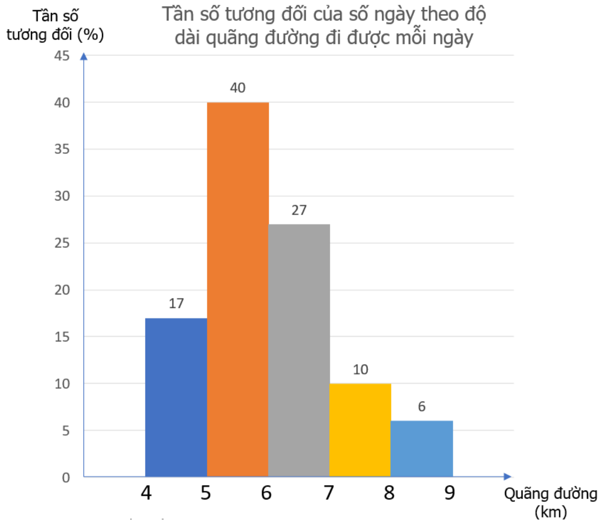
6.

Chiều cao (cm)	$[155;158)$	$[158;161)$	$[161;164)$	$[164;167)$.
Tần số	4	8	17	11
Tần số tương đối	10%	20%	42,5%	27,5%

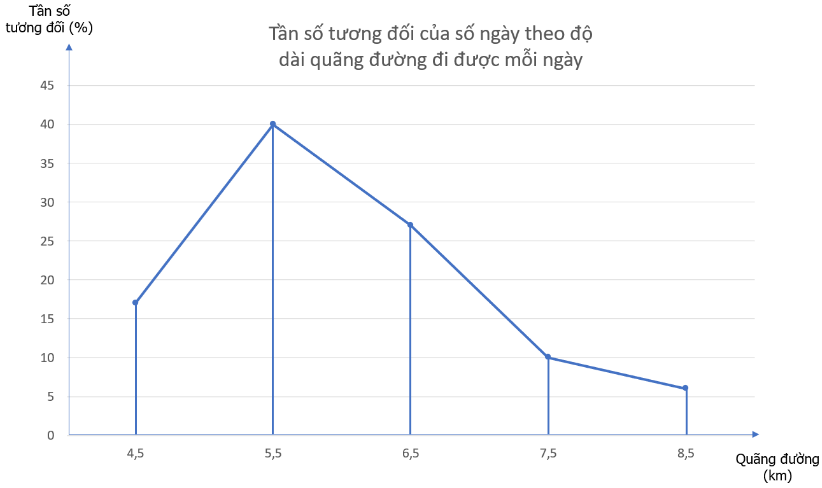
Dạng 2. Lập bảng tần số ghép nhóm, bảng tần số ghép nhóm tương đối.

7.

Quãng đường (X) (km)	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$
Tần số tương đối	17%	40%	27%	10%	6%



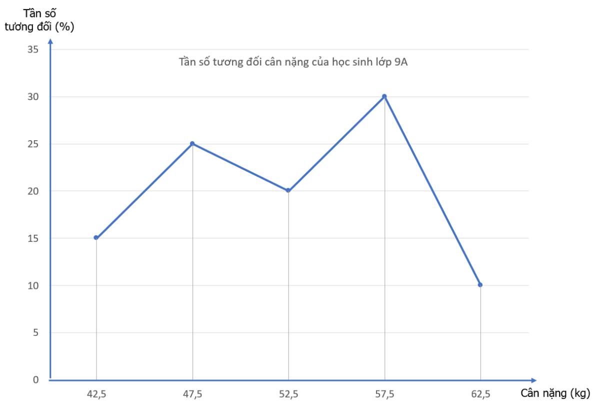
Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng



8.

Giá trị đại diện của các nhóm dữ liệu lần lượt là $42,5\ 47,5;52,5;57,5;62,5$.

Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn số liệu đã cho:

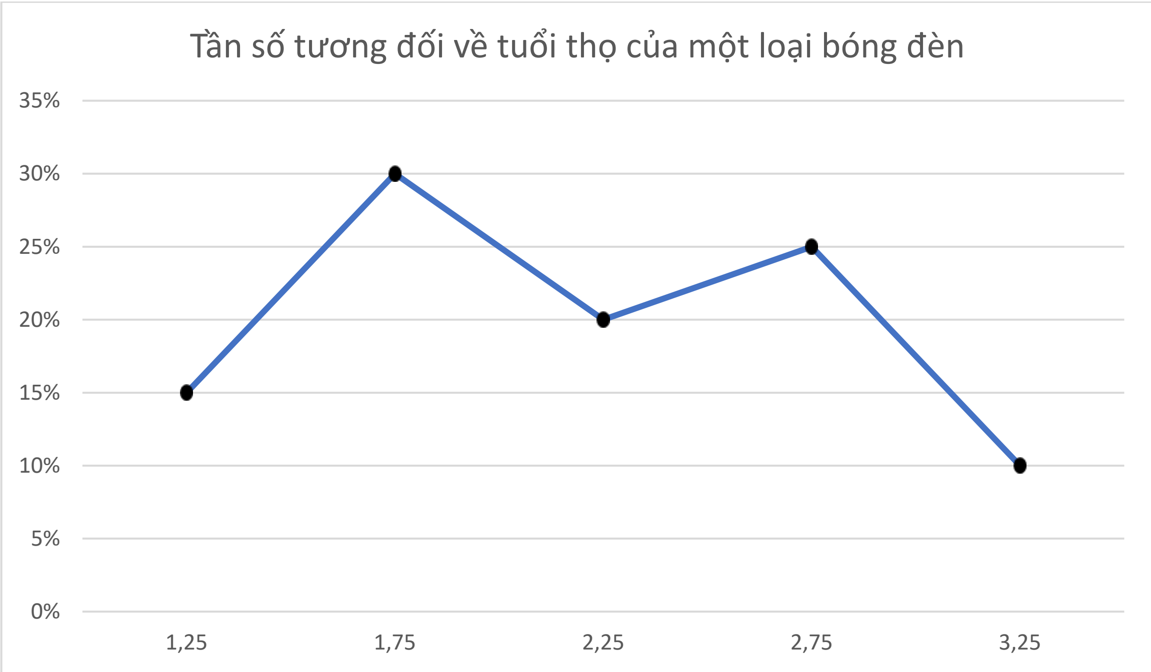


9.

a) Có 3 học sinh chạy $100m$ hết ít hơn 13 giây

b) Số học sinh tham gia khảo sát là $3+6+4+2+1=16$ (học sinh)

10.
Giá trị đại diện của các nhóm dữ liệu lần lượt là $1,25; 1,75; 2,25; 2,75; 3,25$



Tuổi thọ (năm)

11.
a) Bảng tần số ghép nhóm

Tuổi thọ ($\mathbf{X}$) (nghìn giờ)	$[1;1,25)$	$[1,25;1,5)$	$[1,5;1,75)$	$[1,75;2)$
Tần số	36	42	112	10
Tần số tương đối	18%	21%	56%	5%

b) Số bóng đèn thuộc loại I là $112+10=122$ quả bóng.

c) HS tự vẽ biểu đồ

12.
a) Có 54 đại biểu từ 25 đến 35 tuổi chiếm $33,75\%$ số người trong hội nghị.
Vậy số người có trong hội nghị là $54:33,75\%=160$ (đại biểu)
Số đại biểu từ 35 tuổi đến 45 tuổi là $160.28,75\%=46$ (đại biểu)
Số đại biểu từ 45 tuổi đến 55 tuổi là $160.26,25\%=42$ (đại biểu)
Số đại biểu từ 55 tuổi đến 65 tuổi là $160.11,25\%=18$ (đại biểu)
b) Bảng tần số ghép nhóm

Tuổi (năm)	$[25,35)$	$[35;45)$	$[45;55)$	$[55;65)$
Tần số	54	46	42	18

Tần số tương đối	$33,75\%$	$28,75\%$	$26,25\%$	$11,25\%$

c) Số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi là 54+46=100 (đại biểu) chiếm $\frac{100}{160}.100\% = 62,5\%$.

Nhận định: có trên 50% số đại biểu tham dự hội nghị dưới 45 tuổi là một nhận định đúng.

BÀI 25:
PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

BÀI TẬP

Dạng 1. Phép thử ngẫu nhiên

1.

a) Trước khi thực hiện hành động, bạn Khôi không biết chính xác sẽ lấy được viên bi màu gì. Vậy đây là một phép thử ngẫu nhiên.

b) Khi bạn Lan lấy quyển sách trên bàn thì kết quả chắc chắn xảy ra là lấy quyển truyện Tấm Cám. Đây là kết quả đã biết trước được nên trường hợp này không phải là một phép thử ngẫu nhiên.

2.

Trước khi bạn Trinh thực hiện hành động, bạn Trinh không biết chính xác sẽ lấy được phiếu in hình gì. Vì vậy đây là một phép thử ngẫu nhiên

3.

a) Trước khi thực hiện hành động lấy 1 cây bút trong hộp hình a, ta không biết chính xác sẽ lấy được chiếc bút nào. Vì vậy đây là một phép thử ngẫu nhiên.

b) Khi gieo đồng thời 2 khối gỗ hình lập phương như ở hình b, ta luôn nhận được 6 mặt xuất hiện là màu đỏ và 6 mặt xuất hiện là màu xanh. Kết quả các mặt trên luôn cho màu đỏ và màu xanh. Các kết quả xảy ra luôn biết trước được. Vì vậy đây là **không phải** là một phép thử ngẫu nhiên.

c) Khi chọn đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp chỉ có 2 thẻ xanh và đỏ, ta luôn nhận được một thẻ đỏ và một thẻ xanh và không còn kết quả nào khác. Vì vậy đây **không phải** là một phép thử ngẫu nhiên.

4.

a) Chọn 1 lá bài từ một bộ bài Tây và ghi lại màu sắc và con số của lá bài được chọn là phép thử ngẫu nhiên vì ta không biết sẽ chọn được lá bài có ghi con số nào cả.

b) Đọc 1 quyển sách từ 1 ngăn sách và ghi lại tựa đề của cuốn sách đó **không phải** là phép thử ngẫu nhiên vì người lấy có thể chủ động lấy sách theo sở thích và sự lựa chọn của người thực hiện.

c) Lấy 1 chiếc bút bi từ một hộp bút có nhiều loại bút **không phải** phép thử ngẫu nhiên nếu hộp bút có hình dạng, kích thước hoặc màu sắc khác nhau vì người chọn có thể chọn theo sở thích về màu sắc, loại bút.

Lấy 1 chiếc bút bi từ một hộp bút có nhiều loại bút **là** phép thử ngẫu nhiên nếu hộp bút chỉ có một loại bút (các bút giống nhau) vì ta không thể biết trước được cây bút nào sẽ được lấy ra.

Dạng 2. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

5.

Kí hiệu:

- 5 bài hát thuộc thể loại Pop là P1, P2, P3, P4, P5
- 3 bài hát thuộc thể loại Rock là R1, R2, R3.
- 2 bài hát thuộc thể loại Jazz là J1, J2.

Trên đĩa có tổng cộng 10 bài hát nên khi bấm ngẫu nhiên một bài hát thì có 10 kết quả có thể xảy ra. Không gian mẫu của phép thử này gồm những phần tử sau:

$\Omega = \{P1,\ P2,\ P3,\ P4,\ P5, R1, R2, R3, J1, J2\}$

6.

a) Lấy bất kì một quả bóng từ hộp là phép thử ngẫu nhiên.

Không gian mẫu: $\Omega =$ {Xanh, Đỏ, Vàng}

b) Lấy đồng thời 3 quả bóng từ hộp không phải là phép thử ngẫu nhiên vì kết quả lấy ra luôn là 3 quả bóng xanh, đỏ, vàng.

c) Lấy lần lượt 3 quả bóng từ hộp một cách ngẫu nhiên là một phép thử ngẫu nhiên vì ta không biết trước được kết quả.

Không gian mẫu: $\Omega =$ {(xanh, đỏ, vàng); (xanh, vàng, đỏ); (đỏ, vàng, xanh); (đỏ, xanh, vàng); (vàng, xanh, đỏ); (vàng, đỏ, xanh)}

7.

a) Kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc là các số chấm từ 1 đến 6.

b) Không gian mẫu: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

8.

a) Các kết quả có thể có là: số 1, số 2, số 3, số 4, số 5, số 6, số 7, số 8, số 9, số 10

b) $\Omega =$ {số 1, số 2, số 3, số 4, số 5, số 6, số 7, số 8, số 9, số 10}.

9.

a) $\Omega =$ {(xanh; đỏ), (đỏ; xanh)}.

b) $\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$.

10.

a) Phép thử là Hoàng lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ một túi đựng 2 quả cầu gồm một quả màu đen và một quả màu trắng, Hải rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp đựng 3 tấm thẻ A, B, C.

Kết quả của phép thử là (a, b) trong đó a và b tương ứng là màu của quả bóng và chữ ghi trên tấm thẻ.

Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng:

Tấm thẻ / Túi cầu	A	B	C
Màu đen (Đ)	(Đ;A)	(Đ; B)	(Đ; C)
Màu trắng (T)	(T; A)	(T; B)	(T; C)

Mỗi ô là một kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 6 ô của bảng trên.
$\Omega = \{(Đ, A), (Đ, B), (Đ, C), (T, A), (T, B), (T, C)\}$.

b) Các kết quả thuận lợi của biến cố E là: $(Đ, A)$, $(Đ, B)$, $(Đ, C)$.

Các kết quả thuận lợi của biến cố F là: $(T, B), (T, C)$.

11.

a) Phép thử: Xếp ngẫu nhiên ba bạn Mai, Việt, Lan trên một chiếc ghế dài.

Kết quả của phép thử: Có 3 vị trí trên ghế dài, mỗi vị trí có thể được xếp bởi 1 trong 3 bạn.

b) Không gian mẫu:

$\Omega = \{$(Mai, Việt, Lan);(Mai, Lan, Việt);(Việt, Mai, Lan);(Việt, Lan, Mai); (Lan, Mai, Việt);(Lan, Việt, Mai)$\}$

Vậy không gian mẫu có 6 phần tử.

12.

Gọi số bi xanh là x $(0 < x < 13, x \in \mathbb{N})$, số bi đỏ là $\frac{x}{3}$ và số bi vàng là $\frac{x}{3} - 2$.

Ta có $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} - 2 = 13$ hay $\frac{5x}{3} = 15$ suy ra $x = 9$. Vậy số bi xanh là 9, số bi đỏ là 3 và số bi vàng là 1.

Không gian mẫu là:

$\Omega = \{$ bi vàng, bi đỏ, bi đỏ, bi đỏ; bi xanh, bi xanh, bi xanh, bi xanh, bi xanh, bi xanh, bi xanh, bi xanh, bi xanh$\}$. Không gian mẫu có 13 phần tử.

BÀI 26:
XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN ĐẾN PHÉP THỬ

BÀI TẬP

Dạng 1. Kết quả đồng khả năng

1.

a) Xác suất xuất hiện của mỗi số từ 1 đến 6 là bằng nhau trên một con xúc xắc cân đối đồng chất. Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

b) Vì trong hộp, có nhiều lá bài màu đen hơn so với lá bài màu đỏ. Do đó, xác suất rút một lá bài màu đen không bằng xác suất rút một lá bài màu đó. Các kết quả của phép thử không đồng khả năng.

c) Vì các quả banh tennis có cùng kích thước và khối lượng nên có cùng khả năng được chọn. Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

2.

a) Do các tấm thẻ là cùng loại nên có cùng khả năng được chọn. Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

b) Do mỗi học sinh có những điều kiện trạng thái khác nhau nên các kết quả của phép thử là không đồng khả năng.

c) Do mỗi viên bi đều có khối lượng và kích thước nên có cùng khả năng được chọn. Các kết quả của phép thử là đồng khả năng.

Dạng 2. Không gian mẫu và xác suất của biến cố.

3.

Kí hiệu ba bạn Bình, Châu, Dương lần lượt là B, C, D. Ta liệt kê các kết quả có thể xảy ra:

- Bình ngồi ngoài cùng bên trái: có 2 cách xếp là BCD và BDC.

- Bình ngồi giữa: có 2 cách xếp là CBD và DBC.

- Bình ngồi ngoài cùng bên phải: có 2 cách xếp là CDB và DCB.

Vậy không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \left\{ \text{BCD;BDC;CBD;DBC;CDB;DCB} \right\}$

Tập Ω có 6 phần tử.

Vì việc xếp chỗ ngồi là ngẫu nhiên nên các kết quả có thể coi là đồng khả năng.

- Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố E: BCD, BDC, CBD và DBC. Vậy $P\left(E\right) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

- Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố F: CBD và DBC. Vậy $P\left(F\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

4.

a) Các kết quả có thể xảy ra là lấy được viên bi có ghi số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

b) Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}.

c) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố "Số xuất hiện trên viên bi được lấy ra chia 7 dư 1" là: 1, 8, 15

Vậy $P\left(T\right)=\frac{3}{20}$.

5.

a) Không gian mẫu $\Omega=${(xanh, vàng); (xanh, đỏ); (đỏ, vàng); (đỏ, đỏ)}

Có 4 kết quả sảy ra cho phép thử

b) Có 1 kết quả thoả mãn điều kiện hai quả bóng cùng màu là hai quả bóng cùng màu đỏ. Xác suất của biến cố M là $P(M)=\frac{1}{4}=0,25$

Có 3 kết quả lấy ra hai quả bóng khác màu là cặp (xanh, vàng); (xanh, đỏ); (đỏ, vàng)

Xác suất của biến cố N là $P(N)=\frac{3}{4}=0,75$

Biến cố Q. có ít nhất 1 quả bóng màu đỏ trong 2 quả bóng lấy ra có 3 trường hợp là (xanh, đỏ); (đỏ, vàng); (đỏ, đỏ)

Xác suất của biến cố Q là $P(Q)=\frac{3}{4}=0,75$

6.

Không gian mẫu: $\Omega=${(2;3); (2;5); (2;8); (3;2); (3; 5); (3;8); (5;2); (5; 3); (5; 8); (8;2); (8;3); (8; 5)}. Có 12 phần tử.

Tích của các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ có 2 trường hợp là (3; 5); (5; 3)

Vậy $P(M)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Tổng các số ghi trên 2 tấm thẻ là số lẻ có 8 trường hợp. Vậy $P(N)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

Bạn Phi lấy thẻ trước và số thẻ của bạn Phi lớn hơn số thẻ của bạn Thanh thì có 6 trường hợp.

Vậy $P(Q)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=0,5$

7.

Giả sử 3 bông hoa màu đỏ kí hiệu là D1; D2; D3 và bông hoa màu vàng ký hiệu là V

Bạn Vi chọn ngẫu nhiên 2 bông hoa từ bó hoa đó. Các cách chọn có thể là:

(D1; D2); (D1; D3); (D1; V); (D2; D1); (D2; D3); (D2; V); (D3; D1); (D3; D2); (D3; V); (V; D1); (V; D2); (V; D3). Có 12 cách chọn tất cả

b) Xác suất của mỗi biến cố R là $P(R)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=0,5$

Xác suất của mỗi biến cố T là $P(R)=\frac{12}{12}=1$

Dạng 3. Tìm giá trị ban đầu khi biết xác suất của biến cố

8.

Giả sử hộp chứa x quả bóng màu trắng. Tổng số quả bóng trong hộp sẽ là $\left(9+x\right)$.

Xác suất để lấy được một quả bóng màu trắng là:

$P(T)=\frac{x}{x+9}$ Theo đề bài, xác suất này là $\frac{2}{5}$. Do đó, ta có phương trình:

$\frac{2}{5}=\frac{x}{x+9}$. Giải phương trình này: $x=6$

Vậy trong hộp có 6 quả bóng màu trắng.

9.

Giả sử túi chứa x viên bi màu đỏ. Tổng số bi là: $x+5$ viên

Xác suất để lấy được bi màu vàng là $P(V)=\frac{5}{x+5}$. Theo giả thiết ta có $0,5=\frac{5}{x+5}$

Nên $x=5$. Vậy trong hộp có tất cả 10 viên bi.

