TÀI LIỆU
NỘI BỘ

2017

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI

TOÁN 11

ÁP DỤNG THI HỌC KỲ 2

LỚP TOÁN THẦY ĐẠT

Số 8 ngõ 17 Tạ Quang Bửu

MỤC LỤC

Phần 1: ĐẠI SỐ

CHUYỀN ĐỀ 1: GIỚI HẠN

TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY (u_n) CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

DẠNG 1: u_n là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n), Q(n)$ là hai đa thức của n).

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn.

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \frac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}$ b). $u_n = \frac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}$ c). $u_n = \frac{2n^4+3n^2-n}{(2n+1)(1-3n)(2n^2+1)}$

LỜI GIẢI

a). Ta thấy n^2 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^2 được:

$u_n = \frac{2n^2-3n+1}{5n^2+3} = \frac{\frac{2n^2-3n+1}{n^2}}{\frac{5n^2+3}{n^2}} = \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}}$. Ta có $\lim\frac{3}{n}=0, \lim\frac{1}{n^2}=0$ và $\lim\frac{3}{n^2}=0$ nên

$\lim u_n = \frac{2-0+0}{5+0} = \frac{2}{5}$.

b). Dễ dàng thấy n^4 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^4 được:

$u_n = \frac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n} = \frac{\frac{-2n^3+3n^2+4}{n^4}}{\frac{n^4+4n^3+n}{n^4}} = \frac{-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^4}}{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}}$. Ta có $\lim\frac{2}{n}=0$, $\lim\frac{3}{n^2}=0$, $\lim\frac{4}{n^4}=0$, $\lim\frac{4}{n}=0$

và $\lim \frac{1}{n^3} = 0$. Do đó $\lim u_n = \frac{0+0+0}{1+0+0} = 0$.

c). Có $2n^4 + 3n^2 - n = n^4\left(\frac{2n^4 + 3n^2 - n}{n^4}\right) = n^4\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}\right)$, $2n+1 = n\left(\frac{2n+1}{n}\right) = n\left(2 + \frac{1}{n}\right)$,

$1 - 3n = n\left(\frac{1-3n}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} - 3\right)$ và $2n^2 + 1 = n^2\left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right) = n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)$. Từ đó

$u_n = \dfrac{n^4\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)n\left(\frac{1}{n} - 3\right)n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{n^4\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - 3\right)\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - 3\right)\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}$. Vì

$\lim \frac{3}{n} = 0$, $\lim \frac{1}{n^3} = 0$, $\lim \frac{1}{n} = 0$ và $\lim \frac{1}{n^2} = 0$. Nên $\lim u_n = \frac{2+0-0}{(2+0)(0-3)(2+0)} = -\frac{1}{6}$.

DẠNG 2: u_n là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n), Q(n)$ là các biểu thức chứa căn của n).

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}}$ b). $u_n = \dfrac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$

LỜI GIẢI

a). $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}} = \dfrac{\sqrt{n^2\left(\frac{4n^2 - n + 1}{n^2}\right)} - n}{\sqrt{n^2\left(\frac{9n^2+3n}{n^2}\right)}} = \dfrac{n\sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - n}{n\sqrt{9 + \frac{3}{n}}} = \dfrac{\sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1}{\sqrt{9 + \frac{3}{n}}}$. Vì có $\lim \frac{1}{n} = 0,$

$\lim \frac{1}{n^2} = 0,$ và $\lim \frac{3}{n} = 0$. Nên $\lim u_n = \frac{\sqrt{4 - 0 + 0} - 1}{\sqrt{9+0}} = \frac{1}{3}$.

b). $u_n = \dfrac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}} = \dfrac{\sqrt{n\left(\frac{2n+1}{n}\right)} - \sqrt{n\left(\frac{n+3}{n}\right)}}{\sqrt{n\left(\frac{4n-5}{n}\right)}} = \dfrac{\sqrt{n}.\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n}.\sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{n}.\sqrt{4 - \frac{5}{n}}} = \dfrac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{4 - \frac{5}{n}}}$. Vì có

$\lim \frac{1}{n} = 0,$ $\lim \frac{3}{n} = 0$ và $\lim \frac{5}{n} = 0$.

Từ đó có $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{2+0}-\sqrt{1+0}}{\sqrt{4-0}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

DẠNG 3: u_n là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n),Q(n)$ là các biểu thức chứa hàm mũ a^n,b^n,c^n,…. Chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất).

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \dfrac{2^n+4^n}{4^n-3^n}$ b). $u_n = \dfrac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n}$ c). $u_n = \dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}$

a).Ta có $u_n = \dfrac{2^n+4^n}{4^n-3^n} = \dfrac{\frac{2^n+4^n}{4^n}}{\frac{4^n-3^n}{4^n}} = \dfrac{\frac{2^n}{4^n}+\frac{4^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n}-\frac{3^n}{4^n}} = \dfrac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$. Ta có $\lim\left(\frac{2}{4}\right)^n = 0$ và $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. Nên

$\lim u_n = \dfrac{0+1}{1-0} = 1$.

b). Ta có $u_n = \dfrac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n} = \dfrac{\frac{3.2^n-5^n}{5^n}}{\frac{5.4^n+6.5^n}{5^n}} = \dfrac{\frac{3.2^n}{5^n}-\frac{5^n}{5^n}}{\frac{5.4^n}{5^n}+\frac{6.5^n}{5^n}} = \dfrac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}{5\left(\frac{4}{5}\right)^n+6}$. Ta có $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ và $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$.

Do đó $\lim u_n = \dfrac{3.0-1}{5.0+6} = -\dfrac{1}{6}$.

c). Ta có $u_n = \dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}} = \dfrac{4^n.4^2+6^n.6}{5^n.5^{-1}+2.6^n.6^3} = \dfrac{\frac{4^n.4^2+6^n.6}{6^n}}{\frac{5^n.5^{-1}+2.6^n.6^3}{6^n}} = \dfrac{\frac{4^n.4^2}{6^n}+\frac{6^n.6}{6^n}}{\frac{5^n.5^{-1}}{6^n}+\frac{2.6^n.6^3}{6^n}}$

$= \dfrac{4^2\left(\frac{4}{6}\right)^n+6}{5^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)^n+2.6^3}$. Ta có $\lim\left(\frac{4}{6}\right)^n = 0$ và $\lim\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.

Do đó $\lim u_n = \dfrac{4^2.0+6}{5^{-1}.0+2.6^3} = \dfrac{1}{72}$.

DẠNG 4 : Nhân lượng liên hợp:

PHƯƠNG PHÁP : Sử dụng các công thức nhân lượng liên hợp sau:

- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)\to\left[\begin{array}{l} a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b} \\ a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\end{array}\right.$

- $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ • $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.

- $\sqrt[3]{a}-b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$.

- $\sqrt[3]{a}+b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$

- $a-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

- $a+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$.

- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a+b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

Ví dụ 1: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$	b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2$
c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n$	d). $u_n=\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3$

LỜI GIẢI

a). Ta có $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\dfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$. Và có $3n+5=n\left(\dfrac{3n+5}{n}\right)=n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)$ và $\sqrt{n^2+3n+5}=\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2}\right)}=n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}$.

Do đó $u_n=\dfrac{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+n}=\dfrac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}$, vì $\lim\dfrac{5}{n}=0,\ \lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{5}{n^2}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{3}{2}$.

NHẬN XÉT : Tại sao phải nhân lượng liên hợp ?

Quay lại ví dụ a) thông thường ta đặt n^k làm nhân tử chung nhưng sao lại phải nhân lượng liên hợp. Bây giờ ta thử làm lại câu a) theo phương pháp đặt n^k trong căn thức thử xem sao ,và sau đó rút ra nhận xét. Ta có $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n=\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2}\right)}-n=n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-n=n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)$. Vì $\lim\dfrac{3}{n}=\lim\dfrac{5}{n^2}=0$ nên $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)=0$ và $\lim n=+\infty$ do đó $\lim u_n=+\infty.0$ (đây là dạng vô định). Nên cách làm này không là không được rồi, ta phải sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp để khử vô định sau đó cách làm hoàn toàn như dạng 1.

Dấu hiệu nhận biết nhân lượng liên hợp : Để nhận biết một bài tập có nhân lượng liên hợp hay không các bạn chỉ chú ý tới n có mũ cao nhất sau đó đưa ra ngoài dấu căn thức, nếu chúng trừ nhau bằng 0 thì bài này ta phải nhân lượng liên hợp. Cụ thể ta làm lại câu a) $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$ biểu thức trong căn thức có n^2 là cao nhất và ta quan tâm đến « nó », những thừa số sau bỏ hết có nghĩa xem $u_n=\sqrt{n^2}-n=n-n=0$ (nên các bạn phải nhân lượng liên hợp). Chúng ta xem thử bài này có nhân lượng liên hợp hay không $u_n=\sqrt{2n^2+3n+5}-n$ chúng ta cũng quan tâm đến số hạng có chứa mũ có nhất đó là $2n^2$, có nghĩa u_n được viết lại $u_n=\sqrt{2n^2}-n=n\sqrt{2}-n=n\left(\sqrt{2}-1\right)$ ta có $\sqrt{2}-1\neq 0$ nên bài này được làm trực tiếp không cần nhân lượng liên hợp. Cụ thể bài này ta làm như sau

$u_n=\sqrt{2n^2+3n+5}-n=\sqrt{n^2\left(\frac{2n^2+3n+5}{n^2}\right)}-n=n\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}-n=n\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}-1\right)$ do $\lim\frac{3}{n}=\lim\frac{5}{n^2}=0$ nên $\lim\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}-1\right)=\sqrt{2}-1$ và $\lim n=+\infty$ do đó $\lim u_n=+\infty.\left(\sqrt{2}-1\right)=+\infty$ (cụ thể các bạn xem phương pháp tìm giới hạn dãy số có giới hạn vô cực).

b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2=\frac{\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+3n-4}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2=\frac{3n-4}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2$. Ta có $3n-2=n\left(\frac{3n-2}{n}\right)=n\left(3-\frac{2}{n}\right)$ và $\sqrt{9n^2+3n-4}=\sqrt{n^2\left(\frac{9n^2+3n-4}{n^2}\right)}=n\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}$. Từ đó suy ra

$u_n=\frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}+3n}+2=\frac{3-\frac{2}{n}}{\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}+3}+2$, vì $\lim\frac{2}{n}=0$, $\lim\frac{3}{n}=0$ và $\lim\frac{4}{n^2}=0$. Nên

$\lim u_n=\frac{3-0}{\sqrt{9+0-0}+3}=\frac{1}{2}$.

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n=\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$

$=\frac{3n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$. Ta có $\sqrt[3]{n^3+3n^2}=\sqrt[3]{n^3\left(\frac{n^3+3n^2}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}$. Do đó

$u_n=\frac{3n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}\right)^2+n^2.\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}+n^2}=\frac{3}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}+1}$, ta có $\lim\frac{3}{n}=0$. Nên $\lim u_n=1$

d). $u_n=\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3$

$=\frac{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n\right)\left[\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3$

$$=\frac{4n^2+2}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3.$$

Ta có $\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}=\sqrt[3]{n^3\left(\frac{8n^3+4n^2+2}{n^3}\right)}=n\sqrt[3]{8+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^3}}$. Do đó

$u_n=\dfrac{n^2\left(4+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{8+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^3}}\right)^2+2n^2.\sqrt[3]{8+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^3}}+4n^2}=\dfrac{4+\frac{2}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{8+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^3}}\right)^2+2.\sqrt[3]{8+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^3}}+4}$. Vì $\lim\frac{2}{n^2}=0$, $\lim\frac{4}{n}=0$ và $\lim\frac{2}{n^3}=0$. Nên $\lim u_n=\frac{1}{3}$.

GIỚI HẠN HÀM SỐ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định lí 1: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$ (với L, M $\in\mathbb{R}$).Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$
- Nếu $M\neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$

Hệ quả:

- Nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c.f(x)\right]=c.L$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(a.x^k\right)=ax_0^k$ (a hằng số và $k\in\mathbb{Z}^+$).

Định lí 2: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|L\right|$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{L}$
- Nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in J\setminus\{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Chú ý:

Định lí 1 và định lí 2 vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

Định lí 3: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

4). Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực:

Qui tắc 1: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$ (với $L \neq 0$) thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$ được cho bởi bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L, (L \neq 0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \in (a;b)\setminus\{x_0\}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ được cho bởi bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

5). Các dạng vô định:

Các dạng vô định trường gặp: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$.

6). Giới hạn một bên:

a). Giới hạn hữu hạn:

$*$ Giới hạn bên phải: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0;b), (x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

$*$ Giới hạn bên trái: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Định lí 5: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$

$*$ Giới hạn vô cực:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự như các định nghĩa ở phần giới hạn hữu hạn.

Định lí 5 vẫn đúng với giới hạn vô cực.

Các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc tìm giới hạn vô cực vẫn đúng trong trường hợp $x \to x_0^+$ hay $x \to x_0^-$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

CÁCH KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$ (Dạng này thường gặp khi $x \to x_0$).

DẠNG 1: Hàm số $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là đa thức theo biến x.

PHƯƠNG PHÁP: Phân tích đa thức thành nhân tử, sau đó rút gọn biểu thức làm cả tử và mẫu bằng 0.

Phân tích đa thức thành nhân tử có các phương pháp sau:

- Sử dụng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Nếu tam thức bậc hai thì sử dụng $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), (a \neq 0)$ với x_1, x_2 là nghiệm của

phương trình $ax^2+bx+c=0$.

• Sử dụng phương pháp Hoocner . Phép chia đa thức $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ cho $(x-x_0)$ theo sơ đồ Hoocner như sau:

	a	b	c	d	e
x_0	a	$b_1=ax_0+b$	$c_1=ax_0^2+bx_0+c$	$d_1=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$	0

Hàng thứ nhất điền hệ số của đa thức $P(x)$ từ ô thứ hai đến ô cuối cùng. Ở hàng thứ hai ô đầu tiên điền giá trị x_0 là một nghiệm của $P(x)$, ô thứ hai viết lại a, lấy $(x_0.a+b)$ đặt vào ô thứ ba, lấy $x_0(x_0a+b)+c=ax_0^2+bx_0+c$ điền váo ô thứ tư, lấy $x_0\left(ax_0^2+bx_0+c\right)+d=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$ điền vào ô thứ năm, lấy $x_0\left(ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d\right)+e=0$ (bắt buộc tổng này phải bằng 0, thì đây mới là phép chia hết). Khi đó $P(x)$ được viết lại

$$P(x)=(x-x_0)\left(ax^3+b_1x^2+c_1x+d_1\right)$$

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$ b). $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ c). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^3+x^2-x-1}$

d). $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

a).Ta có $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)\left(x^2+2x+4\right)$ (áp dụng hằng đẳng thức), và $x^2+11x+18=(x+2)(x+9)$ (với $x_1=-2$ và $x_2=-9$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+11x+18=0$).

Do đó $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{(x+2)(x+9)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+4}{x+9}=\dfrac{12}{7}$.

b). $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

Thay $x=3$ vào cả tử và mẫu thấy đều bằng 0, nên $x=3$ là một nghiệm của hai đa thức cả mẫu và tử. Có nghĩa $(x-3)$ là nhân tử chung, ta phân tích đa thức ở tử và mẫu thành nhân tử bằng phương pháp Hoocner. Cách làm như sau:

Phân tích tử số: $2x^3-5x^2-2x-3=(x-3)(2x^2+x+1)$

Kẻ bảng như sau. Sau đó điền hệ số của từng số hạng với số mũ giảm dần vào các ô ở hàng đầu tiên với ô thứ nhất để trống. Ở hàng thứ hai: điền giá trị làm đa thức bằng 0 ở đây là chữ số 3. Ô thứ hai điền lại giá trị ở ô thứ hai của hàng một xuống (ta thường hay nói "đầu rơi xuống"), sau đó lấy $3.2+(-5)=1$ điền chữ số 1 vào ô thứ ba, lấy $3.1+(-2)=1$ điền chữ số 1 vào ô thứ tư, cuối cùng lấy $3.1+(-3)=0$ điền vào ô cuối cùng.

	2	-5	-2	-3
3	2	1	1	0

Phân tích mẫu số: $4x^3-13x^2+4x-3=(x-3)(4x^2-x+1)$

	4	-13	4	-3
3	4	-1	1	0

Do đó $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(2x^2+x+1)}{(x-3)(4x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1}=\dfrac{11}{17}$.

c). $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^3+x^2-x-1}$. Ta thấy $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3+5x^2+4x+1)=0$ và $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+x^2-x-1)=0$ như vậy đây là dạng giới hạn vô định $\dfrac{0}{0}$ ta phải phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử để khử vô định. Phân tích nhân tử bằng phương pháp Hoocner

Phân tích tử số: $2x^3+5x^2+4x+1=(x+1)(2x^2+3x+1)$

	2	5	4	1
-1	2	3	1	0

Phân tích mẫu số: $x^3+x^2-x-1=(x+1)(x^2+0x-1)=(x+1)(x^2-1)$

	1	1	-1	-1
-1	1	0	-1	0

Từ đó $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(2x^2+3x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$, ta thấy $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^2+3x+1\right)=0$ và $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-1\right)=0$ ta vẫn còn dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên phân tích thành nhân tử tiếp, ta làm như sau:

$$L=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

d). Bước đầu tiên ta phải quy đồng mẫu, sau đó phân tích đa thức của tử thành nhân tử và rút gọn hạng tử vô định $L=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}.$$

DẠNG 2: NHÂN LIÊN HỢP

Tính các giới hạn sau: (CĂN BẬC 2)

a). $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

a). $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{-x(x-9)(\sqrt{x}+3)}\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{-x(\sqrt{x}+3)}=-\dfrac{5}{4}$

b). $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(x+3-9)}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+3}=\dfrac{1}{6}$

Tìm các giới hạn sau: (CÓ 2 CĂN BẬC 2)

a). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8}-3}$ b). $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$

a). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8}-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(3x+1-x-3)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x+8-9)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}=3$$

b). $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(9-x)\left(\sqrt{x-5}+2\right)}{(x-5-4)\left(3+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{-(x-9)\left(\sqrt{x-5}+2\right)}{(x-9)\left(3+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{-\left(\sqrt{x-5}+2\right)}{3+\sqrt{x}}=-\dfrac{2}{3}$.

Tìm các giới hạn sau: (CÓ CĂN BẬC 3)

a). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{5x-3}+2}{x+1}$ b). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

a). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{5x-3}+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x-3+8}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{5x-3}\right)^2-2\sqrt[3]{5x-3}+4\right]}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5(x+1)}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{5x-3}-2.\sqrt[3]{5x-3}+4\right)\right]}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5}{\left[\left(\sqrt[3]{5x-3}\right)^2-2\sqrt[3]{5x-3}+4\right]}=\dfrac{5}{12}$

b). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-x)}{x\left[1+\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$

Tìm các giới hạn sau: (THÊM BỚT ĐỂ NHÂN LIÊN HỢP)

a). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$ b). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt{x^2+3}}{x-1}$

a). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3+\sqrt{x+16}-7}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+9-9}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+16-16}{\left(\sqrt{x+16}+4\right)x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\left(\sqrt{x+16}+4\right)x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+16}+4}=\dfrac{7}{24}$

b). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt{x^2+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+7}-2+2-\sqrt{x^2+3}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+7}-2}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+7-8}{\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x^3+7}+4\right](x-1)}+\lim_{x\to 1}\frac{2-x^2-3}{(2+\sqrt{x^2+3})(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{\left[\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x^3+7}+4\right](x-1)}+\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+1)}{(2+\sqrt{x^2+3})(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+4}{\left(\sqrt[3]{x^3+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x^3+7}+4}+\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2+\sqrt{x^2+3}}=\frac{3}{4}$$

GIỚI HẠN KHI x TIẾN TỚI VÔ CỰC

Câu 1: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^2-x+7}{2x^3-1}$ b). $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(4x^2+1)(7x-1)}{(2x^3-1)(x+3)}$

a). $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^2-x+7}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}{x\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3}{2x}=0$

b). $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(4x^2+1)(7x-1)}{(2x^3-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)x\left(7-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)\left(7-\frac{1}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x^3}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{28}{2x}=0$

Câu 2: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(x-1)^2(5x+2)^2}{(3x+1)^4}$ b). $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$ c). $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$

a). $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(x-1)^2(5x+2)^2}{(3x+1)^4}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2x^2\left(5+\frac{2}{x}\right)^2}{x^4\left(3+\frac{1}{x}\right)^4}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(5+\frac{2}{x}\right)^2}{\left(3+\frac{1}{x}\right)^4}=\frac{25}{81}$

b). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^6\left(1+\dfrac{2}{x^6}\right)}}{x^3\left(3-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\sqrt{1+\dfrac{2}{x^3}}}{x^3\left(3-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)}}{3-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{3}$

c). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-2+\dfrac{3}{x}\right)}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=-2$

GIỚI HẠN MỘT BÊN

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}$ b). $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

LỜI GIẢI

a). Vì $x\to3^+\Rightarrow x>3\Leftrightarrow x-3>0$. Vậy $|x-3|=x-3$

Ta có $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x-3}{5(x-3)}=\dfrac{1}{5}$.

b). Ta có $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-1$.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

DẠNG 1: XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP 1:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ thì hàm số f(x) liên tục tại x_0.

PHƯƠNG PHÁP 2:

Bước 1: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số f(x) liên tục tại x_0.

Ví dụ : Xét tính liên tục tại giá trị x_0 của các hàm số sau:

1). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x\neq 2\\ 1 & x=2\end{cases}$ tại $x_0=2$ và tại $x_0=4$

2). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & x\neq 1\\ \dfrac{1}{4} & x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

3). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x>5\\ (x-5)^2+3 & x\le 5\end{cases}$ tại $x_0=5$, tại $x_0=6$ và tại $x_0=4$

4). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} & x>-1\\ \dfrac{\sqrt{3-x}}{2} & x\le -1\end{cases}$ tại $x_0=-1$

5). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & x>1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ x-\dfrac{3}{2} & x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$

1).

- Xét tính liên tục tại $x_0=2$:

Có $f(x_0)=f(2)=1$

Có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 2$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 4$:

Có $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{4^2-3.4+2}{4-2} = 3 = f(4) \Rightarrow$ hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 4$.

2). Có $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{4}$ (1)

Có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3-4}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Vậy hàm số liên tục tại $x = 1$.

3). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x > 5 \\ (x-5)^2+3 & x \le 5 \end{cases}$ tại $x_0 = 5$, tại $x_0 = 6$ và tại $x_0 = 4$

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 5$

Áp dụng nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ *hàm số liên tục tại* x_0.

Có $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim\limits_{x\to 5^+}\frac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{2x-1-9} = \lim\limits_{x\to 5^+}\frac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{2x-10}$

$$= \lim\limits_{x\to 5^+}\frac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{2(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5^+}\frac{\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{2} = \frac{\sqrt{2.5-1}+3}{2} = 3.$$

Có $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-}\left[(x-5)^2+3\right] = 0+3 = 3 = f(5)$.

