CHUYÊN ĐỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

CHỦ ĐỀ 1: ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA:

Số chính phương là bình phương đúng của một số nguyên.

Ví dụ : 4 và 6 là hai số chính phương vì $4=2^2; 16=4^2$

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG:

1. Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là $0; 1; 4; 5; 6; 9$, không thể có chữ số tận cùng là $2; 3; 7; 8$

$\Rightarrow$ Để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là $2; 3; 7; 8$

2. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với mũ chẵn, không chứa TSNT với mũ lẻ.

Từ tính chất 2 ta có các hệ quả:

a) Số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4.
b) Số chính phương chia hết cho 3 thì phải chia hết cho 9.
c) Số chính phương chia hết cho 5 phải chia hết cho 25.
d) Số chính phương chia hết cho 8 thì phải chia hết cho 16.
e) Tích của các số chính phương là một số chính phương.
f) Với A là số chính phương và $A=a.b$, nếu a là số chính phương thì b cũng là số chính phương.

$\Rightarrow$ Để chứng minh một số không phải SCP ta chỉ ra số đó khi phân tích ra TSNT thì có số mũ lẻ.

3. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $3n$ hoặc $3n+1$ ($a^2 \equiv 0 \pmod 3$, $a^2 \equiv 1 \pmod 3$), không có SCP nào có dạng $3n+2$ $\left(n \in \mathbb{N}\right)$.

4. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $4n$ hoặc $4n+1$ ($a^2 \equiv 0 \pmod 4$, $a^2 \equiv 1 \pmod 4$) không có SCP nào có dang $4n+2$ hoặc $4n+3$ $\left(n \in \mathbb{N}\right)$

5. Số các ước số của một số chính phương là số lẻ, ngược lại một số có số lượng các ước là lẻ thì đó là số chính phương.

6. Nếu A số một số chính phương, A chia hết cho p và p là một số nguyên tố thì A chia hết cho p^2.

7. Nếu a^2 chia hết cho p và p là một số nguyên tố thì a chia hết cho p.

8. Hai số chính phương a^2 và $\left(a+1\right)^2$ được gọi là hai số chính phương liên tiếp. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

Nghĩa là: nếu $n^2 < A < \left(n+1\right)^2$ thì A không là số chính phương.

9. Nếu tích $a.b$ là một số chính phương và $(a,b)=1$ thì hai số a và b đều là các số chính phương

10. Số chính phương biểu diễn được thành tổng các số lẻ : $1+3=2^2; 1+3+5=3^2; 1+3+5+7=4^2...$

Chứng minh:

Giả sử: $A=1+3+5+...+\left(2k+1\right)$ với $k\in\mathbb{N}$

Ta có từ 1 đến $2k+1$ có $\dfrac{(2k+1)-1}{2}+1=k+1$ số hạng

$\Rightarrow A=1+3+5+...+\left(2k+1\right)=\dfrac{\left(2k+1+1\right)\left(k+1\right)}{2}=\left(k+1\right)^2$ (đpcm)

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Bài 1: Cho các số $n\in\left\{11;\ 101;\ 1001;\ 10001;\ \underbrace{100...01}_{\text{k chữ số 0}}\right\}$. Hãy tìm các số chính phương n^2.

Lời giải:

Ta có: $11^2=121$

$101^2=10201$

$1001^2=1002001$

$10001^2=100020001$

Tổng quát: $1\underbrace{00...0}_{\text{k chữ số 0}}1^2=1\underbrace{00...0}_{\text{k chữ số 0}}2\underbrace{00...0}_{\text{k chữ số 0}}1$

Bài 2: Các biểu thức số sau có phải số chính phương hay không?

a) $A=3+3^2+3^3+...+3^{20}$

b) $B=11+11^2+11^3$

c) $C=10^{10}+8$

d) $D=100!+7$

e) $E=10^{10}+5$

f) $F=10^{100}+10^{50}+1$

g) $G=2004000$

h) $H=2001^{2001}$

Lời giải

a) Ta có: $3^n\,\vdots\,9$ với mọi $n\geq 2$ nên $\left(3^2+3^3+...+3^{20}\right)\vdots\,9$

Suy ra $A=3+3^2+3^3+...+3^{20}$ chia cho 9 dư 3.

Vì A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không phải là số chính phương.

b) Ta có: $B=11+11^2+11^3$

$B=11(1+11+11^2)$

$B=11.133$

$B=\overline{...3}$

$\Rightarrow B$ có chữ số tận cùng là 3 nên B không phải là số chính phương.

c) Ta có $10^{10}+8$ có chữ số tận cùng là 8 nên không phải là số chính phương.

d) Ta có $100!+7$ có chữ số tận cùng là 7 nên không phải là số chính phương.

e) Ta có $10^{10}+5$ có cặp chữ số tận cùng là 05 chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không phải là số chính phương.

f) Ta có $10^{100}+10^{50}+1$ có tổng các chữ số là 3 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không phải là số chính phương.

g) Ta có số 2004000 có tận cùng là 3 chữ số 0

$\Rightarrow G$ không tận cùng là chẵn lần chữ số 0

$\Rightarrow G$ không là số chính phương.

h) Ta có: $H=2001^{2001}=2001^{2000}.2001=\left(2001^{1000}\right)^2.2001$

$\left(2001^{1000}\right)^2$ là số chính phương, ta xét số 2001:

Vì 2001 có tổng các chữ số là 3 nên số 2001 chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9.

$\Rightarrow$ số 2001 không là số chính phương.

Vậy H không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng:

a) Một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.

b) Một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.

c) Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 4.

d) Một số chính phương lẻ khi chia cho 8 chỉ có số dư là 1.

Lời giải:

a) Ta xét các trường hợp của n khi chia cho 3:

+ Nếu $n=3k \Rightarrow n^2=9k^2 \vdots 3$

+ Nếu $n=3k+1 \Rightarrow n^2=\underbrace{9k^2}_{\vdots 3}+\underbrace{6k}_{\vdots 3}+1 \Rightarrow n$ chia 3 dư 1

+ Nếu $n=3k+2 \Rightarrow n^2=9k^2+12k+4=\underbrace{9k^2+12k+3}_{\vdots 3}+1 \Rightarrow n$ chia 3 dư 1

Vậy một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.

b) Ta xét các trường hợp của n khi chia cho 2:

+ Nếu $n=2k \Rightarrow n^2=4k^2 \vdots 4 \Rightarrow n$ chia 4 dư 0

+ Nếu $n=2k+1 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1=\underbrace{4k^2+4k}_{\vdots 4}+1 \Rightarrow n$ chia 4 dư 1

Vậy một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 4.

c) Ta xét các trường hợp của n khi chia cho 5:

+ Nếu $n=5k \Rightarrow n^2=25k^2 \vdots 5 \Rightarrow n$ chia 5 dư 0

+ Nếu $n=5k\pm1 \Rightarrow n^2=25k^2\pm10k+1$ $\underbrace{25k^2\pm10k}_{\vdots 5}+1 \Rightarrow n$ chia 5 dư 1

+ Nếu $n = 5k \pm 2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = \underbrace{25k^2 \pm 20k}_{\vdots 5} + 4 \Rightarrow n$ chia 5 dư 4

d) Ta có: $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$

Vì $k(k+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên $k(k+1)$ chia hết cho 2.

$\Rightarrow$ $4k(k+1)$ chia hết cho 8.

$\Rightarrow 4k(k+1)+1$ chia 8 dư 1.

Vậy một số chính phương lẻ khi chia cho 8 chỉ có số dư là 1.

Bài 4: a) Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{20}$. Chứng minh rằng $A+4$ không là số chính phương.

b) Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B+3$ không là số chính phương.

Lời giải:

a) Ta có: $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{20}$ (1)

$\Rightarrow 2.A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{21}$ (2)

Lấy (2) trừ (1) ta được: $2.A - A = 2^{21} - 2^2$

$\Rightarrow A = 2^{21} - 4$

$\Rightarrow A + 4 = 2^{21} - 4 + 4 = 2^{21}$

$\Rightarrow A + 4 = 2^{20}.2 = \left(2^{10}\right)^2.2$

Mà trong tích $\left(2^{10}\right)^2.2$ ta có số 2 không là số chính phương

$\Rightarrow A+4$ không là số chính phương

b) Ta có: $B = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}$ (3)

$\Rightarrow 3.B = 3^2 + 3^3 + 3^4 ... + 3^{101}$ (4)

Lấy (4) trừ (3) ta được: $3.B - B = 3^{101} - 3$

$\Rightarrow 2B = 3^{101} - 3$

$\Rightarrow 2B + 3 = 3^{101} - 3 + 3$

$\Rightarrow 2B + 3 = 3^{101}$

$\Rightarrow 2B+3=3^{100}.3=\left(3^{50}\right)^2.3$

Ta có $\left(3^{50}\right)^2.3$ không là số chính phương do 3 không là số chính phương.

Vậy $2B+3$ không là số chính phương.

- **Lưu ý:** $B+3=3^{101}$, $A+4=2^{21}$ cũng có thể kết luận ngay chúng không là số chính phương (Chứ thừa số nguyên tố với số mũ lẻ)

Bài 5: Cho hai số chính phương có tổng là một số chia hết cho 3. Chứng minh rằng cả hai số chính phương đó đều chia hết cho 9.

Lời giải

Gọi hai số chính phương là: a^2, b^2. Theo đầu bài ta có: $a^2+b^2 \vdots 3$

Ta xét các trường hợp:

+ Giả sử $a^2 \not\vdots\, 3$, $b^2 \not\vdots\, 3 \Rightarrow a^2+b^2$ chia 3 dư 2 (theo tính chất 3)

$\Rightarrow$ mâu thuẫn giả thiết $a^2+b^2 \vdots 3$

+ Giả sử hoặc a^2 hoặc b^2 không chia hết cho 3, số còn lại chia hết cho 3 $\Rightarrow a^2+b^2 \not\vdots\, 3$ (mâu thuẫn giả thiết)

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \vdots 3 \\ b^2 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 3 \\ b \vdots 3 \end{cases}$, mà 3 là số nguyên tố.

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \vdots 9 \\ b^2 \vdots 9 \end{cases}$ (đpcm)

Bài 6: Cho A là số chính phương gồm bốn chữ số, nếu ta thêm vào mỗi chữ số của số A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Tìm A và B.

Lời giải

Đặt $A=a^2; B=b^2 (a<b; 32 \le a<b<100)$

Vì thêm vào mỗi chữ số của số A một đơn vị thì ta được số B nên dễ thấy: $B-A=1111$

Mà: $1111=1.1111=11.101$ và $1 \le b-a<b+a<200$

$\Rightarrow 1111=b^2-a^2=(b-a)(b+a)$

$\Rightarrow \begin{cases} b-a=11 \\ b+a=101 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=45 \\ b=56 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A=a^2=2025 \\ B=b^2=3136 \end{cases}$

Vậy hai số cần tìm là $2025; 3136$.

Bài 7: Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ $(a > b > 0)$, sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$ là số chính phương;

Mà $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

$\Rightarrow a - b$ là số chính phương

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 1 \\ a - b = 4 \end{array}\right.$

+) Với $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$

+) Với $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$

Vậy các số nguyên tố $\overline{ab}$ thỏa yêu cầu đề bài là: $\overline{ab} \in \{43; 73\}$

Bài 8: Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

Lời giải

Gọi số chính phương cần tìm là : $\overline{\text{aabb}} = n^2 \quad (a, b \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9)$

Ta có : $\overline{\text{aabb}} = 1000a + 100a + 10b + b$

$\Leftrightarrow n^2 = 1100a + 11b$

$\Leftrightarrow n^2 = 11(100a + b)$ (1)

Lại có : $\overline{\text{aabb}} \,\vdots\, 11 \Rightarrow 100a + b \,\vdots\, 11$

$\Rightarrow (99a + a + b) \,\vdots\, 11$ mà $99a \,\vdots\, 11$

$\Rightarrow a + b \,\vdots\, 11$

Mà : $1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9 \Rightarrow 1 \le a + b \le 18 \Rightarrow a + b = 11$

Thay $a + b = 11$ vào (1), ta được : $n^2 = 11(99a + 11) = 11(9.11a + 11) = 11^{12}(9a + 1)$

$\Rightarrow 9a + 1$ phải là số chính phương (do 11^{12} là số chính phương)

Ta có bảng sau:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9a + 1	10 (ktm)	19 (ktm)	28 (ktm)	37 (ktm)	46 (ktm)	55 (ktm)	64 (tm)	73 (ktm)	82 (ktm)
b							4		

Ta có : $7744 = 11^2.8^2 = 88^2$

Vậy số cần tìm là : 7744.

Cách 2:

Gọi số chính phương cần tìm là : $\overline{\text{aabb}} = n^2 \quad (a,b \in N, 1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9)$

Ta có: $n^2 = \overline{\text{aabb}} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a+b) == 11.\overline{a0b}$

Do đó: $\overline{a0b} = 11k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$

Ta có: $100 \le 11k^2 \le 909$

$\Rightarrow 9\dfrac{1}{11} \le k^2 \le 82\dfrac{7}{11}$

$\Rightarrow 4 \le k \le 9$

Ta có bảng:

k	4	5	6	7	8	9
$11k^2$	176	275	396	539	704	891

Mà $\overline{a0b} = 11k^2 \;\Rightarrow \overline{a0b} = 704$

$\Rightarrow$ chọn $k = 8$

$\Rightarrow n^2 = \overline{\text{aabb}} = 11.11k^2 = 11.11.8^2 = 88^2 = 7744$

Bài 9: Tìm số tự nhiên n để $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2 (a > 0, a \in N) \Rightarrow 48^2 + 2^n = a^2 \Rightarrow 2^n = (a-48)(a+48)$

+) Với $n = 0 \Rightarrow (a-48)(a+48) = 1 \Rightarrow$ vô lí

+) Với $n > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 48 = 2^x \\ a - 48 = 2^y \end{cases} \; (x + y = n;\; x > y)$

$\Rightarrow 96 = 2^x - 2^y$

$\Rightarrow 2^y(\underbrace{2^{x-y} - 1}_{lẻ}) = 2^5.3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 5 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow n = 12$

Bài 10: Viết liên tiếp từ 1 đến 12 được số $A = 1.2.3...1112$.

Hỏi: số A có thể có 81 ước được không?

Lời giải

Giả sử A có 81 ước.
Vì số lượng các ước của A là 81 (là số lẻ) nên A là số chính phương (1)
Mặt khác, tổng của các chữ số của A là $1+2+3+...+12=51$
Vì $51 \vdots 3$ nên A chia hết cho 3 nhưng A không chia hết cho 9, do đó A không là số chính phương mâu thuẫn với (1).
Vậy A không thể có 81 ước.

Bài 11: Tìm số có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 45 thì ta được một số chính phương.

Lời giải

Gọi số phải tìm là n $\left(n \in \mathbb{N}, 10 < n < 99\right)$

Ta có: $45.n = a^2$ $\left(a \in \mathbb{N}\right)$ hay $\Rightarrow 3^2.5.n = a^2$

Vì số chính phương chỉ có các thừa số nguyên tố với mũ chẵn nên $n = 5.k^2$ $\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

+) Với $k=1 \Rightarrow n = 5.1^2 = 5$ (không thỏa mãn)

+) Với $k=2 \Rightarrow n = 5.2^2 = 20$

+) Với $k=3 \Rightarrow n = 5.3^2 = 45$

+) Với $k=4 \Rightarrow n = 5.4^2 = 80$

+) Với $k \ge 5 \Rightarrow n \ge 5.5^2 \ge 125$ (loại vì n có nhiều hơn hai chữ số)

Vậy số cần tìm là $20;45;80$

Bài 12: Chứng minh rằng: một số tự nhiên viết toàn bằng chữ số 2 thì không phải số chính phương.

Lời giải

Gọi A là số tự nhiên được ghi bởi n chữ số 2 ($n > 2$)

Ta có: $A = 222...222 = 222...200 + 22 \Rightarrow A \not\vdots 4$

$\Rightarrow A$ là số tự nhiên chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Bài 13: Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2008 thì có thể là số chính phương được không? Vì sao?

