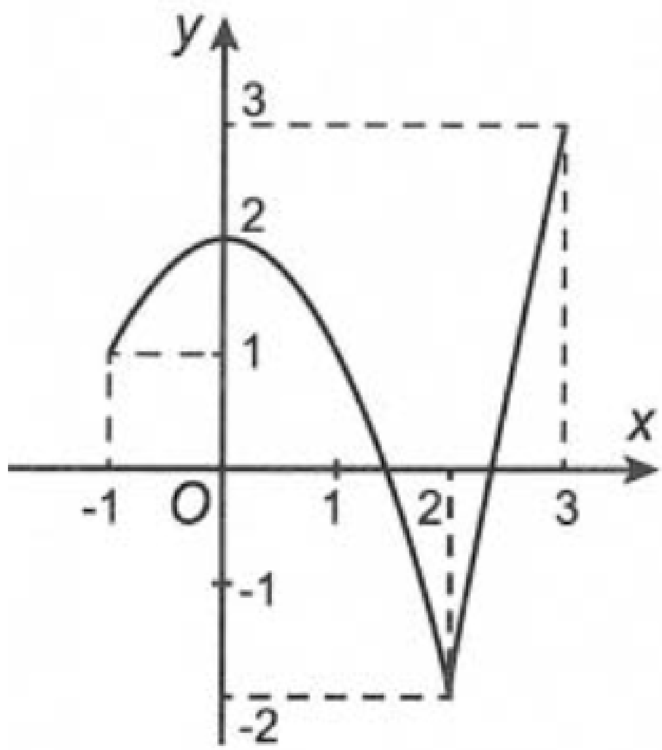


ÔN KIẾN THỨC TOÁN 12 THPT
BÀI GIẢNG
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ
(KẾT HỢP 3 BỘ SÁCH GIÁO KHOA)

THÂN TẶNG TOÀN THỂ QUÝ THẦY CÔ VÀ CÁC EM HỌC SINH TRÊN TOÀN QUỐC

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK)
GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL); TEL 0398021920

THÀNH PHỐ THÁI BÌNH – THÁNG 7/2024

ÔN KIẾN THỨC TOÁN 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

DUNG LƯỢNG	NỘI DUNG
1 FILE	GTLN, GTNN CỦA CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP
1 FILE	GTLN, GTNN CỦA CÁC HÀM SỐ PHỨC TẠP
1 FILE	CÁC BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
LÝ THUYẾT GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_i)\}$$

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x_i)=0, x_i \in [a;b]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ là

$$m = Min\{f(a), f(b), f(x_i)\}$$

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x) = f(b); \underset{[a;b]}{Min} f(x) = f(a)$
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max} f(x) = f(a); \underset{[a;b]}{Min} f(x) = f(b)$

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ DỰA TRÊN BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài toán 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên miền $[-3;2]$

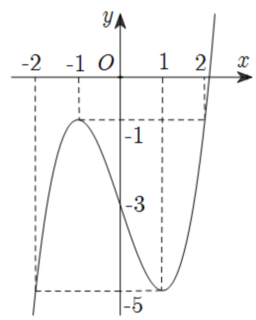
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;2]$ bằng 3.

Bài toán 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



A. $m=-5;M=-1$. B. $m=-2;M=2$. C. $m=-1;M=0$. D. $m=-5;M=0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$M=\max\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$ khi $x=-1$ hoặc $x=2$; $m=\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-5$ khi $x=-2$ hoặc $x=1$.

Bài toán 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên miền $[-2;4]$

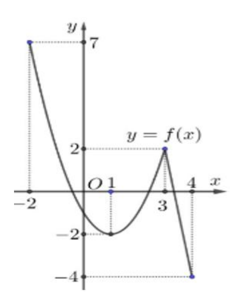
A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên miền $[-2;4]$ bằng 0.

Bài toán 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;4]$. Giá trị của M^2+m^2 bằng



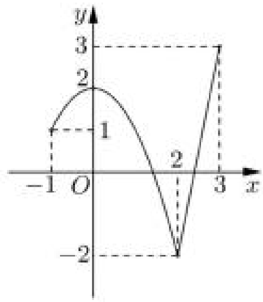
A. 8 B. 20 C. 53 D. 65

Lời giải

Nhìn đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng – 4, giá trị lớn nhất bằng 7.

Khi đó $M^2+m^2=49+16=65$.

Bài toán 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng



A. 1 B. 4 C. 5 D. 0

Lời giải

Dựa và đồ thị suy ra $M=f(3)=3;\ m=f(2)=-2$. Vậy $M-m=5$

Bài toán 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

Lời giải

Chọn C

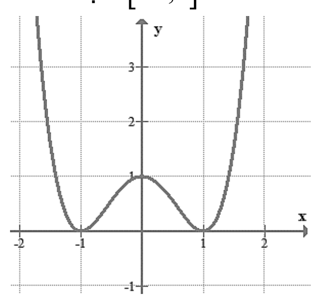
Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y=-1$ khi $x=0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Bài toán 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $M=1, m=0$ nên $M-m=1$.

Bài toán 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$
y	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9 $\|\|$

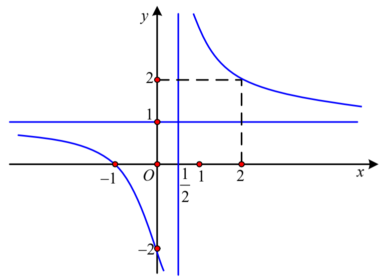
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=6$. B. $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x)=2$. C. $\underset{[-5;7)}{\text{Max}}\, f(x)=9$. D. $\underset{[-5;7)}{\text{Max}}\, f(x)=6$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5;7)$, ta có: $\underset{[-5;7)}{\text{Min}}\, f(x) = f(1) = 2$.

Bài toán 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 2$.

B. $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 0$.

C. $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

D. $\max\limits_{[3;4]} f(x) = f(4)$.

Lời giải

Vì $f(x)$ luôn giảm với mọi x thuộc tập giác định.

- $f(1) > f(2) = 2 \Rightarrow \max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) > 2$. A sai.
- Dựa vào đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$. Không tồn tại $\max\limits_{[-2;1]} f(x)$. B sai.
- Hàm liên tục và giảm trên đoạn $[-3;0]$ nên $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$. C đúng.
- Hàm liên tục và giảm trên đoạn $[3;4]$ nên $\max\limits_{[3;4]} f(x) = f(3)$. D sai.

Bài toán 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây *đúng*?

x	-1		0		2		3
y'		+	0	-	0	+	
y	0	↗	5	↘	1	↗	4

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

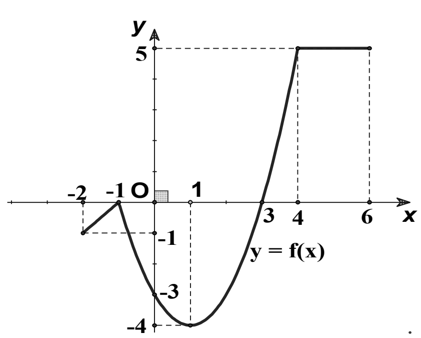
B. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.

C. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2)$.

D. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Bài toán 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M - m$ là

A. 9.

B. -8.

C. -9.

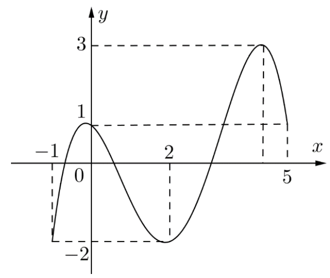
D. 8.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $-4 \le f(x) \le 5 \quad \forall x \in [-2;6]$; $f(1) = -4$; $f(4) = 5$

$\Rightarrow \begin{cases} M=5 \\ m=-4 \end{cases} \Rightarrow M-m=9$.

Bài toán 12. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;5\right]$ và có đồ thị trên đoạn $\left[-1;5\right]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;5\right]$ bằng



A. -1 B. 4 C. 1 D. 2

Lời giải. Từ đồ thị ta thấy: $\begin{cases} M=\max\limits_{[-1;5]} f\left(x\right)=3 \\ n=\min\limits_{[-1;5]} f\left(x\right)=-2 \end{cases} \Rightarrow M+n=1$.

Bài toán 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗		↗	2	↘	-4

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên miền $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ bằng

A.2 B. 1 C. – 3 D. 0

Lời giải. Dựa theo bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất cần tìm bằng 2.

Bài toán 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $\left(\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$.

x	-2		-1		0		1		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	8	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	8

A.0 B. – 1 C. 1 D. 2

Lời giải. Dựa theo bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất bằng – 1.

Bài toán 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$.

x	-2		-1		0		1		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	8	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	8

A.0 B. – 1 C. 1 D. 8

Lời giải. Dựa theo bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất bằng 8.

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN

Bài toán 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Lời giải

$f(x)=-x^4+12x^2+1$ liên tục trên $[-1;2]$ và $f'(x)=-4x^3+24x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{6} \quad (L) \\ x=-\sqrt{6} \ \ (L) \end{array}\right.$

Ta có: $f(-1)=12; f(2)=33; f(0)=1$

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 33 tại $x=2$

Bài toán 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 2. B. -23. C. -22. D. -7.

Lời giải

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $f'(x)=4x^3-20x, f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Xét hàm số trên đoạn $[-1;2]$ có: $f(-1)=-7; f(0)=2; f(2)=-22$.

Vậy $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=-22$.

Bài toán 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. B. -40. C. $-32\sqrt{2}$. D. -45.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2}\in[2;19] \\ x=-2\sqrt{2}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

$f(2)=2^3-24.2=-40$; $f\left(2\sqrt{2}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^3-24.2\sqrt{2}=-32\sqrt{2}$; $f(19)=19^3-24.19=6403$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng $-32\sqrt{2}$.

Bài toán 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36. B. $-14\sqrt{7}$. C. $14\sqrt{7}$. D. -34.

Lời giải

Trên đoạn $[2;19]$, ta có: $y'=3x^2-21 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{7}\notin[2;19] \\ x=\sqrt{7}\in[2;19] \end{array}\right.$.

Ta có: $y(2)=-34;\ y\left(\sqrt{7}\right)=-14\sqrt{7};\ y(19)=6460$. Vậy $m=-14\sqrt{7}$.

Bài toán 5. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m=13$ B. $m=\dfrac{51}{4}$ C. $m=\dfrac{51}{2}$ D. $m=\dfrac{49}{4}$

Lời giải

$y'=4x^3-2x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-2;3] \\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in[-2;3] \end{array}\right.$;

Tính $y(-2)=25$, $y(3)=85$, $y(0)=13$, $y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{51}{4}=12{,}75$;

Kết luận: giá trị nhỏ nhất m của hàm số là $m=\dfrac{51}{4}$.

Bài toán 6. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. B. -63. C. $-20\sqrt{10}$. D. -52.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-30 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{10}\ (n) \\ x=-\sqrt{10}\ (l) \end{array}\right.$.

Khi đó $f(2)=-52$; $f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}$ và $f(19)=6289$.

Vậy $\min\limits_{x\in[2;19]} f(x)=f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}$.

Bài toán 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72. <u>B</u>. $-22\sqrt{11}$. C. -58. D. $22\sqrt{11}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-33=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{11}\in[2;19] \\ x=-\sqrt{11}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

Khi đó ta có $f(2)=-58$, $f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$, $f(19)=6232$. Vậy $f_{\min}=f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$.

Bài toán 8. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3-7x^2+11x-2$ trên đoạn $[0\ ;2]$.

A. $m=3$ B. $m=0$ C. $m=-2$ D. $m=11$

Lời giải

Xét hàm số trên đoạn $[0\ ;2]$. Ta có $y'=3x^2-14x+11$ suy ra $y'=0 \Leftrightarrow x=1$

Tính $f(0)=-2; f(1)=3, f(2)=0$. Suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=-2=m$.

Bài toán 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x^2$ trên đoạn $[-4;-1]$ bằng

A. -16 B. 0 C. 4 D. -4

Lời giải

Ta có $y'=3x^2+6x$; $y'=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad \notin[-4;-1] \\ x=-2 \ \in[-4;-1] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(-4)=-16$; $y(-2)=4$; $y(-1)=2$.

Nên $\min\limits_{[-4;-1]} y=-16$.

Bài toán 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-4$ trên $[0;9]$ bằng

A. -28. B. -4. C. -13. <u>D</u>. -29.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;9]$.

Có $f'(x)=4x^3-20x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5}\notin[0;9] \end{array}\right.$

Ta có $f(0)=-4$, $f\left(\sqrt{5}\right)=-29$, $f(9)=5747$

Do đó $\min\limits_{[0;9]} f(x)=f\left(\sqrt{5}\right)=-29$.

Bài toán 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -39. <u>B</u>. -40. C. -36. D. -4.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

Ta có: $f'(x)=4x^3-24x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

Tính được: $f(0)=-4$; $f(9)=5585$ và $f\left(\sqrt{6}\right)=-40$.

Suy ra $\min\limits_{[0;9]} f(x)=-40$.

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỶ TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN

Bài toán 1. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m=5$ B. $m=3$ C. $m=\frac{17}{4}$ D. $m=10$

Lời giải

Đặt $y=f(x)=x^2+\frac{2}{x}$. Ta có $y'=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}$, $y'=0\Rightarrow x=1\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Khi đó $f(1)=3, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}, f(2)=5$. Vậy $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f(1)=3$.

Bài toán 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+1}{x+3}$ trên miền $[0;2]$.

A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có $y'=\frac{2}{(x+3)^2}>0, \forall x\neq -3$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Trên miền $[0;2]$ ta có $\min y=f(0)=\frac{1}{3}$.

Bài toán 3. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$

A. $M=\frac{1}{3}$. B. $M=-\frac{1}{3}$. C. $M=5$. D. $M=-5$

Lời giải

Trên đoạn $[0;2]$ ta luôn có $y'=-\frac{8}{(x-3)^2}<0\ \forall x\in(0;2)$ (đạo hàm vô nghiệm trên (0; 2))

Vì $y(0)=\frac{1}{3}, y(2)=-5$ nên $M=\max\limits_{[0;2]} y=\frac{1}{3}$.

Bài toán 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=-3$ B. $\min\limits_{[2;4]} y=\frac{19}{3}$ C. $\min\limits_{[2;4]} y=6$ D. $\min\limits_{[2;4]} y=-2$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;4]$

Ta có $y'=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-1$ (loại)

Suy ra $y(2)=7; y(3)=6; y(4)=\frac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} y=6$ tại $x=3$.

Bài toán 5. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$ B. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$ C. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\frac{33}{5}$ D. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$

Lời giải

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức CauChy): $y=3x+\frac{4}{x^2}=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}.\frac{3x}{2}.\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}$ (do $x>0$)

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ .Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$

Cách 2: (Dùng đạo hàm)

Xét hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$;Ta có $y=3x+\frac{4}{x^2} \Rightarrow y'=3-\frac{8}{x^3}$

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3}=3 \Leftrightarrow x^3=\frac{8}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	

$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right)=3\sqrt[3]{9}$.

Bài toán 6. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y=x+\frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=5$. B. $x=2$. C. $x=1$. D. $x=4$.

Lời giải. Hàm số $y=f(x)=x+\frac{4}{x}$ xác định trên $[1;5]$

$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;5] \\ x=-2\notin[1;5] \end{array}\right.$

$f'(1)=5; f(2)=4; f(5)=\frac{29}{5}$. Suy ra, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$.

Bài toán 7. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+3}{x+5}$ trên đoạn $[0;2]$.

A.3 B. $\frac{46}{15}$ C. $\frac{16}{35}$ D. $\frac{46}{35}$

Lời giải

$y=\frac{x+3}{x+5} \Rightarrow y'=\frac{2}{(x+5)^2}>0, \forall x\neq -5$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

$x\in[0;2] \Rightarrow \min y=f(0)=\frac{3}{5};\ maxy=f(2)=\frac{46}{35}$.

Bài toán 8. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=5$. B. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3$. C. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=4$. D. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=8$.

Lời giải. Ta có: $y'=1-\frac{8}{x^3} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2\in(0,+\infty)$.

Ta có $y(2)=2+\frac{4}{2^2}=3$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3$.

Bài toán 9. Cho hàm số $y=\frac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$, tập giá trị của hàm số là

A. $[2;4]$. B. $\left[\frac{15}{2};5\right]$. C. $[2;3]$. D. $[3;4]$.

Lời giải

Ta có $y'=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $y'=0 \Leftrightarrow -2x^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1} = 3 \Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

Từ bảng biến thiên ta có $2 \le y \le 4$. Vậy tập giá trị của hàm số là $[2;4]$.

Bài toán 10. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Tìm m?

A. $m=5$. B. $m=4$. C. $m=2$. D. $m=3$.

Lời giải. Tập xác định $D = R\setminus\{1\}$. Ta có $y' = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y					$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow m = \min\limits_{(1;+\infty)} y = 4$ khi $x=3$

Bài toán 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ là:

A. 0. B. 1. C. $\dfrac{4}{3}$. D. $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x-1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{3}$.

Bài toán 12. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $m = 4\sqrt[4]{3}$. B. $m = 2\sqrt{3}$. C. $m=4$ D. $m=2$

Lời giải. Hàm số xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Xét $y' = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3x^4-3}{x^2} \Rightarrow y'=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^4-3=0 \\ x\in(0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x\in(0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Ta có $\begin{cases} y(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow m = \min\limits_{(0;+\infty)} y = 4$ tại $x=1$.

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC

Bài toán 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 6\sqrt{x} + 8$.

A.3 B. 1 C. – 1 D. 0

Lời giải $y = x - 6\sqrt{x} + 8 = x - 6\sqrt{x} + 9 - 1 = \left(\sqrt{x} - 3\right)^2 - 1 \ge -1$. Giá trị nhỏ nhất bằng – 1.

Bài toán 2. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{6x - x^2}$.

A.3 B. 2 C. 4 D. 5

Lời giải $y = \sqrt{6x - x^2} = \sqrt{9 - (x-3)^2} \le 3 \Rightarrow 0 \le y \le 3$. Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng 3.

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 8\sqrt{x+1} + 2024$.