10.

Gọi x là số bi đỏ, số bi xanh là $20-x$. Khi thực hiện phép thử lấy ngẫu nhiên một viên bi. Xác suất của biến cố A: "Lấy được bi đỏ" là $P\left(A\right)=0{,}6$ ta có: $P(A)=\dfrac{x}{20}=0{,}6$ suy ra $x=12$ từ đó số bi đỏ là 12 viên và bi xanh là 8 viên.

11.

Gọi số tấm thẻ ghi số có hai chữ số là x. Số tấm thẻ ghi các số có 1 chữ số là 9 thẻ (từ số 1 đến số 9)

Trường hợp 1: n là số có hai chữ số ($n<100; n\in\mathbb{N}$) khi đó $x=n-9$

Ta có $P=0{,}2=\dfrac{n-9}{n}$ nên $n=11{,}25$ (loại)

Trường hợp 2: n là số có nhiều hơn 2 chữ số ($n>100; n\in\mathbb{N}$). Khi đó số thẻ có 2 chữ số từ 10 đến 99 là $\left(99-10\right)+1=90$ thẻ

Và ta có $P=0{,}2=\dfrac{90}{n}$ suy ra $n=450$ (thoả mãn)

Vậy bạn Tú có 450 thẻ tất cả.

BÀI 27:
GÓC NỘI TIẾP

BÀI TẬP

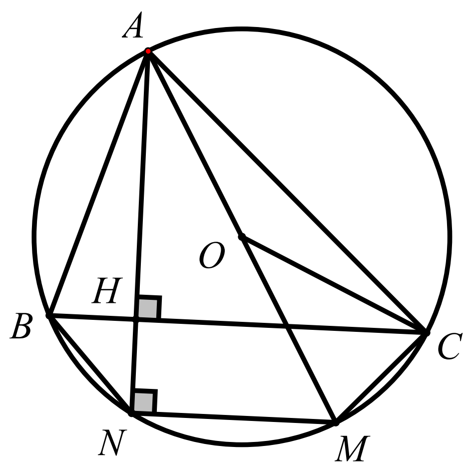
1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AM.

a) Tính $\widehat{ACM}$.

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$.

c) Gọi N là giao điểm AH với (O). Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ACM} = 90^0$ (góc nội tiếp)

b) Ta có $\Delta ABH \sim \Delta AMC\,(g.g)$ suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC},\ \widehat{OCA} = \widehat{OAC}$

Vậy $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$

c) $\widehat{ANM} = 90^0$ nên tứ giác $MNBC$ là hình thang

hay $BC\,//\,MN$

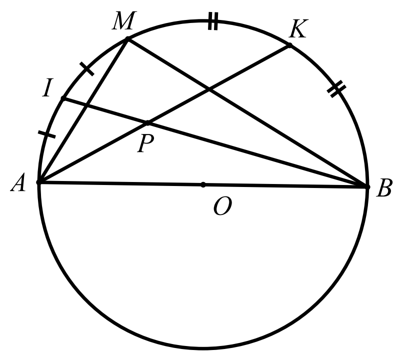
Có $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$ nên sđ$\overset{\frown}{BN}$ = sđ$\overset{\frown}{CM}$ hay sđ$\overset{\frown}{BM}$ = sđ$\overset{\frown}{CN}$ $\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BCM}$ nên $BCMN$ là hình thang cân.

2. Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB.

a) Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm của AK và BI. Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAS.

Lời giải

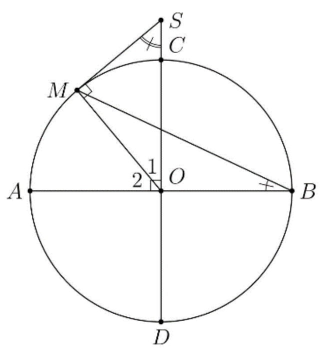


a) Chú ý: $M, A, B \in (O)$ và $\widehat{AMB} = 90^0$ hay AB là đường kính của (O) tức là A, B, O thẳng hàng.

b) Chứng minh AK và BI lần lượt là phân giác trong góc A, B của tam giác MAB.

3. Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung nhỏ AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S. Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2 \cdot \widehat{MBA}$.

Lời giải



Vì SM là tiếp tuyến của (O), nên ta có $\widehat{OMS} = 90^\circ$, do đó $\widehat{O_1} + \widehat{OSM} = 90^\circ$

Mặt khác $\widehat{O_2} + \widehat{O_1} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra $\widehat{OSM} = \widehat{O_2}$

Lại có $\hat{O}_2 = \text{sđ}\overset{\frown}{AM}$ và $\widehat{MBA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$, nên ta có $\widehat{O_2} = 2\widehat{MBA}$

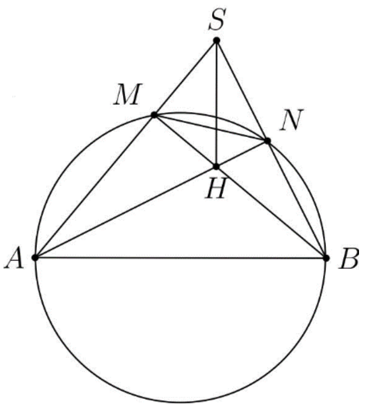
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{MSD} = 2.\widehat{MBA}$

4. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm nằm ngoài đường tròn. Các đường thẳng SA và SB lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai M, N. Gọi H là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng

a) $SH \perp AB$.

b) $HM \cdot HB = HN \cdot HA$.

Lời giải



a) Ta có M, N nằm trên đường tròn đường kính AB, nên ta có

$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $BM \perp AS, AN \perp SB$ nên H là trực tâm tam giác SAB. Suy ra $SH \perp AB$.

b) Xét hai tam giác HMA và HNB có $\widehat{MHA} = \widehat{NHB}$ (đối đỉnh) và

$\widehat{MAH} = \widehat{NBH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MN}$). Suy ra $\Delta HMA \backsim \Delta HNB$, do đó

$\frac{HM}{HN} = \frac{HA}{HB}$ hay $HM.HB = HN.HA$.

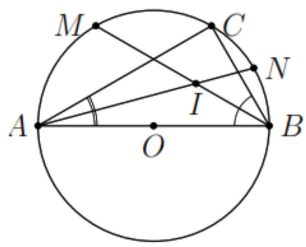
5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60°.

a) So sánh các góc của tam giác ABC.

b) Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC. Hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh tia CI tia phân giác của góc ACB.

Lời giải

a) $\widehat{ABC} = 30^\circ$ (góc nội tiếp bằng một nửa số đo cung bị chắn), $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CAB} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

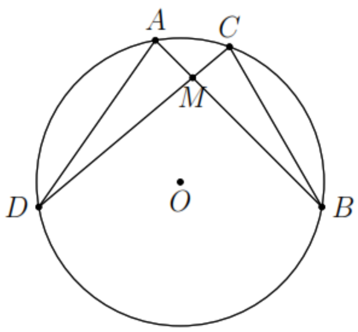


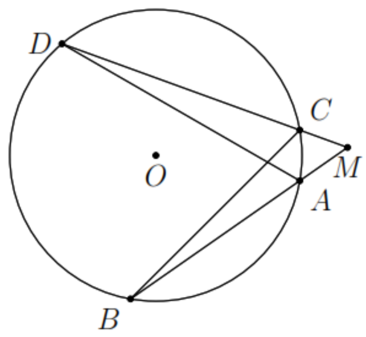
$\Rightarrow \widehat{ACB} > \widehat{CAB} > \widehat{ABC}$.

b) Do M, N là các điểm chính giữa của các cung $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ suy ra AM, BM lần lượt là phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ABC}$. Mà $AN \cap BM = I \Rightarrow CI$ là phân giác $\widehat{ACB}$.

6. Cho (O) và điểm M cố định. Qua M kẻ hai đường thẳng, đường thẳng thứ nhất cắt đường tròn (O) tại A và B, đường thẳng thứ hai cắt đường tròn tại C và D. Chứng minh $MA.MB = MC.MD$.

Lời giải





Trường hợp 1: M nằm trong đường tròn.

$$\Delta AMC\# \Delta DMB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD \ .$$

Trường hợp 2: M nằm ngoài đường tròn.

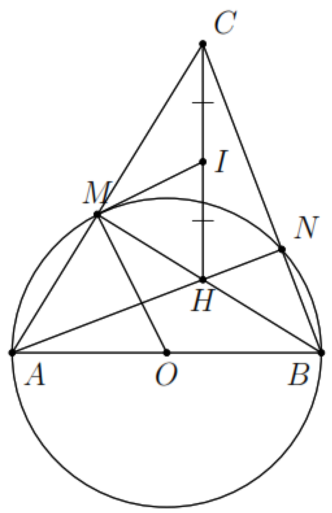
$$\Delta BMC\# \Delta DMA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

7. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. Đường thẳng CA cắt nửa đường tròn ở M, CB cắt nửa đường tròn ở N. Gọi H là giao điểm của AN và BM.

a) Chứng minh CH vuông góc với AB.

b) Gọi I là trung điểm của CH. Chứng minh MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

Lời giải



a) Dễ dàng chứng minh được AN, BM là đường cao của tam giác ABC (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông). Mà AN cắt BM tại H nên H là trực tâm của tam giác ABC hay $CH \perp AB$.

$\widehat{MCI} = \widehat{CMI}$ (tam giác MCI cân tại I)

$\widehat{MAO} = \widehat{OMA}$ (tam giác MAO cân tại O)

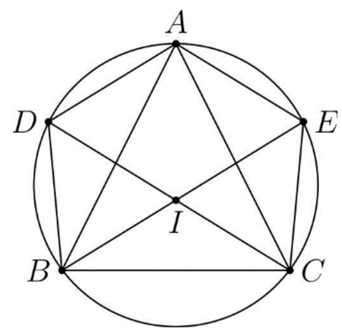
Mà $\widehat{MCI} + \widehat{MAO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CMI} + \widehat{OMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OMI} = 90^\circ$. Vậy MI là tiếp tuyến của (O).

8. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong góc B và C cắt (O) tại E và D.

1. Chứng minh $\Delta ACE = \Delta ABD$.

2. Gọi I là giao điểm của CD và BE. Tứ giác $ADIE$ là hình gì? Tại sao?

Lời giải



a) Ta có tam giác ABC cân tại A nên $\overset\frown{AB} = \overset\frown{AC}$. Lại có

CD là phân giác của góc $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$, hay $\overset\frown{AD} = \overset\frown{BD}$.

Tương tự $\overset\frown{AD} = \overset\frown{BD}$, do đó $\overset\frown{AD} = \overset\frown{BD} = \overset\frown{AD} = \overset\frown{BD}$.

Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = \widehat{EAC} = \widehat{ECA}$.

Từ đó suy ra $\Delta AEC = \Delta ADB$ (g-c-g).

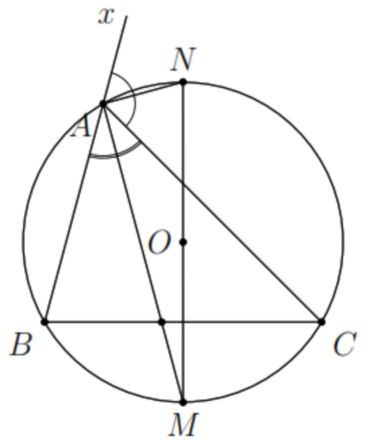
b) Ta có $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset\frown{AD}$, $\widehat{CAE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset\frown{CE}$ Mà $\overset\frown{AD} = \overset\frown{CE}$ nên ta có $\widehat{ACD} = \widehat{CAE}$, suy ra $CD / / AE$, hay $DI / / AE$. Chứng minh tương tự $EI / / AD$, kết hợp với $AD = AE$ ta có $ADIE$ là hình thoi.

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt đường tròn tại M. Tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường tròn tại N. Chứng minh

a) Tam giác MBC cân.

b) Ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Lời giải



a) AM là phân giác $\widehat{BAC}$ nên $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM} \Rightarrow BM = CM$.

$\Rightarrow$ tam giác BMC cân tại M.

b) AM, AN lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài góc A. Do đó $\widehat{AMN} = 90^\circ \Rightarrow MN$ là đường kính, suy ra M, O, N thẳng hàng.

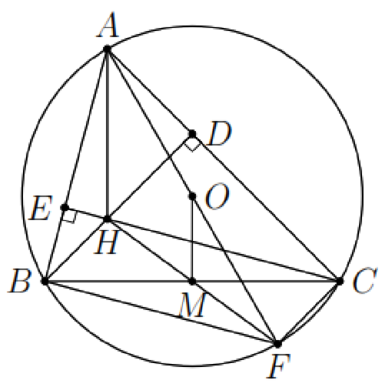
10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh ba điểm H, M, E thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \dfrac{1}{2}AH$.

lời giải



a) Ta có $\widehat{FCA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow FC \perp AC$, theo giả thiết ta cũng có $BD \perp AC$. Suy ra $BD \parallel FC$. Chứng minh tương tự ta có $CE \parallel FB$. Do đó tứ giác $BFCH$ là hình bình hành.

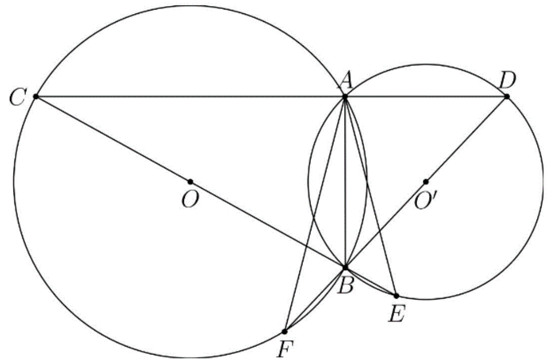
b) Do tứ giác $BFCH$ là hình bình hành nên $BM = CM$. Suy ra M là trung điểm HF.

c) OM là đường trung bình của tam giác AHF. Do đó $OM = \dfrac{1}{2}AH$.

11. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $\left(O';R'\right)$ cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB $\left(C \in (O), D \in \left(O'\right)\right)$. Tia CB cắt $\left(O'\right)$ tại E, tia BD cắt (O) tại F.

Chứng minh rằng $CD^2 = CB.CE + BD.CF$.

Lời giải



Xét tam giác CDB và CEA có góc C chung. Trong đường tròn $\left(O'\right)$, ta có

$\widehat{CDB} = \widehat{ADB} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{AB}$, $\widehat{CEA} = \widehat{BEA} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{AB}$

Suy ra $\widehat{CDB} = \widehat{CEA}$, do đó $\Delta CDB \backsim \Delta CEA$. Suy ra $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CB}{CA} \Leftrightarrow CD \cdot CA = CB \cdot CE$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $DA \cdot DC = DB \cdot DF$. Do đó

$CB \cdot CE + DB \cdot DF = CD \cdot CA + DA \cdot DC = DC(CA + AD) = CD^2$

12. Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

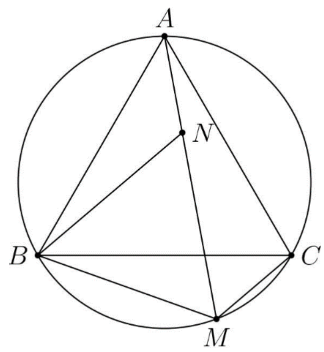
Lời giải

Ta có $\widehat{BMC} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{BAC} = 120^\circ$, đó $BM, CN < BC < AM$

Trên đoạn AM lấy điểm N sao cho $BM = MN$.

Do $\widehat{BMN} = \widehat{BMA} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, nên ΔBMN đều, hay

$BM = BN = MN$



Xét hai tam giác ΔABN và ΔCBM có $AB = BC, BN = BM$ và

$\widehat{ABN} = \widehat{ABM} - \widehat{NBM} = \widehat{ABM} - 60^\circ = \widehat{ABM} - \widehat{ABC} = \widehat{CBM}$

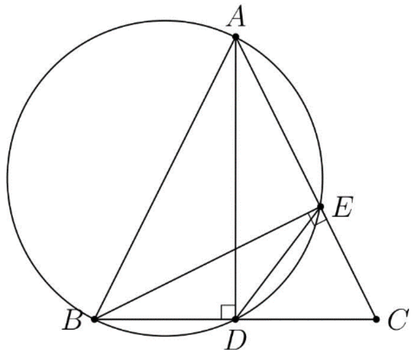
Do đó $\Delta ABN = \Delta CBM$ nên ta có $CM = AN.$ Từ đó ta có được $BM + CM = MN + AN = AM.$

13. Cho tam giác ABC cân tại $A, A < 90^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại $E.$ Chứng minh rằng:

a) ΔDBE cân.

b) $\widehat{CBE} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Lời giải



a) Ta có D, E nằm trên đường tròn đường kính AB, nên $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$, hay $AD \perp BC$ và $BE \perp AC$.

Mà ΔABC cân tại A nên D là trung điểm BC. Trong tam giác vuông BEC ta có $DE = DB = DC$, hay ΔBDE cân tại D.

b) Ta có AD là phân giác của góc A, nên

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{EAB}$$

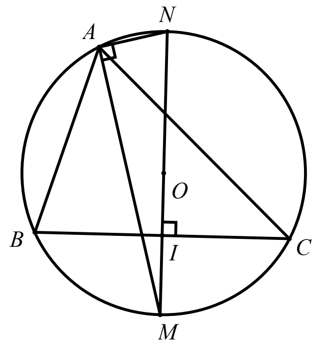
Mặt khác $\widehat{CBE} = \widehat{DBE} = \widehat{EAD} = \frac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{DE}$

Từ đó, suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

14. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính MN vuông góc với BC (M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng AM, AN là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của MN với BC, ta chứng minh được I là trung điểm cạnh BC nên ta có $\widehat{BOI} = \widehat{COI}$ hay $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$. Mà $\widehat{BAM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{MB}$



$\widehat{CAM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{MC}$ nên ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$, hay AM là phân giác trong của $\widehat{BAC}$. Lại có MN là đường kính nên $AM \perp AN$, nên AN là phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$.

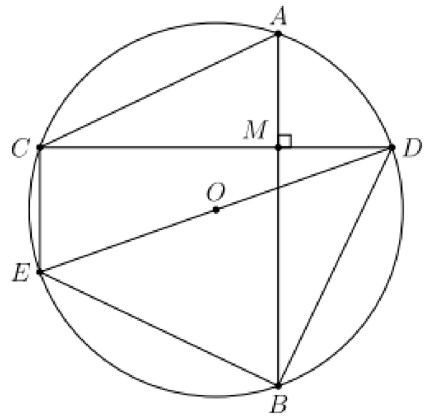
15. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE. Chứng minh rằng

a) $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

b) Tứ giác $ABEC$ là hình thang cân

c) Tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O)

Lời giải



a) Xét hai tam giác MAC và MDB có $\widehat{AMB} = \widehat{BMD} = 90^o$;

$\widehat{ACM} = \widehat{DBM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$. Do đó $\Delta MAC \backsim \Delta MDB$ suy ra

$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$ hay $MA.MB = MC.MD$

b) Vì DE là đường kính nên ta có $CE \perp CD$. Mà $AB \perp CD$

nên $AB // CE$, suy ra $ABEC$ là hình thang.