Lời giải

Gọi n là số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2008 $(n \in \mathbb{N})$

Ta có: $2018 = 672.3 + 2$

Vì tổng các chữ số của n chia 3 dư 2 nên số n khi chia cho 3 cũng có số dư là 2

$\Rightarrow n$ có dạng $n = 3k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$

Mà một số chính phương không có dạng $3k+2$ nên số tự nhiên n không là số chính phương.

Vậy một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2008 thì không là số chính phương.

Bài 14: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

Ta có:

$A = 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + ... + (2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33})$

$A = 3 + 2(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + ... + 2^{29}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$

$A = 3 + 2.30 + ... + 2^{29}.30$

$A = 3 + 30.(2 + 2^2 + ... + 2^{29})$

$A = \left[3.(2 + 2^2 + ... + 2^{29})\right].10 + 3$

$\Rightarrow A$ có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

PHẦN III. CÁC BÀI TRONG ĐỀ THI

Bài 1: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 – 2016)

Lời giải

Ta có

$2012^{4n} \vdots 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$2014^{4n} \vdots 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$2013^{4n} = \left(2013^{4n} - 1\right) + 1$ chia cho 4 dư 1

$2015^{4n} = \left(2015^{4n} - 1\right) + 1$ chia cho 4 dư 1

Do đó $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2

Ta có $A \vdots 2$ nhưng A không chia hết cho 2^2, mà 2 là số nguyên tố nên A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng $n^5 + 1999n + 2017 \left(n \in \mathbb{N}\right)$ không phải là số chính phương.

(Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

Lời giải

Ta có

$A = n^5 + 1999n + 2017 = n^5 - n + 2000n + 2015 + 2$

$A = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+2) + 2000n + 2015 + 2$

Ta thấy

$n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\vdots 5$

$5n(n-1)(n+2)\vdots 5$

$2000.n\vdots 5$

$2015\vdots 5$

Nên A chia 5 dư 2, mà không có số chính phương nào chia 5 dư 2.

Vậy $n^5+1999n+2017\left(n\in\mathbb{N}\right)$ không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Huy Tưởng năm học 2004-2005)

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3 (a\in\mathbb{N}^*)$

Ta xét $S=a+(a+1)+(a+2)+(a+3)=4a+6$

Vì $4a\vdots 2$ và $6\vdots 2$ nên $S\vdots 2$

Mặt khác $4a\vdots 4$ và 6 không chia hết cho 4 nên S không chia hết cho 4.

Vậy S chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên S không là số chính phương.

Bài 4: Cho $B=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n-1)(n-2)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG Bắc Ninh 2018-2019)

Lời giải

Ta có

$$4B=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+n(n-1)(n-2).\left[(n+3)-(n-1)\right]$$
$$4B=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)=n^4+6n^3+11n^2+6n$$

Ta có: $n^4+6n^3+11n^2+6n<n^4+6n^3+11n^2+6n+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$

$$n^4+6n^3+11n^2+6n>n^4+6n^3+9n^2=\left(n^2+3n\right)^2$$

Suy ra $\left(n^2+3n\right)^2<n^4+6n^3+11n^2+6n<\left(n^2+3n+1\right)^2$

Vậy B không là số chính phương.

Bài 5: Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương $S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ không là số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 THCS Cầu Giấy năm học 2011-2012)

Lời giải

Ta có: $S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=111a+111b+111c$

$=111(a+b+c)=3.37.(a+b+c)$

Để S là số chính phương thì $a+b+c=3.37.k^2\,(k\in\mathbb{N})$

Điều này vô lí vì $a+b+c\le 27<37$

Vậy S không là số chính phương.

Bài 6: Cho $M=5+5^2+5^3+...+5^{80}$

a) Chứng minh M chia hết cho 6.

b) Chứng minh M không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 Đa Phúc 2010-2011)

Lời giải

a) Ta có: $M=5+5^2+5^3+...+5^{80}$

$M=5+5^2+5^3+...+5^{80}$

$M=\left(5+5^2\right)+\left(5^3+5^4\right)+...+\left(5^{79}+5^{80}\right)$

$M=5.(1+5)+5^3.(1+5)+...+5^{79}.(1+5)$

$M=6.\left(5+5^3+...+5^{79}\right)$

$\Rightarrow M\,\vdots\,6$

b) Ta có:

$5\,\vdots\,5$

$5^2\,\vdots\,5$

$5^3\,\vdots\,5$

...

$5^{80}\,\vdots\,5$

$\Rightarrow M=5+5^2+5^3+...+5^{80}\,\vdots\,5$

Mặt khác:

5 không chia hết cho 25

$5^2\,\vdots\,25$

$5^3\,\vdots\,25$

...

$5^{80}\,\vdots\,25$

$\Rightarrow M=5+5^2+5^3+...+5^{80}$ không chia hết cho 25.

Ta có $M\,\vdots\,5$ nhưng M không chia hết cho 5^2 nên M không là số chính phương.

Bài 7: Cho $E=125.\left(1+6+6^2+...+6^{2021}\right)$ Chứng minh $E+25$ là một số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 Nghĩa Đô 2010-2011)

Lời giải

Ta có: $a^0+a^1+a^2+...+a^n=\dfrac{a^{n+1}-a^0}{a-1}$

Nên

$1+6+6^2+...+6^{2021}=\dfrac{6^{2022}-1}{5}$

$\Rightarrow E+25=125.\dfrac{6^{2022}-1}{5}+25=25.\left(6^{2022}-1\right)+25=25.6^{2022}=5^2.\left(6^{1011}\right)^2=\left(5.6^{1011}\right)^2$

Nên $E+25$ là số chính phương.

Bài 8: Cho $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$

a) Chứng minh A chia hết cho 24.

b) Chứng minh A không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Anh Sơn 2011-2012)

Lời giải

a) Ta có:

$A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$

$A=10^3.\left(10^{2009}+10^{2008}+10^{2007}+10^{2006}\right)+8$

$A=8.125.\left(10^{2009}+10^{2008}+10^{2007}+10^{2006}\right)+8$

$A=8.\left[125.\left(10^{2009}+10^{2008}+10^{2007}+10^{2006}\right)+1\right]$

$\Rightarrow A\,\vdots\,8$

Ta lại có $10^{2012},10^{2011},10^{2010},10^{2009}$ có tổng các chữ số bằng 1 nên khi chia $10^{2012},10^{2011},10^{2010},10^{2009}$ cho 3 đều dư 1.

Ta có 8 chia 3 dư 2.

Vậy A chia 3 có số dư là dư của phép chia $(1+1+1+1+2)$

Hay dư của phép chia 6 chia cho 3 (có số dư bằng 0)

$\Rightarrow A\,\vdots\,3$

Vì 8 và 3 là hai số nguyên tố nguyên cùng nhau, $A\,\vdots\,3$, $A\,\vdots\,8$ nên $A\,\vdots\,24$

b) Ta có $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ có chữ số tận cùng là 0 nên:

$A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8

Vậy A không là số chính phương vì số chính phương có tận cùng là 1; 4; 5; 6; 9

Bài 9: Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết bởi các chữ số: 3; 6; 6; 8

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2011-2012)

Lời giải

Gọi số chính phương phải tìm là n^2

- Vì số chính phương không có chữ số tận cùng là 3; 8 do đó phải có tận cùng là 6.
- Số có tận cùng bằng 86 thì chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

$\Rightarrow n^2$ có tận cùng là 36.

Vậy số chính phương đó là 8836 (với $8836 = 94^2$).

Bài 10: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì ta được một số chính phương?

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2013-2014)

Lời giải

Gọi số phải tìm là n $(n \in \mathbb{N}, 10 < n < 99)$

Ta có: $135.n = a^2$ $(a \in \mathbb{N})$ hay $\Rightarrow 3^3.5.n = a^2$

Vì số chính phương chỉ có các thừa số nguyên tố với mũ chẵn nên $\Rightarrow n = 3.5.k^2$ $(k \in \mathbb{N})$

+) Với $k = 1 \Rightarrow n = 3.5.1^2 = 15$

+) Với $k = 2 \Rightarrow n = 3.5.2^2 = 60$

+) Với $k \geq 3 \Rightarrow n \geq 3.5.3^2 \geq 135$ (loại vì n có nhiều hơn hai chữ số)

Vậy số cần tìm là 15; 60 .

Bài 11: Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + ... + 2009 + 2011$. Chứng tỏ S là một số chính phương.

(Trích đề HSG toán 6 THCS Hồng Hà năm 2013 – 2014)

Lời giải

Ta có: $S = 1 + 3 + 5 + ... + 2009 + 2011 = \left(\frac{2011+1}{2}\right)\left(\frac{2011-1}{2} + 1\right) = \left(\frac{2011+1}{2}\right)\left(\frac{2011+1}{2}\right) = 1006^2$

Vậy S là một số chính phương.

Bài 12: Cho tổng $M = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$ (với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$)

Chứng tỏ M là một số chính phương.

(Trích đề thi HSG huyện Lương Tài năm học 2015 – 2016)

Lời giải

Xét dãy số trong tổng M , từ 1 đến $2n-1$ có $\frac{2n-1-1}{2}+1\ =n$ (số số hạng).

$\Rightarrow M=1+3+5+...+(2n-1)=\frac{(2n-1+1).n}{2}=n^2$

Vì $M=n^2$ nên M là một số chính phương.

Bài 13: Chứng minh rằng: với mọi số tự nhiên khác 0 và có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là số chính phương**.**

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Vũ Thư, năm học 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số tự nhiên đó là $P\ (P\neq 0)$

Nếu $P=1\Rightarrow 1^2=1\Rightarrow P$ là số chính phương.

Nếu $P>1$. Phân tích P ra thừa số nguyên tố ta có: $P=a^x.b^y...c^z$ (với a,b,c là các số nguyên tố).

Khi đó số lượng các ước của P là $(x+1)(y+1)...(z+1)$.

Theo đề ta có: $(x+1)(y+1)...(z+1)$ là số lẻ

$\Rightarrow (x+1);\ (y+1);\ ...\ ;(z+1)$ đề là các số lẻ

$\Rightarrow x,y,...,z$ đều là các số chẵn

Đặt $x=2m;\ \ y=2n;\ \ z=2t$

Ta được $P=a^x.b^y...c^z=a^{2m}.b^{2n}...c^{2t}=\left(a^m.b^n...c^t\right)^2$

Vậy P là số chính phương.

Bài 14: Tìm n để n^2+2006 là một số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Sơn Tây, năm học 2015 – 2016)

Lời giải

Giả sử n^2+2006 là số chính phương

Đặt $a^2=n^2+2006\ (a\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow a^2-n^2=2006$

$\Rightarrow (a-n)(a+n)=2006\quad (*)$

+) Nếu a,n khác tính chẵn lẻ thì vế trái của $(*)$ là số lẻ nên không thỏa mãn $(*)$

+) Nếu a,n cùng tính chẵn lẻ

$\Rightarrow\begin{cases}a-n\ \vdots\ 2\\ a+n\ \vdots\ 2\end{cases}$

$\Rightarrow (a-n)(a+n)\ \vdots\ 4$

Mà vế phải của $(*)$ là 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow (*)$ vô lý

Vậy không tồn tại n để n^2+2006 là một số chính phương.

Bài 15: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng số gồm 2 số đầu lớn hơn số gồm 2 số sau 1 đơn vị.
(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Liên Hòa năm học 2008 – 2009)

Lời giải

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là $\overline{abcd}$

Theo đề bài ta có:

$\overline{abcd}=k^2, k\in\mathbb{N}, 32\le k<100$

$\overline{ab}-\overline{cd}=1$

Ta có: $\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}=100\left(\overline{cd}+1\right)+\overline{cd}=101\overline{cd}+100$

$\Rightarrow 101\overline{cd}=k^2-100=\left(k-10\right)\left(k+10\right)$ $\Rightarrow$ $k+10\,\vdots\,101$ hoặc $k-10\,\vdots\,101$

Mà $32\le k<100\Rightarrow\left(k-10;101\right)=1$ nên $k+10\,\vdots\,101$

Mà $32\le k<100$

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd}=91^2=8281$.

☙ **HẾT** ❧

CHUYÊN ĐỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

CHỦ ĐỀ 2: DÙNG CÁC TÍNH CHẤT CHIA HẾT VÀ SỐ DƯ ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ KHÔNG PHẢI LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.
2. Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9
3. Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25
4. Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

➢ Tổng quát: Số chính phương chia hết cho p^{2n+1} thì chia hết cho p^{2n+2} (p là số nguyên tố, $n \in \mathbb{N}$)

*** Phương pháp chứng minh một số không là số nguyên tố bằng quan hệ chia hết:**

Ta có: $A \vdots p$ và p là số nguyên tố mà $A \not\vdots p^2$ $\Rightarrow A$ không phải là số chính phương.

*** Để chứng minh N không phải một số chính phương ta có thể:**

- Chứng minh N có tận cùng $2;3;7;8$ hoặc N tận cùng là $2k+1$ chữ số 0.
- Chứng minh N chứa số nguyên tố với số mũ lẻ.
- Xét số dư khi N chia cho 3 hoặc 4 hoặc 5 hoặc 8,... Chẳng hạn N chia 3 dư 2 hoặc chia 4 dư 2; hoặc chia 5 dư 3 thì N không là số chính phương.
- Chứng minh N nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

PHẦN II. CÁC BÀI TẬP

Các dạng bài chứng minh một số không phải là số chính phương

DẠNG 1: A chia hết cho số nguyên tố p nhưng A không chia hết p^2

Bài 1: Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không là số chính phương?

Lời giải

Số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, do đó số có tổng các chữ số là 2004 không thể là số chính phương.

Bài 2: Tổng các chữ số của một số chính phương có thể là 1983 không?

Lời giải

Tổng các chữ số của một số là 1983 thì số đó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, nên không tồn tại số chính phương có tổng các chữ số là 1983.

Bài 3: Cho các số tự nhiên: $1,2,3,4,5,6$. Lập được tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số bao gồm tất cả các chữ số trên. Trong các số đã lập có số nào là số chính phương không?

Lời giải

Tổng các chữ số của các số là 21 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

Bài 4: Cho một số tự nhiên gồm 21 chữ số 4. Có cách nào viết thêm các chữ số 0 vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương hay không?

Lời giải

$S(N)=21.4=84\vdots 3$ nhưng không chia hết cho 9 .

Bài 5: Chứng minh rằng số 1234567890 không phải là số chính phương.

Lời giải

Cách 1: Ta thấy số 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tân cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90).

Do đó: số 1234567890 không là số chính phương.

Cách 2: Ta thấy số 1234567890 chia hết cho 2 (vì chữ số tân cùng là 0) nhưng không chia hết cho 4 (vì hai chữ số tận cùng là 90).

Do đó: số 1234567890 không là số chính phương.

Cách 3: Số 1234567890 tận cùng có lẻ chữ số 0.

Bài 6: Các tổng sau có phải là số chính phương không?

a) $10^{10}+5$ b) $10^{100}+10^{50}+1$

Lời giải

a, Ta có: $10^{10}+5$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không là số chính phương.

b, Ta có: $10^{100}+10^{50}+1$ có tổng các chữ số là 3 nên chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Bài 7: Cho $S=3+3^2+3^3+....+3^{2020}$. Chứng minh S không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $S=3+3^2+3^3+....+3^{2020}$

Với mọi số tự nhiên $n\geq 2$ thì $3^n\vdots 9$

Suy ra: $3^2+3^3+....+3^{2020}\vdots 9$

Do đó: $3+3^2+3^3+....+3^{2020}$ chia 9 dư 3

Hay $S \not\vdots 9$

Mặt khác $S\vdots 3$

Vậy S không là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên lên tiếp lần lượt là $a;a+1;a+2;a+3\left(a\in\mathbb{N}\right)$

Khi đó ta xét: $S=a+a+1+a+2+a+3$

$=4a+6$

Ta có: $\left.\begin{matrix}4a\vdots 2\\ 6\vdots 2\end{matrix}\right\}\Rightarrow S\vdots 2\quad(1)$

$\left.\begin{matrix}4a\vdots 4\\ 6\not\vdots 4\end{matrix}\right\}\Rightarrow S\not\vdots 4\quad(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ S không là số chính phương

Vậy tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Bài 9: Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 101 thành một số A. Chứng minh A không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $A=1234...100101$

Ta có tổng các chữ số của A là: $1+2+3+4+...+100+101=\left(1+101\right).101:2=5151$

Ta thấy: $5151\vdots 3\Rightarrow A\vdots 3$

$5151\not\vdots 9\Rightarrow A\not\vdots 9$

Do đó A không là số chính phương.

