

BÀI 1. LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm lũy thừa

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương, a là một số thực tùy ý. **Lũy thừa** bậc n của a là tích của n thừa số a .

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số } a}; a^1 = a$$

Trong biểu thức a^n , a được gọi là **cơ số**, số nguyên n là **số mũ**

Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm, lũy thừa bậc n của số a là số a^n xác định bởi: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Chú ý:

□ Kí hiệu 0^0 , 0^n (n nguyên âm) không có nghĩa.

□ Với $a \neq 0$ và n nguyên, ta có $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

2. Phương trình $x^n = b$

a) Trường hợp n lẻ: Với mọi số thực b , phương trình có nghiệm duy nhất

b) Trường hợp n chẵn

- Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm
- Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$
- Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau

3. Căn bậc n

a) **Khái niệm:** Với n nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.

Ta thừa nhận hai khẳng định sau:

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n . Căn đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là căn bậc số học của a) và $-\sqrt[n]{a}$.

b) **Tính chất căn bậc n :** Với $a, b \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0);$$

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0); \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0)$; Đặc biệt $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & (n \text{ lẻ}) \\ |a|, & (n \text{ chẵn}) \end{cases}$$

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và r là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên, còn n là

một số nguyên dương. Khi đó, lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ: (SGK)

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Cho a, b là những số dương; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Nếu $a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Các phép toán biến đổi lũy thừa

1. Phương pháp:

Ta cần nắm các công thức biến đổi lũy thừa sau:

- Với $a \neq 0; b \neq 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ta có

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

- Với $a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0); \quad \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0);$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0); \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$$

Công thức đặc biệt

$$f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} \text{ thì } f(x) + f(1-x) = 1.$$

Thật vậy, ta có:

$$f(1-x) = \frac{\frac{a}{a^x}}{\frac{a}{a^x} + \sqrt{a}} = \frac{a}{a + \sqrt{a} \cdot a^x} \Rightarrow f(1-x) = \frac{\sqrt{a}}{a^x + \sqrt{a}}$$

$$\text{Nên: } f(x) + f(1-x) = 1.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Viết biểu thức $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{16^{0,75}}$ về dạng lũy thừa 2^m ta được $m = ?$.

A. $-\frac{13}{6}$.

B. $\frac{13}{6}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $-\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\frac{\sqrt{2^3 \sqrt{4}}}{16^{0,75}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2^2}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{2^3} = 2^{\frac{-13}{6}}.$$

Bài tập 2. Cho $x > 0; y > 0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}}$ về dạng y^n . Ta có $m - n = ?$

A. $-\frac{11}{6}$

B. $\frac{11}{6}$

C. $\frac{8}{5}$

D. $-\frac{8}{5}$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{103}{60}} \Rightarrow m = \frac{103}{60}$$

$$y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}} = y^{\frac{4}{5}} : \left(y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{1}{12}} \right) = y^{-\frac{7}{60}} \Rightarrow n = -\frac{7}{60} \Rightarrow m - n = \frac{11}{6}$$

Bài tập 3. Biết $4^x + 4^{-x} = 23$ tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$:

A. 5.

B. $\sqrt{27}$.

C. $\sqrt{23}$.

D. 25.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\text{Do } 2^x + 2^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Nên } 2^x + 2^{-x} = \sqrt{(2^x + 2^{-x})^2} = \sqrt{2^{2x} + 2 + 2^{-2x}} = \sqrt{4^x + 4^{-x} + 2} = \sqrt{23 + 2} = 5.$$

Bài tập 4. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 2}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{(a^{\frac{1}{2}} + 1)}{a^{\frac{1}{2}}}$, ($a > 0, a \neq \pm 1$), có

dạng $P = \frac{m}{a + n}$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là:

A. $m + 3n = -1$.

B. $m + n = -2$.

C. $m - n = 0$.

D. $2m - n = 5$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 2}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{(a^{\frac{1}{2}} + 1)}{a^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} - 1} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{a - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } m = 2; n = -1.$$

thừa với số mũ hữu tỉ có dạng $x^{\frac{a}{b}}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, biểu thức liên hệ giữa a và b là:

- A.** $a + b = 509$. **B.** $a + 2b = 767$. **C.** $2a + b = 709$. **D.** $3a - b = 510$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{3}{2}} \\
& = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{7}{4}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{7}{8}} \\
& = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{15}{8}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{15}{16}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{31}{16}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{31}{32}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{63}{32}} \\
& = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{63}{64}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{127}{64}} = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{127}{128}} = \sqrt{x}\sqrt{x}^{\frac{255}{128}} = \sqrt{x}^{\frac{255}{128}} = x^{\frac{255}{256}}. \text{ Do đó } a = 255, b = 256.
\end{aligned}$$

Nhận xét: $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}}}} = x^{\frac{2^8-1}{2^8}} = x^{\frac{255}{256}}$.