Ta có $\widehat{ABD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (cùng chắn cung BC) mà $\widehat{CDB} = \widehat{EBA}$ (cùng phụ với $\widehat{ABD}$)

c) Ta có $ABEC$ là hình thang cân nên $AC = BE$ và ΔDBE vuông tại B, nên ta có

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = AC^2 + BD^2 = BE^2 + BD^2 = ED^2 = 4R^2$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

16. Cho tam giác ABC nhọn với các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng AA' là phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$

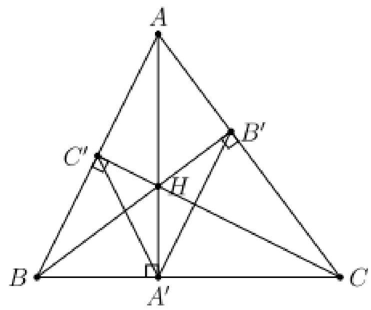
Lời giải

Gọi H là trực tâm tam giác ABC

Ta có $\widehat{BC'H} = \widehat{BA'H} = 90°$, gọi O là trung điểm của BH

khi đó $OB = OH = OC' = OA'$ hay bốn điểm $B, A'; H, C'$;

cùng thuộc một đường tròn



Do đó $\widehat{HA'C'} = \widehat{HBC'} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{HC'}$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\widehat{HA'B'} = \widehat{HCB'}$

Mà $\widehat{HBC'} = \widehat{HCB'}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$), nên ta có $\widehat{C'A'H} = \widehat{B'A'H}$

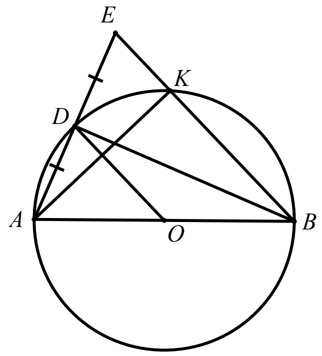
Từ đó, ta có AA' là phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$

17. Cho (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh $OD \perp AK$.

Lời giải



a) Chứng minh được ΔBAE cân tại B .

b) Chứng minh được $DO\,//\,BE$ (tính chất đường trung bình)

Mà $AK \perp BE$ $\left(\widehat{AKB} = 90^0\right) \Rightarrow AK \perp DO$

BÀI 28:
ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

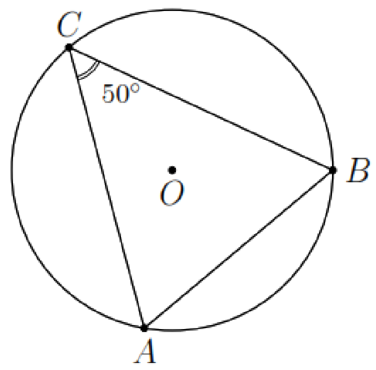
LƯU Ý: Ở phần bài tập này em **Toán Hoạ 0942014265** có chèn bài tập thêm về tứ giác nội tiếp ở nội dung sau. Để cung cấp đủ dạng toán và phong phú bài tập về đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác. Khi thầy cô sử dụng có thể dạy các bài toán này sau khi học sinh học xong dạng toán về ***Tứ giác nội tiếp***.

BÀI TẬP

Dạng 1. So sánh các cung tạo bởi tam giác nội tiếp đường tròn.

1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Cho biết $\widehat{BAC} = 50^\circ$. So sánh các cung nhỏ AB, AC và BC.

Lời giải



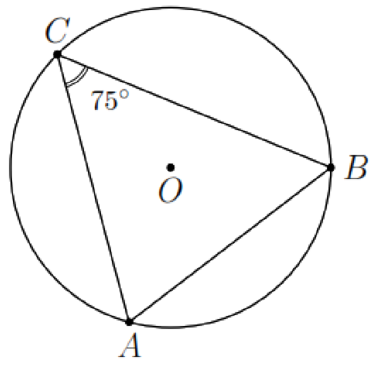
Vì ΔABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 50^\circ$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \dfrac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$.

Ta thấy $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} > \widehat{BAC}$ nên $\text{sd}\overset{\frown}{BC} = \text{sd}\overset{\frown}{AC} > \text{sd}\overset{\frown}{AB}$.

Vậy $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} > \overset{\frown}{AB}$.

2. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Cho biết $\widehat{BAC} = 75^\circ$. So sánh các cung nhỏ AB, AC và BC.

Lời giải



Vì ΔABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 75^\circ$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \dfrac{180^\circ - 75^\circ}{2} = 52,5^\circ$

.

Ta thấy $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} < \widehat{BAC}$ nên sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ < sđ$\overset{\frown}{AB}$.

Vậy $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} < \overset{\frown}{AB}$.

Dạng 2. Tính bán kính, diện tích hình tròn, hình quạt tròn tạo bởi tam giác nội tiếp đường tròn.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm nội tiếp đường tròn (O). Tính diện tích hình tròn (O).

Lời giải

Áp dụng định lý Phytagore cho ΔABC vuông tại A, ta có

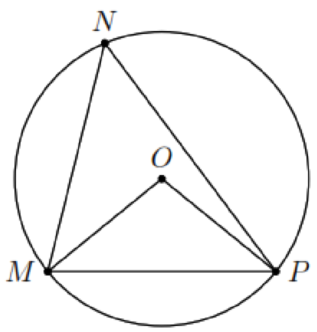
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10(\text{cm})$.

Do ΔABC nội tiếp đường tròn (O) nên đường tròn (O) có bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = 5$ (cm).

Vậy diện tích hình tròn cần tính là $S = \pi \cdot R^2 = 25\pi$ (cm^2).

4. Cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $R = 3$ (cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OM, OP và cung nhỏ MP khi $\widehat{MNP} = 45^\circ$.

Lời giải



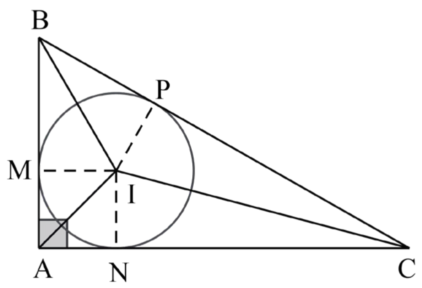
Theo giả thiết $\widehat{MOP} = 2\widehat{MNP} = 90^\circ$.

Vậy diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OM, OP và cung nhỏ MP là

$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 90}{360} = \frac{9\pi}{4}(\text{cm})^2$.

5. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 6cm$ và $AC = 8cm$ ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$. Tính r

Lời giải



Đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự M, N, P

Ta có: $S_{AIB} = \frac{1}{2}IM.AB = \frac{1}{2}r.AB(1)$; $S_{AIC} = \frac{1}{2}IN.AC = \frac{1}{2}r.AC(2)$; $S_{BIC} = \frac{1}{2}r.BC(3)$

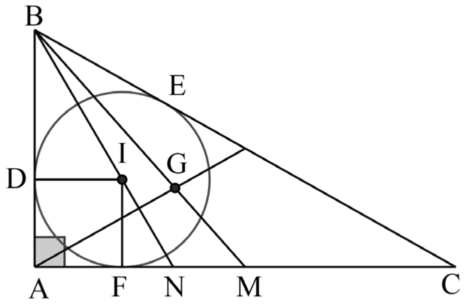
Cộng $(1)(2)(3)$ vế theo vế, ta được: $\frac{S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}r.(AB + AC + BC)$

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{6.8}{2} = 24(cm^2)$, $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10(cm)$

Nên ta có: $24 = \frac{1}{2}r(6 + 8 + 10) \Rightarrow r = 2(cm)$.

6. Cho ΔABC vuông tại A, có $AB = 9cm, AC = 12cm$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG

Lời giải



Gọi D, E, F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB

ΔABC vuông tại A, theo định lý Phytagore ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15(cm)$

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AD = AF; BD = BE; CE = CF$

Do đó $2AD + 2BE + 2CE = AB + BC + CA = 9 + 12 + 15 = 36$

$\Leftrightarrow 2AD + 2BC = 36 \Leftrightarrow AD = 3(cm) \Rightarrow BD = 6(cm); DI = 3(cm)$

Gọi N là giao điểm của BI và AC, ta có: $\dfrac{BI}{BN} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{BG}{BM} \Rightarrow \begin{cases} IG / /NM \\ IG = \dfrac{2}{3}NM \end{cases}$

Ta có $IDAF$ là hình vuông, có: $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DI}{AN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AN = 4,5(cm)$

Mà M là trung điểm của AC nên: $NM = AM - AN = 6 - 4,5 = 1,5(cm) \Rightarrow IG = 1(cm)$

Dạng 3. Chứng minh một điểm là tâm đường tròn nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp tam giác.

7. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Lấy $M \in (O)$ với $AM < BM$. Trên cạnh MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Gọi OD là bán kính vuông góc với AB (M và D ở hai bên đường thẳng $\overrightarrow{AB}$)

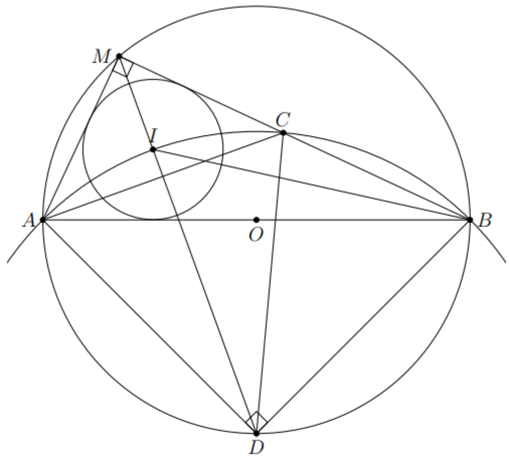
a) Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABD$.

b) Chứng tỏ MD là phân giác $\widehat{AMB}$ và $MD \perp AC$.

c) Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d) Đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt MD tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB.

Lời giải



a) Vì M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Tương tự ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$, và $OD \perp AB$ nên D nằm chính giữa cung AB, suy ra $DA = DB$. Theo dịnh lý Pythagore,

$AB^2 = DA^2 + DB^2 \Leftrightarrow (2R)^2 = 2DA^2 \Leftrightarrow DA = DB = R\sqrt{2}$.

b) Vì $OD \perp AB$ nên D nằm chính giữa cung AB, hay sd $\overset{\frown}{DA} = \text{sd}\,\overset{\frown}{DB}$, suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{DMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau). Vậy MD là phân giác $\widehat{AMB}$. Mặt khác $MA = MC$ nên ΔMAC cân tại M nên $MD \perp AC$ (trong tam giác cân đường phân giác còn là đường cao).

c) Theo câu b), ta có MD là đường trung trực AC nên $DA = DC = DB$, khi đó D là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

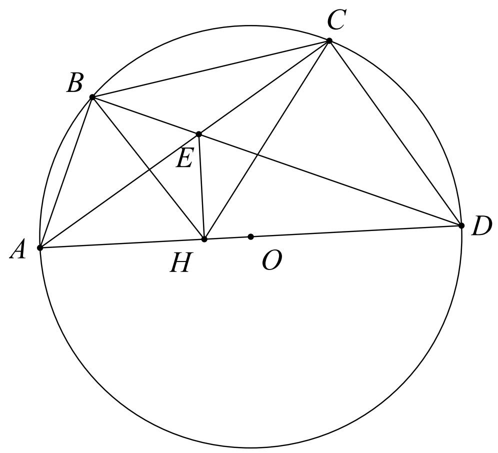
d) Vì D là tâm của đường tròn (ABC) và $MD \perp AC$ nên $\text{sd}\,\overset{\frown}{IA} = \text{sd}\,\overset{\frown}{IC}$, suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau). Khi đó, BI c là tia phân giác góc ABI. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

8. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C cùng trên một nửa đường tròn đường kính AD tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.

b) E là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCH .

Lời giải



a) Tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.

Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Lại có: $\widehat{AHE} = \widehat{DHE} = 90^0$ (H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD).

HS chỉ ra:

* Tứ giác $ABEH$ nội tiếp đường tròn đường kính AE

* Tứ giác $DCEH$ nội tiếp đường tròn đường kính DE

b) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCH .

Ta có: $\widehat{ECH} = \widehat{EDH}$ (vì $DCEH$ nội tiếp).

$\widehat{ECH} = \widehat{EDH}$ (vì cùng nội tiếp (O) và chắn $\overset{\frown}{AB}$).

$\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{BCE}$

$\Rightarrow CE$ là đường phân giác của ΔBCH .

Chứng minh tương tự ta có: BE là đường phân giác của ΔBCH .

Mà E là giao điểm của BE và CE nên E là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCH .

Dạng 4. Các bài tập liên quan đến đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác

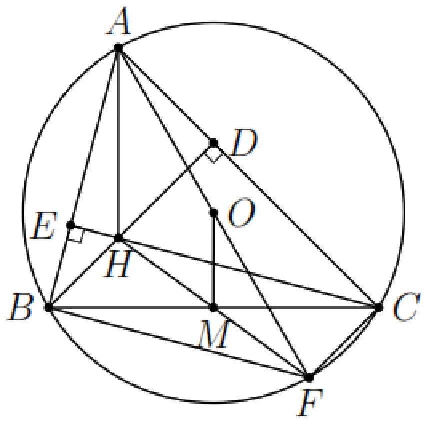
9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF .

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $OM = \dfrac{1}{2} AH$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{FCA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow FC \perp AC$, theo giả thiết ta cũng có $BD \perp AC$. Suy ra $BD//FC$. Chứng minh tương tự ta có $CE//FB$. Do đó tứ giác $BFCH$ là hình bình hành.

b) Do tứ giác $BFCH$ là hình bình hành nên $BM = CM$. Suy ra M là trung điểm HF.

c) OM là đường trung bình của tam giác AHF. Do đó $OM = \frac{1}{2}AH$.

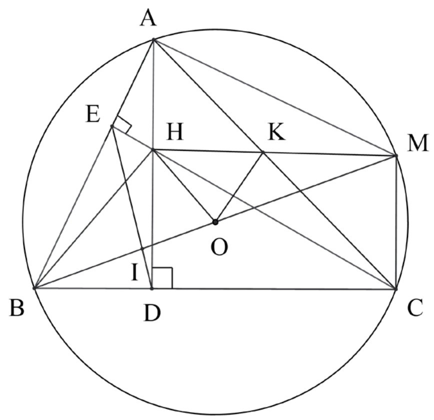
10. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn; AD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là điểm đối xứng với B qua O, I là giao điểm của BM và DE, K là giao điểm của AC và HM.

a) Chứng minh các tứ giác $AEDC$ và $DIMC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $OK \perp AC$.

c) Cho $\widehat{AOK} = 60^0$. Chứng minh ΔHBO cân.

Lời giải



a) Chứng minh các tứ giác $AEDC$ và $DIMC$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^0$ (AD và CE là hai đường cao của ΔABC).

Tứ giác $AEDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC.

Vì tứ giác $AEDC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDI}$ (cùng bù với $\widehat{EDC}$).

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$). Suy ra $\widehat{BDI} = \widehat{BMC}$ do đó tứ giác $DIMC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $OK \perp AC$.

Từ giả thiết BM là đường kính, ta có $MA \perp AB$, mặt khác $CH \perp AB$ $\Rightarrow MA//CH$ (1).

Do $CM \perp BC$, $AD \perp BC \Rightarrow AH//CM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AHCM$ là hình bình hành. Suy ra K là trung điểm của AC suy ra $OK//BH$ mà $BH \perp AC \Rightarrow OK \perp AC$.

c) Chứng minh ΔHBO cân.

Ta có ΔAKO vuông tại K có $\widehat{AOK} = 60^0$, suy ra $\widehat{OAK} = 30^0$, nên $OK = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OB$.

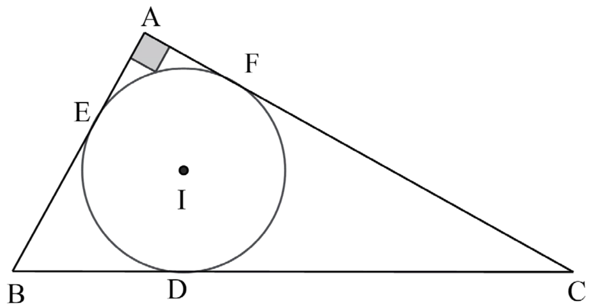
(HS tự chứng minh tam giác vuông có một góc bằng $30°$ thì cạnh góc vuông nhỏ bằng nửa cạnh huyền)

Do OK là đường trung bình của ΔBHM nên $OK = \frac{1}{2}BH$. $\Rightarrow BH = OB$, hay ΔHBO cân tại B

11. Cho ΔABC vuông tại A $\widehat{BAC} = 90^0\left(AB \le AC\right)$. Đường tròn $\left(I\right)$ nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng:

a) $BD = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$. b) $S_{ABC} = BD.DC$

Lời giải



a) Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn $\left(I\right)$ với các cạnh AB, AC

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AE = AF; BE = BD; CD = CF$

Do đó: $2BD = BD + BE = BC - CD + AB - AE = BC + AB - \left(CD + AE\right)$

$= BC + AB - \left(CF + AF\right) = BC + AB - AC \Rightarrow BD = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$

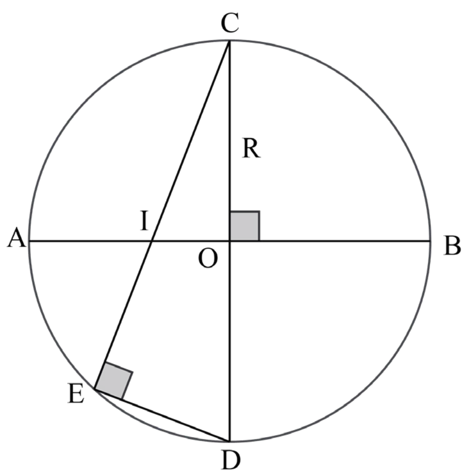
b) Tương tự câu a) ta có: $DC = \dfrac{BC + AC - AB}{2}$

mà $AB^2 + AC^{\ 2} = BC^2$ (ΔABC vuông tại A), do đó:

$$BD.DC = \frac{\left(BC + AB - AC\right)\left(BC + AC - AB\right)}{4}$$

$$\frac{BC^2 - \left(AB - AC\right)^2}{4} = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB.AC}{4} = \frac{AB.AC}{2} = S_{ABC}.$$

12. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ và hai đường kính vuông góc AB, CD. Trên bán kính AO lấy đoạn $AI = \dfrac{2AO}{3}$, vẽ tia CI cắt $\left(O\right)$ tại E. Tính R theo CE



Lời giải

Ta có $AI = \dfrac{2AO}{3} = \dfrac{2R}{3} \Rightarrow OI = R - \dfrac{2R}{3} = \dfrac{R}{3}$

ΔOCI vuông tại O, ta có: $CI = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{R}{3}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{10}}{3}$

ΔCED nội tiếp đường tròn O có cạnh CD là đường kính $\Rightarrow \Delta CED$ vuông tại E

Hai tam giác vuông OCI và CED có $\widehat{C}$ chung

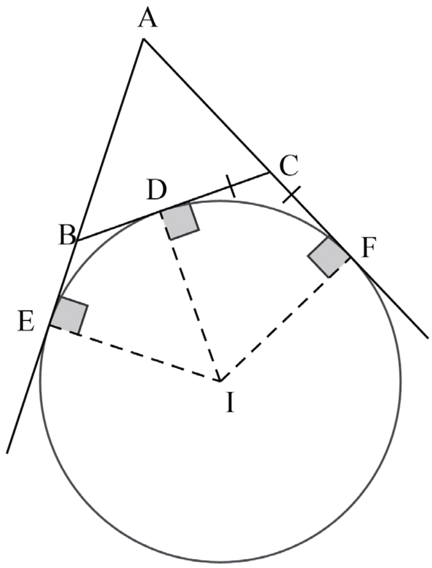
$$\Rightarrow \Delta COI \# \Delta CED \Rightarrow \frac{CO}{CE} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow CE = \frac{CO.CD}{CI} = \frac{R.2R}{R\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{6R}{\sqrt{10}} = \frac{3R\sqrt{10}}{5}$$

Dạng 5. Các bài tập liên quan đến đường tròn bàng tiếp tam giác

13. Cho ΔABC, đường tròn tâm I bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB, AC theo thứ tự tại E, F. Cho $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF = \frac{a+b+c}{2}$; b) $BE = \frac{a+b-c}{2}$; c) $CF = \frac{c+a-b}{2}$

Lời giải



Gọi D là tiếp tuyến của (I) với cạnh BC

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì: $BD = BE, CD = CF, AE = AF$

Do $AE = AB + BE = c + BD$ (1); $AF = AC + CF = b + CD$ (2)

Cộng $\left(1\right)$ với $\left(2\right)$ theo vế ta được:

$$2AE = 2AF = b + c + BD + CD = a + b + c \Rightarrow AE = AF = \frac{a+b+c}{2}$$

b) Theo câu a) ta có: $BD + c = BE + c = AE = \dfrac{a+b+c}{2}; CD + b = CF + b = \dfrac{a+b+c}{2}$

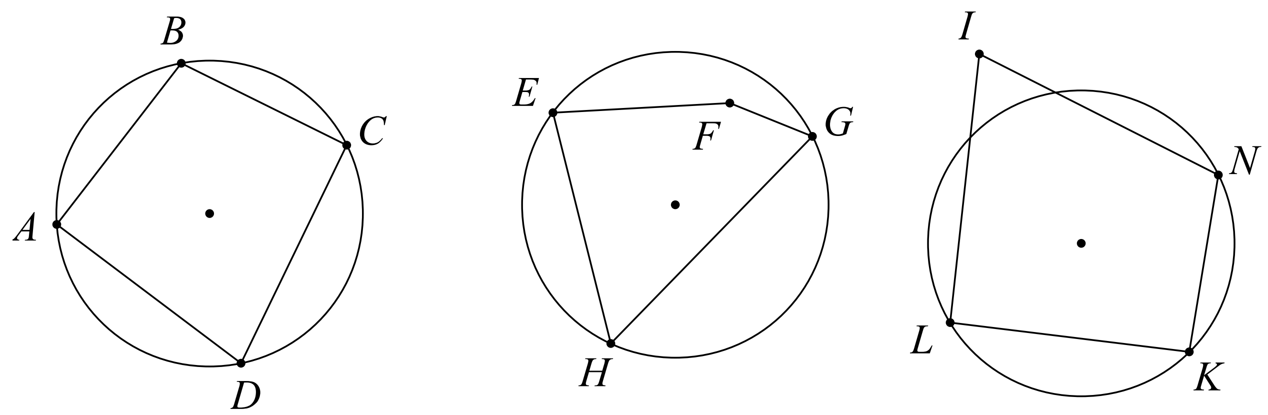
$$\Rightarrow BE = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}; CF = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2}$$

BÀI 29: TỨ GIÁC NỘI TIẾP

BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng, tính số đo của góc còn lại của tứ giác nội tiếp

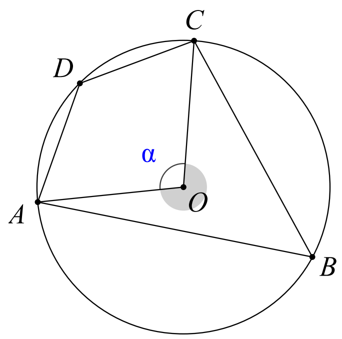
1. Trong các tứ giác sau, tứ giác nào là tứ giác nội tiếp



Lời giải

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp

2. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\alpha = 100^0$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ của tứ giác $ABCD$.

b) Tính $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$.