Vì $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = f(5) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = 5$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 6$

Có $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}=\dfrac{6-5}{\sqrt{2.6-1}-3}=\dfrac{1}{\sqrt{11}-3}=f(6)$. Vậy hàm số f(x) liên tục tại $x_0=6$.

- Xét tính liên tục tại $x_0=4$

Có $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left[(x-5)^2+3\right]=(4-5)^2+3=4=f(4)\Rightarrow$ hàm số f(x) liên tục tại $x_0=4$.

4). Có $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x+3-1}{\left(\sqrt{2x+3}+1\right)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2(x+1)}{\left(\sqrt{2x+3}+1\right)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{2.(-1)+3}+1}=1.$

Có $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\sqrt{3-x}}{2}=\dfrac{\sqrt{3-(-1)}}{2}=1.$

Có $f(-1)=\dfrac{\sqrt{3-(-1)}}{2}=1$

Vì $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0=-1$.

5). Ta có $f(x_0)=f(1)=\dfrac{1}{2}$

Có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}.$

Có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}.$

Vì $f(1)\neq\lim\limits_{x\to -1} f(x)\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x_0=1$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=2$?

LỜI GIẢI

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1.$

Hàm liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x=2$ khi $a=1.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|2x^2-7x+6|}{x-2} & \text{khi } x<2 \\ a + \dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \ge 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 2$.

LỜI GIẢI

Ta có :

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{|2x^2-7x+6|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(2-x)(2x-3)}{x-2}$

  $= \lim\limits_{x\to 2^-}(3-2x) = -1$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(a + \dfrac{1-x}{2+x}\right) = a - \dfrac{1}{4} = f(2)$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a - \dfrac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{4}$.

ĐẾM SỐ NGHIỆM

Chứng minh phương trình sau có ít nhất một nghiệm:

a). $x^3 - 5x^2 + 7 = 0$ b). $x^5 + x - 3 = 0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(-1) = -1 - 5.1 + 7 = 1$ và $f(-2) = -21$, nên suy ra $f(-1)f(-2) = -21 < 0$ với mọi m. Do đó $f(x) = 0$

luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0 \in (-2;-1)$ với mọi m.

b). Đặt $f(x) = x^5 + x - 3$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(1) = -1$ và có $f(2) = 31$, nên suy ra $f(1)f(2) = 31.(-1) = -31 < 0$ với mọi m.

Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $n_0 \in (1;2)$ với mọi m.

Chứng minh các phương trình sau có ít nhất hai nghiệm :

a). $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

b). $x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1 = 0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0) = -3$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 2$

Vì $f(-1)f(0) = -12 < 0, \forall m$ $\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất 1 nghiệm $\in (-1;0)$ (2)

Vì $f(0)f(1) = -6 < 0$ $\forall m$ $\Rightarrow$ phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm $\in (0;1)$ (3)

Từ $(2),(3) \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

10. Chứng minh rằng với mọi a, b, c phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists x_1 > 0$ để $f(x_1) > 0.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_2 > 0$ để $f(x_2) < 0.$

Như vậy có x_1, x_2 để $f(x_1).f(x_2) < 0$ suy ra phương trình có nghiệm $x \in (x_1; x_2)$ vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH: TÍNH GIỚI HẠN

1. Ý tưởng:

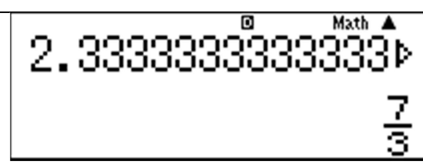
* Gán cho biến X một giá trị gần đúng rồi tính giá trị biểu thức (dùng phím CALC)

* Ví dụ:

Giới hạn	Giá trị của X
$x \to a^+$	a + 0.00000001
$x \to a^-$	a – 0,00000001
$x \to a$	a+000000001 hoặc a-0,000000001
$x \to +\infty$	9999999999
$x \to -\infty$	- 999999999

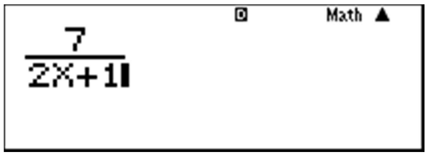
(Nếu máy báo lỗi thì lấy ít chữ số thập hơn)

<u>CHÚ Ý: KHÔNG NHẤT THIẾT PHẢI LẤY NHIỀU SỐ 0 Y NHƯ THẦY, ƯỚC LƯỢNG THÔI</u>

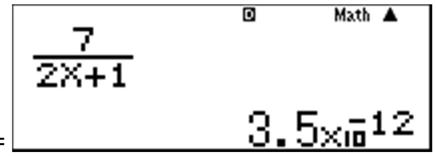
Các kết quả hay gặp trong máy	**Ý nghĩa**
Số có số mũ lớn : VD: 2.10^{20}	**Dương vô cực**
Số có số mũ lớn : VD: -2.10^{20}	**Âm vô cực**
Số có số mũ nhỏ: VD: 2.10^{-20}	**0**
Số chưa đẹp: VD: 2,3333. **Ta gõ lại vào máy tính lần nữa: 2,3333333333333** **Máy sẽ tự làm tròn giúp**	

2. Một số ví dụ:

<u>Ví dụ 1:</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{2x+1}$

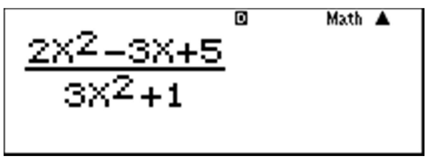


Ấn CALC 999999=

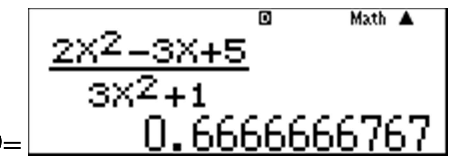


Rơi vào trường hợp kết quả có số mũ nhỏ: Kết quả là 0

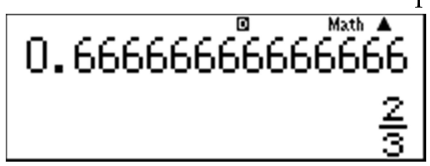
__Ví dụ 2:__ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x}{3x^2+1}$ (Bậc tử = bậc mẫu, lấy hệ số X mũ cao nhất tử mẫu chia nhau được 2/3)



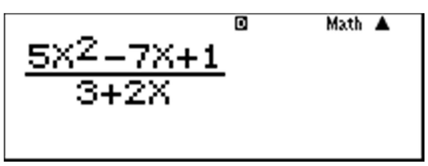
CALC − 999999=



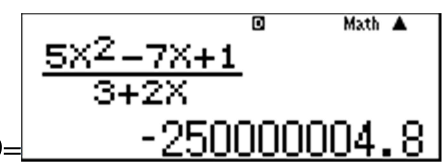
Ta làm tròn kết quả: nhập vào máy:



__Ví dụ 3:__ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-7x+1}{3+2x}$ (Bậc tử > bậc mẫu kết quả ra vô cực)

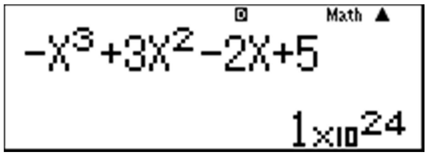


CALC − 999999=



Ta thấy kết quả âm một số to. => Kết quả - ∞

__Ví dụ 4:__ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x^2-2x+5\right)$



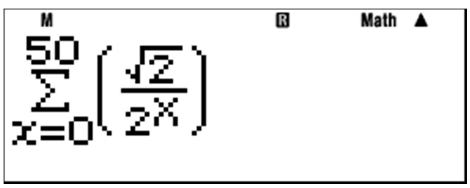
kết quả là + ∞.

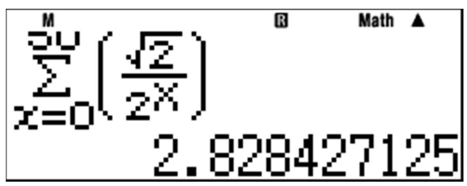
Ví dụ 5: Giới hạn của dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\ldots+\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ là:

A. $\lim u_n=2\sqrt{2}$. **B.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **C.** $\lim u_n=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$. **D.** $\lim u_n=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}$.

Giải

Ấn SHIFT log





Chọn A.

CHUYỀN ĐỀ 2: ĐẠO HÀM VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LÝ THUYẾT ĐẠO HÀM

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Giới hạn hữu hạn nếu có của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi $x\to x_0$ được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Như vậy ta có $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Nhận xét:

Nếu đặt $x-x_0=\Delta x$ và $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ thì ta có $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Trong đó Δx được gọi là số gia của biến số tại x_0 và Δy gọi là số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại x_0.

Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thì f(x) liên tục tại x_0. Tuy nhiên điều ngược lại chưa chắc đúng.

2). Cho đường cong (C), điểm M_0 cố định thuộc (C) và $M\in(C)$. Gọi k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $k_0=\lim\limits_{x_M\to x_0}k_M$. Khi đó đường thẳng M_0T qua M_0 có hệ số góc k_0 được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0. Điểm M_0 gọi là ***tiếp điểm.***

3). Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại đó tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

Hệ quả:

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ có phương trình: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

4). Khí hiệu D là một khoảng hay là hợp của những khoảng nào đó. Nếu hàm số f(x) có đạo hàm tại tại mọi điểm $x_0\in D$ thì ta nói hàm số có đạo hàm trên D. Khi đó đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x tùy ý của D được kí hiệu y' hay $f'(x)$. Ta nói y' hay $f'(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ trên tập D.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Tìm số gia của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP

Để tính số gia của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng với số gia Δx cho trước ta áp dụng công thức: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Ví dụ 1: Tìm số gia của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, biết rằng:

a). $x_0 = 1;\ \Delta x = 1$ b). $x_0 = 1;\ \Delta x = -0,1$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = f(2) - f(1) = 2^3 - 3.2^2 + 2 - (1^3 - 3.1^2 + 2) = -2$

b). Ta có $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = f(0,9) - f(1)$

$$= 0,9^3 - 3.0,9^2 + 2 - (1^3 - 3.1^2 + 2) = 0,229$$

Ví dụ 2: Tính Δy và $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và Δx

a). $y = 2x + 3$ b). $y = 2x^2 - 3x + 1$ c). $y = \sqrt{2x^2 + 1}$ d). $y = 2x^3 - 3x^2$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_o + \Delta x) + 3 - (2x_0 + 3) = 2\Delta$. Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

b). Ta có $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_o + \Delta x)^2 - 3(x_o + \Delta x) + 1 - (2x_0^2 - 3x_0 + 1)$

$$= 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x = \Delta x(4x_0 + 2\Delta x - 3).$$

Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(4x_0 + 2\Delta x - 3)}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x - 3$.

c). Ta có $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{2(x_o + \Delta x)^2 + 1} - \sqrt{2x_0^2 + 1}$

$$=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\sqrt{2\left(x_o+\Delta x\right)^2+1}+\sqrt{2x_0^2+1}}.$$

Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x\left(\sqrt{2\left(x_o+\Delta x\right)^2+1}+\sqrt{2x_0^2+1}\right)}=\dfrac{2x_0+\Delta x}{\sqrt{2\left(x_o+\Delta x\right)^2+1}+\sqrt{2x_0^2+1}}$.

d). Ta có $\Delta y=f\left(x_o+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=2\left(x_o+\Delta x\right)^3-3\left(x_o+\Delta x\right)^2-\left(2x_0^3-3x_0^2\right)$

$$=2\left(x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right)-3\left(x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right)-\left(2x_0^3-3x_0^2\right)$$

$$=\Delta x\left(6x_0^2+6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2-6x_0-3\Delta x\right)$$

Suy ra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x\left(6x_0^2+6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2-6x_0-3\Delta x\right)}{\Delta x}$

$$=6x_0^2+6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2-6x_0-3\Delta x.$$

DẠNG 2: Tìm đạo hàm bằng định nghĩa

PHƯƠNG PHÁP

Để tìm đạo hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ta có thể sử dụng một trong hai cách sau đây:

Cách 1:

- Cho x_0 một số gia $\Delta x=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$. Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- Kết luận:

+ Nếu $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số có đaọ hàm là: $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

+ Nếu $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ không tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số không có đạo hàm.

Cách 2:

- Tính giá trị của $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- Kết luận:

+ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tồn tại hữu hạn bằng L thì tại x_0, ta có $f'(x_0)=L$

+ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ không tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số không có đạo hàm.

Ví dụ : Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a). $y=2x^2+x+1$ tại $x_0=2$ b). $y=x^3+x-2$ tại $x_0=-2$

c). $y=\sqrt{2x+1}$ tại $x_0=1$ d). $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0=3$

LỜI GIẢI

a). Cách 1: Cho $x_0=2$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=2(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)+1-\left(2.2^2+2+1\right)=\Delta x(9+2\Delta x)$$

Ta có $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(9+2\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(9+2\Delta x)=9$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x+1-11}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x+5)=9$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=2$ và $f'(2)=9$.

b). $y=x^3+x-2$ tại $x_0=-2$

Cách 1: Cho $x_0=-2$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(-2+\Delta x)-f(-2)=(-2+\Delta x)^3+(-2+\Delta x)-1+12=13\Delta x-6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

$$=\Delta x\left(13-6\Delta x+(\Delta x)^2\right)$$

Ta có $f'(-2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(13-6\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(13-6\Delta x+(\Delta x)^2\right)=13$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+x-2+12}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+x+10}{x+2}$

$$=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(x^2-2x+5\right)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-2x+5\right)=13$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=-2$ và $f'(-2)=13$.

c). $y=\sqrt{2x+1}$ tại $x_0=1$

Cách 1: Cho $x_0=1$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1+\Delta x)-f(1)=\sqrt{2(1+\Delta x)+1}-\sqrt{3}=\frac{2\Delta x}{\sqrt{3+2\Delta x}+\sqrt{3}}$$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3+2\Delta x}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{3+2\Delta x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=1$ và $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

d). $y=\frac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0=3$

Cách 1: Cho $x_0=3$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(3+\Delta x)-f(3)=\frac{2(3+\Delta x)-1}{3+\Delta x+1}-\frac{5}{4}=\frac{5+2\Delta x}{4+\Delta x}-\frac{5}{4}=\frac{3\Delta x}{4(4+\Delta x)}$$

Ta có $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x.4(4+\Delta x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3}{4(4+\Delta x)}=\frac{3}{16}$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{2x-1}{x+1}-\frac{5}{4}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3(x-3)}{(x-3)(x+1)4}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{(x+1)4}=\dfrac{3}{16}$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=3$ và $f'(3)=\dfrac{3}{16}$.

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1). Định lý 1: Cho các hàm số $u=u(x), v=v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) thì tổng và hiệu của chúng cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và

$(u+v)'=u'+v';\ (u-v)'=u'-v'$

Chú ý: Định lý 1 có thể mở rộng cho tổng hay hiệu của hữu hạn các hàm số.

2). Định lý 2: Cho các hàm số $u=u(x), v=v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) thì tích của chúng cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và $(u.v)'=u'v+uv'$.

Đặc biệt : $(a.u)'=a.u'$ (a là hằng số),

Chú ý: Định lý 2 có thể mở rộng cho tích của hữu hạn các hàm số. Chẳng hạn:

$(u.v.w)'=u'vw+uv'w+uvw'$

3). Định lý 3: Cho các hàm số $u=u(x), v=v(x)$ có đạo hàm trên (a;b) và $v(x)\neq 0$ trên (a;b) thì thương $\dfrac{u}{v}$ cũng có đạo hàm trên khoảng (a;b) và

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Hệ quả: $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}(v\neq 0)$.

4). Cho hai hàm số $y=f(u)$ và $u=g(x)$. Ta gọi hàm số $y=F(x)=f[g(x)]$ là hàm số hợp của hai hàm số $u=g(x)$ và $y=f(u)$. Tập xác định của hàm số $f[g(x)]$ là tập hợp tất cả các giá trị của x làm cho biểu thức $f[g(x)]$ có nghĩa.

5). Định lý 4: Nếu hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y=f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0=u(x_0)$ thì hàm số hợp $y=F(x)=f[u(x)]$ cũng có đạo hàm tại điểm x_0 và $F'(x_0)=f'(u_0).u(x_0)$ hay $y'_x=y'_u.u'_x$.

Hệ quả: $(u^n)'=n.u^{n-1}.u'(n\in N$ và $n\geq 2)$; $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$

QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Giả sử $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm, khi đó:

1). $(u + u - w)' = u' + v' - w'$; **2).** $(uv)' = u'v + v'u$; **3)** $(k.u)' = k.u'$ ($k \in R$)

4). $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ **5).** $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

BẢNG ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản	**Đạo hàm của hàm số hợp (u = u(x))**
$(C)' = 0$	
$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \left(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0\right)$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ $(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}, \left(x \neq 0\right)$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u', \left(\alpha \in \mathbb{R}, u > 0\right)$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u > 0)$ $(\dfrac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $(u \neq 0)$ $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n}{u^{n+1}}.u', \left(u \neq 0\right)$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$ $\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$ $(x \neq k\pi, k \in Z)$.	$(\sin u)' = \cos u.u'$ $(\cos u)' = -\sin u.u'$ $\left(\tan u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \left(1 + \tan^2 u\right)u'$ $(u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$ $\left(\cot u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -\left(1 + \cot^2 u\right)u'$ $(u \neq k\pi, k \in Z)$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM NHANH

- $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \dfrac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$
- $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \dfrac{(ae-bd)x^2+2(af-dc)x+bf-ec}{(dx^2+ex+f)^2}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

ĐẠO HÀM

1: $y=\left(\frac{1}{2}x^5+\frac{2}{3}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+4x-5\right)$

$y'=\left(\frac{1}{2}x^5+\frac{2}{3}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+4x-5\right)' \Leftrightarrow y'=\left(\frac{1}{2}x^5\right)'+\left(\frac{2}{3}x^4\right)'-\left(x^3\right)'-\left(\frac{3}{2}x^2\right)'+\left(4x\right)'-5'$

$y'=\frac{5}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3-3x^2-3x+4.$

2: $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-0,5x^4$

$y'=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-0,5x^4\right)'$

$\Leftrightarrow y'=\left(\frac{1}{4}\right)'-\left(\frac{1}{3}x\right)'+\left(x^2\right)'-\left(0,5x^4\right)'$

$\Leftrightarrow y'=-\frac{1}{3}+2x-2x^3.$

3: $y=2x^4-\frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5$

$y'=\left(2x^4-\frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5\right)' \Leftrightarrow y'=\left(2x^4\right)'-\left(\frac{1}{3}x^3\right)'+\left(2\sqrt{x}\right)'-5' \Leftrightarrow y'=8x^3-x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}.$

4: $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2-x+a$ (a là hằng số)

$$y' = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - x + a\right)' \Leftrightarrow y' = x^3 - x^2 + x - 1 .$$

5: $y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

$$y' = \left(\frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' \qquad \Leftrightarrow y' = \left(3.x^{-2}\right)' - \left(\sqrt{x}\right)' + \frac{2}{3}\left(x\sqrt{x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow y' = 3.(-2).x^{-3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\left(x'.\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)'.x\right) \Leftrightarrow y' = \frac{-6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.x\right)$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{-6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}.$$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a). $y = (x^2 + 3x)(2 - x)$. b) $y = (2x - 3)(x^5 - 2x)$ c). $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

a). $y = (x^2 + 3x)(2 - x)$.

$$y' = \left((x^2 + 3x)(2 - x)\right)' = (x^2 + 3x)'.(2 - x) + (x^2 + 3x).(2 - x)'$$

$$= (2x + 3)(2 - x) + (x^2 + 3x)(-1) = -3x^2 - 2x + 6.$$

b). $y = (2x - 3)(x^5 - 2x)$

$$y' = \left[(2x - 3)(x^5 - 2x)\right]' = (2x - 3)'(x^5 - 2x) + (x^5 - 2x)'(2x - 3)$$

$$= 2(x^5 - 2x) + (5x^4 - 2)(2x - 3) = 12x^5 - 15x^4 - 8x + 6.$$

c). $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

$$y' = \left[(x^2 + 1)(5 - 3x^2)\right]' = (x^2 + 1)'(5 - 3x^2) + (5 - 3x^2)'(x^2 + 1)$$

$$= 2x(5 - 3x^2) - 6x(x^2 + 1) = 10x - 6x^3 - 6x^3 - 6x = -12x^3 + 4x.$$

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a). $y=\left(x^7+x\right)^2$ b). $y=\left(2x^3-3x^2-6x+1\right)^2$ c). $y=\left(1-2x^2\right)^3$

a). $y=\left(x^7+x\right)^2$. Sử dụng công thức $\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$ (với $u=x^7+x$)

$y'=2\left(x^7+x\right).\left(x^7+x\right)'=2\left(x^7+x\right)\left(7x^6+1\right)$

b). $y=\left(2x^3-3x^2-6x+1\right)^2$. Sử dụng công thức $\left(u^\alpha\right)'$ với $u=2x^3-3x^2-6x+1$

$y'=2\left(2x^3-3x^2+6x+1\right)\left(2x^3-3x^2+6x+1\right)'=2\left(2x^3-3x^2+6x+1\right)\left(6x^2-6x+6\right)$.

c). $y=\left(1-2x^2\right)^3$. Sử dụng công thức $\left(u^\alpha\right)'$ với $u=1-2x^2$

$y'=3\left(1-2x^2\right)^2\left(1-2x^2\right)'=3\left(1-2x^2\right)^2\left(-4x\right)=-12x\left(1-2x^2\right)^2$.

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a). $y=x^2+x\sqrt{x}+1$ b). $y=\sqrt{1+2x-x^2}$ c). $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}$

a). $y=x^2+x\sqrt{x}+1$

$y'=\left(x^2\right)'+\left(x\sqrt{x}\right)'+1'=2x+x'.\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)'.x=2x+\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.x=2x+\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

b). $y=\sqrt{1+2x-x^2}$. Sử dụng công thức $\left(\sqrt{u}\right)'$ với $u=1+2x-x^2$

$$y'=\frac{\left(1+2x-x^2\right)'}{\sqrt{1+2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

c). $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}$

$$y'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'-\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}-\frac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bài 5: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a). $y=x\cos x$ b). $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$ c). $y=\sin^3\left(2x+1\right)$

d). $y=\sin\sqrt{2+x^2}$ e). $y=\sqrt{\sin x+2x}$ f). $y=2\sin^2 4x-3\cos^3 5x$

a). $y=x\cos x$. Ta áp dụng đạo hàm tích.

$y'=x'\cos x+x.(\cos x)'=\cos x-x\sin x.$

b) $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$. Bước đầu tiên ta áp dụng công thức $\left(u^\alpha\right)'$ với $u=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

$$y'=3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\left(\frac{\sin}{1+\cos x}\right)'$$

Tính : $\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'(1+\cos x)-(1+\cos x)'.\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}.$$

Vậy $y'=3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\frac{1}{1+\cos x}=\frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$.

c). $y=\sin^3(2x+1)$. Bước đầu tiên áp dung công thức $\left(u^\alpha\right)'$ với $u=\sin(2x+1)$

Vậy $y'=\left(\sin^3(2x+1)\right)'=3\sin^2(2x+1).\left(\sin(2x+1)\right)'$.