Bài tập 6. Cho $a > 0$; $b > 0$. Viết biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ về dạng a^m và biểu thức $b^{\frac{2}{3}}:\sqrt{b}$ về dạng b^n . Ta có $m+n=?$

- A.** $\frac{1}{3}$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}\Rightarrow m=\frac{5}{6}; b^{\frac{2}{3}}:\sqrt{b}=b^{\frac{2}{3}}:b^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{6}}\Rightarrow n=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow m + n = 1$$

Bài tập 7. Viết biểu thức $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}}$ về dạng 2^x và biểu thức $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ về dạng 2^y . Ta có $x^2 + y^2 = ?$

- A.** $\frac{2017}{567}$ **B.** $\frac{11}{6}$ **C.** $\frac{53}{24}$ **D.** $\frac{2017}{576}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2^3}} = 2^{\frac{3}{8}} \Rightarrow x = \frac{3}{8}; \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{11}{6}} \Rightarrow y = \frac{11}{6} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{53}{24}$

Bài tập 8. Cho $a = 1 + 2^{-x}$, $b = 1 + 2^x$. Biểu thức biểu diễn b theo a là:

- A. $\frac{a-2}{a-1}$. B. $\frac{a-1}{a}$. C. $\frac{a+2}{a-1}$. D. $\frac{a}{a-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $a = 1 + 2^{-x} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $2^x = \frac{1}{a-1}$

Do đó: $b = 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a-1}$.

Bài tập 9. Cho các số thực dương a và b . Biểu thức thu gọn của biểu thức

$P = \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right)$ có dạng là $P = xa + yb$. Tính $x + y$?

- A. $x + y = 97$. B. $x + y = -65$. C. $x - y = 56$. D. $y - x = -97$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\left(2a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(3b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \left(4a^{\frac{1}{2}} - 9b^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(4a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(9b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16a - 81b. \end{aligned}$$

Do đó: $x = 16, y = -81$.

Bài tập 10. Cho các số thực dương phân biệt a và b . Biểu thức thu gọn của biểu thức

$P = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$ có dạng $P = m\sqrt[4]{a} + n\sqrt[4]{b}$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là:

- A. $2m - n = -3$. B. $m + n = -2$. C. $m - n = 0$. D. $m + 3n = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} \\ &= \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{2\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - 2\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}. \end{aligned}$$

Do đó $m = -1; n = 1$.

Bài tập 11: Cho $f(x) = \frac{2018^x}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Tính giá trị biểu thức sau đây ta được

$$S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

- A. $S = 2018$. B. $S = 2019$. C. $S = 1009$. D. $S = \sqrt{2018}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f(1-x) = \frac{\sqrt{2018}}{2018^x + \sqrt{2018}} \Rightarrow f(x) + f(1-x) = 1$

Suy ra $S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right) = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) +$
 $+ f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right) = 1009.$

Bài tập 12: Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$ ta được

- A. -2. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $9^x + 9^{-x} = 23 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{-x} = 5 \\ 3^x + 3^{-x} = -5 \text{ (loại)} \end{cases}$

Từ đó, thế vào $P = \frac{5+(3^x+3^{-x})}{1-(3^x+3^{-x})} = \frac{5+5}{1-5} = -\frac{5}{2}.$

Dạng 2: So sánh, đẳng thức và bất đẳng thức đơn giản

1. Phương pháp

Ta cần lưu ý các tính chất sau

Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Khi đó

- $a > 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta;$
- $0 < a < 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Với $0 < a < b$, $m \in \mathbb{Z}$ ta có:

- $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0;$ $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$
- Với $a < b$, n là số tự nhiên lẻ thì $a^n < b^n$
- Với a, b là những số dương, n là một số nguyên dương khác không $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$

Chú ý: Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Với giá trị nào của a thì đẳng thức $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}$ đúng?