Lời giải

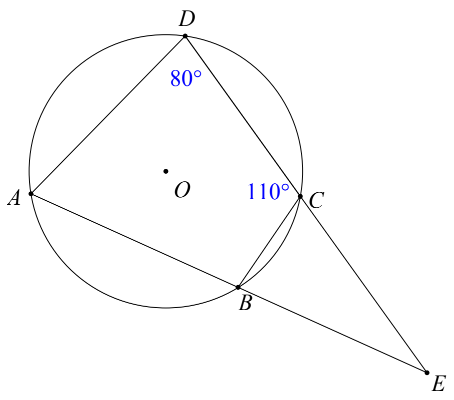
a) Ta có: $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}.100^\circ = 50^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC)

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn)

$50^\circ + \widehat{ADC} = 180^\circ$ vậy $\widehat{ADC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

b) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$.

3. Trong hình vẽ dưới đây, cho $\widehat{ADC} = 80^\circ, \widehat{BCD} = 110^\circ$.



a) Tính các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BAD}$ của tứ giác $ABCD$. b) Tính $\widehat{BEC}$.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn) nên $\widehat{ABC} = 100^0$

$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn) nên $\widehat{BAD} = 70^0$

b) Ta có: $\widehat{AED} + \widehat{EAD} + \widehat{EDA} = 180^0$ (tổng ba góc của tam giác ADX)

$\widehat{AED} = 180° - (80° + 70°) = 30°$

4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Tính số đo các góc còn lại của tứ giác đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 110^0$ và $\widehat{B} = 50^0$ b) $\widehat{B} = 60^0$ và $\widehat{C} = 85^0$

c) $\widehat{C} = 55^0$ và $\widehat{D} = 127^0$

Lời giải

a) $\widehat{C} = 70°; \widehat{D} = 130°$; b) $\widehat{D} = 120°; \widehat{A} = 95°$; c) $\widehat{A} = 125°; \widehat{B} = 53°$;

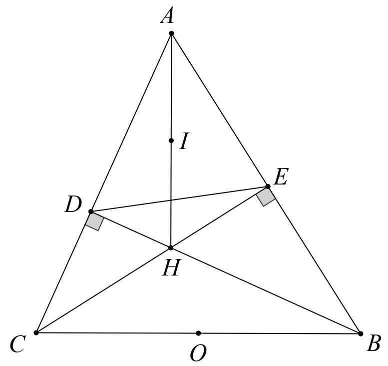
Dạng 2. Chứng minh tứ giác nội tiếp

5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh $ADHE$ là tứ giác nội tiếp.

Vì BD, CE là các đường cao của ΔABC nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$.

Gọi O là trung điểm AH khi đó

DI là đường trung tuyến của tam giác vuông DAH nên $EI = \dfrac{1}{2}AH = IA = IH$

DI là đường trung tuyến của tam giác vuông EAH nên $DI = \dfrac{1}{2}AH = IA = IH$

Vậy $IA = IH = ID = IE$ hay 4 điểm A, E, D, H cùng thuộc đường tròn tâm I

$\Rightarrow ADHE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi O là trung điểm BC.

Vì BD, CE là các đường cao của ΔABC nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

Xét tam giác BDC có $\widehat{BDC} = 90^0$ và DO là đường trung tuyến nên

$OD = OC = OB = \dfrac{1}{2}BC \; (1)$

Xét tam giác BEC có $\widehat{BEC} = 90^0$ và EO là đường trung tuyến nên

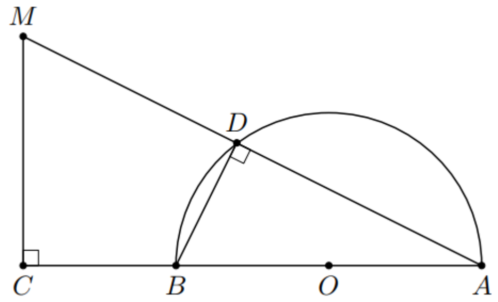
$OE = OC = OB = \frac{1}{2}BC \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = OC = OB$

Vậy tứ giác $BCDE$ nội tiếp được đường tròn có tâm O là trung điểm BC.

6. Cho đường tròn đường kính AB và D là một điểm thuộc đường tròn. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng AD tại M. Chứng minh tứ giác $MCBD$ nội tiếp được đường tròn, xác định tâm đường tròn đó.

Lời giải



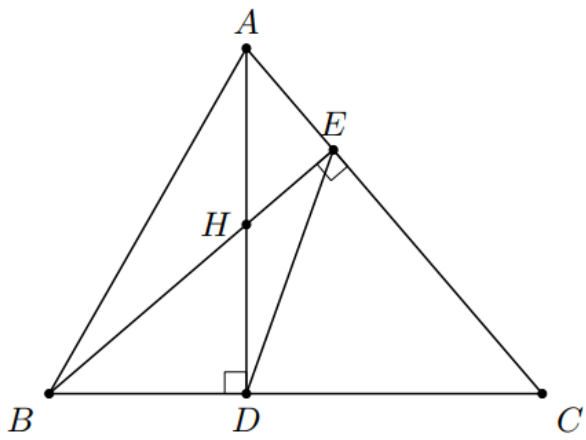
Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MDB} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{MCB} = 90^\circ (MC \perp BC)$,

Lí luận và chỉ ra $MCBD$ nội tiếp đường tròn đường kính MB

7. Cho tam giác ABC biết $\widehat{A} < 90^0$,các đường cao AD và BE cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc AC). Chứng minh tứ giác $DHEC$ và $ABDE$ nội tiếp đường tròn.

Lời giải



Ta có $\widehat{HDC} = 90^\circ (AD$ là đường cao $)$

Lại có $\widehat{HEC} = 90^{\circ}$ (BE là đường cao)

Lập luận chỉ ra tứ giác $DHEC$ nội tiếp được đường tròn đường kính HC

Ta có $\widehat{ADB} = 90^{\circ}$ (AD là đường cao)

Lại có $\widehat{AEB} = 90^{\circ}$ (BE là đường cao), $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^{\circ}$

Lập luận chỉ ra giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn đường kính AB

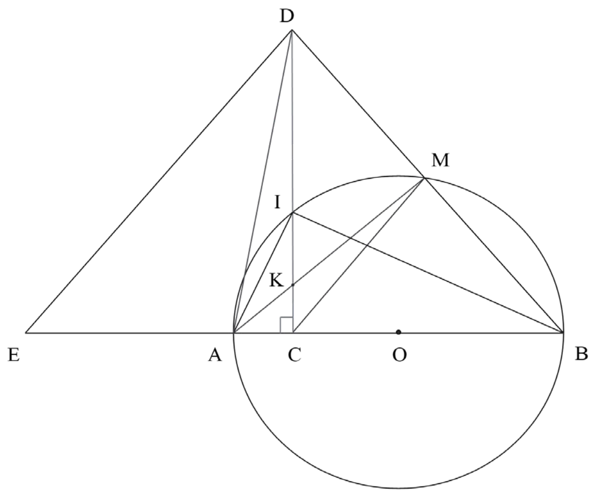
8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D. Gọi E đối xứng với B qua C.

a) Chứng minh: $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: ΔABD” ΔMBC.

c) $CKMB$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Lời giải



a) Chứng minh: $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Xét: (O) có $\widehat{AMB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^{0}$

Vì: $IC \perp AB$ (gt) nên $\widehat{ACD} = 90^{0}$.

Lập luận chỉ ra $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AD

b) Chứng minh: ΔABD” ΔMBC.

Xét: ΔABD và ΔMBC có: $\widehat{ABD}$ chung

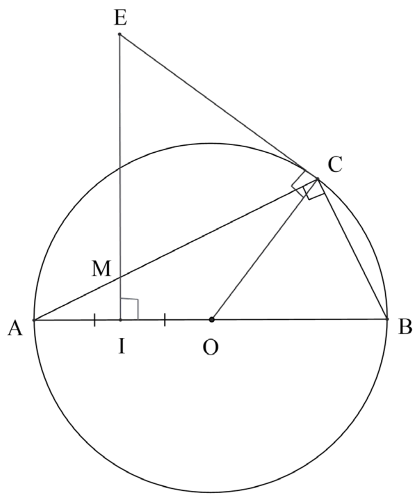
$\widehat{ADB} = \widehat{MCB}$ (vì $ACMD$ nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta ABD$” ΔMBC (g – g)

c) Lập luận chỉ ra $CKMB$ nội tiếp đường tròn đường kính BK.

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng vuông góc với AO tại trung điểm I của AO cắt AC tại M và cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn ở E. Chứng minh tứ giác $OCEI$ và $IMCB$ là các tứ giác nội tiếp, xác định tâm của các đường tròn đó.

Lời giải



* Chứng minh tứ giác $OCEI$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{OIE} = 90^0$ (giả thiết).

$\widehat{OCE} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến).

Tứ giác: $OCEI$ nội tiếp, tâm đường tròn là trung điểm của đoạn thẳng OE.

* Chứng minh tứ giác $IMCB$ nội tiếp.

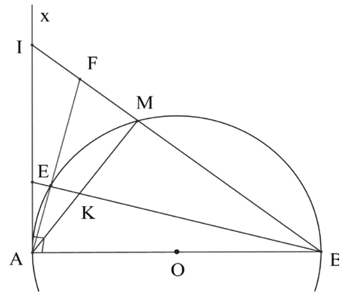
Ta có $\widehat{OIM} = 90^0$ (giả thiết).

$\widehat{BCM} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Tứ giác: $IMCB$ nội tiếp, tâm đường tròn là trung điểm của đoạn thẳng MB.

10. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A, B). Kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I, tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E, cắt tia BM tại F. Tia BE cắt tia Ax tại H và cắt tia AM tại K. Chứng minh tứ giác $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải



Xét (O) có $\widehat{AEB}, \widehat{AMB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn.

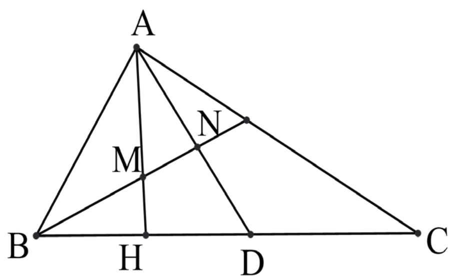
$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AMB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{KEF} = \widehat{AMB} = 90^0$

$\Rightarrow EFMK$ nội tiếp.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và phân giác trong AD của góc $\widehat{HAC}$. Phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ cắt AH, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng: $MHDN$ là tứ giác nội tiếp

Lời giải



$\widehat{MBH} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}, \widehat{HAD} = \dfrac{1}{2}\widehat{HAC}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$ do cùng phụ với góc $\widehat{BCA}$ từ đó suy ra $\widehat{MBH} = \widehat{HAD}$ mà $\widehat{BHM} = 90° = \widehat{MBH} + \widehat{BMH} = \widehat{AMN} + \widehat{HAD}$ suy ra $\widehat{ANM} = 90°$ hay $\widehat{MND} = 90°$

Tam giác MHD vuông tại H và M, H, D thuộc đường tròn đường kính MD

Tam giác MND vuông tại N và M, N, D thuộc đường tròn đường kính MD

Vậy bốn điểm M, H, D, N cùng thuộc đường tròn đường kính MD hay $MHDN$ là tứ giác nội tiếp

Dạng 3. Các bài toán tổng hợp.

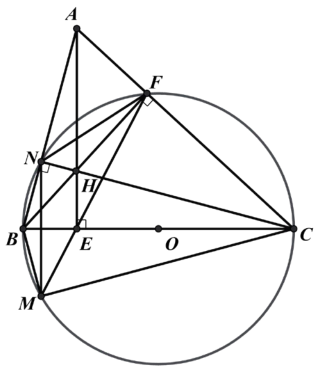
12. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE, BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M. Chứng minh $BM = BN$.

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

Ta có: $HF \perp AC\left(gt\right) \Rightarrow \widehat{HFC} = 90°$

$HE \perp BC\left(gt\right) \Rightarrow \widehat{HEC} = 90°$

Lí luận chỉ ra $CEHF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính HC

b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M. Chứng minh $BM = BN$.

$CEHF$ là tứ giác nội tiếp ta có: $\widehat{HFE} = \widehat{HCE} = \widehat{BCN}$.

Xét $\left(O\right)$ có $\widehat{HFE} = \widehat{BCM}$. Vậy $\widehat{BCM} = \widehat{MCN}$ và $\Delta BCM = \Delta BCN \Rightarrow BN = BM$

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC.

Xét hai tam giác vuông FAH và FBH ta có:

$AH = BC$ (giả thiết)

$\widehat{FAH} = \widehat{FBC}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{ACE}$)

Vậy $\Delta FAH = \Delta FBC$

$\Rightarrow FA = FB$

Mặt khác tam giác AFB vuông có $FA = FB$ nên nó vuông cân. Vậy $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

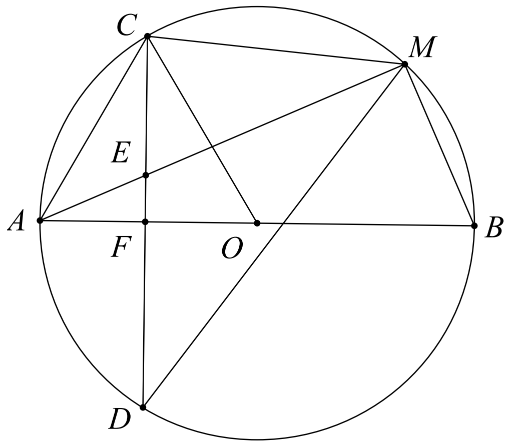
13. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại F. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B, M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E

a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD

c) Chứng minh $AC^2 = AE.AM$

Lời giải



a) HS tự chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BE

b) Vì $AB \perp CD$; ΔICD cân tại I nên IF là đường cao đồng thời là đường phân giác hay $\widehat{CIF} = \widehat{FID} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{AD}$

Ta có $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$ và $\widehat{AMD} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AD}$

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AMD} \Rightarrow AM$ là phân giác của $\widehat{CMD}$

c) Xét ΔACE và ΔAMC có: $\widehat{A}$: chung

$\widehat{AMC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$ và $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \Delta ACE \# \Delta AMC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AC^2 = AE.AM$

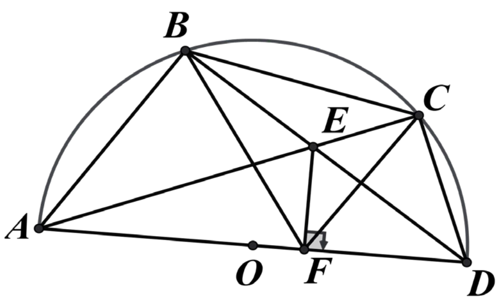
14. Cho nửa đường tròn đường kính AD. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D). Hai dây AC, BD cắt nhau tại điểm E. Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với $AD\left(F \in AD\right)$

a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

Lời giải



a) HS tự chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp đường tròn đường kính AE

b) $C \in \left(O\right) \Rightarrow \widehat{ACD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔAFE và ΔACD có :

$\widehat{CAD}$ chung; $\widehat{AFE} = \widehat{ACD} = 90°$

$\Rightarrow \Delta AFE \# \Delta ACD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AC.AE = AF.AD(dfcm)$

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC

* Ta chứng minh FE là phân giác của $\widehat{BFC}$.

* Chứng minh CE là phân giác của $\widehat{BCF}$.

ΔBCF có FE, CE là hai đường phân giác cắt nhau tại E

Nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $BCF(dfcm)$

15. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Dựng đường thẳng d qua A song song BC, đường thẳng d' qua C song song BA, gọi D là giao điểm của d và d'. Dựng AE vuông góc BD (E nằm trên BD), F là giao điểm của BD với đường tròn (O). Chứng minh:

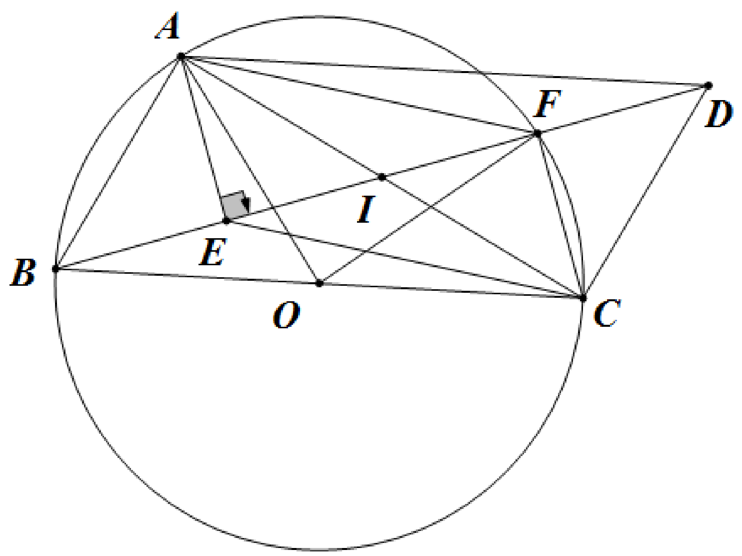
a) Tứ giác $AECD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) $\widehat{\mathrm{AOF}} = 2\widehat{\mathrm{CAE}}$

c) Tứ giác AECF là hình bình hành.

d) $\mathrm{DF} \cdot \mathrm{DB} = 2\mathrm{AB}^2$.