Bài 10: Số $A=11+11^2+11^3$ có phải là số chính phương không?

Lời giải:

Ta có: $A=11+11^2+11^3$

Suy ra: $A.11=\left(11.11\right)+\left(11^2.11\right)+\left(11^3.11\right)=11^2+11^3+11^4$

$A.11-A=\left(11^2+11^3+11^4\right)-\left(11+11^2+11^3\right)$

$A=\left(11^2-11^2\right)+\left(11^3-11^3\right)+\left(11^4-11\right)$

$=0+0+11^4-11$

$=11^4-11$

Ta thấy: $\left.\begin{matrix}A\vdots 11\\ A=11^2\left(1+11\right)+11\not\vdots 11^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow A$ không là số chính phương

Bài 11: Viết liên tiếp từ 1 đến 12 được số $H=1234\ldots1112$. Số H có thể có 81 ước được không?

Lời giải

Giả sử số H có 81 ước.

Vì số lượng các ước của H là 81 (là số lẻ) nên H là số chính phương (1)

mặt khác, tổng của các chữ số của H là: $1+2+3+\ldots+9+(1+0)+(1+1)+(1+2)=51$.Vì $51 \vdots 3;\ 51 \not\vdots 9$; nên H chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, do đó H không là số chính phương

mâu thuẫn với (1).

Vậy H không thể có 81 ước.

Bài 12: Một số tự nhiên gồm một chữ số 0 và sáu chữ số 6 có thể là một số chính phương không?

Lời giải

Gọi A là số gồm một chữ số 0 và sáu chữ số 6.

- Nếu A có chữ số tận cùng là 0 thì A có hai chữ số tận cùng là 60.

$\Rightarrow A$ chia hết cho 5 nhưng A không chia hết cho 25 (vì $60 \not\vdots 25$)

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

- Nếu A có chữ số tận cùng là 6 $\Rightarrow A$ có hai chữ số tận cùng là 06 hoặc 66

$\Rightarrow A$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4.

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Vậy A không phải là số chính phương.

DẠNG 2: Chứa thừa số nguyên tố với số mũ lẻ

Bài 1: Chứng minh rằng 2001^{2001} không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $2001^{2001}=(3.23.29)^{2001}=3^{2001}.23^{2001}.29^{2001}$ chứa thừa số nguyên tố có số mũ lẻ

Do đó: 2001^{2001} không là số chính phương

Bài 2: Chứng minh rằng số $A=29^{29}+58^{58}+87^{84}$ không là số chính phương.

Lời giải

$$A=29^{29}\underbrace{(1+\underbrace{2^{58}.29^{29}}_{\vdots 29}+\underbrace{3^{87}.29^{58}}_{\vdots 29}}_{\not\vdots 29}$$

Ta có $A \vdots 29^{29}$ nhưng A không chia hết cho 29^{30} mà 29 là số nguyên tố từ đó suy ra A không là số chính phương.

DẠNG 3: $A=p.N$ và $N \not\vdots p$ (p: nguyên tố) A không là số chính phương

Bài 1: Chứng minh rằng $A=\overline{ababa}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $n^2=\overline{abab}=\overline{ab}.101$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{abab}=101.\overline{ab}\\ \overline{abab}\vdots 101\Rightarrow \overline{abab}\vdots 101^2\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{ab}\vdots 101 \text{ (Vô lý)}$$

Do đó $A=\overline{ababa}$ không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng $\overline{abcabc}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $n^2=\overline{abcabc}=\overline{abc}.1001=\overline{abc}.11.91$

Vì $\overline{abc}\not\vdots 11$ đồng thời $\overline{abc}\not\vdots 91$ mà $11,91$ là số nguyên tố.

Do đó $\overline{abcabc}$ không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng $\overline{ababab}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $n^2=\overline{ababab}=\overline{ab}.10101=\overline{ab}.3.7.13.37$

Vì $3,7,13,37$ là số nguyên tố nên => $\overline{ab}\vdots 10101$ (Vô lý).

Do đó $\overline{ababab}$ không là số chính phương.

DẠNG 4: Chứng minh A chia 3 dư 2, chia 4 dư 2; 3; chia 5 dư 2, 3; chia 8 dư 2; 3; 5; 6

Bài 1:

a. Chứng minh rằng với $\forall n\in N$ thì $2n^2+2n+3$ không là số chính phương

b. Chứng minh rằng với $\forall n\in N$ thì 3^n+1002 không là số chính phương

Lời giải

a. $2n^2+2n+3=\underbrace{2n(n+1)}_{\vdots 4}+3\Rightarrow$ chia 4 dư 3 nên không là số chính phương

b. - $n=0\rightarrow 3^n+1002=1003\Rightarrow$ không là số chính phương

- $n=1\rightarrow 3^n+1002=1005\vdots 3,\not\vdots 9\Rightarrow$ không là số chính phương

- $n\geq 2\rightarrow 3^n+1002\vdots 3,\not\vdots 9\Rightarrow$ không là số chính phương

Bài 2: Chứng minh rằng một số có tổng các chữ số của nó là 2006 không phải là một số chính phương

Lời giải

Số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Số trên có tổng các chữ số là 2006 nên chia 3 dư 2, vậy không phải là số chính phương.

Bài 3: Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được không? Tại sao?

Lời giải

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 là n.

Ta có: $2018 = 3m + 2$, $m \in \mathbb{N}$ nên số tự nhiên n chia 3 dư 2, do đó số n có dạng $3k+2$ với k là số tự nhiên. Mặt khác số chính phương không có dạng $3k+2$ suy ra số tự nhiên n không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Lời giải

Ta có: $2012^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2013^{4n} \equiv 1 \pmod 2$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$2014^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2015^{4n} \equiv 1 \pmod 2$

Do đó: $A \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$.

Ta lại có: $2012 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod 4$

$2014 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow (2014^2)^{2n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod 4$

Do $2013 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod 4$

Do $2015 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 2015^{4n} \equiv (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod 4$

Do đó $A \equiv 2 \pmod 4$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2.

Ta có $A \vdots 2; A \not\vdots 2^2; 2$ là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương.

Bài 5: Cho $N = 1.3.5.7...2015$. Chứng minh rằng $N-1$; $N+3$ không là số chính phương.

Lời giải

+) Ta có: $N \vdots 3$

Suy ra: $N-1$ chia cho 3 dư 2

Do đó: $N-1$ không là số chính phương.

+) Ta có: $N \vdots 3$ và $N \vdots 9$

Suy ra: $N+3 \vdots 3$ nhưng $N+3 \not\vdots 9$

Do đó: $N+3$ không là số chính phương.

Bài 6: Gọi $N = 2.3.5...p_n$ là tích của n số nguyên tố đầu tiên $(n>1)$. Chứng minh rằng các số $N-1$; N; $N+1$ không là số chính phương.

Lời giải

+) Ta thấy: $N \vdots 2$ nhưng $N \not\vdots 4$

$\Rightarrow$ N không là số chính phương.

+) Giả sử $N+1 = a^2$ hay $N = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$

Ta có: $N+1$ lẻ suy ra a lẻ nên $N=(a-1)(a+1)\vdots 4$ (mâu thuẫn)

Do đó điều giả sử là sai.

Vậy $N+1$ không là số chính phương.

+) Ta có: $N\vdots 3$

$\Rightarrow N-1\equiv 2 \pmod 3$

Vậy $N-1$ không là số chính phương.

Bài 7: Giả sử $N=1.3.5.7...2007.2011$. Chứng minh rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp $2N-1$; $2N$; $2N+1$ không có số nào là số chính phương.

Lời giải

+) Ta có: $2N-1=2.1.3.5.7...2011-1$

Ta thấy: $2N\vdots 3 \Rightarrow 2N-1=3k+2\,(k\in\mathbb{N})$

Do đó: $2N-1$ không là số chính phương.

+) Ta có: $2N=2.1.3.5.7...2011 \Rightarrow 2N$ chẵn

Do đó: N lẻ $\Rightarrow N \not\vdots\, 2$ và $2N\vdots 2$ nhưng $2N\not\vdots\, 4$

Ta thấy $2N$ chẵn nên $2N$ không chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3

Vậy $2N$ không là số chính phương

+) Ta có: $2N+1=2.1.3.5.7...2011+1$

Ta thấy $2N+1$ lẻ nên $2N+1\not\vdots\, 4$

$2N\not\vdots\, 4$ nên $2N+1$ không chia cho 4 dư 1

Do đó: $2N+1$ không là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh số $A=23^5+23^{12}+23^{2003}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: 23 chia 3 dư 2 nên 23^5 chia 3 dư 2

23^{12} chia 3 dư 1

23^{2003} chia 3 dư 2

Suy ra: $A=23^5+23^{12}+23^{2003}$ chia 3 dư 2

Vậy A không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh $C=4^4+44^{44}+444^{444}+4444^{4444}+15$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: 4 chia hết cho 4 nên 4^4 chia hết cho 4

44 chia hết cho 4 nên 44^{44} chia hết cho 4

444 chia hết cho 4 nên 444^{444} chia hết cho 4

4444 chia hết cho 4 nên 4444^{4444} chia hết cho 4

Suy ra: $4^4+44^{44}+444^{444}+4444^{4444}$ chia hết cho 4

Mà: 15 chia 4 dư 3

Do đó: $C=4^4+44^{44}+444^{444}+4444^{4444}+15$ chia 4 dư 3

Vậy C không là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh $D=2004^4+2004^3+2004^2+23$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta thấy: $2004 \vdots 3$

$\Rightarrow$ $2004^4 \vdots 3$

Tương tự $2004^3 \vdots 3$, $2004^2 \vdots 3$

Mà 23 chia 3 dư 2 nên $D=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$

Mà ta biết số chính phương không có dạng $3k+2$

Do đó D không là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

Lời giải

Gọi a và b là số lẻ.

Giả sử: $a=2m+1, b=2n+1$ với $m,n\in\mathbb{N}$

Ta có: $a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4\left(m^2+m+n^2+n\right)+2=4k+2$ với $k\in\mathbb{N}$

Không có số chính phương nào có dạng $4k+2$ vì vậy a^2+b^2 không phải là một số chính phương.

Bài 12: Chứng minh rằng tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $S=1+2+3+4+...+2005$

$=(2005+1).2005:2$

$=1003.2005\equiv 1.3\equiv 3\pmod 4$

$\Rightarrow S$ có dạng $4k+3\left(k\in\mathbb{N}\right)$

Do đó S không là số chính phương.

Bài 13: Cho A là tổng các bình phương của 111 số tự nhiên liên tiếp nào đó. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải

Xét tổng các bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp:

$\left(a-1\right)^2+a^2+\left(a+1\right)^2=3a^2+2\equiv 2\left(\bmod 3\right)\forall a\in\mathbb{N}$

Chia A thành 37 nhóm, mỗi nhóm là tổng các bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp

$\Rightarrow\ A\equiv 37.2\equiv 1.2\equiv 2\left(\bmod 3\right)$

Do đó A không là số chính phương.

Bài 14: Cho A là tổng các bình phương của 108 số tự nhiên liên tiếp nào đó. Chứng minh rằng A không là số chính phương.

Lời giải

Xét tổng các bình phương của 4 số tự nhiên liên tiếp:

$a^2+\left(a+1\right)^2+\left(a+2\right)^2+\left(a+3\right)^2=4a^2+12a+14\equiv 2\left(\bmod 4\right);\forall a\in\mathbb{N}$

Chia A thành 27 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 số tự nhiên liên tiếp.

Suy ra: $A\equiv 27.2\equiv 54\equiv 2\left(\bmod 4\right)$

Do đó A không là số chính phương.

Bài 15: Chứng minh 3^n+63 không phải là số chính phương với $n\in\mathbb{N};n\neq 0;4$

Lời giải:

Xét n lẻ. Đặt $n=2k+1;\left(k\in\mathbb{N}\right)$

Ta có: $3^{2k+1}\equiv\left(-1\right)^{2k+1}\left(\bmod 4\right)\equiv -1\left(\bmod 4\right)$

$63\equiv 3\left(\bmod 4\right)$

$\Rightarrow 3^{2k+1}+63\equiv 2\left(\bmod 4\right)$

$\Rightarrow 3^{2k+1}+63$ không là số chính phương

Xét n chẵn. Đặt $n=2k;\left(k\neq 0\right)$

Vì $y\,\vdots\,3$ nên ta đặt $y=3t\left(t\in\mathbb{N}\right)$

Khi đó, ta có: $3^{2k}+63=9t^2$

$3^{2k-2}+7=t^2$

$\Rightarrow t^2-\left(3^{k-1}\right)^2=7$

$\Rightarrow\left(t-3^{k-1}\right)\left(t+3^{k+1}\right)=7$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t-3^{k-1}=1\\t+3^{k+1}=7\end{array}\right.$

$\Rightarrow 2.3^{k-1}=6$

$\Rightarrow 3^{k-1}=3$

$\Rightarrow k=2$

$\Rightarrow n=4$ (trái với giả thiết đề bài)

Vậy: 3^n+63 không phải là số chính phương với $n\neq 0;4$

Bài 16: Chứng minh $n^7+34n+5$ không là số chính phương.

Lời giải:

Bổ đề: $x^2\equiv i\left(\bmod 7\right);i\in\{0;1;2;4\}$

Theo định lí Fermat, ta có: $n^7\equiv n\left(\bmod 7\right)$

$\Rightarrow n^7+34n+5\equiv 35n+5\left(\bmod 7\right)$

$\Rightarrow n^7+34n+5\equiv 6\left(\bmod 7\right)$

Giả sử $n^7+34n+5=x^2,x\in\mathbb{N}$

Suy ra: $x^2\equiv 5\left(\bmod 7\right)$ (vô lý)

Do đó: $n^7+34n+5$ không là số chính phương.

Bài 17: Chứng minh rằng với mọi số $k\in\mathbb{N}$ thì số $A=1+9^{2k}+77^{2k}+1977^{2k}$ không là số chính phương.

Lời giải:

Bất kì số chính phương nào cũng có dạng $3t$ hoặc $3t+1$, với $t\in\mathbb{N}$

Ta có: $A=1+9^{2k}+77^{2k}+1977^{2k}$ có dạng $3l+2;l\in\mathbb{N}$

Do đó A không là số chính phương.

DẠNG 5: Chứng minh A có chữ số tận cùng là $2;3;7$ hoặc 8

Bài 1: Chứng minh rằng các tổng sau có phải là số chính phương không?

a) $A=11+11^2+11^3$ **b)** $B=10^{10}+8$

Lời giải:

b) Tổng A có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương

c) Ta có: 10^{10} có chữ số tận cùng là 0.

Nên $10^{10}+8$ có chữ số tận cùng là 8

Vậy B không là số chính phương.

Bài 2: Cho $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải:

Ta có các số 10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009} đều có chữ số tận cùng là 0.

Nên $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không là số chính phương vì số chính phương là những số có tận cùng là $0;1;4;5;6;9$.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng các bình phương của năm số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Lời giải

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp là: $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$

Xét tổng bình phương: $A=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5\left(n^2+2\right)$.

Vì n^2 không thể có tận cùng là 3 hoặc 8, nên n^2+2 không thể có tận cùng là 5 hoặc 0,

$\Rightarrow n^2+2$ không thể chia hết cho 5

$\Rightarrow 5(n^2+2)$ không thể chia hết cho 25

Vậy A không là số chính phương

DẠNG 6: Chứng minh A kẹp giữa hai số chính phương liên tiếp $n^2<A<(n+1)^2$

Bài tập: Chứng minh rằng số 4014025 không là số chính phương.