Tính $\left(\sin(2x+1)\right)'$: Áp dụng $(\sin u)'$, với $u=(2x+1)$

Ta được: $\left(\sin(2x+1)\right)'=\cos(2x+1).(2x+1)'=2\cos(2x+1)$.

$\Rightarrow y'=3.\sin^2(2x+1).2\cos(2x+1)=6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$.

d). $y=\sin\sqrt{2+x^2}$. Áp dụng công thức $(\sin u)'$ với $u=\sqrt{2+x^2}$

$$y'=\cos\sqrt{2+x^2}.\left(\sqrt{2+x^2}\right)'=\cos\sqrt{2+x^2}.\frac{\left(2+x^2\right)'}{2\sqrt{2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}.$$

e). $y=\sqrt{\sin x+2x}$. Áp dụng $\left(\sqrt{u}\right)'$, với $u=\sin x+2x$

$y' = \frac{(\sin x + 2x)'}{2\sqrt{\sin x + 2x}} = \frac{\cos x + 2}{2\sqrt{\sin x + 2x}}.$

f). $y = 2\sin^2 4x - 3\cos^3 5x$. Bước đầu tiên áp dụng $(u+v)'$

$y' = (2\sin^2 4x)' - 3(\cos^3 5x)'$

Tính $(\sin^2 4x)'$: Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = \sin 4x,$ ta được:

$(\sin^2 4x)' = 2\sin 4x.(\sin 4x)' = 2\sin 4x.\cos 4x(4x)' = 4\sin 8x.$

Tương tự: $(\cos^3 5x)' = 3\cos^2 5x.(\cos 5x)' = 3\cos^2 5x.(-\sin 5x).(5x)'$

$$= -15\cos^2 5x.\sin 5x = \frac{-15}{2}\cos 5x.\sin 10x.$$

Kết luận: $y' = 8\sin 8x + \frac{45}{2}\cos 5x.\sin 10x$

Cho $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. Với những giá trị nào của x thì:

a. $f'(x) = 0$ b. $f'(x) = -2$ c. $f'(x) = 10$

LỜI GIẢI

Ta có $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right) = x^2 + x - 2$

a). $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

b). $f'(x) = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

c). $f'(x) = 10 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -4$

Câu : Giải

a). Cho $f(x) = 2x^3 + x - \sqrt{2}, g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

b).Cho $f(x)=2x^3-x^2+\sqrt{3}, g(x)=x^3+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}$. Giải bất phương trình

$f'(x)>g'(x)$.

Cho $f(x)=3x+\frac{60}{x}-\frac{64}{x^3}+5$. Giải phương trình $f'(x)=0$

LỜI GIẢI

a). Ta có $f'(x)=\left(2x^3+x-\sqrt{2}\right)'=6x^2+1$, $g'(x)=\left(3x^2+x+\sqrt{2}\right)'=6x+1$

$f'(x)>g'(x)\Leftrightarrow 6x^2+1>6x+1\Leftrightarrow 6x^2-6x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

b). $f'(x)=\left(2x^3-x^2+\sqrt{3}\right)'=6x^2-2x$, $g'(x)=\left(x^3+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}\right)'=3x^2+x$

$f'(x)>g'(x)\Leftrightarrow 6x^2-2x>3x^2+x\Leftrightarrow 3x^2-3x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

c). Ta có $f'(x)=\left(3x+\frac{60}{x}-\frac{64}{x^3}+5\right)'=3-\frac{60}{x^2}+\frac{192}{x^4}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3-\frac{60}{x^2}+\frac{192}{x^4}=0\ (1)$. Đặt $t=\frac{1}{x^2},(t>0)$

$(1)\Leftrightarrow 192t^2-60t+3=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}\vee t=\frac{1}{16}$

Với $t=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$

Với $t=\frac{1}{16}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{1}{16}\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm4$

Vậy $f'(x)=0$ có 4 nghiệm $x=\pm2$, $x=\pm4$

VI PHÂN

TÓM TẮT GIÁO KHOA

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Gọi Δx là số gia của biến số tại x_0. Ta gọi tích $f'(x_0).\Delta x$ là vi phân của hàm số f(x) tại điểm x_0 ứng với số gia Δx. Kí hiệu $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$.

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x. Ta gọi tích $f'\left(x\right).\Delta x$ là vi phân của hàm số f(x) tại điểm x ứng với số gia Δx (gọi tắt là vi phân của f tại điểm x). Kí hiệu $df(x) = f'(x).\Delta x$. Nếu chọn hàm số $y = x$ thì ta có $dy = dx = 1.\Delta x = \Delta x$. Vì vậy ta thường kí hiệu $\Delta x = dx$ và $dy = f'\left(x\right)dx$.

Công thức tính gần đúng nhờ vi phân là: $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right).\Delta x$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1: Tìm vi phân của hàm số

PHƯƠNG PHÁP

a). Tính vi phân của hàm số f(x) tại x_0 cho trước:

Tính đạo hàm của hàm số tại x_0.

Suy ra vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx là $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$.

b). Tính vi phân của hàm số f(x).

Tính đạo hàm của hàm số .

Suy ra vo phân của hàm số: $dy = df(x) = f'\left(x\right)dx$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 2$. Tính vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$.

LỜI GIẢI

Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 - 4x$. Do đó vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$ là:

$df(1) = f'(1).\Delta x = \left(3.1^2 - 4.1\right).0,02 = -0,02$.

Ví dụ 2: Tính vi phân của các hàm số sau:

a). $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}$ b). $y = \sqrt{3x^3 + 2x^2}$ c). $y = \sin x \cos\dfrac{x}{2}$ d). $y = x\sin x - \cos x$

LỜI GIẢI

a). Ta có $y' = f'(x) = \dfrac{(2x^2 - 3x + 1)'(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1)'(2x^2 - 3x + 1)}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} = \dfrac{}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$

suy ra $dy = f'(x)dx =$

DẠNG 2: Tính gần đúng giá trị của hàm số:

Để tính gần đúng giá trị của hàm số f(x) tại điểm $x = (x_0 + \Delta x)$ cho trước, ta áp dụng công thức

$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right).\Delta x$.

Ví dụ tính gần đúng các giá trị sau (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả).

a). $\sqrt{16,25}$ b). $\cos 30^0 15'$ c). $\sin 46^0$ d). $\dfrac{1}{0,9995}$

e). $\tan 53^0 15'$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $\sqrt{16,25} = \sqrt{16 + 0,25}$. Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{x} \Rightarrow f'\left(x\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

chọn $x_0 = 16$ và $\Delta x = 0,25$, ta có $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right).\Delta x$

$\Rightarrow \sqrt{16+0,25} \approx \sqrt{16} + \dfrac{1}{2\sqrt{16}}.0,25 = 4 + 0,03125 = 4,03125 \Rightarrow \sqrt{16+0,25} \approx 4,0313$

b). Ta có $\cos 30^0 15' = \cos\left(30^0 + 15'\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{720}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$.

Chọn $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ và $\Delta x = \dfrac{\pi}{720}$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

$\Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{720}\right) \approx \cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6}.\dfrac{\pi}{720} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{1440}$.

c). Ta có $\sin 46^0 = \sin\left(45^0 + 1^0\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{180}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Chọn $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ và $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

$\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \sin\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{4}.\dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}\pi}{360}$

d). Ta có $\dfrac{1}{0,9995} = \dfrac{1}{1-0,0005}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Chọn $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0,0005$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{1-0,0005} \approx 1 - 1.(-0,0005) \approx 1,0005$.

e). $\tan 53^0 15' = \tan\left(60^0 - (6^0 45')\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3\pi}{80}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Chọn $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ và $\Delta x = -\dfrac{3\pi}{80}$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

$\Rightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3\pi}{80}\right) \approx \tan\dfrac{\pi}{3} + \left(1 + \tan^2\dfrac{\pi}{3}\right).\left(-\dfrac{3\pi}{80}\right) \approx 1,2608$.

ĐẠO HÀM CẤP CAO

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$. Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$

. Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$, tức là ta có:

$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'(n\in N, n>1)$.

2.Đạo hàm cấp 2 của hàm số f(t) là gia tốc tức thời của chuyển động s=f(t) tại thời điểm t.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số.

1.PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng trực tiếp định nghĩa: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$ để tính đạo hàm đến cấp mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ: Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau:

a). $y=x\sin 2x,\left(y'''\right)$ b). $y=\cos^2 x,\left(y'''\right)$ c). $y=x^4+4x^3-3x^2+1,\left(y^{(n)}\right)$

d). $y=x^4-\sin 2x,\left(y^{(4)}\right)$ e). $y=\sin^2 2x,\left(y^{(5)}\right)$ f). $y=\dfrac{3x-1}{x+2},\left(y^{(4)}\right)$

LỜI GIẢI

a). Có $y'=x'\sin 2x+x.(\sin 2x)'=\sin 2x+2x\cos 2x$

$\Rightarrow y''=(\sin 2x)'+(2x)'\cos 2x+2x(\cos 2x)'=4\cos 2x-4x\sin 2x$

$\Rightarrow y'''=4(\cos 2x)'-(4x)'\sin 2x-4x(\sin 2x)'=-8\sin 2x-4\sin 2x-8\cos 2x$

$=-12\sin 2x-8\cos 2x$.

b). Ta có $y=\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\Rightarrow y'=-\sin 2x$

$\Rightarrow y''=-2\cos 2x\Rightarrow y'''=4\sin 2x$

c). $y=x^4+4x^3-3x^2+1$

$\Rightarrow y'=4x^3+12x^2-6x\Rightarrow y''=12x^2+24x-6\Rightarrow y'''=24x+24$

$\Rightarrow y^{(4)}=24\Rightarrow y^{(5)}=0\Rightarrow ...\Rightarrow y^{(n)}=0$.

d). $y = x^4 - \sin 2x$

$\Rightarrow y' = 4x^3 - 2\cos 2x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 4\sin 2x$

$\Rightarrow y''' = 24x + 8\cos 2x \Rightarrow y^{(4)} = 24 - 16\sin 2x$

e). $y = \sin^2 2x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4x\right)$

$\Rightarrow y' = 2\sin 4x \Rightarrow y'' = 8\cos 4x \Rightarrow y''' = -32\sin 4x$

$\Rightarrow y^{(4)} = -128\cos 4x \Rightarrow y^{(5)} = 512\sin 4x$

f). $y = \frac{3x-1}{x+2}, \left(y^{(4)}\right)$

$$\Rightarrow y' = \frac{7}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-7\left[\left(x+2\right)^2\right]^/}{\left(x+2\right)^4} = \frac{-14}{\left(x+2\right)^3}$$

$$\Rightarrow y''' = \frac{14\left[\left(x+2\right)^3\right]^/}{\left(x+2\right)^6} = \frac{42}{\left(x+2\right)^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{-42\left[\left(x+2\right)^4\right]^/}{\left(x+2\right)^8} = \frac{-168}{\left(x+2\right)^5}$$

DẠNG 2: Tìm đạo hàm cấp n của một hàm số

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Tính y', y'', y'''. Dựa vào các đạo hàm vừa tính, dự đoán công thức tính $y^{(n)}$.

Bước 2: Chứng minh công thức vừa dự đoán là đúng bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý: Cần phân tích kĩ các kết quả của đạo hàm y', y'', y''' tìm ra quy luật để dự đoán công thức $y^{(n)}$ chính xác.

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin x \left(n \in N^*\right)$

LỜI GIẢI

Bước 1: Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + 1.\frac{\pi}{2}\right); y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (1), \forall n \in N^*$

Bước 2: Chứng minh (1) bằng quy nạp:

$*$ $n = 1 : (1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$ nghĩa là ta có: $y^k = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ ta phải chứng minh (1) cúng đúng với $n = k + 1$ nghĩa là ta phải chứng minh

$$y^{(k+1)} = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

Thật vậy : vế trái $(2) = y^{k+1} = \left[y^k\right]' = \left[\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right) =$ =vế phải (2)

$\Rightarrow (2)$ đúng, nghĩa là (1) đúng với $n = k + 1$.

Bước 3: theo nguyên lí quy nạp suy ra $y^n = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in N^*$.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x+3}\left(n \in N^*\right)$

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = (-1)' \frac{1}{(x+3)^2} = (-1)' \frac{1!}{(x+3)^2}$;

$$y'' = (-1)^2 . \frac{1.2}{(x+3)^3} = (-1)^2 . \frac{2!}{(x+3)^3}.$$

Dự đoán: $y^n = (-1)^n \frac{n!}{(x+3)^{n+1}} \quad (1), \forall n \in N^*$.

Chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp:

$*n = 1 : (1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là ta có: $y^k = (-1)^k \frac{k!}{(x+3)^{k+1}}$ ta phải chứng minh (1) cúng đúng với $n = k+1$, nghĩa là ta phải chứng minh:

$$y^{k+1} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}} \quad (2)$$

Thật vậy: vế trái

$$(2) = y^{k+1} = \left[y^k\right]' = \left[(-1)^k\frac{k!}{(x+3)^{k+1}}\right]' = (-1)^{k+1}.\frac{k!}{\left[(x+3)^{k+1}\right]^2}.\left[(x+3)^{k+1}\right]'$$

$$= (-1)^{k+1}.\frac{k!(k+1)}{(x+3)^{k+2}} = (-1)^{k+1}.\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}} = vt(2)$$

Vậy (2) đúng nghĩa là (1) đúng với $n = k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $y^n = (-1)^n.\dfrac{n!}{(x+3)^{n+1}}, \forall n \in N^*$.

DẠNG 3: Chứng minh đẳng thức:

Bài 11:

a). Cho hàm số $y = x\sin x$. Chứng minh $x.y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0 \quad (*)$

b). Cho hàm số : $y = \sqrt{2x - x^2}$ chứng minh: $y^3.y'' + 1 = 0 \quad (*)$

c). Cho hàm số: $y = x\tan x$ chứng minh: $x^2.y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 0 \quad (*)$

d). Cho hàm số: $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ chứng minh: $2(y')^2 = (y-1).y'' \quad (*)$

LỜI GIẢI

a). Cho hàm số $y = x\sin x$. Chứng minh $x.y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0 \quad (*)$

Ta có $y' = (x\sin x)' \Leftrightarrow y' = x'.\sin x + x.(\sin x)' \Leftrightarrow y' = \sin x + x\cos x$

$$y'' = (\sin x + x\cos x)' = (\sin x)' + (x\cos x)' = \cos x + x'.\cos x + x.(\cos x)' = 2\cos x - x\sin x$$

$(1) \Leftrightarrow x(2\cos x - x\sin x) - 2(\sin x + x\cos x - \sin x) + x^2 \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2x\cos x - x^2\sin x - 2x\cos x + x^2\sin x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đpcm).

b). Cho hàm số : $y = \sqrt{2x - x^2}$ chứng minh: $y^3.y'' + 1 = 0 \quad (*)$

Ta có: $y' = \left(\sqrt{2x - x^2}\right)' \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{2x - x^2}}.\left(2x - x^2\right)' = \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$.

$$y'' = \frac{(1-x)'.\sqrt{2x - x^2} - \left(\sqrt{2x - x^2}\right)'.(1-x)}{\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2x - x^2} - \dfrac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}.(1-x)}{\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(2x - x^2\right) - (1-x)^2}{\sqrt{2x - x^2}.\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^2} = \frac{-1}{\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^3}.$$

$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x - x^2}\right)^3.\dfrac{-1}{\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^3} + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 + 1 = 0$ (đpcm).

c). Cho hàm số: $y = x\tan x$ chứng minh: $x^2.y'' - 2\left(x^2 + y^2\right)(1 + y) = 0 \quad (*)$

Ta có: $y' = (x\tan x)' = x'.\tan x + x.(\tan x)' = \tan x + x\left(1 + \tan^2 x\right)$

$y'' = (\tan x)' + x'.(1 + \tan x) + x.(1 + \tan x)' = 2\left(1 + \tan^2 x\right) + x.(2\tan x).\left(\tan^2 + 1\right)$

$= 2\left(1 + \tan^2 x\right)(1 + x\tan x)$

$(*) \Leftrightarrow 2x^2\left(1 + \tan^2 x\right).(1 + x\tan x) - 2\left(x^2 + x^2\tan^2 x\right)(1 + x\tan x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2\left(1 + \tan^2 x\right)(1 + x\tan x) - 2x^2\left(1 + \tan^2 x\right)(1 + x\tan x) = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ (đpcm).

d). Cho hàm số: $y = \dfrac{x - 3}{x + 4}$ chứng minh: $2(y')^2 = (y - 1).y'' \quad (*)$

Ta có: $y' = \left(\dfrac{x - 3}{x + 4}\right)' = \dfrac{7}{(x + 4)^2}$

$$y''=\frac{-7\left((x+4)^2\right)'}{(x+4)^4}=\frac{-14}{(x+4)^3}$$

$$(*)\Leftrightarrow 2\left(\frac{7}{(x+4)^2}\right)^2=\left(\frac{x-3}{x+4}-1\right).\left(\frac{-14}{(x+4)^3}\right)\Leftrightarrow\frac{98}{(x+4)^4}=\frac{98}{(x+4)^4}\text{ (đpcm).}$$

e) Cho hàm số $y=\cos^2 3x$ chứng minh: $18(2y-1)+y''=0\quad(*)$

Ta có: $y=\cos^2 3x$

$$y'=2.\cos 3x(\cos 3x)'=2\cos 3x.(-\sin 3x)(3x)'=-3\sin 6x$$

$$y''=-18\cos 6x$$

$$(*)\Leftrightarrow 18\left(2\cos^2 3x-1\right)-18\cos 6x=0\Leftrightarrow 18.\cos 6x-18\cos 6x=0\text{ (đpcm).}$$

Bài 12:

a).Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x.\cos x}$. Chứng minh $y''+y=0\quad(*)$

b). Cho hàm số $y=\left(x^2-1\right)^2$. Chứng minh: $y^4+2xy'''-4y''=40\quad(*)$

c). Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh: $4\left(x^2+1\right).y''+4x.y'-y=0\quad(*)$

d). Chứng minh $\left(1+x^2\right).y''+x.y'-k^2.y=0$ nếu $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k$

LỜI GIẢI

a).Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x.\cos x}$ chứng minh $y''+y=0\quad(*)$

Ta có: $y=\dfrac{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)}{1-\sin x\cos x}$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$$

$y' = \cos x - \sin x$

$y'' = -\sin x - \cos x$

$(*) \Leftrightarrow -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đpcm).

b). Cho hàm số $y = \left(x^2 - 1\right)^2$. Chứng minh: $y^4 + 2xy''' - 4y'' = 40 \quad (*)$

Ta có: $y = x^4 - 2x^2 + 1$

$y' = 4x^3 - 4x$

$y'' = 12x^2 - 4$

$y''' = 24x$

$y'''' = 24.$

$(*) \Leftrightarrow 24 + 2x\left(24x\right) - 4\left(12x^2 - 4\right) = 40.$

$\Leftrightarrow 24 + 48x^2 - 48x^2 + 16 = 40 \Leftrightarrow 40 = 40$ (đpcm).

c). Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh: $4\left(x^2+1\right).y'' + 4x.y' - y = 0 \quad (*)$

Ta có: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}.\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}$

$$y'' = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\right)'.2\sqrt{1+x^2} - \left(2\sqrt{1+x^2}\right)'.\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\left(2\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}.\left(2\sqrt{1+x^2} - 4x\right)}{8\left(1+x^2\right).\sqrt{1+x^2}}$$

$$(*) \Leftrightarrow 4\left(x^2+1\right)\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\left(2\sqrt{1+x^2} - 4x\right)}{8\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} + 4x.\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}.\left(2\sqrt{1+x^2}-4x\right)}{2\sqrt{1+x^2}}+2x\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2x\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}=0$$

$\Leftrightarrow 0=0$ (đpcm).

d). Chứng minh $\left(1+x^2\right).y''+x.y'-k^2.y=0$ nếu $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k$

Ta có: $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k \Rightarrow y'=k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}.\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$=k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}.\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)=k.\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y''=k.\frac{\left[\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\right]'.\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'.\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{x^2+1}$$

$$=k.\frac{\frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}.\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\left(k\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$(*)\Leftrightarrow\left(1+x^2\right)\frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k.\left(k\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}+\frac{x.k\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^k}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k.\left(k\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x.k\left(x^2+\sqrt{1+x^2}\right)^k}{\sqrt{1+x^2}}-k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k=0$$

Quy đồng đặt thừa số chung được:

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}\left(k^2\sqrt{x^2+1}-kx+kx-k^2\sqrt{x^2+1}\right)=0 \Leftrightarrow 0=0 \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$ ta có:

a)Nếu $y=\frac{1}{x}$ thì $y^n=\left(-1\right)^n.\frac{n!}{x^{n+1}}$.

b) Nếu $y=\cos x$ thì $y^{4n}=\cos x$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

a)Nếu $y=\sin ax$ thì $y^{4n}=a^{4n}.\sin ax$ (a là hằng số).

b) Nếu $y=\sin^2 x$ thì $y^{4n}=-2^{4n-1}\cos 2x$.

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

I – Kiến thức cần nhớ

— Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ **tại** điểm $M(x_o; y_o)$ có dạng:

$\Delta: \boxed{y = k(x - x_o) + y_o}$ Với $k = y'(x_o)$ là hệ số góc tiếp tuyến.

$\downarrow$ ① $\downarrow$ ② $\downarrow$ ③

$\longrightarrow$ ***Để viết phương trình tiếp tuyến Δ, ta cần tìm ba thành phần x_o, y_o, k***

— Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ ***tiếp xúc nhau*** $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm ***(nhớ: "hàm = hàm, đạo = đạo")***

II – Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_o)$.

— Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc k $\Rightarrow y'(x_o) = k$ (i)

— Giải (i) tìm được $x_o \longrightarrow y_o = f(x_o) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

✍ **Lưu ý**. Hệ số góc $k = y'(x_o)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\dfrac{1}{a}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan\alpha$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left|\dfrac{k - a}{1 + k.a}\right| = \tan\alpha$

② **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua (kẻ từ) điểm $A(x_A; y_A)$**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y_o = f(x_o)$ và $k = y'(x_o)$ theo x_o.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_o; y_o)$ là $\Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

— Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_o) + y_o$ (i)

— Giải phương trình $(i) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ.

③ **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo x_o.

— Đề cho $\left[\begin{array}{ll}\Delta OAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với Ox một góc } 45^o \text{ và } O \notin \Delta & (i) \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA.OB = 2S & (ii)\end{array}\right.$

— Giải (i) hoặc $(ii) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ.

④ **Tìm những điểm trên đường thẳng** $d: ax+by+c=0$ **mà từ đó vẽ được** $1,2,3,...,n$ **tiếp tuyến với đồ thị hàm số** $(C): y=f(x)$

— Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax+by+c=0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y=k(x-x_M)+y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (i) \\ f'(x)=k & (ii)\end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x)=f'(x).(x-x_M)+y_M \quad (iii)$

— Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ $M =$ số nghiệm x của (iii).