Lời giải



a) ta có $\widehat{BAC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AB//CD$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{BAC} = 90°$ (hai góc so le trong)

Suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ACD} = 90°$. Từ đó chỉ được ra tứ giác $AECD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD

b) tứ giác $AECD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (2 góc nội tiếp chắn cung EC)

$AB//CD \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{ABD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ABD}$

Mà $\widehat{ABD}$ là góc ở tâm; $\widehat{AOF}$ là góc nội tiếp chắn cung $AF \Rightarrow \widehat{AOF} = 2.\widehat{ABD}$ hay $\widehat{AOF} = 2.\widehat{CAE}$

c) Ta có $\widehat{BFC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AE//CF$ (cùng vuông góc với BD)

Lại có $\widehat{AFB} = \widehat{ACB} = \widehat{CAD} = \widehat{FEC} \Rightarrow AF//EC$

Do đó tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

d) Gọi giao điểm của AC và BD là I, do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $IA = IC; IB = ID; AB = CD$

Xét tam giác DCI vuông tại C có CF là đường cao, sử dụng tam giác đồng dạng chỉ ra $CD^2 = DF.DI \Rightarrow AB^2 = DF.DI$

$\Rightarrow 2AB^2 = 2.DF.DI$ mà $2DI = BD$ do đó $2AB^2 = DF.BD$.

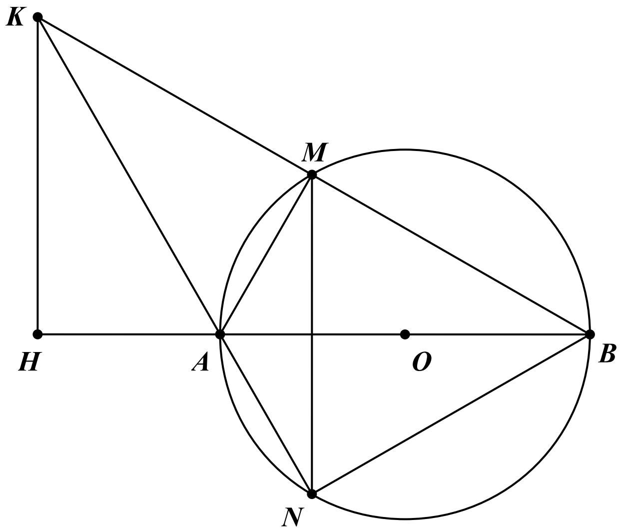
16. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây cung MN vuông góc với AB, ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB.

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB . HK = AN . HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

+) Tứ giác $AHKM$ có: $\widehat{AHM} = 90^\circ$ (vì $KH \perp AB$)

và $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB}$)

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn đường kính AK.

b) Chứng minh rằng: $NB\,.\,HK = AN\,.\,HB$.

Xét ΔANB và ΔKHB có:

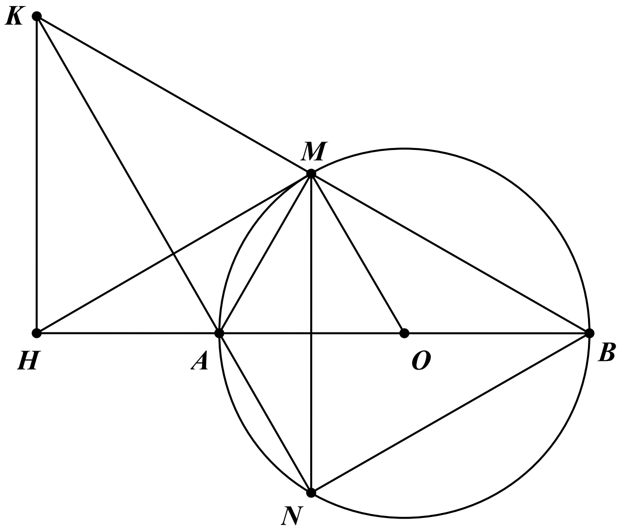
+) $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{KHB} = 90^\circ$;

+) Đường kính $AB \perp MN \Rightarrow A$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{MN}$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AM} \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{KBH}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

Suy ra $\Delta ANB \backsim \Delta KHB$ $(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{KH}{HB} \Rightarrow NB\,.\,HK = AN\,.\,HB.$$

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).



+) Ta có HM giao với đường tròn $\left(O\right)$ tại M, ta phải chứng minh $HM \perp OM$. Thật vậy:

Tứ giác $AHKM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HK}$);

$\widehat{HAK} = \widehat{NAB}$ (hai góc đối đỉnh);

$\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ ($AB \perp MN \Rightarrow B$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{MN}$, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

$\widehat{MAB} = \widehat{OMA}$ (ΔOAM cân tại O);

$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{OMA}\left(= \widehat{HAK} = \widehat{NAB} = \widehat{MAB}\right) \Rightarrow \widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{OMA} + \widehat{HMA}$;

Mà $\widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{AMK} = 90°$ (kề bù với $\widehat{AMB} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\Rightarrow \widehat{OMA} + \widehat{HMA} = 90° \Rightarrow \widehat{HMO} = 90° \Rightarrow HM \perp OM$ tại $M \in \left(O\right)$

$\Rightarrow HM$ là tiếp tuyến của $\left(O\right)$.

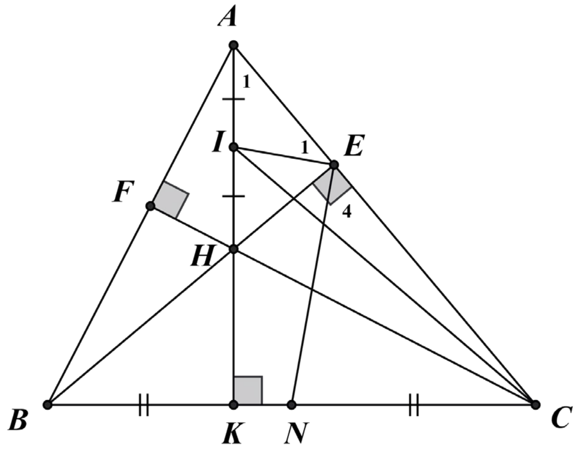
17. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, N là trung điểm của đoạn BC.

a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

Ta có $\widehat{AEB} = 90°$ (do BE là đường cao của ΔABC) hay $\widehat{AEH} = 90°$

$\widehat{AFC} = 90°$ (do CF là đường cao của ΔABC) hay $\widehat{AFH} = 90°$

HS chỉ ra bốn điểm A, E, H, F cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH (đpcm)

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH;

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AH nên I là tâm đường tròn đường kính AH

Suy ra $IA = IE$

$\Rightarrow \Delta IAE$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (1)

ΔEBC vuông tại E có EN là đường trung trrung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$$\Rightarrow EN = NC \left(= \frac{BC}{2}\right)$$

$\Rightarrow \Delta ENC$ cân tại N $\Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{E_4}$ (2)

Xét ΔAKC vuông tại K có $\widehat{KCA} + \widehat{A_1} = 90°$ hay $\widehat{NCE} + \widehat{A_1} = 90°$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{E_1} + \widehat{E_4} = 90°$

Lại có $\widehat{E_1} + \widehat{E_4} + \widehat{IEN} = 180°$ (do A, E, C thẳng hàng)

$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{IEN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IEN} = 90^\circ$

Suy ra $EN \perp EI$ tại E

Do đó NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH (đpcm)

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Áp dụng định lí Py – Ta – Go ΔCIK vuông tại K, ta có: $CI^2 = CK^2 + IK^2$

Lại có $IA = IE = IH$ (cùng bán kính đường tròn tâm I)

$\Rightarrow CI^2 - IE^2 = CK^2 + IK^2 - IE^2$

$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IE)$

$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IH) = CK^2 + AK.KH \quad (4)$

Ta lại có $CK.CB = CK(CK + KB) = CK^2 + CK.KB \quad (5)$

Xét ΔKBH và ΔKAC có

$\widehat{KBH} = \widehat{KAC}$ (Cùng phụ với $\widehat{ACB}$); $\widehat{BKH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$

Do đó $\Delta AHK \backsim \Delta ACB\ (g - g)$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KH}{KC} \Rightarrow KA.KH = KB.KC$ hay $AK.KH = CK.KB \quad (6)$

Từ $(4),(5)$ và (6) suy ra $CI^2 - IE^2 = CK.CB$ (đpcm)

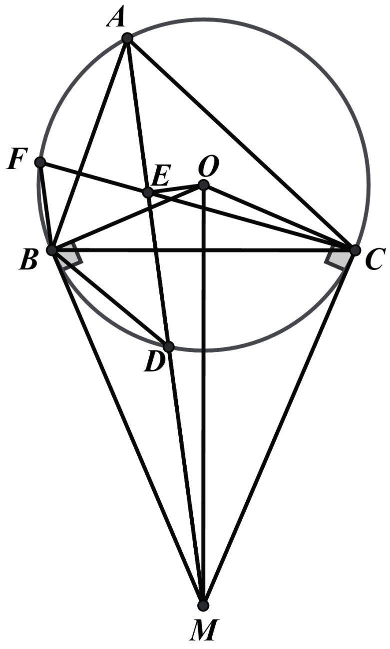
18. Cho tam giác nhọn *ABC* (*AB* < *AC*) nội tiếp đường tròn tâm O. Hai tiếp tuyến tại *B* và *C* của đường tròn (*O*) cắt nhau tại *M*, tia *AM* cắt đường tròn (*O*) tại điểm *D*.

a) Chứng minh rằng tứ giác *OBMC* nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

c) Gọi *E* là trung điểm đoạn thẳng *AD*; tia *CE* cắt đường tròn (O) tại điểm *F*. Chứng minh rằng: *BF* // *AM*.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác *OBMC* nội tiếp được đường tròn.

Ta có MB, MC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\begin{cases} OB \perp MB \\ OC \perp MC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MBO} = 90^0 \\ \widehat{MCO} = 90^0 \end{cases}$

HS tự chỉ ra tứ giác OBMC nội tiếp.

b) Chứng minh $MB^2 = MD.MA$

Ta có $\widehat{DBM} = \widehat{BAM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD).

Xét ΔMBD và ΔMAB có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{DBM} = \widehat{BAM} \\ \widehat{BMA} \text{ chung} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MBD \# \Delta MAB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MB^2 = MA.MD$$

c) Gọi *E* là trung điểm đoạn thẳng *AD*; tia *CE* cắt đường tròn (O) tại điểm *F*. Chứng minh rằng: *BF // AM*.

Ta có E là trung điểm của AD và tam giác OAD cân tại O nên $OE \perp AD \Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$

HS chỉ ra tứ giác $OEMC$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{COM} = \widehat{CEM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM) (1)

Ta lại có $\widehat{COM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $\widehat{BFC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ (tính chất góc nội tiếp)$\Rightarrow \widehat{COM} = \widehat{BFC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{BFC}$

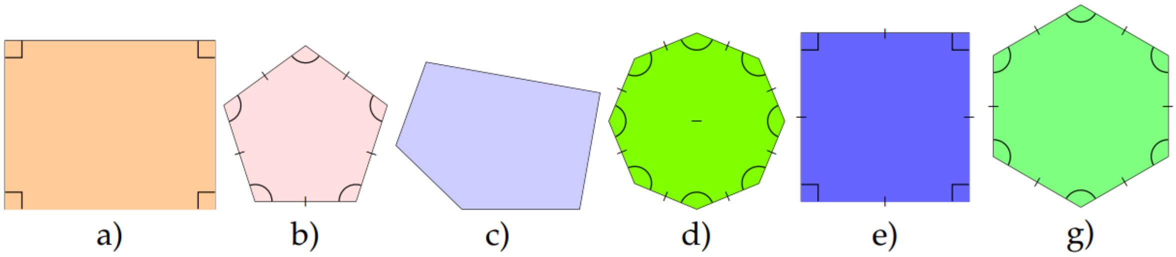
Mà hai góc $\widehat{MEC}$ và $\widehat{BFC}$ ở vị trí đồng vị $\Rightarrow EM\,//\,BF$ hay $AM\,//\,BF$.

BÀI 30: ĐA GIÁC ĐỀU

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm đa giác đều, chứng minh đa giác đều

1. Tìm và gọi tên các đa giác đều trong hình dưới đây



Lời giải

Hình b: Ngũ giác đều
Hình d: Bát giác đều
Hình e: Hình vuông.
Hình g: Ngũ giác đều

2. Cho đường tròn $(O;R)$. Lấy các điểm A, B, C, D, E trên đường tròn $(O;R)$ sao cho số đo các cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DE}, \overset{\frown}{EA}$ bằng nhau. Đa giác $ABCDE$ có là đa giác đều không? Vì sao?

Lời giải

Các cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DE}, \overset{\frown}{EA}$ bằng nhau và cùng có số đo bằng $\dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

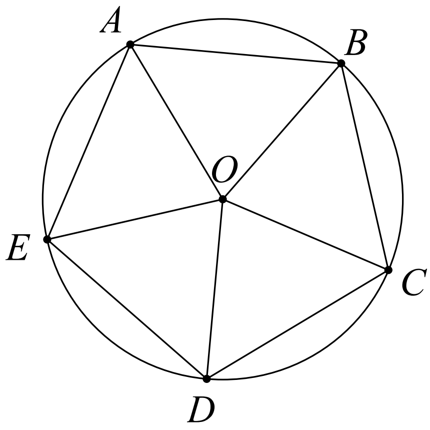
Vậy $\widehat{AOB} = 72^\circ; \widehat{BOC} = 72^\circ, \widehat{COD} = 72^\circ, \widehat{DOE} = 72^\circ, \widehat{EOA} = 72^\circ$

Tính các góc của tam giác cân OAB ta có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 54^\circ$.

Chứng minh tương tự ta được $\widehat{EAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEA}.\ (1)$

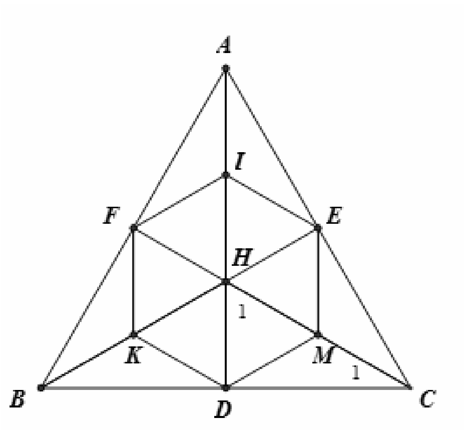
Chứng minh $\Delta OBA = \Delta OBC$ nên $AB = BC$, tương tự ta có
$AB = BC = CD = DE = EA (2)$

Từ (1) và (2) ta có đa giác $ABCDE$ có là đa giác đều.



3. Cho tam giác đều ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng $DKFIEM$ là lục giác đều.

Lời giải



Xét ΔHDC vuông tại D, DM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DM = HM$.

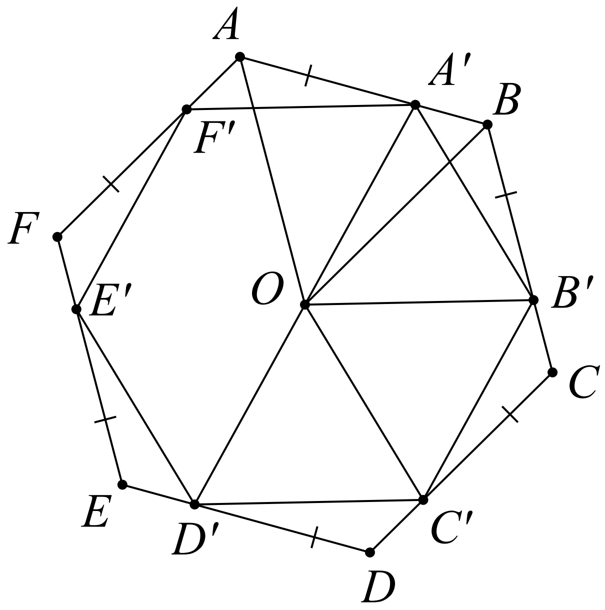
Ta lại có $\widehat{C_1} = 30°$ nên $\widehat{H_1} = 60°$. Do đó ΔHDM là tam giác đều.

Tương tự các tam giác HME, HEI, HIF, HFK, HKD là các tam giác đều.

Lục giác $DKFIEM$ có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau (bằng $120°$) nên là lục giác đều.

4. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trên cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA lấy các điểm A', B', C', D', E', F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

Lời giải



Chứng minh rằng các tam giác $AA'F$, $BB'A'$, $CC'B'$, $DD'C'$, $EE'D'$, $FF'E$ bằng nhau nên $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'F' = F'A'$

Chỉ ra các tam giác cân $OA'B'$; $OB'C'$; $\ldots.OF'A'$ bằng nhau từ đó chỉ ra các góc $\widehat{A'B'C'} = \widehat{B'C'D'} = \ldots\widehat{F'A'B'}$

Từ đó $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

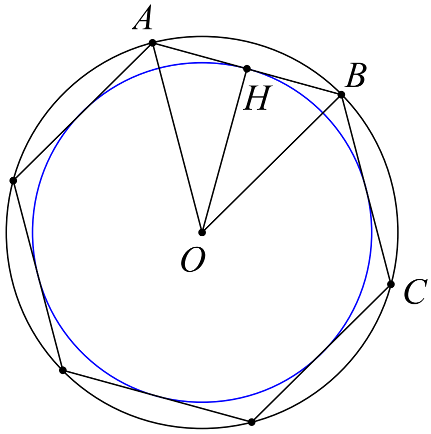
Dạng 2. Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp đa giác đều. Diện tích đa giác đều

5. Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a. Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

Lời giải

Gọi A, B là 2 đỉnh liên tiếp của đa giác đều n cạnh. Gọi O là tâm đa giác đều.

Ta có $\widehat{AOB} = \dfrac{360^\circ}{n}$.



Kẻ OH vuông góc $AB, H \in AB$. Ta có ΔOHA vuông tại H và $HA = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

Hơn nữa ta có $\widehat{HOA} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ}{n}$.

Khi đó

+ Bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $R = OA = \frac{HA}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

+ Bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r = OH = HA\cot\frac{180^\circ}{n}$.

6. Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

Lời giải

Ta có $AB = R$ nên suy ra tam giác OAB đều. Tương tự ta có các tam giác OBC, OCD, ODE, OEF, OAF là các tam giác đều cạnh R.

Vậy diện tích lục giác $ABCDEF$ là

$6.S_{OAB} = 6.\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$.

7. Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

Phương pháp:

Đa giác đều có n cạnh bằng nhau và cũng có n góc bằng nhau nên có công thức tính số đo mỗi góc là: $\frac{(n-2).180^0}{n}$

Lời giải

Mỗi góc của ngũ giác đều bằng: $\dfrac{(5-2).180^0}{5}=108^0$

Mỗi góc của ngũ lục đều bằng: $\dfrac{(6-2).180^0}{6}=120^0$

Mỗi góc của bát giác đều bằng: $\dfrac{(8-2).180^0}{8}=135^0$

8. Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng $135°$.

Lời giải

Gọi n là số cạnh của đa giác đều.

Ta có $\dfrac{\left(n-2\right).180°}{n}=135°$

nên $\dfrac{n-2}{n}=\dfrac{135}{180}=\dfrac{3}{4}$.

Do đó $4\left(n-2\right)=3n$.

Vậy $n=8$.

9. a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

Lời giải

a) Từ mỗi đỉnh của hình n – giác lồi. kẻ được $n-1$ đoạn thẳng đến các đỉnh còn lại, trong đó có hai đoạn thẳng là cạnh của đa giác, $n-3$ đoạn thẳng là đường chéo.

Đa giác có n đỉnh nên kẻ được $n\left(n-3\right)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo tính 2 lần.

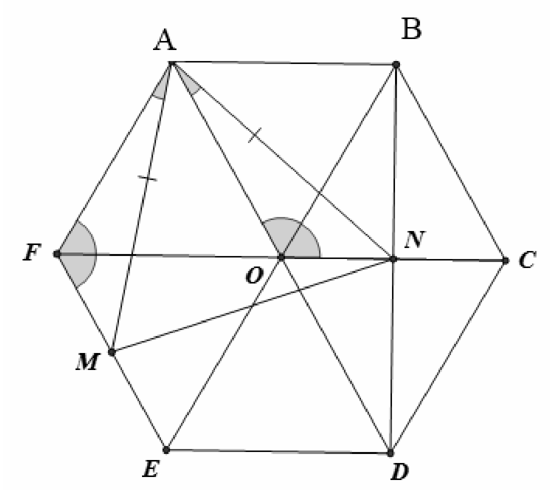
Vậy số đường chéo của hình n - giác lồi là $\dfrac{n\left(n-3\right)}{2}$.

b) Giải phương trình $\dfrac{n\left(n-3\right)}{2}=n$. Ta được $n=5$

Dạng 3. Các bài toán liên quan về đa giác đều, đa giác lồi.

10. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của EF, N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

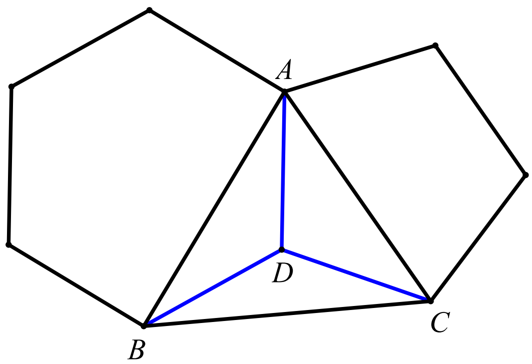
Lời giải



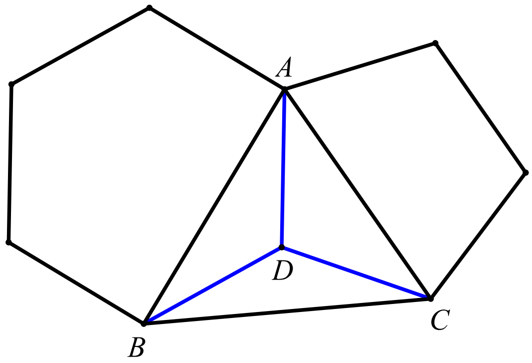
Gọi O là giao điểm của AD, BE, CF. Dễ dàng chứng minh N là trung điểm của OC, $\Delta AFM = \Delta AON$ (c.g.c).

Từ đó $AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 60°$ nên ΔAMN là tam giác đều.

11. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC.



Lời giải



Theo công thức tính góc của đa giác đều, ta có:

$\widehat{ADB} = \dfrac{(6-2).180^0}{6} = 120^0 \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 30^0;$

$\widehat{ADC} = \dfrac{(5-2)180^0}{5} = 108^0 \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 36^0;$

Suy ra $\widehat{BDC} = 360^0 - 120^0 - 108^0 = 132^0$.

Ta có ΔBDC $(DB = DC)$ cân tại D. Do đó $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = \dfrac{180^0 - 132^0}{2} = 24^0$.

Suy ra $\widehat{BAC} = 30^0 + 36^0 = 66^0$; $\widehat{ABC} = 30^0 + 24^0 = 54^0$; $\widehat{BCA} = 24^0 + 36^0 = 60^0$

12. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi I là giao diểm của AD và BE. Chứng minh rằng

a) $DIBC$ là hình bình hành;

b) $DI^2 = AI \cdot AD$.

Lời giải

a) Ta có mỗi góc trong của ngũ giác đều có số đo là $108°$ hay $\widehat{AED} = 108°$; Tam giác AED cân tại E từ đó $\widehat{A_1} = \widehat{D_1} = 36°$; Tương tự tính được $\widehat{B_1} = \widehat{E_1} = 36° = \widehat{D_1}$

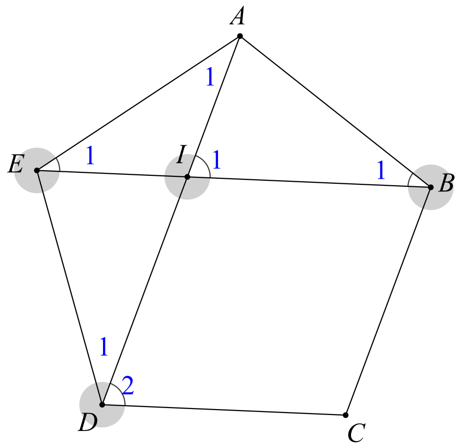
Vậy $\widehat{I_1} = \widehat{E_1} + \widehat{A_1} = 72°$ (góc ngoài của tam giác EAI) và $\widehat{D_2} = \widehat{EDC} - \widehat{D_1} = 108° - 36° = 72°$. Vậy $\widehat{D_2} = \widehat{I_1}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị suy ra $IB\,//\,DC$. Chứng minh tương tự ta có $DI\,//\,BC$ hay $DIBC$ là hình bình hành.

b) Xét tam giác AIE và tam giác EAD, ta có

+ Góc A chung;

+ $\widehat{AEI} = \widehat{ADE}$.

$\Rightarrow \Delta AIE \sim \Delta AED(\text{g}-\text{g})$ suy ra $\dfrac{AI}{AE} = \dfrac{AE}{AD}$ suy ra $AI \cdot AD = AE^2 \cdot BC^2 = DI^2$

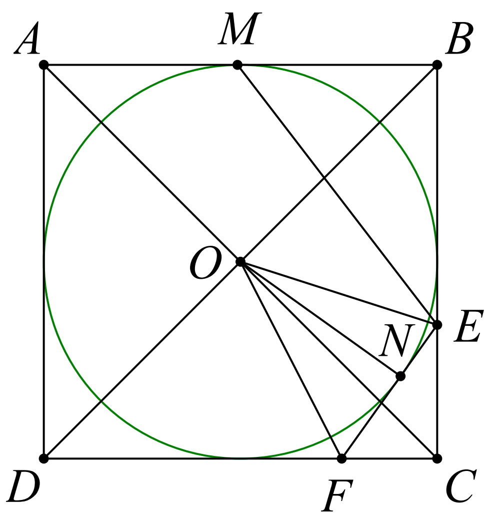


13*. Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M. Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng

a) Các tam giác DFO và BOE đồng dạng.

b) ME song song với AF.

Lời giải



a) Xét tam giác ΔDFO, ta có $\widehat{DOF} + \widehat{DFO} + \widehat{ODF} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DOF} + \widehat{DFO} = 145^\circ$ (do $\widehat{ODF} = 45^\circ$) (1)

Xét tứ giác $DBEF$, ta có $\hat{D} + \hat{B} + \hat{E} + \hat{F} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{DEF} + \widehat{BEF} = 270^\circ$.

Mặt khác ta có FO, EO lần lượt là phân giác góc DFE và BEF nên ta có

$\widehat{DFO} = \dfrac{1}{2}\widehat{DFE}$ và $\widehat{BEO} = \dfrac{1}{2}\widehat{BEF}$

Suy ra $\widehat{DFO}+\widehat{BEO}=145^{\circ}\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DOF}=\widehat{BEO}$.

Xét tam giác DOF và tam giác BEO, ta có

+ $\widehat{ODF}=\widehat{OBE}=45^{\circ}$;

+ $\widehat{DOF}=\widehat{BEO}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta DOF\# \Delta BEO(\mathrm{g}-\mathrm{g})$

b) $\Delta DOF \sim \Delta BEO \Rightarrow \dfrac{DF}{BO}=\dfrac{DO}{BE} \Rightarrow DF\cdot BE=DO\cdot BO=\dfrac{BD^2}{4}=\dfrac{AB^2}{2}=BM\cdot AD.$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{DF}=\dfrac{BE}{AD}$

Xét tam giác ADF và EBM, ta có

+ $\widehat{ADF}=\widehat{MBE}$

+ $\dfrac{BM}{DF}=\dfrac{BE}{AD}$.

Suy ra $\Delta ADF\# \Delta EBM \Rightarrow \widehat{BME}=\widehat{AFD}$

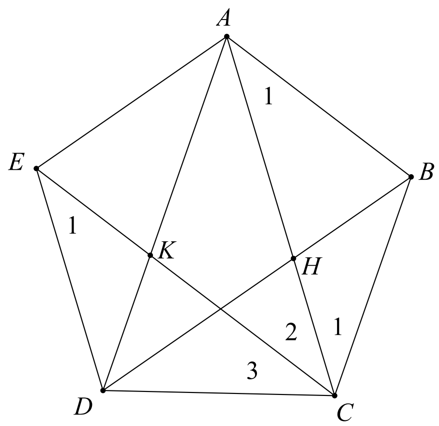
Mặt khác ta có $\widehat{BAF}=\widehat{AFD}(AB//CD)$. Suy ra $\widehat{BME}=\widehat{BAF}$ suy ra $ME//ED$.

14. Cho ngũ giác $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}$.

a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

b) Chứng minh ngũ giác $ABCDE$ là ngũ giác đều.

Lời giải



a) ΔABC và ΔBCD có $AB=BC$; $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}$; $BC=CD$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta BCD\left(c.g.c\right) \Rightarrow AC = BD$.

ΔABD và ΔACD có $AB = DC$; $AC = DB$; AD chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACD\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CDA}$

$\Rightarrow \Delta BAH = \Delta CDK \Rightarrow BH = CK \Rightarrow BC // CD$

$\Rightarrow$ ABCD là hình thang cân

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có $ABCE$ là hình thang cân.

Ta có: ΔABC cân $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$,mà $\widehat{A} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \Delta AEC = \Delta CDA\left(c.g.c\right) \Rightarrow ACDE$ là hình thang cân

(Chứng minh tương tự câu a)

Ta có:

$AB // CK$ ($ABCD$ là hình thang cân)

$BC // AK$ ($ABCE$ là hình thang cân)

mà: $AB = BC$. Suy ra $ABCK$ là hình thoi $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

$ACDE$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{E_1} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_3}$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDE \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CDE}$

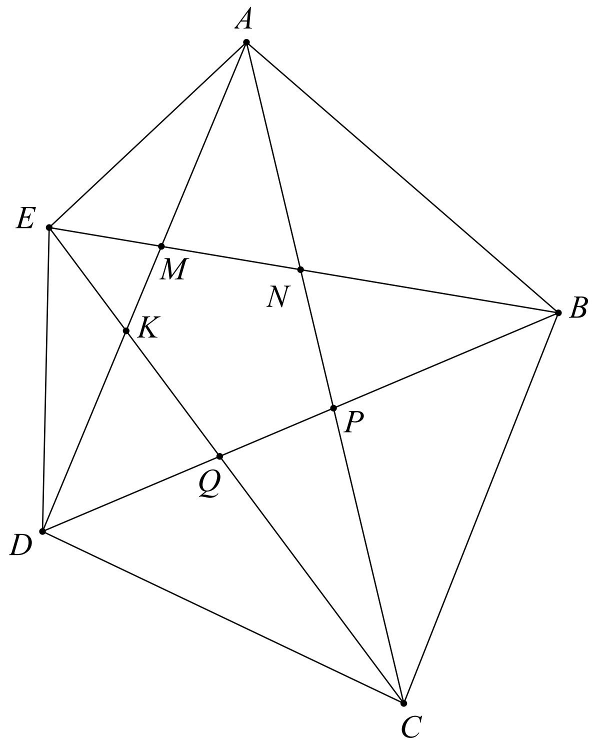
Chứng minh tương tự, ta được: $\widehat{BAE} = \widehat{AED}$

Do đó: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$ và $AB = BC = CD = DE = EA\left(gt\right)$

$\Rightarrow ABCDE$ là ngũ giác đều

15. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

Lời giải



Áp dụng tính chất về quan hệ các cạnh của tam giác, ta có:

$AB + BC + CD + DE + EA < (AN + NB) + (BP + PC)$

$+ (CQ + QD) + (DK + KE) + (EM + MA)$ (1)

Mặt khác: $AN + PC < AC$; $BP + DQ < BD$; $CQ + KE < CE$; $DK + MA < DA$; $EM + NB < EB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

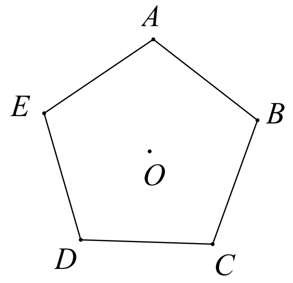
Dạng 4. Các bài toán về phép quay.

16. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O.

a) Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?

b) Chỉ ra các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

Lời giải



a) $\widehat{AOC} = \frac{360^\circ}{5}.2 = 144^\circ$

Phép quay thuận chiều 144° tâm O biến điểm A thành điểm C thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm D, E, A, B

b) Các phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho là:

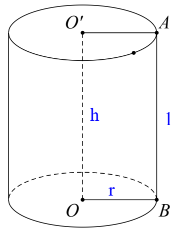
- Năm phép quay thuận chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $72^\circ; 144^\circ; 216^\circ; 288^\circ; 360^\circ$.
- Năm phép quay ngược chiều α° tâm O với α° lần lượt nhận các giá trị $72^\circ; 144^\circ; 216^\circ; 288^\circ; 360^\circ$

BÀI 31. HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

BÀI TẬP

Dạng 1. Các bài toán về hình trụ

1. Thay dấu “?”bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình trụ	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Diện tích toàn phần (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	3	7	?	?	?
	4	?	20π	?	?
	?	8	?	18π	?
	?	5	?	?	150π

Lời giải

• Với $r = 3, h = 7$ ta có $S_{xq} = 2\pi rh = 42\pi\left(cm^2\right)$; $S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right) = 60\pi\left(cm^2\right)$

$V = \pi r^2 h = 63\pi\left(cm^3\right)$

• Với $r = 3, S_{xq} = 20\pi\left(cm^2\right)$ ta có: $S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow h = \dfrac{S_{xq}}{2\pi r} = 2,5\left(cm\right)$

$S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right) = 52\pi\left(cm^2\right)$; $V = \pi r^2 h = 40\pi\left(cm^3\right)$

• Với $h = 8, S_{xq} = 18\pi\left(cm^2\right)$ Ta có

$S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right)$

$18\pi = 2\pi r\left(h + r\right)$

$r^2 + 8r - 9 = 0$

$\Rightarrow r = 1$

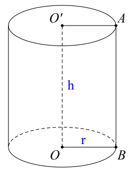
$S_{xq} = 2\pi rh = 16\pi\left(cm^2\right)$

$V = \pi r^2 h = 8\pi\left(cm^3\right)$

• Với $h=5, V=150\pi$ ta có : $V=\pi r^2 h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\dfrac{150\pi}{25\pi}=6\left(cm\right)$

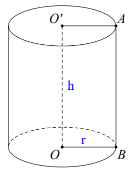
$S_{xq}=2\pi rh=60\pi\left(cm^2\right)$; $S_{tp}=2\pi r\left(h+r\right)=110\pi\left(cm^2\right)$

2. Điền đầy đủ các kết quả vào bảng sau

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm^2)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	2	20				
	10	8				
		16	8π			

Lời giải

Ta có bảng sau

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm^2)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	2	20	4π	4π	80π	80π
	10	8	20π	100π	160π	800π
	4	16	8π	16π	128π	256π

3. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 2 cm, chiều cao là 6 cm. Hãy tính:

a) Diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Diện tích toàn phần của hình trụ.

c) Thể tích hình trụ.

Lời giải

a) Diện tích xung quanh của hình trụ là

$S_{xq}=2\pi Rh=2\cdot\pi\cdot 2\cdot 6=24\pi\approx 24\cdot 3,14=75,36\left(\text{cm}^2\right)$

b) Diện tích toán phần của hình trụ là

$S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\cdot\pi\cdot 2\cdot 6+2\cdot\pi\cdot 2^2=24\pi+8\pi=32\pi\approx 32\cdot 3,14=100,48\left(\text{cm}^2\right)$

c) Thể tích hình trụ là: $V=\pi R^2 h=\pi.2^2.6=24\pi\approx 24.3,14=75,36\ (cm^3)$.

4. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính của đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là $314\ \text{cm}^2$. Tính:

a) Bán kính của đường tròn đáy (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

b) Thể tích của khối trụ.

Lời giải

Theo giả thiết $R = h$.

Ta có $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{S_{xq}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{314}{2\pi}} = 7,07 \text{ cm}.$

Ta có $V = \pi R^2 h = \pi h^3 = \pi \cdot 7,07^3 \approx 1110,22 \text{ cm}^3.$

5. Một hình trụ có bán kính của đường tròn đáy là 16 cm, chiều cao là 9 cm. Tính

a) Diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Thể tích của hình trụ. (Lấy $\pi = 3{,}142$ làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Ta có $S_{xq} = 2\pi Rl = 2 \cdot 3{,}142 \cdot 16 \cdot 9 = 983 \text{ cm}^2.$

b) Ta có $V = \pi R^2 h = 3{,}142 \cdot 16^2 \cdot 9 = 7239 \text{ cm}^3.$

6. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi\ cm^2$ và diện tích toàn phần là $28\pi\ cm^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.

Lời giải

Ta có $S_{\text{d}} = \frac{S_{\text{tp}} - S_{\text{Xq}}}{2} = \frac{28\pi - 20\pi}{2} = 4\pi \left(\text{cm}^2\right).$

Mà $S_{\text{d}} = \pi R^2 \Leftrightarrow \pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 2(\text{cm})$

Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh \Rightarrow h = \frac{20\pi}{2\pi R} = \frac{10}{2} = 5\ (\text{cm})$

Thể tích của hình trụ đó là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi \approx 62,8\left(\text{cm}^3\right).$

7. Một hình trụ có chiều cao bằng 5cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính thể tích hình trụ.

Lời giải

Vì diện tích toàn phần bằng hai lần diện tích xung quanh nên $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi Rh \Leftrightarrow 2\pi R^2 = 2\pi Rh \Leftrightarrow R = h.$

Vậy bán kính đáy là 5cm.

Thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 125\pi \left(\text{cm}^3\right).$

8. Một thùng phuy hình trụ có số đo diện tích xung quanh (tính bằng mét vuông) đúng bằng số đo thể tích (tính bằng mét khối). Tính bán kính đáy của hình trụ.

Lời giải

Gọi bán kính đáy và chiều cao hình trụ lần lượt là R và h.

Ta có $S_{\mathrm{Xq}} = 2\pi Rh\left(\mathrm{m}^2\right)$; $V = \pi R^2 h\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Theo đề bài hai số đo trên bằng nhau nên ta có $2\pi Rh = \pi R^2 h$ suy ra $R = 2\ (\mathrm{m})$.

9 . Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4, BC = 2$. Quay hình chữ nhật đó quanh AB thì được hình trụ có thể tích V_1; quay quanh BC thì được hình trụ có thể tích V_2. Trong các đẳng thức dưới đây đẳng thức nào đúng?

A. $V_1 = V_2$. B. $V_1 = 2V_2$. C. $V_2 = 2V_1$. D. $V_2 = 3V_1$.

Lời giải

Ta thấy rằng,

Khi quay hình chữ nhật quanh AB thì $h = AB = 4$, $R = BC = 2$ và $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$.

Khi quay hình chữ nhật quanh BC thì $h = BC = 2$, $R = AB = 4$ và $V_2 = \pi R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi$. Suy ra $V_2 = 2V_1$.

Chọn **C**.

10. Cho hình chữ nhật ABCD cạnh $AB = 6\,cm; AD = 4\,cm$

a) Quay quanh cạnh AB ta được 1 hình trụ có diện tích xung quanh bằng ?

b) Quay quanh cạnh AD ta được 1 hình trụ có thể tích bằng ?

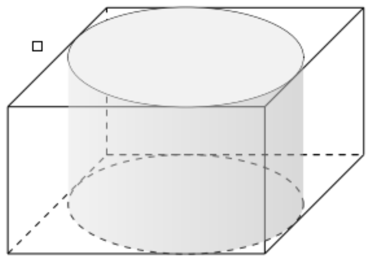
c) Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Nếu quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh trục MN, ta được một hình trụ có diện tích toàn phần là?

Lời giải

a) $S_{xq} = 48\pi\left(cm^2\right)$; b) $V = 144\pi\left(cm^3\right)$; c) $S_{tp} = 42\pi\left(cm^2\right)$

11. Một lọ hình trụ được "đặt khít" trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là $270\,\mathrm{cm}^3$, tính thể tích của hộp giấy.

Lời giải



Gọi bán kính và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.

