

## CHỦ ĐỀ 10: BÀI TOÁN MIN – MAX LOGARIT

### 1. Công thức lôgarit

Giả sử  $a > 0, a \neq 1$  và các số  $A, B, N, \dots > 0$  ta có các công thức sau đây:

$$\bullet \boxed{\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B}.$$

Mở rộng  $\log_a (A_1 A_2 \dots A_N) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \dots + \log_a A_N$ .

$$\bullet \boxed{\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B}. \text{ Hệ quả } \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N.$$

$$\bullet \boxed{\log_a N^\alpha = \alpha \cdot \log_a |N|}$$

$$\bullet \boxed{\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \cdot \log_a N}$$

**Công thức đổi cơ số:** Giả sử  $a, b$  dương và khác 1;  $c, x > 0$  ta có

$$\bullet \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \text{ và } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x.$$

$$\bullet \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x \text{ và } \log_{\sqrt[n]{a}} x = n \cdot \log_a x.$$

### 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $D(f(x))$ xác định và liên tục trên $D$

#### Phương pháp giải

- **Bước 1:** Tính  $y' = f'(x)$ , tìm tất cả các nghiệm  $x_i$  của phương trình  $f'(x) = 0$  và các điểm  $\alpha_i$  làm cho  $f'(x)$  không xác định.

- **Bước 2:**

• *Trường hợp 1:*  $D \in [a; b]$ . Tính các giá trị  $f(a), f(b), f(x_i), f(\alpha_i)$ .

$$\text{Với } x_i, \alpha_i \in [a; b] \longrightarrow \begin{cases} \min_D f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_i), f(\alpha_i)\} \\ \max_D f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_i), f(\alpha_i)\} \end{cases}$$

• *Trường hợp 2:*  $D \notin [a; b] \longrightarrow$  Lập bảng biến thiên suy ra min, max.

**Chú ý:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đơn điệu trên đoạn  $[a; b]$ .

$$\text{Nếu hàm số } y = f(x) \text{ đồng biến với } \forall x \in [a; b] \Rightarrow \boxed{\min_{[a; b]} y = f(a); \max_{[a; b]} y = f(b)}.$$

$$\text{Nếu hàm số } y = f(x) \text{ nghịch biến với } \forall x \in [a; b] \Rightarrow \boxed{\min_{[a; b]} y = f(b); \max_{[a; b]} y = f(a)}.$$

### 3. Các bất đẳng thức quen thuộc

a) Bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực dương:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ .

Mở rộng bất đẳng thức AM – GM cho ba số thực dương:  $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ .

b) Bất đẳng thức Bunhiacopski:  $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$ .

c) Bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ .

**Ví dụ 1:** Cho  $m = \log_a(\sqrt[3]{ab})$ , với  $a, b > 1$  và  $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$ . Khi biểu thức  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của  $m$  bằng

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m = 1$ .                      C.  $m = \frac{1}{2}$ .                      D.  $m = 4$ .

**Lời giải:**

Ta có:  $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a = (\log_a b)^2 + \frac{16}{\log_a b}$

Đặt  $t = \log_a b$  vì  $a, b > 1 \Rightarrow \log_a b = t > 0$

Khi đó  $P = t^2 + \frac{16}{t} = t^2 + \frac{8}{t} + \frac{8}{t} \geq \sqrt[3]{t^2 \cdot \frac{8}{t} \cdot \frac{8}{t}} = 12$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $t^2 = \frac{8}{t} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \log_a b = 2$ .

Lại có  $m = \log_a(\sqrt[3]{ab}) = \log_a(ab)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_a ab = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) = 1$ . **Chọn B.**

**Ví dụ 2:** Cho  $x, y$  là số thực dương thỏa mãn  $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = x + y$ .

- A.  $P_{\min} = 6$ .                      B.  $P_{\min} = 2\sqrt{2} + 3$ .                      C.  $P_{\min} = 3\sqrt{2} + 2$ .                      D.  $P_{\min} = \sqrt{17} + \sqrt{2}$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow \ln(xy) \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2$ .

Mà  $x, y > 0$  suy ra  $y(x-1) \geq x^2 > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ . Khi đó  $y(x-1) \geq x^2 \Leftrightarrow y \geq \frac{x^2}{x-1}$ .

Do đó, biểu thức  $P = x + y = x + \frac{x^2}{x-1} \longrightarrow f(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1}$ .

Xét hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ , có  $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$ .

Phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ .

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra  $\min f(x) = f\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{2}\right) = 3+2\sqrt{2}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  là  $P_{\min} = 3+2\sqrt{2}$ . **Chọn B.**

**Nhận xét.** Vì hàm số  $y = \ln x$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  nên

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \ln f(x) > \ln g(x).$$

**Ví dụ 3:** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log(x+2y) = \log x + \log y$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}} \cdot e^{\frac{y^2}{1+x}}}$ .

A.  $P_{\min} = e^{\frac{5}{8}}$ .

B.  $P_{\min} = e$ .

C.  $P_{\min} = e^{\frac{8}{5}}$ .

D.  $P_{\min} = e^{\frac{1}{2}}$ .

**Lời giải:**

Từ giả thiết, ta có  $\log(x+2y) = \log x + \log y \Leftrightarrow \log(x+2y) = \log(xy) \Leftrightarrow x+2y = xy$ .

Ta có  $P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}} \cdot e^{\frac{y^2}{1+x}}} = e^{\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{1+2y} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{1+x}}$ . Đặt  $\begin{cases} a = \frac{x}{2} \\ b = y \end{cases}$ , giả thiết  $\Leftrightarrow a+b = ab$ .

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được  $a+b = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a+b \geq 4$

Và xét biểu thức  $T = \frac{a^2}{1+2b} + \frac{b^2}{1+2a} \geq \frac{(a+b)^2}{2+2(a+b)} \rightarrow f(t) = \frac{t^2}{t+1}$  với  $t = a+b \geq 4$ .

Xét hàm số  $f(t)$  trên  $[4; +\infty)$ , có  $f'(t) = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} > 0 \Rightarrow f(t)$  là hàm số đồng biến trên  $[4; +\infty)$

Do đó  $f(t) \geq f(4) = \frac{16}{5}$  suy ra  $T \geq \frac{8}{5} \rightarrow P = e^T \geq e^{\frac{8}{5}}$ . **Chọn C**

**Nhận xét.** Bài toán có sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ .

**Ví dụ 4:** Cho  $x, y$  là số thực dương thỏa mãn  $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = 2x - y$ .

A.  $P_{\min} = 4$ .

B.  $P_{\min} = -4$ .

C.  $P_{\min} = 2\sqrt{3}$ .

D.  $P_{\min} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải:**

Điều kiện:  $x > y > 0$ . Từ giả thiết, ta có  $\log_4[(x+y)(x-y)] \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \geq 4$  (\*)

Ta có  $P = 2x - y \Leftrightarrow y = 2x - P$  thế vào (\*), ta được  $x^2 - (2x - P)^2 \geq 4$ .

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x^2 + 4xP - P^2 \geq 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 4xP + P^2 + 4 \leq 0 \quad (*)$$

Để bất phương trình (\*) có nghiệm  $\Delta' = (-2P)^2 - 3(P^2 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq 2\sqrt{3}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là  $P_{\min} = 2\sqrt{3}$ . **Chọn C.**

**Ví dụ 5: [Đề thi THPT Quốc gia 2017]** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn điều kiện  $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của  $P = x + y$ .

A.  $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$ .      B.  $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$ .      C.  $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{21}$ .      D.  $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$ .