A. $a = 1$.

B. $a = 2$.

C. $a = 0$.

D. $a = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \left[a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{17}{24}} \rightarrow \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}} = \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} \Leftrightarrow a = 2. \\ \sqrt[24]{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{-1}}} = 2^{\frac{5}{24}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{17}{24}} \end{cases}$$

Bài tập 2. Cho số thực $a \neq 0$. Với giá trị nào của x thì đẳng thức $\frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) = 1$ đúng?

A. $x = 1$.

B. $x = 0$.

C. $x = a$.

D. $x = \frac{1}{a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) = 1 &\Leftrightarrow a^x + \frac{1}{a^x} = 2 \Leftrightarrow (a^x)^2 - 2a^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Bài tập 3. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$.

A. $a = 0$.

B. $a < 0$.

C. $a > 1$.

D. $0 < a < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}} > a^{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}} > a^{\frac{6}{15}} \longrightarrow a > 1.$$

Bài tập 4. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $(a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $a > 2$.

B. $a > 1$.

C. $1 < a < 2$.

D. $0 < a < 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}, \text{ kết hợp với } (a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}. \text{ Suy ra hàm số đặc trưng } y = (a-1)^x \\ \text{đồng biến } \longrightarrow \text{ cơ số } a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2. \end{aligned}$$

Bài tập 5. Nếu $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{2}} > b^{\sqrt{3}}$. Tìm mỗi các điều kiện của đáp án a và b

A. $a < 1; 0 < b < 1$.

B. $a > 1; b < 1$.

C. $0 < a < 1; b < 1$.

D. $a > 1; 0 < b < 1$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Vì } \begin{cases} \frac{1}{2} > \frac{1}{6} \\ a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{6}} \end{cases} \Rightarrow a > 1 \text{ và } \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ b^{\sqrt{2}} > b^{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 < b < 1$$

Bài tập 6. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}$

A. $a > 2$.

B. $a > 0$.

C. $a > 1$.

D. $1 < a < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{3}$ và số mũ không nguyên nên $(a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}}$ khi $a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2$.

Bài tập 7. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$

A. $\begin{cases} -\frac{1}{2} < a < 0 \\ a < -1 \end{cases}$.

B. $-\frac{1}{2} < a < 0$.

C. $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a < -1 \end{cases}$.

D. $a < -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $-3 < -1$ và số mũ nguyên âm nên $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$ khi

$$\begin{cases} 0 < 2a+1 < 1 \\ 2a+1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < a < 0 \\ a < -1 \end{cases}.$$

Bài tập 8. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2$

A. $0 < a < 1$.

B. $a > 0$.

C. $a > 1$.

D. $a < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2 \Leftrightarrow a^{0,2} < a^2$$

Do $0,2 < 2$ và có số mũ không nguyên nên $a^{0,2} < a^2$ khi $a > 1$.

HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm hàm lũy thừa

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Chú ý: Tập xác định của hàm số lũy thừa phụ thuộc vào giá trị của α

- Với α nguyên dương thì tập xác định là $\mathbb{R}$
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Với α không nguyên thì tập xác định là $(0; +\infty)$

Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x > 0$. Do đó, hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x} (n \in \mathbb{N}^*)$. Bài tập $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc 3, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$; còn hàm số lũy thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định khi $x > 0$

2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

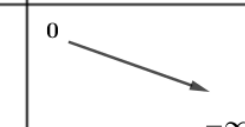
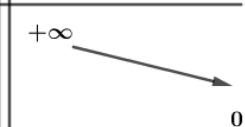
$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= \alpha \cdot x^{\alpha-1} \text{ với } x > 0; \quad (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u', \text{ với } u > 0 \\ (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \text{ với mọi } x > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn, với mọi } x \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \\ (\sqrt[n]{u})' &= \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \text{ với mọi } u > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn, với mọi } u \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ}\end{aligned}$$

3. Khảo sát hàm số lũy thừa

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

$\alpha \in \mathbb{N}^*$	
$\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}^*$	$\alpha = 2n+1, n \in \mathbb{N}$
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.	Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
Sự biến thiên:	Sự biến thiên:
$y = x^{2n} \Rightarrow y' = 2n \cdot x^{2n-1}$	$y = x^{2n+1} \Rightarrow y' = (2n+1) \cdot x^{2n} \Rightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in D$
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$.	$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D .
Bảng biến thiên	Bảng biến thiên