A.2000 B. 2016 C. 2007 D. 2009

Lời giải

$y = x - 8\sqrt{x+1} + 2024 = (x + 1 - 8\sqrt{x+1} + 16) + 2007 = (\sqrt{x+1} - 4)^2 + 2007 \ge 2007$.

Bài toán 4. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{12x - 2x^2}$.

A.3 B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

Lời giải

$y = \sqrt{12x - 2x^2} = \sqrt{18 - 2(x-3)^2} \le \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow 0 \le y \le 3\sqrt{2}$

Bài toán 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^6 - 6x^3 + 10}$.

A.3 B. 2 C. 1 D. 0

Lời giải

$y = \sqrt{x^6 - 6x^3 + 10} = \sqrt{x^6 - 6x^3 + 9 + 1} = \sqrt{\left(x^3 - 3\right)^2 + 1} \ge 1$. Giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài toán 6. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ với x thuộc $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\max\limits_D f(x) = 0; \min\limits_D f(x) = -\sqrt{5}$.

B. $\max\limits_D f(x) = 0$; không tồn tại $\min\limits_D f(x)$.

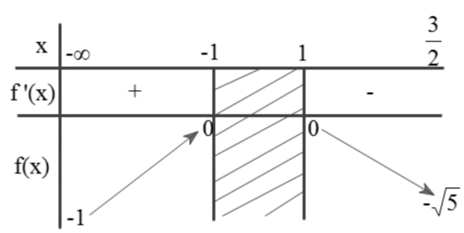
C. $\max\limits_D f(x) = 0; \min\limits_D f(x) = -1$.

D. $\min\limits_D f(x) = 0$; không tồn tại $\max\limits_D f(x)$.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$.

$f'(x) = \dfrac{-2x + 1}{(x-2)^2 \sqrt{x^2 - 1}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \notin D$



Vậy $\max\limits_D f(x) = 0; \min\limits_D f(x) = -\sqrt{5}$.

Bài toán 7. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{10\sqrt{x} - x}$.

A.10 B. 6 C. 4 D. 5

Lời giải

$y = \sqrt{10\sqrt{x} - x} = \sqrt{25 - \left(x - 10\sqrt{x} + 25\right)} = \sqrt{25 - \left(\sqrt{x} - 5\right)^2} \le 5 \Rightarrow 0 \le y \le 5$.

Tổng giá trị nhỏ nhất, lớn nhất bằng 5.

Bài toán 8. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{9 - \cos^2 x}$.

A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. $6\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

Lời giải

$y=\sqrt{9-\cos^2 x}\le\sqrt{9}=3;\ \ y=\sqrt{9-\cos^2 x}\ge\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$.

Tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng $6\sqrt{2}$.

Bài toán 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{x^4-4x^2+9}$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. $6\sqrt{2}$ B. 2 C. $3\sqrt{6}$ D. 54

Lời giải

Xét $y=x^4-4x^2+9$ có đạo hàm $y'=4x^3-8x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Ta có $y(-2)=9$; $y(3)=54$; $y(0)=9$; $y(\pm\sqrt{2})=5$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$.

Bài toán 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.(x+1)}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-x^2-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Nhận thấy $y(1)=\sqrt{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$.

Vậy $M=\operatorname*{Max}\limits_{(-\infty;+\infty)} y=\sqrt{2}$ tại $x=1$.

Bài toán 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-2x+5-\sqrt{x^2-2x+5}$.

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

$y=x^2-2x+5-\sqrt{x^2-2x+5}=t^2-t;\ \ t=\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4}\ge 2$.

Hàm số đồng biến, ta thu được giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Bài toán 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x}+\dfrac{9}{\sqrt{x}}$ trên $(0;+\infty)$.

A.10 B. 6 C. 8 D. 12

Lời giải. Theo BĐT Cauchy ta có $y=\sqrt{x}+\dfrac{9}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}.\dfrac{9}{\sqrt{x}}}=6$.

Bài toán 13. Tìm tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x+4}$.

A.2 B. 1 C. 4 D. 3

Lời giải

$f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x+4}\ge 0;\ \ f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x+4}\le\dfrac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x.4}}=1$ (Theo BĐT Cauchy).

Tổng hai giá trị lớn nhất, nhỏ nhất bằng 1.

Bài toán 14. Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2(6x-x^2)-3\sqrt{6x-x^2}$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(7;8)$ B. $(4;5)$ C. $(6;7)$ D. $(5;6)$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{6x-x^2}=\sqrt{9-(x-3)^2}\le 3\Rightarrow t\in[0;3]$.

Ta có $y=2(6x-x^2)-3\sqrt{6x-x^2}=2t^2-3t=f(t);\ \ t\in[0;3]$.

Khảo sát hàm số ta thu được $f(0)=0; f(3)=9; f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{9}{8}$.

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{63}{8}$. Giá trị này thuộc khoảng $(7;8)$.

Bài toán 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

A. $2+\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 0. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là: $D=(-\infty;4]$. Ta có $y'=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}<0,\forall x\in D$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		4
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(-\infty;4]} y=\sqrt{3}$ khi $x=4$. Vậy chọn D.

Bài toán 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ trên miền $[3;5]$.

A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

Lời giải

$$y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}=0\Leftrightarrow x=4.$$

Khảo sát hàm số ta có giá trị nhỏ nhất là $f(4)=2$.

Bài toán 17. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-\frac{7}{2}$. B. $S=-\frac{3}{2}$. C. -3. D. $S=4$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, cho $f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x=0\in[0;3]$.

Khi đó: $f(0)=-1$, $f(3)=-\frac{1}{2}$ nên $m=-1$ và $M=-\frac{1}{2}$. Vậy $S=2m+3M=-\frac{7}{2}$.

Bài toán 18. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4x-x^2-3\sqrt{4x-x^2}$.

A. 0 B. 1 C. $-\frac{5}{4}$ D. $-\frac{9}{4}$

Lời giải

$t=\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(x-2)^2}\le 2\Rightarrow t\in[0;2]$. Khi đó $y=4x-x^2-3\sqrt{4x-x^2}=t^2-3t$.

Khảo sát hàm số ta có $f(0)=0;f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4};f(2)=-2$.

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng – 2,25.

Bài toán 19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-6\sqrt{x^2+1}$.

A. 3 B. – 5 C. – 10 D. – 8

Lời giải

$$y=x^2-6\sqrt{x^2+1}=x^2+1-6\sqrt{x^2+1}+9-10=\left(\sqrt{x^2+1}-3\right)^2-10\ge -10.$$

Giá trị nhỏ nhất bằng – 10.

Bài toán 20. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+21}{\sqrt{x}+2}$ trên miền $[0;+\infty)$.

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$y=\frac{x+21}{\sqrt{x}+2}=\frac{x-4+25}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}-2+\frac{25}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}+2+\frac{25}{\sqrt{x}+2}-4\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+2\right).\frac{25}{\sqrt{x}+2}}-4=6.$$

Bài toán 21. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+5x}$ bằng

A. 0. B. $\frac{5}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. 2.

Lời giải

Ta có: $y'=\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x}}$; $y'=0\Leftrightarrow -2x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

Có: $y(0)=y(5)=0$; $y\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$. Vậy $\max y=y\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

Bài toán 22. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Lời giải

Ta có $y'=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.(x+1)}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=1$. Nhận thấy $y(1)=\sqrt{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-1$.

Vậy $M=\underset{(-\infty;+\infty)}{\text{Max}}\,y=\sqrt{2}$ tại $x=1$.

Bài toán 23. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{2-x^2}-x$ bằng

A. $2-\sqrt{2}$. B. 2. C. $2+\sqrt{2}$. D. 1.

Lời giải

Tập xác định $D=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $y'=\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}-1$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Mà $y\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}$, $y\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$, $y(-1)=2$.

Do đó $\max y=2$, $\min y=-\sqrt{2}$. Vậy $\max y+\min y=2-\sqrt{2}$.

Bài toán 24. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ là

A. $2\sqrt{2}$. B. 4. C. 2. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định $D=[2;4]$.

Ta có $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{4-x}}=0\Rightarrow\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow x=3\in(2;4)$.

$y(2)=\sqrt{2}$, $y(4)=\sqrt{2}$, $y(3)=2$. Vậy $\max\limits_{[2;4]}y=2$.

Bài toán 25. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x-4\sqrt{6-x}$ trên $[-3;6]$. Tổng $M+m$ có giá trị là

A. -12. B. -6. C. 18. D. -4.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3;6]$.

$f'(x)=2+\frac{2}{\sqrt{6-x}}>0$, $\forall x\in(-3;6)$.

Ta có: $f(-3)=-18$; $f(6)=12$.

Khi đó: $m = f(-3) = -18$; $M = f(6) = 12$. Vậy: $M + m = 12 + (-18) = -6$.

Bài toán 26. Gọi M , N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Giá trị của biểu thức $(M + 2N)$ là

A. $2\sqrt{2} + 2$. B. $4 - 2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2} - 4$. D. $2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D = [-2;2]$. Ta có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in (-2;2).$$

Ta lại có $y(-2) = -2$, $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, $y(2) = 2$.

Từ đó suy ra $M = 2\sqrt{2}$, $N = -2$. Vậy $(M + 2N) = 2\sqrt{2} + 2.(-2) = 2\sqrt{2} - 4$.

Bài toán 27. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4x - 4\sqrt{x^2 + 4x} + 1$.

A.2 B. – 2 C. 1 D. – 3

Lời giải

$$y = x^2 + 4x - 4\sqrt{x^2 + 4x} + 1 = y = x^2 + 4x - 4\sqrt{x^2 + 4x} + 4 - 3 = \left(\sqrt{x^2 + 4x} - 2\right)^2 - 3 \ge -3.$$

Giá trị nhỏ nhất bằng – 3.

Bài toán 28. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 5}}$ trên tập xác định của nó.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - (x + 1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}}}{x^2 + 5} = \frac{x^2 + 5 - x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 5}\left(x^2 + 5\right)} = \frac{5 - x}{\sqrt{x^2 + 5}\left(x^2 + 5\right)}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - x}{\sqrt{x^2 + 5}\left(x^2 + 5\right)} = 0 \Leftrightarrow 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{30}}{5}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{\mathbb{R}} y = y(5) = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$ khi $x = 5$.

Hàm số $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 5}}$ không có giá trị nhỏ nhất.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 29. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$.

A.2 B. 3 C. 1 D. $\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có $y = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (x - 1)^2} \le 1$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1.

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin x$ bằng

A.2 B. 1 C. 3 D. 0

Lời giải

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1 do $y=\sin x\in[-1;1]$.

Bài toán 2. Tìm tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin 4x+5$.

A.5 B. 6 C. 4 D. 10

Lời giải

Ta có $-1\le \sin 4x\le 1\Rightarrow 4\le \sin 4x+5\le 6\Rightarrow \min y=4; max\, y=6$.

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng 10.

Bài toán 3. Tìm tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos 2x$.

A.3 B. 1 C. 2 D. 0

Lời giải

$y=\cos 2x\in[-1;1]$ nên tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Bài toán 4. Tìm tập giá trị T của hàm số $y=5-3\sin x$.

A. $T=[-1;1]$. B. $T=[-3;3]$. C. $T=[2;8]$. D. $T=[5;8]$.

Lời giải

Ta có: $-1\le \sin x\le 1\Leftrightarrow -3\le 3\sin x\le 3\Leftrightarrow -3\le -3\sin x\le 3$.

$\Leftrightarrow 2\le 5-3\sin x\le 8\Leftrightarrow 2\le y\le 8$. Vậy $T=[2;8]$.

Bài toán 5. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y=4\sin x\cos x+1$

A.3 B. 2 C. 1 D. 0

Lời giải

Ta có $y=2\sin 2x+1$.

Do $-1\le \sin 2x\le 1\Rightarrow -2\le 2\sin 2x\le 2\Rightarrow -1\le 2\sin 2x+1\le 3\Rightarrow -1\le y\le 3$.

* $y=-1\Leftrightarrow \sin 2x=-1\Leftrightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

* $y=3\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, giá trị nhỏ nhất bằng -1. Tổng hai giá trị bằng 2.

Bài toán 6. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin 5x\cos x+\sin x\cos 5x+6$.

A.12 B. 10 C. 6 D. 5

Lời giải

Ta có $y=\sin 6x+6$, mà $\sin 6x\in[-1;1]\Rightarrow y=\sin 6x+6\in[5;7]$. Tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất bằng 12.

Bài toán 7. Tìm tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1}$.

A.1 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

$-1\le \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le\Rightarrow 0\le \sqrt{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1}\le\sqrt{2}\Rightarrow 0\le y\le\sqrt{2}$.

Tích giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 0.

Bài toán 8. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sqrt{\cos 2x}+5$.

A.10 B. 15 C. 12 D. 9

Lời giải

$0\le\sqrt{\cos 2x}\le 1\Rightarrow 5\le 2\sqrt{\cos 2x}+5\le 7\Rightarrow 5\le y\le 7$.

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng 12.

Bài toán 9. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\sin 2x+2\cos^2 x$.

A. $M=3-\sqrt{2}$. B. $M=3$. C. $M=1+\sqrt{3}$. D. $M=1+\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có hàm số $y=\sin 2x+2\cos^2 x=\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

Có $-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{2}+1\le\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1\le\sqrt{2}+1$.

Vậy $M=1+\sqrt{2}$.

Bài toán 10. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4-3\sin^2 2x$.

A.4   B. 5   C. 3   D. 6

Lời giải

$0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 4-3\sin^2 x\le 4$

* $y=1\Leftrightarrow\sin^2 x=1\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

* $y=4\Leftrightarrow\sin^2 x=0\Leftrightarrow x=k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng 1. Tổng hai giá trị bằng 5.

Bài toán 11. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin 2x+3x+1$ trên miền $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A.4   B. 2π C. $\frac{3\pi}{2}+1$ D. $\frac{5\pi}{2}+1$

Lời giải

Ta có $y=\sin 2x+3x+1\Rightarrow y'=2\cos 2x+3>0,\forall x$. Hàm số đồng biến trên R.

Khi đó $max\, y=\frac{3\pi}{2}+1$.

Bài toán 12. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1-\cos^2 x}-2$ là:

A. 0 và $\sqrt{2}-1$.   B. -1 và $\sqrt{2}-1$.   C. -2 và -1.   D. -1 và 1.

Lời giải

Ta có $y=\sqrt{1-\cos^2 x}-2=\sqrt{\sin^2 x}-2=|\sin x|-2$ và $0\le|\sin x|\le 1\Leftrightarrow -2\le y\le -1$.

Bài toán 13. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$ lần lượt là:

A. $\sqrt{2}$ và 2.   B. 2 và 4.   C. $4\sqrt{2}$ và 8.   D. $4\sqrt{2}-1$ và 7.

Lời giải

Ta có:

$-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow 2\le\sin x+3\le 4\Leftrightarrow\sqrt{2}\le\sqrt{\sin x+3}\le 2\Leftrightarrow 4\sqrt{2}-1\le y=4\sqrt{\sin x+3}-1\le 4.2-1=7$

Do đó giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $4\sqrt{2}-1$ và 7.

Bài toán 14. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin x+2x+4$ trên miền $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A.2   B. $\pi+5$ C. $\pi+4$ D. 2π

Lời giải

$y=\sin x+2x+4\Rightarrow y'=\cos x+2>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow max\; y=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+5$.

Bài toán 15. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\frac{1}{1+\cos x}$.

A. $m=\frac{1}{2}$.   B. $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$.   C. $m=1$.   D. $m=\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $-1\le\cos x\le 1$ mà $y=\frac{1}{1+\cos x}$ nhỏ nhất khi $\cos x$ lớn nhất $\Leftrightarrow\cos x=1$.

Khi $\cos x=1$ thì $y=\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$.

Bài toán 16. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right]$ lần lượt là:

A. $-\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; -1. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; -2. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $-\frac{\pi}{2}\le x\le -\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\le \sin x\le \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow -1\le \sin x\le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right]} y=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right]} y=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Bài toán 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$ là

A. -20. B. -8. C. 0. D. 9.

Lời giải

Ta có $y=\sin^2 x-4\sin x-5=(\sin x-2)^2-9$

Khi đó: $-1\le \sin x\le 1\Leftrightarrow -3\le \sin x-2\le -1\Rightarrow 1\le(\sin x-2)^2\le 9$

Do đó: $y=(\sin x-2)^2-9\ge 1-9=-8$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8.

Bài toán 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right]$?

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 1.

Lời giải

Xét hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right]$ ta có $y'=\cos x\Rightarrow y'=\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Do $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1; y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right]} y=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A.

Bài toán 19. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3\sqrt{\cos x}+4$.

A. 15 B. 11 C. 10 D. 12

Lời giải

$0\le\sqrt{\cos x}\le 1\Rightarrow 0\le 3\sqrt{\cos x}\le 3\Rightarrow 4\le 3\sqrt{\cos x}+4\le 7$.

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng 11.

Bài toán 20. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2\sin^2 x-\sin 2x+10$ là

A. 10 B. $11-\sqrt{2}$ C. $11+\sqrt{2}$ D. $9+\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có $f(x)=2\sin^2 x-\sin 2x+10=11-\sin 2x-\cos 2x=11-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Do $-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$ nên $11-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 11+\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$. Vậy $\max f(x)=11+\sqrt{2}$.

Bài toán 21. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=1-2\cos x-\cos^2 x$ là

A. 2. B. 5. C. 0. D. 3.

Lời giải

Ta có: $y=1-2\cos x-\cos^2 x=2-(\cos x+1)^2$

Nhận xét: $-1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow 0\le\cos x+1\le 2\Rightarrow 0\le(\cos x+1)^2\le 4$

Do đó $y=2-(\cos x+1)^2\le 2-0=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là 2.

Bài toán 22. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x^2-6x+10)e^x$ trên miền $[0;1]$.

A. $2e+6$ B. $5e+10$ C. $10e+5$ D. $4e+8$

Lời giải

$y=\left(x^2-6x+10\right)e^x \Rightarrow y'=\left(x^2-6x+10\right)e^x+\left(2x-6\right)e^x=\left(x^2-4x+4\right)e^x=\left(x-2\right)^2 e^x \ge 0$.

Ta có $\min y=10; max\, y=5e$. Tổng hai giá trị bằng $5e+10$.