**Lời giải:**

Ta có  $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4 \Leftrightarrow \log_3(1-xy) - \log_3(x+2y) = 3xy + x + 2y - 4$

$$\Leftrightarrow 2 - 3xy + \log_3(3 - 3xy) = x + 2y + \log_3(x + 2y)$$

Xét hàm số  $f(t) = t + \log_3 t$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ , có  $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \cdot \ln 3} > 0, \forall t > 0$

Suy ra  $f(t)$  là hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$

Mà  $f(3 - 3xy) = f(x + 2y) \Leftrightarrow 3 - 3xy = x + 2y \Leftrightarrow y = \frac{3-x}{3x+2}$ .

Khi đó, biểu thức  $P = x + y = x + \frac{3-x}{3x+2} = \frac{3x^2 + x + 3}{3x+2} \longrightarrow f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{3x+2}$

Xét hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ , có  $f'(x) = \frac{9x^2 + 12x - 7}{(3x+2)^2}, \forall x > 0$ .

Phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 9x^2 + 12x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}-2}{3}$ .

Tính  $f\left(\frac{\sqrt{11}-2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}, f(0) = \frac{3}{2}$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \longrightarrow \min_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là  $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$ . **Chọn D.**

**Ví dụ 6:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 > 1$  và  $\log_{x^2+y^2}(x+2y) \geq 1$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 2x + y$ . Tính  $M + m$ .

A.  $P_{\min} = 4$ .      B.  $P_{\min} = 4$ .      C.  $P_{\min} = 2\sqrt{3}$ .      D.  $P_{\min} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải:**

Vì  $x^2 + y^2 > 1$  suy ra  $y = \log_{x^2+y^2} f(x)$  là hàm số đồng biến trên tập xác định.

$$\text{Khi đó } \log_{x^2+y^2} (x+2y) \geq \log_{x^2+y^2} (x^2+y^2) \Leftrightarrow x+2y \geq x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 2y \leq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + (y^2 - 2y + 1) \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 \leq \frac{5}{4}$$

$$\text{Xét biểu thức } P, \text{ ta có } P = 2x + y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + y - 1 + 2 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + y - 1 = P - 2.$$

$$\text{Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, có } \left[2\left(x - \frac{1}{2}\right) + y - 1\right]^2 \leq (2^2 + 1^2) \cdot \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2\right]^2$$

$$\Leftrightarrow (P-2)^2 \leq 5 \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq P-2 \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq P \leq \frac{9}{2} \longrightarrow \begin{cases} P_{\min} = -\frac{1}{2} \\ P_{\max} = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tổng } M + m = \frac{9}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 4. \text{ Chọn C.}$$

**Ví dụ 7: [Đề thi Thử nghiệm 2017 – Bộ GD&ĐT]** Xét các số thực  $a, b$  thỏa mãn điều kiện  $a > b > 1$ . Tìm

$$\text{giá trị nhỏ nhất } P_{\min} \text{ của biểu thức } P = \log_a^2 \left(\frac{a^2}{b}\right) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b}\right).$$

A.  $P_{\min} = 19$ .

B.  $P_{\min} = 13$ .

C.  $P_{\min} = 14$ .

D.  $P_{\min} = 15$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \log_a^2 \left(\frac{a^2}{b}\right) = 4 \left(\log_a \frac{a^2}{b}\right)^2 = \frac{4}{\left(\log_a \frac{a}{b}\right)^2} = \frac{4}{(\log_a a - \log_a b)^2} = \frac{4}{(1 - \log_a b)^2}.$$

$$\text{Khi đó biểu thức } P = \frac{4}{(1 - \log_a b)^2} + 3 \log_b a - 3 = \frac{4}{(1 - \log_a b)^2} + \frac{3}{\log_a b} - 3.$$

$$\text{Đặt } t = \log_a b \text{ với } \begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \Rightarrow t > 0 \text{ suy ra } P = f(t) = \frac{4}{(1-t)^2} + \frac{3}{t} - 3.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t), \text{ có } f'(t) = -\frac{8}{(t-1)^3} - \frac{3}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Tính } f\left(\frac{1}{3}\right) = 15, \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = +\infty \text{ và } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = +\infty.$$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(t)$  là 15.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là  $P_{\min} = 15$ . **Chọn D.**

**Ví dụ 8:** Cho các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a > 1, b > 1$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \frac{27}{2}(2\log_{ab} a + \log_{ab} b)^2 + 4\log_a ab$ .

A.  $P_{\min} = 36$ .

B.  $P_{\min} = 24$ .

C.  $P_{\min} = 48$ .

D.  $P_{\min} = 32$ .

**Lời giải:**

Xét biểu thức  $P$ , ta có  $P = \frac{27}{2} \left( \frac{2}{\log_a ab} + \frac{1}{\log_b ab} \right) + 4\log_a b + 4$ .

Đặt  $t = \log_a b$  ( $t > 0$ )  $\Leftrightarrow \log_b a = \frac{1}{t}$ . Khi đó  $P = \frac{27}{2} \left( \frac{2}{t+1} + \frac{t}{t+1} \right)^2 + 4t + 4$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{27}{2} \left( \frac{t+2}{t+1} \right)^2 + 4t$  với  $t \in (0; +\infty)$ , có  $f'(t) = \frac{(t-2)(2t+5)^2}{(t+1)^3} = 0 \Leftrightarrow t = 2$ .

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng  $f(t)$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $f(2) = 32 \Rightarrow P_{\min} = 36$ . **Chọn A.**

**Ví dụ 9:** Cho hai số thực  $a \geq b > 1$ . Biết rằng biểu thức  $T = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$  đạt giá trị lớn nhất là  $M$  khi có số thực  $m$  sao cho  $b = a^m$ . Tính  $P = M + m$ .

A.  $M - m = \frac{23}{8}$ .

B.  $M - m = \frac{81}{16}$ .

C.  $M - m = \frac{19}{8}$ .

D.  $M - m = \frac{51}{16}$ .

**Lời giải:**

Xét biểu thức  $T$ , ta có  $T = 2\log_a ab + \sqrt{\log_a a - \log_a b} = 2\log_a b + \sqrt{1 - \log_a b} + 2$ .

Đặt  $t = \log_a b$  với  $t \in (-\infty; 1]$ , khi đó  $T = f(t) = 2t + \sqrt{1-t} + 2$ .

Xét hàm số  $f(t)$  trên khoảng  $(-\infty; 1]$ , có  $f'(t) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{1-t}}$ ;  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15}{16}$ .

Tính  $f(1) = 4, f\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{33}{8}$  và  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$ .

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra giá trị lớn nhất của hàm số  $f(t)$  là  $\frac{33}{8}$ .

Vậy  $M = \frac{33}{8}$  và  $b = a^m \Leftrightarrow m = \log_a b = t = \frac{15}{16} \Rightarrow M - m = \frac{51}{16}$ . **Chọn D.**

**Ví dụ 10:** Cho  $a, b$  là các số thực dương khác 1. Biết rằng biểu thức  $P = \frac{\log_a \frac{b}{a} + \log_b a}{\log_a(ab) + \log_b a}$  đạt giá trị nhỏ

nhất bằng  $M$  khi  $b = a^m$ . Tính  $M + m$ .

A.  $M + m = 2$ .

B.  $M + m = \frac{2}{3}$ .

C.  $M + m = \frac{4}{3}$ .

D.  $M + m = 0$ .

**Lời giải:**

Xét biểu thức  $P$ , ta có  $P = \frac{\log_a b - \log_a a + \log_b a}{\log_a a + \log_a b + \log_b a} = \frac{\log_a b + \log_b a - 1}{\log_a b + \log_b a + 1}$ .

Đặt  $t = \log_a b \Leftrightarrow \log_b a = \frac{1}{t}$  với  $t \in \mathbb{R}$ , khi đó  $P = f(t) = \frac{t + \frac{1}{t} - 1}{t + \frac{1}{t} + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$ .

Xét hàm số  $f(t)$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ , có  $f'(t) = \frac{2(t^2 - 1)}{(t^2 + t + 1)^2}$ ,  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$ .