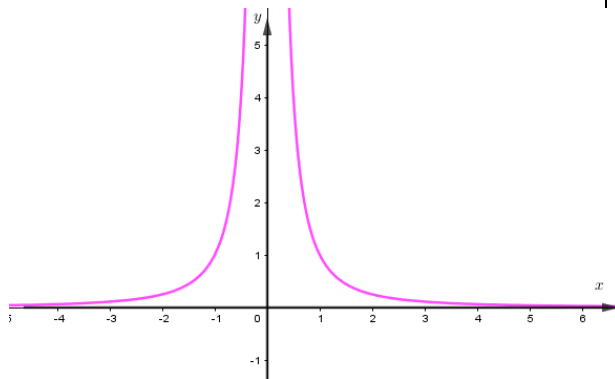
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table> Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. Đồ thị:	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'	$-$	0	$+$	y	$+\infty$	0	$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table> Đồ thị:	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'	$+$	0	$+$	y	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$																						
y'	$-$	0	$+$																						
y	$+\infty$	0	$+\infty$																						
x	$-\infty$	0	$+\infty$																						
y'	$+$	0	$+$																						
y	$-\infty$	0	$+\infty$																						
$\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$																									
$\alpha = 2k, k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$\alpha = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$																								
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sự biến thiên: $y = x^{2n} \Rightarrow y' = 2n.x^{2n-1}$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là TCN.}$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ là TCD.}$ Bảng biến thiên	Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sự biến thiên: $y = x^{2k+1} \Rightarrow y' = (2k + 1).x^{2k} \Rightarrow y' < 0 \ \forall x \in D$ $\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên D. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là TCN.}$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ là TCD.}$ Bảng biến thiên																								

x	$-\infty$	0	$+\infty$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		-	y'	-		-
y				y			

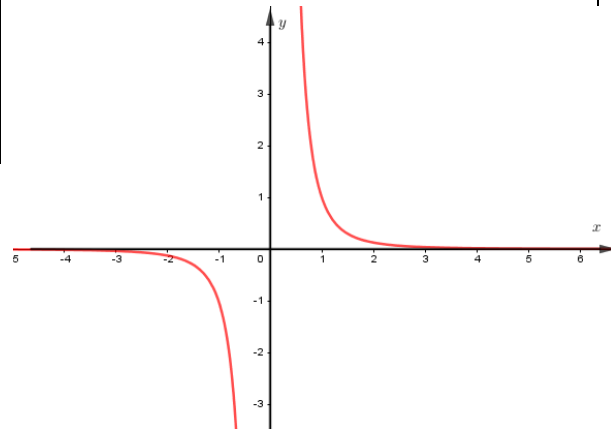
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đồ thị:



Đồ thị:



$\alpha \notin \mathbb{Z}$

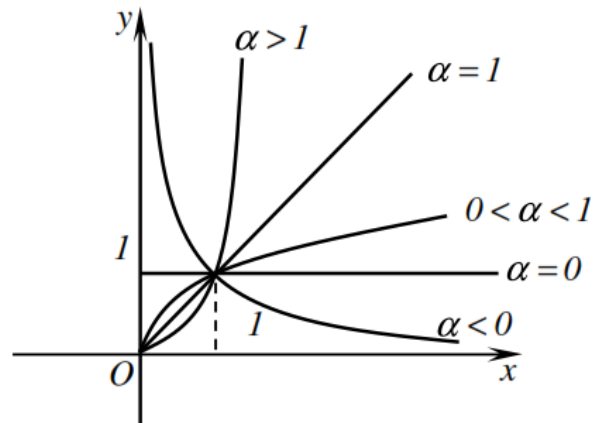
Trong giới hạn chương trình ta chỉ khảo sát trên $(0; +\infty)$.

