

A. LÝ THUYẾT.

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng. Hàm số f xác định trên K được gọi là:

➤ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến (tăng)** trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

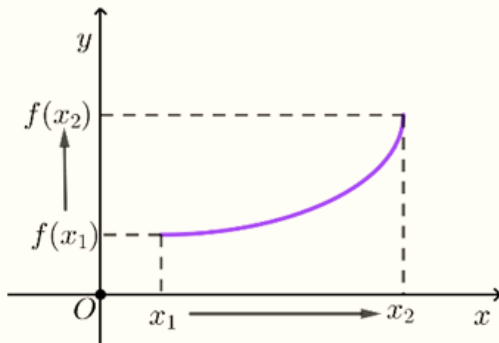
Khi đó, đồ thị của hàm số **đi lên** từ trái sang phải.

➤ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến (giảm)** trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Khi đó, đồ thị của hàm số **đi xuống** từ trái sang phải.

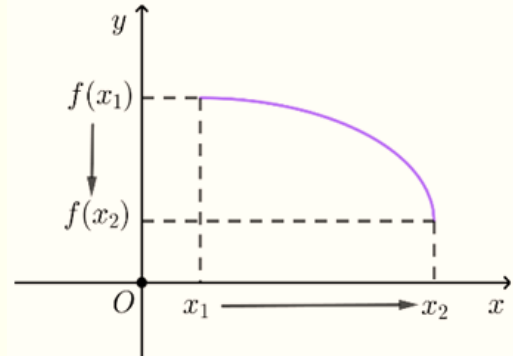
Hình ảnh minh họa sự đồng biến và nghịch biến của hàm số



Hàm số đồng biến

➤ Đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

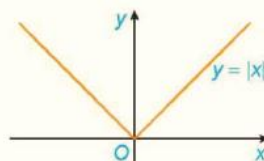


Hàm số nghịch biến

➤ Nghịch biến (giảm) trên K nếu với

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 1. Hình 1.4 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



Hình 1.4

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị suy ra:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

3.1. Định lý:

Giả sử I là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn, f là hàm số liên tục trên I và có đạo hàm tại mọi điểm trong của I (tức là điểm thuộc I nhưng không phải đầu mút của I). Khi đó

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I

|| Chú ý:

- Nếu hàm số f liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số f đồng biến trên $[a; b]$.
- Nếu hàm số f liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số f nghịch biến trên $[a; b]$.

📖 Ví dụ 2.

Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

3.2. Hệ quả. ta có thể mở rộng định lý trên như sau

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với $\forall x \in I$ (hoặc $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in I$) và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I .
- Vận dụng định lý trên vào các hàm số thường gặp trong chương trình.

- ✧ Nếu hàm số f là hàm đa thức (không kể hàm số hằng) hoặc $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

(trong đó $P(x)$ là đa thức bậc hai, $Q(x)$ là đa thức bậc nhất và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$) thì hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên K

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall x \in K, f'(x) \geq 0 \text{ (} f'(x) \leq 0 \text{)}}.$$

- ✧ Nếu hàm số f là hàm nhất biến $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực và

$ad - bc \neq 0$ thì hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên K

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall x \in K, f'(x) > 0 \text{ (} f'(x) < 0 \text{)}}.$$

[illegible]

b). $y = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3.$

[illegible][illegible]

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

4. Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số xác định trên tập hợp $D(D \subset \mathbb{R})$ và $x_0 \in D$

x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$

chứa điểm x_0 sao cho:
$$\begin{cases} (a;b) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .

x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$

chứa điểm x_0 sao cho:
$$\begin{cases} (a;b) \subset D \\ f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .

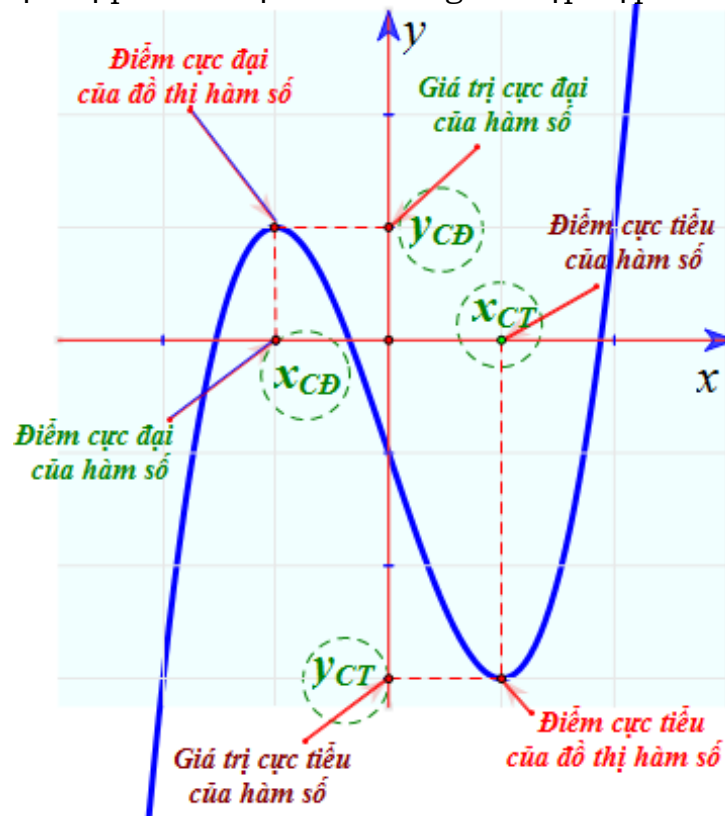
Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 .

Điểm cực đại, cực tiểu gọi chung là điểm cực trị của hàm số

$f(x_0)$ là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

Như vậy: Điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp D



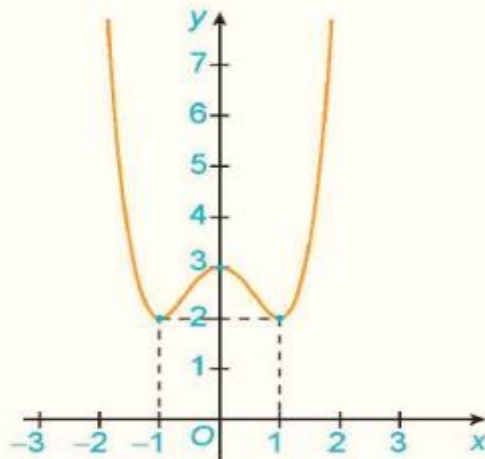
|| Chú ý.

➤ Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f chưa hẳn đã là GTLN (GTNN) của hàm số f trên tập xác định D mà $f(x_0)$ chỉ là GTLN (GTNN) của hàm số f trên khoảng $(a;b) \subset D$ và $(a;b)$ chứa điểm x_0 .

➤ Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định D của hàm số f thì hàm số f không có cực trị.

Vi dụ 6.

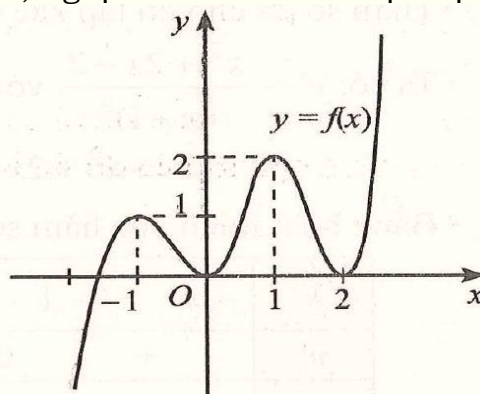
Hình 1.8 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.8

Lời giải

Vi dụ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ 1. Xác định khoảng đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số đó.



Lời giải

5. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị:

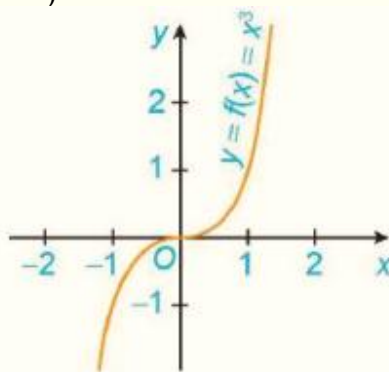
Định lý 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 .

Khi đó, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý :

- Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 **không phải** là điểm cực trị của hàm số.
- Hàm số **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số chỉ **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x) = x^3$ có $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số (H.1.10).



Hình 1.10

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x) = |x|$.

a). Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Từ đó suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

b). Sử dụng định nghĩa, chứng minh hàm số có cực tiểu tại $x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị: (định lý này đã giảm tải trong chương trình mới 2024)

Định lý 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

➤ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

➤ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

|| Chú ý:

➤ Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f .

➤ Trong trường hợp $f'(x_0) = 0$ không tồn tại hoặc $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}$ thì **định lý 2** không dùng được.

Định lý 3: (cách tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Định lý trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

x	a	x_0	b
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

Ví dụ 10. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 11. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

📖 Ví dụ 12. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG THỰC TIỄN

📖 Ví dụ 13. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ trong đó t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

Trong khoảng thời gian nào từ lúc nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ tăng lên?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Vi dụ 14. Độ cao (tính bằng mét) của tàu lượn siêu tốc so với mặt đất sau t (giây) ($0 \leq t \leq 20$) từ lúc bắt đầu được cho bởi công thức $h(t) = -\frac{4}{255}t^3 + \frac{49}{85}t^2 - \frac{98}{17}t + 20$. Trong khoảng thời gian nào tàu lượn đi xuống, trong khoảng thời gian nào tàu lượn đi lên?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Vi dụ 15. Người ta thấy rằng trong vòng 3 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành P của một loại sản phẩm vào tháng thứ t thay đổi theo công thức $P(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (đồng) với $0 \leq t \leq 36$.

Hãy cho biết trong khoảng thời gian nào giá thành sản phẩm tăng, trong khoảng thời gian nào giá thành sản phẩm giảm. Giá thành đạt cực đại và cực tiểu vào thời điểm nào?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Vi dụ 16. Ở 0°C , sự mất nhiệt H (tính bằng Kcal/ $\text{m}^2 \text{ h}$, ở đây Kcal là kilocalories và $1\text{Kcal} = 1000 \text{ calo}$) từ cơ thể của một người có thể được mô hình hoá bằng công thức $H = 33(10\sqrt{v} - v + 10,45)$ trong đó v là tốc độ gió (tính bằng m/s) (Theo sách Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009).

- Xét tính đơn điệu của hàm số H và giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả nhận được.
- Tìm tốc độ thay đổi của H khi $v = 2 \text{ m/s}$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả này.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

📖 Ví dụ 17.

Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t=126$ (s), cho bởi hàm số sau: $v(t)=0,001302t^3-0,09029t^2+23$ (v được tính bằng ft/s, $1\text{ft}=0,3048\text{ m}$). Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

📖 Ví dụ 18. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t)=t^3-6t^2+14t+1$$

trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Trong khoảng thời gian nào của 5 giây đầu tiên thì vận tốc tức thời của chất điểm tăng lên?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 19. Một chất điểm chuyển động lên, xuống theo phương thẳng đứng. Độ cao $h(t)$ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức

$$h(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t + 1 \text{ với } 0 \leq t \leq 8.$$

- Viết công thức tính vận tốc của chất điểm.
- Trong khoảng thời gian nào chất điểm chuyển động lên, trong thời gian nào chất điểm chuyển động đi xuống?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 20. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử toạ độ $x(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm $t \geq 0$ (giây) được cho bởi công thức: $x(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 3$

- Trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?
- Khi nào chất điểm chuyển hướng?
- Khi nào vận tốc của chất điểm tăng và khi nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

📖 Ví dụ 21. Một vật chuyển động dọc theo một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí của vật x (mét) từ thời điểm $t=0$ giây đến thời điểm $t=5$ giây được cho bởi công thức $x(t)=t^3-7t^2+11t+5$.