Tính  $f(1) = \frac{1}{3}$ ,  $f(-1) = 3$  và  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1$  suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(t)$  bằng  $\frac{1}{3}$ .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $t = 1 \Leftrightarrow \log_a b = 1 \Leftrightarrow a = b$ .

Vậy  $M = \frac{1}{3}$ ,  $b = a^m = a \Rightarrow m = 1 \rightarrow M + m = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ . **Chọn C.**

**Ví dụ 11:** Cho  $a, b$  là hai số thực dương thỏa mãn  $b^2 = 3ab + 4a^2$  và  $a \in [4; 2^{32}]$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \log_{\frac{b}{8}} 4a + \frac{3}{4} \log_2 \frac{b}{4}$ . Tính tổng  $T = M + m$ .

A.  $T = \frac{3701}{124}$ .

B.  $T = \frac{7}{2}$ .

C.  $T = \frac{2957}{124}$ .

D.  $T = \frac{1897}{62}$ .

**Lời giải:**

Từ giả thiết, ta có  $b^2 = 3ab + 4a^2 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3 \cdot \frac{a}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = 4a$ .

Khi đó  $P = \log_{\frac{b}{8}} 4a + \frac{3}{4} \log_2 \frac{b}{4} = \log_{\frac{b}{8}} b + \frac{3}{4} (\log_2 b - \log_2 4) = \frac{1}{\log_b \frac{b}{8}} + \frac{3}{4} \log_2 b - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{1 - \log_b 8} + \frac{3}{4} \log_2 b - \frac{3}{2} = \frac{1}{1 - \frac{3}{\log_2 b}} + \frac{3}{4} \log_2 b - \frac{3}{2} = \frac{\log_2 b}{\log_2 b - 3} + \frac{3}{4} \log_2 b - \frac{3}{2}$ .

Đặt  $t = \log_2 b$  với  $a \in [4; 2^{32}] \Rightarrow 16 \leq b \leq 2^{34} \Rightarrow 4 \leq \log_2 b \leq 34 \Rightarrow t \in [4; 34]$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t}{t-3} + \frac{3}{4}t$  với  $t \in [4; 34]$ , ta có  $f'(t) = \frac{3(t^2 - 6t + 5)}{4(t-3)^2}$ ;  $\forall t \in [4; 34]$ .

Phương trình  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq t \leq 34 \\ t^2 - 6t + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow f(4) = 7, f(5) = \frac{25}{4}, f(34) = \frac{1649}{62}.$

Suy ra  $\begin{cases} \max_{[4;34]} f(t) = f(34) = \frac{1649}{62} \\ \min_{[4;34]} f(t) = f(5) = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = P_{\max} = \frac{778}{31} \\ m = P_{\min} = \frac{19}{4} \end{cases} \Rightarrow T = M + m = \frac{3701}{124}. \text{ Chọn A.}$

**Ví dụ 12:** Cho các số thực  $a, b$  thỏa mãn điều kiện  $ab = 4, a \geq \frac{1}{2}, b \geq 1$ . Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu

thức  $P = \left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)^3 + \left(\log_{\frac{1}{2}} b - 1\right)^3.$

A.  $P_{\max} = -63.$       B.  $P_{\max} = -6.$       C.  $P_{\max} = -\frac{27}{4}.$       D.  $P_{\max} = 0.$

**Lời giải:**

Đặt  $x = \log_{\frac{1}{2}} a$  và  $y = \log_{\frac{1}{2}} b$  suy ra

$$x + y = \log_{\frac{1}{2}} a + \log_{\frac{1}{2}} b = \log_{\frac{1}{2}} (ab) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2.$$

Khi đó  $P = x^3 + (y-1)^3$  mà  $x + y = -2 \Leftrightarrow y = -x - 2 \Rightarrow P = x^3 + (-x-3)^3 = -9x^2 - 27x - 27.$

$$= -9(x^2 + 3x + 3) = -9\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{27}{4} = -9\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} \leq -\frac{27}{4} \Rightarrow P_{\max} = -\frac{27}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} a = -\frac{3}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}} b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}; b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \text{ Chọn C.}$

**Ví dụ 13:** Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn  $0 < a < b < 1$  và biểu thức  $P = \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a} - 4 \log_a \left(a + \frac{b}{4}\right)$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $S = a + b$ .

A.  $S = \frac{5}{16}.$       B.  $S = \frac{5}{8}.$       C.  $S = \frac{5}{4}.$       D.  $S = \frac{5}{32}.$

**Lời giải:**

Ta có  $\log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log_{\frac{a}{b}} a = \frac{1}{2 \log_a \frac{a}{b}} = \frac{1}{2(1 - \log_a b)}.$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có  $a + \frac{b}{4} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{b}{4}} = \sqrt{ab}.$

$$\text{Do } a < 1 \Rightarrow \log_a \left( a + \frac{b}{4} \right) \leq \log_a \sqrt{ab} \Rightarrow -4 \log_a \left( a + \frac{b}{4} \right) \geq -4 \log_a \sqrt{ab} = -2(1 + \log_a b).$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{2(1 - \log_a b)} - 2(1 + \log_a b) = \frac{1}{2(1-x)} - 2(1+x) = f(x), \text{ với } x = \log_a b.$$

$$\text{Do } 0 < a < b < 1 \Rightarrow 0 < \log_a b < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$\text{Xét trên khoảng } (0;1) \text{ có } f'(x) = -2 + \frac{1}{2(1-x)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = -2. \text{ Vậy } P_{\min} = \min_{(0;1)} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{4} \\ \log_a b = x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{16} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a + b = \frac{5}{16}. \text{ Chọn A.}$$

**Ví dụ 14:** Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{4} < a < b < 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức

$$P = \log_b \left( a - \frac{1}{4} \right) + \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a}.$$

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{9}{2}$ .

C.  $\frac{19}{4}$ .

D.  $\frac{7}{2}$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a} = \frac{1}{2 \log_a \frac{a}{b}} = \frac{1}{2(1 - \log_a b)}.$$

$$\text{Và } a^2 - a + \frac{1}{4} = \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - \frac{1}{4} \leq a^2 \Rightarrow \log_b \left( a - \frac{1}{4} \right) \geq \log_b a^2 = \frac{2}{\log_a b}, \text{ với } b \in \left( \frac{1}{4}; 1 \right).$$

$$\text{Vậy } P = \log_b \left( a - \frac{1}{4} \right) + \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a} \geq \frac{2}{\log_a b} + \frac{1}{2(1 - \log_a b)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(1-x)} = f(x), \text{ với } x = \log_a b.$$

$$\text{Do } \frac{1}{4} < a < b < 1 \Rightarrow 0 < \log_a b < 1 \Rightarrow x \in (0;1). \text{ Xét } f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(1-x)} \text{ trên } (0;1), \text{ có}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)^2} = 0 \Leftrightarrow 4(1-x)^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } P \geq f(x) \geq f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{2}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } \Leftrightarrow \log_a b = x = \frac{2}{3}. \text{ Chọn B.}$$

**Ví dụ 15:** Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn  $\frac{1}{6} < a < b < 1$ . Biết rằng biểu thức  $P = \frac{1}{2} \log_{\frac{b}{a}}^2 \sqrt{a} - \log_a \frac{b^2}{a^3}$  đạt giá

trị nhỏ nhất bằng  $m$  khi có số thực  $n$  sao cho  $b = a^n$ . Tính  $S = m + n$ .

A.  $S = \frac{1}{2}$ .

B.  $S = \frac{1}{2}$ .

C.  $S = -\frac{3}{2}$ .

D.  $S = \frac{5}{2}$ .

A. T

B. T

C. T

D. T

**Lời giải:**

Ta có  $\log_{\frac{b}{a}}^2 \sqrt{a} = \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{b}{a}}^2 a = \frac{1}{4 \log_a^2 \frac{b}{a}} = \frac{1}{4(\log_a b - 1)^2}$ ,  $\log_a \frac{b^2}{a^3} = 2 \log_a b - 3$ .