⑤ **Tìm những điểm** $M(x_M; y_M)$ **mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số** $(C): y=f(x)$ **và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau**

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y=k(x-x_M)+y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (i) \\ f'(x)=k & (ii)\end{cases}$

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x)=f'(x).(x-x_M)+y_M \quad (iii)$

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow (iii)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

— Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1$.

✍ **<u>Lưu ý</u>**.

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases}(iii): & \text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2. \\ f(x_1).f(x_2)<0. & \end{cases}$

— Đối với bài toán tìm điểm $M \in (C): y=f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o; y_o)$ và Δ là tiếp tuyến với $k=f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k=f'(x_o)=k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o).k_d=-1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o; y_o)$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Cho đường cong $(C): y = f(x) = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau:
a) Tại điểm $M_0(1\,;-2)$.
b) Tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0 = -1$.
c) Tại giao điểm của (C) với trục hoành .
d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1\,;-4)$.

LỜI GIẢI

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$

a). Ta có $f'(x_0) = f'(1) = -3$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1\,;-2)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = -3(x-1) - 3 \Leftrightarrow y = -3x$

b). Ta có $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -4, f'(x_0) = 9$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $N(-1;-4)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$y = 9(x+1) - 4 \Leftrightarrow y = 9x + 5$.

c). Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành: $x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0, f'(x_0) = f'(0) = 0$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;0)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 0$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 0, f'(x_0) = f'(3) = 9$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(3;0)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = 9(x-3) \Leftrightarrow y = 9x - 27$.

d). Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến d đi qua điểm A

Vì điểm $(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0^3-3x_0^2$, và $f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Phương trình d: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$

Vì $A(-1;-4)\in d$ nên: $(3x_0^2-6x_0)(-1-x_0)+x_0^3-3x_0^2=-4$

$\Leftrightarrow 2x_0^3-6x_0-4=0 \Leftrightarrow x_0=2 \vee x_0=-1$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=-4, f'(2)=0$, phương trình tiếp tuyến $y=-4$

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-4, f'(-1)=9$, phương trình tiếp tuyến $y=9(x+1)-4 \Leftrightarrow y=9x+5$

Cho đường cong $(C): y=\dfrac{3x+1}{1-x}$.
a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x-4y-21=0$.
b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 2x+2y-9=0$.
c). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng : $(d): x-2y+5=0$ một góc 30^0.

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$. Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{4}{(1-x)^2}$

a). Có $(d): x-4y-21=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{21}{4}\Rightarrow k_d=\dfrac{1}{4}$

Vì tiếp tuyến song song với d nên $k_{tt}=k_d=\dfrac{1}{4}$.

Gọi $M(x_0,y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=k_{tt} \Leftrightarrow \dfrac{4}{(1-x_0)^2}=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=16 \Leftrightarrow x_0=5 \vee x_0=-3$

Với $x_0=5\Rightarrow y_0=-4$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$
$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}(x-5)-4 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{21}{4}$ (loại, vì trùng với d).

Với $x_0=-3\Rightarrow y=-2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}(x+3)-2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$.

b). $(\Delta): 2x+2y-9=0 \Leftrightarrow y=-x+\frac{9}{2} \Rightarrow k_{\Delta}=-1$

Vì tiếp tuyến vuông góc với Δ nên, $k_{tt}.k_{\Delta}=-1 \Rightarrow k_{tt}=1$

Gọi $N(x_0, y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=k_{tt} \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x_0)^2}=1$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4 \Leftrightarrow x_0=3 \vee x_0=-1$.

Với $x_0=3 \Rightarrow y=-5$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-1(x-3)-5 \Leftrightarrow y=-x-2$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y=-1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-1(x+1)-1 \Leftrightarrow y=-x-2$.

c). $(d): x-2y+5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \Rightarrow k_d=\frac{1}{2}$

Ta có tiếp tuyến hợp với d một góc 30^0, nên có $\left|\frac{k_{tt}-k_d}{1+k_{tt}k_d}\right|=\tan 30^0$

$$\left|\frac{k_{tt}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k_{tt}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\left(k_{tt}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(1+\frac{1}{2}k_{tt}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{11}{4}k_{tt}^2-4k_{tt}-\frac{1}{4}=0$$

Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ (C)

a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).

b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

LỜI GIẢI

Ta có: $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

a). Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = -1$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4) là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = -1(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = -x + 6$

b). Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị, ta có $f'(x_0) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{{x_0}^2 - 2x_0 - 1}{(x_0-1)^2} = 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ (vô lý).

Kết luận không có tiếp tuyến nào có hệ số góc bằng 1.

Cho hàm số (C): $y = \sqrt{1 - x - x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

b) Song song với đường thẳng (d): x + 2y = 0.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D = \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Ta có $f'(x) = \dfrac{-1-2x}{2\sqrt{1-x-x^2}}$

a). Với $x_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}, f'(x_0) = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$y = -2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = -2x + \dfrac{3}{2}$.

b). Ta có $(d): x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x \Rightarrow k_d = -\dfrac{1}{2}$

Vì tiếp tuyến song song với d nên, $k_{tt} = k_d = -\dfrac{1}{2}$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị, ta có $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-1-2x_0}{2\sqrt{1-x_0-x_0^2}} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2x_0 = \sqrt{1 - x_0 - x_0^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2x_0 \ge 0 \\ x_0 = 0 \vee x_0 = -1 \end{cases}$

So với điều kiện $x_0 = 0$ (nhận), $x_0 = -1$ (loại)

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;1)$ là: $y = -\frac{1}{2}(x-0)+1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x+1$.

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

LỜI GIẢI

Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, vậy $f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 9$

Ta có $3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 3(x_0^2 + 2x_0 + 1) - 12 = 3(x_0+1)^2 - 12 \geq -12, \forall x_0 \in (C)$

Vậy $\min f'(x_0) = -12$ tại $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 16$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = -12(x+1) + 16 \Leftrightarrow y = -12x + 4$

Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O. (Khối A – 2009) .

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=R\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Ta có $y'=f'(x)=\frac{-1}{(2x+3)^2}$

Vì tiếp tuyến (d) cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại A, B tạo thành tam giác OAB vuông cân, nên đường thẳng (d) hợp với trục Ox một góc 45^0.

Vậy có $k_{tt}=\pm\tan 45^0 \Leftrightarrow k_{tt}=\pm 1$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=\pm 1$

Với $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2}=1$ (phương trình vô nghiệm).

Với $f'(x_0)=-1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1 \Leftrightarrow (2x_0+3)^2=1 \Leftrightarrow x_0=-1 \vee x_0=-2$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này $y=-1(x+1)+1 \Leftrightarrow y=-x$. Tiếp tuyến này loại vì đường thẳng này đi qua gốc tọa độ nên không tạo thành được tam giác.

Với $x_0=-2 \Rightarrow y_0=0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này $y=-1(x+2) \Leftrightarrow y=-x-2$

Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ (1), m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm có hoành độ $x=-1$ đi qua điểm $A(1;2)$. *(Dự bị A_1 - 2008)*

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=R$

$y'=f'(x)=3x^2+6mx+m+1$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=2m-1$, $f'(-1)=-5m+4$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1;2m-1)$: $y=(-5m+4)(x+1)+2m-1$ (d).

Ta có $A(1;2)\in(d) \Leftrightarrow (-5m+4).2+2m-1=2 \Leftrightarrow m=\frac{5}{8}$.

Cho hàm số $y=\frac{3x+1}{x+1}$ (1). Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2;5)$. *(Dự bị D_1 - 2008)*

LỜI GIẢI

Tập xác định $D = R\setminus\{-1\}$. Có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(-2;5)$: $y = 2(x+2)+5 \Leftrightarrow y = 2x+9$

Gọi A là giao điểm của d và trục hoành $\Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow x_A = -\dfrac{9}{2}$, vậy $A\left(-\dfrac{9}{2};0\right)$

Gọi B là giao điểm của d và trục tung $\Rightarrow x_B = 0 \Rightarrow y_B = 9$, vậy $B(0;9)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{9}{2}\right||9| = \dfrac{81}{4}$

Cho hàm số $y = \sqrt{3}x^3+4$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(d): -x+\sqrt{3}y+6=0$ góc 30^0 .

LỜI GIẢI

Tập xác định $D = R$. Ta có $y' = 3\sqrt{3}x^2$

$(d): \sqrt{3}y - x + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} \Rightarrow k_d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vì tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc 30^0 nên thỏa $\left|\dfrac{k_{tt}-k_d}{1+k_{tt}k_d}\right| = \tan 30^0$

$$\left|\frac{k_{tt}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}k_{tt}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\left(k_{tt}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}k_{tt}\right)^2 \Leftrightarrow k_{tt}^2 - \sqrt{3}k_{tt} = 0 \Leftrightarrow k_{tt} = 0 \vee k_{tt} = \sqrt{3}$$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm

Với $k_{tt} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm (0 ; 4): $y = 4$.

Với $k_{tt} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x_0^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Với $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = \dfrac{13}{3}$, phương trình tiếp tuyến $y = \sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{13}{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x+\dfrac{10}{3}$.

Với $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = \dfrac{11}{3}$, phương trình tiếp tuyến $y = \sqrt{3}\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{11}{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x+\dfrac{14}{3}$.

Cho hàm số $y = -x^3-3x^2+9x-5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=R$. Ta có $y'=-3x^2-6x+9$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=-3x_0^2-6x_0+9$

$\Leftrightarrow f'(x_0)=-3(x_0^2+2x_0+1)+12=-3(x_0+1)^2+12\le 12$

Từ đó suy ra $\max f'(x_0)=12$ tại $x_0=-1$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-16$, phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y=12(x+1)-16\Leftrightarrow y=12x-4$

Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (C). Gọi $I(1\,;\,2)$. Tìm điểm $M\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM ***.(Dự bị B2 - 2003)***

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=R$. Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0,y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(x_0-1;\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}-2\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}=\left(x_0-1;\dfrac{1}{x_0-1}\right)\Rightarrow k_{IM}=\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M $k_{tt}=f'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng IM nên có $k_{tt}.k_{IM}=-1$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{(x_0-1)^4}=1\Leftrightarrow x_0-1=\pm1\Leftrightarrow x_0=0\vee x_0=2$

Vậy có 2 điểm $M_1(0;1),M_2(2;3)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ (C). Tìm điểm $M\in(C)$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục tọa độ tại A,B và tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$ ***.(Khối D - 2007)***

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=R\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0}{x_0+1}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \quad (d)$$

Gọi A là giao điểm của d và trục Ox, có $y_A = 0 \Rightarrow x = -x_0^2$. Vậy $A(-x_0^2; 0)$

Gọi B là giao điểm của d và trục Oy, có $x_B = 0 \Rightarrow y_B = \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$. Vậy $B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$

Ta có tam giác OAB cân tại O, theo giả thiết ta có: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left|-x_0^2\right| . \left|\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x_0^2 = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 = x_0 + 1 \\ 2x_0^2 = -x_0 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \\ 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Với $2x_0^2 + x_0 + 1 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Với $2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \vee x_0 = -\frac{1}{2}$

Với $x_0 = 1$ ta có $M(1;1)$. Với $x_0 = -\frac{1}{2}$ ta có $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M(1;1)$, $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

(*) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (C). Qua điểm $A\left(\frac{4}{9}; \frac{4}{3}\right)$ có thể kẻ được mấy tiếp tuyến đến đồ thị (C). Viết phương trình các tiếp tuyến ấy .

LỜI GIẢI

Cho hai hàm số $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của các hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tìm góc giữa hai tiếp tuyến trên.

LỜI GIẢI

Cho hàm số : $y = \frac{3x+1}{1-x}$ (C) **.**

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1\,;-1)$;

b) Vết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành;

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung ;

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) bết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): 4x-y+1=0$;

e) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 4x+y-8=0$.

LỜI GIẢI

Tìm các điểm trên đồ thị $(C): y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-1$

Gọi $M\left(x_0;\frac{1}{3}x_0^3-x_0+\frac{2}{3}\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với đồ thị (C), sao cho d vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến d là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=(x_0^2-1)(x-x_0)+\frac{1}{3}x_0^3-x_0+\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow y=(x_0^2-1)x-\frac{2}{3}x_0^3+\frac{2}{3}$.

(d) vuông góc với (Δ) khi và chỉ khi $(x_0^2-1)\left(-\frac{1}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$

Kết luận có hai tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$ và $M(-2;0)$.

Cho đồ thị $(C_m): y=\frac{(3m+1)x-m}{x+m}$.Tìm m để tiếp tuyến tại giao điểm của (C_m) với Ox song song với đường thẳng d: $y=-x-5$.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{3m^2+2m}{(x+m)^2}$.

Tọa độ giao điểm của (C_m) và trục Ox là $A\left(\dfrac{m}{3m+1};0\right)$. Phương trình tiếp tuyến Δ của (C_m) tại điểm A là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=\dfrac{(3m+1)^2}{3m^2+2m}\left(x-\dfrac{m}{3m+1}\right) \Leftrightarrow y=\dfrac{(3m+1)^2}{3m^2+2m}x-\dfrac{m(3m+1)}{3m^2+2m}$.

Để Δ song song với d: $y=-x-5$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\dfrac{(3m+1)^2}{3m^2+2m}=-1\\ \dfrac{m(3m+1)}{3m^2+2m}\neq 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12m^2+8m+1=0\\ 12m^2+9m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}\vee m=-\frac{1}{2}.$$

Kết luận $m=-\dfrac{1}{6}\vee m=-\dfrac{1}{2}$ thỏa yêu cầu.

Cho hàm số (C): $y=\dfrac{x+2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(-6;5)$ của đồ thị (C).

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta có $y'=\dfrac{-4}{(x-2)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) cần tìm với đồ thị hàm số (C) nên $y_0=\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$ và $f'(x_0)=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}$. Phương trình tiếp tuyến (d):

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=\frac{-4}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-2}$$

Ta có $A(-6;5)\in d \Leftrightarrow \dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(-6-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}=5 \Leftrightarrow 4x_0^2-24x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0\vee x_0=6$.

Kết luận có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=-x-1$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{2}$.

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}$ $(*)$ (m là tham số).

Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x-y=0$.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-mx$

Điểm thuộc $\left(C_m\right)$ có hoành độ $x=-1$ là $M\left(-1;-\frac{m}{2}\right)$

Phương trình tiếp tuyến của $\left(C_m\right)$ tại M là:

$(\Delta): y=f'(1)(x+1)-\frac{m}{2} \Leftrightarrow y=(m+1)x+\frac{m+2}{2}$

Để Δ song song với d: $5x-y=0 \Leftrightarrow y=5x$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} m+1=5 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$.

Kết luận $m=4$.

Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của (1), biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;-9)$.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Có $y'=12x^2-12x$.

Gọi $A\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) cần tìm với đồ thị hàm số (1) nên $y_0=4x_0^3-6x_0^2+1$ và $f'\left(x_0\right)=12x_0^2-12x_0$. Phương trình tiếp tuyến (d):

$y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0 \Leftrightarrow y=\left(12x_0^2-12x_0\right)\left(x-x_0\right)+4x_0^3-6x_0^2+1$

Ta có $M(-1;-9)\in d \Leftrightarrow \left(12x_0^2-12x_0\right)\left(-1-x_0\right)+4x_0^3-6x_0^2+1=-9$

$\Leftrightarrow -8x_0^3-6x_0^2+12x_0+10=0 \Leftrightarrow x_0=-1 \vee x_0=\frac{5}{4}$

Kết luận có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = 24x + 15$ và $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Cho đồ thị (C): $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với Ox.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^3 - 4x$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox: $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x^2 = -1$ (loại).

Với $x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(3;0)$ của (C): $y = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y = 15x - 45$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-3;0)$ của (C): $y = f'(-3)(x-3) \Leftrightarrow y = -15x + 45$.

Tìm $A, B \in (C): y = \frac{2x}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và ΔOAB vuông tại O ?

LỜI GIẢI

- Gọi $A\left(a;\frac{2a}{a-1}\right), B\left(b;\frac{2b}{b-1}\right) \in (C)$, $(a;b \neq 1; a \neq b)$. Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.
- Tiếp tuyến tại A và B lần lượt có hệ số góc: $k_A = \frac{-2}{(a-1)^2}$; $k_B = \frac{-2}{(b-1)^2}$.
- Do tiếp tuyến tại A và B song song nhau nên $k_A = k_B \Leftrightarrow \frac{-2}{(a-1)^2} = \frac{-2}{(b-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = (b-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1 = b-1 \\ a-1 = 1-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = 2-b \end{array}\right. \Leftrightarrow a = 2-b \quad (i)$$

- Do ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O nên $\begin{cases} O \neq A \neq B \\ \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a,b \neq 0 \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a,b \neq 0 \\ ab + \dfrac{4ab}{(a-1)(b-1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{4}{(a-1)(b-1)} = 0 \quad (ii)$$

$$(i),(ii) \Rightarrow \begin{cases} a = 2-b \\ 1 + \dfrac{4}{(a-1)(b-1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 = -\dfrac{4}{(1-b)(b-1)} \Leftrightarrow (b-1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow a = -1 \vee b = -1 \Rightarrow a = 3.$$

- Vậy $A(-1;1)$, $B(3;3)$ hoặc $A(-3;3)$, $B(-1;1)$ là các điểm cần tìm.

Tìm những điểm $M \in (C): y = \dfrac{x-1}{2x+2}$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$?

LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o; \dfrac{x_o - 1}{2x_o + 2}\right) \in (C)$, $(x_o \neq -1)$ và tiếp tuyến Δ tại điểm M có phương trình

$$\Delta: y = \frac{1}{(x_o+1)^2}(x - x_o) + \frac{x_o - 1}{2(x_o+1)} \qquad (i)$$

- Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(\dfrac{-x_o^2 + 2x_o + 1}{2}; 0\right), B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \dfrac{x_o^2 - 2x_o - 1}{2(x_o+1)^2}\right)$.

- Khi đó tọa độ trọng tâm của ΔOAB là $G\left(-\dfrac{x_o^2 - 2x_o - 1}{6}; \dfrac{x_o^2 - 2x_o - 1}{6(x_o+1)^2}\right)$.

- Do $G \in d: 4x + y = 0 \Leftrightarrow -4\dfrac{x_o^2 - 2x_o - 1}{6} + \dfrac{x_o^2 - 2x_o - 1}{6(x_o+1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow (x_o+1)^2 = 4 \quad \left(do: A \neq B \neq O \Rightarrow x_o^2 - 2x_o - 1 \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow x_o = -\frac{1}{2} \vee x_o = -\frac{3}{2} \text{ nên } (i) \Rightarrow M_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \text{ hoặc } M_2\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Tìm $A \in (C): y = x^3 - 3x + 1$ biết rằng tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A, cắt đồ thị (C) tại B (khác điểm A) thỏa: $x_A + x_B = 1$?

LỜI GIẢI

- Gọi $A\left(x_A; x_A^3 - 3x_A + 1\right) \in (C)$ và phương trình tiếp tuyến tại điểm A có dạng

$\Delta: y = \left(3x_A^2 - 3\right)\left(x - x_A\right) + x_A^3 - 3x_A + 1$.

- Ta có $\Delta \cap (C) = B$ có hoành độ nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$\left(3x_A^2 - 3\right)\left(x_B - x_A\right) + x_A^3 - 3x_A + 1 = x_B^3 - 3x_B + 1 \qquad (i)$

- Theo giả thiết, ta có: $x_A + x_B = 1 \Rightarrow x_B = 1 - x_A \qquad (ii)$

$(i),(ii) \Rightarrow \left(3x_A^2 - 3\right)\left(1 - 2x_A\right) + x_A^3 - 3x_A = \left(1 - x_A\right)^3 - 3\left(1 - x_A\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_A^3 + 3x_A - 1 = 0 \\ x_A \neq x_B,\ (\text{do}: A \neq B) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -1 \Rightarrow x_B = 2 \\ x_A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_B = \dfrac{1}{2}\ (L) \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;3).$$

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2\ \ (C)$.Tìm điểm M thuộc (C), sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm thứ hai là N và $MN = 6\sqrt{5}$.

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(m; m^3 - 3m + 1\right) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$y = \left(3m^2 - 3\right)(x - m) + m^2 - 3m + 2\ (d)$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$x^3 - 3x + 2 = \left(3m^2 - 3\right)(x - m) + m^2 - 3m + 2 \Leftrightarrow (x - m)^2(x + 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = -2m \end{array}\right.$, để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq -2m \Leftrightarrow m \neq 0$, khi đó $N\left(-2m; -8m^3 + 6m + 2\right)$.

Có $MN^2 = 81m^6 - 2.81m^4 + 90m^2 = 180$. Đặt $t = m^2, t \geq 0 \Rightarrow 9t^3 - 18t^2 + 10t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 2\ \ m = \pm\sqrt{2}$

Vậy có hai điểm N cần tìm $N\left(-2\sqrt{2}; -10\sqrt{2} + 2\right), N\left(2\sqrt{2}; 10\sqrt{2} + 2\right)$

Chứng minh rằng với mọi m thì đường thẳng $d: y = x + m$ luôn cắt đồ thị $(C): y = \dfrac{1 - x}{2x - 1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng

k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất ?

LỜI GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm giữa d và $(C): \frac{1-x}{2x-1}=x+m, \forall x\neq\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow g(x)=2x^2+2mx-(m+1)=0, \forall x\neq\frac{1}{2}$

- Ta có: $\begin{cases}\Delta'_g=m^2+m+2>0\\ g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\neq 0\end{cases}$: luôn đúng $\forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow d\cap(C)=\{A;B\}$.

- Gọi $A(a;a+m), B(b;b+m)$ với a,b là hai nghiệm của $g(x)=0$.

- Ta có: $T=k_1+k_2=y'(a)+y'(b)=-\left[\frac{1}{(2a-1)^2}+\frac{1}{(2b-1)^2}\right]$

$\Rightarrow T=-\frac{4\left[(a+b)^2-2ab\right]-4(a+b)+2}{\left[4ab-2(a+b)+1\right]^2}=-4(m+1)^2-2\leq -2$

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m+1=0\Leftrightarrow m=-1$ thì $T_{max}=(k_1+k_2)_{min}=-2$.

Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2+4m-3\quad(1)$

Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $y=2x-7$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1) tại các điểm A, B, C bằng 28.

LỜI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y=2x-7$ và đồ thị hàm số (1):

$x^3-(m+2)x^2+4m-3=2x-7\Leftrightarrow x^3-(m+2)x^2-2x+4m+4=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x^2-mx-2m-2=0\quad(2)\end{array}\right.$. Đặt $g(x)=x^2-mx-2m-2$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 8 > 0 \\ 2 - 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 - 2\sqrt{2} \vee m > -4 + 2\sqrt{2} \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (3).