Nhận xét:

Số này có hai chữ số tận cùng là 25 nên chia cho 3 dư 1 và chia cho 4 cũng dư 1, nên không thể áp dụng bằng cách trên.

Lời giải:

Cách 1:

Ta thấy: $2003^2 = 401209$; $2004^2 = 4016016$. Nên $2003^2<4014025<2004^2$. Chứng tỏ số 4014025 không phải là số chính phương.

Cách 2:

Ta có: $4014025=25.160561$

Muốn 4014025 là số chính phương thì 160561 phải là số chính phương

Ta lại có: $400^2=160000$

$401^2=160801$

Mà: $160000<160561<160801$

$\Rightarrow$ 160561 không là số chính phương.

Do đó số 4014025 không là số chính phương

PHẦN III. CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số $m\in\mathbb{N}$ thì số $A=1+9^{2m}+80^{2m}+1980^{2m}$ không là số chính phương.

Lời giải

Bất kì số chính phương nào cũng có dạng $4n$ hoặc $4n+1$, $n\in\mathbb{N}$.

Ta có: $A=1+9^{2m}+80^{2m}+1980^{2m}$ có dạng $4q+2$, $q\in\mathbb{N}$

Suy ra: A không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Lời giải

Gọi hai số lẻ bất kì là a và b.

Vì a và b lẻ nên $a=2k+1$; $b=2m+1$; $k;m\in\mathbb{N}$

Suy ra: $a^2+b^2=(2k+1)^2+(2m+1)^2$

$$=4k^2+4k+1+4m^2+4m+1$$

$$=4\left(k^2+k+m^2+m\right)+2$$

$$=4t+2;(t\in\mathbb{N})$$

Do đó: a^2+b^2 không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng $A=n^5+1999n+2017;(n\in\mathbb{N})$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $A=n^5+1999n+2017=n^5-n+2000n+2015+2$

Ta thấy: A chia cho 5 dư 2

Do đó: A không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng $n^3-n+2;(n\in\mathbb{N})$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $n^3-n+2=n(n-1)(n+1)+2$

Vì: $n(n-1)(n+1)\equiv 0(\bmod 3)$

$\Rightarrow n(n-1)(n+1)+2\equiv 2(\bmod 3)$

Mà một số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1

Do đó: n^3-n+2 không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng $A=19n^6+5n^5+1890n^3-19n^2-5n+1993;(n\in\mathbb{N})$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $A=19n^6+5n^5+1890n^3-19n^2-5n+1993$

$=20n^6+5n^5+1890n^3-20n^2-5n+1990-n^6+n^2+3$

$=5(4n^6+n^5+378n^3-4n^2-n+398)-n^6+n^2+3$

Ta có số chính phương chia 5 có thể dư $0;1$ hoặc 4

$n\in\mathbb{N}$ nên có 5 trường hợp xảy ra

* TH1: Nếu $n\vdots 5$ thì $n^6\vdots 5$; $n^2\vdots 5$ mà 3 chia 5 dư 3

$\Rightarrow -n^6+n^2+3$ chia 5 dư 3

$\Rightarrow$ A chia 5 dư 3

$\Rightarrow$ A không là số chính phương

* TH2: Nếu n chia 5 dư 1 thì n^6 chia 5 dư 1, n^2 chia 5 dư 1 mà 3 chia 5 dư 3

$\Rightarrow -n^6+n^2+3$ chia 5 dư $(-1+1+3)=3$

$\Rightarrow$ A chia 5 dư 3

$\Rightarrow$ A không là số chính phương

* TH3: Nếu n chia 5 dư 2 thì n^6 chia 5 dư 2^6; $2^6=64$ chia 5 dư 4 $\Rightarrow n^6$ chia 5 dư 4,

n^2 chia 5 dư $2^2=4$

$\Rightarrow -n^6+n^2+3$ chia 5 dư $(-4+4+3)=3$

$\Rightarrow$ A chia 5 dư 3

$\Rightarrow$ A không là số chính phương

* TH4: Nếu n chia 5 dư 3 thì n^6 chia 5 dư 3^6; $3^6=729$ chia 5 dư 4 $\Rightarrow n^6$ chia 5 dư 4,

n^2 chia 5 dư 3^2; $3^2=9$ chia 5 dư 4 $\Rightarrow n^2$ chia 5 dư 4

$\Rightarrow -n^6+n^2+3$ chia 5 dư $(-4+4+3)=3$

$\Rightarrow$ A chia 5 dư 3

$\Rightarrow$ A không là số chính phương

* TH5: Nếu n chia 5 dư 4 thì n^6 chia 5 dư 4^6; $4^6=4096$ chia 5 dư $1 \Rightarrow n^6$ chia 5 dư 1,

n^2 chia 5 dư 4^2; $4^2=16$ chia 5 dư $1 \Rightarrow n^2$ chia 5 dư 1

$\Rightarrow -n^6+n^2+3$ chia 5 dư $(-1+1+3)=3$

$\Rightarrow$ A chia 5 dư 3

$\Rightarrow$ A không là số chính phương

Vậy A không là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 6: Cho p là tích của 2016 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số nguyên tố. **(Đề HSG Hương Sơn năm học 2015 - 2016)**

Lời giải:

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên p chia hết cho 2 và không chia hết cho 4

Ta chứng minh $p+1$ là số chính phương

Giả sử $p+1$ là số chính phương.

Đặt $p+1=m^2$. Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ

$\Rightarrow$ m lẻ $\Rightarrow$ m^2 lẻ

Đặt $m=2k+1$. Ta có: $m^2=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p+1=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p=4k^2+4k=4k(k+1)$ chia hết cho 4

Ta chứng minh $p-1$ là số chính phương

Ta có: $p=2.3.5...$ chia hết cho 3

$\Rightarrow p-1=3k+2$

Vì không có số chính phương nào có dạng $3k+2$ nên $p-1$ không phải số chính phương

Vậy nếu p là tích của 2016 số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không phải số chính phương.

Bài 7: Cho $B=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$. Chứng minh B không là số chính phương. **(Đề HSG Vĩnh Tường năm học 2019 - 2020)**

Lời giải:

Ta có: $B=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$

$$=100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10a+b$$

$$=(100a+10a+a)+(100b+10b+b)+(100c+10c+c)$$

$$=\overline{aaa}+\overline{bbb}+\overline{ccc}$$

$$=111.(a+b+c)$$

$$=3.37.(a+b+c)$$

Ta thấy: $\left.\begin{matrix}1\le a\le 9\\1\le b\le 9\\1\le c\le 9\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\le a+b+c\le 27$

Suy ra: $a+b+c\not\vdots\, 37$

Mà: $(3;37)=1\Rightarrow 3.(a+b+c)\not\vdots\, 37$

Do đó: $3.37.(a+b+c)\not\vdots\, 37^2$

Hay: $B\not\vdots\, 37^2$

Vậy B không là số chính phương.

Bài 8: Cho biểu thức $M=5+5^2+5^3+....+5^{80}$. Chứng minh M không phải là số chính phương.

(Đề HSG Quỳnh Lưu năm học 2018 - 2019)

Lời giải

Ta thấy: $M=5+5^2+5^3+....+5^{80}\,\vdots\, 5$

Mặt khác: $5^2+5^3+....+5^{80}\,\vdots\, 5^2$ (vì tất cả các số đều chia hết cho 5^2)

$\Rightarrow$ $M=5+5^2+5^3+....+5^{80}\not\vdots\, 5^2$ (do $5\not\vdots\, 5^2$)

Do đó M chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 5^2

Vậy M không là số chính phương.

CHUYÊN ĐỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG GIẢI BÀI TOÁN SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Số chính phương là số tự nhiên viết được dưới dạng bình phương đúng của một số nguyên.

Ví dụ: $4=2^2$; $16=4^2$.

2. SỐ CHÍNH PHƯƠNG CHẴN, SỐ CHÍNH PHƯƠNG LẺ

Một số chính phương được gọi là số chính phương chẵn nếu nó là bình phương của một số chẵn, là số chính phương lẻ nếu nó là bình phương của một số lẻ. (Nói một cách khác, bình phương của một số chẵn là một số chẵn, bình phương của một số lẻ là một số lẻ).

3. CÁC TÍNH CHẤT CHUNG CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

a) Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 không thể có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.

Như vậy để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là 2; 3; 7 hoặc 8.

b) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các TSNT với số mũ chẵn, không chứa TSNT với số mũ lẻ.

Ví dụ: $3600=60^2=2^4.3^2.5^2$

$\Rightarrow$ Để chứng minh một số không phải SCP ta chỉ ra số đó khi phân tích ra TSNT thì tồn tại thừa số nguyên tố chứa số mũ lẻ.

c) Số chính phương chỉ có thể có 1 trong 2 dạng $3n$ hoặc $3n+1\left(a^2\equiv 0,1\left(\operatorname{mod}3\right)\right)$, không có SCP nào có dạng $3n+2$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

d) Số chính phương chỉ có thể có 1 trong 2 dạng $4n$ hoặc $4n+1\left(a^2\equiv 0,1\left(\operatorname{mod}4\right)\right)$, không có SCP nào có dạng $4n+2$ hoặc $4n+3\left(n\in\mathbb{N}\right)$.

e) Số các ước số của một số chính phương là số lẻ, ngược lại một số có số lượng các ước là lẻ thì đó là số chính phương.

f) Nếu số chính phương chia hết cho p thì chia hết cho p^2.

g)

- ✓ Số chính phương tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn (121, 49, …).
- ✓ Số chính phương tận cùng là 5 thì chữ số hàng chục là 2.
- ✓ Số chính phương tận cùng là 4 thì chữ số hàng chục là chẵn.
- ✓ Số chính phương tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là lẻ.
- ✓ Nếu SCP có chữ số tận cùng là 0 thì SCP đó có một số chẵn chữ số 0 ở tận cùng như : 100, 10000, …

h) Công thức để tính hiệu của hai số chính phương: $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$.

i) Tất cả các số chính phương có thể viết thành dãy tổng của các số lẻ tăng dần từ 1, ví dụ: 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 +7, 1 + 3 + 5 +7 + 9, ….

3. HỆ QUẢ

- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.
- Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25.
- Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.
- Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.
- Số chính phương chia hết cho p^{2n+1} thì chia hết cho p^{2n+2} (p là số nguyên tố, $n \in \mathbb{N}$).

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Chứng minh một biểu thức không là số chính phương.

I. Phương pháp giải:

- Đề bài chứng minh một biểu thức A không là số chính phương.
- Giả sử biểu thức A là số chính phương.
- Sử dụng các tính chất để tìm ra điều vô lí hay mâu thuẫn.
- Vậy biểu thức A không là số chính phương.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $3^n + 4$ không là số chính phương.

Lời giải:

- Với $n = 0 \Rightarrow 3^n + 4 = 5$ không là số chính phương.

- Với $n = 1 \Rightarrow 3^n + 4 = 7$ không là số chính phương.

- Với $n \geq 2$.

Giả sử là số chính phương.

$\Rightarrow 3^n + 4 = m^2 \ (m \in \mathbb{N}, m > 3)$.

$\Leftrightarrow m^2 - 4 = 3^n$.

$\Leftrightarrow (m-2)(m+2)=3^n$.

$\Rightarrow \begin{cases} m-2=3^k \\ m+2=3^q \end{cases}$. $(k,q\in\mathbb{N};k+q=n)$

$\Rightarrow (m+2)-(m+2)=3^q-3^k$.

$\Leftrightarrow 4=3^q-3^k \ (*)$.

Ta thấy $\begin{cases} 4 \not\vdots\, 3 \\ (3^q-3^k)\,\vdots\, 3 \end{cases}$ là điều mâu thuẫn với nhau so với đẳng thức $(*)$.

Vậy 3^n+4 không là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì n^2+2 không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử n^2+2 là số chính phương.

Khi đó đặt $n^2+2=m^2 \ (m\in\mathbb{N}^*)$.

$\Leftrightarrow m^2-n^2=2 \ (1)$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=2 \ (1)$.

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2).

Mặt khác $m+n+m-n=2m$ chẵn.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

$\Rightarrow \begin{cases} (m+n)\,\vdots\, 2 \\ (m+n)\,\vdots\, 2 \end{cases}$

$\Rightarrow [(m+n).(m-n)]\,\vdots\, 4$

$\Rightarrow (m^2-n^2)\,\vdots\, 4$ mà $2 \not\vdots\, 4$, so sánh điều này với (1), ta thấy đây là điều vô lý.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì n^2+2 không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp lần lượt là n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ và $n+4$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

Đặt $S=n(n+1)(n+2)(n+3) \ (n\in\mathbb{N}^*)$

Ta đi chứng minh S không là số chính phương.

Giả sử $S = m^2 > 0$ $\left(m \in \mathbb{N}^*\right)$ (1).

$\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) = m^2$.

$\Leftrightarrow \left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right) = m^2$.

Đặt $n^2+3n = a$ $\left(a \in N^*\right)$.

$\Rightarrow a(a+2) = m^2$.

$\Leftrightarrow a^2+2a = m^2$.

$\Leftrightarrow a^2+2a+1 = m^2+1$.

$\Leftrightarrow (a+1)^2 = m^2+1$.

$\Leftrightarrow (a+1+m)(a+1-m) = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1-m=1 \\ a+1+m=1 \end{cases}$

$\Rightarrow m = 0$ (2).

Ta thấy (2) mâu thuẫn với (1)

Vậy S không là số chính phương hay tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng với tổng của $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Đặt $S = \overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab} = 111(a+b+c) = 3.37(a+b+c)$ $\left(a,b,c \in \mathbb{N}^*; a,b,c \le 9\right)$.

Giả sử S là số chính phương .

$\Rightarrow S \vdots 37$.

$\Rightarrow S \vdots 37^2$.

$\Rightarrow (a+b+c) \vdots 37$.

Mà $(a+b+c) \le 37$.

Đây là điều vô lý.

Vậy S không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng với n lẻ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì 7^n+24 không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Đặt $7^n + 24 = a^2 \quad \left(a \in \mathbb{N}^*\right)$.

Khi n lẻ: Đặt $n = 2k+1$.

$\Rightarrow 7^n + 24 = 7^{2k+1} + 24 = 7^{2k}.7^1 + 24 = \left(7^2\right)^k.7 + 24 = 49^k.7 + 24 = a^2$.

Có 49 chia 4 dư $1 \Rightarrow 49^k$ chia 4 dư 1; 7.49^k chia 4 dư 3 $\Rightarrow a^2$ chia 4 dư 3 (vô lý).

Vậy với n lẻ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ thì $7^n + 24$ không là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương $m^2 \quad (m \in \mathbb{N})$.

Xét

$4a.\overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = (20a+b)^2 - \left(b^2 - 4ac\right) = (20a+b)^2 - m^2 = (20a+b+m)(20a+b-m)$.

Tồn tại một trong hai thừa số $20a+b+m$, $20a+b-m$ chia hết cho số nguyên tố.

Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn $\overline{abc}$.

Thật vậy, do $m < b$ (vì $m^2 - b^2 = -4ac < 0$).

Nên $20a + b - m \le 20a + b + m < 100a + 10b + c = \overline{abc}$.

Vậy nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 7: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n = 2 \Rightarrow 2^n - 1 = 3$ không là số chính phương.

Với $n > 2$:

Giả sử $2^n - 1$ là số chính phương.

Mà $2^n - 1$ là số lẻ nên $2^n - 1 = (2k+1)^2 \Rightarrow 2^n - 1 = 4k^2 + 4k + 1$.

$\Rightarrow 2^n = 4k^2 + 4k + 2 \ (*)$.

Vì $\mathrm{n} \ge 2$ nên $2^n \vdots 4 \ (1)$.

Mà $4k^2 + 4k = 4k(k+1) \vdots 4$.

Nên $4k^2 + 4k + 2 \not\vdots\, 4 \ (2)$.