- a).** Xác định vận tốc v của vật. Xác định khoảng thời gian vật chuyển động sang phải và khoảng thời gian vật chuyển động sang trái.
- b).** Tìm tốc độ của vật và thời điểm vật dừng lại. Tính tốc độ cực đại của vật trong khoảng thời gian từ $t=1$ giây đến $t=4$ giây.
- c).** Xác định gia tốc a của vật. Tìm khoảng thời gian vật tăng tốc và khoảng thời gian vật giảm tốc.

[illegible]

📖 Ví dụ 22. Một con lắc lò xo, gồm một vật nặng có khối lượng 1 kg được gắn vào một lò xo được cố định một đầu, dao động điều hoà với biên độ $A = 0,24 \text{ m}$ và chu kì $T = 4 \text{ giây}$. Vị trí x (mét) của vật tại thời điểm t được cho bởi $x(t) = A \cos(\omega t)$.

- Tìm vị trí của vật tại thời điểm t và tại thời điểm $t = 0,5$ giây.
- Tìm vận tốc của vật tại thời điểm t giây và tìm vận tốc của vật khi $t = 0,5$ giây.
- Tìm gia tốc a của vật.
- Sử dụng Định luật thứ hai của Newton $F = ma$, tìm độ lớn và hướng của lực tác dụng lên vật khi $t = 0,5$ giây.
- Tìm thời gian tối thiểu để vật chuyển động từ vị trí ban đầu đến vị trí $x = -0,12\text{ m}$. Tìm vận tốc của vật khi $x = -0,12\text{ m}$.

[illegible]

- Viết công thức tính lợi nhuận I của cửa hàng khi nhập về và bán được q sản phẩm.
- Trong khoảng nào của q thì lợi nhuận sẽ tăng khi q tăng, trong khoảng nào thì lợi nhuận giảm khi q tăng?

[illegible][illegible]

[illegible]

📖 Ví dụ 29. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}$, $t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

[illegible]

[illegible]

Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số f .
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x_0 sao cho $f'(x_0)=0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định.
- **Bước 3.** Lập bảng xét dấu $f'(x)$, dựa vào định lí 1, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

 Bài tập 1. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

2). $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

2). $y = \frac{2x-1}{x-1}$

[illegible]

2). $y = \frac{4x^2 + 5x + 5}{x + 1}$

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains 10 rows of these lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced and extend across the width of each respective column.

Bài tập 5. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

1). $y = |x^2 - 2x - 3|$

2). $y = |x^2 - 4x + 3| + 2x + 3$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nhận xét:

- Bài toán xét tính đơn điệu của hàm số được chuyển về bài toán xét dấu của một biểu thức (y').
- Khi tính đạo hàm của hàm số có dạng $y = |f(x)|$ ta chuyển trị tuyệt đối vào trong căn thức $y = \sqrt{f^2(x)}$, khi đó tại những điểm mà $f(x) = 0$ thì hàm số không có đạo hàm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 6. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

1). $y = \frac{4x+5}{4x^2-4}$

2). $y = \frac{12x+1}{12x^2+2}$

3). $y = \frac{3x^2-x+1}{x^2-x+1}$

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 8. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

1). $y = 2\sin x + \cos 2x$ với $x \in [0; \pi]$

2). $y = \sin 2x - 2 \cos x - 2x$ vóti $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Câu 2. Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 + 3x$ là

- A. $(0; +\infty)$.
- B. $(0; 2)$.
- C. $\mathbb{R}$.
- D. $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải

Câu 3. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

- A. $(1; 3)$.
- B. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.
- C. $(-\infty; 3)$.
- D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Câu 6. Hàm số $y = x^4 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 5$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 B. Hàm số nghịch biến với mọi x .
 C. Hàm số đồng biến với mọi x .
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải

Câu 8. Hàm số $y = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 9. Hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Câu 10. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

- A. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
 B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải

Câu 12. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ là đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lời giải

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; -\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; -\infty)$.

Lời giải

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên tập $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải

Câu 16. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $y = x^4 + x^2 + 1$.
- B. $y = x^3 + 1$.
- C. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.
- D. $y = \tan x$

Lời giải

Câu 17. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^2 + x$.

B. $y = x^4 + x^2$.

C. $y = x^3 + x$.

D. $y = \frac{x+1}{x+3}$

Lời giải

Câu 18. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào không đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \sin x - 3x$.

B. $y = \cos x + 2x$.

C. $y = x^3 - x^2 + 5x - 1$.

D. $y = x^5$.

Lời giải

Câu 19. Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \sin x - x$.

B. $y = -x^3 + 3x^2$.

C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

D. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

Lời giải

Câu 20. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \tan x$.

B. $y = x^4 + x^2 + 1$.

C. $y = x^3 + 1$.

D. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.

Lời giải

Câu 21. Hàm số nào sau đây không đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = x^3 + 1$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

D. $y = x^5 + x^3 - 10$

Lời giải

Câu 22. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định?

A. $y = x^4 - x^2$.

B. $y = -x^3 + 3x^2$.

C. $y = 2x - \sin x$.

D. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

Lời giải

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 23. Trong các hàm sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y = -x^3 + 2x^2 - 7x$.

B. $y = -4x + \cos x$.

C. $y = -\frac{1}{x^2+1}$.

D. $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right)^x$

Lời giải

Câu 24. Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Câu 25. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$.
- B. $(1; 2)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(0; 1)$.

Lời giải

Câu 26. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- A. $y = -x^3 - 3x$.
- B. $y = \frac{x-1}{x-2}$.
- C. $y = \frac{x+1}{x+3}$.
- D. $y = x^3 + 3x$.

Lời giải

Câu 27. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. Hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.
- B. Hàm số $y = x^3 + 3x + 5$.
- C. Hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 3$.
- D. Hàm số $y = \tan x$.

Lời giải

Câu 28. Trong các hàm số sau, hàm số nào không đồng biến trên tập số thực?

- A. $y = 4x - 3\sin x + \cos x$.
- B. $y = 3x^3 - x^2 + 2x - 7$.
- C. $y = 4x - \frac{3}{x}$.
- D. $y = x^3 + x$.

Lời giải

Câu 29. Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \tan x$.
- B. $y = \frac{x}{x+1}$.
- C. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- D. $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Lời giải

Câu 30. Biết rằng các số thực a, b thay đổi sao cho hàm số $f(x) = -x^3 + (x+a)^3 + (x+b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 - 4a - 4b + 2$.

- A. -4 . B. -2 . C. 0 . D. 2 .

Lời giải

Câu 31. Hàm số $y = \sqrt{8+2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(1; 4)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-2; 1)$.

Lời giải

Câu 32. Cho các hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$; $y = x^4 + 2x^2 + 2$; $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$?

- A. 3 . B. 1 . C. 2 . D. 0 .

Lời giải

Câu 33. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

- A. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. B. $(-2; 0)$.
C. $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$. D. $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 34. (THPT chuyên Phan Bội Châu)

Hàm số $y = \sqrt{2x-x^2} - x$ nghịch biến trên khoảng.

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Câu 35. Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định của chúng trong các hàm số sau.

(1): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; (2): $y = \frac{2x-1}{2x+1}$; (3): $y = \sqrt{x^2 + 4}$
 (4): $y = x^3 + x - \sin x$; (5): $y = x^4 + x^2 + 2$.

A. 5. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

.....

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$.

Biết $f(1) = 2$. Khẳng định nào dưới đây có thể xảy ra?

A. $f(2) = 1$. B. $f(2017) > f(2018)$. C. $f(-1) = 2$. D. $f(2) + f(3) = 4$

Lời giải

.....

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; 0)$.

Lời giải

.....

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Lời giải

.....

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Lời giải

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x + 1)(5 - x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1) < f(4) < f(2)$.

B. $f(1) < f(2) < f(4)$.

C. $f(2) < f(1) < f(4)$.

D. $f(4) < f(2) < f(1)$.

Lời giải

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)^2(x - 1)^3(2 - x)$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

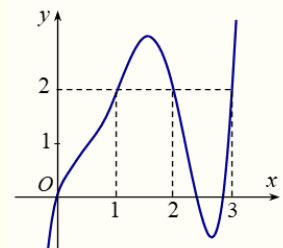
Đặt $h(x) = 3x - f(x)$. Hãy so sánh $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$?

A. $h(1) < h(2) < h(3)$.

B. $h(2) < h(1) < h(3)$.

C. $h(3) < h(2) < h(1)$.

D. $h(3) = h(2) < h(1)$.



Lời giải

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x - 2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 3)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Câu 44. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 7x - \sqrt{2x^2 - x - 1}$.

B. $y = \sqrt[3]{2 - 3x + x^2}$.

C. $y = 4x - \sqrt{x^2 - x + 1}$.

D. $y = \sqrt[3]{-2x + 5}$.

Lời giải

Câu 45. (Bộ Giáo Dục và Đào Tạo 2021) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $y = \frac{3x-1}{x+1}$.

B. $y = x^3 - x$.

C. $y = x^4 - 4x$.

D. $y = x^3 + x$.

Lời giải

Câu 46. (Bộ Giáo Dục và Đào Tạo 2023)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4), \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(4) > f(0)$.

B. $f(0) > f(2)$.

C. $f(5) > f(6)$.

D. $f(4) > f(2)$.

Lời giải

Câu 47. (THPT Lê Thánh Tông HCM 2025) Cho hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x + 3)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 1)$

B. $(-1; +\infty)$

C. $(-\infty; -1)$

D. $(1; +\infty)$

Lời giải

Dạng 2. Tìm các điểm cực trị của hàm số.

1. Phương pháp.

- ① **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số f .
- ② **Bước 2.** Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x_0 sao cho $f'(x_0) = 0$ (nếu có) và tìm các điểm $x_0 \in D$ mà tại đó hàm f liên tục nhưng đạo hàm $f'(x)$ không tồn tại.
- ③ **Bước 3.** Vận dụng định lý 2 (lập bảng xét dấu $f'(x)$) hay định lý 3 (tính $f''(x)$) để xác định điểm cực trị của hàm số.

★ Chú ý:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

Điểm $x = x_0 \in D$ là điểm cực trị của hàm số khi và chỉ khi hai điều kiện sau đây cùng thỏa mãn:

- ☞ Tại $x = x_0$ đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại.
- ☞ Đạo hàm đổi dấu khi x đi qua x_0 .

2. Bài tập minh họa.

 **Bài tập 9.** Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1). $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ 2). $y = -x^4 + 6x^2 - 8x$

1). $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ 2). $y = -x^4 + 6x^2 - 8x$

Lời giải.

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for writing. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Nhận xét. Trong bài toán này, vì $\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)=0 \end{cases}$ do đó **định lý 3** không khẳng định được điểm $x=2$ có phải là điểm cực trị của hàm số hay không.

 **Bài tập 10.** Tìm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1). $y = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 1$ 2). $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

1). $y = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 1$ 2). $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

[illegible]

1). $y = \frac{4 - |x|}{4 + |x|}$

2). $y = |x + 3| + \frac{1}{x + 1}$

[illegible]

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 48. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Câu 49. (THPT Chuyên Bắc Ninh 2018) Phát biểu nào sau đây là sai ?

- A. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .
- B. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .
- C. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 .
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của đạo hàm.