Bài toán 23. Tìm tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y=\sin x+\sqrt{3}cosx+3$.

A. 5 B. 6 C. 1 D. 2

Lời giải

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2 \le (1+3)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=4 \Rightarrow -2 \le \sin x+\sqrt{3}\cos x \le 2 \Rightarrow 1 \le y \le 5$.

Bài toán 24. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\sin x+\cos 2x$ trên $\left[0;\pi\right]$ là

A. $\frac{9}{8}$. B. $\frac{5}{4}$. C. 2. D. 1.

Lời giải

$f\left(x\right)=\sin x+\cos 2x=\sin x+1-2\sin^2 x$. Đặt $\sin x=t \quad \left(0 \le t \le 1\right)$ thu được

$f\left(t\right)=-2t^2+t+1$, $f'\left(t\right)=-4t+1$. Giải $f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$

$f\left(0\right)=1$, $f\left(1\right)=0$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}$. Vậy $\max\limits_{[0;1]} f\left(x\right)=\frac{9}{8}$.

Bài toán 25. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^2+2\cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$. Khi đó giá trị $M+m$ bằng?

A. $2+\frac{17\pi^2}{4}$. B. $4+4\pi^2$. C. $2+\frac{\pi^2}{4}$. D. 2.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2+2\cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ ta có $f'\left(x\right)=2x-2\sin x$

Và $f''\left(x\right)=2-2\cos x \ge 0$ với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right] \Rightarrow$ hàm số $y=f'\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right] \Rightarrow f'\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ mà $f'\left(0\right)=0$

$\Rightarrow x=0$ là nghiệm duy nhất của hàm số $y=f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

Khi đó $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}; y\left(0\right)=2; y\left(2\pi\right)=4\pi^2+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} M=\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]} y=y\left(2\pi\right)=4\pi^2+2 \\ m=\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]} y=y\left(0\right)=2 \end{cases} \Rightarrow M+m=4\pi^2+4.$$

Chọn đáp án B.

Bài toán 26. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2\cos x+1}{\cos x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M+9m=0$ B. $9M-m=0$ C. $9M+m=0$ D. $M+m=0$

Lời giải

Ta có $y=\frac{2\cos x+1}{\cos x-2}=2+\frac{5}{\cos x-2}$,

mà $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le \cos x-2 \le -1 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \ge \frac{5}{\cos x-2} \ge -5 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \ge 2+\frac{5}{\cos x-2} \ge -3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \ge y \ge -3$. Vậy $M=\frac{1}{3}$ và $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 9M+m=0$.

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ LOGARIT, HÀM SỐ MŨ

Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\log_3\left(9-x^2\right)$.

A.3 | B. 2 | C. 1 | D. 0

Lời giải

Ta có tập xác định $(-3;3)\Rightarrow y=\log_3\left(9-x^2\right)\le\log_3 9=2$.

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=4e^x-e^{2x}$.

A.3 | B. 2 | C. 4 | D. 1

Lời giải

Ta có $y=4e^x-e^{2x}=4-\left(e^{2x}-4e^x+4\right)=4-\left(e^x-2\right)^2\le 4$

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln\left(x^2-4x+6\right)$.

A. $\ln 2$ | B. $\ln 3$ | C. $2\ln 2$ | D. 2

Lời giải

$y=\ln\left(x^2-4x+6\right)=y=\ln\left(x^2-4x+4+2\right)=\ln\left[\left(x-2\right)^2+2\right]\ge\ln 2$. Giá trị nhỏ nhất bằng $\ln 2$.

Bài toán 4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\log_4\left(16-x^2-x^4\right)$.

A.4 | B. 2 | C. 3 | D. 1

Lời giải

Tập xác định $y=\log_4\left(16-x^2-x^4\right)\le\log_4 16=2$. Giá trị lớn nhất bằng 2.

Bài toán 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_3\left(x^4+x^2+9\right)$.

A.3 | B. 2 | C. 1 | D. 4

Lời giải

$y=\log_3\left(x^4+x^2+9\right)\ge\log_3 9=2$.

Bài toán 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{2x}-2e^x+5$.

A.4 | B. 3 | C. 1 | D. 2

Lời giải

Ta có $y=e^{2x}-2e^x+5=y=e^{2x}-2e^x+1+4=\left(e^x-1\right)^2+4\ge 4$.

Bài toán 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{2x}-6.2^x+10$.

A.1 | B. 3 | C. 2 | D. 4

Lời giải

$y=2^{2x}-6.2^x+10=y=2^{2x}-6.2^x+9+1=\left(2^x-3\right)^2+1\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài tón 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_5\left(x^4+x^2+5\right)$.

A.2 | B. 1 | C. 0 | D. 3

Lời giải

Ta có $y=\log_5\left(x^4+x^2+5\right)\ge\log_5 5=1$. Giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài toán 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2 x-10\log_2 x+26$.

A.2 | B. 1 | C. 5 | D. 7

Lời giải

$y=\log_2^2 x-10\log_2 x+26=\log_2^2 x-10\log_2 x+25+1=\left(\log_2 x-5\right)^2+1\ge 1$.

Giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài toán 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(e^x-1\right)\left(e^x-5\right)$.

A.4 | B. 1 | C. – 4 | D. 0

Lời giải

$y=\left(e^x-1\right)\left(e^x-5\right)=e^{2x}-6e^x+5=y=e^{2x}-6e^x+9+4=\left(e^x-3\right)^2+4\ge 4$.

Giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Bài toán 11. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=8\ln x-\ln^2 x$.

A.10 | B. 16 | C. 8 | D. 4

Lời giải

$y=8\ln x-\ln^2 x=16-\left(\ln^2 x-8\ln x+16\right)=16-(\ln x-4)^2\le 16$.

Giá trị lớn nhất bằng 16.

Bài toán 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_3^2 x-4\log_3 x+10$.

A.4 B. 2 C. 3 D. 6

Lời giải

Ta có $y=\log_3^2 x-4\log_3 x+10=y=(\log_3^2 x-4\log_3 x+4)+6=(\log_3 x-2)^2+6\ge 6$.

Giá trị nhỏ nhất bằng 6.

Bài toán 13. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\ln\left(8x-x^2\right)$.

A.3 B. $4\ln 3$ C. $3\ln 3$ D. $4\ln 2$

Lời giải

$y=\ln\left(8x-x^2\right)=y=\ln\left(16-(x-4)^2\right)\le \ln 16=4\ln 2$. Giá trị lớn nhất bằng $4\ln 2$.

Bài toán 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(e^x-1\right)\left(e^x-7\right)$.

A.4 B. 2 C. – 6 D. – 9

Lời giải

$y=\left(e^x-1\right)\left(e^x-7\right)=e^{2x}-8e^x+7=e^{2x}-8e^x+16-9=(e^x-4)^2-9\ge -9$.

Giá trị nhỏ nhất bằng – 9.

Bài toán 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{9^x-4.3^x+5}$.

A.4 B. 3 C. 2 D. 1

Lời giải

$9^x-4.3^x+5=3^{2x}-4.2^x+4+1=\left(3^x-2\right)^2+1\ge 1\Rightarrow \sqrt{9^x-4.3^x+5}\ge 1$.

Giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài toán 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-2x+3\right)e^x$ trên miền $[0;1]$.

A.2 B. 3 C. 1 D. 4

Lời giải

$y'=\left(x^2-2x+3\right)e^x+\left(2x-2\right)e^x=\left(x^2+1\right)e^x>0,\forall x\Rightarrow \min y=f\left(0\right)=3$.

Bài toán 17. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2 x-\log_2 x+5$ trên miền $[2;4]$.

A.16 B. 12 C. 10 D. 13

Lời giải

Ta có $x\in[2;4]\Rightarrow t=\log_2 x\in[1;2]$. Khi đó $y=\log_2^2 x-\log_2 x+5=t^2-t+5$ là hàm số đồng biến.

Ta có $\min y=f\left(1\right)=5; max\ y=f\left(2\right)=7$. Tổng hai giá trị bằng 12.

Bài toán 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{\ln^2 x-10\ln x+26}$.

A.3 B. 2 C. 1 D. 4

Lời giải

$y=\sqrt{\ln^2 x-10\ln x+26}=\sqrt{\left(\ln x-5\right)^2+1}\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài toán 19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4^x-2^{x+1}+6$ trên miền $[2;3]$.

A.3 B. 2 C. 1 D. 4

Lời giải

$y=4^x-2^{x+1}+6=t^2-2t+6;\quad t=2^x,t\in[4;8]$.

Khảo sát hàm số ta có hàm số đồng biến trên miền đang xét suy ra $\min f\left(t\right)=f\left(2\right)=4$.

Bài toán 20. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{\left(x^2-2x+6\right)e^x+3}$ trên miền $[0;1]$.

A.2 B. 3 C. 1 D. 4

Lời giải

$y'=\left(x^2-2x+6\right)e^x+\left(2x-2\right)e^x=\left(x^2+4\right)e^x>0,\forall x\Rightarrow \min y=f\left(0\right)=3$.

Bài toán 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\dfrac{\ln 2}{2}$. B. $\dfrac{\ln 3}{3}$. C. $\dfrac{3}{e^2}$. D. $\dfrac{1}{e}$.

Lời giải

Xét $y=f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;3]$

$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=e\in[2;3]$

Có $f(2)=\frac{\ln 2}{2}\approx 0,3466$; $f(e)=\frac{1}{e}\approx 0,3679$; $f(3)=\frac{\ln 3}{3}\approx 0,366$,

Suy ra $\underset{x\in[2;3]}{Min}\, f(x)=\frac{\ln 2}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

Bài toán 22. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. $2e^4$ B. $-e^2$ C. $2e^2$ D. $-2e^2$

Lời giải

Ta có: $f'(x)=2(x^2-2)e^{2x}+2xe^{2x}=2(x^2+x-2)e^{2x}$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$.

Và $f(-1)=-e^{-2}$; $f(2)=2e^4$; $f(1)=-e^2$

Bài toán 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\frac{4}{3}\cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

$$y'=2^{x+1}\ln 2-\frac{4}{3}\cdot 8^x\ln 8=0 \Leftrightarrow 2^x-2\cdot\left(2^x\right)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=0 \\ 2^x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1/2 \end{array}\right.$$

Khảo sát hàm số ta có $y_{\min}=\frac{2}{3}$.

Bài toán 24. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x^2-4x+5)e^x$ trên miền $[0;1]$.

A.1 B. $2e$ C. $3e$ D. e^2

Lời giải

$y'=(x^2-4x+5)e^x+(2x-4)e^x=(x-1)^2e^x\ge 0,\forall x \Rightarrow max\, y=f(1)=2e$.

Bài toán 25. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

A.2 B. 1 C. 3 D. 0,5

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $y=\frac{e^x}{e^{2x}+1}\le\frac{e^x}{2\sqrt{e^{2x}.1}}=\frac{1}{2}$. Giá trị lớn nhất bằng 0,5.

Bài toán 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}-e^x+1}$.

A.3 B. 2 C. 1 D. $\sqrt{3}$

Lời giải

$2(e^x-1)^2\ge 0 \Rightarrow 3(e^{2x}-e^x+1)\ge e^{2x}+e^x+1 \Rightarrow y=\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}-e^x+1}\le 3$. Giá trị lớn nhất bằng 3.

Bài toán 27. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{e^{3x}-3e^x+6}$.

A.3 B. 2 C. 1 D. $\sqrt{3}$

Lời giải

$y=\sqrt{e^{3x}-3e^x+6}=\sqrt{(e^{3x}-3e^x+2)+4}=\sqrt{(e^x-1)^2(e^x+2)+4}\ge 2$. Giá trị nhỏ nhất bằng 2.

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA CÁC HÀM SỐ PHỨC TẠP

Bài toán 1. Tìm tổng giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=4^{x^2}-2.2^{x^2}+6$ trên miền $\left(-\infty;1\right]$.

A.8 B. 9 C. 11 D. 8

Lời giải

Đặt $2^{x^2}=t;\ f\left(x\right)=4^{x^2}-2.2^{x^2}+6=t^2-2t+6=f(t);x^2\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[1;2\right]$.

Khảo sát hàm số bậc hai ta thấy hàm đồng biến.
Thu được giá trị nhỏ nhất bằng 5, giá trị lớn nhất bằng 6. Tổng giá trị bằng 11.

Bài toán 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}$.

A.4 B. 2 C. 6 D. 8

Lời giải

Theo BĐT Cauchy ta có $y=4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\geq 2\sqrt{4^{\sin^2 x}.4^{\cos^2 x}}=2\sqrt{4^{\sin^2 x+\cos^2 x}}=2\sqrt{4}=4$.
Giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Bài toán 3. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln^2\left(ex\right)-4\ln x+6$ trên miền $\left[e;e^2\right]$.

A.9 B. 13 C. 10 D. 12

Lời giải

$y=\ln^2\left(ex\right)-4\ln x+6=\left(1+\ln x\right)^2-4\ln x+6$

$y=\ln^2 x-2\ln x+7=t^2-2t+7;\ t=\ln x,\ t\in\left[1;2\right]$

Khảo sát hàm số bậc hai ta thấy đồng biến, thu được min bằng 6, max bằng 7.
Tổng hai giá trị min, max bằng 13.

Bài toán 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2 x-2\log_2 x-4\sqrt{1-\log_2 x}$ với $x\in\left(0;2\right]$.

A.3 B. – 2 C. – 1 D. – 4

Lời giải

Điều kiện xác định: $1-\log_2 x\geq 0\Leftrightarrow \log_2 x\leq 1\Leftrightarrow 0<x\leq 2$.

Đặt $t=\sqrt{1-\log_2 x}$, vì $x\in\left(0;2\right]$ nên $t\geq 0$. Khi đó $y=\left(1-\log_2 x\right)^2-4\sqrt{1-\log_2 x}-1=t^4-4t-1=f\left(t\right)$,

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^4-4t-1$, $t\in\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(t\right)=4t^3-4$. Cho $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=1\in\left[0;+\infty\right)$. Ta được bảng biến thiên của $f\left(t\right)$ như sau:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất bằng – 4.

Bài toán 5. Tổng giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2\left(2x\right)-5\log_2 x+4$ trên miền $\left[2;4\right]$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $\left(7;8\right)$ B. $\left(4;5\right)$ C. $\left(6;7\right)$ D. $\left(5;6\right)$

Lời giải

$y=\log_2^2\left(2x\right)-5\log_2 x+4=\left(\log_2 2+\log_2 x\right)^2-5\log_2 x+4=\left(1+\log_2 x\right)^2-5\log_2 x+4$

$y=(t+1)^2-5t+4=t^2-3t+5=f\left(t\right);\ t=\log_2 x,t\in\left[1;2\right]$

Khảo sát hàm số ta có $f\left(1\right)=3;f\left(2\right)=3;f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{11}{4}$.

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{23}{4}$. Giá trị này thuộc khoảng $\left(5;6\right)$.

Bài toán 6. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m \le 2$. B. $4 < m \le 8$. C. $2 < m \le 4$. D. $m > 8$.

Lời giải

$y = mx + \dfrac{36}{x+1} \Rightarrow y' = m - \dfrac{36}{(x+1)^2}$

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có $y' = -\dfrac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \ne -1$. Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) = 9$ (loại).

Trường hợp 2: $m \ne 0$

- Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0$, $\forall x \ne -1$ Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}$ (loại).
- Nếu $m > 0$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow m - \dfrac{36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \dfrac{36}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \ (l) \end{array}\right.$.
- $0 < \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < m \le 36$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y\left(\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 100 (l) \end{array}\right.$.
- $\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3} (l)$.

Bài toán 7. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 4^{\sin x} - 2^{\sin x} + 4$.

A.0 B. 6 C. 7 D. 8

Lời giải: $f(x) = 4^{\sin x} - 2.2^{\sin x} + 4 = t^2 - 2t + 4;\ t = 2^{\sin x} \in \left[\dfrac{1}{2};2\right]$ do $\sin x \in [-1;1]$.

Khảo sát hàm số ta có giá trị nhỏ nhất bằng 3, giá trị lớn nhất bằng 4. Tổng hai giá trị bằng 7.

Bài toán 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[0;4]$ đạt được tại

A. $x = \dfrac{5\sqrt{17}}{17}$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = \sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên hàm số trên đoạn $[0;4]$,

x	0		1		4
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\dfrac{5}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;4]} y = y(1) = \sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[0;4]$ đạt được tại $x = 1$.

Bài toán 9. Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b là các số nguyên dương, c là số nguyên tố. Tính $S = a + b + c$.

A. 5. B. -22. C. -2. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=\sqrt{x^2+4}+(x-6)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;3)\\x=2\in(0;3)\end{array}\right.$.

$f(0)=-12; f(1)=-5\sqrt{5}; f(2)=-8\sqrt{2}; f(3)=-3\sqrt{13}$

Nên $M=\underset{[0;3]}{Max}\,f(x)=-3\sqrt{13},\ m=\underset{[0;3]}{Min}\,f(x)=-12$

$\Rightarrow M+m=-12-3\sqrt{13}\Rightarrow a=-12, b=3, c=13\Rightarrow S=4$.

Bài toán 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là

A. $1+\pi$. B. $\dfrac{\pi}{2}$. C. $\dfrac{\pi}{4}$. D. 0.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x+\cos^2 x\Rightarrow f'(x)=1-2\cos x\sin x=(\sin x+\cos x)^2$.

$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \cos x=\sin x\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. Khi $k=1$ nhận $x=\dfrac{\pi}{4}$.

$f(0)=1$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow \underset{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}{\max} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

Bài toán 11. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\sin x(1+\cos x)$ trên đoạn $[0;\pi]$.

A. $M=3\sqrt{3};\ m=1$. B. $M=\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\ m=1$. C. $M=\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\ m=0$. D. $M=\sqrt{3};\ m=1$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow f'(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2 x+\cos x-1$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\\cos x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\x=\pi+2k\pi\end{array}\right.$.

Vì $x\in[0;\pi]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$ hoặc $x=\pi$. Ta có $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(0)=0$, $f(\pi)=0$. Vậy $M=\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\ m=0$.

Bài toán 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x$ trên miền $(0;1)$.