Gọi $A(2; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (2). Hệ số góc của tiếp tuyến tại các điểm A, B, C với đồ thị hàm số (1) lần lượt là:

$k_A = y'(2) = 4 - 4m, k_B = y'(x_2) = 3x_2^2 - 2(m+2)x_2, k_C = y'(x_3) = 3x_3^2 - 2(m+2)x_3$. Theo đề bài
$k_A + k_B + k_C = 28 \Leftrightarrow 4 - 4m + 3x_2^2 - 2(m+2)x_2 + 3x_3^2 - 2(m+2)x_3 = 28$

$\Leftrightarrow 4 - 4m + 3(x_2^2 + x_3^2) - 2(m+2)(x_2 + x_3) = 28 \Leftrightarrow 4 - 4m + 3\left[(x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3\right] - 2(m+2)(x_2 + x_3) = 28$

$\Leftrightarrow 4 - 4m + 3\left[m^2 - 2(-2m - 2)\right] - 2(m+2)m = 28 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = -6 \vee m = 2$ Kết hợp với điều kiện (3) được m = 2.

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + 2 - m^2 \quad (1)$. Định m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị (1) tại ba điểm A, B, C lớn nhất.

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục hoành:

$x^3 - 3x^2 + m^2x + 2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt và khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(*)} > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m^2 > 0 \\ m^2 - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$. Gọi $A(1; y_A), B(x_1; y_B), C(x_2; y_C)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$ theo định lý Vi ét có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1.x_2 = m^2 - 2$.

Ta có $P = k_A + k_B + k_C = y'(1) + y'(x_1) + y'(x_2)$

$= -3 + m^2 + (3x_1^2 - 6x_1 + m^2) + (3x_2^2 - 6x_2 + m^2)$

$= 3\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] - 6(x_1 + x_2) + 3m^2 - 3 = 9 - 3m^2 \leq 9$

Vậy $\max P = 9$ khi $m = 0$.

Kết luận với $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2 \quad (1)$

Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = m(2-x)+2$ cắt đồ thị (C) của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(2;2), B, C$ sao cho tích các hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất ?

LỜI GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + 3x^2 - 2 = m(2-x)+2$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ g(x) = x^2 - x - m - 2 = 0 \end{array}\right.$

- Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A(2;2), B, C \Leftrightarrow g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\neq 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = 9 + 4m > 0 \\ g(2) = -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \qquad (i)$

- Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$ và gọi $B(x_1; m(2-x_1)+2), C(x_2; m(2-x_2)+2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$. Theo Viét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -(m+2) \end{cases}$.

- Ta có: $k_1k_2 = y'(x_1).y'(x_2) = (-3x_1^2 + 6x_1)(-3x_2^2 + 6x_2)$

$\Leftrightarrow k_1k_2 = 9(x_1x_2)^2 - 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = 9(m+2)^2 - 18(m+2) \Leftrightarrow k_1k_2 = 9(x)$

$\Leftrightarrow k_1k_2 = 9(m+1)^2 - 9 \geq -9 \Rightarrow (k_1k_2)_{min} = -9$ khi $m = -1$ (thỏa (i)).

Cho hàm số $y = (x+2)(x-1)^2 \quad (C)$

b). Tìm các điểm M thuộc đường thẳng $d: y = -2x + 19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị (C) đai qua điểm M vuông góc với đường thẳng $x + 9y - 8 = 0$.

LỜI GIẢI

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+9y-8=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{9}x+\frac{8}{9}$ (Δ) nên $k_{tt}.k_{\Delta}=-1 \Rightarrow k_{tt}=9$, gọi tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến là $I(x_0;y_0)$, từ đó ta có $y'(x_0)=k_{tt} \Leftrightarrow x_0^2-1=3 \Leftrightarrow x_0=2 \vee x_0=-2$

• Với $x_0=2 \Rightarrow y_0=4$ khi đó phương trình tiếp tuyến $d_1: y=y'(1)(x-2)+4 \Leftrightarrow d_1: y=9x-14$. Suy ra M là giao điểm của d và d_1 tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=9x-14 \\ y=-2x+19 \end{cases} \Rightarrow M(3;13)$.

• Với $x_0=-2 \Rightarrow y_0=0$ khi đó phương trình tiếp tuyến $d_2: y=9x+18$. Suy ra M là giao điểm của d và d_2 tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=9x+18 \\ y=-2x+19 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{11};\frac{201}{11}\right)$.

Kết luận tọa độ điểm M cần tìm là $M(3;13)$ hoặc $M\left(\frac{1}{11};\frac{201}{11}\right)$.

Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m-2)x+3m$ (C_m) (m là tham số).

Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) của hàm số đã cho vuông góc với đường thẳng $d: x-y+2=0$.

LỜI GIẢI

Có $y'=3x^2-6x+m-2$

Gọi $M(x_0;y_0) \in (C_m)$, suy ra hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại M là $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0+m-2=3(x_0-1)^2+m-5 \geq m-5$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0=1$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến nhỏ nhất là $k_{min}=m-5$ tại điểm $M(1;4m-4)$.

Để tiếp tuyến vuông góc với d $\Leftrightarrow k_{tt}.k_d=-1 \Leftrightarrow (m-5).1=-1 \Leftrightarrow m=4$.

Kết luận với m = 4 thỏa yêu cầu đề bài.

Gọi k_1 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $(C_m): y=\frac{x+m}{x+1}$ với trục hoành. Gọi k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x=1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $|k_1+k_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

LỜI GIẢI

- Ta có: $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$. Hoành độ giao điểm (C_m) với trục hoành: $x=-m$.

- Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=-m$ là $k_1=y'(-m)=\dfrac{1}{1-m}$.

- Hệ số góc tiếp tuyếnTại điểm có hoành độ $x=1$ là $k_2=y'(1)=\dfrac{1-m}{4}$.

- Ta có: $\left|k_1+k_2\right|=\left|\dfrac{1}{1-m}+\dfrac{1-m}{4}\right|=\left|\dfrac{1}{1-m}\right|+\left|\dfrac{1-m}{4}\right|\overset{\text{Cauchy}}{\geq}2\sqrt{\dfrac{1}{1-m}.\dfrac{1-m}{4}}$

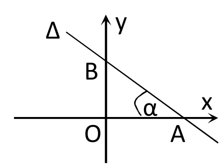
$\Leftrightarrow \left|k_1+k_2\right|\geq 1,\ \forall m\neq 1$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{1-m}\right|=\left|\dfrac{1-m}{4}\right|$

$\Leftrightarrow (1-m)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$. Vậy $\left|k_1+k_2\right|_{\min}=1$ khi $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Viết phương trình tiếp tuyến d của $(C): y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB=\sqrt{82}.OB$?

LỜI GIẢI

Phân tích và tìm hướng giải



TT Δ cắt trục Ox, Oy tại $A, B \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O và tạo với trục Ox một góc α với $|k|=\tan\alpha=\dfrac{OB}{OA}$.

Ta có: $\begin{cases} AB=\sqrt{82}.OB \\ OA^2+OB^2=AB^2 \end{cases} \Rightarrow 81.OB^2=OA^2 \Leftrightarrow \dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{9} \Rightarrow |k|=\dfrac{1}{9}$.

<u>Bài giải</u>

- Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$, $(x_o\neq 1)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k=\dfrac{-1}{(x_o-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến có dạng

$\Delta: y=-\dfrac{1}{(x_o-1)^2}(x-x_o)+\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}$ (i)

- Ta có: $\begin{cases} AB = \sqrt{82}.OB \\ OA^2 + OB^2 = AB^2 \end{cases} \Rightarrow AB^2 = 82.OB^2 = OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{9}$.

- Hệ số góc tiếp tuyến được tính $|k| = \tan\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{9} \vee k = -\dfrac{1}{9}$.

- Với $k = \dfrac{1}{9} = \dfrac{-1}{(x_o - 1)^2}$: phương trình vô nghiệm.

- Với $k = -\dfrac{1}{9} = \dfrac{-1}{(x_o - 1)^2} \Leftrightarrow (x_o - 1) = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 4 \\ x_o = -2 \end{array}\right.$ $\quad (ii)$

$(i),(ii) \Rightarrow \Delta : y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{25}{9}$ hoặc $\Delta : y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{13}{9}$ là các tiếp tuyến cần tìm.

> Lập phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$, biết nó song song với đường thẳng $d: 9x - y + 6 = 0$?

LỜI GIẢI

- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$. Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$\Delta : y = k(x - x_o) + y_o$. Do tiếp tuyến $\Delta // d: y = 9x + 6 \Rightarrow k = 9$

$$\Leftrightarrow y'(x_o) = 9 \Leftrightarrow 3x_o^2 - 6x_o = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = -1 \Rightarrow y_o = -3 \\ x_o = 3 \Rightarrow y_o = 1 \end{array}\right..$$

- Với $x_o = -1$; $y_o = -3$; $k = 9 \Rightarrow \Delta : y = 9x + 6$ (loại do $\Delta \equiv d$).

- Với $x_o = 3$; $y_o = 1$; $k = 9 \Rightarrow \Delta : y = 9(x - 3) + 1$ hay $\Delta : y = 9x - 26$.

> Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = \dfrac{1}{6}x - 1$?***Đại học khối D năm 2010***

LỜI GIẢI

- Ta có: $y' = -4x^3 - 2x$. Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$\Delta : y = k(x - x_o) + y_o$. Do $\Delta \perp d: y = \dfrac{1}{6}x - 1 \Rightarrow k.\dfrac{1}{6} = -1$

$\Leftrightarrow k = y'(x_o) = -6 \Leftrightarrow -4x_o^3 - 2x_o = -6 \Leftrightarrow x_o = 1 \Rightarrow y_o = 4$.

- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta : y = -6(x-1) + 4$ hay $\Delta : y = -6x + 10$.

Gọi $M \in (C) : y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tính $S_{\Delta OAB}$?

Cao đẳng khối A, A1, B, D năm 2013

LỜI GIẢI

Phân tích và tìm hướng giải

Viết PTTT Δ tại M khi biết $y_o = 5 = \dfrac{2x_o + 1}{x_o - 1} \Rightarrow x_o \Rightarrow k = y'(x_o)$. Tìm tọa độ $A = \Delta \cap Ox$, $B = \Delta \cap Oy$ và tính $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2} OA.OB = ?$

Bài giải

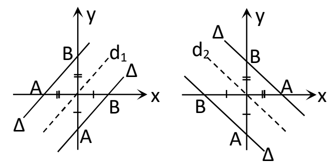
- Ta có: $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$ và $y_o = 5 = \dfrac{2x_o + 1}{x_o - 1} \Rightarrow x_o = 2 \Rightarrow k = y'(x_o) = -3$.
- Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;5)$ là $\Delta : y = -3x + 11$.
- Ta có: $A = \Delta \cap Ox$ thỏa $\begin{cases} \Delta : y = -3x + 11 \\ Ox : y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{11}{3}; 0\right)$.
- Ta lại có: $B = \Delta \cap Oy$ thỏa $\begin{cases} \Delta : y = -3x + 11 \\ Oy : x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow B(0;11)$.

$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2} OA.OB = \dfrac{1}{2} . \dfrac{11}{3} . 11 = \dfrac{121}{6}$ (đvdt)

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C) : y = \dfrac{x+2}{2x+3}$, biết rằng tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O ?***Đại học khối A năm 2009***

Phân tích và tìm hướng giải

Tiếp tuyến $\Delta \cap Ox = \{A\}$, $\Delta \cap Oy = \{B\}$ mà ΔOAB vuông cân tại O $\Rightarrow$ Δ song song với phương trình đường thẳng phân giác góc phần tư thứ I $(d_1 : y = x)$ và thứ II $(d_2 : y = -x) \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow \Delta$.



LỜI GIẢI

- Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2}$. Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tiếp tuyến là Δ.

- Theo đề $\Rightarrow \Delta \,//\, d_{1,2} : y = \pm x \Rightarrow k = y'(x_o) = \dfrac{-1}{(2x_o+3)^2} = \pm 1$

$$\Leftrightarrow (2x_o+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = -1 \Rightarrow y_o = 1 \Rightarrow k = -1 \\ x_o = -2 \Rightarrow y_o = 0 \Rightarrow k = -1 \end{array}\right..$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta : y = -1(x+1)+1 \\ \Delta : y = -1(x+2)+0 \end{array}\right. \text{ hay } \left[\begin{array}{l} \Delta : y = -x \\ \Delta : y = -x-2 \end{array}\right. \quad \text{(loại do } \equiv d : y = -x\text{)}$$

- Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta : y = -x - 2$.

Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị hàm số (C) sao cho Δ cắt trục hoành tại A mà $OA = 6$?

✍ **Phân tích và tìm hướng giải**

Gọi $M\left(x_o; \dfrac{2x_o-3}{x_o-2}\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ tt $\Delta : y = \dfrac{-1}{(x_o-2)^2}(x - x_o) + \dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$

$\Delta \cap Ox = \{A\} \Rightarrow$ tọa độ điểm A theo $x_o \to$ giải $OA = 6 \Rightarrow x_o \Rightarrow$ tt Δ.

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$. Gọi $M\left(x_o; \dfrac{2x_o-3}{x_o-2}\right) \in (C)$, $(x_o \neq 2)$ là tiếp điểm.

- Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y=\dfrac{-1}{(x_o-2)^2}(x-x_o)+\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$ $\quad(i)$

- Ta có: $A=\Delta\cap Ox \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0=\dfrac{-1}{(x_o-2)^2}(x-x_o)+\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$

$\Leftrightarrow x=2x_o^2-6x_o+6 \Rightarrow A\left(2x_o^2-6x_o+6;0\right)$.

- Theo đề $OA=6 \Leftrightarrow \left|2x_o^2-6x_o+6\right|=0 \Rightarrow x_o=0 \vee x_o=3$ $\quad(ii)$

- Thế (ii) vào $(i) \Rightarrow$ các tiếp tuyến cần tìm là: $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}\\ \Delta: y=-x+6\end{array}\right.$.

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=x^3-6x^2+9x$, biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $\Delta: x+y+1=0$ một góc α, sao cho $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$ và tiếp điểm có hoành độ nguyên ?

Phân tích và tìm hướng giải

Gọi $M\left(x_o;x_o^3-6x_o^2+9x_o\right)$ là tiếp điểm thì $k=y'(x_o)=3x_o^2-12x_o+9$ và có $\Delta: y=-x-1 \Rightarrow k_\Delta=-1$. Khi đó ta có hai hướng xử lý: một là áp dụng công thức $\tan\alpha=\left|\dfrac{k-k_\Delta}{1+k.k_\Delta}\right|$, hai là sử dụng $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta};\overrightarrow{n_d}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_d}\right|}$ với $\overrightarrow{n_\Delta}=(1;1)$ và $\overrightarrow{n_d}=(k;-1)$ là véctơ pháp tuyến của Δ và tiếp tuyến d.

LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o;x_o^3-6x_o^2+9x_o\right)$ là tiếp điểm và $k=y'(x_o)=3x_o^2-12x_o+9$.

- Phương trình tiếp tuyến có dạng $d: y=k(x-x_o)+x_o^3-6x_o^2+9x_o$ và có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_d}=(k;-1)$. Ta có: $\overrightarrow{n_\Delta}=(1;1)$.

- Theo đề: $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta};\overrightarrow{n_d}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_d}\right|}=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$

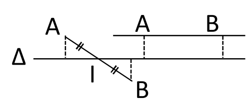
$\Leftrightarrow 9k^2-82k+9=0 \Leftrightarrow k=9 \vee k=\frac{1}{9}$.

- Với $k=9 \Rightarrow 3x_o^2-12x_o=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=0 \Rightarrow y_o=0 \\ x_o=4 \Rightarrow y_o=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta: y=9x \\ \Delta: y=9x-32 \end{array}\right.$.
- Với $k=\frac{1}{9} \Rightarrow 3x_o^2-12x_o+9=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x_o=\frac{18\pm 2\sqrt{21}}{9}$ (loại do $x_o; y_o \in \mathbb{Z}$).
- Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta: y=9x$ hoặc $\Delta: y=9x-32$.

Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y=\frac{2x-1}{x-1}$, biết tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(-2;4)$ và $B(4;-2)$?

Phân tích và tìm hướng giải

Gọi $M\left(x_o;\frac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ tt $\Delta: y=\frac{-1}{(x_o-1)^2}(x-x_o)+\frac{2x_o-1}{x_o-1}$. Do Δ cách đều hai điểm A và B nên có các trường hợp sau đây xảy ra: tiếp tuyến Δ qua trung điểm I của AB $(I\in\Delta)$ hoặc song song với AB hoặc trùng với AB $(k=k_{AB})$. Giải hai trường hợp $\Rightarrow x_o \Rightarrow \Delta$.



LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o;\frac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$, $(x_o\neq 1) \Rightarrow$ tiếp tuyến $\Delta: y=\frac{x_o-x}{(x_o-1)^2}+\frac{2x_o-1}{x_o-1}$ (i)
- Do tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(-2;4)$ và $B(4;-2)$ nên có các trường hợp:

<u>Trường hợp 1</u>. Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(1;1)\in\Delta$

$\Leftrightarrow 1=\frac{x_o-1}{(x_o-1)^2}+\frac{2x_o-1}{x_o-1} \Leftrightarrow x_o=-1 \Rightarrow \Delta: y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

<u>Trường hợp 2</u>. Δ // AB hoặc $\Delta \equiv AB \Rightarrow k=k_{AB}$.

Phương trình đường thẳng $AB: y=-x+2 \Rightarrow k_{AB}=-1=k=-\frac{1}{(x_o-1)^2}$

$\Leftrightarrow x_o=2 \vee x_o=0$. Thế vào (i) được $\Delta: y=-x+5$ hoặc $\Delta: y=-x+1$.

- Vậy $\Delta: y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ hoặc $\Delta: y=-x+5$ hoặc $\Delta: y=-x+1$.

Xác định m để đồ thị $(C): y=\frac{2x+m}{x-1}$ có tiếp tuyến song song và cách đường thẳng $d: 3x+y-1=0$ một khoảng cách bằng $\sqrt{10}$?

Phân tích và tìm hướng giải

$M\left(x_o;\frac{2x_o+m}{x_o-1}\right)\in(C)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k=\frac{-2-m}{(x_o-1)^2}$. Do $\Delta // d \Rightarrow k=-3$ sẽ thu được một phương trình với hai ẩn x_o, m và $d(M;d)=\sqrt{10}$ sẽ thu thêm được một phương trình nữa. Giải hệ này tìm được $\Rightarrow x_o, m$.

LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o;\frac{2x_o+m}{x_o-1}\right),(x_o\neq 1)$ và tiếp tuyến Δ có $k=\frac{-2-m}{(x_o-1)^2}=-3$ (do tiếp tuyến Δ // $d: y=-3x+1$) $\Leftrightarrow 3x_o^2-6x_o-m+1=0$ $\quad (i)$

- Vì $d(\Delta;d)=d(M;d)=\sqrt{10} \Rightarrow \left|3x_o+\frac{2x_o+m}{x_o-1}\right|=10$ $\quad (ii)$

$$(i),(ii)\Rightarrow \begin{cases}3x_o^2-11x_o+m+10=0\\3x_o^2-6x_o-m+1=0\end{cases} \vee \begin{cases}3x_o^2+9x_o+m-10=0\\3x_o^2-6x_o-m+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_o=1\ (L)\\x_o=\frac{11}{6}\Rightarrow m=\frac{1}{12}\end{cases} \vee \begin{cases}x_o=1\ (L)\\x_o=-\frac{3}{2}\Rightarrow m=\frac{67}{4}\end{cases}.$$

- Vậy $m=\frac{1}{12} \vee m=\frac{67}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Tìm tất cả các giá trị của tham số $m\neq 0$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị $(C_m): y=mx^3-(2m+1)x+m+1$ tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4 ?

LỜI GIẢI

- Ta có: $M = (C_m) \cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = m+1 \Rightarrow M(0; m+1)$.

- Mà $y' = 3mx^2 - 2m - 1 \Rightarrow k = y'(0) = -2m - 1$ là hệ số góc tiếp tuyến tại điểm M và có phương trình $\Delta : y = -(2m+1)x + m + 1$ $\quad(i)$

- $\Delta \cap Ox = A$ thỏa $\begin{cases} y = 0 \\ y = -(2m+1)x + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m+1}{2m+1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{m+1}{2m+1}; 0\right)$

$\Delta \cap Oy = B$ thỏa $\begin{cases} x = 0 \\ y = -(2m+1)x + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = m+1 \end{cases} \Rightarrow B(0; m+1)$.

$\Rightarrow OA = \left|\dfrac{m+1}{2m+1}\right|$, $OB = |m+1|$ với $m \neq -\dfrac{1}{2}$.

- Theo đề: $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{m+1}{2m+1}\right|.|m+1| = 4$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 8|2m+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16m + 8 = m^2 + 2m + 1 \\ 16m + 8 = -m^2 - 2m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \pm 2\sqrt{14} \\ m = -9 \pm 6\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Tìm m để tiếp tuyến của $(C_m): y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $A(1;2)$?

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1 \Rightarrow k = y'(-1) = 4 - 5m$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1; 2m-1)$ có dạng:

$d: y = (4-5m)(x+1) + 2m - 1$ và $A(1;2) \in d$ nên $\boxed{m = \dfrac{5}{8}}$.

Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, biết rằng tiếp điểm của tiếp tuyến đó với (C) cách điểm $A(0;1)$ một khoảng $= 2$?

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-1}{x_o+1}\right),(x_o\neq -1)$ là tiếp điểm. Theo đề thì $MA=2$ hay

$x_o^2+\left(\dfrac{2x_o-1}{x_o+1}-1\right)^2=4\Leftrightarrow x_o=0\vee x_o=2$. Với $x_o=0\Rightarrow$ tiếp tuyến là $d_1:\boxed{y=3x-1}$ và với $x_o=2\Rightarrow d_2:\boxed{y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}}$.

Viết phương trình tiếp tuyến của $(C):y=\dfrac{x}{1-x}$ tại M, biết rằng tiếp tuyến đó cắt các trục tọa độ tại A và B sao cho M là trung điểm của AB ?

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(m;\dfrac{m}{1-m}\right),(m\neq 1)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến tại M có

dạng $\Delta:x-(1-m)^2y-m^2=0$. Khi đó: $A(m^2;0)$ và $B\left(0;\dfrac{-m^2}{(1-m)^2}\right)$.

Để M là trung điểm của đoạn AB thì $m\neq 0;\ m^2=2m;\ -\dfrac{m^2}{(1-m)^2}=\dfrac{2m}{1-m}$

$\Leftrightarrow m=2$. Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta:\boxed{x-y-4=0}$.

Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m):y=x^3-3mx+2$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d:x+y+7=0$ góc α, biết $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$?

LỜI GIẢI

Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến $\Rightarrow$ tiếp tuyến có vtpt $\overrightarrow{n_1}=(k;-1)$.

Đường thẳng $d:x+y+7=0$ có vtpt $\overrightarrow{n_2}=(1;1)$.

Theo đề $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{26}}=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=\dfrac{3}{2}\\ k=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

YCBT $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} y'=\frac{3}{2} \\ y'=\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-3m=\frac{3}{2} \\ 3x^2-3m=\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\frac{2m+1}{2} \\ x^2=\frac{9m+2}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2m+1}{2}\ge 0 \\ \frac{9m+2}{9}\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{m\ge -\frac{1}{2}}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\frac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến này cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa: $OA=4OB$?