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Tập khảo sát: $D = (0; +\infty)$. Sự biến thiên: $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$. $\Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận. Bảng biến thiên	Tập khảo sát: $D = (0; +\infty)$. Sự biến thiên: $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty \Rightarrow$ TCD: $x = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0 \Rightarrow$ TCN: $y = 0$. Bảng biến thiên

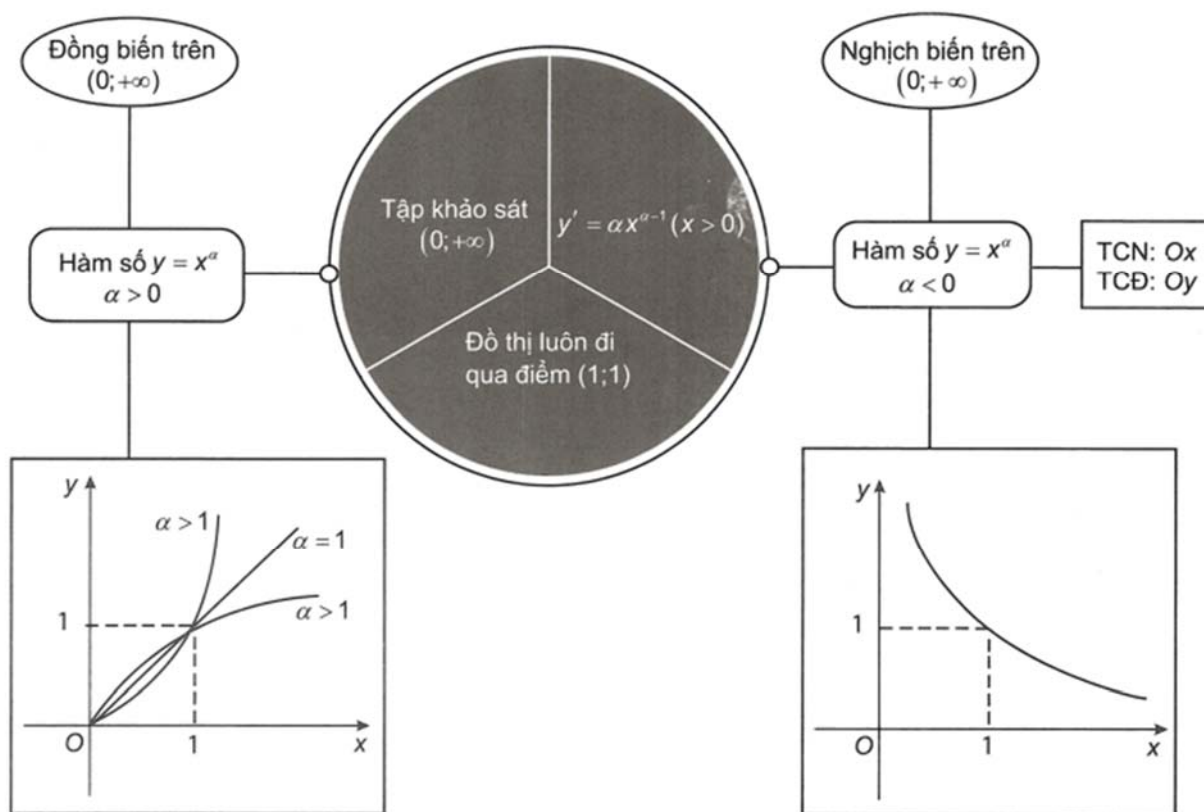
x	0	$+\infty$
y'		+
y	0	$+\infty$

x	0	$+\infty$
y'		-
y	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(1;1)$.



HÀM SỐ LŨY THỪA



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

1. Phương pháp giải

Ta tìm điều kiện xác định của hàm số $y = [f(x)]^\alpha$, dựa vào số mũ α của nó như sau:

- Nếu α là số nguyên dương thì không có điều kiện xác định của $f(x)$.
- Nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0 thì điều kiện xác định là $f(x) \neq 0$.
- Nếu α là số không nguyên thì điều kiện xác định là $f(x) > 0$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (x^2 + m)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. mọi giá trị m . B. $m \neq 0$. C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Để hàm số $y = (x^2 + m)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $x^2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{4-x^2} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + x + 1$.

A. $D = [-2; 2]$.

B. $D = [-2; 2] \setminus \{1\}$.

C. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

D. $D = (-2; 2) \setminus \{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-2; 2] \setminus \{1\}$.

Bài tập 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x-2)^{\sqrt{5}} + (x^2-9)^{\frac{3}{5}} + x^2 - 5x - 2$.