A.0 B. – 1 C. $-\dfrac{1}{4}$ D. $-\dfrac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $f(x)=4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x=\left(2\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_2 x+m=0=\left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x$

Đặt $t=\log_2 x$ với $t\in(-\infty;0)$. Xét $f(t)=t^2+t$. Đạo hàm $f'(t)=2t+1$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		0
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Giá trị nhỏ nhất bằng $-\dfrac{1}{4}$.

Bài toán 13.

Tìm tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{\log_2^2(x-2)+5\log_2(x-2)+1}{\log_2^2(x-2)+\log_2(x-2)+1};x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]$.

A.5 B. 2 C. – 7 D. – 5

Lời giải

Đặt $t=\log_2(x-2)$, do $x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Ta có $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}=f(t),t\in[-1;1]$. Đạo hàm $f'(t)=\dfrac{-4t^2+4}{(t^2+t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	-1		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$\dfrac{7}{3}$

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]$ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[-1;1]$.

Từ bảng biến thiên suy ra tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng – 7.

Bài toán 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2}{3}$. B. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{10}{3}$. C. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$.

Lời giải

Đặt: $t=\cos x\Rightarrow t\in[-1;1]\Rightarrow y=2t-\dfrac{4}{3}t^3$.

$$y'=2-4t^2\ \ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]\\x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]\end{array}\right..$$

Tính: $y(-1)=\dfrac{-2}{3}$, $y\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $y(1)=\dfrac{2}{3}$. Vậy: $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài toán 15. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\log_3 x+\sqrt{\log_3 x+1}$ trên $[1;27]$.

A.6 B. 5 C. 8 D. 7

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{\log_3 x+1}$. Với $x\in[1;27]$ thì $t\in[1;2]$. Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên đoạn $[1;2]$.

Ta có $f'(t)=2t+1>0,\forall t\in[1;2]$ nên hàm số $f(t)=t^2+t$ đồng biến trên $[1;2]$. Bảng biến thiên:

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	6

Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Bài toán 16. Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $M+m$.

A. $1+\sqrt{2}$ B. 0 C. 1 D. -1

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}\Leftrightarrow (y-1)\sin x+(y-2)\cos x=1-2y$.
Hàm số đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khi có nghiệm
$\Leftrightarrow (1-2y)^2\le (y-1)^2+(y-2)^2\Leftrightarrow 2y^2+2y-4\le 0\Leftrightarrow -2\le y\le 1$. Do đó $m=-2$, $M=1$.

Bài toán 17. Nếu hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.   B. $-\sqrt{2}$.   C. $\sqrt{2}$.   D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$. Tập xác định: $D=[-1;1]$. Ta có: $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y'=0\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-x^2}=x\\ 1-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1>x\ge 0\\ \sqrt{1-x^2}=x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1>x\ge 0\\ 2x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1>x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $y(-1)=-1+m,\ y(1)=1+m,\ y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+m$.

Do hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1;1]$ nên $\underset{[-1;1]}{\text{Max}}\,y=m+\sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\underset{[-1;1]}{\text{Max}}\,y=2\sqrt{2}$, suy ra $m+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

Bài toán 18. Tìm tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\log_2^2(4x^2+4)-\log_2(x^2+1)+2$ trên miền $(-\infty;2]$.

A.20   B. 24   C. 18   D. 16

Lời giải

$f(x)=\log_2^2(4x^2+16)-7\log_2(x^2+4)+2=\left(\log_2 4+\log_2(x^2+4)\right)^2-7\log_2(x^2+4)+2$
$=(2+t)^2-7t+2=t^2-3t+6=f(t)$

Trong đó $t=\log_2(x^2+4)\ge \log_2 4=2;\ t\le \log_2 8=3\Rightarrow t\in[2;3]$.
Khảo sát hàm số (đồng biến) ta có giá trị nhỏ nhất bằng 4, giá trị lớn nhất bằng 6.
Tích hai giá trị bằng 24.

Bài toán 19. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M=m+\dfrac{3}{2}$.   B. $M=\dfrac{3}{2}m$.   C. $M=m+1$.   D. $M=m+\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $\sin x=t$, $(-1\le t\le 1)$ ta được $y=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y'=\dfrac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow -t^2-2t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\ (t/m)\\ t=-2\ (loai)\end{array}\right.$.

Vì $y(-1)=0$; $y(0)=1$; $y(1)=\dfrac{2}{3}$ nên $\max\limits_{[-1;1]} y=y(0)=1\Rightarrow M=1$; $\min\limits_{[-1;1]} y=y(-1)=0\Rightarrow m=0$.

Vậy $M=m+1$.

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA CÁC HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài toán 1. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{(x^3-3x+2m)^2+1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8. B. -8. C. -6. D. -1.

Lời giải

Ta có $\sqrt{(x^3-3x+2m)^2}=|x^3-3x+2m|$

Nhận thấy $\min\limits_{[0;3]} f(x)=2 \Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]}|x^3-3x+2m|=16 \quad (1)$.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+2m$ trên $[0;3]$, ta có:

+ $g'(x)=3x^2-3$, $g'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(0;3) \\ x=-1\notin(0;3)\end{array}\right.$

+ $g(0)=2m,\ g(1)=2m-2,\ g(3)=2m+18$

Do đó $2m-2\le g(x)\le 2m+18, \forall x\in[0;3]$, tức $\max\limits_{[0;3]}|x^3-3x+2m|=\max\limits_{[0;3]}\{|2m-2|;|2m+18|\}$.

Từ đây ta có $(1)\Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]}\{|2m-2|;|2m+18|\}=16$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}|2m+18|>|2m-2| \\ |2m+18|=16\end{cases} \\ \begin{cases}|2m+18|\le|2m-2| \\ |2m-2|=16\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-7\end{array}\right.$. Suy ra $S=\{-7;-1\}$. Vậy, tổng các phần tử của S là -8.

Bài toán 2. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+2m-1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. B. $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. C. $[-1;0]$. D. $(0;1)$.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;2] \\ x=1\end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=2m-1$, $f(1)=2m-3$ và $f(2)=2m+1$

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|2m-1|;|2m-3|;|2m+1|\}=\max\{|2m-3|;|2m+1|\}=P$.

Trường hợp 1: Xét $|2m-3|\ge|2m+1| \Leftrightarrow -4(4m-2)\ge 0 \Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P=|2m-3|\ge 2, \forall m\le\dfrac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Xét $|2m-3|<|2m+1| \Leftrightarrow -4(4m-2)<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $P=|2m+1|>2, \forall m>\dfrac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min}$ không tồn tại.

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 3. Cho hàm số $f(x)=|x^3-15x+2m|+12x-m$. Giá trị nhỏ nhất của $M=\max\limits_{[-2;3]} f(x)$ bằng

A. 36. B. 9. C. 25. D. 27.

Lời giải

Đặt $a = \max\limits_{[-2;3]} f(x)$

Ta có $f(x) \le a, \forall x \in [-2;3]$ và điều kiện $a + m - 12x \ge 0, \forall x \in [-2;3]$

$\Leftrightarrow \left|x^3 - 15x + 2m\right| + 12x - m \le a, \forall x \in [-2;3]$

$\Leftrightarrow \left|x^3 - 15x + 2m\right| \le a + m - 12x, \forall x \in [-2;3]$

$\Leftrightarrow -a - m + 12x \le \left|x^3 - 15x + 2m\right| \le a + m - 12x, \forall x \in [-2;3]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -x^3 + 27x - 3m \\ a \ge x^3 - 3x + m \\ a \ge -m + 12x \end{cases}, \forall x \in [-2;3] \quad (*)$$

Xét hàm $g(x) = -x^3 + 27x - 3m$ trên đoạn $[-2;3]$

Ta có $g'(x) = -3x^2 + 27$

BBT của hàm $g(x)$

x	-2		3
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$54 - 3m$

Xét hàm $h(x) = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[-2;3]$

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 3$

BBT của hàm $h(x)$

x	-2		-1		1		3
$h'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	$m+2$	$\searrow$		$\nearrow$	$m+18$

$$\text{Hệ } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 54 - 3m \\ a \ge m + 18 \\ a \ge 36 - m \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\min a = m + 18$ nếu $\begin{cases} m + 18 \le 54 - 3m \\ m + 18 \le 36 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \le 36 \\ 2m \le 18 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 9$

Trường hợp 2: $\min a = 36 - m$ nếu $\begin{cases} 36 - m \le 54 - 3m \\ 36 - m \le m + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \le 18 \\ 2m \ge 18 \end{cases} \Leftrightarrow m = 9$

Trường hợp 3: $\min a = 54 - 3m$ nếu $\begin{cases} 54 - 3m \le 36 - m \\ 54 - 3m \le m + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 9 \\ m \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 9$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M = \max\limits_{[-2;3]} f(x)$ bằng 27

Bài toán 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $\left|2x^3 - 3x^2 + m\right| \le 16, \forall x \in [0;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -65. B. -74. C. -42. D. 87.

Lời giải

Xét $f(x)=2x^3-3x^2+m$, với $x\in[0;3]$.

Ta có: $f'(x)=6x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

$f(0)=m$; $f(1)=m-1$; $f(3)=27+m$.

Do đó: $f(x)\in[m-1;m+27]$.

Vậy: $|f(x)|\le 16\Leftrightarrow\begin{cases}m-1\ge-16\\m+27\le 16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-15\\m\le-11\end{cases}\Leftrightarrow m\in[-15;-11]$.

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-15;-14;-13;-12;-11$.

Ta có: $(-15)+(-14)+(-13)+(-12)+(-11)=-65$.

Bài toán 5. Cho hàm số $y=(x^3-3x+m+1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. -2. B. 4. C. -4. D. 0.

Lời giải

Đặt $y=f(x)=(x^3-3x+m+1)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y'=f'(x)=2(x^3-3x+m+1)(3x^2-3)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\m=-x^3+3x-1=g(x)\end{array}\right.$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Nếu $m\in[-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0\in[-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra $\min\limits_{[-1;1]}y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\notin[-3;1]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-1;1]$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\{(m-1)^2;(m+3)^2\}$

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0$ suy ra

$\min\limits_{[-1;1]}f(x)=(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (TM)\\m=0\ (KTM)\end{array}\right.$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0$ suy ra

$\min\limits_{[-1;1]}f(x)=(m+3)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\ (TM)\\m=-2\ (KTM)\end{array}\right.$

Bài toán 6. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2. B. 6. C. 1. D. 0.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+m$, ta có $g'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\x=1\in[0;2]\end{array}\right.$.

$g(0)=m$, $g(1)=m-2$, $g(2)=m+2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ bằng max của $F=\{|m|;|m-2|;|m+2|\}$

TH1: $|m|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.$.

Với $m=3\Rightarrow F=\{3;1;5\}$ loại vì max bằng 5.

Với $m=-3\Rightarrow F=\{3;5;1\}$ loại vì max bằng 5.

TH2: $|m-2|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\m=-1\end{array}\right.$.

Với $m=5\Rightarrow F=\{5;3;7\}$ loại vì max bằng 7.

Với $m=-1\Rightarrow F=\{1;3;1\}$ có max bằng 3. Chọn $m=-1$.

TH3: $|m+2|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-5\end{array}\right.$.

Với $m=1\Rightarrow F=\{1;1;3\}$ có max bằng 3. Chọn $m=1$.

Với $m=-5\Rightarrow F=\{5;7;3\}$ loại vì max bằng 7.

Vậy $S=\{-1;1\}\Rightarrow$ có 2 giá trị m thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 7. Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[-1;2]}f(x)+\max\limits_{[-1;2]}f(x)=10$. Số phần tử của S là?

A. 2. B. 3. C. 5. D. 1.

Lời giải

Đặt $g(x)=x^4-2x^3+x^2+m\Rightarrow g'(x)=4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2}\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$m+4$	↘	m	↗	$m+\frac{1}{16}$	↘	m	↗	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)=|g(x)|=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$. Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m\ge 0$. Bảng biến thiên của $f(x)=|g(x)|=\left|x^4-2x^3+x^2+m\right|$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$f(x)$	$m+4$	↘	m	↗	$m+\frac{1}{16}$	↘	m	↗	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10 \Leftrightarrow m+m+4=10 \Leftrightarrow m=3$ (TM)

Trường hợp 2: $m<0<m+\dfrac{1}{16} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{16}<m<0$. Bảng biến thiên:

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$f\left(x\right)$	$m+4$	0	$-m$	0	$m+\frac{1}{16}$	0	$-m$	0	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10 \Leftrightarrow 0+m+4=10 \Leftrightarrow m=6$ (Loại)

Trường hợp 3: $m+\dfrac{1}{16}=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{16}$. Tương tự ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10 \Leftrightarrow 0+m+4=10 \Leftrightarrow m=6$ (Loại)

Trường hợp 4: $m+\dfrac{1}{16}<0<m+4 \Leftrightarrow -4<m<-\dfrac{1}{16}$. Bảng biến thiên:

x	-1		0	$\frac{1}{2}$	1		2
$f\left(x\right)$	$m+4$	0	$-m$	$-m-\frac{1}{16}$	$-m$	0	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left[\begin{array}{l}\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10\\ \min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0+m+4=10\\ 0+\left(-m\right)=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-10\end{array}\right.$ (Loại)

Trường hợp 5: $m+4=0 \Leftrightarrow m=-4$. Ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10 \Leftrightarrow 0-m=10 \Leftrightarrow m=-10$ (Loại)

Trường hợp 6: $m+4<0 \Leftrightarrow m<-4$. Ta có:

$\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=10 \Leftrightarrow -m-m-4=10 \Leftrightarrow m=-7$ (Thỏa mãn)

Vậy $m\in\left\{-7;3\right\}$.

Bài toán 8. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-1;1\right]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x+2}, x\in\left[-1;1\right] \Rightarrow t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$; $x=t^2-2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\left|\dfrac{2mt^2-4\text{t}-4m}{t}\right|$.

Xét hàm $h(t)=\dfrac{2mt^2-4\text{t}-4m}{t}$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$.

Ta có $h'(t)=\dfrac{2m(t^2+2)}{t^2}$

Th1: $m=0$ thì $h(t)=-4\Rightarrow g(t)=4\forall t\in\left[1;\sqrt{3}\right]\Rightarrow a=4$ (loại).

Th2: $m\ne 0$ thì hàm số $h(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $\left[1;\sqrt{3}\right]$

Ta có $h(1)=-2m-4;h(\sqrt{3})=\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Nếu $h(1).\text{h}(\sqrt{3})\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -2\\ m\ge 2\sqrt{3}\end{array}\right.$ và hàm số $h(t)$ liên tục trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$ suy ra đồ thị hàm số $h(t)$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$ cắt trục hoành $\Rightarrow a=0$ (loại).

Nếu $h(1).\text{h}(\sqrt{3})>0\Leftrightarrow -2<m<2\sqrt{3}$. Khi đó, $h(1)<0;h\left(\sqrt{3}\right)<0$

$\Rightarrow a=\left|\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=4\end{array}\right.$ là các giá trị nguyên dương để $0<a<1$.

Bài toán 9. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+m+1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $\left[-2020;2020\right]$ sao cho $\max\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|$. Số phần tử của S là

A. 4003. B. 4002. C. 4004. D. 4001.

Lời giải

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x^2+m+1\Rightarrow y'=f'\left(x\right)=3x^2-6x$.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\left(l\right)\\ x=2\end{array}\right.$.

$f\left(1\right)=m-1;\ f\left(2\right)=m-3;\ f\left(4\right)=17+m$.

$\max\limits_{[1;4]}f\left(x\right)=m+17;\ \min\limits_{[1;4]}f\left(x\right)=m-3$.

+Nếu $m-3\ge 0\Leftrightarrow m\ge 3$ thì $\max\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|=m+17$, $\min\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|=m-3$. Khi đó:

$\max\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|\Leftrightarrow 17+m\le 3\left(m-3\right)\Leftrightarrow m\ge 13$.

+Nếu $m+17\le 0\Leftrightarrow m\le -17$ thì $\max\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|=-m+3$, $\min\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|=-17-m$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|\Leftrightarrow -m+3\le 3\left(-17-m\right)\Leftrightarrow m\le -27$.

+Nếu $\left(m-3\right)\left(m+17\right)<0\Leftrightarrow -17<m<3$ thì

$\max\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|m+17\right|,\left|m-3\right|\right\}=\max\left\{m+17,3-m\right\}>0;\min\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|=0$.

Khi đó, không thỏa điều kiện $\max\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|\le 3\min\limits_{[1;4]}\left|f\left(x\right)\right|$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l}m\le -27\\ m\ge 13\end{array}\right.$ kết hợp với $m\in\left[-2020;2020\right]$ ta có $m\in\left[-2020;-27\right]\cup\left[13;2020\right]$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

Bài toán 10. Cho hàm số $f(x)=\left|2x^2+(a+4)x+b+3\right|$. Đặt $M=\max\limits_{[-2;3]}f(x)$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $T=a+4b$ là

A. -42. B. -41. C. 41. D. 42.

Lời giải

Đặt $g(x)=2x^2+(a+4)x+b+3\Rightarrow g'(x)=4x+a+4$.

$g'(x)=0\Rightarrow x=-1-\dfrac{a}{4}$.

$g(-2)=-2a+b+3$; $g(3)=3a+b+33$; $g\left(-1-\dfrac{a}{4}\right)=b+3-\dfrac{(a+4)^2}{8}$.

$\Rightarrow M=\max\left\{\left|-2a+b+3\right|;\left|3a+b+33\right|;\left|b+3-\dfrac{(a+4)^2}{8}\right|\right\}$

$= \max\left\{|-2a+b+3|;|3a+b+33|;\left|\frac{(a+4)^2}{8}-b-3\right|\right\}$.

Ta có $\begin{cases} M \ge |-2a+b+3| \\ M \ge |3a+b+33| \\ M \ge \left|\frac{(a+4)^2}{8}-b-3\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}M \ge \left|-a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}\right| \\ \frac{1}{2}M \ge \left|\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{33}{2}\right| \\ M \ge \left|\frac{(a+4)^2}{8}-b-3\right| \end{cases}$

$\Rightarrow 2M \ge \left|-a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}\right|+\left|\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{33}{2}\right|+\left|\frac{(a+4)^2}{8}-b-3\right|$

$\ge \left|-a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{33}{2}+\frac{(a+4)^2}{8}-b-3\right| = \left|\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{2}a+17\right| \ge \frac{25}{2} \Rightarrow M \ge \frac{25}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases} |-2a+b+3| = |3a+b+33| = \left|\frac{(a+4)^2}{8}-b-3\right| = \frac{25}{4} \\ a=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=-\frac{35}{4} \end{cases}$

Bài toán 11. Cho hàm số $y=\left|\frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4.