So sánh (1) và (2) với $(*)$, ta thấy mâu thuẫn với nhau.

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $2^n - 1$ không là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với $n \geq 1$:

Giả sử A là số chính phương.

$\Rightarrow A = k^2 \Rightarrow n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = k^2 \Rightarrow (n^2 + 1)(n+1)^2 = k^2$.

$\Rightarrow (n^2 + 1)$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$ (vô lí).

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

Lời giải:

Với n = 0 thì $B = n^3 - n + 2 = 2$ không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, B là số chính phương.

$\Rightarrow B = k^2 \Rightarrow n^3 - n + 2 = k^2 \ \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

$\Rightarrow n(n^2 - 1) + 2 = k^2$.

$\Rightarrow n(n-1)(n+1) + 2 = k^2 \ (*)$

Mà $n(n-1)(n+1) \vdots 3 \Rightarrow n(n-1)(n+1) + 2 = k^2$ chia 3 dư 2

Nên $(*)$ mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên thì $B = n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

Lời giải:

Nếu $n = 0$ thì $C = 2n^2 + 2n + 3 = 3$ không là số chính phương.

Giả sử với mọi số tự nhiên n ≥ 1, C là số chính phương.

$\Rightarrow C = k^2 \Rightarrow 2n^2 + 2n + 3 = k^2$.

$\Rightarrow 2n(n+1) + 3 = k^2$ (*).

Mà $n(n+1) \vdots 2$ nên $2n(n+1) \vdots 4$.

Nên $(*)$ mâu thuẫn hay vô lý hay không xảy ra.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $C = 2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $D = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Nếu $n = 0$ thì $D = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = 0$ là số chính phương.

Giả sử D là số chính phương.

$\Rightarrow D = k^2 \Rightarrow n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = k^2$.

$\Rightarrow n^2\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right) = k^2$.

$\Rightarrow n^2\left[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)\right] = k^2$.

$\Rightarrow n^2\left[(n+1)\left(n^3 - n^2 + 2\right)\right] = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n+1)\left[\left(n^3+1\right) - \left(n^2-1\right)\right] = k^2$.

$\Rightarrow n^2(n+1)^2\left(n^2 - 2n + 2\right) = k^2$.

$\Rightarrow \left(n^2 - 2n + 2\right)$ là số chính phương.

Đây là điều không xảy ra hay vô lí.

Vì với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$ và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

$\Rightarrow (n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương.

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $D = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không là số chính phương.

Bài 12: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $E = n^2 + n + 1$ không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử E là số chính phương.

Khi đó: $E = k^2 \Rightarrow n^2 + n + 1 = k^2 \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

Mà $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2 \Rightarrow n^2 < k^2 < (n+1)^2$.

$\Rightarrow n < k < n+1$ (vô lí).

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $E = n^2 + n + 1$ không là số chính phương.

Bài 13: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lẻ $(n \geq 1)$ thì $F = n^3 + 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử F là số chính phương.

Khi đó: $F = k^2 \left(k \in \mathbb{N}, k > 1\right) \Rightarrow n^3 + 1 = k^2$.

$\Rightarrow n^3 = k^2 - 1 \Rightarrow n^3 = (k-1)(k+1)$.

Vì n là số tự nhiên lẻ nên n^3 cũng là số lẻ $\Rightarrow k-1,\ k+1$ là hai số tự nhiên lẻ liên tiếp và chúng nguyên tố cùng nhau nên

$\begin{cases} k+1 = a^3 \\ k-1 = b^3 \end{cases}$ với a, b lẻ và a>b.

$\Rightarrow 2 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \geq 6$ (*).

Vì $a - b \geq 2$ và $a^2 + ab + b^2 \geq 3$ nên (*) vô lí.

Vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $E = n^2 + n + 1$ không là số chính phương.

Bài 14: Chứng minh rằng tổng $S + 2$ với $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20}$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $S + 2$ là số chính phương.

$\Rightarrow S + 2 = k^2$.

Ta có: $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20}$.

$\Rightarrow 2S = 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20} + 2^{21}$.

$\Rightarrow 2S - S = (2^2 + 2^3 + ... + 2^{20} + 2^{21}) - (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{20})$.

$\Rightarrow S = 2^{21} - 2$.

$\Rightarrow S + 2 = 2^{21}$ hay $\Rightarrow k^2 = 2^{21}$ (vô lí).

Vậy tổng $S+2$ với $S=2+2^2+2^3+...+2^{20}$ không là số chính phương.

Bài 15: Chứng minh rằng tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $n-1, n, n+1, n+2$.

Giả sử tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp trên là số chính phương, tức là $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$ là số chính phương.

Đặt $N=(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$.

Ta có: $N=(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=4n^2+4n+6=4(n^2+n)+6 \quad (*)$.

Do đó, vì $4(n^2+n)+6$ là số chẵn và N là số chính phương nên $N \vdots 4$.

Mà $[4(n^2+n)+6] \not\vdots 4$.

Nên $(*)$ không xảy ra hay vô lý.

Vậy tổng các bình phương của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 16: Chứng minh rằng tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $n-2, n-1, n, n+1, n+2$.

Giả sử tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp trên là số chính phương, tức là $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$ là số chính phương.

Đặt $M=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$.

Ta có: $M=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2)$.

Do đó, vì M là số chính phương nên $(n^2+2) \vdots 5 \Rightarrow n^2+2$ có số tận cùng là 0 hoặc 5 $\Rightarrow n^2$ có số tận cùng là 3 hoặc 8 (vô lí).

Vậy tổng các bình phương của năm số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 17: Cho n là số nguyên dương và d là một ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng n^2+d không phải là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử n^2+d là một số chính phương.

Đặt $2n^2 = kd$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $k^2(n^2+d) = n^2k^2 + k^2d = n^2k^2 + 2n^2k = n^2(k^2+2k)$ là số chính phương.

$\Rightarrow k^2 + 2k$ là số chính phương (*).

Mà $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$ nên (*) vô lí.

Vậy với n là số nguyên dương và d là một ước nguyên dương của $2n^2$ thì $n^2 + d$ không phải là số chính phương.

Bài 18: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Lời giải:

Gọi a, b là các số tự nhiên lẻ.

Giả sử tổng bình phương của hai số a và b là số chính phương, tức $a^2 + b^2$ là số chính phương (1).

Vì a và b đều lẻ nên đặt $a = 2m+1$, $b = 2n+1$.

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = [4(m^2+n^2+m+n)+2] \vdots 2 \ (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \left(a^2+b^2\right) \vdots 4 \ (3)$

Mà $a^2 + b^2 = 4(m^2+n^2+m+n)+2 \not\vdots 4 \ (4)$

(3) và (4) mâu thuẫn với nhau.

Vậy tổng bình phương của hai số tự nhiên lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Bài 19: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 2002$ không phải là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $n^2 + 2002$ là số chính phương.

$\Rightarrow n^2 + 2002 = k^2$.

$\Rightarrow n^2 - k^2 = 2002 \Rightarrow (n-k)(n+k) = 2002 \ (*)$.

Mà $\begin{cases} 2002 = (2.7.11.13) \vdots 2 \\ 2002 = (2.7.11.13) \not\vdots 4 \end{cases}$ nên $(n-k)(n+k) \vdots 2 \Rightarrow n-k,\ n+k$ chia hết cho 2.

Hơn nữa, $(n+k)-(n-k) = 2k$ nên cả hai số $n-k,\ n+k$ đều chia hết cho 2.

$\Rightarrow (n-k)(n+k) \vdots 4$.

Nên (*) là điều mâu thuẫn hay không bao giờ xảy ra hay vô lý.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì n^2+2002 không phải là một số chính phương.

Bài 20: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $(n+1)^4+n^4+1$ không phải là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $(n+1)^4+n^4+1$ là số chính phương.

Ta có $(n+1)^4+n^4+1=2n^4+4n^3+6n^2+4n+2$

$=2\left(n^4+2n^3+3n^2+2n+1\right)=2\left(n^2+n+1\right)^2$.

Do $n^2+n+1=n(n+1)+1$ là số lẻ nên $\left(n^2+n+1\right)^2$ là số lẻ.

$\Rightarrow (n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 (vô lí).

Vậy $(n+1)^4+n^4+1$ không là số chính phương.

Bài 21: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì n^5-n+2 không phải là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử n^5-n+2 là số chính phương.

Ta có: $n^5-n+2=(n^5-n)+2=n(n^4-1)+2=n(n-1)(n+1)(n^2+1)+2$ (*)

Vì $n(n-1)(n+1)(n^2+1)+2$ là số chẵn nên n^5-n+2 là số chẵn. Mà n^5-n+2 là số chính phương nên $(n^5-n+2) \vdots 4$.

Mặt khác : $n(n-1)(n+1)(n^2+1)+2 \not\vdots\, 4$.

Nên (*) là điều mâu thuẫn hay không bao giờ xảy ra hay vô lý.

Vậy n^5-n+2 không là số chính phương.

Bài 22: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không phải là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử A là số chính phương.

Ta có:

$2012^{4n} = (4.503)^{4n} \vdots 4, \forall n \in \mathbb{N}*$.

$2014^{4n} = (2.19.53)^{4n} = 4^{2n}.(19.53)^{4n} \vdots 4, \forall n \in \mathbb{N}*$.

$2013^{4n} = 2013^{4n} - 1 + 1 = \left(2013^{4n} - 1\right) + 1$ chia 4 dư 1.

$2015^{4n} = 2015^{4n} - \left(-1\right)^{4n} + 1$ chia cho 4 dư 1.

Do đó, $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2.

Ta có A là số chẵn và A chính phương nên A chia hết cho 2^2 (vô lí).

Vậy A không là số chính phương.

Bài 23: Chứng minh rằng $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{33}$ không phải là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử A là số chính phương.

Ta có $A = 1 + 2 + \left(2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5\right) + \ldots + \left(2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33}\right)$

$= 3 + 2^2.\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right) + \ldots + 2^{30}.\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right)$

$= 3 + 2.30 + \ldots + 2^{29}.30 = 3 + \left(2 + \ldots + 2^{29}\right).3.10.$

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3 (vô lí).

Vậy A không là số chính phương.

Bài 24: Chứng minh rằng $A = n^{2004} + 1$ không phải là số chính phương khi n lẻ.

Lời giải:

Giả sử $n^{2004} + 1$ là số chính phương với n là số lẻ.

Ta có:

$n^{2004} + 1 = a^2 \quad \left(a \in \mathbb{N}^*\right)$.

$\Leftrightarrow a^2 - \left(n^{1002}\right)^2 = 1$.

$\Leftrightarrow \left(a - n^{1002}\right)\left(a + n^{1002}\right) = 1$

$\Rightarrow 1 \vdots \left(a + n^{1002}\right) \Rightarrow \left(a + n^{1002}\right) = 1$ điều này vô lí vì $\left(a + n^{1002}\right) > 2$ với n là số lẻ.

Vậy $n^{2004} + 1$ không là số chính phương với n là số lẻ.

Bài 25: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p \vdots 2$ và $p \not\vdots 4$ (1).

*Giả sử $p+1$ là số chính phương.

Đặt $p+1=m^2$ $(m \in \mathbb{N})$.

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ, suy ra m^2 lẻ, suy ra m lẻ.

Đặt $m=2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$.

Ta có $m^2=4k^2+4k+1$.

$\Rightarrow p+1=4k^2+4k+1$.

$\Rightarrow p=4k^2+4k=4k(k+1) \vdots 4$, điều này mâu thuẫn với (1).

Suy ra $p+1$ không là số chính phương.

* Giả sử $p+1$ là số chính phương.

$p=2.3.5....$ là số chia hết cho 3.

Suy ra, $p-1$ có dạng $3k+2$.

Không có số chính phương nào có dạng $3k+2$, điều này mâu thuẫn với $p+1$ là số chính phương.

Suy ra $p-1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

Dạng 2: Chứng minh không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.

I. Phương pháp giải:

- Đề bài yêu cầu chứng minh không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.
- Giả sử biểu thức A là số chính phương.
- Sử dụng các tính chất để tìm ra điều vô lí hay mâu thuẫn.
- Vậy không tồn tại một điều kiện nào đó của biến để một biểu thức A là số chính phương.

II. Bài toán

Bài 26: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $2006+n^2$ là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $2006+n^2$ là số chính phương thì $2006+n^2=m^2\left(m\in N\right)$.

$\Rightarrow m^2-n^2=2006$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=2006\ \ (1)$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác m + n + m – n = 2m chẵn.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

Suy ra $(m+n).(m-n)\,\vdots\,4$ nhưng 2006 không chia hết cho 4, so sánh với (1), ta thấy đây điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để $2006+n^2$ là số chính phương.

Bài 27: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $2010+n^2$ là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $2010+n^2$ là số chính phương thì $2010+n^2=m^2\left(m\in N\right)$.

$\Rightarrow m^2-n^2=2010$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n)=2010\ \ (1)$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác m + n + m – n = 2m.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn

Suy ra $(m+n).(m-n)\,\vdots\,4$ nhưng 2010 không chia hết cho 4, so sánh với (1), ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để $2010+n^2$ là số chính phương.

Bài 28: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $2014+n^2$ là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử $2014+n^2$ là số chính phương thì $2014+n^2=m^2\left(m\in N\right)$.

$\Rightarrow m^2 - n^2 = 2014$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n) = 2014 \ (1)$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác $m+n+m-n=2m$.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

Suy ra $(m+n).(m-n) \vdots 4$ nhưng 2014 không chia hết cho 4, so sánh với (1), ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để $2014+n^2$ là số chính phương.

Bài 29: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $2018+n^2$ là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $2018+n^2$ là số chính phương thì $2018+n^2 = m^2 \left(m \in N\right)$.

$\Rightarrow m^2 - n^2 = 2018$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n) = 2018 \ (1)$

Như vậy, trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác $m+n+m-n=2m$.

Suy ra hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

Suy ra $(m+n).(m-n) \vdots 4$ nhưng 2018 không chia hết cho 4, so sánh với (1), ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên nào để $2018+n^2$ là số chính phương.

Bài 30: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào với k chẵn và $k \not\vdots 4 \ (k \in \mathbb{N})$ để $k+n^2$ là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $k+n^2$ là số chính phương thì $k+n^2 = m^2 \left(m \in N\right)$.

$\Rightarrow m^2 - n^2 = k$.

$\Leftrightarrow (m+n).(m-n) = k \ (1)$.

Như vậy, vì k chẵn nên trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (2)

Mặt khác, $m+n+m-n=2.m$.

Suy ra, hai số $m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $m+n$ và $m-n$ là hai số chẵn.

Suy ra $(m+n).(m-n)\vdots 4$ nhưng k không chia hết cho 4 , so sánh với (1), ta thấy đây là điều vô lý hay mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n nào với k chẵn và $k \not\vdots 4 (k \in N)$ để $2018+n^2$ là số chính phương.

Bài 31: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để $13n^2+2$ là số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Đặt $13n^2 = m^2\ (*)$.

Nếu n chẵn (lẻ) thì m cũng chẵn (lẻ) nên cùng m,n tính chất chẵn (lẻ).

+) Nếu m,n là các số lẻ thì $13n^2+2$ chia 4 dư 3 (vì $13n^2$ chia 4 dư 1) nên không tồn tại m^2 do m^2 chia 4 dư 1.

+) Nếu m,n chẵn thì $13n^2$ chia 4 dư 2 và $m^2 \vdots 4$ là vô lý.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $13n^2+2$ là số chính phương.

Bài 32: Chứng minh rằng một số chẵn bất kỳ không chia hết cho 4 thì không phân tích thành hiệu của hai số chính phương.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $n=4k+2$ $(k \in N)$(chẵn chia 4 dư 2 do không chia hết cho 4); $n=a^2-b^2 \Rightarrow 4k+2=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ cùng tính chẵn lẻ.

$$\Rightarrow \begin{cases}(a-b)\vdots 2\\(a+b)\vdots 2\end{cases} \Rightarrow (a-b)(a+b)\vdots 4 \Rightarrow (4k+2)\vdots 4.$$

Điều này trái với gia thiết ban đầu.