Vậy  $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4(\log_a b - 1)^2} - 2 \log_a b + 3 = \frac{1}{8(x-1)^2} - 2x + 3 = f(x)$ , với  $x = \log_a b$ .

Do  $0 < a < b < a \Rightarrow 0 < \log_a b < 1 \Rightarrow x \in (0; 1)$ .

Xét  $f(x) = \frac{1}{8(x-1)^2} - 2x + 3$  trên  $(0; 1)$ , có

$f'(x) = -\frac{1}{4(x-1)^3} - 2$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{4(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Suy ra  $P = f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$ . Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow \log_a b = x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = a^{\frac{1}{2}}$ .

Vậy  $m = \frac{5}{2}$ ,  $n = \frac{1}{2} \Rightarrow S = m + n = 3$ . **Chọn B.**

**Ví dụ 16:** Gọi  $a, b, c$  là ba số thực khác 0 và thay đổi thỏa mãn điều kiện  $3^a = 5^b = 15^{-c}$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c)$ .

A.  $-3 - \log_5 3$ .

B.  $-4$ .

C.  $-2 - \sqrt{3}$ .

D.  $-2 - \log_3 5$ .

**Lời giải:**

Ta có  $3^a = 5^b = 15^{-c} = t \Leftrightarrow \begin{cases} a = \log_3 t \\ b = \log_5 t \\ -c = \log_{15} t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \log_t 3; \frac{1}{b} = \log_t 5; -\frac{1}{c} = \log_t 15$ .

Mặt khác  $\log_t 3 + \log_t 5 = \log_t (3 \cdot 5) = \log_t 15 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$ .

Khi đó  $P = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) - 4(a + b + c) = (a + b + c)^2 - 4(a + b + c)$

$= (a + b + c)^2 - 2 \cdot 2(a + b + c) + 2^2 - 4 = (a + b + c - 2)^2 - 4 \geq -4 \Rightarrow P_{\min} = -4$ . **Chọn B.**

**Ví dụ 17:** Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn điều kiện  $a > 0, 0 < b < 2$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \frac{(2b)^a}{(2^a - b^a)^2} + \frac{2^a + 2b^a}{2b^a}$ .

A.  $P_{\min} = \frac{9}{4}$ .

B.  $P_{\min} = \frac{7}{4}$ .

C.  $P_{\min} = \frac{13}{4}$ .

D.  $P_{\min} = 4$ .

**Lời giải:**

Ta có  $P = \frac{(2b)^a}{(2^a - b^a)^2} + \frac{2^a + 2b^a}{2b^a} = \frac{2^a \cdot b^a}{(2^a)^2 - 2 \cdot 2^a \cdot 2^b + (b^a)^2} + \frac{2^a}{2b^a} + 1$ .

Đặt  $t = \frac{2^a}{b^a} = \left(\frac{2}{b}\right)^a$ , vì  $b \in (0; 2) \Leftrightarrow \frac{2}{b} > 1$  và  $a > 0$  suy ra  $\left(\frac{2}{b}\right)^a > 1 \Leftrightarrow t > 1$ .

Khi đó  $\frac{2^a \cdot b^a}{(2^a)^2 - 2 \cdot 2^a \cdot 2^b + (b^a)^2} = \frac{\left(\frac{2}{b}\right)^a}{\left(\frac{2}{b}\right)^a - 2 \cdot \left(\frac{2}{b}\right)^a + 1} = \frac{t}{t^2 - 2t + 1} \rightarrow P = \frac{t}{t^2 - 2t + 1} + \frac{t}{2} + 1$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t}{t^2 - 2t + 1} + \frac{t}{2}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ , có  $f'(t) = \frac{t^3 - 3t^2 + t - 3}{2(t-1)^3}$ ,  $\forall t > 1$ .

Phương trình  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t^2(t-3) + t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$ .

Tính  $f(3) = \frac{9}{4}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = +\infty$  và  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$  suy ra  $\min_{(1; +\infty)} f(t) = f(3) = \frac{9}{4}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  là  $P_{\min} = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$ . **Chọn C.**

**Ví dụ 18:** Cho  $x, y$  là hai số thực dương thỏa mãn  $5 + 16 \cdot 4^{x^2 - 2y} = (5 + 16^{x^2 - 2y}) \cdot 7^{2y - x^2 + 2}$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \frac{2xy + 16}{x}$ .

A.  $P_{\min} = 16$ .

B.  $P_{\min} = 8$ .

C.  $P_{\min} = 12$ .

D.  $P_{\min} = 10$ .

**Lời giải:**

Đặt  $t = x^2 - 2y$ , khi đó giả thiết  $\Leftrightarrow 5 + 16 \cdot 4^t = (5 + 16^t) \cdot 7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{5 + 4^{t+2}}{7^{t+2}} = \frac{5 + 4^{2t}}{7^{2t}}$ .

Xét hàm số  $f(a) = \frac{5 + 4^a}{7^a} = 5 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^a + \left(\frac{4}{7}\right)^a$ , có  $f'(a) = 5 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^a \cdot \ln\left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)^a \cdot \ln\left(\frac{4}{7}\right) < 0, \forall a \in \mathbb{R}$ .

Suy ra  $f(a)$  là hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  mà  $f(t+2) = f(2t) \Leftrightarrow t+2 = 2t \Leftrightarrow t = 2$ .

Do đó  $x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow 2y = x^2 - 2 \rightarrow P = \frac{x \cdot (x^2 - 2) + 16}{x} = x^2 + \frac{16}{x} - 2 = f(x)$ .

Xét hàm số  $f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 2$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ , có  $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

Tính  $f(2) = 10$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  suy ra  $\min_{(0; +\infty)} f(x) = f(2) = 10$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  là  $P_{\min} = 10$ . **Chọn D.**

**Ví dụ 19:** Cho hai số thực  $a > 1$ ,  $b > 1$  thỏa mãn phương trình  $a^x \cdot b^{x^2-1} = 1$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ .

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = \left( \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$  thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.  $\left( 1; \frac{3}{2} \right)$ .      B.  $\left( 2; \frac{5}{2} \right)$ .      C.  $\left( \frac{9}{2}; 5 \right)$ .      D.  $\left( \frac{7}{2}; 4 \right)$ .

**Lời giải:**

Ta có  $a^x \cdot b^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \log_b (a^x \cdot b^{x^2-1}) = \log_b 1 \Leftrightarrow x^2 + x \cdot \log_a b - 1 = 0$  (\*)

Phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta = (\log_a b)^2 + 4 > 0$  (luôn đúng).

Khi đó, theo hệ thức Viet ta được  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\log_a b \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases} \longrightarrow S = 4 \log_a b + \frac{1}{\log_a^2 b}$ .

Lại có  $4 \log_a b + \frac{1}{\log_a^2 b} = 2 \log_a b + 2 \log_a b + \frac{1}{\log_a^2 b} \geq 3 \sqrt[3]{4 \log_a^2 b \cdot \frac{1}{\log_a^2 b}} = 3 \sqrt[3]{4}$

Suy ra  $S \geq 3 \sqrt[3]{4}$ . Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow 2 \log_a b = \frac{1}{\log_a^2 b} \Leftrightarrow (\log_a b)^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $S$  là  $3 \sqrt[3]{4} \in \left( \frac{9}{2}; 5 \right)$ . **Chọn C.**

**Nhận xét:**

- Bài toán áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số thực dương  $\boxed{a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc}}$
- Với điều kiện  $a > 1$ ,  $b > 1 \longrightarrow \log_a b > 0$  nên áp dụng được bất đẳng thức AM – GM.

**Ví dụ 20:** Cho  $x > 0$ ,  $y > 0$  thỏa mãn  $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$ .

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 2y - 3x$ .