A. 14 B. 10 C. 20 D. 18

Lời giải

Theo đề ra ta có $\max\left\{\left|\frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\} \ge 4$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}=1$ do đó luôn tồn tại $\max\left\{\left|\frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}$ trên $\mathbb{R}$ thoả yêu cầu bài toán.

Ta tìm m để $\max\left\{\left|\frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\} < 4, \forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $\left|\frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right| < 4, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2} > -4, \forall x\in\mathbb{R} \\ \frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2} < 4, \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-(2m+4)x+9>0, \forall x\in\mathbb{R} \\ -3x^2-(2m-4)x-7<0, \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m-41<0 \\ m^2-4m-17<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-3\sqrt{5}<m<-2+3\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{21}<m<2+\sqrt{21} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{21}<m<-2+3\sqrt{5}$

Khi đó $\max\left\{\left|\frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\} \ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 2-\sqrt{21} \\ m \ge -2+3\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ là $m\in\{-10;-9;...;-3;5;6;...;10\}$.

XÁC ĐỊNH GTLN, GTNN CỦA CÁC HÀM SỐ LIÊN KẾT, HÀM SỐ HỢP

Bài toán 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(\sin x)$.

A. 5 B. 2 C. 3 D. 4

x	$-\infty$		-1		0		1		3
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

Lời giải

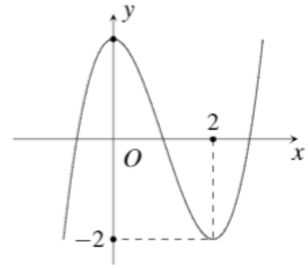
$y = f(\sin x) = f(t);\ t \in [-1;1]$.

Theo bảng biến thiên ta thu được giá trị lớn nhất bằng 5, giá trị nhỏ nhất bằng – 3.
Tổng hai giá trị bằng 2.

Bài toán 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(\sqrt{4-x^2}).$$

A. 0 B. 2 C. 3 D. – 2

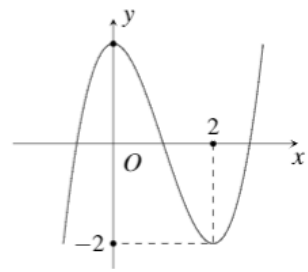


Lời giải

$y = f(\sqrt{4-x^2}) = f(t); t \in [0;2]$. Dựa vào đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất bằng – 2.

Bài toán 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(\sqrt{x})$.

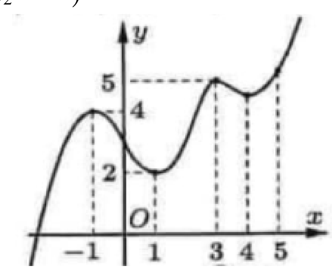
A. 0 B. 2 C. 3 D. – 2



Lời giải

Xét hàm số $y = f(\sqrt{x}) = f(t); t \ge 0$. Theo đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất bằng – 2.

Bài toán 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = 3f(\log_2 x - 1) + x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ trên đoạn $[1;4]$ bằng:



A. 54. B. 7. C. 33. D. 3.

Lời giải

Chọn C

+ Xét hàm số $g(x) = f(\log_2 x - 1)$. Đặt $t = \log_2 x - 1, t \in [-1;1]$. Ta có: $\begin{cases} \max\limits_{[1;4]} g(x) = g(1) = 4 \\ \min\limits_{[1;4]} g(x) = g(4) = 2 \end{cases}$ (1)

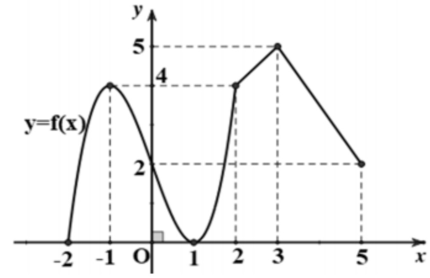
+ Xét hàm số $k(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ có $\begin{cases} \max\limits_{[1;4]} k(x) = k(1) = 8 \\ \min\limits_{[1;4]} k(x) = k(4) = -19 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} \max\limits_{[1;4]} h(x) = h(1) = 20 \\ \min\limits_{[1;4]} h(x) = h(4) = -13 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[1;4]} h(x) - \min\limits_{[1;4]} h(x) = 33$

Bài toán 5. Trên [– 2;5], hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(3\sin^2 x + 2\right)$.

A. 1 B. 2

C. 3 D. 7

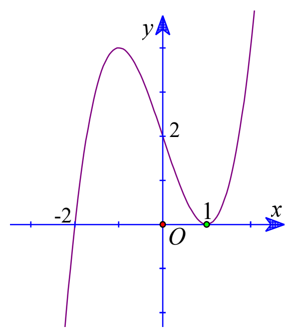


Lời giải

$y = f\left(3\sin^2 x + 2\right) = f(t); t \in [2;5]$, ta thu được giá trị nhỏ nhất bằng 2, giá trị lớn nhất bằng 5.

Tổng hai giá trị bằng 7.

Bài toán 6. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[-5;3]$ bằng



A. $f(-2)$. B. $f(1)$. C. $f(-4)$. D. $f(2)$.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = -2 \\ \frac{x}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < -2 \Leftrightarrow x < -4 .$$

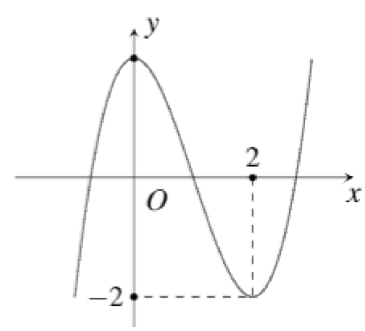
Bảng biến thiên

x	-5		-4		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-4)$	$\nearrow$		$\nearrow$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-5;3]$ bằng $g(-4) = f(-2)$.

Bài toán 7. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(2\cos^2 x)$.

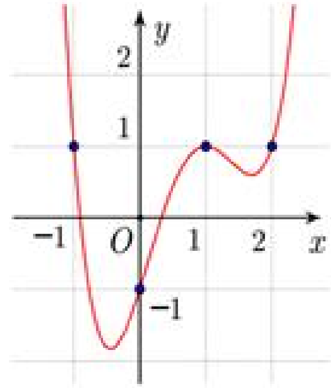
A. 0 B. 2 C. 3 D. – 2



Lời giải

Xét hàm số $y = f(2\cos^2 x) = f(t); t \in [0;2]$. Dựa theo đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất bằng – 2.

Bài toán 8. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=-f(2x-1)+2x$ trên đoạn $[0;2]$ bằng



A. $-f(1)+2$. B. $-f(-1)$. C. $-f(2)+3$. D. $-f(3)+4$.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow -2f'(2x-1)+2=0 \Leftrightarrow f'(2x-1)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=-1 \\ 2x-1=1 \\ 2x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$$

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(2x-1)>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1<-1 \\ 2x-1>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$\frac{3}{2}$		2
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\nearrow$			$g\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$	$g(2)$

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên $[0;2]$ bằng $g\left(\dfrac{3}{2}\right)=-f(2)+3$.

Bài toán 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\sqrt{4-\sqrt{x}}\right)$.

x	-3		-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3

A. 0 B. 2 C. 3

D. – 2

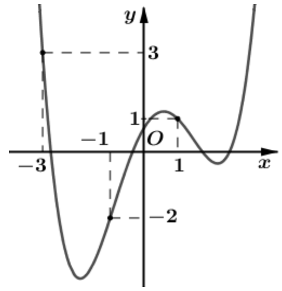
Lời giải

Để ý $4-\sqrt{x}\le 4 \Rightarrow \sqrt{4-\sqrt{x}}\le 2$. Xét hàm số $y=f\left(\sqrt{4-\sqrt{x}}\right)=f(t);t\in[0;2]$.

Theo bảng biến thiên ta thu được giá trị lớn nhất bằng 3, giá trị nhỏ nhất bằng – 5.

Tổng hai giá trị bằng – 2.

Bài toán 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



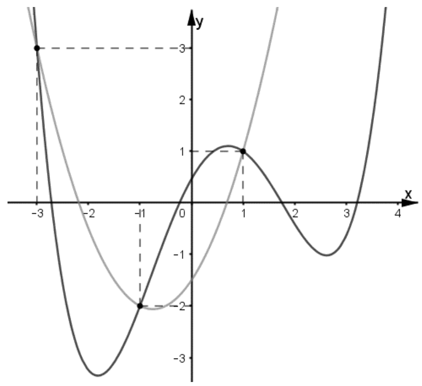
A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

B. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = \dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

D. $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

Lời giải



Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$.

Vẽ parabol $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$. Ta thấy (P) đi qua các điểm có toạ độ $(-3;3)$, $(-1;2)$, $(1;1)$.

- Trên khoảng $(-3;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên $f'(x) < \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0$.
- Trên khoảng $(-1;1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên (P) nên $f'(x) > \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) > 0$.
- Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên $f'(x) < \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0$.

Bảng biến thiên

x	-3		-1		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	
g	$g(-3)$	↘	$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Bài toán 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\left|\sin x - \sqrt{3}\cos x\right| + 1\right) - 2\cos 2x + 4\cos x - 10$

A. 2.

B. -5.

C. -9.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$; $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$\Rightarrow y=f\left(2\left|\sin(x-\frac{\pi}{3})\right|+1\right)-4\cos^2 x+4\cos x-8$

$y=f\left(2\left|\sin(x-\frac{\pi}{3}\right|+1\right)-4(\cos^2 x-\cos x+\frac{1}{4})-7$

$y=f\left(2\left|\sin(x-\frac{\pi}{3}\right|+1\right)-4(\cos x-\frac{1}{2})^2-7\le f\left(2\left|\sin(x-\frac{\pi}{3}\right|+1\right)-7$

Đặt $t=2\left|\sin(x-\frac{\pi}{3})\right|+1\Rightarrow t\in[1;3]$

Dựa vào BBT của hàm số $y=f(x)$, ta có:

t	1		3
$f(t)$	2	$\searrow$	-2

Suy ra $f\left(2\left|\sin(x-\frac{\pi}{3})\right|+1\right)\le 2$.

Vậy, $y=f\left(\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|+1\right)-2\cos 2x+4\cos x-10\le 2-7=-5$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin(x-\frac{\pi}{3})=0\end{cases}$

Bài toán 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x-2$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $f(2)-\frac{3}{4}$. B. $f(1)-\frac{8}{3}$. C. $f(0)-2$. D. $f(-1)-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x^2-1=(x+1)(x-1)^2(x-2)+x^2-1=(x+1)(x-1)(x^2-3x+3)$

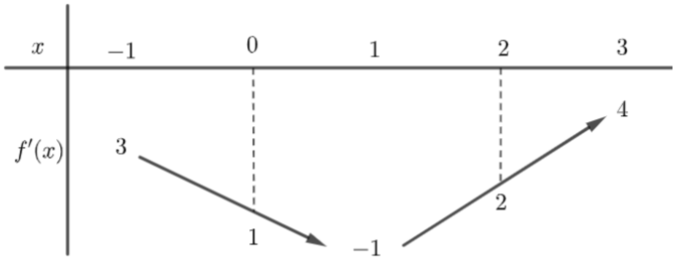
$g'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)(x^2-3x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x^2-3x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu cho y'.

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là $g(1)=f(1)-\frac{8}{3}$.

Bài toán 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Trên $[-4;2]$ hàm số $y = f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ đạt giá trị lớn nhất bằng?



A. $f(2)-2$.
B. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+2$.
C. $f(2)+2$.
D. $f\left(\dfrac{3}{2}\right)-1$.

Lời giải

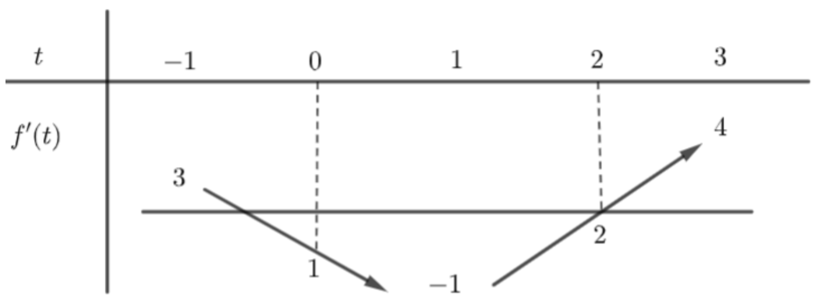
Chọn A

Đặt $g(x) = f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x \Rightarrow g'(x) = -\dfrac{1}{2}f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+1.$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(1-\dfrac{x}{2}\right) = 2.$

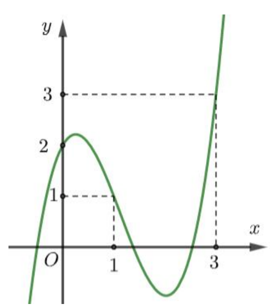
Đặt $t = 1-\dfrac{x}{2} \Rightarrow t \in [0;3]$.

Vẽ đường thẳng $y = 2$ lên cùng một bảng biến thiên ta được



Ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \max\limits_{[-4;2]} g(x) = g(-2) = f(2)-2.$

Bài toán 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.
B. $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.
C. $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$.
D. $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

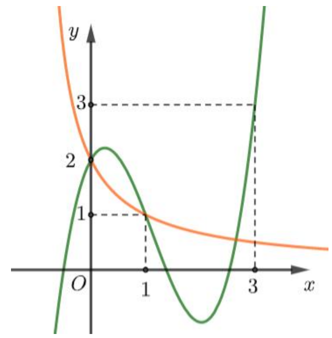
Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x}{2}+1\right)-\dfrac{2x+8}{x^2+8x+16} = \dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x}{2}+1\right)-\dfrac{2}{x+4}.$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\dfrac{x}{2}+1\right) = \dfrac{4}{x+4}.$

Đặt $t=\frac{x}{2}+1 \Rightarrow t \in [0;3]$

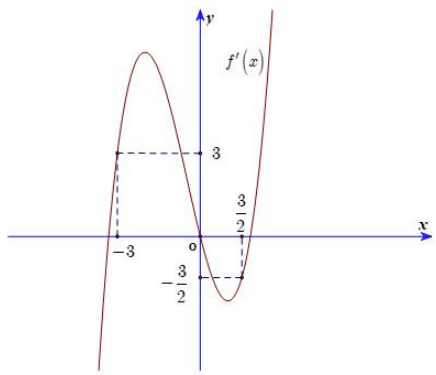
Phương trình trở thành $f'(t)=\frac{4}{2t+2}=\frac{2}{t+1}$.

Vẽ đồ thị $y=\frac{2}{x+1}$ lên cùng một hệ tọa độ ta được:



Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=1 \Rightarrow x=0$.

Bài toán 15. Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0)=0$, $f(-3)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+2x^2\right|$ giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $\left[-2;\frac{3}{2}\right]$ là

A. 2. B. $\frac{39}{2}$. C. 1. D. $\frac{29}{2}$.

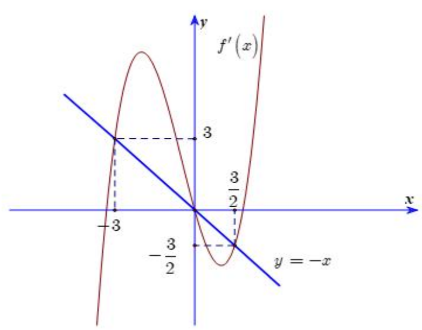
Chọn D

Lời giải

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+2x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm đa thức và $h(0)=4f(0)+2.0=0$

Khi đó $h'(x)=4f'(x)+4x \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$, ta có

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-3;0;\frac{3}{2}\right\}$

Ta có bảng biến thiên như sau:

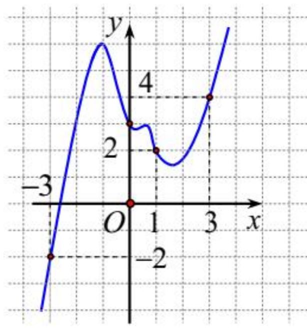
x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{29}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|h(x)|$ như sau

x	$-\infty$			-3		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\|h(x)\|$	$+\infty$	$\searrow$	0 $\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{29}{2}$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $\left[-2;\frac{3}{2}\right]$ là $\frac{29}{2}$.

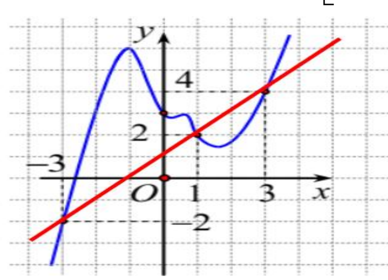
Bài toán 16. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng



A. $f(0)-1$. B. $f(-3)-4$. C. $2f(1)-4$. D. $f(3)-16$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$. Giải $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$.



Dựa vào hình vẽ ta có bảng biến thiên

x	-3		1		3
g'(x)	0	+	0	-	0
g(x)	$g(-3)$	$\nearrow$	g(1)	$\searrow$	g(3)

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ trên đoạn $[-3;3]$ là $g(1)=2f(1)-4$.

Bài toán 1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

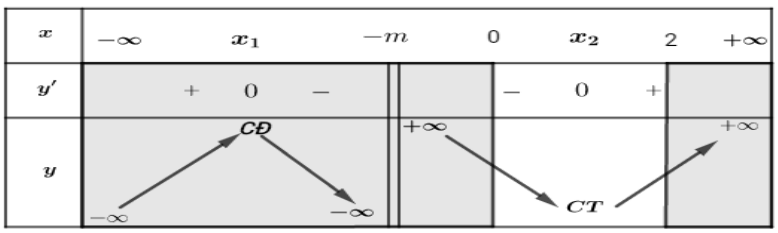
A. $0<m<1$ B. $m>1$ C. $m>2$ D. $-1<m<1$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0;2]$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m<0\\-m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.$

Ta có $y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=\frac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-m-1\\x_2=-m+1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0\in(0;2)$ nên $0<-m+1<2\Leftrightarrow-1<m<1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $0<m<1$.