Vậy một số chẵn bất kì không chia hết cho 4 thì không phân tích thành hiệu của hai số chính phương.

HẾT

CHUYÊN ĐỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

CHỦ ĐỀ 4: DÙNG CHỮ SỐ TẬN CÙNG ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ KHÔNG PHẢI SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

-Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là $0,1,4,5,6,9$; không thể có chữ số tận cùng là $2,3,7,8$. Như vậy để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là $2,3,7,8$.
-Số chính phương tận cùng bằng $1;4$ hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn. Ví dụ : $121;49;...$
-Số chính phương tận cùng là 5 thì chữ số hàng chục là 2.
-Số chính phương tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là lẻ.
-Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 0 thì số chính phương đó có một số chẵn chữ số 0 ở tận cùng. Chẳng hạn: 100, 10000, …

PHẦN II. CÁC BÀI TOÁN

Bài 1: Chứng minh rằng các số sau không là số chính phương:

a) $A=11^{11}+111^{111}+1111^{1111}$

b) $B=100^{100}+10^{10}+8$

c) $C=10^{10}+17$

Lời giải

a) $A=11^{11}+111^{111}+1111^{1111}$

Ta có: 11^{11} có chữ số tận cùng là 1;

111^{111} có chữ số tận cùng là 1;

1111^{1111} có chữ số tận cùng là 1 ;

Vì $1+1+1=3$

Suy ra A có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

b) $B=100^{100}+10^{10}+8$

Ta có: 100^{100} có chữ số tận cùng là 0 ;

10^{10} có chữ số tận cùng là 0 ;

Vì $0+0+8=8$

$\Rightarrow B=100^{100}+10^{10}+8$ có chữ số tận cùng là 8 nên không là số chính phương.

c) $C = 10^{10} + 17$

Ta có: 10^{10} có chữ số tận cùng là 0;

17 có chữ số tận cùng là 7;

$\Rightarrow C = 10^{10} + 17$ có chữ số tận cùng là $0 + 7 = 7$ nên không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng số tự nhiên $N = 2015^3 + 2014^2 + 2013^2 + 2012^2 - 2011^2$ không là số chính phương.

Lời giải

2015^3 có chữ số tận cùng là 5;

2014^2 có chữ số tận cùng là 6;

2013^2 có chữ số tận cùng là 9

2012^2 có chữ số tận cùng là 4;

2011^2 có chữ số tận cùng là 1

Ta có tổng các chữ số tận cùng: $5 + 6 + 9 + 4 - 1 = 23$

Vì N có chữ số tận cùng là 3 nên N không là số chính phương.

Bài 3: Không mất tính tổng quát hãy cho biết các tổng, hiệu sau có phải là số chính phương không?

$A = 7.13.25.63.105 + 113$

$B = 11.19.27.63.99 - 122.92$

$C = 12.13.14.15.16 - 3.12.13.14.82$

Lời giải

$A = 7.13.25.63.105 + 113$

Ta có: $7.13.25.63.105$ có chữ số tận cùng là 5

113 có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow$ A có chữ số tận cùng là 8

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

$B = 11.19.27.63.99 - 122.92$

Ta có: $11.19.27.63.99$ có chữ số tận cùng là 1 ;

122.92 có chữ số tận cùng là 4;

$\Rightarrow$ B có chữ số tận cùng là 7

$\Rightarrow$ B không là số chính phương.

$C = 12.13.14.15.16 - 3.12.13.14.82$

$= 12.13.14.(15.16 - 3.82)$

$= 12.13.14(240 - 246) < 0$

$\Rightarrow$ C không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng tổng bình phương của năm số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi năm số tự nhiên liên tiếp là: $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

Gọi S là tổng bình phương của năm số tự nhiên liên tiếp.

Ta có: $S = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$

$= 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$.

Vì n^2 là số chính phương nên không thể có chữ số tận cùng là 3 hoặc 8 nên $n^2 + 2$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow 5\left(n^2 + 2\right)$ không chia hết cho 25.

Ta thấy S chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25. Vậy S không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh số $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không là số chính phương.

Lời giải

Vì chữ số tận cùng của các số $2004^2; 2003^2; 2002^2; 2001^2$ lần lượt là 6 ; 9 ; 4 ; 1.

Do đó số n có chữ số tận cùng là 8 nên n không là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

Lời giải

Cách 1: Ta có 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90). Do đó số 1234567890 không phải là số chính phương.

Cách 2: Ta có 1234567890 chia hết cho 2 (vì chữ số tận cùng là 0), nhưng không chia hết cho 4 (vì hai chữ số tận cùng là 90) nên 1234567890 không là số chính phương.

Bài 7: Cho $n \in \mathbb{N}$ và $n-1$ không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Do $n-1$ không chia hết cho 4 nên $n=4k+r$ $\left(k\in\mathbb{N}, r\in\{0,2,3\}\right)$.

Ta có $7^4-1=2400\vdots 100$. Ta viết $7^n+2=7^{4k+r}+2=7^r\left(7^{4k}-1\right)+7^r+2$.

Vậy hai chữ số tận cùng của 7^n+2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r+2\left(r=0,2,3\right)$ nên chỉ có thể là $03,51,45$.

Theo tính chất $(1);(2);(3)$ thì rõ ràng 7^n+2 không thể là số chính phương khi $n-1$ không chia hết cho 4.

Bài 8: Tổng sau có là số chính phương hay không $A=3+3^2+3^3+\ldots+3^{20}$.

Lời giải

Ta biết rằng số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.

Mà A chia hết cho 3, nhưng A chia 9 dư 3.

Do đó A không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh rằng tổng sau không là số chính phương: $B=11+11^2+11^3$.

Lời giải

Ta có: 11 có chữ số tận cùng là 1;

11^2 có chữ số tận cùng 1;

11^3 có chữ số tận cùng 1;

$\Rightarrow B$ có chữ số tận cùng là $\left(1+1+1\right)=3$

$\Rightarrow B$ không là số chính phương.

Bài 10: Cho $A=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

Ta có $A=1+2+\left(2^2+2^3+2^4+2^5\right)+\ldots+\left(2^{30}+2^{31}+2^{32}+2^{33}\right)$

$=3+2^2.\left(1+2+2^2+2^3\right)+\ldots+2^{30}.\left(1+2+2^2+2^3\right)$

$=3+2.30+\ldots+2^{29}.30=3+\left(2+\ldots+2^{29}\right).3.10$.

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3.

Mà số chính phương không có chữ số tận cùng là 3.

Do đó A không là số chính phương.

Bài 11: Cho $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có các số : $10^{2012};10^{2011};10^{2010};10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0.

Nên $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương. (Vì số chính phương có chữ số tận cùng là $1;4;5;6;9$).

Bài 12: Cho $A=1+2+2^2+2^3+...+2^{2010}+2^{2011}$. Hỏi $A+8$ có phải là số chính phương không?

Lời giải

$A+8=1+2+2^2+2^3+...+2^{2010}+2^{2011}+8 \ =2^{2012}-1+8=2^{2012}+7$.

Ta có: 2^{2012} có chữ số tận cùng là 6;

$\Rightarrow A$ có chữ số tận cùng là $6+7=13$.

Vì số chính phương không có tận cùng bằng 3, nên $A+8$ không phải là số chính phương.

Bài 13: Chứng minh rằng các số sau không là số chính phương:

a) $A=12^{12}+13^{12}+14^{12}$

b) $B=7^{100}+161$

c) $C=100^{100}+9^8+6$

Lời giải

a) A có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

b) $B=7^{100}+161=\left(7^4\right)^{25}+161\equiv 1^{25}+1\equiv 1+1\equiv 2\left(\bmod 10\right)$

$\Rightarrow$ B có chữ số tận cùng là 2 nên không là số chính phương.

c) $C=100^{100}+9^8+6$

Ta có: 100^{100} có chữ số tận cùng là 0;

9^8 có chữ số tận cùng là 1;

$\Rightarrow C$ có chữ số tận cùng là $\left(0+1+6\right)=7$

$\Rightarrow$ C có chữ số tận cùng là 7 nên không là số chính phương.

Bài 14: Cho $N = 1.3.5.....2015$. Chứng minh rằng $N+3$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có N chia hết cho 5 và N lẻ nên chữ số tận cùng của N là 5.

$N+3$ có chữ số tận cùng là 8 nên không phải là số chính phương.

Bài 15: Các tổng sau có phải là số chính phương không ? Vì sao ?

a) $B = 11^{20} + 11^{21} + 11^{22}$.

b) $C = 10^{10^{10}} + 117$.

Lời giải

a) Tổng $B = 11^{20} + 11^{21} + 11^{22}$ có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

b) Tổng $C = 10^{10^{10}} + 117$ có chữ số tận cùng là 7 nên không là số chính phương.

Bài 16: Cho 4 chữ số $0,2,3,4$. Tìm số chính phương có 4 chữ số gồm cả 4 chữ số trên.

Lời giải

Gọi A là số chính phương có bốn chữ số cần tìm.

A không có tận cùng là 2 hoặc 3 nên chữ số tận cùng của A là 0 hoặc 4.

+) Nếu chữ số tận cùng của A là 0 thì chữ số hàng chục là 0, không thỏa mãn yêu cầu.

+) Nếu chữ số tận cùng của A là 4 thì chữ số hàng chục là chẵn nên chữ số hàng chục là 0 hoặc 2.

A có thể là: $3204, 2304, 3024$.

Ta có: $56 < 3204 < 57^2; 2304 = 48^2; 54^2 < 3204 < 55^2$

Vậy số cần tìm là 2304.

Bài 17: Ta ký hiệu $n!$ là tích của n số nguyên dương đầu tiên. Cụ thể $n! = 1.2....n$. Tìm số tự nhiên n sao cho: $1! + 2! + 3! + ... + n!$ là số chính phương.

Lời giải

$S = 1! + 2! + 3! + ... + n!$

* Với $n \geq 5 \rightarrow n! = 1.2.3.4.5...n \vdots 10 \rightarrow n!$ có chữ số tận cùng là 0.

+) Với $n = 1$ thì $S = 1! = 1 = 1^2$

+) Với $n=2$ thì $S=1!+2!=3$ (loại)

+) Với $n=3$ thì $S=1!+2!+3!=9=3^2$

+) Với $n=4$ thì $S=1!+2!+3!+4!=33$ (loại)

+) Với $n\geq 5$ thì $S=1!+2!+3!+4!+5!+...+n!$

Ta thấy $1!+2!+3!+4!=33$ có chữ số tận cùng là 3;

$5!+...+n!$ có tận cùng là 0

$\Rightarrow S$ có tận cùng là 3 nên S không là số chính phương.

Vậy $n=1$ hoặc $n=3$ thì $1!+2!+3!+...+n!$ là số chính phương.

Bài 18: Chứng minh rằng số tự nhiên $N=114^2+113^2+112^2-111^{11}+2015$ không là số chính phương.

Lời giải

114^2 có chữ số tận cùng là 6;

113^2 có chữ số tận cùng là 9;

112^2 có chữ số tận cùng là 4;

111^{11} có chữ số tận cùng là 1

2015 có chữ số tận cùng là 5;

Ta có $6+9+4-1+5=23$

Vậy N có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow N$ không là số chính phương.

Bài 19: Cho $P=2014^{2014}+2019^{2019}+2^{3^4}$. Chứng minh rằng P không phải là số chính phương.

Lời giải

Chữ số tận cùng của 2014^{2014} là 6;

Chữ số tận cùng của 2019^{2019} là 9;

Chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2;

Chữ số tận cùng của $P=2014^{2014}+2019^{2019}+2^{3^4}$ là chữ số tận cùng của tổng $(6+9+2)=17$ là 7.

Vậy P không phải là số chính phương.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HỌC SINH GIỎI

Bài 1: Cho $S = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{98}$. Chứng tỏ rằng S không phải là số chính phương.

(Trích Đề thi HSG lớp 9 huyện Cẩm Giàng năm 2018 -2019).

Hướng dẫn

Gọi $M = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{98}$

$\Rightarrow\ S = 2 + M$

Ta có: $M = 2M - M = \left(2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{99}\right) - \left(2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98}\right) = 2^{99} - 2$

$\Rightarrow\ S = 2^{99} = \left(2^4\right)^{24}.2^3 = 8.16^{24}$

Vì 16^{24} có chữ số tận cùng là 6 $\Rightarrow S$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy S không là số chính phương.

Cách 2: Gọi $M = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{98}$

$\Rightarrow S = 2 + M$

Ta có $M = 2M - M = \left(2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{99}\right) - \left(2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98}\right) = 2^{99} - 2$

$\Rightarrow S = 2^{99}$

Ta thấy thừa số nguyên tố 2 có số mũ lẻ .

Vậy S không là số chính phương.

Bài 2: Cho biểu thức $M = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{80}$. Chứng tỏ rằng M không phải là số chính phương.

(Trích Đề thi HSG lớp 6 trường THCS Quỳnh Giang năm 2015 -2016).

Hướng dẫn

Ta thấy $M = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{80}$ chia hết cho số nguyên tố 5.

Mặt khác $5^2 + 5^3 + ... + 5^{80}$ chia hết cho 5^2 (Vì các số hạng đều chia hết cho 5^2)

$\Rightarrow M$ không chia hết cho 5^2 (Vì tổng M có một số hạng 5 không chia hết cho 5^2)

$\Rightarrow M$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 5^2

Vậy M không phải là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng sau: $P = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ ... + 3^{61} + 3^{62}$ không là số chính phương.

(Trích Đề thi HSG lớp 6 trường THCS Nguyễn Thị Lợi năm 2009 -2010).

Lời giải

$P=\left(1+3+3^2+3^3\right)+\left(3^4+3^5+3^6+3^7\right)+...+\left(3^{56}+3^{57}+3^{58}+3^{59}\right)+3^{60}+3^{61}+3^{62}$

$=\left(40+3^4.\ 40\ +...+3^{56}.\ 40\right)+3^{60}+3^{61}+3^{62}.$

Ta thấy: $\left(40+3^4.\ 40+\ ...\ +3^{56}.\ 40\right)$ có chữ số tận cùng là 0.

Số $3^{60}=\left(3^2\right)^{30}=9^{30}$ có chữ số tận cùng là 1.

Số $3^{61}=\ 3.3^{60}$ có chữ số tận cùng là 3 .

Số $3^{62}=\ 9.3^{60}$ có chữ số tận cùng là 9.

Vậy tổng P có chữ số tận cùng là $3\Rightarrow P$ không là số chính phương.

Bài 4: Cho $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$**.** Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

(Trích Đề thi HSG lớp 6 trường THCS Nông Trang - TP Việt Trì năm 2014 - 2015).

Lời giải

Ta có các số : $10^{2012};10^{2011};10^{2010};10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0.

Nên $A=10^{2012}+10^{2011}+10^{2010}+10^{2009}+8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 5: Cho $P=14^{14^{14}}+9^{9^9}+2^{3^4}$. Chứng minh rằng P không phải là số chính phương.

(Trích Đề thi HSG lớp 6 huyện Lý Nhân năm 2018 -2019).

Lời giải

Vì $14^{14^{14}}=\left(14^2\right)^k\equiv 6^k\equiv 6\left(\bmod 10\right)$, $k\in\mathbb{N}$ nên chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ là 6.

Chữ số tận cùng của 9^{9^9} là 9. (vì 9^9 lẻ)

Chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2. $\left(2^{3^4}=2^{81}\equiv\left(2^4\right)^{20}.2\equiv 6^{20}.2\equiv 6.2\equiv 2\left(\bmod 10\right)\right)$

Chữ số tận cùng của $P=14^{14^{14}}+9^{9^9}+2^{3^4}$ là chữ số tận cùng của tổng $\left(6+9+2\right)$ là 7 .

Vậy P không phải là số chính phương.