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $\frac{7}{8}$ .      C.  $\frac{3}{4}$ .      D.  $\frac{5}{6}$ .

**Lời giải:**

Ta có  $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2018^{2(x^2-y+1)} = (2x+y) \cdot 2018^{2(2x+y)}$  (\*).



Đặt  $t = \frac{x}{y} \in (0; 4]$  khi đó  $P = f(t) = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t+2)$ .

Xét hàm số  $f(t) = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t+2)$  trên  $(0; 4]$ , có  $f'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2}$ ;

Dựa vào bảng biến thiên, ta được  $\min_{(0;4]} f(4) = f(4) = \frac{27}{6} + \ln 6$

Do đó  $\min P = \frac{27}{6} + \ln 6 = a + \ln b \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{27}{6} \\ b = 6 \end{cases}$ . Vậy  $a.b = 6 \cdot \frac{27}{6} = 81$ . **Chọn D.**



**Câu 8:** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $(x+y)^3 + x + y + \log_2 \frac{x+y}{1-xy} = 8(1-xy)^3 - 2xy + 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + 3y$ .

- A.  $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{15}+3}{2}$ .      C.  $\sqrt{15}-2$ .      D.  $\frac{2\sqrt{15}+3}{6}$ .

**Câu 9:** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = -y^2 + 3y + x - 3\sqrt{1+x}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x - 100y$ .

- A. -2499.      B. -2501.      C. -2500.      D. -2490.

**Câu 10:** Cho các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $\log_3 \frac{2-ab}{a+b} = 3ab + a + b - 7$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = a + 5b$ .

- A.  $\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$ .      B.  $\frac{4\sqrt{95}+15}{12}$ .      C.  $\frac{3\sqrt{95}-16}{3}$ .      D.  $\frac{5\sqrt{95}-21}{3}$ .

**Câu 11:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $\log_{x^2+y^2+1} (2x-4y) = 1$ .

Tính  $P = \frac{x}{y}$  khi biểu thức  $S = 4x + 3y - 5$  đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $P = \frac{8}{5}$ .      B.  $P = \frac{9}{5}$ .      C.  $P = -\frac{13}{4}$ .      D.  $P = \frac{17}{44}$ .

**Câu 12:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $xy \leq 4y - 1$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = \frac{6y}{x} + \ln \left( \frac{x+2y}{y} \right)$ .

- A.  $24 + \ln 6$ .      B.  $12 + \ln 4$ .      C.  $\frac{3}{2} + \ln 6$ .      D.  $3 + \ln 4$ .

**Câu 13:** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log x + \log y + 1 \geq \log(x+y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = x + 3y$ .

- A.  $\frac{1+\sqrt{3}}{10}$ .      B.  $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ .      C.  $\frac{3+\sqrt{3}}{30}$ .      D.  $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 14:** Cho  $x, y$  là hai số thực dương thỏa mãn  $\log x + \log y \geq \log(x^3 + y)$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = 2x + y$  là

- A.  $2\sqrt{2}-2$ .      B.  $\frac{3}{8}$ .      C.  $4+4\sqrt{2}$ .      D.  $3+2\sqrt{2}$ .

**Câu 15:** Cho hai số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 > 1$  và  $\log_{a^2+b^2} (a+b) \geq 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2a + 4b - 3$  là

- A.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{10}$ .                      C.  $2\sqrt{10}$ .                      D.  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

**Câu 16:** Cho hàm số  $x, y$  thay đổi thỏa mãn  $xy = 4, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \log_2^2 x + (\log_2 y - 1)^2$ . Tính  $S = M + 2m$ .

- A.  $S = 6$ .                      B.  $S = 11$ .                      C.  $S = \frac{21}{2}$ .                      D.  $S = \frac{11}{2}$ .

**Câu 17:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn điều kiện  $\log(x + 3y) + \log(x - 3y) = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = x - |y|$ .

- A.  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ .                      B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .                      C.  $\sqrt{10}$ .                      D. 1.

**Câu 18:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn điều kiện  $\log(x + 3y) + \log(x - 3y) = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = x - 2|y| + 1$ .

- A.  $\sqrt{10} + 1$ .                      B.  $\frac{5\sqrt{2} - 3}{2}$ .                      C.  $\frac{3 + 5\sqrt{2}}{3}$ .                      D.  $\frac{3 + 2\sqrt{5}}{3}$ .

**Câu 19:** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_2 x + \log_2 y = \log_4(x + y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = x^2 + y^2$ .

- A.  $2\sqrt[3]{4}$ .                      B.  $2\sqrt{2}$ .                      C. 4.                      D.  $4\sqrt[3]{2}$ .

**Câu 20:** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(x + y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = x^2 + y^2$ .

- A. 8.                      B. 4.                      C. 16.                      D.  $8\sqrt{2}$ .

**Câu 21:** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3$ . Biết giá trị lớn nhất của biểu thức

$S = |x - y| + |x^3 - y^3|$  là  $\frac{a\sqrt{6}}{b}$  với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $T = a + 2b$ .

- A.  $T = 25$ .                      B.  $T = 34$ .                      C.  $T = 32$ .                      D.  $T = 41$ .

**Câu 22:** Với  $a, b, c > 1$ . Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \log_a(bc) + \log_b(ca) + 4\log_c(ab)$  là

- A. 6.                      B. 12.                      C. 10.                      D. 11.

**Câu 23:** Cho các số thực  $a, b, c$  lớn hơn 1 thỏa mãn  $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = 10\log_2^2 a + 10\log_2^2 b + \log_2^2 c$ .

- A. 4.                      B. 3.                      C.  $\frac{9}{2}$ .                      D.  $\frac{7}{2}$ .

**Câu 24:** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $5\log_2^2 a + 16\log_2^2 b + 27\log_2^2 c = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $S = \log_2 a \log_2 b + \log_2 b \log_2 c + \log_2 c \log_2 a$ .

- A.  $\frac{1}{16}$ . Với  $a, b, c > 1$     B.  $\frac{1}{12}$ .    C.  $\frac{1}{9}$ .    D.  $\frac{1}{8}$ .

**Câu 25:** Với  $a, b, c > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \log_a(bc) + 3\log_b(ca) + 4\log_c(ab)$ .

- A. 16.    B.  $6 + 4\sqrt{3}$ .    C.  $4 + 6\sqrt{3}$ .    D.  $8 + 4\sqrt{3}$ .

**Câu 26:** Cho các số thực  $a, b, c > 1$ . Tính  $\log_b(ca)$  khi biểu thức  $S = \log_a(bc) + 2\log_b(ca) + 9\log_c(ab)$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $2\sqrt{2}$ .    B.  $\frac{8(2\sqrt{2})-1}{7}$ .    C.  $3 + \sqrt{2}$ .    D.  $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$ .

**Câu 27:** Cho các số thực dương  $a, b, c$  khác 1 thỏa mãn  $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{a} - 2\log_b \frac{c}{b} - 3$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \log_a b - \log_b c$ . Tính  $S = 2m + 3M$ .

- A.  $S = \frac{2}{3}$ .    B.  $S = \frac{1}{3}$ .    C.  $S = 3$ .    D.  $S = 2$ .

## LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1:** Ta có  $3 + \ln \frac{x+y+1}{3xy} = 9xy - 3x - 3y \Leftrightarrow \ln(x+y+1) + 3(x+y+1) = \ln(3xy) + 9xy$

Xét hàm số  $f(t) = \ln t + 3t$  ( $t > 0$ ) ta có:  $f'(t) = \frac{1}{t} + 3 > 0$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ )

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$

Ta có:  $f(x+y+1) = f(3xy) \Leftrightarrow x+y+1 = 3xy$

Do  $x, y > 0 \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$  (BĐT AM - GM)

$\Rightarrow 3xy = x+y+1 \geq 2\sqrt{xy} + 1 \Leftrightarrow 3xy - 2\sqrt{xy} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3\sqrt{xy} + 1)(\sqrt{xy} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq 1 \Leftrightarrow xy \geq 1$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = 1$ . **Chọn D.**

**Câu 2:** Ta có:  $5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$

$\Leftrightarrow 5^{x+2y} + 3^{1-xy} + x + 1 = 5^{xy-1} + 3^{-x-2y} + xy - 2y$

$\Leftrightarrow 5^{x+2y} - 3^{-x-2y} + x + 2y = 5^{xy-1} - 3^{1-xy} + xy - 1$  (\*)

Xét hàm số  $f(t) = 5^t - 3^{-t} + t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ta có:  $f'(t) = 5^t \ln 5 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ )

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow f(x+2y) = f(xy-1) \Leftrightarrow x+2y = xy-1$

Lại có:  $x+2y \geq 2\sqrt{2xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{(x+2y)^2}{8}$  nên ta có:  $x+2y = xy-1 \leq \frac{(x+2y)^2}{8} - 1$

Khi đó  $\frac{S^2}{8} - S - 1 \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 4 + 2\sqrt{6}$ . **Chọn B.**

**Câu 3:** Do  $a, b > 0 \Rightarrow 1 - ab > 0$

Khi đó ta có:  $\log_2(1-ab) - \log_2(a+b) = 2ab + a + b - 3$

$\Leftrightarrow \log_2(1-ab) + \log_2 2 + 2 - 2ab = \log_2(a+b) + a + b$

$\Leftrightarrow \log_2(2-2ab) + 2 - 2ab = \log_2(a+b) + a + b$  (\*)

Xét hàm số  $f(t) = \log_2 t + t$  ( $t > 0$ ) ta có:  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$  ( $\forall t > 0$ )

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$

Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow f(2-2ab) = f(a+b) \Leftrightarrow 2-2ab = a+b \Leftrightarrow 2-a = b(2a+1) \Leftrightarrow b = \frac{2-a}{2a+1}$

Khi đó:  $P = a + \frac{4-2a}{2a+1} = g(a)$  (với  $a > 0$ ) suy ra  $g'(a) = 1 - \frac{10}{(2a+1)^2} = 0 \xrightarrow{a > 0} \Leftrightarrow 2a+1 = \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{10}-1}{2} \Rightarrow P_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{10}-1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}. \text{ Chọn A.}$$

**Câu 4:**  $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1 \Leftrightarrow 11x+20y-40=2x^2+xy+3y^2$

Lại có:  $y = S.x \Rightarrow 11x + 20Sx - 40 = 2x^2 + Sx^2 + 3S^2x^2$

$$\Leftrightarrow (2+S+3S^2)x^2 - (20S+11)x + 40 = 0$$

Điều kiện để tồn tại  $x > 0$  là: 
$$\begin{cases} \Delta = (20S+11)^2 - 160(2+S+3S^2) \geq 0 \\ 20S+11 > 0 \\ 40 > 0 \end{cases} \quad (*) \text{ (Vì } 2+S+3S^2 > 0 \text{)}$$

Do  $S > 0$  nên  $(*) \Leftrightarrow 80S^2 - 280S + 199 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{20}(35 - \sqrt{230}) \leq S \leq \frac{1}{20}(35 + \sqrt{230})$

Do đó  $a+b = S_{\min} + S_{\max} = \frac{7}{2}$ . **Chọn D.**

**Câu 5:** Do  $x^2 + y^2 + 2 > 1 (\forall x; y)$  nên ta có:  $\log_{x^2+y^2+2}(x+y+3) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \leq x + y + 3$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y - 1 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{3}{2}$$

Đặt  $a = x - \frac{1}{2}$ ;  $b = y - \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 \leq \frac{3}{2}$

Lại có:  $S = 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} = 3a + 4b - \frac{5}{2} \leq \sqrt{(3^2+4^2)(a^2+b^2)} - \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{6}-5}{2}$ .

Vậy  $S_{\min} = \frac{5\sqrt{6}-5}{2}$ . **Chọn D.**

**Câu 6:**  $\log x + \log y \geq \log(x+y^2) \Leftrightarrow xy \geq x+y^2 \Leftrightarrow x(y-1) \geq y^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} y > 1 \\ x \geq \frac{y^2}{y-1} \end{cases}$

Khi đó  $P = x + 3y \geq \frac{y^2}{y-1} + 3y = f(y) \quad (y > 1)$

Ta có:  $f'(y) = 4 - \frac{1}{(y-1)^2} = 0 \xrightarrow{y>1} y = \frac{3}{2}$

Khi đó  $P_{\min} = f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$ . Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$ ;  $x = \frac{9}{2}$ . **Chọn C.**

**Câu 7:** Ta có:  $3^{xy-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} = 2 - 2xy - 2x - 4y \Leftrightarrow 3^{xy-1} - 3^{-x-2y} = -2(xy-1) - 2(x+2y)$

$$\Leftrightarrow 3^{xy-1} + 2(xy-1) = 3^{-x-2y} - 2(x+2y) (*)$$

Xét hàm số  $f(t) = 3^t + 2t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ta có:  $f'(t) = 3^t \ln 3 + 2 > 0$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ )

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow f(xy-1) = f(-x-2y) \Leftrightarrow xy-1 = -x-2y \Leftrightarrow x(y+1) = 1-2y \Leftrightarrow x = \frac{-2y+1}{y+1}$

$\Rightarrow P = \frac{-4y+2}{y+1} + 3y = g(y), (y > 0) \Rightarrow g'(y) = \frac{-6}{(y+1)^2} + 3 = 0 \xrightarrow{y>0} y+1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow y = \sqrt{2} - 1.$

Ta có:  $P_{\min} = g(\sqrt{2}-1) = 6\sqrt{2} - 7$ . **Chọn A.**

**Câu 8:** Ta có:  $x, y > 0 \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow 1-xy > 0$

Khi đó:  $(x+y)^3 + x+y + \log_2 \frac{x+y}{1-xy} = 8(1-xy)^3 - 2xy + 3$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 + x+y + \log_2(x+y) - \log_2(1-xy) = 8(1-xy)^3 - 2(xy-1) + 1$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 + x+y + \log_2(x+y) = \log_2(1-xy) + 1 + 8(1-xy)^3 + 2(1-xy)$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 + x+y + \log_2(x+y) = \log_2(2-xy) + 8(1-xy)^3 + 2(1-xy)$

Xét hàm số  $f(t) = t^3 + t + \log_2 t$  ( $t > 0$ ) ta có:  $f'(t) = 3t^2 + 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0$  ( $\forall t > 0$ )

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Ta có:  $f(x+y) = f(2-2xy) \Leftrightarrow x+y = 2-2xy \Leftrightarrow x(1+2y) = 2-y \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{1+2y}$

Khi đó:  $P = \frac{-y+2}{2y+1} + 3y = g(y) (y > 0) \Rightarrow g'(y) = \frac{-5}{(2y+1)^2} + 3 = 0 \xrightarrow{y>0} 2y+1 = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{15}-3}{6} \Rightarrow P_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{15}-3}{6}\right) = \sqrt{15} - 2$ . **Chọn C.**

**Câu 9:** Ta có:  $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = -y^2 + 3y + x - 3\sqrt{1+x}$

$\Leftrightarrow \log_2 y - \log_2(2\sqrt{1+x}) = -y^2 + 3y + x - 3\sqrt{1+x}$

$\Leftrightarrow \log_2 y - 1 - \log_2(\sqrt{1+x}) + y^2 - 3y = x - 3\sqrt{1+x}$

$\Leftrightarrow \log_2 y + y^2 - 3y = \log_2(\sqrt{1+x}) + (1+x) - 3\sqrt{1+x}$

Xét hàm số  $f(t) = \log_2 t + t^2 - 3t$  (với  $t > 0$ ) ta có:  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2t - 3$