CÓ THỂ GIẢI NHƯ SAU:

Điều kiện xác định $x\neq-m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m\notin[0;2]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-m<0\\-m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.$ $(*)$

$$y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=\frac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$$

$y'=0$ có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x_1=-m+1\\x_2=-m-1\end{array}\right.$,

$x_1-x_2=2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$

Ta thấy $-m+1>-m-1,\forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$ thì $0<-m+1<2\Leftrightarrow-1<m<1$ $(**)$

Từ $(*),(**)$ ta có $0<m<1$

Bài toán 2. Cho hàm số $y=\frac{1-m\sin x}{\cos x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

A. 1. B. 9. C. 3. D. 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\frac{1-m\sin x}{\cos x+2}\Leftrightarrow y\cos x+m\sin x=1-2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $y^2+m^2\geq1-4y+4y^2\Leftrightarrow3y^2-4y+1-m^2\leq0$

$$\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3}\leq y\leq\frac{2+\sqrt{1+3m^2}}{3}.$$

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \dfrac{2-\sqrt{1+3m^2}}{3} < -2 \\ m\in[0;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3m^2} > 8 \\ m\in[0;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m\in[0;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m\in[0;10] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in\{5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 3. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20\,;\,20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương?

A. 9. B. 8. C. 11. D. 10.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1\,;\,3]$ thì $m\notin[1\,;\,3]$.

$y'=\dfrac{-2m-6}{(x-m)^2}$.

Trường hợp 1: $-2m-6>0 \Leftrightarrow m<-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y = y(3) = \dfrac{m+9}{3-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương thì $\dfrac{m+9}{3-m}>0 \Leftrightarrow m+9>0 \Leftrightarrow m>-9$.

Vậy các số nguyên m thỏa là $-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4$.

Trường hợp 2: $-2m-6<0 \Leftrightarrow m>-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y = y(1) = \dfrac{m+7}{1-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương thì $\dfrac{m+7}{1-m}>0 \Leftrightarrow 1-m>0 \Leftrightarrow m<1$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2,\ -1,\ 0$.

Trường hợp 3: $-2m-6=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Khi đó $y=1$. Nên $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y = 1$.

Vậy $m=-3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 4. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

A. $m=\sqrt{2}$. B. $m=\sqrt{3}$. C. $m=4$. D. $m=2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có: $y'=\dfrac{2m^2+1}{(x+2)^2}>0, \forall x\neq -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$ nên $\max\limits_{[1;3]} y = y(3) \Leftrightarrow \dfrac{3m^2-1}{5}=1 \Leftrightarrow m=\sqrt{2}$ (vì $m>0$).

Bài toán 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(2;5)$. B. $(1;4)$. C. $(6;9)$. D. $(20;25)$.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$.

+ $y' = \dfrac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in D$

Vậy hàm số $y = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên $[0;3]. \Rightarrow \min\limits_{[0;3]} y = y(0) = \dfrac{-m^2}{8}$

Để $\min\limits_{[0;3]} y = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}. \Rightarrow m_0 = 2\sqrt{6} \in (2;5)$. Vậy chọnA.

Bài toán 6. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

A. 3. B. 2. <u>C</u>. 1. D. 0.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$y' = \dfrac{m^2-m+2}{(x-m)^2} > 0, \forall x \neq m$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m<0 \\ f(4) = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \dfrac{2-m^2}{4-m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m^2+m-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m=2, m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

Bài toán 7. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + 2(m-1)x^2$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. 2. B. -1. <u>C</u>. 4. D. 0.

Lời giải

$f'(x) = 4mx^3 + 4(m-1)x$.

Do $f(x)$ là hàm đa thức và $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) \Rightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4m + 4(m-1) = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Thay $m = \dfrac{1}{2}$ vào hàm số ban đầu ta được

$y = \dfrac{1}{2}x^4 + 2\left(\dfrac{1}{2}-1\right)x^2 = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 \Rightarrow y' = 2x^3 - 2x = 2x(x-1)(x+1)$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	4	↗	$+\infty$

Vậy với $m = \dfrac{1}{2}$, thì $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)(TM)$.

Dựa vào BBT ta có $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = 4$.

Bài toán 8. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$, với m là tham số. Gọi $m_1,m_2\left(m_1<m_2\right)$ là các giá trị của tham số m thỏa mãn $2\max\limits_{[0;2]}f\left(x\right)-\min\limits_{[0;2]}f\left(x\right)=8$. Tổng $2m_1+3m_2$ bằng

A. 1.
B. -2.
C. 4.
D. -1.

Lời giải

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{2+m^2}{\left(x+1\right)^2}>0,\forall x\in\left[0;2\right].\Rightarrow \underset{[0;2]}{Min}\,f\left(x\right)=f\left(0\right)=-m^2;\underset{[0;2]}{Max}\,f\left(x\right)=f\left(2\right)=\dfrac{4-m^2}{3}$

Do đó: $2\max\limits_{[0;2]}f\left(x\right)-\min\limits_{[0;2]}f\left(x\right)=8\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{4-m^2}{3}\right)+m^2=8.\Leftrightarrow m^2-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=4\end{array}\right.$

Vậy $2m_1+3m_2=2.\left(-4\right)+3.4=4$.

Bài toán 9. Có bao nhiên giá trị của tham số a thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=ax^4+3x^2+cx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại $x=1$

A. 11.
B. 10.
C. 6.
D. 5.

Lời giải

$y=f(x)=ax^4+3x^2+cx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại $x=1\Rightarrow f'(1)=0$

$f'(x)=4ax^3+6x+c\Rightarrow f'(1)=4a+6+c=0\Rightarrow c=-4a-6$

$\Rightarrow 4ax^3+6x-4a-6=0\Leftrightarrow 4a\left(x^3-1\right)+6(x-1)=0\Leftrightarrow(x-1)\left[4a\left(x^2+x+1\right)+6\right]=0$

Để $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại $x=1$

$\Rightarrow 4ax^2+4ax+4a+6=0$ vô nghiệm

$\Delta'=4a^2-4a(4a+6)<0\Leftrightarrow a^2+2a>0\Rightarrow a<-2$ hoặc $a>0$

$f(4)>f(1)\Leftrightarrow 256a+48+4(-4a-6)>a+3+(-4a-6)\Rightarrow a>\dfrac{-1}{9}$

$f(0)>f(1)\Leftrightarrow 0>a+3+(-4a-6)\Rightarrow a>-1$

Kết hợp với điêu kiện $m=\{1;2;3\ldots10\}$ có 10 giá trị $\Rightarrow$ chọn **B**

Bài toán 10. Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ bằng 3.

A. $m=3$.
B. $m=1$.
C. $m=7$.
D. $m=5$

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{2-m}{\left(x+1\right)^2}$.

+ Xét $m=2$.

$\Rightarrow$ Hàm số trở thành: $y=2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m=2$ (loại)

+ Xét $m>2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{\left(x+1\right)^2}<0\ (\forall x\neq-1)\ \Rightarrow \min\limits_{[0;4]}y=y(4)=\dfrac{8+m}{5}$.

$\Rightarrow \dfrac{8+m}{5}=3\Leftrightarrow m=7$ (thoả mãn).

+ Xét $m<2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{\left(x+1\right)^2}>0\ (\forall x\neq-1)\Rightarrow \min\limits_{[0;4]}y=y(0)=m$.

$\Rightarrow m=3$ (loại).

Vậy $m=7$.

Bài toán 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $\left[0;2\right]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5.
B. 1.
C. -3.
D. -8.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}\Rightarrow\left[0;2\right]\subset D$.

Ta có: $y=\frac{x^3+x^2-m}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{2x^3+4x^2+2x+m}{(x+1)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m=0\Leftrightarrow -\left(2x^3+4x^2+2x\right)=m$ (1).

Ta có $y(0)=-m; y(2)=4-\frac{m}{3}$. Đặt $g(x)=-\left(2x^3+4x^2+2x\right)\Rightarrow g'(x)=-\left(6x^2+8x+2\right)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=-\frac{1}{3}$.

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta có $g(x)\in[-36;0],\forall x\in[0;2]$.

Trường hợp 1: $m>0\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m<y(2)=4-\frac{m}{3}\ khi\,m>0$.

Khi đó $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(2)=4-\frac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3$ loại do $m>0$.

Trường hợp 2: $m<-36\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Dễ thấy $y(0)=-m>y(2)=4-\frac{m}{3}\ khi\ m<-36$.

Khi đó $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(0)=-m=5\Leftrightarrow m=-5$ loại do $m<-36$.

Trường hợp 3: $m\in[-36;0]\Rightarrow$ phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất (giả sử $x=x_0$).

Trên $[0;2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0		x_0		2
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$	0	$\searrow$	$y(x_0)$	$y=m$ $\searrow$	-36

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

+ $x=x_0: g(x)=m\Leftrightarrow -\left(2x^3+4x^2+2x\right)=m\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m=0\Leftrightarrow y'=0$.

+ $x\in(0;x_0): g(x)>m\Leftrightarrow -\left(2x^3+4x^2+2x\right)>m\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m<0\Leftrightarrow y'<0$.

+ $x\in(x_0;0): g(x)<m\Leftrightarrow -\left(2x^3+4x^2+2x\right)<m\Leftrightarrow 2x^3+4x^2+2x+m>0\Leftrightarrow y'>0$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		x_0		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$y(0)$	$\searrow$	$y(x_0)$	$\nearrow$	$y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y\in\{y(2);y(0)\}$.

Nếu m$\in[-36;-6]\Rightarrow y(0)\ge y(2)\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(0)=-m=5\Leftrightarrow m=-5\ (l)$.

Nếu m$\in[-6;0]\Rightarrow y(0)\le y(2)\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\,y=y(2)=4-\frac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3\,(n)$.

Vậy $m=-3$ thỏa đề.

Cách 2:

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}\Rightarrow[0;2]\subset D$.

Ta có: $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}=x^2-\dfrac{m}{x+1}\Rightarrow y'=2x+\dfrac{m}{(x+1)^2}$.

Trường hợp 1: $m\ge 0\Rightarrow y'\ge 0,\forall x\in[0;2]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0;2]$.

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=4-\dfrac{m}{3}=5\Leftrightarrow m=-3$ loại do $m>0$.

Trường hợp 2: $m<0$, giả sử $\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(x_0)$ với $x_0\in(0;2)$. Do hàm số liên tục trên $[0;2]$

$$\Rightarrow\begin{cases}y'(x_0)=0\\ y(x_0)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2x_0(x_0+1)^2\\ \dfrac{x_0^3+x_0^2-m}{x_0+1}=5\end{cases}\Rightarrow x_0^3+x_0^2+2x_0(x_0+1)^2=5(x_0+1)\Leftrightarrow x_0=\dfrac{-5}{3}\vee x=1(n)\Rightarrow m=-8.$$

Khi đó: $y'=2x+\dfrac{-8}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+4x^2+2x-8}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biên thiên:

x	0		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\dfrac{20}{3}$

$\Rightarrow m=-8$ không thỏa yêu cầu đề.

Nên không tồn tại $x_0\in(0;2)$ để $\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(x_0)$.

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)\Rightarrow m=-5\\ \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(0)\Rightarrow m=-3\end{array}\right..$$

Nếu $m=-5\Rightarrow y(0)=5;y(2)=\dfrac{17}{3}\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=\dfrac{17}{3}\ne 5\Rightarrow m=-5(l)$.

Nếu $m=-3\Rightarrow y(0)=3;y(2)=5\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}}\, y=y(2)=5\Rightarrow m=-3(n)$.

Vậy $m=-3$ thỏa đề.

Bài toán 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4;4]$ như sau:

x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in[-4;4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(|x|^3+3|x|\right)+f(m)$ trên $[-1;1]$ bằng $\dfrac{11}{2}$?

A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải

Ta có $g(-x)=g(x)$ nên $g(x)$ chẵn hay đồ thị của hàm số $y=g(x)$ đối xứng qua trục tung.

$\Rightarrow \underset{[-1;1]}{\max}\, g(x)=\underset{[0;1]}{\max}\, g(x)=\underset{[0;1]}{\max}\left[f\left(x^3+3x\right)+f(m)\right]=\underset{[0;1]}{\max}\left[f\left(x^3+3x\right)\right]+f(m)$.

Xét hàm số $y=f\left(x^3+3x\right)$ trên $[0;1]$.

Đặt $t = x^3 + 3x \Rightarrow t \in [0;4] \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} y = \max\limits_{[0;4]} f(t) = 3$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = 3 + f(m) = \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow f(m) = \dfrac{5}{2}$.

Vậy có 4 giá trị *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 13. Hàm số $f(x) = 10^x + x$ và $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2+1)x - 2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x + f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng?

A. $\dfrac{21}{2}$. B. 6. C. 21. D. 5.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 10^x \ln 10 + 1 > 0, \forall x$

$g'(x) = 3x^2 - 2mx + (m^2+1) > 0, \forall x$ do $\Delta' = -2m^2 - 3 < 0$.

$y = g(x + f(x)) = g(10^x + 2x)$.

$y' = \left[g(10^x + 2x)\right]' = (10^x \ln 10 + 2) \cdot g'(10^x + 2x) > 0, \forall x \in [0;1]$.

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ khi đó

$M = \underset{[0,1]}{\text{Max}} y = y(1) = g(12) = 12^3 - m \cdot 12^2 + (m^2+1) \cdot 12 - 2$

$= 12m^2 - 144m + 1738 = 12 \cdot (m-6)^2 + 1306 \geq 1306$

M đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = 6$.

Bài toán 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{\left[-8;\frac{8}{3}\right]} f(x) = 5$. Xét hàm số $g(x) = 2f\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right) + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max\limits_{[-2;4]} g(x) = -20$

A. -25. B. -30. C. -10. D. 30.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = 2f\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right) + m$ trên $[-2;4]$.

Đặt $t = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$, với $x \in [-2;4]$ thì $t \in \left[-8; \dfrac{8}{3}\right]$.

Khi đó: $\max\limits_{[-2;4]} g(x) = -20 \Leftrightarrow 2\max\limits_{[-2;4]} f\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right) + m = -20$

$\Leftrightarrow 2\max\limits_{\left[-8;\frac{8}{3}\right]} f(t) + m = -20 \Leftrightarrow 2.5 + m = -20 \Leftrightarrow m = -30$.

Bài toán 15. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của *m* để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(2\sin x + 1) + m|$ không vượt quá 10?

A. 45. B. 43. C. 30. D. 41.

Lời giải

Đặt $t = 2\sin x + 1$ $, t \in [-1;3]$. Xét hàm số $g(t) = f(t) + m = t^3 - 3t + 1 + m$ $, t \in [-1;3]$

Đạo hàm $g'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

$\underset{[-1;3]}{Max}\, g(t) = g(3) = m + 19$

$\underset{[-1;3]}{Min}\, g(t) = g(1) = m - 1$

+ TH1: Nếu $m + 19 > m - 1 > 0 (m > 1)$

Để thỏa mãn YCBT thì $m - 1 \leq 10 \Leftrightarrow m \leq 11 \Rightarrow 1 < m \leq 11$ (1)

+ TH2: Nếu $0 > m + 19 > m - 1 (m < -19)$

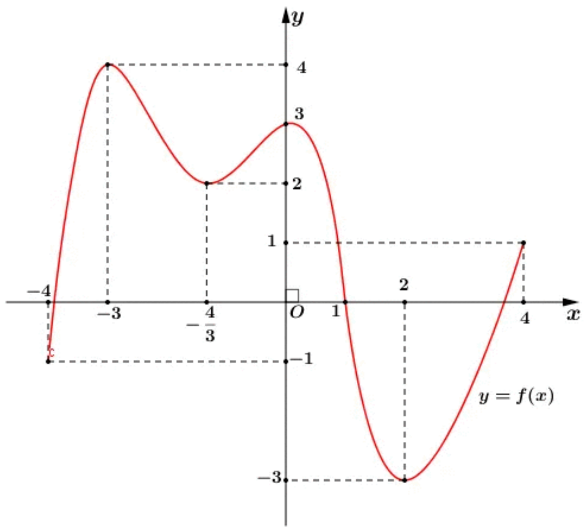
Để thỏa mãn YCBT thì $m + 19 \geq -10 \Leftrightarrow m \geq -29 \Rightarrow -29 \leq m < -19$ (2)

+ TH3: Nếu $m - 1 \leq 0 \leq m + 19 \Leftrightarrow -19 \leq m \leq 1$ thì $\min y = 0$ (hiển nhiên đúng) (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra $-29 \leq m \leq 11$

Vậy có 41 số nguyên thỏa mãn.