CHUYÊN ĐỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG
CHỦ ĐỀ 5: PHƯƠNG PHÁP KẸP TRONG BÀI TOÁN SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Không tồn tại số chính phương nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

Cụ thể: Nếu có $q^2 < k < (q+1)^2$ $(k; q \in \mathbb{N})$ thì k không là số chính phương.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI:

Dạng 1: Chứng minh một số, một biểu thức số không là số chính phương.

I. Phương pháp giải:

1. Để chứng tỏ một số $k\,(k \in \mathbb{N})$ không là số chính phương ta tiến hành theo 3 bước:

Bước 1: Chứng tỏ $k > q^2$ $(q \in \mathbb{N})$

Bước 2: Chứng tỏ $k < (q+1)^2$ $(q \in \mathbb{N})$

Bước 3: Từ 2 bước trên suy ra $q^2 < k < (q+1)^2$ $(q \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow k$ không là số chính phương

2. Sử dụng các hằng đẳng thức để biến đổi biểu thức số:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng số 10224 không là số chính phương.

Lời giải:

Nhận thấy: $101^2 = 10201 \Rightarrow 10224 > 101^2$

$102^2 = 10404 \Rightarrow 10224 < 102^2$

Suy ra $101^2 < 10224 < 102^2$

Vậy 10224 không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng số 40725 không là số chính phương.

Lời giải:

Nhận thấy: $201^2 = 40401 \Rightarrow 40725 > 201^2$

$202^2 = 40804 \Rightarrow 40725 < 202^2$

Suy ra $201^2 < 40725 < 202^2$

Vậy 40725 không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh số 4014025 không là số chính phương.

Lời giải:

Ta có $2003^2 = 4012009 \Rightarrow 4014025 > 2003^2$

$2004^2 = 4016016 \Rightarrow 4014025 < 2004^2$

Suy ra $2003^2 < 4014025 < 2004^2$

Chứng tỏ 4014025 không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh số 4025025 không là số chính phương.

Lời giải:

Ta có $2006^2 = 4024036 \Rightarrow 4025025 > 2006^2$

$2007^2 = 4028049 \Rightarrow 4025025 < 2007^2$

Suy ra $2006^2 < 4025025 < 2007^2$

Chứng tỏ 4025025 không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng:

a) $\mathbb{S} = 2016^{2016} + 2016^{1000} + 2016^{999} + ... + 2016^2 + 2016$ không là số chính phương.

b) $A = 2018^{2018} + 2018^{1000} + 2018^{999} + ... + 2018^2 + 2018 + 5$ không là số chính phương

Lời giải:

a) Ta có $\mathbb{S} = 2016^{2016} + 2016^{1000} + 2016^{999} + ... + 2016^2 + 2016$

$\Rightarrow \mathbb{S} > 2016^{2016} = (2016^{1008})^2$ (1)

Ta đi chứng minh $\mathbb{S} < (2016^{1008} + 1)^2 = 2016^{2016} + 2.2016^{1008} + 1$

Thật vậy :

$2016^{1000} + 2016^{999} + ... + 2016^2 + 2016 < 2016^{1000} + 2016^{1000} + ... + 2016^{1000}$ (1000 số 2016^{1000})

$\Rightarrow 2016^{1000} + 2016^{999} + ... + 2016^{2} + 2016 < 1000.2016^{1000}$

Mà $1000.2016^{1000} < 2016^{1001} < 2.2016^{1008} + 1$

$\Rightarrow \mathbb{S} < 2016^{2016} + 2.2016^{1008} + 1 = (2016^{1008} + 1)^{2}$

$\Rightarrow \mathbb{S} < (2016^{1008} + 1)^{2}$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow (2016^{1008})^{2} < \mathbb{S} < (2016^{1008} + 1)^{2}$

Suy ra $\mathbb{S}$ không là số chính phương (ĐPCM)

b) Ta có : $A = 2018^{2018} + 2018^{1000} + 2018^{999} + ... + 2018^{2} + 2018 + 5$
$\Rightarrow A > 2018^{2018} = (2018^{1009})^{2}$ (1)

Lại có:

$2018^{2018} + 2018^{1000} + ... + 2018^{2} + (2018 + 5) < 2018^{2018} + 2018^{1000} + ... + 2018^{1000}$ (1000 số 2018^{1000})

$\Rightarrow A < 2018^{2018} + 1000.2018^{1000} < 2018^{2018} + 2018^{1001} < 2018^{2018} + 2.2018^{1009} + 1$

$\Rightarrow A < (2018^{1009} + 1)^{2}$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow (2018^{1009})^{2} < A < (2018^{1009} + 1)^{2}$

Suy ra A không là số chính phương (ĐPCM)

Bài 6: Chứng minh rằng:

$\mathrm{M} = 2021^{2020} + 2021^{100} + 2021^{99} + ... + 2021^{2} + 2021^{1} + 2021^{0}$ không là số chính phương.

Lời giải:

Ta có : $\mathrm{M} = 2021^{2020} + 2021^{100} + 2021^{99} + ... + 2021^{2} + 2021^{1} + 2021^{0}$

$\Rightarrow \mathrm{M} > 2021^{2020} = (2021^{1010})^{2}$ (1)

Lại có:

$2021^{100} + 2021^{99} + ... + 2021^{2} + (2021^{1} + 2021^{0}) < 2021^{100} + ... + 2021^{100}$ (100 số 2021^{100})

$\Rightarrow 2021^{100} + 2021^{99} + ... + 2021^{2} + (2021^{1} + 2021^{0}) < 100.2021^{100}$

$\Rightarrow \mathrm{M} < 2021^{2020} + 100.2021^{100} < 2021^{2020} + 2021^{101} < 2021^{2020} + 2.2021^{1010} + 1$

$\Rightarrow \mathrm{M} < (2021^{1010} + 1)^{2}$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow (2021^{1010})^2 < \mathrm{M} < (2021^{1010}+1)^2$

Suy ra M không là số chính phương (ĐPCM)

Dạng 2: Chứng minh biểu thức *A(n)* không là số chính phương.

I. Phương pháp giải:

- Để chứng tỏ biểu thức $A(n)\ (n \in \mathbb{N})$ không là số chính phương ta tiến hành theo 3 bước:

Bước 1: Chứng tỏ $A(n) > [B(n)]^2$

Bước 2: Chứng tỏ $A(n) < [B(n)+1]^2$

Bước 3: Từ 2 bước trên suy ra $[B(n)]^2 < A(n) < [B(n)+1]^2 \Rightarrow A(n)$ không là số chính phương.

- Sử dụng các hằng đẳng thức sau để biến đổi biểu thức:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a+ab+b)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a-ab+b)$

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng tích của hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp khác 0 là $n;(n+1)\ (n \in \mathbb{N}^*)$

Tích 2 số là $n(n+1)$

Ta có $n(n+1) = n^2 + n > n^2\ \ (n \in \mathbb{N}^*)$ (1)

Mặt khác $n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow n^2 < n^2 + n < (n+1)^2 \Rightarrow n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n\left(n+1\right)$ là không là số chính phương.

Vậy tích của hai số tự nhiên liên tiếp khác 0 không là số chính phương (ĐPCM)

Bài 2: Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi 4 số nguyên dương liên tiếp là $n;(n+1);(n+2);(n+3)$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Đặt $\mathbb{S} = n(n+1)(n+2)(n+3)$

$\Rightarrow \mathbb{S} = \left[n(n+3)\right].\left[(n+1)(n+2)\right]$

$\Rightarrow \mathbb{S} = (n^2+3n)(n^2+3n+2)$

Đặt $(n^2+3n) = x$ $\left(x \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow \mathbb{S} = x(x+2) = x^2+2x$

Nhận thấy $x^2 < x^2+2x < x^2+2x+1$ $\Rightarrow x^2 < x^2+2x < (x+1)^2$

Suy ra $\mathbb{S}$ không là số chính phương $\forall x \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $\mathbb{S}$ không là số chính phương $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy tích bốn số nguyên dương liên tiếp không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng bình phương của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải:

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $n;(n+1);(n+2);(n+3)$ $\left(n \in \mathbb{N}\right)$

Đặt $A = n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$

$\Rightarrow A = n^2+(n^2+2n+1)+(n^2+4n+4)+(n^2+6n+9)$

$\Rightarrow A = 4n^2+12n+14$

$\Rightarrow A = (4n^2+12n+9)+5$

$\Rightarrow A = \left[(2n)^2+2.2n.3+3^2\right]+5$

$\Rightarrow A = (2n+3)^2+5$

$\Rightarrow A=(2n+3)^2+5$

$\Rightarrow A>(2n+3)^2$ (1)

Mặt khác ta có:

$(2n+4)^2=4n^2+16n+16=(4n^2+12n+9)+4n+7=(2n+3)^2+4n+7>(2n+3)^2+5\ (n\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow A<(2n+4)^2$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow(2n+3)^2<A<(2n+4)^2\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng $\forall n\in\mathbb{N}$ các số sau không là số chính phương

a) $n^2+7n+10$

b) $4n^2+5n+2$

Lời giải:

a) Nhận thấy : $(n+3)^2=n^2+6n+9\ (\forall n\in\mathbb{N})$

Mà $n^2+7n+10>n^2+6n+9$

nên $n^2+7n+10>(n+3)^2$ (1)

Cũng có $(n+4)^2=n^2+8n+16\ (\forall n\in\mathbb{N})$

Mà $n^2+7n+10<n^2+8n+16$

nên $n^2+7n+10<(n+4)^2\ \forall n\in\mathbb{N}$ (2)

Từ $(1),(2)\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}$ thì $n^2+7n+10$ không là số chính phương

b) Nhận thấy $\forall n\in\mathbb{N}$ ta có:

$(2n+1)^2=4n^2+4n+1$

$(2n+2)^2=4n^2+8n+4$

$4n^2+4n+1<4n^2+5n+2<4n^2+8n+4$

$\Rightarrow(2n+1)^2<4n^2+5n+2<(2n+2)^2\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}$ thì $4n^2+5n+2$ không là số chính phương

Bài 5 Chứng minh rằng với n là số tự nhiên thì các số sau không phải số chính phương

a) $A = n^2 + 2n + 3$

b) $B = 9n^2 + 8n + 10$

Lời giải:

a) Ta có: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$

Mà $n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + 3 < n^2 + 4n + 4$

nên $(n+1)^2 < n^2 + 2n + 3 < (n+2)^2$

$\Rightarrow A = n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương

b) Ta có: $(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1$

$(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4$

Mà $9n^2 + 6n + 1 < 9n^2 + 8n + 10 < 9n^2 + 12n + 4$

nên $(3n+1)^2 < 9n^2 + 8n + 10 < (3n+2)^2$

$\Rightarrow B = 9n^2 + 8n + 10$ không là số chính phương

Bài 6: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}; n > 1$ không là số chính phương.

Lời giải:

Đặt $B = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$

$B = n^2.\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right) = n^2.\left[(n^4 - n^2) + (2n+2)\right]$

$\Rightarrow B = n^2.\left[n^2(n^2-1) + 2(n+1)\right] = n^2.\left[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)\right]$

$\Rightarrow B = n^2.(n+1)\left[n^2(n-1) + 2\right] = n^2.(n+1)\left[n^3 - n^2 + 2\right]$

$\Rightarrow B = n^2(n+1).\left[\left(n^3+1\right) - \left(n^2-1\right)\right] = n^2(n+1).\left[(n+1)\left(n^2-n+1\right) - (n-1)(n+1)\right]$

$\Rightarrow B = n^2(n+1).(n+1)\left[\left(n^2-n+1\right) - (n-1)\right] = n^2(n+1)^2.\left(n^2 - 2n + 2\right)$

Với $n \in \mathbb{N},\ n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = \left(n^2 - 2n + 1\right) + 1 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

$\Rightarrow B > (n-1)^2$ (1)

Mặt khác với $n \in \mathbb{N},\ n > 1$ ta có $n^2 - 2n + 2 = n^2 - (2n-2) = n^2 - 2(n-1) < n^2$

$\Rightarrow B < n^2$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $(n-1)^2 < B < n^2 \Rightarrow B$ không phải là một số chính phương.

Vậy số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}; n > 1$ không là số chính phương (ĐPCM)

Bài 6: Cho n là số nguyên dương và m là ước nguyên dương của $2n^2$.

CMR: $n^2 + m$ không là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử: $n^2 + m$ là số chính phương.

Đặt: $n^2 + m = k^2\ (k \in \mathbb{N})$ (1)

Theo bài ra ta có: $2n^2 = mp\ (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow m = \dfrac{2n^2}{p}$

Thay $m = \dfrac{2n^2}{p}$ vào (1) ta được: $n^2 + \dfrac{2n^2}{p} = k^2$

$\Rightarrow n^2p^2 + 2pn^2 = p^2k^2$

$\Rightarrow n^2(p^2 + 2p) = (pk)^2$

Do $n^2, (pk)^2$ là các số chính phương nên $p^2 + 2p$ là số chính phương.

Mặt khác: $p^2 < p^2 + 2p < (p+1)^2 \Rightarrow p^2 + 2p$ không là số chính phương (Mâu thuẫn với giả sử)

Vậy $n^2 + m$ không là số chính phương.

Dạng 3: Tìm giá trị của *n* để biểu thức *A(n)* là một số chính phương.

I. Phương pháp giải:

Xét các trường hợp có thể xảy ra của n. Dùng tính chất "Nếu $q^2 < k < (q+1)^2$ $(k;q \in \mathbb{N})$ thì k không là số chính phương" để loại các giá trị không phù hợp của n và từ đó chọn giá trị phù hợp của n.

II. Bài toán:

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để $n\left(n+1\right)$ là số chính phương.

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n = 0 \Rightarrow n\left(n+1\right) = 0 \Rightarrow n\left(n+1\right)$ là số chính phương

+) $n \geq 1$:

Ta có $n\left(n+1\right) = n^2 + n > n^2 \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ (1)

Mặt khác $n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow n^2 < n^2 + n < (n+1)^2$

$\Rightarrow n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n\left(n+1\right)$ là không là số chính phương.

Vậy $n = 0$ thì $n\left(n+1\right)$ là số chính phương

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $\mathbb{S} = n(n+1)(n+2)(n+3)$ là số chính phương.

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n = 0 \Rightarrow \mathbb{S} = n(n+1)(n+2)(n+3) = 0 \Rightarrow \mathbb{S}$ là số chính phương

+) $n \geq 1$:

Ta có $\mathbb{S} = \left[n(n+3)\right].\left[(n+1)(n+2)\right] = (n^2+3n)(n^2+3n+2)$

Đặt $(n^2+3n) = x \quad \left(x \geq 4\right) \Rightarrow \mathbb{S} = x(x+2) = x^2 + 2x$

Nhận thấy $x^2 < x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 < x^2 + 2x < (x+1)^2$

Suy ra $\mathbb{S}$ không là số chính phương $\forall x \geq 4$

Suy ra $\mathbb{S}$ không là số chính phương với $n \geq 1$

Vậy $n = 0$ thì $\mathbb{S} = n(n+1)(n+2)(n+3) = 0$ là số chính phương.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 3n$ là số chính phương

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n = 0 \Rightarrow n^2 + 3n = 0 \Rightarrow n^2 + 3n$ là số chính phương

+) $n = 1 \Rightarrow n^2 + 3n = 4 \Rightarrow n^2 + 3n$ là số chính phương

+) $n > 1$:

Ta có $n^2 + 3n = n^2 + 2n + n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Cũng có $n^2 + 3n = n^2 + 2n + n < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

$\Rightarrow (n+1)^2 < n^2 + 3n < (n+2)^2$

$\Rightarrow n^2 + 3n$ không là số chính phương

Vậy với $n = 0;1$ thì $n^2 + 3n$ là số chính phương.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để $n^4 - 3n + 6$ là số chính phương

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n = 0 \Rightarrow n^4 - 3n + 6 = 6 \Rightarrow n^4 - 3n + 6$ không là số chính phương.

+) $n = 1 \Rightarrow n^4 - 3n + 6 = 4 \Rightarrow n^4 - 3n + 6$ là số chính phương.

+) $n = 2 \Rightarrow n^4 - 3n + 6 = 16 \Rightarrow n^4 - 3n + 6$ là số chính phương.