Khi đó hình hộp chữ nhật có cạnh đáy là $2R$ và chiều cao là h. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ và hình hộp.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi R^2 h}{4R^2 h}$. Do đó $\dfrac{270}{V_2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $V_2 = \dfrac{270 \cdot 4}{\pi} \approx 344\left(\text{cm}^3\right)$

Vậy thể tích hình hộp là $344\left(\text{cm}^3\right)$.

12. Cho hình chữ nhật ABCD với $AB = 2a, BC = a$. Khi quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có thể tích V_1 và khi quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có thể tích V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

Lời giải

Khi quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh A B một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h = AB = 2a$, bán kính đáy $R = BC = a$ nên có thể tích

$V_1 = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3(\text{dvtt})$.

Khi quay hình chữ nhật ABCD quanh canh B C một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h' = BC = a$, bán kính đáy $R' = CD = 2a$ nên có thể tích

$V_2 = \pi R'^2 h' = \pi(2a)^2 \cdot a = 4\pi a^3(\text{ dtt })$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\pi a^3}{4\pi a^3} = \dfrac{1}{2}$.

13. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính là 3cm. Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $292,5\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hộp sữa đó.

Lời giải

Gọi R là bán kính đáy của hộp sữa, h là chiều cao của nó. Ta có $h = 2R + 3$. Vì diện tích toàn phần của hộp sữa là $292,5\pi\text{cm}^2$ nên

$2\pi R(h+R) = 292,5\pi$

$2\pi R(h+R) = 292,5\pi$

$2\pi R(2R+3+R) = 292,5\pi$

$R(R+1) = 48,75$

$R^2 + R - 48,75 = 0$

Giải ra được $R_1 = 6,5$ (chọn); $R_2 = -7,5$ (loại).

Vậy bán kính đáy hộp sữa là $6,5\,\mathrm{cm}$.

Chiều cao hộp sữa là $16\,\mathrm{cm}$. Thể tích hộp sữa là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot (6,5)^2 \cdot 16 = 676\pi\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

14. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > BC$. Biết diện tích hình chữ nhật là $48\ \mathrm{cm}^2$, chu vi là $28\,\mathrm{cm}$. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính dện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ này.

Lời giải

Từ đề bài ta có $\begin{cases} AB + BC = 14 \\ AB \cdot BC = 48 \end{cases}$.

Suy ra AB, CD là nghiệm của phương trình: $x^2 - 14x + 48 = 0$.

Giải phương trình ta đươc $x_1 = 6, x_2 = 8$.

Do $AB > BC$ nên $AB = 8; BC = 6$.

a) Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\mathrm{Xq}} = 2 \cdot \pi \cdot BC \cdot AB = 2\pi \cdot 6 \cdot 8 = 96\pi\ \left(\mathrm{cm}^2\right)$

b) Diện tích toàn phần của hình trụ là

$S_{\mathrm{tp}} = S_{Xq} + 2S_{\mathrm{d}} = 96\pi + 2\pi R^2 = 96\pi + 2\pi \cdot 6^2 = 168\pi\ \left(\mathrm{cm}^2\right)$

Thể tích của hình trụ là $V = \pi \cdot BC^2 \cdot AB = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Dạng 2 : Các bài toán chọn lọc thực tế về hình trụ.

15. Hiện nay các văn phòng thường sử dụng loại thùng rác văn phòng, màu sắc, chất liệu thân thiện với môi trường. Trong ảnh là một thùng rác văn phòng có đường cao $0,8\mathrm{m}$, đường kính $0,4\mathrm{m}$. Tính thể tích của thùng rác này (Coi thùng rác văn phòng là hình trụ).

Lời giải

Gọi bán kính đáy thùng rác văn phòng là R và chiều cao h.

Theo đề bài, ta có: $R = \dfrac{0,4}{2} = 0,2\text{m}$; $h = 0,8\text{m}$.

Thể tích thùng rác: $V = \pi R^2 h = \pi\left(0,2\right)^2.0,8 = \dfrac{4}{125}\pi\left(\text{m}^3\right)$.

16. Có hai lọ thủy tinh hình trụ, lọ thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30cm, chiều cao 20cm đựng đầy nước, lọ thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40cm, chiều cao 12cm. Hỏi nếu đổ hết nước từ lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước có bị tràn ra ngoài không? Tại sao?

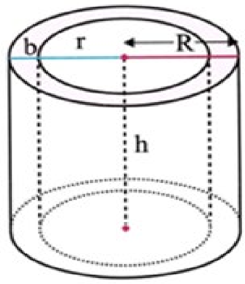
Lời giải

Thể tích của lọ thứ nhất: $\text{V}_1 = \pi.r^2.h = \pi.(\dfrac{30}{2})^2.20 = 4500\pi$.

Thể tích của lọ thứ hai: $\text{V}_2 = \pi.r^2.h = \pi.(\dfrac{40}{2})^2.12 = 4800\pi$.

Ta thấy ($\text{V}_2 > \text{V}_1\left(4800\pi > 4500\pi\right)$ nên nếu đổ hết nước từ lọ thứ nhất sang lọ thứ hai nước không bị tràn ra ngoài.

17. Người ta xây một bể ga hình trụ có bán kính $R = 1\text{m}$ (tính từ tâm bể đến mép ngoài), chiều dày của thành bể là $b = 0,05$ m ,chiều cao của bể là $h = 1,5\text{m}$. Tính dung tích của bể ga (làm tròn đến hai chữ số thập phân).



Lời giải

Bán kính hình trụ bên trong là: $r = 1 - 0,05 = 0,95\left(\text{m}\right)$.

Áp dụng công thức tính thể tích hình trụ, ta có: $V = \pi r^2 h = \pi\left(0,95\right)^2.1,5 \approx 4,25\left(\text{m}^3\right)$.

18. Một khúc gỗ quý hình trụ có đường kính đáy bằng 1,2 *m*, chiều cao bằng bán kính đáy

a) Tính diện tích xung quanh của khúc gỗ đó (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Với thành hiện tại, $1\ m^3$ gỗ trên bán được 5 triệu đồng. Hãy tính giá thành khúc gỗ trên nếu đem đi bán

Lời giải

a) Vì khúc gỗ hình trụ cón bán kính đáy $r = \dfrac{1,2}{2} = 0,6m$ và chiều cao $r = h = 0,6m$ nên diện tích xung quanh của khúc gỗ là: $S_{xq} = 2\pi rh = 2.\pi.0,6.0,6 \approx 2,26m^2$

Vậy diện tích xung quanh khúc gỗ là $2,26m^2$

b) Thể tích khúc gỗ là: $V = \pi r^2 h = \pi.\left(0,6\right)^2.0,6 \approx 0,68m^3$

$1\ m^3$ gỗ trên bán được 5 triệu đồng nên $0,68m^3$ gỗ sẽ bán được $0,68.5 = 3,4$ triệu đồng.

19. Một bồn nước inox Đại Thành có dạng hình trụ với chiều cao $1,75m$ và diện tích đáy là $0,32m^2$.

a) Tính bán kính đáy của bồn nước inox Đại Thành (làm tròn kết quả đến phần trăm).

b) Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn).

Lời giải

a) Vì đáy của bồn nước inox là đường tròn nên diện tích đáy là: $S_{day} = \pi.r^2$ suy ra $r^2 = \frac{S_{day}}{\pi} = \frac{0,32}{\pi}$. vậy $r \approx 0,32m$

b) Vì bồn nước hình trụ có chiều cao $h = 1,75m$ và diện tích đáy $S_{đáy} = 0,32m^2$ nên thể tích của bồn là: $V = S_{đáy}.h = 0,32.1,75 = 0,56m^3$

Vậy bồn đựng đầy được $0,56m^3$ nước.

20. Khi uống nước giải khát, người ta hay sử dụng ống hút nhựa dạng hình trụ đường kính đáy là $0,4\,cm$, chiều dài ống hút là $18cm$. Hỏi khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến phần ngàn).

Lời giải

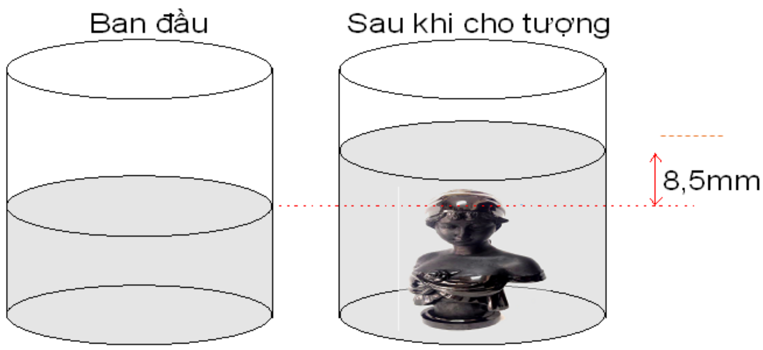
Vì ống hút hình trụ có bán kính đáy $R = 0,4 : 2 = 0,2\ cm$ và chiều cao $h = 18\ cm$ nên diện tích xung quanh của ống hút là:

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.0,2.18 \approx 22,608\left(cm^2\right)$$

Vậy khi thải ra môi trường, diện tích nhựa gây ô nhiễm cho môi trường do 100 ống hút này gây ra là $100.\ 22,608 = 2260,8\ cm^2$.

21.

Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $12,8\ \text{cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm $8,5\ \text{mm}$. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu?



Lời giải

Thể tích phần nước dâng lên là: $0,85.12,8 = 10,88\ \text{cm}^3$.

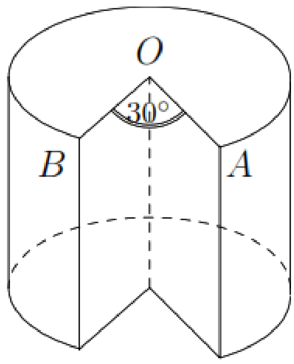
Vậy thể tích của tượng đá là $10,88\ \text{cm}^3$.

22. Một hình trụ có bán kính đáy là 3 cm, chiều cao 4 cm được đặt đứng trên mặt bàn. Một phần của hình trụ bị cắt rời theo các bán kính OA, OB và theo chiều dài thẳng đứng từ trên xuống dưới với $\widehat{AOB} = 30^\circ$.

a) Tính thể tích của phần bị cắt.

b) Tính thể tích của phần còn lại.

c) Diện tích toàn phần của hình trụ sau khi đã bị cắt.



Lời giải

a) Ta có $V_1 = S_q \cdot h = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 30}{360} \cdot 4 = 3\pi\ \text{cm}^3$.

b) Ta thấy $V_2 = V - V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 - 3\pi = 33\pi\ \text{cm}^3$.

c) Diện tích phần còn lại của hai đáy là $2\left(\pi \cdot 9 - \dfrac{\pi \cdot 9 \cdot 30}{360}\right) = \dfrac{33}{2}\pi\ \text{cm}^2$.

Diện tích xung quanh là $2\pi Rh \cdot \dfrac{\pi R \cdot 30}{180} + 2Rh = 22\pi + 24\ \text{cm}^2$.

Diện tích toàn phần là $\dfrac{33}{2}\pi + 22\pi + 24 = 38\dfrac{1}{2}\pi + 24\ \text{cm}^2$.

Dạng 3: Các bài toán về hình nón

Dạng 3. Các bài toán về hình nón

Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón :

$S_{\text{xq}} = \pi rl$; $S_{\text{tp}} = \pi rl + \pi r^2$

(r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón).

Thể tích hình nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ (h là chiều cao).

1. Cho hình nón có bán kính r, đường kính đáy là d, chiều cao h, đường sinh l, thể tích V, diện tích xung quanh S_{xq}, diện tích toàn phần S_{tp}. Hoàn thành bảng sau:

r (cm)	d (cm)	h (cm)	l (cm)	S_{xq} (cm^2)	S_{tp} (cm^2)	V (cm^3)
3			5			
		8				96π

	10			65π		
15		20				

Lời giải

$S_{xq} = \pi rl$; $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$ và $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

Ta có bảng sau

$r(\text{cm})$	$d(\text{cm})$	$h(\text{cm})$	$l(\text{cm})$	$S_{xq}(\text{cm}^2)$	$S_{tp}(\text{cm}^2)$	$V(\text{cm}^3)$
3	6	4	5	15π	24π	12π
6	12	8	10	60π	96π	96π
5	10	12	13	65π	90π	100π
15	30	20	25	375π	600π	1500π

2. Cho tam giác OIM vuông tại I có $OI = 4cm$ và $IM = 3cm$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón.

a) Tính độ dài đường sinh hình nón.

b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

c) Tính diện tích toàn phần hình nón.

d) Tính thể tích hình nón.

Lời giải

a) Xét tam giác OIM vuông tại I ,Theo Pythagore ta có :

$OM^2 = IM^2 + OI^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 \Rightarrow OM = 5$

Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành hình nón có bán kính đáy $r = IM = 3cm$, chiều cao $h = OI = 4cm$ và đường sinh là cạnh huyền $l = OM = 5cm$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là $5cm$.

b) Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi.3.5 = 15\pi\left(cm^2\right)$

c) Diện tích toàn phần hình nón là: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi r\left(l + r\right) = \pi.3\left(5 + 3\right) = 24\pi\left(cm^2\right)$

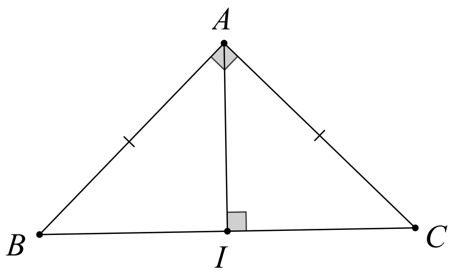
d) Thể tích hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.3^2.4 = 12\pi\left(cm^3\right)$

3. Cho tam giác $\Delta SO'A$ vuông tại cân ΔSOB, gọi $\frac{R'}{R} = \frac{SO'}{SO}$ là trung điểm của $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} == \frac{R'^2.SO'}{R^2.SO} = \left(\frac{SO'}{SO}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $BC = 2dm$. Khi quay tam giác 60° xung quanh trục $30\ cm$ ta được hình nón.

a) Tính diện t ích xung quanh hình nón.

b) Tính thể tích hình nón.

Lời giải



a) khi quay tam giác 60° xung quanh trục $30\ cm$, tao ra hình nón có:

bán kính đáy $r = \frac{BC}{2} = 1dm$, đường sinh là r_1, h_1, r_2, h_2

Diện tích xung quanh hình nón là: 60°

b) Chiều cao của hình nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 1dm$

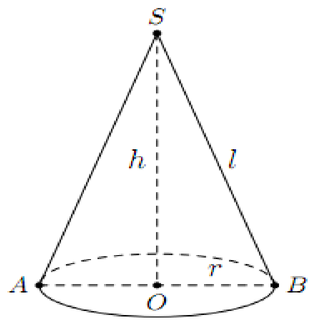
Thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.1.1 = \frac{1}{3}\pi\left(dm^3\right)$

4. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Tính theo r

a) Diện tích xung quanh của hình nón;

b) Thể tích của hình nón.

Lời giải



a) Diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy nên $\pi rl = 2\pi r^2$, suy ra $l = 2r$.

Vậy $\pi rl = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$.

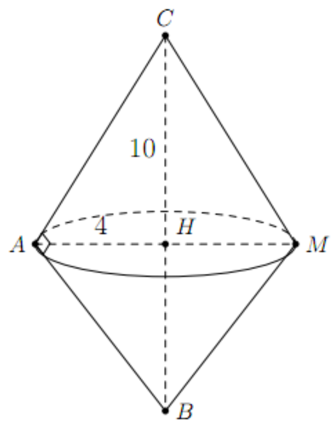
Diện tích xung quanh bằng $2\pi r^2$.

b) Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có $h^2 = l^2 - r^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$ nên $h = r\sqrt{3}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 r\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$

5. Cho tam giác ABC vuông tại $A, BC = 10\,\text{cm}$, đường cao $AH = 4\,\text{cm}$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC. Tính thể tích hình tạo thành.

Lời giải



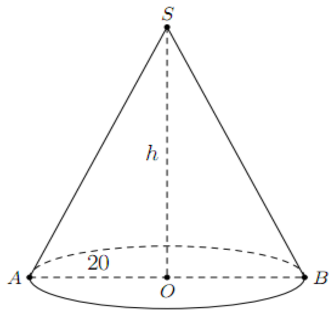
Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC, hình tạo thành gồm hai hình nón có đường cao theo thứ tự là HB và HC. Thể tích của hình tạo thành bằng.

$$\frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot CH = \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2(BH + CH)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2.BC = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2.10 = \frac{160}{3}\pi\ (cm^3).$$

6. Một hình nón có bán kính đáy bằng $20\,\text{cm}$, số đo thể tích (tính bằng cm^3) bằng bốn lần số đo diện tích xung quanh (tính bằng cm^2). Tính chiều cao của hình nón.

Lời giải



Gọi h là chiều cao của hình nón. Thể tích của hình nón bằng

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot h = \frac{400}{3}\pi h.$

Đường sinh SA bằng $\sqrt{h^2 + 20^2}$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

$S_{xq} = \pi \cdot 20\sqrt{h^2 + 400}$

Do $V = 4S_{xq}$ nên $\frac{400}{3}\pi h = 4 \cdot 20\pi\sqrt{h^2 + 400}$

$5h = 3\sqrt{h^2 + 400}$

$25h^2 = 9\left(h^2 + 400\right)$

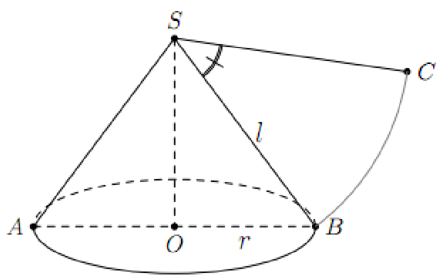
$h^2 = 225 \Leftrightarrow h = 15.$

Vậy chiều cao của hình nón bằng $15\,\text{cm}$.

7. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, đường sinh bằng l. Khai triển mặt xung quanh hình nón ta được một hình quạt. Tính số đo cung của hình quạt theo r và l.

Lời giải

Khi cắt mặt xung quanh của một hình nón theo một đường sinh và trải phẳng ra thành một hình quạt. Khi đó bán kính hình quạt tròn SBC bằng độ dài đường sinh $SB = l$ và độ dài $\overset{\frown}{BC}$ bằng chu vi đáy. Độ dài $\overset{\frown}{BC}$ của hình quạt bằng chu vi đáy của hình nón bằng $2\pi r$. Độ dài đường tròn $(S; SA)$ bằng $2\pi l$.



Ta có

$S_q = \frac{2\pi \cdot l^2 \cdot n}{360} = l \cdot 2\pi \cdot r \Rightarrow \frac{2\pi \cdot l^2 \cdot n}{360} = l \cdot 2\pi \cdot r$

$\Rightarrow \frac{l \cdot n}{360} = r$.

Do đó, số đo cung AB của hình quạt là

$n^{\circ} = 360^{\circ} \cdot \dfrac{2\pi r}{2\pi l} = 360^{\circ} \cdot \dfrac{r}{l}.$

8. (Áp dụng **bài 7**) Một hình nón có bán kính đáy bằng $7\,\text{cm}$, chiều cao bằng $24\,\text{cm}$.

a) Tính số đo cung hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón;

b) Tính diện tích toàn phần của hình nón.

Lời giải

a) Đường sinh bằng $l = 25\,\text{cm}$. Số đo cung của hình quạt là:

$$n^{\circ} = 360^{\circ} \cdot \frac{r}{l} = 360^{\circ} \cdot \frac{7}{25} = 100{,}8^{\circ}$$

b) Diện tích toàn phần của hình nón $S_{\text{tp}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r) = 224\pi$

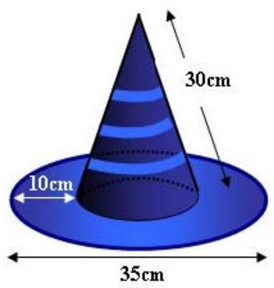
9. Một chiếc nón có đường kính đáy bằng $28\ cm$ và đường sinh bằng $30\ cm$. Tính diện tích lá dùng để làm nón, biết tỉ lệ hao hụt là 10% (lấy $\pi = 3{,}14$).