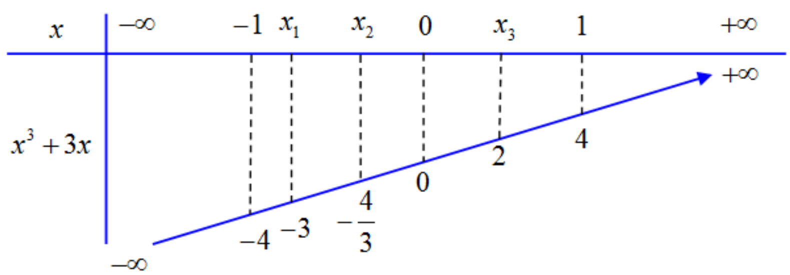
Bài toán 16. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[-4;4]$, có các điểm cực trị trên $(-4;4)$ là $-3;-\frac{4}{3};0;2$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x^3+3x)+m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=2022$, m_2 là giá trị của m để $\min\limits_{[-1;0]} g(x)=2004$. Giá trị của m_1-m_2 bằng



A. 12. B. 13. C. 11. D. 14.

Lời giải

- Trước tiên, xét hàm $y=x^3+3x$, có BBT như sau:



- Có $g'(x)=(3x^2+3)f'(x^3+3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x=-3 \\ x^3+3x=-\frac{4}{3} \\ x^3+3x=0 \\ x^3+3x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in[-1;0] \\ x=x_2\in[-1;0] \\ x=0 \\ x=x_3\in[0;1] \end{array}\right.$

- Trên $[0;1]$, có $g(0)=f(0)+m=3+m;\ g(x_3)=f(2)+m=-3+m;\ g(1)=f(4)+m=1+m$

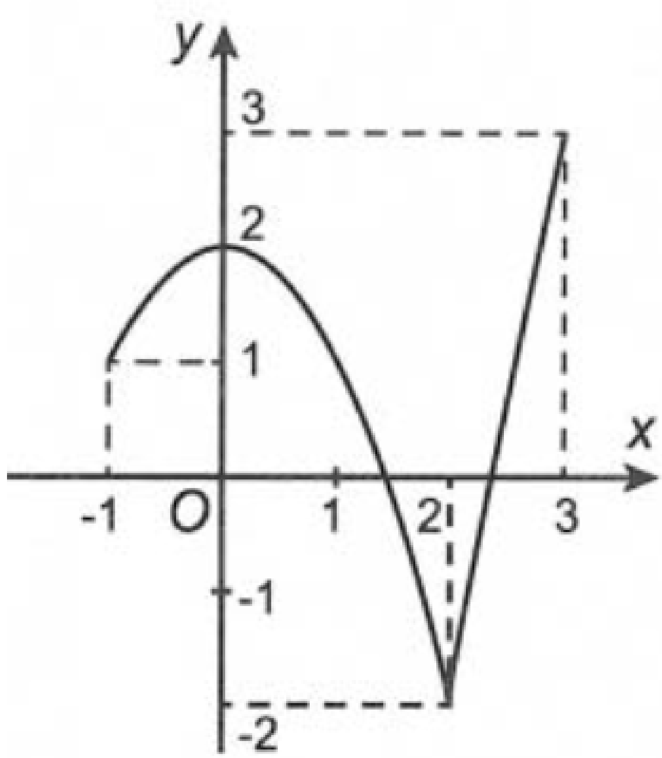
Dễ thấy $\max\limits_{[0;1]} g(x)=3+m=2022$, suy ra $m_1=m=2022-3=2019$.

- Trên $[-1;0]$, có $g(0)=f(0)+m=3+m;\ g(-1)=f(-4)+m=-1+m;\ g(x_1)=f(-3)+m=4+m;\ g(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)+m=2+m.$

Dễ thấy $\min\limits_{[-1;0]} g(x)=-1+m=2004$, suy ra $m_2=m=2004+1=2005$.

- Vậy $m_1-m_2=2019-2005=14$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG



LUYỆN KỸ NĂNG TOÁN 12 THPT
BÀI GIẢNG
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ
(KẾT HỢP 3 BỘ SÁCH GIÁO KHOA)

THÂN TẶNG TOÀN THỂ QUÝ THẦY CÔ VÀ CÁC EM HỌC SINH TRÊN TOÀN QUỐC

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK)

ĐÁP ÁN CHI TIẾT PDF BẠN ĐỌC VUI LÒNG LIÊN HỆ TÁC GIẢ
GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL); TEL 0398021920

THÀNH PHỐ THÁI BÌNH – THÁNG 7/2024

LUYỆN KỸ NĂNG TOÁN 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

DUNG LƯỢNG	NỘI DUNG
3 FILE 2 trang	CƠ BẢN GTLN, GTNN CỦAHÀM SỐ
3 FILE 2 trang	VẬN DỤNG GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ
3 FILE 2 trang	VẬN DỤNG CAO GTLN, GTNN

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ (MIN, MAX)
LỚP BÀI TOÁN CƠ BẢN – PHẦN 1

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên miền $\left[-3;2\right]$

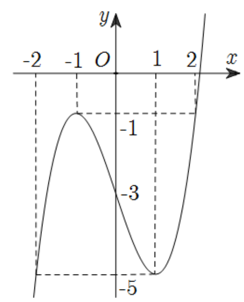
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin x$ bằng

A.2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$.



A. $m=-5;M=-1$. B. $m=-2;M=2$. C. $m=-1;M=0$. D. $m=-5;M=0$.

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ trên miền $\left[0;2\right]$.

A.1 B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{1}{6}$ D. $\dfrac{2}{3}$

Câu 5. Tập giá trị của hàm số $y=\sin 2x$ là

A. $\left[-2;2\right]$. B. $\left[0;2\right]$. C. $\left[-1;1\right]$. D. $\left[0;1\right]$.

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln\left(x^2-4x+6\right)$.

A. $\ln 2$ B. $\ln 3$ C. $2\ln 2$ D. 2

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $\left[0;9\right]$ bằng

A. -28. B. -1. C. -36. D. -37.

Câu 8. Tìm tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos 2x$.

A.3 B. 1 C. 2 D. 0

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[2;3\right]$ bằng

A. $\dfrac{15}{2}$. B. 5. C. $\dfrac{29}{3}$. D. 3.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên miền $\left[-2;4\right]$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $\left[0;2\right]$

A. $M=\dfrac{1}{3}$. B. $M=-\dfrac{1}{3}$. C. $M=5$. D. $M=-5$

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{2x}-2e^x+5$.

A.4 B. 3 C. 1 D. 2

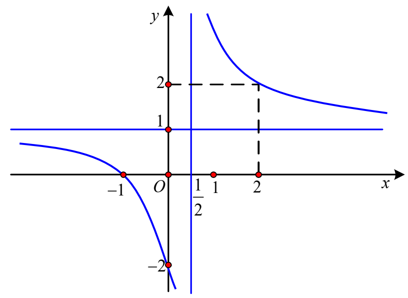
Câu 13. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3\sin x$.

A. $T = [-1;1]$. B. $T = [-3;3]$. C. $T = [2;8]$. D. $T = [5;8]$.

Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36. B. $-14\sqrt{7}$. C. $14\sqrt{7}$. D. -34.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 2$. B. $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 0$.

C. $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$. D. $\max\limits_{[3;4]} f(x) = f(4)$.

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \log_3(9 - x^2)$.

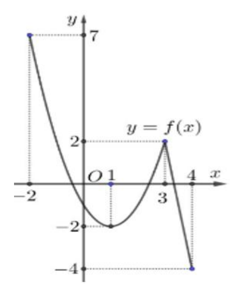
A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y = -3$ B. $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$ C. $\min\limits_{[2;4]} y = 6$ D. $\min\limits_{[2;4]} y = -2$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;4]$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

A. 8 B. 20 C. 53 D. 65



Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m = 13$ B. $m = \dfrac{51}{4}$ C. $m = \dfrac{51}{2}$ D. $m = \dfrac{49}{4}$

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$.

A. 2 B. 3 C. 1 D. $\sqrt{2}$

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$.

A. $m = \dfrac{1}{2}$. B. $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. C. $m = 1$. D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

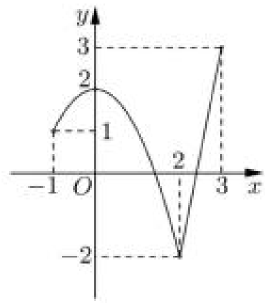
A. $2+\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 0. D. $\sqrt{3}$.

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4e^x - e^{2x}$.

A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ (MIN, MAX)
LỚP BÀI TOÁN CƠ BẢN – PHẦN 2

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng



A. 1 B. 4 C. 5 D. 0

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -39. B. -40. C. -36. D. -4.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{2x}-6.2^x+10$.

A.1 B. 3 C. 2 D. 4

Câu 4. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=5$. B. $x=2$. C. $x=1$. D. $x=4$.

Câu 5. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+5}$ trên đoạn $[0;2]$.

A.3 B. $\dfrac{46}{15}$ C. $\dfrac{16}{35}$ D. $\dfrac{46}{35}$

Câu 6. Tìm tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin 4x+5$.

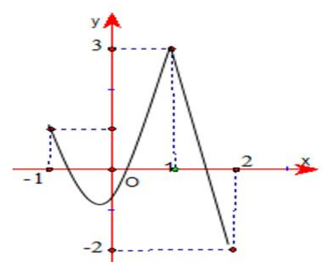
A.5 B. 6 C. 4 D. 10.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -18. B. -2. C. 2. D. 18.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;2]$. Ta có $2M+m$ bằng

A. 0 B. 5 C. 3 D. 4



Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_5(x^4+x^2+5)$.

A.2 B. 1 C. 0 D. 3

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

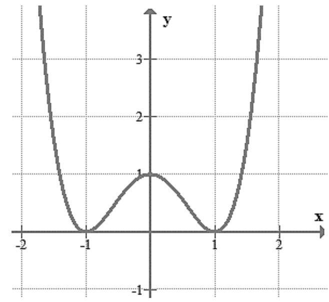
C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2 x-10\log_2 x+26$.

A.2 B. 1 C. 5 D. 7

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(e^x-1\right)\left(e^x-5\right)$.

A.4 B. 1 C. – 4 D. 0

Câu 14. Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$

A. $T=\left[1;\ 9\right]$. B. $T=\left[2\sqrt{2};\ 4\right]$. C. $T=\left(1;\ 9\right)$. D. $T=\left[0;\ 2\sqrt{2}\right]$.

Câu 15. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$.

A.1 B. 5 C. 3 D. 4

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên trên $\left[-5;7\right)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	‖
y	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9 ‖

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\underset{\left[-5;7\right)}{\text{Min}}\, f\left(x\right)=6$. B. $\underset{\left[-5;7\right)}{\text{Min}}\, f\left(x\right)=2$. C. $\underset{\left[-5;7\right)}{\text{Max}}\, f\left(x\right)=9$. D. $\underset{\left[-5;7\right)}{\text{Max}}\, f\left(x\right)=6$.

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-6\sqrt{x}+8$.

A.3 B. 1 C. – 1 D. 0

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{\left(-1;1\right]} f\left(x\right)=f\left(0\right)$ B. $\max\limits_{\left(0;+\infty\right)} f\left(x\right)=f\left(1\right)$ C. $\min\limits_{\left(-\infty;-1\right)} f\left(x\right)=f\left(-1\right)$ D. $\min\limits_{\left(-1;+\infty\right)} f\left(x\right)=f\left(0\right)$

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng:

A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Câu 20. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{6x-x^2}$.

A.3 B. 2 C. 4 D. 5

Câu 21. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=8\ln x-\ln^2 x$.

A.10 B. 16 C. 8 D. 4

Câu 22. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số $y=4\sin x\cos x+1$

A.3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 23. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin 6x+6$.

A.12 B. 10 C. 6 D. 5

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ (MIN, MAX)
LỚP BÀI TOÁN CƠ BẢN – PHẦN 3

Câu 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 8\sqrt{x+1} + 2024$.

A.2000 B. 2016 C. 2007 D. 2009

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \log_4\left(16 - x^4\right)$.

A.4 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 3. Tìm tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1}$.

A.1 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây *đúng*?

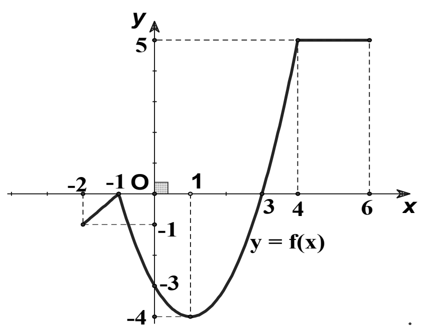
x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	-	0	$+$	
y	0	↗	5	↘	1	↗	4

A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. B. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. C. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. D. $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 5. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{12x - 2x^2}$.

A.3 B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 9. B. -8. C. -9. D. 8.

Câu 7. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sqrt{\cos 2x} + 5$.

A.10 B. 15 C. 12 D. 9

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -2. B. -11. C. -26. D. -27.

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \log_3^2 x - 4\log_3 x + 10$.

A.4 B. 2 C. 3 D. 6

Câu 10. Tổng giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 0. B. -16. C. 20. D. 4.

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \ln\left(8x - x^2\right)$.

A.3 B. $4\ln 3$ C. $3\ln 3$ D. $4\ln 2$

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. B. -63. C. $-20\sqrt{10}$. D. -52.

Câu 13. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4 - 3\sin^2 2x$.

A.4 B. 5 C. 3 D. 6

Câu 14. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Tìm m?

A. $m = 5$. B. $m = 4$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^6 - 6x^3 + 10}$.

A.3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0 B. -1 C. -3 D. -2

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (e^x - 1)(e^x - 7)$.

A.4 B. 2 C. – 6 D. – 9

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ với x thuộc $D = (-\infty;-1] \cup \left[1;\frac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\max\limits_D f(x) = 0; \min\limits_D f(x) = -\sqrt{5}$. B. $\max\limits_D f(x) = 0$; không tồn tại $\min\limits_D f(x)$.

C. $\max\limits_D f(x) = 0; \min\limits_D f(x) = -1$. D. $\min\limits_D f(x) = 0$; không tồn tại $\max\limits_D f(x)$.

Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{9^x - 4.3^x + 5}$.

A.4 B. 3 C. 2 D. 1

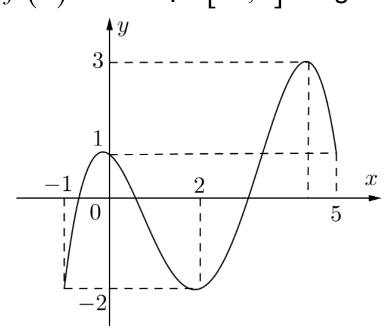
Câu 20. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 21. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{10\sqrt{x} - x}$.

A.10 B. 6 C. 4 D. 5

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng



A. -1 B. 4 C. 1 D. 2

Câu 23. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \log_3(x^4 + x^2 + 9)$.

A.3 B. 2 C. 1 D. 4

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x + 2x + 4$ trên miền $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A.2 B. $\pi + 5$ C. $\pi + 4$ D. 2π

Câu 25. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{9 - \cos^2 x}$.

A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. $6\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0\ ;2]$.

A. $m = 3$ B. $m = 0$ C. $m = -2$ D. $m = 11$

Câu 27. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 9}$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. $6\sqrt{2}$ B. 2 C. $3\sqrt{6}$ D. 54

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (MIN, MAX)
LỚP BÀI TOÁN VẬN DỤNG – PHẦN 1

Câu 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-3x\right)^2-6\left(x^2-3x\right)$.

A.2 B. – 1 C. 0 D. – 9

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^2+2x+5-3\sqrt{x^2+2x+5}$.

A.2 B. 1 C. – 2 D. 0

Câu 3. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x^2+1\right)$.

x	-3		-1		1		2
y'		+	0	–	0	+	
y	-2	↗	0	↘	-5	↗	3

A. 1 B. – 5 C. – 1 D. 2

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $\left[2;3\right]$ bằng

A. $\frac{\ln 2}{2}$. B. $\frac{\ln 3}{3}$. C. $\frac{3}{e^2}$. D. $\frac{1}{e}$.

Câu 5. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2 x-\log_2 x+5$ trên miền $\left[2;4\right]$.

A.16 B. 12 C. 10 D. 13

Câu 6. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3<m\le 4$. B. $-2<m\le 3$. C. $m>4$. D. $m\le -2$.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$ là

A. -20. B. -8. C. 0. D. 9.

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(\sin x)$.

x	-3		-1		1		2
y'		+	0	–	0	+	
y	-2	↗	0	↘	-5	↗	3

A. 1 B. – 5 C. – 1 D. 2

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ trên miền $\left[3;5\right]$.

A.3 B. 2 C. 1 D. 4

Câu 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4^x-2^{x+1}+6$ trên miền $\left[2;3\right]$.

A.3 B. 2 C. 1 D. 4

Câu 11. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $\left[0;3\right]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-\frac{7}{2}$. B. $S=-\frac{3}{2}$. C. -3. D. $S=4$.

Câu 12. Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y=x^3+\left(m^2+1\right)x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $\left[0;1\right]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0-m_0^2\ge 0$. B. $2m_0-1<0$. C. $6m_0-m_0^2<0$. D. $2m_0+1<0$.

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(e^x)$.

x	-3		-1		1		2
y'		+	0	–	0	+	
y	-2	↗	0	↘	-5	↗	3

A. 1 B. – 5 C. – 1 D. 2

Câu 14. Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$ B. $3<m\le 4$ C. $m<-1$ D. $1\le m<3$

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-2x+3\right)e^x$ trên miền $\left[0;1\right]$.

A.2 B. 3 C. 1 D. 4

Câu 16. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4x-x^2-3\sqrt{4x-x^2}$.

A.0 B. 1 C. $-\dfrac{5}{4}$ D. $-\dfrac{9}{4}$

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{4x}+1}}$.

A.1 B. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ D. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 18. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(\sqrt{\cos x}+1)$.

A. 1 B. – 2 C. – 1 D. 2

x	-3		-1		1		2
y'		+	0	−	0	+	
y	-2	↗	0	↘	-5	↗	3

Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-6\sqrt{x^2+1}$.

A.3 B. – 5 C. – 10 D. – 8

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin 2x+3x+1$ trên miền $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A.4 B. 2π C. $\dfrac{3\pi}{2}+1$ D. $\dfrac{5\pi}{2}+1$

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 0.

A. $m=2$. B. $m=6$. C. $m=0$. D. $m=4$.

Câu 22. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+21}{\sqrt{x+2}}$ trên miền $\left[0;+\infty\right)$.

A.6 B. 8 C. 10 D. 12

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\dfrac{4}{3}\cdot 8^x$ trên $\left[-1;0\right]$ bằng

A. $\dfrac{4}{9}$. B. $\dfrac{5}{6}$. C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\dfrac{2}{3}$.

Câu 24. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\left|x\right|}{x^2+9}$ trên $\mathbb{R}$.

A. $\dfrac{1}{6}$ B. 1 C. $\dfrac{1}{9}$ D. 2

Câu 25. Gọi A,B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $\left[2;3\right]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B=\dfrac{13}{2}$.

A. $m=1;m=-2$. B. $m=-2$. C. $m=\pm 2$. D. $m=-1;m=2$.

Câu 26. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4\sin x+2\cos x$ là

A. $2\sqrt{5}$. B. $-2\sqrt{5}$. C. 0. D. 20.

Câu 27. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=f\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

A. 1 B. – 5 C. – 1 D. 2

x	-3		-1		1		2
y'		+	0	−	0	+	
y	-2	↗	0	↘	-5	↗	3

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (MIN, MAX)
LỚP BÀI TOÁN VẬN DỤNG – PHẦN 2

Câu 1. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sqrt{\cos x} + 4$.