LỜI GIẢI

Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_o;y_o)\in(C)$ cắt Ox tại A, cắt Oy tại B

sao cho $OA=4OB$. Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4}\Rightarrow$ hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$. Mà hệ số góc của d là: $y'(x_o)=-\frac{1}{(x_o-1)^2}<0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(x_o-1)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_o=-1\Rightarrow y_o=\frac{3}{2} \text{ hoặc } x_o=3\Rightarrow y_o=\frac{5}{2}.$$

Khi đó có hai tiếp tuyến là: $d: \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}$ hoặc $d: \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}}$.

Tìm các điểm M trên đường thẳng $d: y=-2x+19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=(x+2)(x-1)^2$ đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng $d': x+9y-8=0$?

LỜI GIẢI

- Hàm số được viết lại: $y=x^3-3x+2$.
- Vì tiếp tuyến $\Delta\perp d': y=-\frac{1}{9}x+\frac{8}{9}$ nên $\Leftrightarrow k.\left(-\frac{1}{9}\right)=-1\Leftrightarrow k=9$.
- Gọi $M(x_o;y_o)\in(C)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k=y'(x_o)=3x_o^2-3=9\Leftrightarrow x_o=\pm 2$.
- Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $\Delta: y=k(x-x_o)+x_o^3-3x_o+2$.

Hay $\Delta_1: y=9x-14$ hoặc $\Delta_2: y=9x+18$ là hai tiếp tuyến tại M.

- Khi đó, tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng d và tiếp tuyến

$d \cap \Delta_1 = M_1$ thỏa $\begin{cases} y = -2x + 19 \\ y = 9x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 13 \end{cases} \Rightarrow M_1(3;13)$.

$d \cap \Delta_2 = M_2$ thỏa $\begin{cases} y = -2x + 19 \\ y = 9x + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{11} \\ y = \dfrac{207}{11} \end{cases} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{11}; \dfrac{207}{11}\right)$.

- Vậy có hai điểm M là $M_1(3;13)$ hoặc $M_2\left(\dfrac{1}{11}; \dfrac{207}{11}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Tìm các điểm $A, B \in (C): y = -x^3 + 3x$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$?

LỜI GIẢI

Gọi $A(a; -a^3 + 3a), B(b; -b^3 + 3b) \in (C), (a \neq b)$.

Do tiếp tuyến tại A và B song song nhau nên $y'(a) = y'(b)$ hay

$\Leftrightarrow -3a^2 + 3 = -3b^2 + 3 \Leftrightarrow a = -b$ (nhận) hoặc $a = b$ (loại).

Theo đề $\Rightarrow AB^2 = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -4 \\ a = -b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2; b = -2 \\ a = -2; b = 2 \end{array}\right.$.

Vậy $A(2;-2), B(-2;2)$ hoặc $A(-2;2), B(2;-2)$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

Tìm $M \in (C): y = x^3 - 3x + 2$ để tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt đồ thị (C) tại điểm thức hai là N thỏa mãn $|x_M - x_N| = 6$?

LỜI GIẢI

Gọi $M(a; a^3 - 3a + 2) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm M:

$\Delta: y = (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a + 2$ hay $\Delta: y = (3a^2 - 3)x - 2a^3 + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x + 2 = (3a^2 - 3)x - 2a^3 + 2$

$\Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow x = a \vee x = -2a \Rightarrow x_M = a;\ x_N = -2a$.

Theo đề: $|x_M - x_N| = 6 \Leftrightarrow |a - (-2a)| = 6 \Leftrightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$.

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán: $\boxed{M(2;4) \vee M(-2;0)}$.

Tìm các điểm trên $(C): y=\frac{2x-3}{x+1}$, sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{18}{5}$ (đvdt) ?

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(x_o;\frac{2x_o-3}{x_o+1}\right)\in(C);(x_o\neq-1)$ và phương trình tiếp tuyến tại M:

$\Delta: y=\frac{5}{(x_o+1)^2}(x-x_o)+\frac{2x_o-3}{x_o+1}$ và $\Delta\cap Ox=A\left(\frac{7x_o^2-x_o-3}{5x_o};0\right)$

$\Delta\cap Oy=B\left(0;\frac{2x_o^2-6x_o-3}{(x_o+1)^2}\right)$. Do $S_{\Delta ABO}=\frac{18}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{2}AO.BO=\frac{18}{5}$

Giải phương trình này, sẽ tìm được $x_o\Rightarrow M$ cần tìm.

Tìm tọa độ điểm $M\in(C): y=\frac{2x-1}{x+1}$, sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất ?

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(x_o;2-\frac{3}{x_o+1}\right)\in(C),(x_o\neq-1)$. Khi đó tiếp tuyến tại M dạng

$\Delta: y=\frac{3}{(x_o+1)^2}(x-x_o)+2-\frac{3}{x_o+1}$. Khi đó khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến là:

$$d(I;\Delta)=\frac{|3(-1-x_o)-3(x_o+1)|}{\sqrt{9+(x_o+1)^4}}=\frac{6|x_o+1|}{\sqrt{9+(x_o+1)^4}}$$

Hay $d(I;\Delta)=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_o+1)^2}+(x_o+1)^2}}\overset{\text{Cauchy}}{\leq}\sqrt{6}$ và $d_{max}=\sqrt{6}$ khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_o+1)^2}=(x_o+1)^2\Leftrightarrow(x_o+1)^2=3\Leftrightarrow x_o=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy: $\boxed{M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)}$ hoặc $\boxed{M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)}$ là hai điểm cần tìm

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;4)$ là:

A. $y = -9x + 5.$ B. $y = 9x + 5.$ C. $y = -9x - 5.$ D. $y = 9x - 5.$

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ tại điểm $B(1;-2)$ là:

A. $y = 4x + 6$ B. $y = 4x + 2$ C. $y = -4x + 6$ D. $y = -4x + 2$

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2;3)$ là:

A. $y = 2x + 1$ B. $y = -2x + 7$ C. $y = 2x + 7$ D. $y = -2x - 1$

Câu 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ tại điểm D có hoành độ bằng 2 có phương trình là:

A. $y = -9x + 14$ B. $y = 9x + 14$ C. $y = -9x + 22$ D. $y = 9x + 22$

Câu 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ tại điểm F có hoành độ bằng 2 có phương trình là:

A. $y = -x + 5$ B. $y = x + 5$ C. $y = -x - 1$ D. $y = x - 1$

Câu 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ tại điểm H có tung độ bằng 21 có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y = 40x - 101 \\ y = -40x - 59 \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} y = 40x - 59 \\ y = -40x - 101 \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} y = 40x + 59 \\ y = -40x + 101 \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} y = -40x - 59 \\ y = 40x + 101 \end{array}\right.$

Câu 7. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$ tại điểm I có tung độ bằng 1 có phương trình là

A. $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{8}{5}$ B. $y = -\dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5}$ C. $y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{8}{5}$ D. $y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5}$

Câu 8. Cho hàm số $\left(C\right)$: $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$. Phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm M có hoành độ $x_0>0$, biết $y''\left(x_0\right)=-1$ là:

A. $y=-3x-2$.
B. $y=-3x+1$.
C. $y=-3x+\frac{5}{4}$.
D. $y=-3x+\frac{1}{4}$.

Câu 9. Cho hàm số $\left(C\right)$: $y=x^3-3x+2$. Phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9 là:

A. $\left[\begin{array}{l} y=9x-14 \\ y=9x+18 \end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} y=9x+15 \\ y=9x-11 \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} y=9x-1 \\ y=9x+4 \end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l} y=9x+8 \\ y=9x+5 \end{array}\right.$.

Câu 10. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-2$ có hệ số góc $k=-3$ có phương trình là

A. $y=-3x-7$.
B. $y=-3x+7$.
C. $y=-3x+1$.
D. $y=-3x-1$.

Câu 11. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{4}x^4+2x^2$ có hệ số góc bằng $x+2y-9=0$ có phương trình là

A. $y=-48x+192$.
B. $y=-48x+160$.
C. $y=-48x-160$.
D. $y=-48x-192$.

Câu 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+3}{1-x}$ biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 4.

A. $\left[\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=4x+13 \end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=4x-13 \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} y=4x+3 \\ y=4x+13 \end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l} y=4x+3 \\ y=4x-13 \end{array}\right.$.

Câu 13. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

A. 2.
B. 1.
C. 3.
D. 4.

Câu 14. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-36x+5$ của đồ thị hàm số $y=x^4+x^2-2$ có phương trình là

A. $y=-36x-54$.　B. $y=-36x+54$.　C. $y=-36x-90$.　D. $y=-36x+90$.

Câu 15. Cho hàm số $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+2}\cdot$ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $\Delta: 3x-y+2=0$.

A. $y=3x-2$.　B. $y=3x+14$　C. $y=3x+5$.　D. $y=3x-8$.

Câu 16. Cho hàm $y=2x^3-3x-1$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $x+21y-2=0$ có phương trình là:

A. $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{21}x-33 \\ y=\dfrac{1}{21}x+31 \end{array}\right.$.　B. $\left[\begin{array}{l} y=-21x-33 \\ y=-21x+31 \end{array}\right.$.　C. $\left[\begin{array}{l} y=21x-33 \\ y=21x+31 \end{array}\right.$.　D. $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1}{21}x-33 \\ y=\dfrac{-1}{21}x+31 \end{array}\right.$.

Câu 17. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ vuông góc với đường thẳng $x-8y+2017=0$ có phương trình là

A. $y=-\dfrac{1}{8}x+8$.　B. $y=8x+8$.　C. $y=-8x+8$.　D. $y=\dfrac{1}{8}x-8$.

Câu 18. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-6x+1$ là

A. $y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3}$.　B. $y=\dfrac{1}{6}x-1$.　C. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{1}{6}x-1 \end{array}\right.$.　D. $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{13}{3} \end{array}\right.$.

Câu 19. Cho hàm số $(C): y=-4x^3+3x+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;2)$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-9x-7 \\ y=2 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} y=4x+2 \\ y=x+1 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} y=x-7 \\ y=3x-5 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} y=-x-5 \\ y=2x-2 \end{array}\right.$.

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^3+6x^2+3x-1$ có đồ thị (*C*). Trong các tiếp tuyến của (*C*), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất có phương trình là

A. $y=15x+55$. **B.** $y=-15x-5$. **C.** $y=15x-5$. **D.** $y=-15x+55$.

Câu 21. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+6x+1$ có đồ thị (*C*). Trong các tiếp tuyến của (*C*), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y=-3x+2$ B. $y=3x+2$ C. $y=-3x+8$ D. $y=3x+8$

Câu 22. Đường thẳng $y=ax-b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2-x-2$ tại điểm $M(1;0)$. Khi đó ta có:

A. $ab=36$ B. $ab=-6$ C. $ab=-36$ D. $ab=-5$

Câu 23. Cho hàm số $(C): y=-4x^3+3x+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;2)$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-9x-7 \\ y=2 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} y=4x+2 \\ y=x+1 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} y=x-7 \\ y=3x-5 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} y=-x-5 \\ y=2x-2 \end{array}\right.$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ có đồ thị (*C*). Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến với đồ thị (*C*) tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua $A(1;3)$?

A. $m=\frac{7}{9}$ B. $m=\frac{1}{2}$ C. $m=-\frac{1}{2}$ D. $m=-\frac{7}{9}$

Câu 25. Cho hàm số: $y=-2x^3+6x^2-5$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;-13)$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=6x+7 \\ y=-48x+61 \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} y=-6x-7 \\ y=48x-61 \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} y=6x-7 \\ y=-48x-61 \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} y=6x-7 \\ y=-48x+61 \end{array}\right.$

Câu 26. Cho hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}\cdot$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;4)$.

A. $d: y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{13}{3}\cdot$ B. $d: y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}\cdot$ C. $d: y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{13}{3}\cdot$ D. $d: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}\cdot$

Câu 27. Cho hàm số: $y=x^4-2x^2-1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến đi qua điểm $M(0;-1)$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(-1;3)$.

A. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$. B. $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$. C. $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{13}{4}$. D. $y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{13}{4}$.

Câu 29. Cho hàm số: $y=\dfrac{1-x}{2x+1}\cdot$ Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục hoành *Ox*?

A. $d: y=\dfrac{1}{12}x-\dfrac{1}{24}\cdot$ B. $d: y=-\dfrac{1}{12}x-\dfrac{1}{24}\cdot$

C. $d: y=\dfrac{1}{12}x+\dfrac{1}{24}\cdot$ D. $d: y=-\dfrac{1}{12}x+\dfrac{1}{24}\cdot$

Câu 30. Cho hàm số: $y=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5.

A. $\left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=-\frac{9}{4}x+5 \end{array}\right.$.

B. $y=-\frac{9}{4}x+5$

C. $\left[\begin{array}{l} y=-5 \\ y=-\frac{9}{4}x-5 \end{array}\right.$.

D. $y=-\frac{9}{4}x-5$.

ĐÁP ÁN

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	D	7	C	13	B	19	A	25	C
2	D	8	C	14	A	20	A	26	D
3	C	9	A	15	B	21	B	27	C
4	A	10	D	16	C	22	A	28	A
5	A	11	B	17	C	23	A	29	B
6	B	12	D	18	D	24	B	30	A

PHẦN 2: HÌNH HỌC

VẤN ĐỀ 1 — GÓC TRONG KHÔNG GIAN

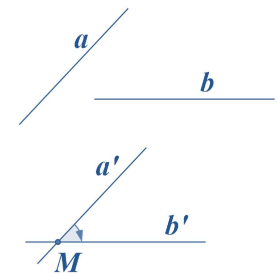
DẠNG 1: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương pháp

+ Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0^0.
+ Nếu a và b cắt nhau thì góc giữa chúng là góc nhỏ nhất trong các góc được tạo bởi hai đường thẳng.

+ Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

Tức là: $\begin{cases} a \,//\, a' \\ b \,//\, b' \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{a,b}\right) = \left(\widehat{a',b'}\right).$

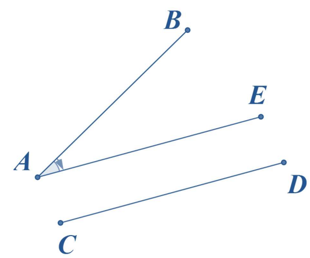


Chú ý:

* $0^0 \le \left(\widehat{a,b}\right) \le 90^0.$
* Để xác định góc giữa hai đường thẳng, ta có thể lấy một điểm (thuộc một trong hai đường thẳng đó) từ đó kẻ đường thẳng song song với đường còn lại.

  Ví dụ: Để tính $\left(\widehat{AB,CD}\right)$. Ta kẻ $AE \,//\, CD$.

  Khi đó: $\left(\widehat{AB,CD}\right) = \left(\widehat{AB,AE}\right) = \widehat{BAE}.$



* Nếu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là hai vecto chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì:

  $$\left(\widehat{a,b}\right) = \left[\begin{array}{ll} \left(\widehat{\vec{u}_1,\vec{u}_2}\right) = \alpha & khi \quad \alpha \le 90^0 \\ 180^0 - \alpha & khi \quad \alpha > 90^0 \end{array}\right..$$

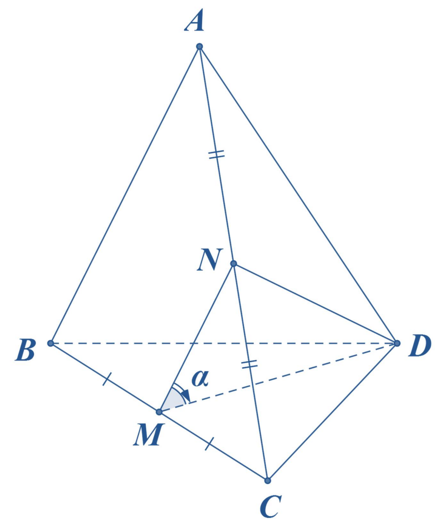
  Tức là: $\cos\left(\widehat{a,b}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{u}_1,\vec{u}_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}.$

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM, khi đó $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải:



Gọi N là trung điểm của AC

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow \begin{cases} MN // AB \\ MN = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}.$

Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow MD = ND = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $MN // AB \Rightarrow \alpha = \widehat{(AB, DM)} = \widehat{(MN, DM)}$.

Xét ΔMND, ta có:

$$\cos\widehat{NMD} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN.MD}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

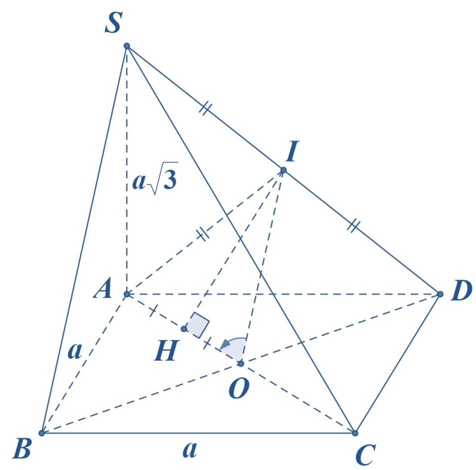
$\Rightarrow \widehat{NMD} < 90^0 \Rightarrow \widehat{(MN, DM)} = \widehat{NMD}$.

Vậy $\cos\alpha = \cos\widehat{NMD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của SD

$\Rightarrow$ OI là đường trung bình của ΔSBD

$$\Rightarrow \begin{cases} OI \,//\, SB \\ OI = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a \end{cases}.$$

Vì $OI \,//\, SB \Rightarrow \widehat{(SB, AC)} = \widehat{(OI, AC)} = \widehat{AOI}$.

Ta có: $AI = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a$.

$\Rightarrow AI = OI \Rightarrow \Delta AOI$ cân tại I.

Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow IH \perp OA$

Và $OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔOHI, ta có: $\cos\widehat{HOI} = \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\cos\widehat{(SB, AC)} = \cos\widehat{HOI} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Chú ý: Để tính $\cos\widehat{AOI}$ ta có thể tính cách khác như sau:

$$\cos\widehat{AOI} = \frac{OA^2 + OI^2 - AI^2}{2OA.OI} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 - a^2}{2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$; $SA \perp AB$, $SA \perp AD$ và $SA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

a) Góc giữa đường thẳng SB và DC bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

b) Gọi α là góc giữa SD và BC. Khi đó, $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{14}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{42}}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{42}}{28}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{28}$.

Lời giải:

a) Vì $DC\ //\ AB$

$\Rightarrow \left(\widehat{SB,DC}\right) = \left(\widehat{SB,AB}\right) = \widehat{SBA}.$

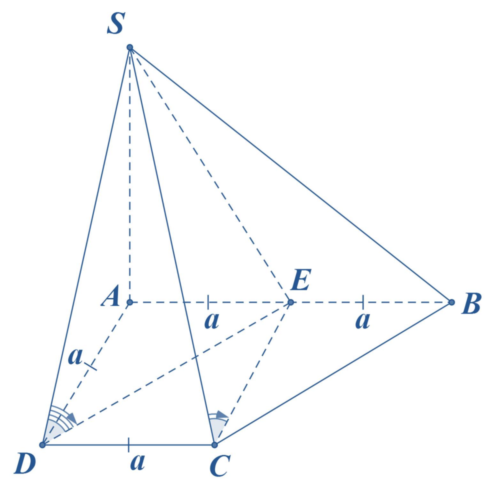
(vì ΔSAB vuông tại $A \Rightarrow \widehat{SBA} < 90^0$).

Xét ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 30^0.$$

Vậy $\left(\widehat{SB,DC}\right) = \widehat{SBA} = 30^0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



b) Gọi E là trung điểm của AB.

Khi đó, $BCDE$ là hình bình hành

$\Rightarrow DE\ //\ BC \Rightarrow \left(\widehat{SD,BC}\right) = \left(\widehat{SD,DE}\right) = \alpha.$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SE^2 = SD^2 = SA^2 + AD^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \\ DE^2 = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SE = SD = a\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \\ DE = a\sqrt{2} \end{cases}.$$

Áp dụng định lí hàm cosin trong tam giác SDE, ta được:

$$\cos\widehat{SDE} = \frac{SD^2 + DE^2 - SE^2}{2SD.DE} = \frac{2a^2}{2.a\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.a\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{14}} = \frac{\sqrt{42}}{14} > 0 \Rightarrow \widehat{SDE} < 90^0.$$

Vậy $\left(\widehat{SD,BC}\right) = \left(\widehat{SD,DE}\right) = \widehat{SDE} = \alpha.$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\widehat{SDE} = \dfrac{\sqrt{42}}{14} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

DẠNG 2: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

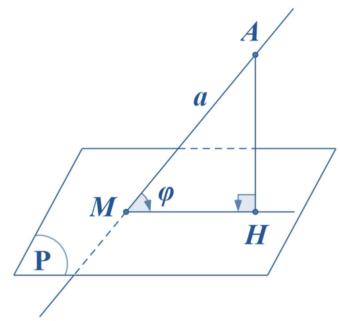
1. Phương pháp

+ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^0.

Tức là: $a \perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{a,(P)}\right) = 90^0.$

+ Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

Tức là: Nếu $a \not\perp (P)$ và a' là hình chiếu của a trên (P) thì $\widehat{(a,(P))} = \widehat{(a,a')} = \varphi$.



Chú ý:

* $0^0 \le \widehat{(a,(P))} \le 90^0$.
* Nếu $\left[\begin{array}{l} a \,//\, (P) \\ a \subset (P) \end{array}\right. \Rightarrow \widehat{(a,(P))} = 0^0$.
* Để tìm hình chiếu a' của a trên (P) ta có thể làm như sau:

  Tìm giao điểm $M = a \cap (P)$.

  Lấy một điểm A tùy ý trên a và xác định hình chiếu H của A trên (P). Khi đó, a' là đường thẳng đi qua hai điểm A và M.

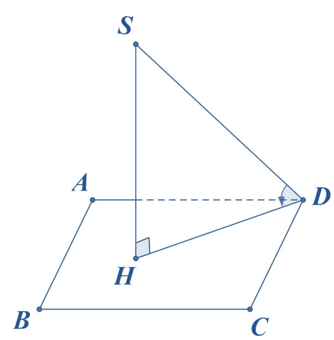
2. Một số loại góc giữa đường thẳng và mặt phẳng thường gặp đối với hình chóp

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

H là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$

$\Rightarrow HD$ là hình chiếu vuông góc của SD trên $(ABCD)$

Vậy $\boxed{\widehat{(SD,(ABCD))} = \widehat{(SD,HD)} = \widehat{SDH}}$.



Góc giữa cạnh bên và mặt đứng

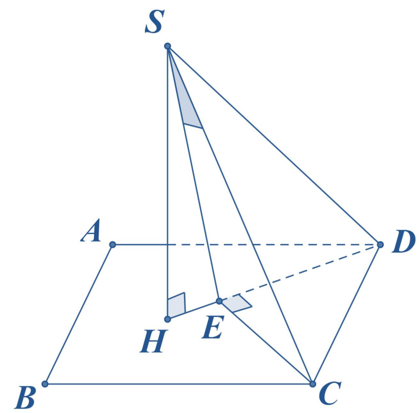
Dựng $CE \perp HD \quad (E \in HD)$.