Lời giải

Vì chiếc nón hình nón có bán kính đáy $R = 28 : 2 = 14cm$ và đường sinh $l = 30cm$ nên diện tích xung quanh của chiếc nón là: $S_{xq} = \pi Rl = 3{,}14.14.30 = 1318{,}8\left(cm^2\right)$

Vậy diện tích lá dùng để làm nón là $110\%.1318{,}8 = 1450{,}68\ cm^2$.

10. Tính lượng vải cần mua để tạo ra nón của chú Hề trong hình bên. Biết rằng tỉ lệ khấu hao vải khi may nón là 15%.



Lời giải

Đặt S là diện tích vải dùng để tạo ra nón. Ta có: $S = S_1 + S_2$

$S_1 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$. Trong đó:

R, r là diện tích hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là:

$R = \dfrac{35}{2}, r = \dfrac{35}{2} - 10 = \dfrac{15}{2}$

S_2 là diện tích hình nón có $r = \dfrac{15}{2}$, $l = 30$, $S_2 = \pi rl$.

Do đó: $S = S_1 + S_2 = \pi\left(R^2 - r^2\right) + \pi rl$

$= \pi\left(\left(\dfrac{35}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{15}{2}\right)^2\right) + \pi\dfrac{15}{2}30 = 475\pi$

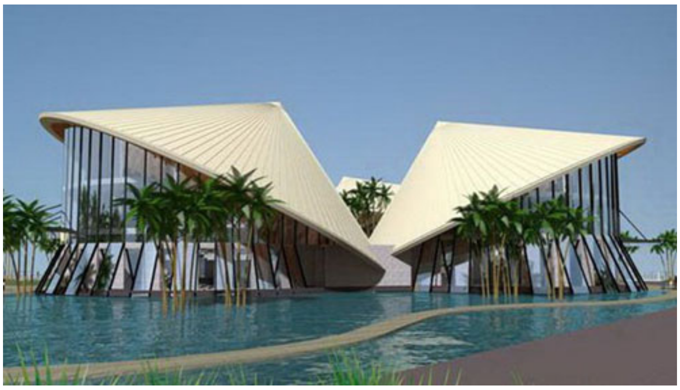
Vì tỉ lệ khấu hao vải khi may nón là 15%.

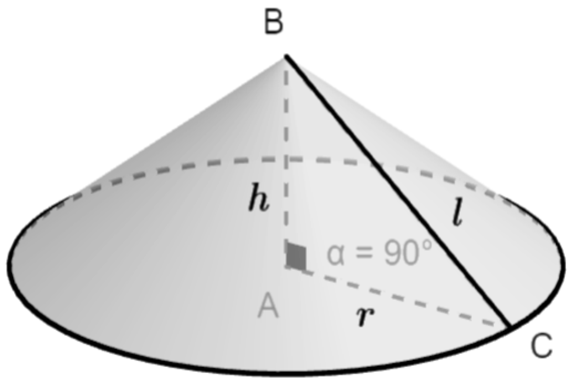
Nên diện tích vải cần dùng thực tế là:

$S + 15\%S = 475\pi + 15\%.475\pi = 546,25\pi \approx 1715,23\left(\text{cm}^2\right)$

Vậy diện tích vải cần dùng là khoảng $1715,23\,\text{cm}^2$.

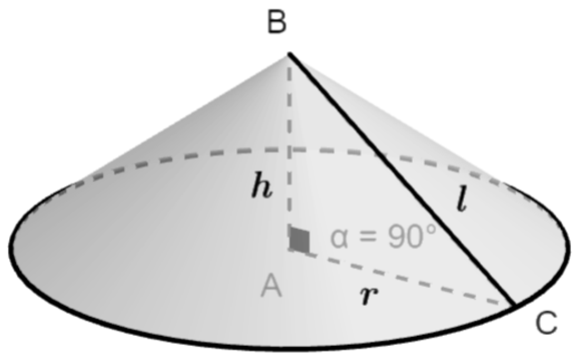
11. Nhà hát Cao Văn Lầu và Trung tâm triển lãm văn hóa nghệ thuật tỉnh Bạc Liêu có hình dáng 3 chiếc nón lá lớn nhất Việt Nam, mái nhà hình nón làm bằng vật liệu composite và được đặt hướng vào nhau. Em hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của mái nhà hình nón biết đường kính là 45m và chiều cao là 24m (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).





Lời giải

Diện tích xung quanh hình nón được tính bởi công thức $S_{xp} = 3,14rl$ với l là đường sinh được thể hiện như hình sau:



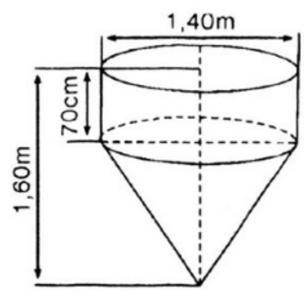
Như vậy, theo đề bài ta được $S = 3S_{xp} = 3.3,14.\frac{45}{2}\sqrt{\left(\frac{45}{2}\right)^2 + 24^2} \approx 6973\left(\text{m}^2\right)$ (đề bài nên nói rõ là diện tích xung quanh của mái nhà như vậy sẽ hay hơn).

Tương tự, thể tích của mái nhà là: $V = 3V' = 3.\frac{1}{3}3,14r^2h = 3,14.\left(\frac{45}{2}\right)^2 24 = 38151\left(\text{m}^3\right)$.

12. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình bên. Hãy tính:

a) Thể tích của dụng cụ này.

b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy).



Lời giải

a) Thể tích phần hình trụ là: $V_1 = \pi hr^2 = 0,7.\pi.\left(\frac{1,4}{2}\right)^2 = 0,343\pi \text{ m}^3$

Thể tích phần hình nón là: $V_1 = \frac{1}{3}\pi \text{hr}^2 = \frac{1}{3}.0,9.\pi.\left(\frac{1,4}{2}\right)^2 = 0,147\pi \text{ m}^3$

Thể tích của dụng cụ là: $V = V_1 + V_2 = 0,343\pi + 0,147\pi = 0,49\pi \approx 1,5386 \text{ m}^3$

b) Diện tích xung quanh của phần hình trụ: $S_1 = 2\pi rh = 2\pi.0,7.0,7 = 0,98\pi \text{ m}^2$

Độ dài đường sinh của hình nón: $l=\sqrt{0,9^2+0,7^2}=\sqrt{1,3}$ m

Diện tích xung quanh của phần hình nón: $S_2=\pi rl=\pi.0,7.\sqrt{1,3}=0,07\sqrt{130}\pi\left(\mathrm{m}^2\right)$.

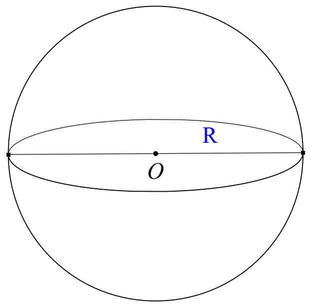
Diện tích của mặt ngoài dụng cụ là: $S=S_1+S_2=0,98\pi+0,07\sqrt{130}\pi\approx 5,58\ \left(\mathrm{m}^2\right)$.

BÀI 32. HÌNH CẦU

BÀI TẬP

Dạng 1. Các bài toán về hình cầu

1. Cho hình cầu có bán kính R như hình vẽ. Hãy thay dấu “?”bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau:

Hình cầu	Bán kính (dm)	Diện tích mặt cầu (dm^2)	Thể tích hình cầu (dm^3)
	4	?	?
	?	144π	?
	?	?	36π
	?	196π	

Lời giải

• Với $R = 4$

+ Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.4^2 = 64\pi\left(dm^2\right)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.4^3 = \dfrac{256}{3}\pi\left(dm^3\right)$

• Với $S = 144\pi$

+ Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2$ suy ra $R^2 = \dfrac{S}{4\pi}$, thay số $R^2 = \dfrac{144\pi}{4\pi}$ nên $R^2 = 36$

$\Rightarrow R = 6\left(dm\right)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.6^3 = 288\pi\left(dm^3\right)$

• Với $V = 36\pi$

+ Thể tích mặt cầu là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ suy ra $R^3 = \dfrac{3V}{4\pi}$ thay số $R^3 = \dfrac{3.36\pi}{4\pi}$ nên $R^3 = 27$ hay

$R=3(dm)$

+ Diện tích mặt cầu có bán kính R là: $S=4\pi R^2=4\pi.3^2=36\pi\left(dm^2\right)$

• Với $S=196\pi$

+ Diện tích mặt cầu là: $S=4\pi R^2$ hay $R^2=\dfrac{S}{4\pi}$ thay số $R^2=\dfrac{196\pi}{4\pi}$ suy ra $R^2=49$ vậy

$R=7(dm)$

+ Thể tích của hình cầu có bán kính R là: $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi.7^3=\dfrac{1372}{3}\pi\left(dm^3\right)$

2. Một phao cơ hình cầu tự động đóng nước chảy vào bể khi bể đầy. Biết diện tích bề mặt của phao là $804\,\text{cm}^2$, tính bán kính của phao.

Lời giải

Từ công thức $S=4\pi R^2\Rightarrow R=\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$. Bán kính của phao là $R=\sqrt{\dfrac{804}{4\pi}}\approx 8\,\text{cm}$.

3. Một trái dưa có dạng hình cầu. Bổ đôi trái dưa này ra thì mặt cắt có diện tích là $314\,\text{cm}^2$. Tính thể tích của trái dưa đó.

Lời giải

Khi bổ đôi trái dưa thì mặt cắt là một hình tròn. Ta có:

$S=\pi R^2\Rightarrow R=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}\approx\sqrt{\dfrac{314}{3,14}}=10\,\text{cm}$

Vậy bán kính của trái dưa là $10\,\text{cm}$. Thể tích của trái dưa là:

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 10^3\approx 4187\,\text{cm}^3$

4. Trái đất có bán kính $6400\,\text{km}$. Diện tích biển và đại dương chiếm $\dfrac{3}{4}$ bề mặt Trái đất. Hãy tính diện tích biển và đại dương của Trái đất (làm tròn đến triệu km^2).

Lời giải

Diện tích bề mặt trái đất là $S=4\pi R^2=4\cdot\pi\cdot 6400^2\approx 514457600\,\text{km}^2$.

Diện tích các biển và đại dương là $514457600\cdot\dfrac{3}{4}\approx 386000000\,\text{km}^2$.

5. Bạn An lấy thước dây đo vòng theo đường xích đạo của quả địa cầu trong thư viện được độ dài $94,2\,\text{cm}$. Hãy tính

a) Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu.

b) Thể tích của quả địa cầu.

Lời giải

Ta có chu vi của đường tròn xích đạo là $94,2\,\text{cm}$ nên $R = \dfrac{C}{2\pi} \approx \dfrac{94,2}{2 \cdot 3,14} = 15\,\text{cm}$

Do đó

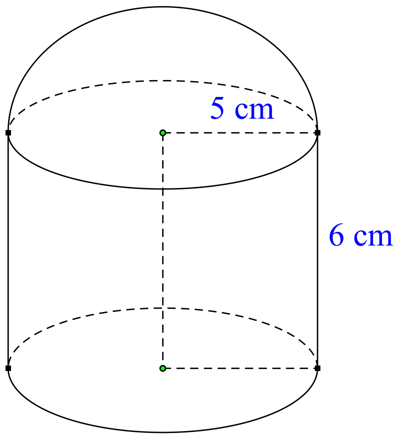
a) Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu là $S = 4\pi R^2 = 900\pi\ \text{cm}^2$.

b) Thể tích của quả địa cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4500\,\text{cm}^3$.

6. Hình bên minh họa bộ phận lọc của một bình nước. Bộ phận này gồm một hình trụ và một nửa hình cầu với kích thước ghi trên hình. Hãy tính:

a) Thể tích của bộ phận đó;

b) Diện tích mặt ngoài của bộ phận này.



a) Thể tích phần hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 150\pi\text{cm}^3$.

Thể tích nửa hình cầu: $V_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{2}{3}\pi \cdot 5^3 = \dfrac{250}{3}\pi\text{cm}^3$

Thể tích bộ phận lọc là: $V = V_1 + V_2 = 150\pi + \dfrac{250}{3}\pi = \dfrac{700}{3}\pi\text{cm}^3 \approx 733\,\text{cm}^3$.

b) Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_1 = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 60\pi\text{cm}^2$.

Diện tích đáy hình trụ là: $S_2 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\text{cm}^3$.

Diện tích nửa mặt cầu là: $S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi \cdot 5^2 = 50\pi \text{cm}^3$

Diện tích mặt ngoài của bộ phận lọc:

$S = S_1 + S_2 + S_3 = 60\pi + 25\pi + 50\pi = 135\pi \text{cm}^2 \approx 424 \text{cm}^2$.

7. Một hình cầu đặt vừa khít trong một hình trụ có chiều cao là 18cm. Tính thể tích phần không gian nằm trong hình trụ nhưng nằm bên ngoài hình cầu.

Lời giải

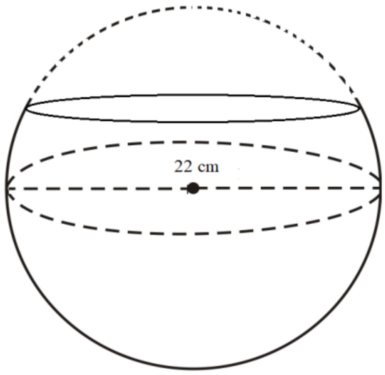
Vì hình cầu đặt vừa khít trong hình trụ nên chiều cao của hình trụ bằng đường kính đáy và bằng đường kính của hình cầu. Bán kính đáy của hình cầu là 9cm.

Khi đó, thể tích hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 9^2 \cdot 18 = 1458 \text{cm}^3$.

Thể tích hình cầu là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi \text{cm}^3$.

Vậy thể tích cần tính là $V = V_1 - V_2 = 486\pi \approx 1526 \text{cm}^3$.

8. Cần phải có ít nhất bao nhiêu lít nước để thay nước ở liễn nuôi cá cảnh ? Liễn được xem như một phần mặt cầu có đường kính 22cm. Lượng nước đổ vào liễn chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích của hình cầu. (lấy $\pi \approx 3{,}14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



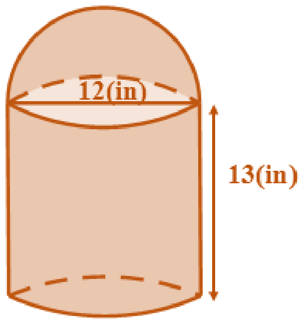
Lời giải

Ta có: $V_{\text{cÇu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}.3{,}14.\left(\frac{22}{2}\right)^3 \approx 5572{,}45 \left(\text{cm}^3\right)$.

Mà $V_{\text{liÔn}} = \frac{2}{3} V_{\text{cÇu}} = \frac{2}{3}.5572{,}45 \approx 3715 \left(\text{cm}^3\right)$.

Vậy thể tích nước ít nhất dùng để thay nước ở liễn nuôi cá là $3715 \left(\text{cm}^3\right)$.

9. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một khối linh kiện máy (gồm một hình trụ và một nửa hình cầu có cùng đáy) với các kích thước đã cho ở hình vẽ sau theo đơn vị in^2.



Gọi h và r lần lượt là chiều cao và bán kính của hình trụ.

Bán kính của hình trụ: $r = \dfrac{12}{2} = 6\,(\mathrm{in})$.

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_1 = 2\pi rh = 2\pi.6.13 = 156\pi\,(\mathrm{in}^2)$.

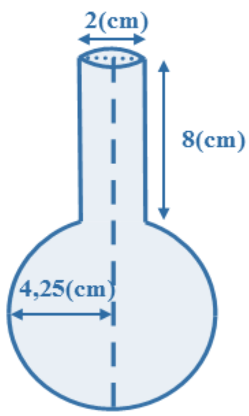
Diện tích xung quanh của nửa hình cầu: $S_2 = \dfrac{1}{2}.4\pi r^2 = \dfrac{1}{2}.4\pi.6^2 = 72\pi\,(\mathrm{in}^2)$.

Diện tích xung quanh của khối linh kiện máy: $S_{xq} = S_1 + S_2 = 156\pi + 72\pi = 228\pi\,(\mathrm{in}^2)$.

Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_3 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi.6.13 + 2\pi.6^2 = 228\pi\,(\mathrm{in}^2)$.

Diện tích toàn phần của khối linh kiện máy: $S_{tp} = S_2 + S_3 = 300\pi\,(\mathrm{in}^2)$.

10. Người ta đổ đầy nước vào một bình đong với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính thể tích của phần nước trong bình (giả sử bề dày của ống nghiệm không đáng kể).



Lời giải

Ống nghiệm gồm 2 phần: phần trên có dạng hình trụ và phần dưới có dạng hình cầu.

Gọi R và r lần lượt là bán kính hình cầu và bán kính hình trụ.

Thể tích hình cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.(4,25)^3 = \frac{4913}{48}\pi\,(\text{cm}^3)$.

Thể tích hình trụ: $V_2 = \pi r^2 h = \pi.\left(\frac{2}{1}\right)^2.8 = 8\pi\,(\text{cm}^3)$.

Thể tích của phần nước trong bình: $V = V_1 + V_2 = \frac{4913}{48}\pi + 8\pi = \frac{5297}{48}\pi\,(\text{cm}^3)$.

11. Các viên kẹo mút có dạng hình cầu, bán kính $1,6\,(\text{cm})$. Người ta dùng một que nhựa hình trụ tròn, bán kính $0,2\,(\text{cm})$ cắm vào đến phân nửa viên kẹo để người dùng tiện sử dụng.

a) Tính thể tích phần ống nhựa hình trụ cắm vào phân nửa viên kẹo.

b) Tính thể tích thực của viên kẹo sau khi trừ phần ống nhựa cắm vào.

Lời giải

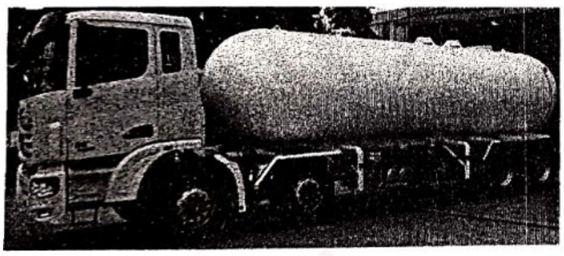
a) Thể tích phần ống nhựa hình trụ cắm vào viên kẹo là:

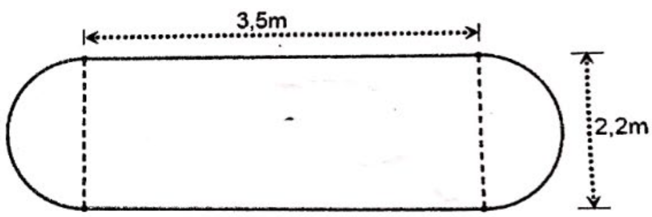
$V = \pi r^2 h = \pi.(0,2)^2.1,6 = 0,064\pi\,(\text{cm}^3)$.

b) Thể tích hình cầu có bán kính $1,6\,\text{cm}$ là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi.(1,6)^3 = 5,46\pi\,(\text{cm}^3)$.

Thể tích thực của viên kẹo là: $V = 5,46\pi - 0,064\pi = 5,396\pi\,(\text{cm}^3)$.

12. Một bồn chứa xăng đặt trên xe gồm hai nửa hình cầu có đường kính là $2,2\text{m}$ và một hình trụ có chiều dài $3,5\text{m}$ (hình 2). Tính thể tích của bồn chứa xăng (*kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy*)





Hình 2

Hướng dẫn giải

$V_{\text{khối cầu}} = = \frac{4}{3}\pi\left(1,1\right)^3 \cong 5,58\left(\text{m}^3\right).$

$V_{\text{khối trụ}} = \pi.\left(1,1\right)^2.3.5 \cong 13,3\left(\text{m}^3\right).$

Thể tích của bồn chứa là: $V = V_{kc} + V_{kt} = 18,88\left(\text{m}^3\right).$