Lời giải

Câu 50. (THPT Bình Xuyên-Vĩnh Phúc 2018)

Xét $f(x)$ là một hàm số tùy ý. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Nếu $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = x_0$ thì $f''(x_0) < 0$.
- B. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_0$.
- C. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại $x = x_0$.
- D. Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực đại tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Lời giải

Câu 51. (THPT Chuyên Quốc Học Huế 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng K và $x_0 \in K$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $f''(x) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.
- B. Nếu $f''(x) = 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.
- C. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$.
- D. Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f''(x_0) = 0$.

Lời giải

Câu 52. (THPT Chuyên Quốc Học Huế)

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. Nếu hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $f''(x_0) < 0$.
- B. Nếu hàm số đạt cực đại tại x_0 thì tồn tại $a < x_0$ để $f'(a) > 0$.
- C. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
- D. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0 .

Lời giải

Câu 53. (THPT Chuyên Hùng Vương 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- (I): Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ ($h > 0$) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .
- (II): Nếu hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 thì tồn tại các khoảng $(x_0 - h; x_0)$, $(x_0; x_0 + h)$ ($h > 0$) sao cho $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$.
- A. Cả (I) và (II) cùng sai.
- B. Mệnh đề (I) đúng, mệnh đề (II) sai.
- C. Mệnh đề (I) sai, mệnh đề (II) đúng.
- D. Cả (I) và (II) cùng đúng.

Lời giải

Câu 54. (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ 2018)

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ là điểm?

- A. $Q(3; 1)$.
- B. $M(1; 3)$.
- C. $P(7; -1)$.
- D. $N(-1; 7)$.

Lời giải

Câu 55. (Chuyên Đồng Bằng Sông Cửu long 2018)

Gọi x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- A. 2.
- B. 1.
- C. -1.
- D. 0.

Lời giải

Câu 56. (TT Diệu Hiền-Cần Thơ 2018)

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 0.
- D. 3.

Lời giải

Câu 57. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2018)

Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 12x - 1$

- A. $y_{CD} = -17$. B. $y_{CD} = -2$. C. $y_{CD} = 45$. D. $y_{CD} = 15$.

Lời giải

Câu 58. (THPT Triệu Sơn 3 Thanh Hóa 2018)

Có bao nhiêu điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x}$?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1

Lời giải

Câu 59. (Sở GD & ĐT Bình Thuận 2020)

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là y_1 và y_2 . Khi đó, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $3y_1 - y_2 = -1$. B. $3y_1 - y_2 = 5$. C. $3y_1 - y_2 = 1$. D. $3y_1 - y_2 = -5$.

Lời giải

Câu 60. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-2018)

Hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Câu 61. (THPT Chuyên Hạ Long 2018)

Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Lời giải

Câu 62. (THPT Trần Quốc Tuấn 2018)

Hàm số $y = 2x^4 + 4x^2 - 8$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Lời giải

Câu 63. (THPT Chuyên Hà Tĩnh 2018)

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Câu 64. (THPT Hồng Bàng 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x+1)^2(x-1)$. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Câu 65. (Chuyên Quang Trung-2018)

Cho các hàm số (I): $y = x^2 + 3$, (II): $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 5$, (III): $y = x - \frac{1}{x+2}$, (IV): $y = (2x+1)^7$. Các hàm số không có cực trị là:

- A. (I), (II), (III). B. (III), (IV), (I).
C. (IV), (I), (II). D. (II), (III), (IV).

Lời giải

Câu 66. (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định 2018)

Đồ thị hàm số nào trong bốn hàm số liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây, có đúng một cực trị?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + x$. B. $y = x^4 + 2x^2 - 3$. C. $y = -x^3 - 4x + 5$. D. $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

Lời giải

Câu 67. (THPT Can Lộc Hà Tĩnh 2018) Trong các hàm số sau, hàm số nào có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu?

- A. $y = -x^4 + x^2 + 3$. B. $y = x^4 + x^2 + 3$. C. $y = -x^4 - x^2 + 3$. D. $y = x^4 - x^2 + 3$

Lời giải

Câu 68. (THPT Chuyên Thái Bình 2018)

Hàm số $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x - 3)^2} + 2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Lời giải

Câu 69. (THPT Hồng Bàng Hải Phòng 2018)

Hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Câu 70. (Sở GD & ĐT Hậu Giang 2020)

Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng 1 điểm cực trị

- A. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$. B. $y = -x^4 - 3x^2 + 4$.
C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$. D. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Lời giải

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 71. (THPT Hoa Lư-2018) Gọi A và B là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Tính diện tích S của tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

- A. $S = 2$. B. $S = 4$. C. $S = 1$. D. $S = 3$.

Lời giải

Câu 72. (THPT Sơn Tây-Hà Nội-2018)

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x}{x-1}$

- A. $y = -2x - 2$. B. $y = 2x + 2$. C. $y = 2x - 2$. D. $y = -2x + 2$.

Lời giải

Câu 73. (THPT Sơn Tây-Hà Nội-2018) Tìm cực đại của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Câu 74. (THPT Chuyên ĐHSPT-2018)

Điểm thuộc đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$ cách đều hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là

- A. (2;1). B. (0;-1). C. (1;0). D. (-1;2).

Lời giải

Câu 75. (Chuyên Phan Bội Châu-2018) Số điểm cực trị của hàm số $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ là
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Câu 76. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn 2020)
 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ trên $\mathbb{R}$. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Câu 77. (THPT Phan Đăng Lưu Huế 2020)
 Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 4$ và $M(x_0; 0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T = 4x_0 + 2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?
A. $T = 2017$. **B.** $T = 2019$. **C.** $T = 2016$. **D.** $T = 2018$.

Lời giải

Câu 78. (THPT Trần Phú 2018)
 Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$ có đồ thị (C) . Gọi A, B, C là 3 điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính diện tích S của tam giác ABC .
A. $S = 64$. **B.** $S = 32$. **C.** $S = 24$. **D.** $S = 12$.

Lời giải

Dạng 3. Xác định tham số m để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên một khoảng.

Loại 1. Xác định tham số để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

1. Phương pháp.

- **Bước 1.** Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.
- **Bước 2.** Tính $f'(x)$, vận dụng định lí 1 vào các hàm số thường gặp trong chương trình (xem phần tóm tắt giáo khoa).
- **Bước 3.** Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.

☞ Nếu $f'(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) thì

➤ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (hay $\mathbb{R}$ bớt đi một số hữu hạn điểm) khi và

chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}.$$

➤ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (hay $\mathbb{R}$ bớt đi một số hữu hạn điểm)

khi và chỉ khi

$$f'(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}.$$

☞ Nếu $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - cb \neq 0$) có đạo hàm $f'(x) = \frac{a.d - c.b}{(cx+d)^2}$ thì

➤ Hàm số đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ khi $ad - bc > 0$.

➤ Hàm số nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ khi $ad - bc < 0$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài tập 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số:

1). $y = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 - (3m-1)x + m^2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2). $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và m thỏa $[-2020; 2020]$.

3). $y = \frac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

[illegible]

2). $y = \frac{-2x^2 + (m+2)x - 3m + 1}{x-1}$.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 79. (Sở GD&ĐT Bình Phước 2020)

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

A. $\begin{cases} a = b; c > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Câu 80. (THPT Xuân Hòa 2018)

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Câu 81. (Chuyên Bắc Ninh 2018)

Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + 3x + 2$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

A. 2

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Câu 82. (Trần Kỳ Phong Quảng Nam-2018) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - mx + 1$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 3.

B. Vô số.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Câu 83. (THPT Nguyễn Khuyến 2018) Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + 3x + 1$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

A. 7.

B. 6.

C. Vô số.

D. 5

Lời giải

Câu 84. (THPT Thạch Thành-Thanh Hóa 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên tham số m , hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 85. (THPT Cổ Loa-Hà Nội 2018)

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Câu 86. (THPT Lê Quý Đôn 2020) Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. Không có giá trị m thỏa mãn. B. $m \neq 1$.
C. $m = 1$. D. Luôn thỏa mãn với mọi m .

Lời giải

Câu 87. (SGD Ninh Bình năm 2017-2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

Lời giải

Câu 88. (THPT Chuyên Quốc Học-Huế 2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 6. B. 2. C. 5. D. 4.

Lời giải

Câu 89. (THPT Sơn Tây-Hà Nội-2018)

Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 2$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \leq 0$.

B. $m > -1$.

C. $m \leq 2$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải

Câu 90. (THPT Lương Văn Chánh 2018)

Cho hàm số: $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 5.

B. 6.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Câu 91. (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-2018)

Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m+1)x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 200.

B. 99.

C. 100.

D. 201

Lời giải

Câu 92. (Sở GD&ĐT Bắc Giang 2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5

B. 3

C. 1

D. 2

Lời giải

Câu 93. (Chuyên Thái Bình-2018)

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm $y = \frac{x+m}{mx+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5

Lời giải

Câu 94. (THPT Chuyên Thái Bình 2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải

Câu 95. (THPT Kinh Môn 2018) Kết quả của m để hàm số sau $y = \frac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

- A. $m \leq 2$. B. $m > 2$. C. $m < 2$. D. $m \geq 2$.

Lời giải

Câu 96. (THPT Việt Trì-Phú Thọ-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của chúng.

- A. 2017. B. 2020. C. 2019. D. 2018.

Lời giải

Câu 97. (THPT Kiến An-Hải Phòng 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x-m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng xác định của nó.

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in [2; +\infty)$. C. $m \in (2; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 2)$

Lời giải

Câu 98. (THPT Đồng Đậu-Vĩnh Phúc 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m^2x-4}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 99. (Chuyên Quốc Học Huế 2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x + \frac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2-3x+m}{x-2}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m \geq -2$.

B. $m \leq -2$.

C. $m < -2$.

D. $m > -2$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 101. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x) = \frac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $m = 0$.

B. $m = -1$.

C. $m < 0$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 102. (THPT Chuyên Thái Bình 2018)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 1$.

B. $m \leq -1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 103. Tìm m để hàm số $y = mx - \sin x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq 1$. B. $m = 1$. C. $m < 1$. D. $m \geq -1$.

Lời giải

Câu 104. (THPT Hồng Lĩnh Hà Tĩnh-2018) Cho hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$.

Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

- A. -4 . B. -5 . C. -3 . D. 0 .

Lời giải

Câu 105. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = (2m+3)\sin x + (2-m)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 4 . B. 5 . C. 3 . D. 6 .

Lời giải

Câu 106.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = x + m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $|m| \leq 1$. B. $m > \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $|m| \geq 1$. D. $m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Câu 107.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x + m(\sin x + \cos x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $|m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $|m| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 108. (Chuyên Phan Bội Châu-2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. Vô số

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 109. (Bộ GD & ĐT-2018)

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $[-1; 1]$.

B. $(1; +\infty]$.

C. $(-\infty; -1]$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 110. Tìm m để hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$: $y = \frac{2}{3}e^{3x} - me^x + 4x - 2018$.

A. $m \geq -6$

B. $m \leq 6$

C. $m \leq -5$

D. $m \geq 6$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 111. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Câu 112.

Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $[1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $[-1; 1]$.

Lời giải

Câu 113. Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

A. -16.

B. 4.

C. $\frac{-1}{16}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Loại 2. Xác định tham số để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a; b)$, nửa khoảng $(a; +\infty)$...

1. Phương pháp.

① Xét $y = f(x)$ là hàm số nhất biến có dạng $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - cb \neq 0)$ có tập xác

định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ và đạo hàm $f'(x) = \frac{a.d - b.c}{(cx+d)^2} \quad (ad - cb \neq 0)$ thì

☞ Hàm số đồng biến trên $(L; +\infty)$ khi $\frac{ac - bd}{(cx+d)^2} > 0, \forall x \in (L; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (L; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq L \end{cases}.$$

☞ Hàm số nghịch biến trên $(L; +\infty)$ khi $\frac{ac - bd}{(cx+d)^2} < 0, \forall x \in (L; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (L; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd < 0 \\ -\frac{d}{c} \leq L \end{cases}.$$

② Xét $y = f(x)$ là hàm số bất kỳ, ta có các phương pháp sau

* **Cách 1. Biện luận** (đối với cách này phương trình $y' = 0$ có $\Delta = (cx+d)^2$)

◦ **Bước 1.** Tập xác định và tính đạo hàm y' .