A. 15 B. 11 C. 10 D. 12

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 5 - \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x} + \dfrac{9}{\sqrt{x}}$ trên $(0;+\infty)$.

A.10 B. 6 C. 8 D. 12

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \ln^2 x - 4\ln x + 5$ trên miền $\left[e^3;+\infty\right)$.

A.3 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$y = f(\sin x)$.

A. 5 B. 2 C. 3 D. 4

x	$-\infty$		-1		0		1		3
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

Câu 7. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left(x^2 - 6x + 10\right)e^x$ trên miền $[0;1]$.

A. $2e + 6$ B. $5e + 10$ C. $10e + 5$ D. $4e + 8$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20;25)$. B. $(5;6)$. C. $(6;9)$. D. $(2;5)$.

Câu 9. Tìm tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{x + 4}$.

A.2 B. 1 C. 4 D. 3

Câu 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left(x^2 - 6x + 12\right)^2 - 4x^2 + 24x$.

A.45 B. 37 C. 50 D. 29

Câu 11. Tìm tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 3$.

A.5 B. 6 C. 1 D. 2

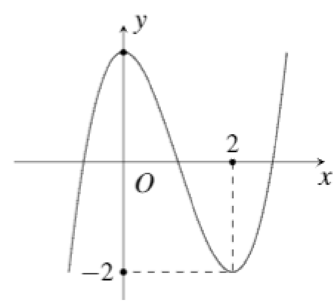
Câu 12. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x + m}{x + 1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = f(\sqrt{4 - x^2})$.

A. 0 B. 2 C. 3 D. – 2



Câu 14. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1. Tính m?

A. $m = -6$. B. $m = -3$. C. $m = -4$. D. $m = -5$.

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\dfrac{9}{8}$. B. $\dfrac{5}{4}$. C. 2. D. 1.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số
$$y=f(2\sin x cosx)+6.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. 1 B. 12

C. 13 D. 14

Câu 17. Tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2(6x-x^2)-3\sqrt{6x-x^2}$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(7;8)$ B. $(4;5)$ C. $(6;7)$ D. $(5;6)$

Câu 18. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2 x-2\log_2 x-4\sqrt{1-\log_2 x}$ với $x\in(0;2]$.

A.3 B. – 2 C. – 1 D. – 4

Câu 20. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$ B. $m>6$ C. $m<1$ D. $3<m\le 6$

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của $m>0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3.

A. $m\in(0;2)$. B. $m\in(0;1)$. C. $m\in(1;+\infty)$. D. $m\in(0;+\infty)$.

Câu 22. Tổng giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2(2x)-5\log_2 x+4$ trên miền $[2;4]$ thuộc khoảng nào sau đây

A. $(7;8)$ B. $(4;5)$ C. $(6;7)$ D. $(5;6)$

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$.

A.3 B. 2 C. 4 D. 1

Câu 24. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<m\le 2$. B. $4<m\le 8$. C. $2<m\le 4$. D. $m>8$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(4\sin x cosx)+10$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. 24 B. 20

C. 18 D. 16

Câu 26. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-3x+2|$ trên đoạn $[-10;10]$ bằng ?

A. 172 B. 0 C. 72 D. $\dfrac{1}{4}$

Câu 27. Cho hàm số $y=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+1$. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

A. $M=\dfrac{7}{8}+\ln 2.$ B. $M=\dfrac{7}{8}-\ln 2.$ C. $M=\ln 2-1.$ D. $M=\dfrac{1}{2}.$

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

A. $m=\sqrt{2}$. B. $m=2+\sqrt{2}$. C. $m=4+\sqrt{2}$. D. $\left[\begin{array}{l} m=2+\sqrt{2} \\ m=4+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (MIN, MAX)
LỚP BÀI TOÁN VẬN DỤNG – PHẦN 3

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1-\cos^2 x}-2$ là:

A. 0 và $\sqrt{2}-1$. B. -1 và $\sqrt{2}-1$. C. -2 và -1. D. -1 và 1.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

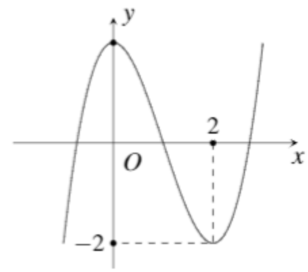
A. $2e^4$ B. $-e^2$ C. $2e^2$ D. $-2e^2$

Câu 3. Nếu hàm số $y=x+m+\sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(2\cos^2 x)$.

A. 0 B. 2 C. 3 D. – 2



Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số $y=\frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m\le 1$. B. $m\ge 1$. C. $m\ge -1$. D. $m\le -1$.

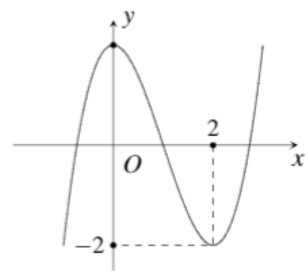
Câu 6. Hàm số $y=1+2\cos^2 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. B. $x_0=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x_0=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. D. $x_0=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(\sqrt{x})$.

A. 0 B. 2 C. 3 D. – 2



Câu 8. Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thoả mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$ B. $2<m\le 4$ C. $m\le 0$ D. $0<m\le 2$

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+4x-4\sqrt{x^2+4x}+1$.

A.2 B. – 2 C. 1 D. – 3

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\sqrt{\sin x+3}-1$ lần lượt là:

A. $\sqrt{2}$ và 2. B. 2 và 4. C. $4\sqrt{2}$ và 8. D. $4\sqrt{2}-1$ và 7.

Câu 11. Tìm hằng số $k>0$ để trên miền $(0;+\infty)$, hàm số $y=9x+\frac{k}{x}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 12.

A. $k=4$ B. $k=10$ C. $k=6$ D. $k=12$

Câu 12. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2}{3}$. B. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{10}{3}$. C. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$.

Câu 13. Cho hàm số $y=ax^3+cx+d,\ a\neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d-11a$.   B. $d-16a$.   C. $d+2a$.   D. $d+8a$.

Câu 14. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=4^{\sin x}-2^{\sin x}+4$.

A.0   B. 6   C. 7   D. 8

Câu 15. Tìm tích giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\log_2^2(4x^2+4)-\log_2(x^2+1)+2$ trên miền $(-\infty;2]$.

A.20   B. 24   C. 18   D. 16

Câu 16. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m>10$.   B. $8<m<10$.   C. $0<m<4$.   D. $4<m<8$.

Câu 17. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-m^2x^3-2x^2-m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16. Tính tích các phần tử của S.

A. 2.   B. -2.   C. -15.   D. -17.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm tổng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(cos3x+1)$.

A. 0   B. 2   C. 3   D. – 2

x	-3		-1		1		2
y'		+	0	–	0	+	
y	-2	↗	0	↘	-5	↗	3

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-m}{x+1}$ trên $[0;2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

A. -5.   B. 1.   C. -3.   D. -8.

Câu 20. Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. 1.   B. -4.   C. 0.   D. 4.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^4-2mx^2+1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. $-\dfrac{13}{3}$.   B. 4.   C. $-\dfrac{14}{3}$.   D. 1.

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left(x^2-4x+5\right)e^x$ trên miền $[0;1]$.

A.1   B. $2e$ C. $3e$ D. e^2

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. -17 B. -16 C. -1 D. 3

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\min\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. -9.   B. 4.   C. 1.   D. -8.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\sqrt{4-\sqrt{x}}\right)$.

A. 0   B. 2   C. 3   D. – 2

x	-3		-1		1		2
y'		+	0	–	0	+	
y	-2	↗	0	↘	-5	↗	3

Câu 1. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{34}{\sqrt{\left(x^3-3x+2m\right)^2+1}}$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8. B. -8. C. -6. D. -1.

Câu 2. Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 1 là

A. -2. B. 4. C. -4. D. 0.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=m^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+4\sqrt{4-x^2}+m+1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

A. $-\dfrac{7}{2}$. B. $\dfrac{5}{2}$. C. $-\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m\neq-2$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\max\limits_{[1;3]}f\left(x\right)=\max\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

B. $\max\limits_{[1;3]}f\left(x\right)=\dfrac{6-m}{4}$ khi $m<-2$.

C. $\min\limits_{[1;3]}f\left(x\right)=\min\left\{\dfrac{2-m}{2};\dfrac{6-m}{4}\right\}$.

D. $\min\limits_{[1;3]}f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}$ khi $m>-2$.

Câu 5. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. B. $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. C. $\left[-1;0\right]$. D. $\left(0;1\right)$.

Câu 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-15x+2m\right|+12x-m$. Giá trị nhỏ nhất của $M=\max\limits_{[-2;3]}f\left(x\right)$ bằng

A. 36. B. 9. C. 25. D. 27.

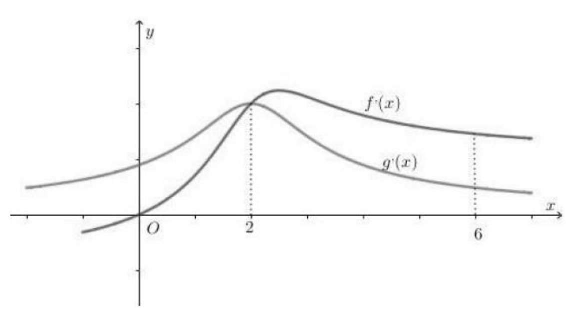
Câu 7. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $\left|2x^3-3x^2+m\right|\leq16,\forall x\in\left[0;3\right]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -65. B. -74. C. -42. D. 87.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;10]}f\left(x\right)=f\left(2\right)=4$. Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+x\right)-x^2+2x+m$. Giá trị của tham số m để $\max\limits_{x\in[0;2]}g\left(x\right)=8$ là

A. 5. B. 4. C. -1. D. 3.

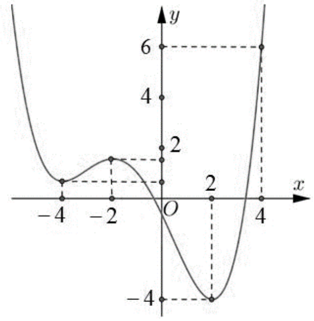
Câu 9. Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)$, $g'\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và $g'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f\left(0\right)-f\left(6\right)<g\left(0\right)-g\left(6\right)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;6\right]$ lần lượt là:

A. $h(6), h(2)$. B. $h(2), h(6)$. C. $h(0), h(2)$. D. $h(2), h(0)$.

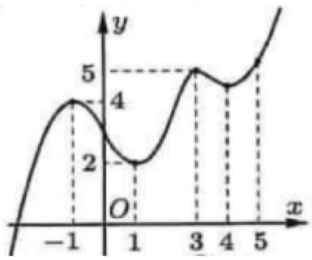
Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right)+m-1\right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

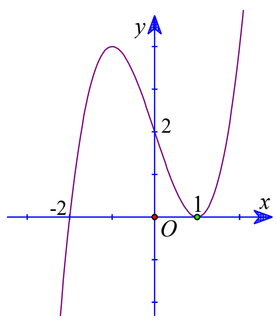
A. 4029. B. 4035. C. 4031. D. 4041.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=3f(\log_2 x-1)+x^3-9x^2+15x+1$ trên đoạn $[1;4]$ bằng:



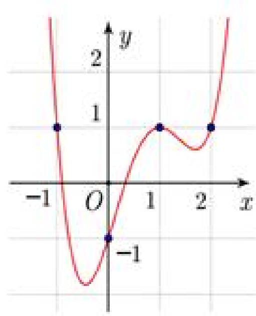
A. 54. B. 7. C. 33. D. 3.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[-5;3]$ bằng



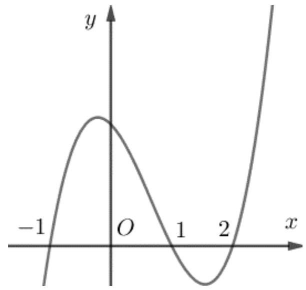
A. $f(-2)$. B. $f(1)$. C. $f(-4)$. D. $f(2)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=-f(2x-1)+2x$ trên đoạn $[0;2]$ bằng



A. $-f(1)+2$. B. $-f(-1)$. C. $-f(2)+3$. D. $-f(3)+4$.

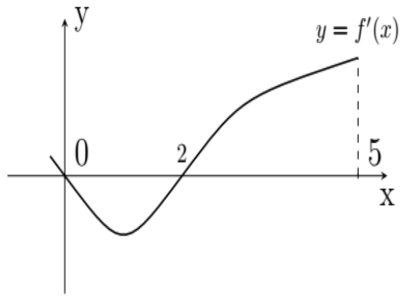
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

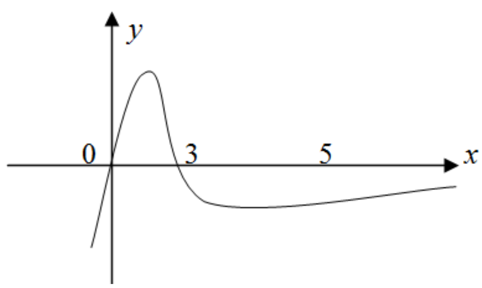
A. $f(1)$. B. $f(-1)$. C. $f(2)$. D. $f(0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là:



A. $f(2)$; $f(5)$. B. $f(0)$; $f(5)$. C. $f(2)$; $f(0)$. D. $f(1)$; $f(5)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



A. $m = f(5), M = f(3)$ B. $m = f(5), M = f(1)$

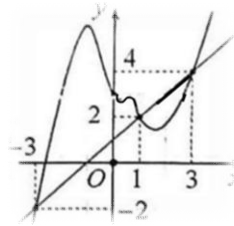
C. $m = f(0), M = f(3)$ D. $m = f(1), M = f(3)$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



A. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$. B. $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$. C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(0)$. D. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. B. 1. C. Vô số. D. 3.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng

A. 3. B. 5. C. 10. D. 2.

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{m\sin x+1}{\cos x+2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1.

A. 4. B. 2. C. 6. D. 8.

Câu 9. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0 B. 6 C. 1 D. 2

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. -16. B. 16. C. -12. D. -2.

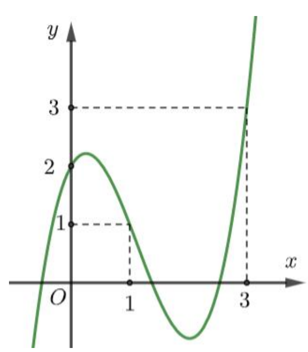
Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 12. Xét hàm số $f(x)=|x^2+ax+b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 2. B. 4. C. -4. D. 3.

Câu 13. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+1\right)-\ln(x^2+8x+16)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. B. $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. C. $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. D. $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

KHẢO SÁT HÀM SỐ LỚP 12 THPT
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (MIN, MAX)
LỚP BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO – PHẦN 3

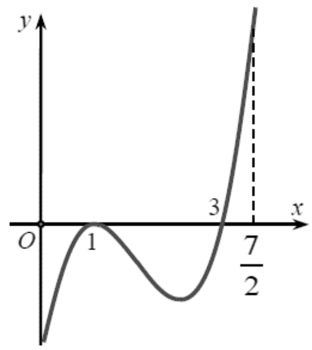
Câu 1. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 180. B. 136. C. 120. D. 210.

Câu 2. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\left|2x^3-15x+m-5\right|+9x$ trên $[0;3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.

A. 48. B. 5. C. 6. D. 62.

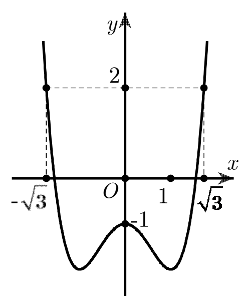
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0=0$. B. $x_0=\frac{7}{2}$. C. $x_0=1$. D. $x_0=3$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(1)$.

B. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f\left(\sqrt{3}\right)$.

D. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(0)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0	↗ ↘	0	↘ ↗	0	↗

A. $f(-1)$. B. $f(0)$. C. $f(2)$. D. $f(1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=3$. Xét hàm số $g(x)=f(3x-1)+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

A. 13. B. -7. C. -13. D. -1.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3, f'(2)=f'(-2018)=0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	–	0	+	

Hàm số $y=f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2015)$. B. $(1;3)$. C. $(-1009;2)$. D. $(-2015;1)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2020$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	–	0	+	

Hàm số $y=f(x+2019)+2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2019)$. B. $(0;2)$. C. $(-2019;0)$. D. $(2019;+\infty)$.

Câu 9. Cho hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và $g(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$. Trên đoạn $[1;4]$, hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm. Biết rằng điểm $A(1;4)$ thuộc đồ thị của hàm số $f(x)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;4]$.

A. $\max\limits_{[1;4]} f(x)=9$. B. $\max\limits_{[1;4]} f(x)=23$. C. $\max\limits_{[1;4]} f(x)=11$. D. $\max\limits_{[1;4]} f(x)=19$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx-c\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ với a,b,c là các số thực dương, biết $f(1)=-3, f(5)=2$. Xét hàm số $g(t)=|3f(3-2t)+2f(3t-2)+m|$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max\limits_{[-1;1]} g(t)=10$. Số phần tử của S là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)>0$ và

$$[f(x)+6x]f(x)=9x^4+3x^2+4, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(2x^2-3x+1)$ trên đoạn $[0;1]$.

A. $\dfrac{5}{2}$. B. $\dfrac{17}{7}$. C. $\dfrac{155}{64}$. D. $\dfrac{167}{69}$.

Câu 12. Cho các hàm số $f(x)=x+3^x$ và $g(x)=x^3-mx^2+(m^2+1)x-3$ với m là tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(2x+f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng

A. 3. B. $\dfrac{7}{2}$. C. $\dfrac{5}{2}$. D. 2.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\left|3e^{4x}-4e^{3x}-24e^{2x}+48e^x+m\right|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;\ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23;10)$ thỏa mãn $A\le 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. -33. B. 0. C. -111. D. -74.

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-6x^3+7x^2+6x+1$.

A. 1 B. 0 C. – 1 D. – 2