Vì $\begin{cases} CE \perp HD \\ CE \perp SH \end{cases} \Rightarrow CF \perp (SDH)$.

$\Rightarrow E$ là hình chiếu vuông góc của C trên (SHD)

$\Rightarrow$ SE là hình chiếu vuông góc của SC trên (SHD).

Vậy $\boxed{\widehat{(SC,(SHD))} = \widehat{(SC,SE)} = \widehat{CSE}}$.



Góc giữa đường cao và mặt bên

Dựng $HE \perp CD \quad (E \in CD)$

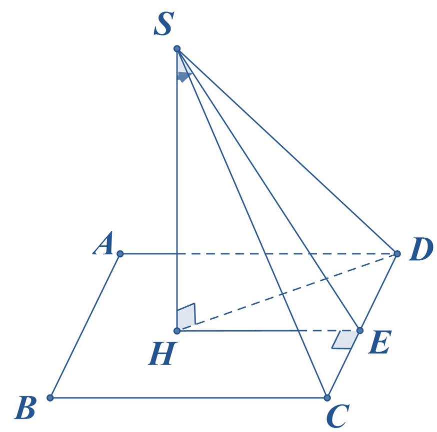
Vì $\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHE)$.

$\Rightarrow (SCD) \perp (SHE)$

Mà $(SCD) \cap (SHE) = SE$.

$\Rightarrow SE$ là hình chiếu vuông góc của SH trên (SAD).

Vậy $\boxed{\widehat{(SH,(SAD))} = \widehat{(SH,SE)} = \widehat{HSE}}$.



3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và $(ABCD)$, khi đó số đo góc α bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Lời giải:

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

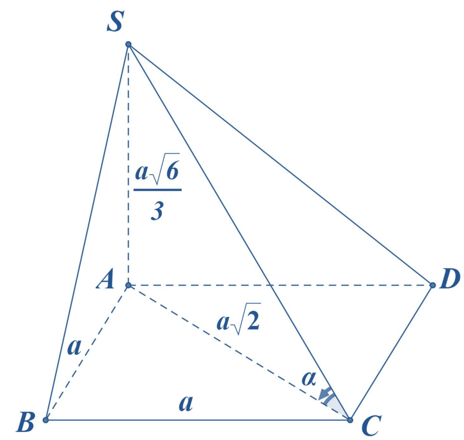
Do đó: $\alpha = \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA}$.

(vì ΔSAC vuông tại $A \Rightarrow \widehat{SCA} < 90^0$).

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \widehat{SCA} = 30^0.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB), khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau

A. $\frac{\sqrt{3}}{17}$. **B.** $\frac{\sqrt{51}}{17}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{17}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{17}$.

Lời giải:

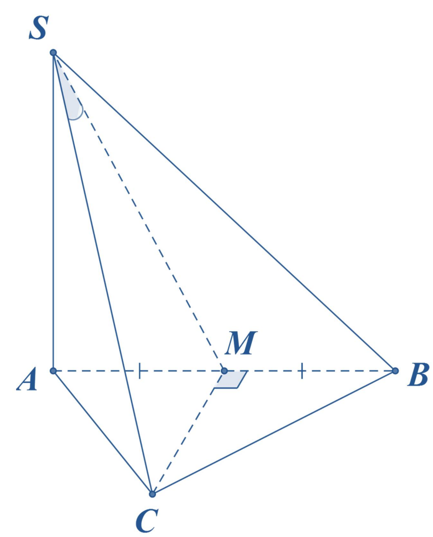
Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow CM \perp AB$.

$$\text{Vì } \begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \left(do \begin{cases} SA \perp (ABC) \\ CM \subset (ABC) \end{cases} \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow SM$ là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAB).

Khi đó: $\alpha = \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SM)} = \widehat{CSM}$.

(vì $\begin{cases} CM \perp (SAB) \\ SM \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \perp SM \Rightarrow \Delta SCM$ vuông tại $S \Rightarrow \widehat{CSM} < 90^0$).



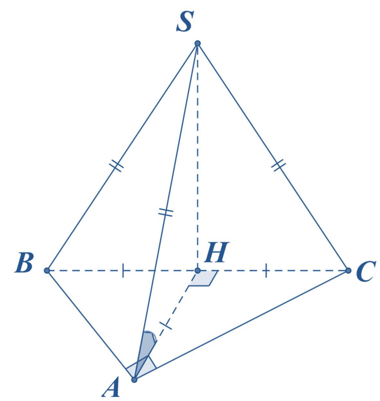
Xét ΔSCM vuông tại S, ta có: $\tan\widehat{CSM} = \frac{CM}{SM} = \frac{CM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{51}}{17}$.

Vậy $\tan\alpha = \tan\widehat{CSM} = \frac{\sqrt{51}}{17} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $BC = a$ và $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của BC.

Vì ΔABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Mà $SA = SB = SC \Rightarrow SH$ là trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$\Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA trên (ABC)

$\Rightarrow \widehat{\left(SA,(ABC)\right)} = \widehat{(SA,HA)} = \widehat{SAH}.$

(vì ΔSHA vuông tại H nên $\widehat{SAH} < 90^0$).

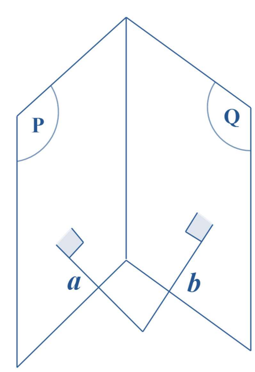
Xét ΔSHA vuông tại H, ta có: $\cos\widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SAH} = 30^0.$

Vậy $\widehat{\left(SA,(ABC)\right)} = \widehat{SAH} = 30^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

DẠNG 3: GÓC GIỮA 2 MẶT PHẲNG

1. Phương pháp

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:



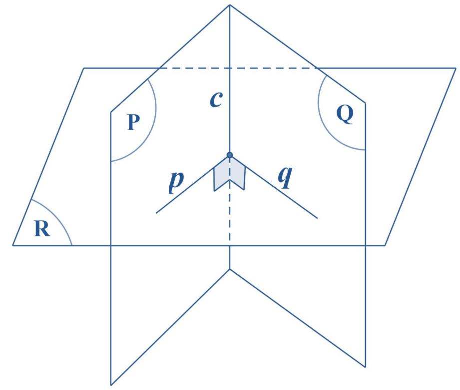
Cách 1: *Theo định nghĩa*

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((P),(Q)\right)} = \widehat{(a,b)}.$$

Cách 2: Khi xác định được $(P)\cap(Q)=c$ thì ta làm như sau:

+ *Bước 1:* Tìm mặt phẳng $(R)\perp c$.
+ *Bước 2:* Tìm $\begin{cases} p=(R)\cap(P) \\ q=(R)\cap(Q) \end{cases}$

Khi đó: $\widehat{((P),(Q))}=\widehat{(p,q)}$.



Đặc biệt: Nếu xác định được 2 đường thẳng p,q sao cho: $\begin{cases} (P)\supset p\perp c \\ (Q)\supset q\perp c \end{cases} \Rightarrow \widehat{((P),(Q))}=\widehat{(p,q)}$.

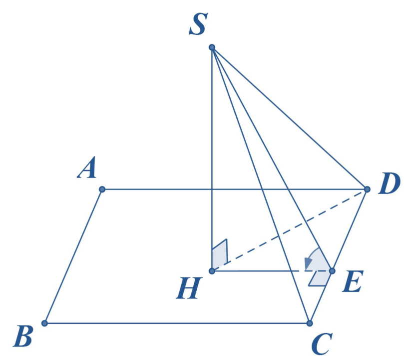
Ví dụ: *Góc giữa mặt bên và mặt đáy.*

Dựng $HE\perp CD \quad (E\in CD)$

Vì $\begin{cases} CD\perp HE \\ CD\perp SH \end{cases} \Rightarrow CD\perp(SHD)\Rightarrow CD\perp SE.$

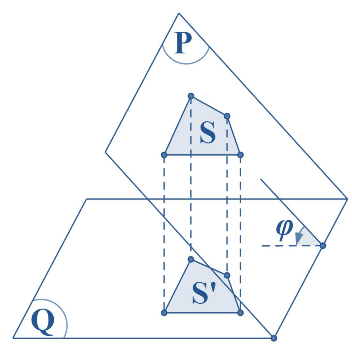
Vì $\begin{cases} (SCD)\cap(ABCD)=CD \\ CD\perp HE\subset(ABCD) \\ CD\perp SE\subset(SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\widehat{((SCD),(ABCD))}=\widehat{(SE,HE)}=\widehat{SEH}}.$



Cách 3: ***Theo định lí về hình chiếu***

$$S'=S.\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\cos\varphi=\frac{S'}{S}}$$

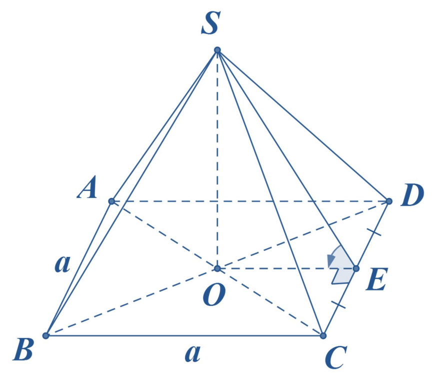


2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao hình chóp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy là

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Lời giải:



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và E là trung điểm của CD.

$\Rightarrow OE$ là đường trung bình của ΔACD

$$\Rightarrow \begin{cases} OE \,//\, AD \\ OE = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2} \end{cases}.$$

Vì $OE \,//\, AD \Rightarrow OE \perp CD$.

Vì $\begin{cases} CD \perp OE \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOE) \Rightarrow CD \perp SE.$

Vì $\begin{cases} (ABCD) \cap (SCD) = CD \\ SE \perp CD \\ OE \perp CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{((ABCD),(SCD))} = \widehat{(SE,OE)} = \widehat{SEO}.$

Xét ΔSEO vuông tại O, ta có: $\tan \widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SEO} = 60^0.$

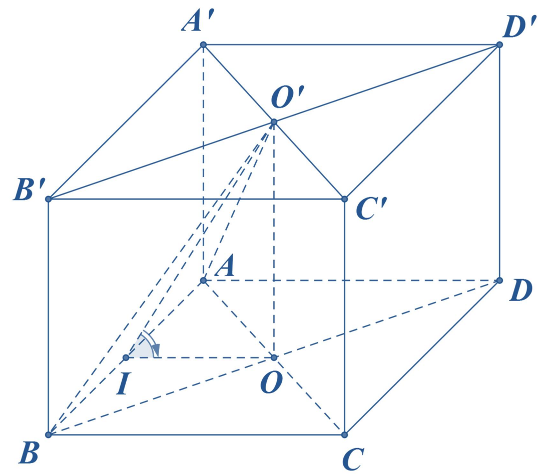
Vậy $\widehat{((ABCD),(SCD))} = \widehat{SEO} = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và α là góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và $(ABCD)$. Góc α thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha = 2$. **C.** $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB.$



Vì $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp OO' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OIO') \Rightarrow AB \perp O'I.$

Vì $\begin{cases} (O'AB) \cap (ABCD) = AB \\ OI \perp AB \\ O'I \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{((O'AB),(ABCD))} = (OI, O'I) = \widehat{O'IO} = \alpha.$

Xét $\Delta O'OI$ vuông tại I, ta có:

$\tan\alpha = \tan\widehat{O'IO} = \dfrac{OO'}{OI} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2.$

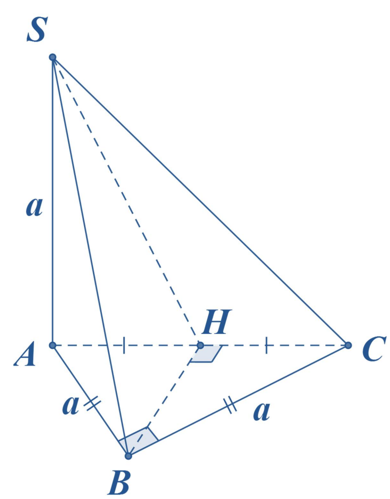
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Cho hình hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BA = BC = a$; SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Góc α giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow BH \perp AC.$



Vì $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \left(do \begin{cases} SA \perp (ABC) \\ BH \subset (ABC) \end{cases} \right) \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp (SAC)$

$\Rightarrow \Delta SHC$ là hình chiếu của ΔSBC lên $(SAC) \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}}.$

+ Ta có: $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$

$S_{\Delta SHC} = \dfrac{1}{2} SA.HC = \dfrac{1}{2} a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}.$

+ Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \ (do\ SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

Khi đó: $S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2} SB.BC = \dfrac{1}{2}.\sqrt{a^2 + a^2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

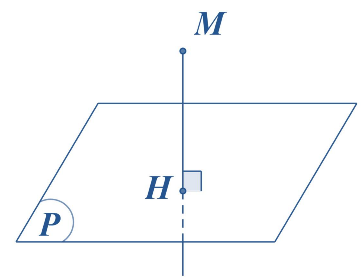
Bình luận: *Trong bài toán trên, ta dễ dàng xác định được giao tuyến* $SC = (SAC) \cap (SBC)$ *nhưng lại gặp khó khăn trong việc tìm một mặt phẳng vuông góc với SC, mất nhiều thời gian tính toán,... không phù hợp với yêu cầu tốc độ của hình thức thi trắc nghiệm. Đồng thời nhận thấy rằng việc xác định hình chiếu của B lên* (SAC) *và tính diện tích của hai tam giác* ΔSHC *;* ΔSBC *là khá dễ dàng nên ta vận dụng cách 3 trong nội dung phương pháp đã trình bày ở trên để giải quyết nhanh bài toán.*

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1. Phương pháp

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là MH, với H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

$$\xrightarrow[H \in (P)]{MH \perp (P)} \boxed{d\left(M,(P)\right) = MH}$$



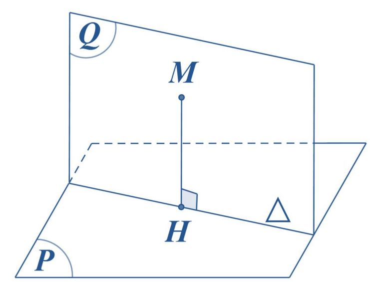
Phương pháp giải chung: *Muốn tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc xác định hình chiếu của điểm trên mặt phẳng ta thường dùng một trong các cách sau:*

Cách 1:

+ *Bước 1:* Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M và vuông góc với (P).
+ *Bước 2:* Xác định giao tuyến: $\Delta = (P) \cap (Q)$.
+ *Bước 3:* Trong (Q), dựng $MH \perp \Delta$, $(H \in \Delta)$.

Vì $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ \Delta = (P) \cap (Q) \\ (Q) \supset MH \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow MH \perp (P)$

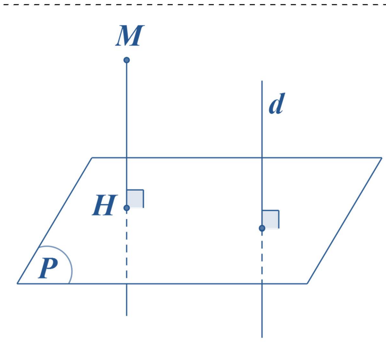
$\Rightarrow d\left(M,(P)\right) = MH$



Cách 2:

Nếu đã biết trước một đường thẳng $d \perp (P)$ thì ta sẽ dựng $Mx \,//\, d$, khi đó: $H = Mx \cap (P)$ là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

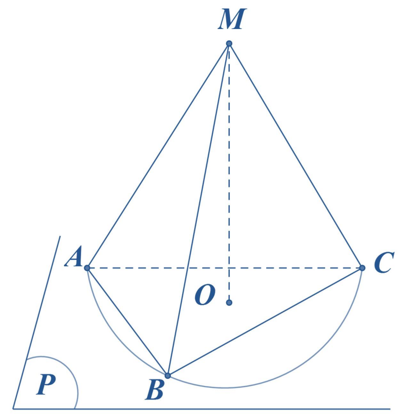
$\Rightarrow d\left(M,(P)\right) = MH$



Cách 3:

Dựa vào tính chất trục của tam giác: Cho ΔABC nằm trên (P), nếu $MA = MB = MC$ thì hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) chính là tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Khi đó: $MO \perp (P) \Rightarrow d(M,(P)) = MO.$



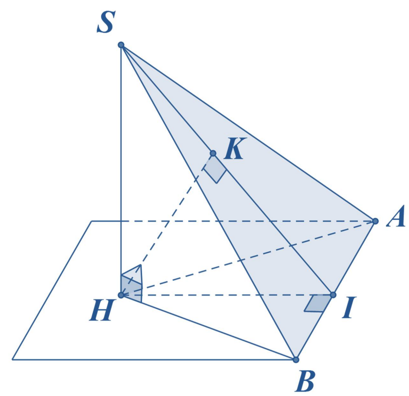
KHOẢNG CÁCH DỰNG TRỰC TIẾP

Khoảng cách từ chân đường cao tới mặt bên

Bài toán: *Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt bên (SAB).*

+ Kẻ $HI \perp AB,\ (I \in AB)$.
+ Kẻ $HK \perp SI,\ (K \in SI)$

Khi đó: $\boxed{d(H,(SAB)) = HK = \dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}}$.

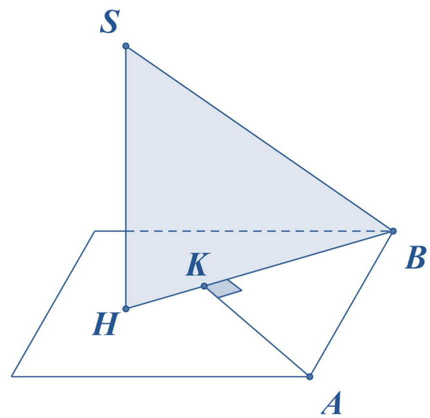


Khoảng cách từ một điểm trên mặt đáy tới mặt đứng (chứa đường cao)

Bài toán: *Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm A bất kì đến mặt bên (SHB).*

+ Kẻ $AK \perp HB.$
+ $\begin{cases} AK \perp HB \\ AK \perp SH \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SHB)$

$\Rightarrow d(A,(SHB)) = AK.$



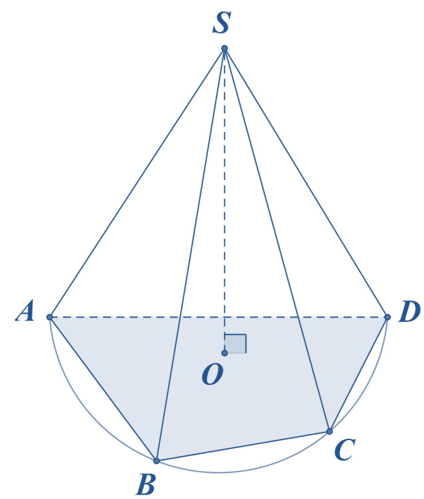
Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau

Cho hình chóp có đỉnh S có các cạnh bên có độ dài bằng nhau: $SA = SB = SC = SD$ (đáy có thể là bốn đỉnh hoặc ba đỉnh). Khi đó nếu như O là tâm đường tròn ngoại tiếp đi qua các đỉnh nằm trên mặt đáy thì SO là trục đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy hay nói cách khác: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S,(ABCD)) = SO$.

Chú ý:

Nếu đáy là:

+ Tam giác đều, *O* là trọng tâm.
+ Tam giác vuông, *O* là trung điểm cạnh huyền.
+ Hình vuông, hình chữ nhật, *O* là giao của 2 đường chéo đồng thời là trung điểm mỗi đường.

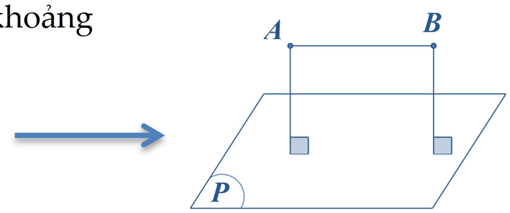


TÍNH KHOẢNG CÁCH BẰNG CÁCH GIÁN TIẾP

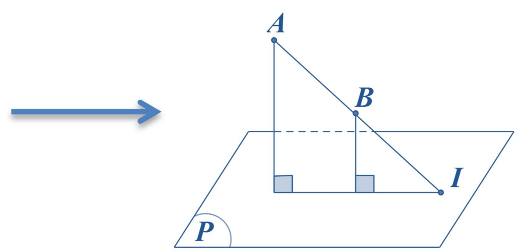
Giả sử ta ta muốn dựng trực tiếp khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (P) mà không thực hiện được. Đồng thời từ điểm B ta lại dựng được trực tiếp khoảng cách tới (P) khi đó ta sẽ thực hiện tính khoảng cách gián tiếp như sau:

Cách 1 (*Đổi điểm*): Tính thông qua tỉ số khoảng cách.

$$\xrightarrow{AB \cap (P)} d(A,(P)) = d(B,(P))$$



$$\xrightarrow{AB \cap (P) = \{I\}} \frac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \frac{AI}{BI}$$



Cách 2 ***(Đổi đỉnh):*** Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách:

Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong nhiều trường hợp có thể qui về bài toán thể tích khối đa diện. Việc tính khoảng cách này dựa vào công thức:

+ $\boxed{h=\dfrac{3V}{S}}$ *: V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình chóp.*

+ $\boxed{h=\dfrac{V}{S}}$ *: V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình lăng trụ.*

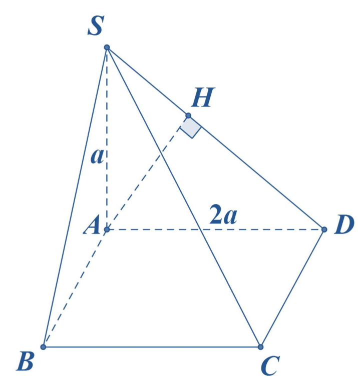
Phương pháp này áp dụng được trong trường hợp sau: *Giả sử có thể qui bài toán tìm khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của một hình chóp (hoặc một lăng trụ) nào đó. Dĩ nhiên, các chiều cao này thường là không tính được trực tiếp bằng cách sử dụng các phương pháp thông thường như định lí Pitago, công thức lượng giác,… Tuy nhiên, các khối đa diện này lại dễ dàng tính được thể tích và diện tích đáy. Như vậy, chiều cao của nó sẽ được xác định bởi công thức đơn giản trên.*

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD=2a$; SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.

Lời giải:



Trong (SAD), kẻ $AH\perp SD$, $(H\in SD)$.