◦ **Bước 2.** Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \text{theom} \\ x_2 = \text{theom} \end{cases}$. (Với $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$)

◦ **Bước 3.** Lập bảng biến thiên và biện luận.

* **Cách 2. Cô lập tham số m , tức là biến đổi** $f'(x, m) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow g(x) \geq m (\leq m)$.

◦ **Bước 1.** Xác định tham số m để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.

◦ **Bước 2.** Tính $f'(x, m)$, vận dụng định lí 1 vào các hàm số thường gặp trong chương trình.

◦ **Bước 3.** Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.

☞ Nếu hàm số đồng biến trên $(a; b)$ thì

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in [a; b] \xleftarrow{\text{Cô lập tham số } m} g(x) \geq h(m), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow \min_{[a; b]} g(x) \geq h(m).$$

☞ Nếu hàm số nghịch biến trên $(a; b)$ thì

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in [a; b] \xleftarrow{\text{Cô lập tham số } m} g(x) \leq h(m), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow \max_{[a; b]} g(x) \leq h(m).$$

♦ **Lưu ý:** trong một số bài toán tham số m có chứa tham số m bậc hai và bậc một thì không thể cô lập m được nên ta phải biện luận.

☞ Gọi S tập nghiệm của $A.f'(x) \geq 0$ thì $S = \mathbb{R}$ hoặc $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

☞ Khi đó điều kiện: $A.f'(x) \geq 0, \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow [a; b] \subset S$.

☞ Khi đó điều kiện: $A.f'(x) \leq 0, \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow [a; b] \subset [x_1; x_2]$.

* **Cách 3. Áp dụng công thức dấu của tam thức bậc hai.**

◦ **Bước 1.** Tập xác định và tính đạo hàm y' .

◦ **Bước 2.** Nếu y' là một tam thức bậc hai có dạng $y' = Ax^2 + BX + C, A \neq 0$. Khi đó,

① Nếu $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b), (a; +\infty) \dots$

② Nếu $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b), (a; +\infty)$

③ Nếu $\Delta \geq 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó

$$x_1 \leq x_2 \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ A.y'(\alpha) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \leq \alpha \end{cases}$$

④ Nếu $\Delta \geq 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó

$$\alpha \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ A.y'(\alpha) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \geq \alpha \end{cases}$$

⑤ Nếu $\Delta \geq 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó

$$x_1 \leq \alpha < \beta \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A.y'(\alpha) \leq 0 \\ A.y'(\beta) \leq 0 \end{cases}$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 15. Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ là?

Lời giải

Bài tập 16.

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

📖 Bài tập 17. (THPT NEWTON Hà Nội 2018)

Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - (2m+9)x^2 + 2(m^2+9m)x + 10$ nghịch biến trên khoảng $(3;6)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

Bài tập 18. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- $y = \frac{2x-1}{x-m}$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$
- $y = x^3 - (m+2)x^2 + (3m+2)x + 2$ đồng biến trên đoạn $[3; 4]$

Trang 53

Bài tập 19.

Hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- 1). Đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó;
- 2). Đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$

Lời giải.

♦ **Bài toán:** Cho hàm số $y = f(u(x))$ xác định và có đạo hàm trên $(a;b)...$

Xác định tham số m để hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên $(a;b)...$

♦ **Nhận xét:** đối với các bài toán đặc ẩn phụ ta sử dụng tính chất sau:

* **Tính chất:** đặt $t = u(x), \forall x \in (a;b) \Rightarrow \min_{(a;b)} t < t < \max_{(a;b)} t$ khi đó $y = f(u(x)) = f(t)$

- ① Nếu $y = f(u(x))$ đồng biến trên $(a;b)...$ và $t = u(x)$ đồng biến trên $(a;b)...$ thì $y = f(t)$ cũng đồng biến trên $\left(\min_{(a;b)} t; \max_{(a;b)} t\right)$.
- ② Nếu $y = f(u(x))$ đồng biến trên $(a;b)...$ và $t = u(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì $y = f(t)$ nghịch biến trên $\left(\min_{(a;b)} t; \max_{(a;b)} t\right)$.
- ③ Nếu $y = f(u(x))$ nghịch biến trên $(a;b)...$ và $t = u(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $y = f(t)$ nghịch biến trên $\left(\min_{(a;b)} t; \max_{(a;b)} t\right)$.
- ④ Nếu $y = f(u(x))$ nghịch biến trên $(a;b)$ và $t = u(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì $y = f(t)$ đồng biến trên $\left(\min_{(a;b)} t; \max_{(a;b)} t\right)$.

3. Bài tập minh họa

Bài tập 20.

Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{-2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

 **Bài tập 21.** Tìm các giá trị m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 114. (THPT Quảng Xương-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 1}{m - 4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 115. (THPT Hậu Lộc 2-Thành Hóa 2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 116. (THPT Chuyên Trần Phú 2018)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để trên $(-1;1)$ hàm số $y = \frac{mx+6}{2x+m+1}$ nghịch biến:

- A. $-4 < m < 3$. B. $\begin{cases} -4 \leq m < -3 \\ 1 < m \leq 3 \end{cases}$. C. $1 \leq m < 4$. D. $\begin{cases} -4 < m \leq -3 \\ 1 \leq m < 3 \end{cases}$.

Lời giải

Câu 117. (THPT Mộ Đức-2018)

Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

- A. 3. B. 4. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Câu 118. (Sở GD-ĐT Gia Lai-2018) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

- A. $m \in (1;2)$. B. $m \in [1;2)$. C. $m \in [1;2]$. D. $m \in (1;2]$.

Lời giải

Câu 119. (Chuyên Hạ Long 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

- A. $-1 \leq m < 2$. B. $m < 2$. C. $m \geq 2$. D. $\begin{cases} m \leq -1 \\ 0 \leq m < 2 \end{cases}$.

Lời giải

Câu 120. (THPT Kinh Môn năm 2020)

Tìm tất cả các số thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $-\frac{1}{2} < m < 0$ hoặc $m > 1$.

B. $m > -\frac{1}{2}$.

C. $m \geq -\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

Lời giải

Câu 121. (THPT Phan Đình Phùng 2018)

Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $m > 1$.

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $m \geq \frac{1}{2}$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Câu 122. (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu –2018) Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3

Lời giải

Câu 123. (Chuyên Đại Học Sư phạm-2018)

Giá trị m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m \leq 0$.

B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$.

C. $1 \leq m < 2$.

D. $m > 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 124. (THPT Nguyễn Đức Thuận 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \cos x}{\sin^2 x}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \leq \frac{5}{4}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 125. (Sở GD-ĐT Quảng Nam 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 126. (THPT Trần Phú-Đà Nẵng-2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - 1 \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty).$$

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 127. (Chuyên Hùng Vương Phú Thọ) Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

A. $S = [-1; 0]$

B. $S = \emptyset$.

C. $S = \{-1\}$.

D. $S = [0; 1]$

Lời giải

Câu 128. (THTT Số 3-486-2018)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

A. $m > \frac{1}{3}$.

B. $m < -1$.

C. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

D. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

Lời giải

Câu 129. (THPT Thạch Thành 2018) Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

A. $S = [-1; 0]$.

B. $S = \{-1\}$.

C. $S = [0; 1]$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Câu 130. (Sở GD&ĐT Bắc Giang 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. 1

B. 4

C. 2

D. 3

Lời giải

Câu 131. (Chuyên Đại Học Vinh 2018)

Số giá trị nguyên của $m < 10$ để hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

A. 10.

B. 11.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Câu 132. (SGD Bắc Giang-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 133. (THPT Chuyên Hạ Long 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Câu 134. (Chuyên Vĩnh Phúc-2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Câu 135. (Chuyên KHTN-2018) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

- A. $(-\infty; 6]$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; 6]$.

Lời giải

Câu 136. (THPT Yên Lạc Vĩnh Phúc 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

A. $m \geq -2$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \leq -1$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Câu 137. (THPT Hồng Bàng 2018) Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m-2)x^2 + (2m+3)x + 1$.

Giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0; 3]$ là

A. 2.

B. -2.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Câu 138. (THPT Chuyên ĐH Vinh 2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $[-2019; 2019]$ để hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

A. 2019.

B. 2018.

C. 2020.

D. 2016.

Lời giải.

Câu 139. (THPT Yên Lạc-2018) Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$. Tìm a để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$

A. $a \geq \frac{12}{7}$.

B. $a < -3$.

C. $a \leq -3$.

D. $a > \frac{12}{7}$.

Lời giải

Câu 140. (THPT Việt Trì-Phú Thọ 2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên $(0; 2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Câu 141. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương và nhỏ hơn 2018 của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;9)$. Tính số phần tử của tập hợp S .

A. 2014.

B. 2015.

C. 2016.

D. 2017.

Lời giải

Câu 142. Cho hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

A. 14.

B. 13.

C. 12.

D. 15.

Lời giải

Loại 3. Xác định tham số m để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng L .

1. Phương pháp.

Xét hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

- **Bước 1.** Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.
- **Bước 2.** Tính $f'(x, m) = 3ax^2 + 2bx + c$.
- **Bước 3.** Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.
 - ☞ Nếu $b^2 - 3ac \leq 0$ thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên $\mathbb{R}$ nên không thỏa mãn đề bài.
 - ☞ Nếu hàm số đồng biến thì

$$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta_{y'}}}{|3a|} = L \Leftrightarrow b^2 - 3ac = \frac{9a^2L^2}{4} \\ |x_1 - x_2| = L \end{cases}$$

- ☞ Nếu hàm số nghịch biến thì

$$\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta_{y'}}}{|3a|} = L \Leftrightarrow b^2 - 3ac = \frac{9a^2L^2}{4} \\ |x_1 - x_2| = L \end{cases}$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 22.

- 1). Tìm m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (1-2m)x - 1$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- 2). Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ đồng biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn 1.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 143. (SGD Bà Rịa Vũng Tàu 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tính tổng tất cả phần tử của S .

A. 9. B. -1. C. -8. D. 8.

Lời giải

Câu 144. (SGD Bà Rịa Vũng Tàu 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Tính tổng tất cả phần tử của S .

A. 4. B. 2. C. -1. D. -2.

Lời giải

Câu 145. (THPT Chuyên Hùng Vương 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Câu 146. (THPT Ngô-Quyền Hải Phòng 2020) Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Nếu $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$ thì có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn đề bài?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

DẠNG 4. Định tham số m để hàm số $f(x)$ đạt cực trị.

Loại 1. Định tham số m để hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước.

1. Phương pháp.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số f và tính đạo hàm $f'(x)$
- **Bước 2.** Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại x_0 là $y'(x_0) = 0$, từ điều kiện này ta tìm được giá trị của tham số m .
- **Bước 3.** Kiểm lại bằng cách dùng một trong hai quy tắc tìm cực trị, để xét xem giá trị của tham số m vừa tìm được có thỏa mãn yêu cầu của bài toán hay không?

*** Chú ý:**

- * Ta có thể sử dụng **quy tắc hai** để tìm, tuy nhiên việc sử dụng quy tắc hai phải thỏa mãn điều kiện $y''(x_0) \neq 0$.
- * Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .
 - ☞ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .
 - ☞ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 23. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$.

Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

Chú ý:

Trường hợp $f'(x_0) = 0$ không tồn tại hoặc $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}$ thì định lý 3 không dùng được.

Nhận xét:

Nếu trình bày lời giải theo sơ đồ sau: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} (*)$ thì

lời giải chưa chính xác

Vì dấu hiệu nêu trong **định lý 3** chỉ phát biểu khi $y''(x_0) \neq 0$. Các bạn sẽ thấy điều đó rõ hơn bằng cách giải bài toán sau:

1). Tìm m để hàm số $y = x^4 + 3mx^2 + m^2 + m$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

2). Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3(m-2)x^2 + (m-4)x + 2m-1$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Nếu ta khẳng định được $y''(x_0) \neq 0$ thì ta sử dụng $(*)$ được.



- 1).** $y = \frac{x^3}{3} + (2m-1)x^2 + (m-9)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- 2).** $y = mx^3 + 2(m-1)x^2 - (m+2)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- 3).** $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- 4).** $y = \frac{x^2 + (m-1)x + 3 - 2m}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 147. (THPT Nguyễn Đức Thuận 2018)

Tìm m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4 - 5$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m \neq -1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Câu 148. (THPT Tam Phước 2018) Với giá trị nào của tham số m thì hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = -1$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Câu 149. (THPT Kiến An 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 1$.

B. $m = -4$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Câu 150. (THPT Hà Huy Tập 2018) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 5$.

D. $m = -7$.

Lời giải

Câu 151. (THPT Việt Trì 2018) Hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(m-1)^2x$. Hàm số đạt cực trị tại điểm có hoành độ $x = 1$ khi

A. $m = 1$.

B. $m = 0; m = 4$.

C. $m = 4$.

D. $m = 0; m = 1$.

Lời giải

Câu 152. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0 = 1$.

A. $m \neq 0$ và $m \neq 2$. B. $m = 2$. C. $m = 0$. D. $m = 0$ hoặc $m = 2$.

Lời giải

Câu 153. (THPT Quảng Xương 2018) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 4$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = -4$. D. $a + b = -2$.

Lời giải

Câu 154. (THPT Trần Hưng Đạo 2018) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. $m < -1$. B. $m = -1$.
C. $m \leq -1$. D. $m \leq -1 \vee m \geq 1$

Lời giải

Câu 155. (THPT Xuân Trường 2018) Hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi:

A. $-1 \leq m < 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < -1$. D. $m > 0$.

Lời giải

Câu 156. (THPT Hoài Ân 2018) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

A. $m = -7$. B. $m = 5$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Lời giải

Câu 157. (THPT Chuyên Biên Hòa 2018) Hàm số $y = x^3 + 2ax^2 + 4bx - 2018$, $(a, b \in \mathbb{R})$ đạt cực trị tại $x = -1$. Khi đó hiệu $a - b$ là

A. -1 . B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Câu 158. (SGD Bà Rịa Vũng Tàu 2018)

Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m \in \emptyset$. D. $m = 0$.

Lời giải

Câu 159. (Sở GD & ĐT Bắc Ninh 2018)

Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m^2 + 1)x^2 + (3m - 2)x + m$ đạt cực đại tại $x = 1$?

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Lời giải

Câu 160. (THPT Chuyên Lam Sơn 2018)

Tìm m để hàm số $y = mx^3 - (m^2 + 1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = -\frac{3}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Lời giải

Câu 161. (Sở GD & ĐT Hà Nội 2018)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- A. $m \leq 0$. B. $m = 0$. C. $m \geq 0$. D. $m > 0$.

Lời giải

Câu 162. (THPT Chuyên Lam Sơn 2018)

Tìm m để hàm số $y = mx^3 - (m^2 + 1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = -\frac{3}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Lời giải

Câu 163. (Sở GD & ĐT Quảng Nam 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2m+3)x^2 + (m^2+3m-4)x$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=2$.

B. $m=-3$.

C. $m=-3$ hoặc $m=2$.

D. $m=-2$ hoặc $m=3$.

Lời giải

Câu 164. (THPT Nguyễn Khuyến 2018) Để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nào?

A. $(2; 4)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-4; -2)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Câu 165. (THPT Thạch Thành 2018) Cho hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$. Biết rằng đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1;4)$ là điểm cực tiểu. Tổng $2a+b$ bằng

A. -1 .

B. 0 .

C. 1 .

D. 2 .

Lời giải

Câu 166. (THPT Chuyên Phan Bội Châu 2018) Biết điểm $M(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$. Tính $f(3)$.

A. $f(3)=17$.

B. $f(3)=49$.

C. $f(3)=34$.

D. $f(3)=13$.

Lời giải

Câu 167. (THPT Đức Thọ Hà Tĩnh 2018) Xác định các hệ số a, b, c để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, biết điểm $A(1; 4)$, $B(0; 3)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

A. $a=1; b=0; c=3$.

B. $a=-\frac{1}{4}; b=3; c=-3$.

C. $a=1; b=3; c=-3$.

D. $a=-1; b=2; c=3$.

Lời giải

Câu 168. (THPT Kim Liên Hà Nội 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có điểm cực trị là $A(1;3)$. Tính giá trị của $P = 4a - b$.

A. $P=3$.

B. $P=2$.

C. $P=4$.

D. $P=1$.

Lời giải

Câu 169. (THPT Chuyên Quốc Học Huế 2020)

Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$, $f(1)=-3$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính $T = a + b + c$

A. $T=9$.

B. $T=1$.

C. $T=-2$.

D. $T=-4$.

Lời giải

Câu 170. (Toán Học Tuổi Trẻ 2017) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2;-2)$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. -4.

D. -2.

Lời giải

Câu 171. (Sở GD&ĐT Bình Phước)

Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7)$, $B(2;-8)$. Tính $y(-1)$.

A. $y(-1)=7$.

B. $y(-1)=11$.

C. $y(-1)=-11$.

D. $y(-1)=-35$.

Lời giải

Câu 172. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị tại điểm $x = 1$, $f(3) = 29$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A. $f(-2) = 4$. B. $f(-2) = 24$. C. $f(-2) = 2$. D. $f(-2) = 16$.

Lời giải

Loại 2. Định tham số m để hàm số $f(x)$ có cực trị. (không có điều kiện).

1. Phương pháp.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số f và tính đạo hàm $f'(x)$
- **Bước 2.** Đối với loại này ta phải xét bốn hàm số sau.
- ☞ **Là hàm số bậc 3:** Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C$
- **Bước 2:** Hàm số có cực trị (hay cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)
 $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó.
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = B^2 - 4AC = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D.$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 25. Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-4)x + m$. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

Lời giải.

Bài tập 26. Tìm m để hàm số: $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ có cực trị.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 173. (THPT Chuyên Hạ Long Quảng Ninh 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 2$ có hai điểm cực trị.

- A. $m \leq 2$. B. $m < 2$. C. $m > 2$. D. $m < -4$.

Lời giải

Câu 174. (THPT Hồng Quang Hải Dương 2018)

Tìm tất cả tham số thực của m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m+2)x^3 + x^2 + \frac{1}{3}mx - 2$ có cực đại, cực tiểu.

- A. $m \in (-3; -2) \cup (-2; 1)$. B. $m \in (-3; 1)$.
C. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in (-2; 1)$.

Lời giải

Câu 175. (THPT Trần Quốc Tuấn 2018)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại, cực tiểu.

- A. $m > \frac{3}{2}$. B. $m < -\frac{3}{2}$. C. $m < \frac{3}{2}$. D. $m \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

Câu 176. (THPT Bình Xuyên 2018) Cho hàm số $y = \frac{(m-1)x^3}{3} + (m-1)x^2 + 4x - 1$. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1 , đạt cực đại tại x_2 đồng thời $x_1 < x_2$ khi và chỉ khi:

- A. $m < 1$. B. $m > 5$. C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 5 \end{cases}$.

Lời giải

Câu 177. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong 2018) Tìm các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2018$ không có cực trị.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

Câu 178. (THPT Hai Bà Trưng Huế 2020)

Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị.

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải

Câu 179. (THPT Hùng Vương 2020)

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m trên $[-2020; 2020)$ để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

- A. 4036. B. 4037. C. 4036. D. 4035.

Lời giải

Câu 180. (THPT Kim Liên 2020) Cho hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 4$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số không có cực trị.

- A. $0 \leq m \leq \frac{1}{3}$. B. $0 < m \leq \frac{1}{4}$. C. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$. D. $m \geq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Câu 181. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m^2 - 3m - 3)x + 2016 \text{ có 2 điểm cực trị?}$$

- A. 6. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải

Là hàm số bậc 4: cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$)

○ **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = x(4ax^2 + 2b)$

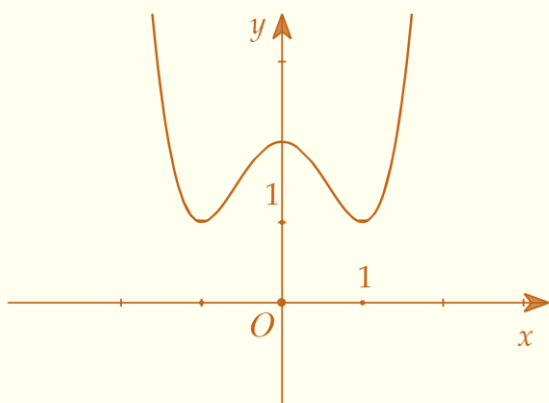
$$y' = 0 \Leftrightarrow x(4ax^2 + 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 4ax^2 + 2b = 0 \end{cases}$$

○ **Bước 2:** Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$)

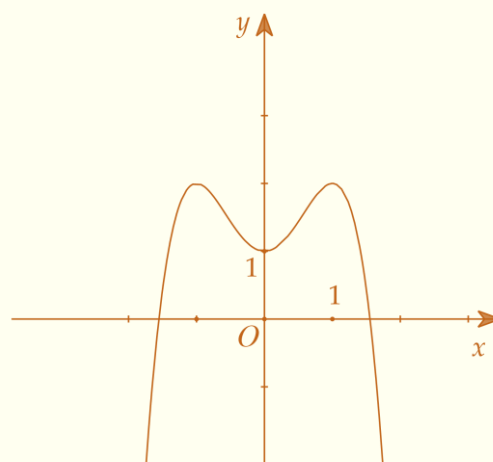
① có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 3 nghiệm đó
 $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases}$$

Nếu hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu thì ta phải thêm điều kiện hệ số $a > 0$.



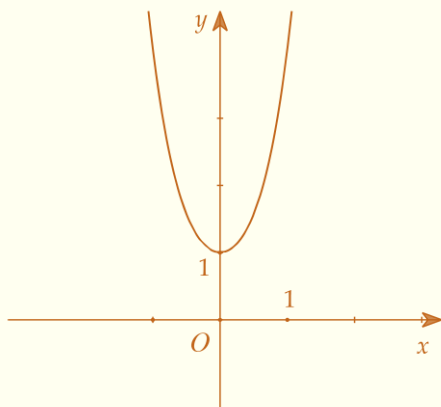
Nếu hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu thì ta phải thêm điều kiện hệ số $a < 0$.



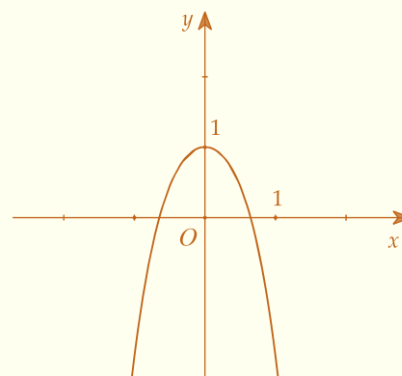
② có 1 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 1 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 1 lần nghiệm đó
 $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 1 nghiệm kép bằng 0 hoặc vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ \Delta_g = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \Delta_g < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} g(0) = 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases}$$

Nếu hàm số 1 cực tiểu thì ta phải thêm điều kiện hệ số $a > 0$.