+) $n > 2$:

Ta có $n^4 - 3n + 6 = n^4 + (3n - 6) = n^4 - 3(n-2) < n^4 = (n^2)^2$ (1)

Mặt khác ta có: $(n^2 - 1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$

Xét hiệu:

$n^4-3n+6-(n^2-1)^2=n^4-3n+6-(n^4-2n^2+1)$

$=2n^2-3n+5$

$=2n^2-4n+n+5$

$=2n(n-2)+n+5>0\quad \forall n>2$

$\Rightarrow n^4-3n+6-(n^2-1)^2>0\Rightarrow n^4-3n+6>(n^2-1)^2\quad (2)$

Từ (1), $(2)\Rightarrow (n^2-1)^2<n^4-3n+6<(n^2)^2$

$\Rightarrow n^4-3n+6$ không là số chính phương.

Vậy với $n=1;2$ thì n^4-3n+6 là số chính phương.

Bài 5: Tìm tất các các số nguyên n để : $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương

Lời giải:

Đặt $y^2=n^4+2n^3+2n^2+n+7=\left(n^2+n+1\right)^2-\left(n^2+n+6\right)$

$\Rightarrow y^2=\left(n^2+n\right)^2+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2+6.\dfrac{3}{4}$ hoặc $y^2=\left(n^2+n+2\right)^2-3\left(n^2+n-1\right)$

Khi $n=0$ hoặc $n=-1\Rightarrow y^2=7$ không phải là số chính phương

Với $n\neq 0,-1\Rightarrow n^2+n-1=\left(n-1\right)\left(n+1\right)+n$ và $-3\left(n^2+n-1\right)<0$

Ta có : $\left(n^2+n\right)^2<y^2<\left(n^2+n+2\right)^2\Rightarrow y^2=\left(n^2+n+1\right)^2$

Lúc đó : $n^2+n-6=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=2\\ n=-3\end{array}\right.$

Bài 6: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương

Lời giải:

Ta có số tự nhiên n có 2 chữ số nên $10\le n\le 99$

$\Rightarrow 21\le 2n+1\le 199$

Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được $2n+1$ bằng $25;49;81;121;169$

Tương ứng với số n bằng $12;24;40;60;84$

Tương ứng $3n+1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Trong đó chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy số tự nhiên n có 2 chữ số cần tìm là $n=40$

Bài 7: Tìm số tự nhiên n để n^4-n+2 là số chính phương

Lời giải:

Vì n là số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

+) $n=0 \Rightarrow n^4-3n+6=6 \Rightarrow n^4-3n+6$ không là số chính phương.

+) $n \neq 0$ ta xét:

$$\left(n^4-n+2\right)-\left(n^2-1\right)^2=\left(n^4-n+2\right)-\left(n^4-2n^2+1\right)=2n^2-n+1>0$$

$$\Rightarrow \left(n^4-n+2\right)>\left(n^2-1\right)^2 \qquad (1)$$

$$\left(n^2+1\right)^2-\left(n^4-n+2\right)=\left(n^4+2n^2+1\right)-\left(n^4-n+2\right)=2n^2+n-1>0$$

$$\Rightarrow \left(n^2+1\right)^2>\left(n^4-n+2\right) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(n^2-1\right)^2<\left(n^4-n+2\right)<\left(n^2+1\right)^2$

$$\Rightarrow \left(n^4-n+2\right)=n^4$$

$$\Leftrightarrow -n+2=0$$

$$\Rightarrow n=2$$

Vậy $n=2$ thì n^4-n+2 là số chính phương

Dạng 4: Tìm một số chính phương thỏa mãn các điều kiện cho trước.

Bài 1: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số B cũng là số chính phương. Tìm hai số A và B.

Lời giải:

Gọi $A=\overline{abcd}=k^2$, khi đó: $B=\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}=m^2 \left(k,m\in \mathbb{N}, 32<k<m<100\right)$

Ta có :

$\Rightarrow m^2 - k^2 = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} - \overline{abcd}$

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1000(a+1) + 100(b+1) + 10(c+1) + (d+1) - (1000a + 100b + 10c + d)$

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1000a + 1000 + 100b + 100 + 10c + 10 + d + 1 - (1000a + 100b + 10c + d)$

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111$

$\Rightarrow (m-k)(m+k) = 11.101$ (1)

Nhận xét thấy tích với $k, m \in \mathbb{N}, 32 < k < m < 100 \Rightarrow (m-k),(m+k)$ là hai số nguyên dương.

và $m - k < m + k < 200$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} m-k=11 \\ m+k=101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=56 \\ k=45 \end{cases}$

Vậy hai số $A = 2025, B = 3136$

Bài 2: Tìm 1 số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm hai chữ số sau một đơn vị.

Lời giải:

Gọi số chính phương có 4 chữ số là $\overline{abcd}$

Đặt $\overline{abcd} = k^2$ $(k \in \mathbb{N}, 32 \le k < 100)$

$\Rightarrow 100\overline{ab} + \overline{cd} = k^2$ (1)

Mặt khác theo bài ra ta có : $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

$\Rightarrow 100(\overline{ab} - \overline{cd}) = 1$

$\Rightarrow 100\overline{ab} - 100\overline{cd} = 100$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $(100\overline{ab} + \overline{cd}) - (100\overline{ab} - 100\overline{cd}) = k^2 - 100$

$\Rightarrow 101\overline{cd} = k^2 - 10^2 = (k-10)(k+10)$

$\Rightarrow k + 10 \,\vdots\, 101$ hoặc $k - 10 \,\vdots\, 101$

Mà $k \in \mathbb{N}, 32 \le k < 100$ nên $(k-1;101)=1 \Rightarrow k+10 \vdots 101$

Do $32 \le k < 100$

$\Rightarrow 42 \le k+10 < 110$

$\Rightarrow k+10=101$

$\Rightarrow k=91$

$\Rightarrow \overline{abcd}=91^2=8281$

Vậy số chính phương có 4 chữ số cần tìm là 8281

Bài 3: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Lời giải:

Gọi số chính phương phải tìm là : $\overline{aabb}=n^2, (a,b \in \mathbb{N}), 1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9$

Ta có : $n^2=\overline{aabb}=100\overline{aa}+\overline{bb}=11.100\text{a}+11b$

$\Rightarrow n^2=11(100a+b)=11(99a+a+b)$ (1)

$\Rightarrow n^2 \vdots 11$

Mà 11 là số nguyên tố $\Rightarrow n^2 \vdots 11^2$ (2)

Từ (1),(2) ta suy ra $a+b \vdots 11$

Mà $1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9$

$\Rightarrow 1 \le a+b \le 18$

$\Rightarrow a+b=11$

Thay $a+b=11$ vào (1) ta được : $n^2=11^2(9a+1) \Rightarrow 9a+1$ là số chính phương

Bằng phép thử a từ 1 đến 9 ta thấy có $a=7$ là thỏa mãn $\Rightarrow$ $b=4$

Vậy số cần tìm là 7744 .

Bài 4: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Lời giải:

Gọi số chính phương đó là: $\overline{abcd}$

Theo bài ra ta có $\overline{abcd} = x^2 = y^3 \left(x, y \in \mathbb{N}\right)$

Vì $y^3 = x^2 \Rightarrow y$ cũng là một số chính phương.

Mặt khác ta có : $1000 \le \overline{abcd} \le 9999$

$\Rightarrow 1000 \le y^3 \le 9999$

$\Rightarrow 10^3 \le y^3 \le 21^3$

$\Rightarrow 10 \le y \le 21$

Mà y là số chính phương nên $y = 16$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 16^3$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 4096$

Vậy số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương là 4096

Bài 5: Tìm số có hai chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Lời giải:

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}\left(a, b \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 9, 0 \le b \le 9\right)$

Theo bài ra ta có: $\overline{ab}^2 = \left(a+b\right)^3 \Leftrightarrow \left(10a+b\right)^2 = \left(a+b\right)^3$

Khi đó $\overline{ab}$ là một lập phương và $a+b$ là một số chính phương

Đặt $\overline{ab} = t^3 \left(t \in \mathbb{N}\right), a+b = m^2 \left(m \in \mathbb{N}\right)$

Vì $10 \le \overline{ab} \le 99$

$\Rightarrow 10 \le t^3 \le 99$

$\Rightarrow t = 27$ hoặc $t = 64$

$\Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

TH1 : $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a+b = 9$ là số chính phương

TH2 : $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a+b = 10$ không là số chính phương (loại)

Vậy số có hai chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó là 27.

Bài 6: Tìm ba số chính phương lẻ liên tiếp mà tổng của chúng là một số có 4 chữ số giống nhau.

Lời giải:

Gọi ba số lẻ liên tiếp đó là: $2n-1, 2n+1, 2n+3\left(n\in\mathbb{N}\right)$

Ta xét: $A=\left(2n-1\right)^2+\left(2n+1\right)^2+\left(2n+3\right)^2$

$A=\left(4n^2-4n+1\right)+\left(4n^2+4n+1\right)+\left(4n^2+12n+9\right)$

$A=12n^2+12n+11$

Theo bài ra ta có $A=12n^2+12n+11=\overline{aaaa}=1111.a$ (a lẻ và $1\le a\le 9$)

$\Rightarrow 12n^2+12n=1111.\text{a}-11$

$\Rightarrow 12n\left(n+1\right)=11\left(101a-1\right)$ (*)

$\Rightarrow 101a-1 \vdots 3$

$\Rightarrow 99a+2a-1 \vdots 3$

$\Rightarrow 2a-1 \vdots 3$

Vì $1\le a\le 9\Rightarrow 1\le 2a-1\le 17$

Mà $2a-1$ lẻ nên $2a-1\in\left\{1;3;9;15\right\}\Rightarrow a\in\left\{1;2;5;8\right\}$

Vì a lẻ nên $a=1;5$

+ Thay $a=1$ vào (*) ta được $12n\left(n+1\right)=1100$

$\Rightarrow n\left(n+1\right)=275$

Mà $n\left(n+1\right)$ là tích 2 số tự nhiên liên tiếp nên chỉ có tận cùng là $0;2;6$ (loại)

+ Thay $a=5$ vào(*) ta được $12n\left(n+1\right)=5544$

$\Rightarrow n\left(n+1\right)=462$

$\Rightarrow n\left(n+1\right)=21.22$

$\Rightarrow\ n=21$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n-1=41 \\ 2n+1=43 \\ 2n+3=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2n-1)^2=1681 \\ (2n+1)^2=1849 \\ (2n+3)^2=2025 \end{cases}$$

Vậy ba số chính phương lẻ liên tiếp cần tìm là $1681;1849;2025$

Bài 7: Tìm số chính phương mà nó bằng bình phương của một số có hai chữ số và bằng lập phương của tổng hai chữ số của số có hai chữ số đó.

Lời giải:

Gọi số chính phương cần tìm là n

Theo bài ra ta có $\left(\overline{ab}\right)^2 = n = (a+b)^3$ nên $(a+b)$ là số chính phương.

Đặt $(a+b) = x^2 \Rightarrow x^6 = \overline{ab}^2 \Rightarrow x^3 = \overline{ab}$

mà $9 < \overline{ab} < 100 \Rightarrow 9 < x^3 < 100 \Rightarrow x \in \{3;4\}$

Nếu $x=3 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ (thỏa mãn)

Nếu $x=4 \Rightarrow \overline{ab} = 64$ (loại)

$\Rightarrow n = \overline{ab}^2 = 27^2 = 729$

Vậy số chính phương cần tìm là 729

Bài 8: Tìm một số chính phương biết nó bằng tổng của một số có hai chữ số với số gồm hai chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại.

Lời giải:

Gọi số chính phương đó có dạng n^2 $(n \in \mathbb{N})$

Theo bài ra ta có : $n^2 = \overline{ab} + \overline{ba}$ $(a, b \in \mathbb{N}; 0 < a, b < 9)$

$\Rightarrow n^2 = 10a + b + 10b + a = 11(a+b) \Rightarrow n^2 \vdots 11$

Mà 11 là số nguyên tố nên $\Rightarrow n^2 \vdots 11^2$

$\Rightarrow 11(a+b) \vdots 11^2 \Rightarrow (a+b) \vdots 11$

Mà $a,b \in \mathbb{N}; 0 < a,b < 9 \Rightarrow 2 < (a+b) < 18 \Rightarrow (a+b) = 11$

$\Rightarrow n^2 = 11.11 = 121$

Vậy số chính phương cần tìm là 121

Bài 9: Tìm một số chính phương biết nó bằng bình phương của một số có hai chữ số trừ đi bình phương của số gồm hai chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại.

Lời giải:

Gọi số chính phương đó có dạng n^2 $(n \in \mathbb{N})$

Theo bài ra ta có : $n^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ba}^2 \left(a,b \in \mathbb{N}; 0 < a,b < 9\right)$

$\Rightarrow n^2 = (10a+b)^2 - (10b+a)^2 = \left(100a^2 + 20ab + b^2\right) - \left(100b^2 + 20ab + a^2\right)$

$\Rightarrow n^2 = 99a^2 - 99b^2 = 99\left(a^2 - b^2\right) = 11.9\left(a^2 - b^2\right)$

$\Rightarrow n^2 = 11.9(a-b)(a+b)$

$\Rightarrow n^2 \vdots 11$

Mà 11 là số nguyên tố nên $\Rightarrow n^2 \vdots 11^2$

$\Rightarrow 11.9.(a-b)(a+b) \vdots 11^2$

Vì $a,b \in \mathbb{N}; 0 < a,b < 9 \Rightarrow 0 < (a-b) < 8, 2 < (a+b) < 18 \Rightarrow (a+b) = 11$

$\Rightarrow n^2 = 11^2.3^2(a-b)$ suy ra $(a-b)$ là số chính phương

Mà $0 < (a-b) < 8 \Rightarrow (a-b) = 1; 4$

Mặt khác vì $(a-b), (a+b)$ cùng tính chẵn lẻ nên $(a-b) = 1$

$\Rightarrow n^2 = 11^2.3^2.1 = 1089$

Vậy số chính phương cần tìm là 1089

Bài 10: Tìm số chính phương có dạng $\overline{abcd}$, biết : $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$

Lời giải:

Đặt $\overline{abcd} = n^2 \Rightarrow n^2 = 100\overline{ab} + \overline{cd}$

Mà $\overline{ab} = \overline{cd} + 1$

nên $n^2 = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$

$\Rightarrow n^2 - 10^2 = 101\overline{cd}$

$\Leftrightarrow 101\overline{cd} = (n+10)(n-10)$

$\Rightarrow (n-10)(n+10) \vdots 101$

Vì 101 là số nguyên tố $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} n-10 \vdots 101 \\ n+10 \vdots 101 \end{array}\right.$

Ta có : $1000 \le n^2 < 10000 \Rightarrow 31 < n < 100 \Rightarrow n+10 \vdots 101 \Leftrightarrow n = 91$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$

Bài 11: Tìm một số chính phương có 4 chữ số là số là một lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải:

Gọi số chính phương đó là : $\overline{abcd} = x^2 = y^3 \left(x, y \in N\right)$

Vì $y^3 = x^2 \Rightarrow y$ cũng là một số chính phương.

Ta có : $1000 \le \overline{abcd} \le 9999 \Rightarrow 1000 \le y^3 \le 9999 \Rightarrow 10 \le y \le 21$

Mà y là số chính phương nên $y = 16$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 16^3 = 4096$

Vậy số chính phương cần tìm là 4096

Bài 12: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố và số đó bằng bình phương của số có tổng các chữ số là một số chính phương.

Lời giải:

Gọi số phải tìm là : $\overline{abcd}$ với $a, b, c, d \in N, 1 \le a \le 9, 0 \le b, c, d \le 9$

Vì $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $d \in \{0;1;4;5;6;9\}$ mà d là số nguyên tố nên $d = 5$

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 1000 => 32 \le k < 100$ với k là 1 số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng là 5

$\Rightarrow k$ có tận cùng là 5 và tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow k = 45$

Vậy $\overline{abcd} = 2025$