A. $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

B. $D = (2; +\infty)$.

C. $D = (3; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \begin{cases} x < -3 \\ x > 3 \end{cases} \\ x > 3 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (3; +\infty)$.

Bài tập 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 5x + 4)^{\sqrt{2}-3} - \sqrt{x^2 + 3x + 7} + x^{-3} + x^2 - 2x + 1$.

A. $D = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty) \setminus \{0\}$.

B. $D = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

C. $D = (1; 4)$.

D. $D = [1; 4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases} \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty) \setminus \{0\}$.

Bài tập 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2018; 2018)$ để hàm số $y = (x^2 - 2x - m + 1)^{\sqrt{5}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A. 4036. B. 2018. C. 2017. D. Vô số

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì số mũ $\sqrt{5}$ không phải là số nguyên nên hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \text{ (luôn đúng vì } a = 1 > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - (-m + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 0$$

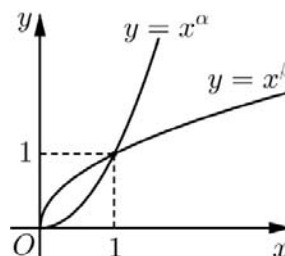
$$\text{Mà } \begin{cases} m \in (-2018; 2018) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, \dots, 2017\}.$$

Vậy có 2017 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Dạng 2: Đồ thị hàm số lũy thừa

Bài tập 1. Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên $(0; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < \beta < \alpha < 1$.
B. $\alpha < 0 < \beta < 1$.
C. $0 < \beta < 1 < \alpha$.
D. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số

- $y = x^\alpha$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nằm trên đường thẳng $y = x$ nên $\alpha > 1$.
- $y = x^\beta$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nằm dưới đường thẳng $y = x$ nên $0 < \beta < 1$.

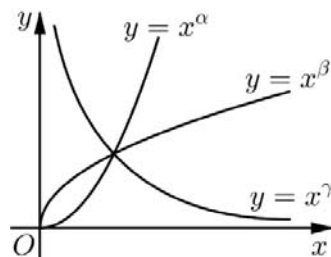
Vậy $0 < \beta < 1 < \alpha$.

Bài tập 2. Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ trên $(0; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\gamma < \alpha < \beta$.
B. $\beta < \gamma < \alpha$.

C. $\alpha < \gamma < \beta$.

D. $\gamma < \beta < \alpha$.



Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số

- $y = x^\gamma$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên $\gamma < 0$.
- như câu trên ta có $0 < \beta < 1 < \alpha$. Vậy $\gamma < 0 < \beta < 1 < \alpha$.

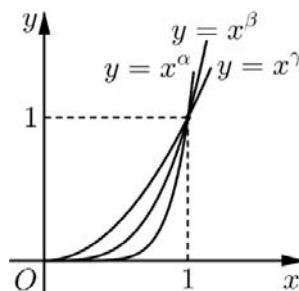
Bài tập 3. Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ trên $(0; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\gamma < \beta < \alpha < 0$.

B. $0 < \gamma < \beta < \alpha < 1$.

C. $1 < \gamma < \beta < \alpha$.

D. $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$.



Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Dựa vào đồ thị, ta có

- Với $0 < x < 1$ thì

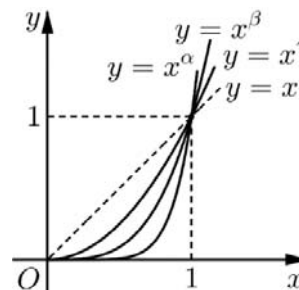
$$x^\alpha < x^\beta < x^\gamma < x^1 \longrightarrow \alpha > \beta > \gamma > 1.$$

- Với $x > 1$ thì

$$x^1 < x^\gamma < x^\beta < x^\alpha \longrightarrow 1 < \gamma < \beta < \alpha.$$

Vậy với mọi $x > 0$, ta có $\alpha > \beta > \gamma > 1$.

Nhận xét. Ở đây là so sánh với đường $y = x = x^1$.



Bài tập 4. Cho hàm số $y = (x-1)^{-\frac{1}{4}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$.

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Cho các khẳng định sau:

- i) Hàm số xác định với mọi x .
- ii) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$.
- iii) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- iv) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có khẳng định ii) và iv) là đúng.

- i) sai vì hàm số đã cho xác định khi $x > 0$.
 - iii) sai vì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
-