Nếu hàm số 1 cực đại thì ta phải thêm điều kiện hệ số $a < 0$.



Lưu ý.

☞ Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

☞ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.

- ☞ Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.
- ☞ Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.
- ☞ Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- ☞ Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

Bài tập 27. Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Tìm m để:

- 1). Hàm số có ba cực trị.
- 2). Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Lời giải.

Bài tập 28. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số: $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một điểm cực trị.

Lời giải.

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Nhận biết

Câu 182. (Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc 2018)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 3mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị.

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 0$. D. $m = 0$.

Lời giải

Câu 183. (Sở GD & ĐT Kiên Giang-2018)

Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 - 3$ có 3 cực trị.

- A. $m > 0$. B. $m > 1$. C. $m > -1$. D. $m \geq 0$.

Lời giải

Câu 184. (THPT Cổ Loa 2018)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - mx^2$ có 3 điểm cực trị?

A. $m \in (0; +\infty)$.

B. $m \in \left(-\frac{9}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

C. $m \in (-\infty; 0)$.

D. $m \in \left(-\frac{9}{32}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải

Câu 185. (THPT Kim Liên 2018) Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

B. $m \in (-1; 0)$.

C. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 186. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn 2018)

Tìm điều kiện của a, b để hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị và điểm cực trị đó là điểm cực tiểu?

A. $a < 0, b \leq 0$.

B. $a > 0, b \geq 0$.

C. $a > 0, b < 0$.

D. $a < 0, b > 0$.

Lời giải

Câu 187. (THPT Lê Hoàn 2018)

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m+1)x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có ba cực trị.

A. $-1 < m < 2$.

B. $m > 2$.

C. $-1 \leq m \leq 2$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Câu 188. (THPT Kim Liên 2018) Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

B. $m \in (-1; 0)$.

C. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 189. (THPT Gia Lộc 2019)

Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.

A. $m \in (2; +\infty)$.

B. $m \in (-2; 2)$.

C. $m \in (-\infty; 2)$.

D. $m \in (0; 2)$.

Lời giải

Câu 190. (THPT Lê Quý Đôn 2018)

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + mx^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

A. $m \leq -1$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $-1 < m < 0,5$.

D. $-1,5 < m \leq 0$.

Lời giải

Câu 191. (THPT Ngô Sĩ Liên 2018)

Hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi

A. $m \leq 0$.

B. $m > 0$.

C. m tùy ý.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Câu 192. (THPT Yên Lạc 2018) Cho hàm số: $y = (1-m)x^4 - mx^2 + 2m - 1$.

Tìm m để đồ thị hàm số có đúng một cực trị

A. $m < 0$

B. $m < 0 \vee m > 1$

C. $m \leq 0 \vee m \geq 1$

D. $m > 1$.

Lời giải

Câu 193. (THPT Chuyên Quốc Học-Huế 2018)

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 7.

B. 0.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Câu 194. (Chuyên Ngữ Hà Nội-2018) Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại. Tính tổng các phần tử của tập S .

A. 1.

B. 2.

C. 6.

D. 0.

Lời giải

Câu 195. (THPT Quỳnh Lưu Nghệ An) Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$.

Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Câu 196. (THPT Chuyên Hà Tĩnh 2020) Tính tổng các giá nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 11m)x^2 + 20$ có đúng một điểm cực trị.

- A. 20. B. 55. C. 45. D. 10.

Lời giải

Câu 197. (THPT Kinh Môn 2019)

Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (m^2 - 4)x^2 + 1 - m$ có một điểm cực trị

- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
C. $[-2; 2]$. D. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Câu 198. (Chuyên KHTN Hà Nội)

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m - 3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại là

- A. 2. B. vô số. C. 0. D. 4.

Lời giải

Câu 199. (THPT Chuyên Hà Tĩnh 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một điểm cực trị.

- A. 2019. B. 2020. C. 2018. D. 2017.

Lời giải

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (a \neq 0).$$

- **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(dx + e)^2} = \frac{g(x)}{(dx + e)^2} \quad (A \neq 0).$

- **Bước 2:**

① **Hàm số có cực trị** (hay cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$ và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } g(x)=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } -\frac{e}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} g\left(-\frac{e}{d}\right) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases}$$

② Hàm số không có cực trị

$\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm hay có nghiệm kép

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_g \leq 0$.

 **Bài tập 29.** Tìm m để hàm số sau có cực trị $y = \frac{x^2 + (m-1)x + 1}{mx - 1}$.

Lời giải.

[illegible]

 **Bài tập 30.** Tìm m để hàm số sau có cực trị $y = \frac{x^2 + (2m-1)x + m^2 + m - 3}{x + m}$.

Lời giải.

Bài tập 31.

- 1). Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$, chứng minh với mọi m , đồ thị (C_m) luôn có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.
- 2). Chứng minh rằng với mọi tham số m hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ luôn có cực đại và cực tiểu đồng thời khoảng cách giữa các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số không đổi.

Lời giải.

5. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 200. (Tạp chí THPT-Tháng 4 2018)

Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + mx + 1}{x-1}$ đi qua điểm $A(-1;1)$ khi và chỉ khi m bằng

- A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.

Lời giải

Câu 201. (THPT Chuyên ĐH KHTN 2020)

Với tham số m , đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 2$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $m < 0$.

Lời giải

Câu 202. (THPT Chuyên Hùng Vương-2018) Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A, B . Khi $AOB = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{16}$. B. 8. C. $\frac{1}{8}$. D. 16.

Lời giải

Câu 203. (Cụm Đồng Bằng Sông Cửu Long 2018) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - |m|x + 4}{x - |m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B . Tìm số giá trị m sao cho ba điểm $A, B, C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng.

A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Loại 3. Định tham số m để hàm số $f(x)$ có cực trị thỏa mãn điều kiện.

1. Phương pháp.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số f và tính đạo hàm $f'(x)$
- **Bước 2.** Tìm điều kiện để hàm số có cực trị (loại 2).
- **Bước 3.** Tìm hai điểm cực trị $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ rồi áp dụng hệ thức Vi-ét

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- **Nhận xét:** Đối với loại này ta phải tìm được tung độ y_1, y_2 xét các trường hợp sau:

☞ Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) mà có delta Δ dạng bình phương

thì ta tính nghiệm x_1, x_2 bằng công thức

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y_1 = f(x_1) \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y_2 = f(x_2) \end{cases}$$

☞ Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) mà có delta Δ không có dạng bình phương thì ta xét các cách tính từng hàm sau

🔗 Là hàm số bậc 3: $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

♦ **Phương pháp:** Lấy y chia cho y' ta được thương là $P(x)$ và phần dư là $r(x)$ khi đó, ta viết lại

$$y = y'(x) \cdot p(x) + r(x).$$

Với x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số thì $\begin{cases} y'(x_1) = 0 \\ y'(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x_1) = r(x_1) \\ y_2(x_2) = r(x_2) \end{cases} \Rightarrow y = r(x)$

Vậy để tìm tung độ cực trị hay giá trị cực trị $y = r(x)$.

🔗 Là hàm số phân thức hữu tỉ: $y = \frac{u(x)}{v(x)}$.

♦ **Phương pháp:** khi đó nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì giá trị cực trị của

hàm số: $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = r(x).$

Vậy Ta cũng suy ra được $y = r(x)$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị x_1, x_2 .

2. Bài tập minh họa.

📖 **Bài tập 32.** Tìm các giá trị của m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực đại, cực tiểu có hoành độ là các số dương.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

📖 **Bài tập 33. (Chuyên Hùng Vương Phú Thọ)**

Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $m_0 \in (-1; 7)$. **B.** $m_0 \in (7; 10)$. **C.** $m_0 \in (-15; -7)$. **D.** $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

📖 **Bài tập 34. (THPT Chuyên Lam Sơn 2018)**

Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3m.x^2 + 9x - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 2$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = b - a$.

A. $T = 2 + \sqrt{3}$.

B. $T = 1 + \sqrt{3}$.

C. $T = 2 - \sqrt{3}$.

D. $T = 3 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Bài tập 35.

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + m(x+1)}{x+2}$ có hai cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = -6\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$.

Lời giải.

Bài tập 36. (Bộ Giáo Dục & Đào Tạo 2023)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$?

A. 16.

B. 6.

C. 17.

D. 7.

Lời giải

Bài tập 37. (Bộ Giáo Dục & Đào Tạo 2023)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + \frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 5)$?

A. 17.

B. 12.

C. 16.

D. 11.

Lời giải

Bài tập 38. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x - m^3 - 3m^2 + m$.

Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m đồ thị hàm số có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm không đổi.

Lời giải.

Bài tập 39.

Tìm các giá trị của m để hàm số: $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - \frac{m+3}{2}x^2 + (3-m)x - m + \frac{3}{2}$ có cực trị và số 2 nằm giữa hai điểm cực trị của hàm số.

Lời giải.

Bài tập 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

- 1). $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 (O là gốc tọa độ).
- 2). $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

Lời giải.

Bài tập 41. Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ (1). Tìm tham số m để đồ thị hàm số (1)

có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu đồng thời:

- 1). Đường thẳng đi qua hai điểm này tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1;
- 2). Cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O .

Lời giải.

[illegible]

2). Hai điểm A và B tạo với điểm $C(4;0)$ một tam giác vuông tại C .

[illegible]

Lời giải.

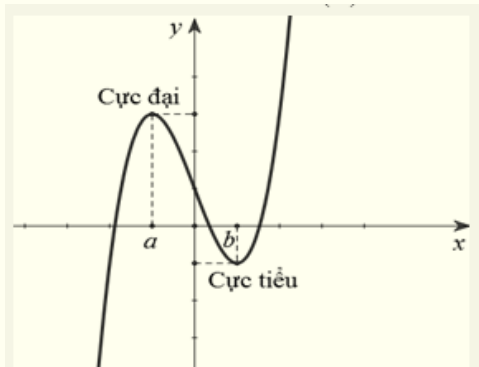
[illegible]

Dạng 5. Cho đồ thị hàm số hoặc bảng biến thiên hoặc công thức $f'(x)$.

Tìm sự đồng biến, nghịch biến và cực trị của hàm hợp $f(u(x))$.

1. Phương pháp.

XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f(x)$



- Đồ thị hàm số đang **đi lên (đồng biến)** sau đó **đổi hướng đi xuống (nghịch biến)** tại điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

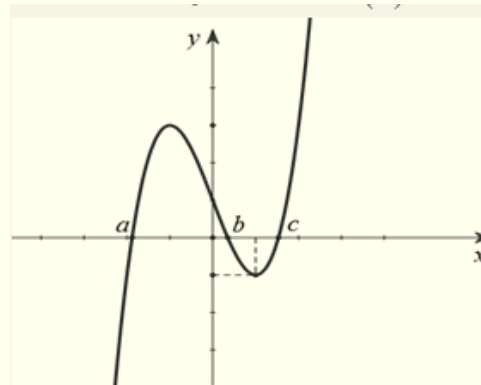
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$.

- Đồ thị hàm số đang **đi xuống** sau đó **đổi hướng đi lên** tại điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $f(x)$.

- Hoàn chỉnh cực trị $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$

XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f'(x)$



- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên D nếu:

- ① Đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm **phía trên** Ox nên $f'(x) \geq 0$.
- ② Đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm **phía dưới** Ox nên $f'(x) < 0$.