Vì $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\xrightarrow{AH\subset(SAD)}CD\perp AH.$

Vì $\begin{cases}AH\perp SD\\AH\perp CD\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SCD)$

$\Rightarrow d\big(A,(SCD)\big)=AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2+4a^2}}$

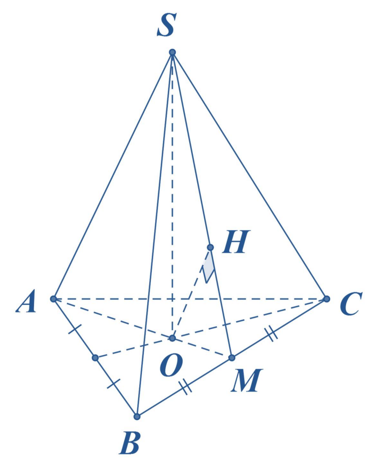
$\Rightarrow d\big(A,(SCD)\big)=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{3}{10}}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Lời giải:

Vì O là tâm của đáy của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ nên $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$.



Gọi M là trung điểm của BC.

Vì ΔABC đều cạnh bằng $2a \Rightarrow \begin{cases} AM \perp BC \\ AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \end{cases}$.

Khi đó $OM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$.

Trong (SAM), kẻ $OH \perp SM$, $(H \in SM)$.

Vì $\begin{cases} (SAM) \perp (SBC) \\ (SAM) \cap (SBC) = SM \\ (SAM) \supset OH \perp SM \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.

Xét ΔSOM vuông tại O có đường cao OH, ta có:

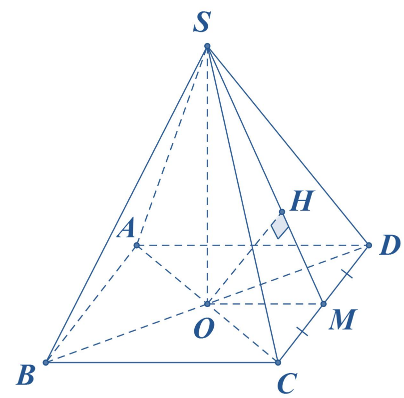
$$d(O,(SBC)) = OH = \frac{OS.OM}{\sqrt{OS^2 + OM^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = a\sqrt{\frac{3}{10}} \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:

Vì O là tâm của đáy của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO = a\sqrt{2}$.



Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} OM \perp CD \\ OM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$.

Trong (SOM), kẻ $OH \perp SM$, $(H \in SM)$.

$\Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OH = \dfrac{OS.OM}{\sqrt{OS^2 + OM^2}}$

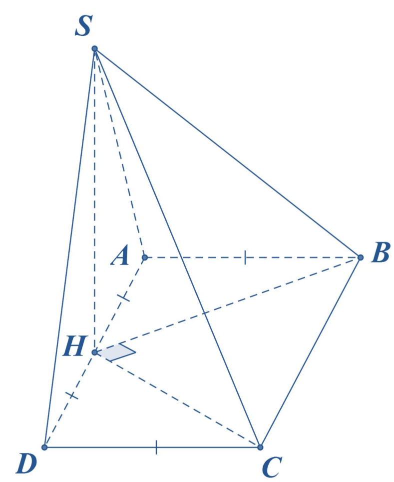
Vậy $d(O,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}.\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = 2a, AB = a$. SAD là tam giác cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SHB) bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp AD$.



Vì $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ (SAD) \supset SH \perp AD \end{cases}$

Dễ thấy rằng ΔABH vuông cân tại A và và ΔCDH vuông cân tại D.

$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{CHD} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0 \Rightarrow CH \perp HB$.

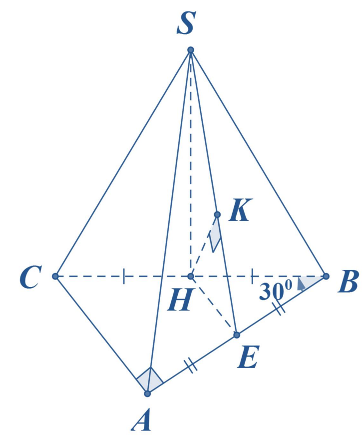
Vì $\begin{cases} CH \perp HB \\ CH \perp SH \left(do \begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ CH \subset (ABCD) \end{cases} \right) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SHB)$

Suy ra $d(C,(SHB)) = CH = \sqrt{CD^2 + DH^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^0$, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{26}$.   **B.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.   **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$.   **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{26}$.

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của

Vì $\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SBC)\cap(ABC)=BC\Rightarrow SH\perp(ABC).\\(SBC)\supset SH\perp BC\end{cases}$

Vì $CH\cap(SAB)=B\Rightarrow\dfrac{d(C,(SAB))}{d(H,(SAB))}=\dfrac{CB}{HB}=2$

$\Rightarrow d(C,(SAB))=2d(H,(SAB)).$

Gọi E là trung điểm của $AB\Rightarrow HE\,//\,AC\Rightarrow HE\perp AB.$

Trong (SHE), kẻ $HK\perp SE,\ (K\in SE)$ (1)

Vì $\begin{cases}AB\perp HE\\AB\perp SH\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SHE)\xrightarrow{HK\subset(SHE)}AB\perp HK$ (2)

Từ (1) và $(2)\Rightarrow HK\perp(SAB)\Rightarrow d(H,(SAB))=HK.$

Ta có: $\begin{cases}SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\\HE=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{BC.\sin\widehat{ABC}}{2}=\dfrac{a}{4}\end{cases}.$

Xét ΔSHE vuông tại H có đường cao HK, ta có: $HK=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{a\sqrt{39}}{26}.$

Vậy $d(C,(SAB))=2d(H,(SAB))=2HK=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp BD,\ (E \in BD)$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp SE,\ (H \in SE)$ $\quad (1)$

Vì $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AE \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AH \quad (2)$

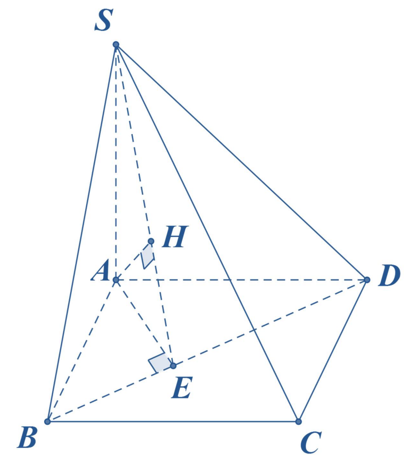
Từ (1) và $(2) \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A,(SBD)) = AH$.

Xét ΔABD vuông tại A có đường cao AE, ta có:

$$AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Xét ΔSAE vuông tại A có đường cao AH, ta có:

$$AH = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a.\frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2}} = \frac{2a}{3}.$$

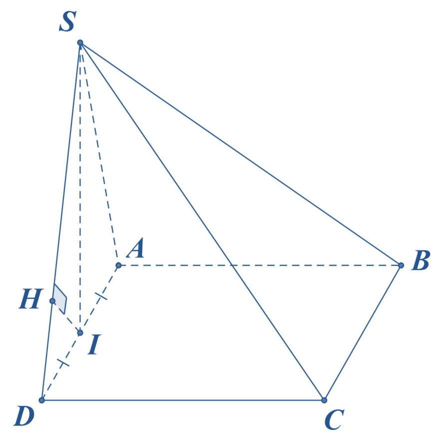


Vậy $d(A,(SBD)) = AH = \frac{2a}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 7 [*Trích* **Đề Minh Họa – 2017]:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \frac{2}{3}a$. **B.** $h = \frac{4}{3}a$. **C.** $h = \frac{8}{3}a$. **D.** $h = \frac{3}{4}a$.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của AD, vì ΔSAD cân tại S nên $SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SI.S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{3.\frac{4}{3}a^3}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = 2a.$$

Trong (SAD), dựng $IH \perp SD,\ (H \in SD)$.

Vì $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp IH.$

Vì $\begin{cases} IH \perp SD \\ IH \perp CD \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I,(SCD)) = IH.$

$$AB \,//\, (SCD) \Rightarrow d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) \xlongequal{AI \cap (SCD) = \{D\}} \frac{AD}{HD}.d(I,(SCD)) = 2IH.$$

Xét ΔSID vuông tại I có đường cao IH, ta có:

$$IH = \frac{ID.IS}{\sqrt{ID^2 + IS^2}} = \frac{ID.IS}{\sqrt{ID^2 + IS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.2a}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + 4a^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d(B,(SCD)) = 2IH = \frac{4a}{3} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

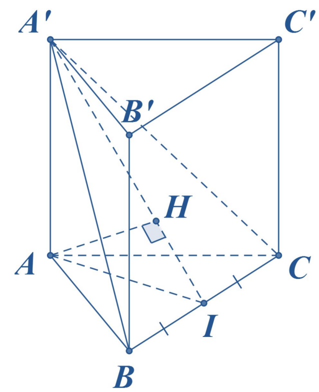
Bình luận: *Thông thường khi tính khoảng cách từ điểm đến mặt ta có 3 hướng đi chính: Đổi điểm, đổi đỉnh và đổi sang hình học tọa độ không gian (phương pháp tọa độ hóa). Nếu đi theo hướng giải đổi điểm là đổi gián tiếp từ B sang A rồi sang H (như lời giải trên) sẽ mất nhiều thời gian không đáp ứng được yêu cầu về tốc độ thi theo hình thức trắc nghiệm. Đồng thời khi nhận ra đề bài cho thể tích V của khối chóp S.ABCD cho trước bạn nên dùng phương pháp đổi đỉnh sẽ phù hợp hơn. Cụ thể:*

$$d(B,(SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{SCD}} = \frac{3.\frac{V_{S.ABCD}}{2}}{\frac{1}{2}SD.CD} = \frac{\frac{3}{2}.\frac{4}{3}a^3}{\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\sqrt{SI^2 + ID^2}} = \frac{4a^2}{\sqrt{2}.\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{4a}{3}.$$

Ví dụ 8: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA'=a$, $AB=a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$. Khoảng cách từ A tới mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} AI \perp BC \\ AI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Trong $(AA'I)$, kẻ $AH \perp A'I$, $(H \in A'I)$.

Vì $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'I) \Rightarrow (A'BC) \perp (AA'I)$.

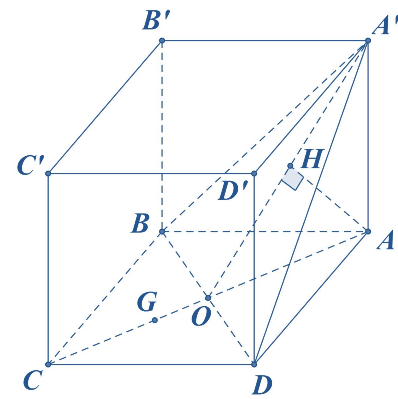
Vì $\begin{cases} (A'BC) \perp (AA'I) \\ (A'BC) \cap (AA'I) = A'I \Rightarrow AH \perp (A'BC) \\ (AA'I) \supset AH \perp A'I \end{cases}$

$$\Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH = \frac{AA'.AI}{\sqrt{AA'^2 + AI^2}} = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 9: Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$ đồng thời $AA' = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Khoảng cách từ G tới mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải:



Vì $AG \cap (A'BD) = \{O\} \Rightarrow \dfrac{d(G,(A'BD))}{d(A,(A'BD))} = \dfrac{GO}{AO} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow d(G,(A'BD)) = \dfrac{1}{3} d(A,(A'BD))$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'O) \Rightarrow (A'BD) \perp (AA'O)$.

Trong $(AA'O)$, kẻ $AH \perp A'O$, $(H \in A'O)$.

Vì $\begin{cases} (A'BD) \perp (AA'O) \\ (A'BD) \cap (AA'O) = A'O \Rightarrow AH \perp (A'BD) \\ (AA'O) \supset AH \perp A'O \end{cases}$

$\Rightarrow d(A,(A'BD)) = AH = \dfrac{AA'.AO}{\sqrt{AA'^2 + AO^2}}$.

Tam giác ABD cân có $\widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ đều có cạnh bằng $a \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

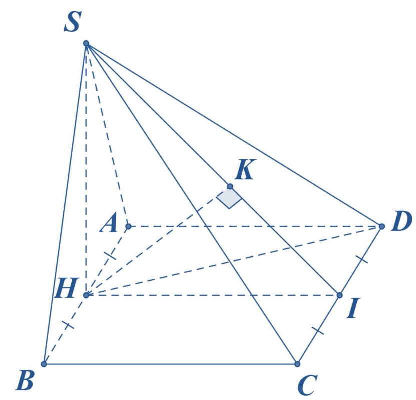
Vậy $d(G,(A'BD)) = \dfrac{d(A,(A'BD))}{3} = \dfrac{AA'.AO}{3\sqrt{AA'^2 + AO^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SD = \dfrac{3a}{2}$; hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Khi đó, tỉ số $\dfrac{d(H,(SDC))}{a}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:



Theo đề bài, ta có: $SH \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} HI = a \\ HI \perp CD \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow (SCD) \perp (SHI)$.

Trong (SHI), kẻ $HK \perp SI$, $(K \in SI)$.

Vì $\begin{cases} (SCD) \perp (SHI) \\ (SCD) \cap (SHI) = SI \Rightarrow HK \perp (SCD) \\ (SHI) \supset HK \perp SI \end{cases}$

Suy ra: $d(H,(SCD)) = HK = \dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}$.

Ta có: $HD^2 = AH^2 + AD^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 - \dfrac{5a^2}{4}} = a.$

Do đó: $d(H,(SCD)) = HK = \dfrac{SH.HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \dfrac{a.a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

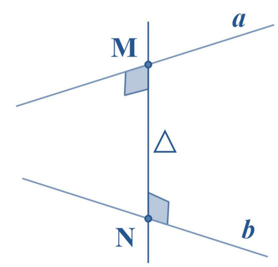
Vậy $\dfrac{d(H,(SDC))}{a} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Phương pháp

a) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

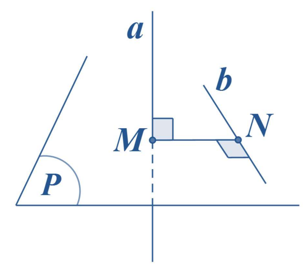
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng a, b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy gọi là **đường vuông góc chung** của a và b. Đoạn thẳng MN gọi là đoạn vuông góc chung của a và b.



b) Một số hướng tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

TH1: Khi a, b chéo nhau và $a \perp b$.

+ *Bước 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại M.
+ *Bước 2:* Trong (P) dựng $MN \perp b$ tại N.
+ *Bước 3:* Đoạn MN là đoạn vuông góc chung của a và $b \Rightarrow \boxed{d(a,b) = MN}$. .

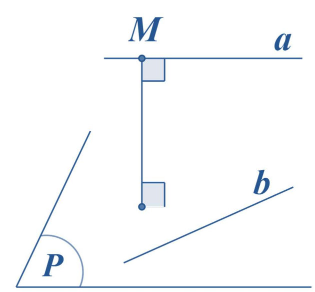


TH2: Khi a, b chéo nhau và $a \not\perp b$.

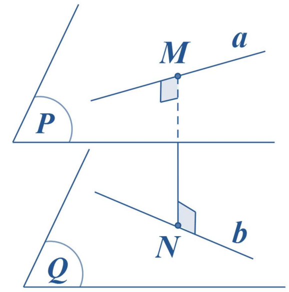
Mục tiêu: Chuyển về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

➢ ***Hướng 1:*** Chuyển thông qua khoảng cách từ một đường đến một mặt phẳng.

* *Bước 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a.
* *Bước 2:* $d(a,b) \xlongequal[b \subset (P)]{a // (P)} d(a,(P)) \xlongequal{M \in a} d(M,(P))$



- ***Hướng 2:*** Chuyển thông qua khoảng cách giữa mặt phẳng song song.
  - *Bước 1:* Dựng hai mặt phẳng (P), (Q) sao cho $a \subset (P) \parallel (Q) \supset b$.
  - *Bước 2:* Khi đó $d(a,b) = d((P),(Q)) = d(M,(Q))$



2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Vì $CD \parallel (SAB)$

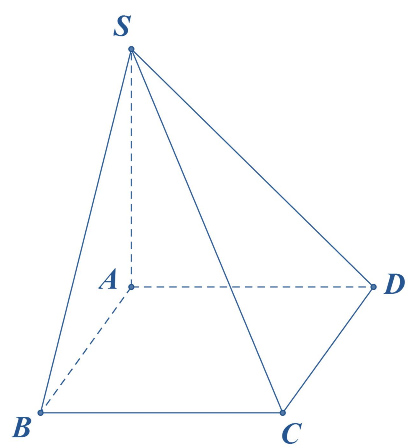
$\Rightarrow d(CD,SB) = d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB))$.

Vì

$\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow d(D,(SAB)) = DA = a.$

Vậy $d(CD,SB) = d(D,(SAB)) = a$.

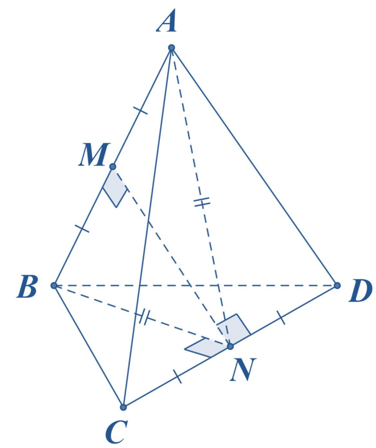
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Ví dụ 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh bằng a nên $AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\begin{cases} AN \perp CD \\ BN \perp CD \end{cases}$ $(*)$

$(*) \Rightarrow CD \perp (ABN) \xrightarrow{MN \subset (ABN)} CD \perp MN$ (1)

Mặt khác, vì $AN = BN \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại N $\Rightarrow MN \perp AB$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Do đó: $d(AB, CD) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2}$

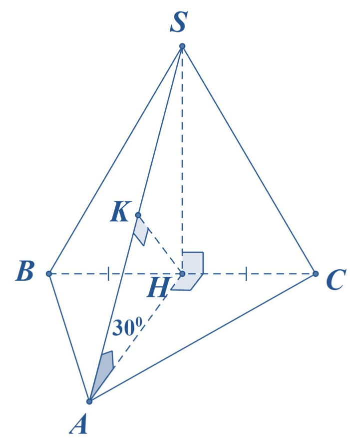
$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S trên (ABC) trùng với trung điểm của BC. Biết SA hợp với đáy một góc 30^0. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow SH \perp BC \quad (1)$

Vì ΔABC đều $\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC & (2) \\ AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Trong (SAH), kẻ $HK \perp SA,\ (K \in SA) \quad (3)$

Vì $\begin{cases} BC \perp (SAH) \\ HK \subset (SAH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK \quad (4)$

Từ (3) và $(4) \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của SA và $BC \Rightarrow d(SA, BC) = HK$.

Vì $SH \perp (ABC) \Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA trên (ABC)

$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,HA)} = \widehat{SAH} = 30^0$.

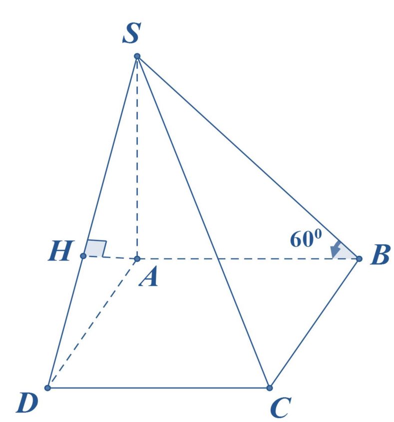
Xét ΔAHK vuông tại K, ta có: $\sin\widehat{HAK} = \dfrac{HK}{AH} \Rightarrow HK = AH.\sin\widehat{HAK} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(SA, BC) = HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và SB tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải



Vì $AB \,//\, (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD))$

$= d(A, (SCD))$

Trong (SAD), kẻ $AH \perp SD,\ (H \in SD)$

Vì $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$

Vì $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$

Ta có: $\widehat{\left(SB,\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{\left(SB,AB\right)}=\widehat{SBA}=60^0$.

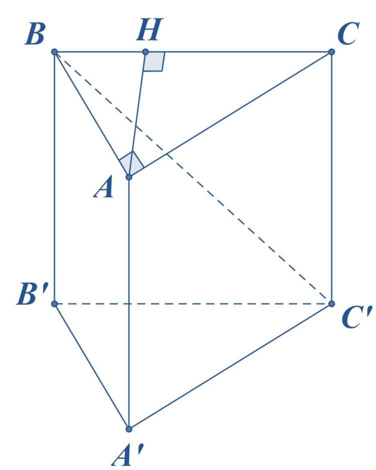
Xét ΔSAB vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}\Rightarrow SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

Vậy $d\left(AB,SC\right)=AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{2a.a\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2+3a^2}}=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC=2a$, $AB=a$. Khi đó, tỉ số $\dfrac{\sqrt{3}d\left(AA',BC'\right)}{a}$ bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải



Vì $AA'\ //\ \left(BB'C'C\right)$

$\Rightarrow d\left(AA',BC'\right)=d\left(AA',\left(BB'C'C\right)\right)=d\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)$.

Trong $\left(ABC\right)$, kẻ $AH\perp BC$, $\left(H\in BC\right)$.

Vì $\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp BB'\end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(BB'C'C\right)$

$\Rightarrow d\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)=AH=\dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}}$.

Ta có: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

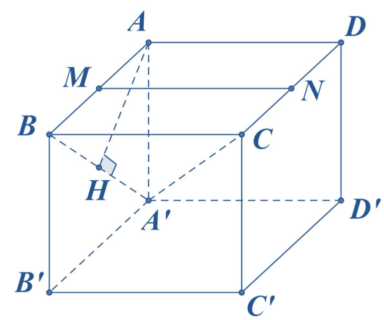
$\Rightarrow d\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)=\dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}}=\dfrac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3a^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\dfrac{\sqrt{3}d\left(AA',BC'\right)}{a}=\dfrac{\sqrt{3}d\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)}{a}=\dfrac{\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó, tỉ số $\dfrac{a^2.d\left(MN, A'C\right)}{V_{A.A'B'C'D'}}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Ta có: $V_{A.A'B'C'D'} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{A'B'C'D'} = \dfrac{1}{3}.a.a^2 = \dfrac{1}{3}a^3$.

Vì $MN \,//\, \left(A'BC\right) \Rightarrow d\left(MN, A'C\right) = d\left(MN, \left(A'BC\right)\right)$

$= d\left(M, \left(A'BC\right)\right)$

Vì $AM \cap \left(A'BC\right) = \left\{B\right\} \Rightarrow \dfrac{d\left(M, \left(A'BC\right)\right)}{d\left(A, \left(A'BC\right)\right)} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(M, \left(A'BC\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A, \left(A'BC\right)\right)$.

Trong $\left(AA'B'B\right)$, kẻ $AH \perp A'B$, $\left(H \in A'B\right)$. Vì $\begin{cases} BC \perp \left(AA'B'B\right) \\ AH \subset \left(AA'B'B\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH.$

Vì $\begin{cases} AH \perp A'B \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(A'BC\right) \Rightarrow d\left(A, \left(A'BC\right)\right) = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}$.

Ta có: $BH = \dfrac{A'B}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó: $d\left(MN, A'C\right) = d\left(M, \left(A'BC\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A, \left(A'BC\right)\right) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\dfrac{a^2.d\left(MN, A'C\right)}{V_{A.A'B'C'D'}} = \dfrac{a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{3}a^3} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***