Lại có:  $\frac{1}{t \ln 2} + 2t \geq 2\sqrt{\frac{1}{\ln 2} \cdot 2} > 3 \Rightarrow f'(t) > 0$  ( $\forall t > 0$ )

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Ta có: } f(y) = f(\sqrt{1+x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = y^2 - 1$$

$$\text{Khi đó } P = y^2 - 100y - 1 = (y - 50)^2 - 2051 \geq -2051 \text{ dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow y = 50.$$

Vậy  $P_{\min} = -2051$ . **Chọn B.**

**Câu 10:** Do  $a; b > 0$  nên  $a + b > 0$  suy ra  $2 - ab > 0$

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{2-ab}{a+b} = 3ab + a + b - 7 \Leftrightarrow \log_3(2-ab) - \log_3(a+b) = 3(ab-2) + a + b - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2-ab) + 1 + 3(2-ab) = \log_3(a+b) + a + b$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3(2-ab) + 3(2-ab) = \log_3(a+b) + a + b$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_3 t + t \text{ (với } t > 0) \text{ ta có: } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 (\forall t > 0)$$

$$\text{Ta có: } f[3(2-ab)] = f(a+b) \Leftrightarrow 6 - 3ab = a + b \Leftrightarrow a = \frac{6-b}{3b+1}$$

$$\text{Khi đó } S = \frac{-b+6}{3b+1} + 5b = g(b) (b > 0) \Rightarrow g'(b) = \frac{-19}{(3b+1)^2} + 5 = 0 \xrightarrow{b>0} 3b+1 = \sqrt{19}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{3} \left( \sqrt{19} - 1 \right) \Leftrightarrow S_{\min} = f\left( \frac{1}{3} \sqrt{19} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2\sqrt{95} - 6}{3}. \text{ **Chọn A.**}$$

$$\text{Câu 11: Ta có: } 2x - 4y = x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \longrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \sin t \\ y = -2 + 2 \cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 4(1 + 2 \sin t) + 3(-2 + 2 \cos t) - 5 = -7 + 8 \sin t + 6 \cos t \leq -7 + \sqrt{8^2 + 6^2} = 3.$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow \sin t = \frac{4}{5}; \cos t = \frac{3}{5} \Rightarrow P = -\frac{13}{4}. \text{ **Chọn C.**}$$

$$\text{Câu 12: Ta có } (2y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 4y^2 \geq 4y-1 \Rightarrow 4y^2 \geq xy$$

$$\text{Với } y > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \leq 4 \longrightarrow S = 6 \cdot \frac{y}{x} + \ln\left(\frac{x}{y} + 2\right) = \ln(t+2) + \frac{6}{t} = f(t); t = \frac{x}{y} \in (-2; 4].$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{6}{t^2} = 0 \Rightarrow t = 3 - \sqrt{21} \Rightarrow f(3 - \sqrt{21}) = \ln(5 - \sqrt{21}) + \frac{6}{3 - \sqrt{21}}.$$

$$\text{Tính } f(4) = \ln 6 + \frac{3}{2} \Rightarrow S \geq \frac{3}{2} + \ln 6.$$

$$\text{Tương tự với } y < 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 4 \Rightarrow S \geq g(u) = \frac{6}{u} + \ln(u+2); u = \frac{x}{y} \geq 4 \Rightarrow S \geq g(4) = \frac{3}{2} + \ln 6. \text{ **Chọn C.**}$$

$$\text{Câu 13: } \log(10xy) \geq \log(x+y) \Rightarrow 10xy \geq x+y \Rightarrow x(10y-1) \geq y > 0 \Rightarrow y > \frac{1}{10} \Rightarrow x \geq \frac{y}{10y-1}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{y}{10y-1} + 3y \Rightarrow 10S \geq 1 + \frac{1}{10y-1} + 30y = \frac{1}{10y-1} + 3(10y-1) + 4 \geq 2\sqrt{3} + 4 \Rightarrow S = \frac{2+\sqrt{3}}{5}. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 14:**  $\log(xy) \geq \log(x^3 + y) \Rightarrow xy \geq x^3 + y \Rightarrow y(x-1) \geq x^3 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow y \geq \frac{x^3}{x-1}$

$$\Rightarrow S \geq 2x + \frac{x^3}{x-1} = f(x) \longrightarrow f'(x) = 2 + \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 2(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x^2-2) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad (x > 1) \Rightarrow S \geq f(\sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$$

**Câu 15:** Ta có  $a+b \geq a^2 + b^2 \longrightarrow a^2 + b^2 = a+b \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow P = 1 + \sqrt{2} \sin t + 2(1 + \sqrt{2} \cos t) - 3 = \sqrt{2} \sin t + 2\sqrt{2} \cos t \leq \sqrt{2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 16:** Ta có  $x = \frac{4}{y}; y = \frac{4}{x} \leq 8 \Rightarrow P = \left(\log_2 \frac{4}{y}\right)^2 + (\log_2 y - 1)^2 = (2 - \log_2 y)^2 + (\log_2 y - 1)^2$ .

Đặt  $t = \log_2 y - 2 \in [-2; 1] \Rightarrow P = t^2 + (t+1)^2 = 2t^2 + 2t + 1 = f(t) \Rightarrow f'(t) = 4t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ .

Tính  $\begin{cases} f(-2) = 5; f(1) = 5 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M = 5; m = \frac{1}{2} \Rightarrow S = 6. \text{ Chọn A.}$

**Câu 17:** Từ  $x+3y > 0; x-3y > 0 \Rightarrow (x+3y) + (x-3y) > 0 \Rightarrow x > 0$ .

Ta có  $\log[(x+3y)(x-3y)] = 1 \Rightarrow x^2 - 9y^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{9y^2 + 10}$

$$\Rightarrow S = \sqrt{9y^2 + 10} - |y| = \sqrt{9t^2 + 10} - t = f(t) \quad (t = |y| \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{18t}{2\sqrt{9t^2 + 10}} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 9t^2 + 10 = 81t^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5}}{6} \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{3}. \text{ Chọn A.}$$

**Câu 18:** Từ  $x+3y > 0; x-3y > 0 \Rightarrow (x+3y) + (x-3y) > 0 \Rightarrow x > 0$ .

Ta có  $\log[(x+3y)(x-3y)] = 1 \Rightarrow x^2 - 9y^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{9y^2 + 10}$

$$\Rightarrow S = \sqrt{9y^2 + 10} - 2|y| + 1 = \sqrt{9t^2 + 10} - 2t + 1 = f(t) \quad (t = |y| \geq 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{18t}{2\sqrt{9t^2 + 10}} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4(9t^2 + 10) = 81t^2 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{3+5\sqrt{2}}{3}. \text{ Chọn C.}$$

**Câu 19:**  $\log_2(xy) = \log_2 \sqrt{x+y} \Rightarrow xy = \sqrt{x+y} \Rightarrow x+y = x^2y^2 \Rightarrow S = (x+y)^2 - 2xy = (xy)^4 - 2xy$ .

Lại có  $x^2y^2 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq \sqrt[3]{4} \Rightarrow S \geq (\sqrt[3]{4})^4 - 2\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$ . **Chọn A.**

**Câu 20:**  $\log_2(xy) = \log_2(x+y) \Rightarrow xy = x+y \Rightarrow S = (x+y)^2 - 2xy = (xy)^2 - 2xy$ .

Lại có  $xy = x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq 4 \Rightarrow S \geq 4^2 - 2.4 = 8$ . **Chọn A.**

**Câu 21:** Đặt  $u = x^2 + y^2 + 1$  suy ra giả thiết  $\Leftrightarrow 2^{u-2} + \log_3 u = 3 \Leftrightarrow 2^u + 4 \cdot \log_3 u - 12 = 0$ .

Xét hàm số  $f(u) = 2^u + 4 \cdot \log_3 u - 12$  trên  $(1; +\infty)$ , có  $f'(u) = 2^u \cdot \ln 2 + \frac{4}{u \cdot \ln 3} > 0; \forall u > 1$ .

Suy ra  $f(u)$  là hàm số đồng biến trên  $(1; +\infty)$  mà  $f(3) = 0 \Rightarrow u = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$ .

Khi đó  $S = |x-y| + |x^3 - y^3| = |x-y| + |(x-y)(x^2 - xy + y^2)| = |x-y| + |(x-y)(2+xy)|$ .

Lại có  $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 2 - 2xy \Leftrightarrow xy = \frac{2 - (x-y)^2}{2} = \frac{2 - |x-y|^2}{2}$ .

Đặt  $t = |x-y|$ , do đó  $S = |x-y| + \left| (x-y) \cdot \left( 2 + \frac{2 - |x-y|^2}{2} \right) \right| = t + \frac{t}{2} \cdot |6 - t^2|$

Mà  $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 4 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4 - (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$ .

Xét hàm số  $f(t) = t + \frac{t}{2} \cdot |6 - t^2| = -\frac{t^3}{2} + 4t$  trên  $[0; 2] \longrightarrow \max_{[0;2]} f(t) = \frac{16\sqrt{6}}{9}$ .

Vậy  $S_{\max} = \frac{16\sqrt{6}}{9} = \frac{a\sqrt{6}}{b} \longrightarrow \begin{cases} a = 16 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow T = a + 2b = 16 + 2 \cdot 9 = 34$ . **Chọn B.**

**Câu 22:** Đặt  $x = \log_a b; y = \log_b c; z = \log_c a$  ( $x; y; z > 0$ ).

Khi đó  $P = \log_a b + \frac{1}{\log_c a} + \log_b c + \frac{1}{\log_a b} + 4 \left( \log_c a + \frac{1}{\log_b c} \right)$

$$= \left( \log_a b + \frac{1}{\log_a b} \right) + \left( \log_b c + \frac{4}{\log_b c} \right) + \left( 4 \log_c a + \frac{1}{\log_c a} \right)$$

Lại có  $\log_a b + \frac{1}{\log_a b} \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b}} = 2; 3\log_b c + \frac{4}{\log_b c} \geq 2\sqrt{\log_b c \cdot \frac{4}{\log_b c}} = 4;$

Và  $4\log_c a + \frac{1}{\log_c a} \geq 2\sqrt{4\log_c a \cdot \frac{1}{\log_c a}} = 4$  nên suy ra  $P \geq 2 + 4 + 4 = 10$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  là 10. **Chọn C.**

**Câu 23:** Ta có  $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2 \Leftrightarrow \log_2 a \cdot \log_2(bc) \geq 1 - \log_2 b \cdot \log_2 c$

$\Leftrightarrow \log_2 a \cdot (\log_2 b + \log_2 c) + \log_2 b \cdot \log_2 c \geq 1 \Leftrightarrow \log_2 a \cdot \log_2 b + \log_2 b \cdot \log_2 c + \log_2 c \cdot \log_2 a \geq 1$

$$\text{Đặt } x = \log_2 a; y = \log_2 b; z = \log_2 c \longrightarrow \begin{cases} xy + yz + zx \geq 1 \\ P = 10x^2 + 10y^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\text{Lại có } 2P = 20x^2 + 20y^2 + 2z^2 = 16x^2 + z^2 + 16y^2 + z^2 + 4(x^2 + y^2).$$

$$\text{Mà } \begin{cases} 16x^2 + z^2 \geq 8xz \\ 16y^2 + z^2 \geq 8yz \\ x^2 + y^2 \geq 2xy \end{cases} \text{ suy ra } 2P \geq 8xz + 8yz + 4.2xy \Leftrightarrow P \geq 4(xy + yz + zx) \geq 4.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  là 4. **Chọn A.**

$$\text{Câu 24: Đặt } x = \log_2 a; y = \log_2 b; z = \log_2 c \longrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 16y^2 + 27z^2 = 1 \\ P = 1xy + yz + zx \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 1 = 5x^2 + 16y^2 + 27z^2 = 3(x^2 + 4y^2) + (4y^2 + 9z^2) + 2(9z^2 + x^2)$$

$$\geq 3.2\sqrt{x^2.4y^2} + 2\sqrt{4y^2.9z^2} + 2.2\sqrt{9z^2.x^2} = 12(xy + yz + zx) \Rightarrow P \leq \frac{1}{12}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức  $P$  là  $\frac{1}{12}$ . **Chọn B.**

$$\text{Câu 25: Đặt } x = \log_a b; y = \log_b c; z = \log_c a \ (x; y; z > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \log_a b + \frac{1}{\log_c a} + 3\left(\log_b c + \frac{1}{\log_a b}\right) + 4\left(\log_c a + \frac{1}{\log_b c}\right) \\ &= \left(\log_a b + \frac{3}{\log_a b}\right) + \left(3\log_b c + \frac{4}{\log_b c}\right) + \left(4\log_c a + \frac{1}{\log_c a}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } \log_a b + \frac{3}{\log_a b} \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \frac{3}{\log_a b}} = 2\sqrt{3}; \quad 3\log_b c + \frac{4}{\log_b c} \geq 2\sqrt{3\log_b c \cdot \frac{4}{\log_b c}} = 4\sqrt{3};$$

$$\text{Và } 4\log_c a + \frac{1}{\log_c a} \geq 2\sqrt{4\log_c a \cdot \frac{1}{\log_c a}} = 4 \text{ nên suy ra } P \geq 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4 = 4 + 6\sqrt{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  là  $4 + 6\sqrt{3}$ . **Chọn C.**

$$\text{Câu 26: Đặt } x = \log_a b; y = \log_b c; z = \log_c a \ (x; y; z > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \log_a b + \frac{1}{\log_c a} + 2\left(\log_b c + \frac{1}{\log_a b}\right) + 9\left(\log_c a + \frac{1}{\log_b c}\right) \\ &= \left(\log_a b + \frac{2}{\log_a b}\right) + \left(2\log_b c + \frac{9}{\log_b c}\right) + \left(9\log_c a + \frac{1}{\log_c a}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } \log_a b + \frac{2}{\log_a b} \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \frac{2}{\log_a b}} = 2\sqrt{2}; \quad 2\log_b c + \frac{9}{\log_b c} \geq 2\sqrt{2\log_b c \cdot \frac{9}{\log_b c}} = 6\sqrt{2};$$

Và  $9\log_c a + \frac{1}{\log_c a} \geq 2\sqrt{9\log_c a \cdot \frac{1}{\log_c a}} = 6$  nên suy ra  $P \geq 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6 = 6 + 8\sqrt{2}$ .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} \log_a b = \sqrt{2} \\ \log_b c = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \log_c a = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \log_b(ca) = \log_b c + \frac{1}{\log_a b} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P$  là  $6 + 8\sqrt{2}$  và  $\log_b(ca) = 2\sqrt{2}$ . **Chọn A.**

**Câu 27:** Giả thiết  $\Leftrightarrow (\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 = \log_a c - \log_a b - 2\log_b c - 5$  (\*).

Đặt  $x = \log_a b$ ;  $y = \log_b c \Rightarrow xy = \log_a c$  suy ra (\*)  $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = xy - x - 2y - 1$

Khi đó  $P = x - y \Leftrightarrow y = x - P$  suy ra  $x^2 + (x - P)^2 = x(x - P) - x - 2(x - P) - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3 - P)x + P^2 - 2P + 1 = 0 \quad (1).$$

Để phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta = (3 - P)^2 - 4(P^2 - 2P + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3}$ .

Do đó  $\min P = -1$ ;  $\max P = \frac{5}{3}$ . Vậy  $S = 2m + 3M = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot \frac{5}{3} = 3$ . **Chọn C.**