- $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases}$ tức là ba nghiệm a, b, c là giao của đồ thị với trục Ox

Bài toán : Xác định sự biến thiên và cực trị của hàm hợp $y = f(u(x))$ dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f'(x)$

Phương pháp xác định tính đơn điệu của hàm hợp $y = f(u(x))$.

➤ Bước 1:

- Tính đạo hàm $g'(x) = [f(u(x))]' = u'(x) \cdot f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'(u(x)) = 0 \end{cases}$.
- Tìm $x_1; x_2; \dots; x_i$ là nghiệm của $f'(x) = 0$.

- #### ➤ Bước 2:
- Giải phương trình $f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = x_1 \\ u(x) = x_2 \\ \dots \end{cases}$

- Xét dấu $f'(u(x))$ dựa vào dấu của $f'(x)$ hoặc vào bảng biến thiên dấu $f'(x)$
- Vai trò của $u(x)$ giống như của x vì dấu của $f'(u(x))$ cũng là dấu của $f'(x)$.

- #### ➤ Bước 3:
- Lập bảng xét dấu $g'(x)$ và kết luận.

2. Bài tập minh họa.

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 204. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;1)$. B. $(1;2)$. C. $(-\infty;-1)$. D. $(2;+\infty)$

Lời giải

Câu 205. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.
 B. Hàm số có ba điểm cực trị.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=3$.

Lời giải

Câu 206.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

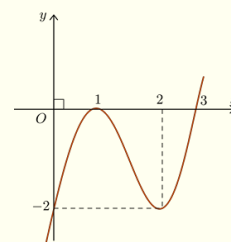
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1;2)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $(-1;1)$. D. $(2;+\infty)$.

Lời giải

Câu 207. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2;+\infty)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(3;+\infty)$ D. $(1;3)$

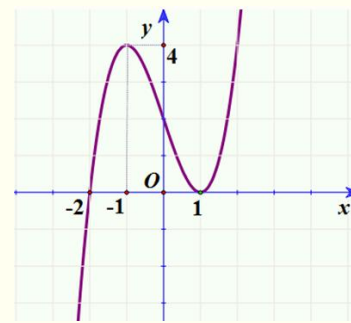


Lời giải

Câu 208. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.

Khẳng định nào sau đây là sai?

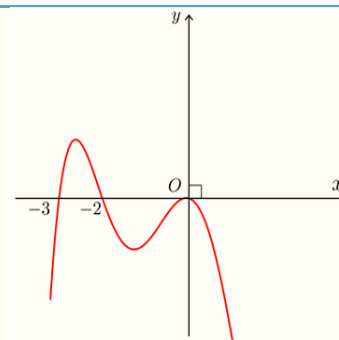
- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$



Lời giải

Câu 209. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

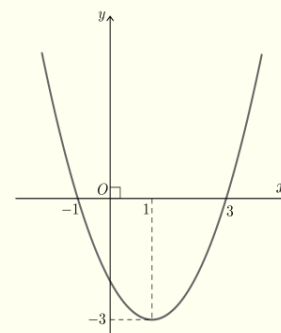


Lời giải

Câu 210. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên.

Khẳng định nào sau đây là đúng ?

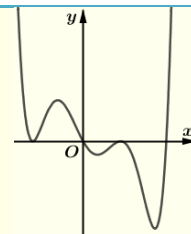
- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$
- C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.



Lời giải

Câu 211. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 2. B. 3.
C. 4. D. 5.



Lời giải.

.....

.....

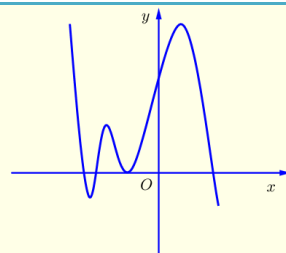
.....

.....

.....

Câu 212. (THPT Kiến An 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6. B. 5.
C. 4. D. 3.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

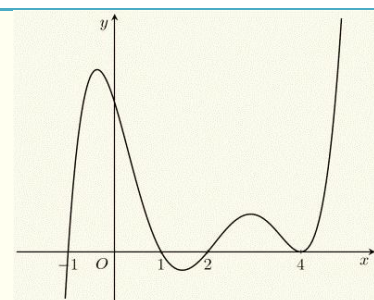
Đạo hàm của hàm hợp có dạng tích $g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$

Câu 213. Cho hàm số $y = f(x)$.

Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số $g(x) = f(1-4x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$. D. $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

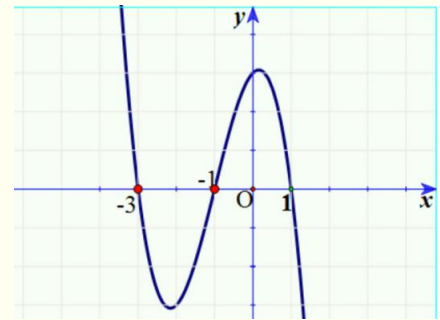
.....

Câu 214. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Xét hàm số $y = g(x) = f(1-x)$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$
- B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
- D. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 215. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$.

Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 2)$.
- B. $(-\infty; -3)$.
- C. $(-3; 0)$.
- D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 216. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Đặt hàm số $y = g(x) = f(1-x) + 1$. Mệnh đề nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 217. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

bảng biến thiên như sau.

Đặt hàm số $y = g(x) = f(2-x) - 2$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- B.** Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- C.** Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- D.** Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$

Lời giải

.....

.....

.....

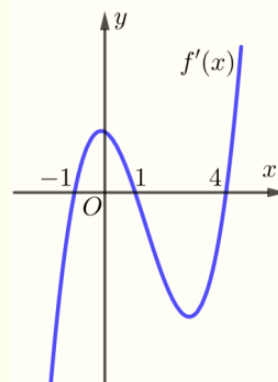
.....

Câu 218. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây:

- A.** $(1; 2)$.
- B.** $(1; +\infty)$.
- C.** $(-2; -1)$.
- D.** $(-1; 1)$.



Lời giải

.....

.....

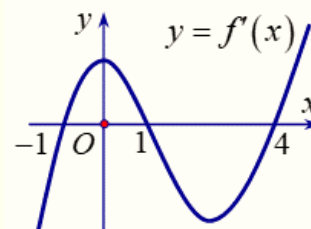
.....

.....

Câu 219. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(1; 2)$.
- B.** $(-1; 1)$.
- C.** $(1; +\infty)$.
- D.** $(-2; -1)$.



Lời giải

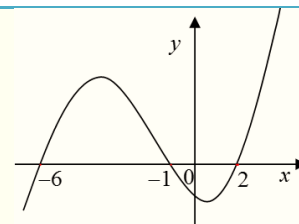
.....

.....

.....

.....

Câu 220. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng.

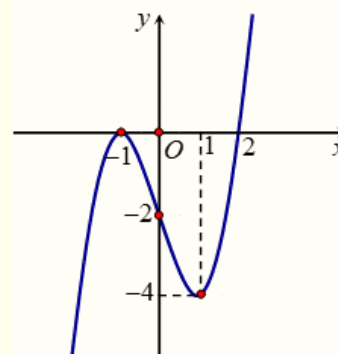


- A. $(2;3)$. B. $(-2;-1)$. C. $(0;1)$. D. $(-1;0)$.

Lời giải

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.

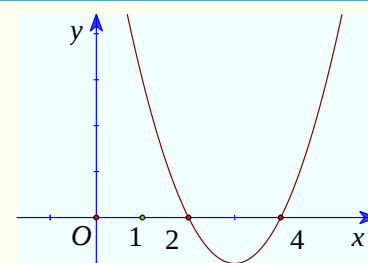
Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.
 B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.
 C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.
 D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Câu 222. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(\sqrt{3};+\infty)$. B. $(-\sqrt{3};-1)$.
 C. $(1;\sqrt{3})$. D. $(0;1)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

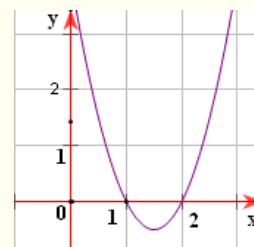
.....

.....

Câu 223. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số $y = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

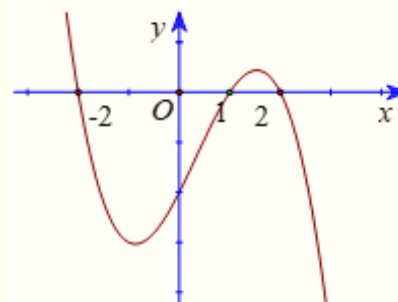
.....

.....

.....

Câu 224. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(-2)=1$, $f(2)=0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(-2; -1)$.
- C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

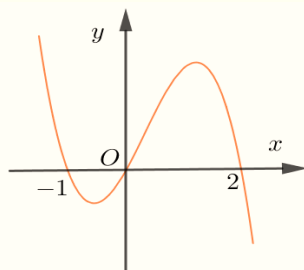
.....

.....

.....

Câu 225. Cho hàm số $y = f(x)$.

Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-1) = f(2) = 0$



Hàm số $g(x) = [f(x^3 - 3)]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(1; 2)$

B. $(0; 1)$

C. $(-1; 0)$

D. $(-2; -1)$

Lời giải

.....

.....

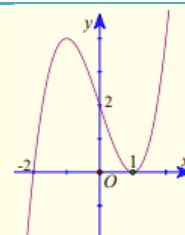
.....

.....

.....

Câu 226. (THPT Nghèn Hà Tĩnh 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới. Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

.....

.....

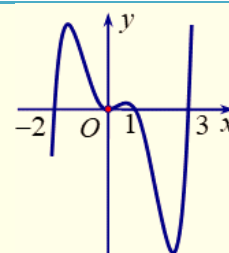
.....

.....

.....

Câu 227. (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 228. (Sở GD&ĐT Bắc Giang 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3

B. 8

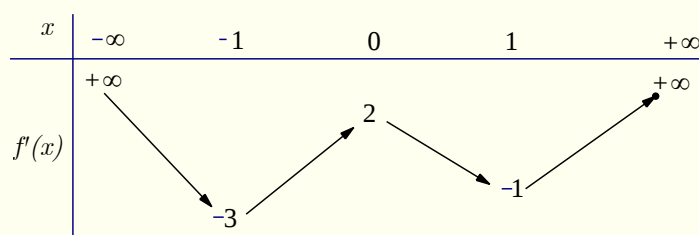
C. 10

D. 7

Lời giải

Câu 229. (Bộ GD & ĐT Năm 2019)

Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 3.

B. 9.

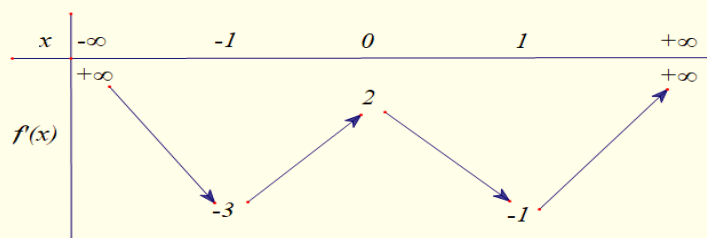
C. 5.

D. 7.

Lời giải

Câu 230. (Bộ GD & ĐT Năm 2019)

Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

A. 9.

B. 5.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Đạo hàm của hàm hợp có dạng tổng hoặc hiệu

$$g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x)) + h(x)$$

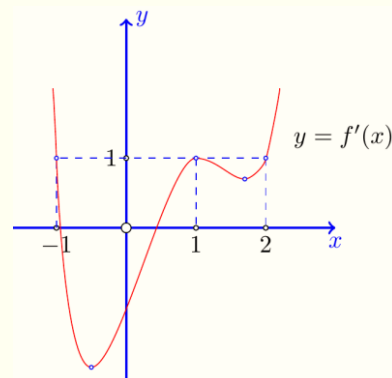
Câu 231. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $y = g(x) = f(x) - x$.

Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.



Lời giải

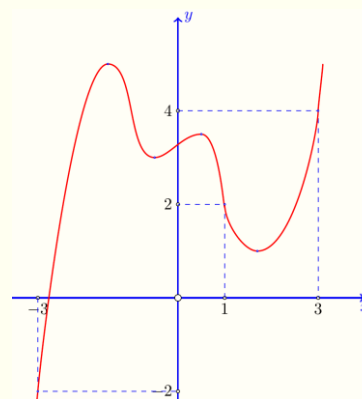
Câu 232. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $y = g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$.

Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.



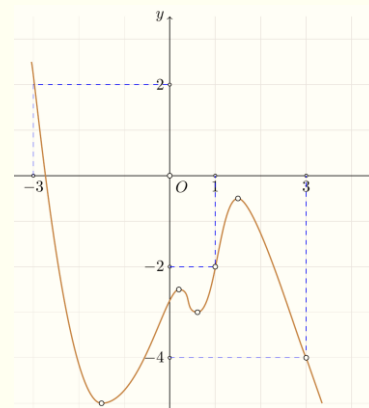
Lời giải

Câu 233. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $y = g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là đúng?



- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

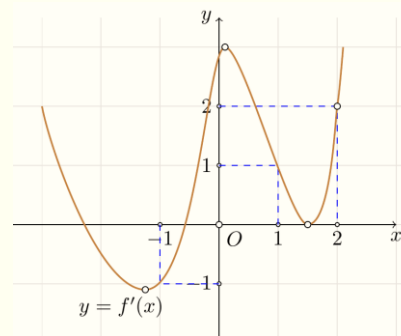
Lời giải

Câu 234. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $y = g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Khẳng định nào sau đây về

hàm số $y = g(x)$ là sai?



- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

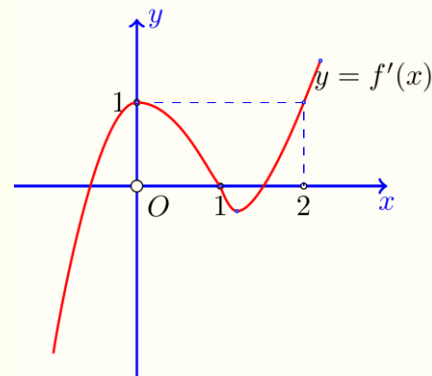
Lời giải

Câu 235. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $y = g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$.

Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là đúng?



- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

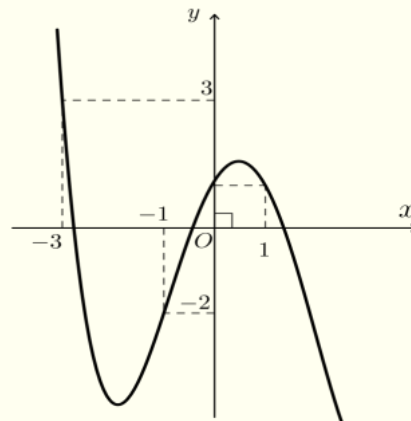
Lời giải

Câu 236. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Hàm số $y = g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$.

Mệnh đề nào dưới đây về hàm số $y = g(x)$ là sai?



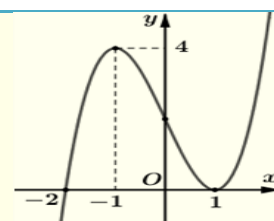
- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -1)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải

Câu 237. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



Lời giải.

Câu 238. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau.

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

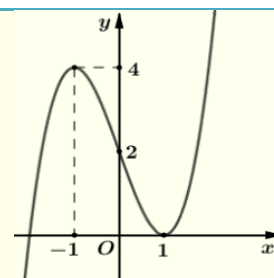
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
f'	-	0	+	0	+	0	-

Lời giải.

Câu 239. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.



Lời giải.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

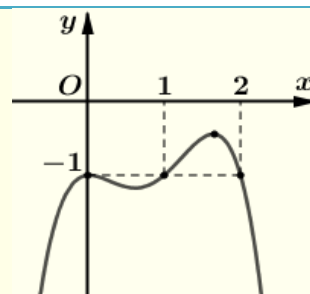
Câu 240. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.
 Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm
 số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây ?

A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. Không có điểm cực tiểu



Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 241. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.
 Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

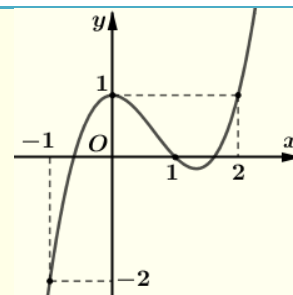
Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại

A. $x = -1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.



Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

S Bài 2

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

A. LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa:

Cho hàm số xác định trên D

➤ Số M gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên D

nếu $\begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max_{x \in D} f(x)$.

➤ Số m gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên D

nếu $\begin{cases} f(x) \geq m \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$, ta kí hiệu $m = \min_{x \in D} f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

1). $y = x^2 + 2x + 3$.

2). $y = -4x^2 + 4x - 5$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

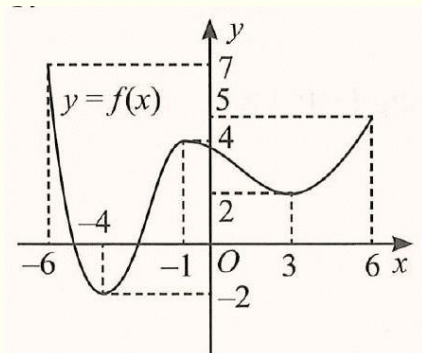
.....

.....

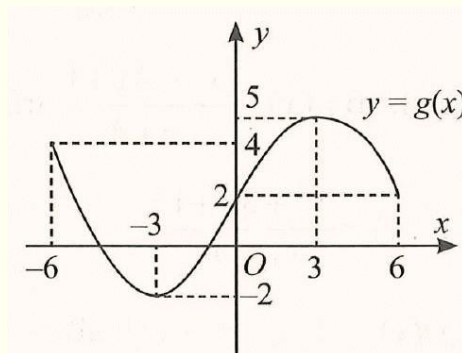
.....

.....

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho sau.



a)



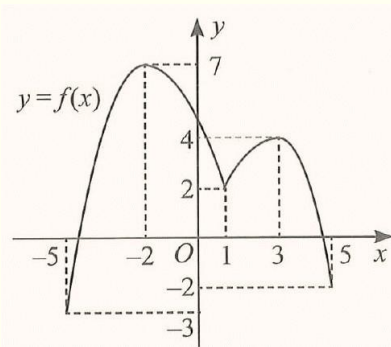
b)

Lời giải

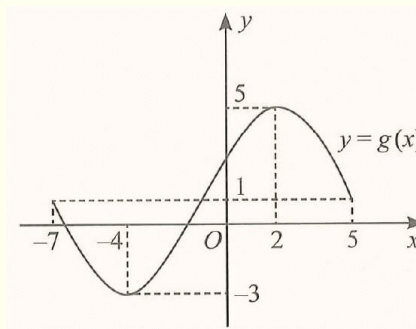
.....

.....

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho.



a).



b).

Lời giải

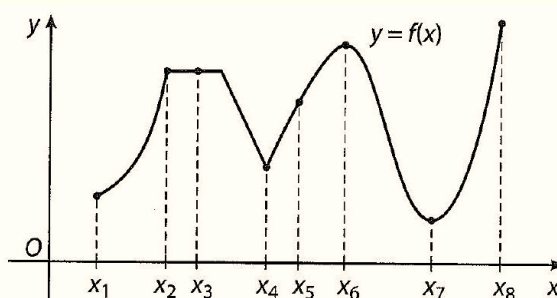
.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Sử dụng đồ thị dưới đây, xác định xem hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hay cực trị tại mỗi điểm $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ hay không.



Lời giải

.....

.....

.....

2. Phương pháp chung tìm GTLN, GTNN của hàm số.

Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên D ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1.** Tìm tập xác định và tính đạo hàm y' .
- **Bước 2.** Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ \dots \\ x = x_n \end{cases}$$

- **Bước 3.** Lập bảng biến thiên và xét dấu.

Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN, GTNN.



Lời giải

[illegible]

a). $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 2$ trên đoạn $[-6; 6]$.

b). $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 4}$ trên khoảng $(-4; +\infty)$.

c). $h(x) = \frac{2x+3}{x-5}$ trên đoạn $[6;9]$.

Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ trên khoảng $(0;3)$ là

A. 4.

B. 2.

C. 0.

D. -2.

Lời giải

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải

3. Chú ý:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $[a;b]$ thì

➤ $\max_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\};$

➤ $\min_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}.$

Ví dụ 9. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 7. Giá trị của tham số m bằng

A. $m = \pm 3.$

B. $m = \pm 1.$

C. $m = \pm\sqrt{7}.$

D. $m = \pm\sqrt{2}.$

Lời giải

Ví dụ 10. Gọi m là giá trị để hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng -2. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $3 < m < 5.$

B. $m^2 \neq 16.$

C. $|m| < 5.$

D. $|m| = 5.$

Lời giải

② Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau.

☞ **Bước 1:** Tính y' và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm.

☞ **Bước 2:** Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

Khi đó $\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max \{f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$

$\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min \{f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$.

📖 **Ví dụ 11.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $\max y = 1.$
 $[0; 2]$

B. $\max y = 0.$
 $[0; 2]$

C. $\max y = -2.$
 $[0; 2]$

D. $\max y = -\frac{50}{27}.$
 $[0; 2]$

Lời giải

📖 **Ví dụ 12.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$ trên đoạn $[0; 3]$.

Lời giải



d). $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$;

e). $y = 2^{x+1} - \frac{4}{3} \cdot 8^x$ trên $[-1; 0]$;

Lời giải

[illegible]

[illegible]

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

[illegible]
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-5x+9 & \text{khi } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Ví dụ 16. Cho a và b là hai số không âm và có tổng bằng 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^4 + b^4$.

Lời giải

③ Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T thì để tìm GTLN, GTNN của nó trên D ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN trên một đoạn nằm trong D có độ dài bằng T .

Ví dụ 17. (Sở GD & ĐT Bắc Ninh 2020)

Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

B. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$.

C. $M = 1, m = 0$.

D. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

Lời giải

④ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Khi đặt ẩn phụ $t = u(x)$, ta tìm được $t \in E$ với $\forall x \in D$, ta có $y = g(t)$ thì Max, Min của hàm f trên D chính là Max, Min của hàm g trên E .

Ví dụ 18. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$.

A. $\min y = 3$.

B. $\min y = \frac{11}{4}$.

C. $\min y = -3$.

D. $\min y = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Ví dụ 19.

a). Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$.

b). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha + 1}$.

Lời giải

⑤ Khi bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà không nói trên tập nào thì ta hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.

Ví dụ 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$.

A. $M = 1$.

B. $M = 3$.

C. $M = 5$.

D. $M = 2$.

Lời giải

Ví dụ 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$ bằng.

A. $\sqrt{10}$.

B. $-3\sqrt{10}$.

C. -10 .

D. $3\sqrt{10}$.

Lời giải

Ví dụ 22. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

Lời giải

⑥ Ngoài phương pháp khảo sát để tìm Max, Min ta còn dùng phương pháp miền giá trị hay Bất đẳng thức để tìm Max, Min.

Ví dụ 23. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3}$

trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A. $\frac{11}{4}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ.

Ví dụ 24. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức: $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$.

- Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?
- Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?
- Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Lời giải

Ví dụ 25. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$ (mg / L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Ví dụ 26. Một chất điểm chuyển động theo phương ngang có tọa độ xác định bởi phương trình $x(t) = -0,01t^4 + 0,12t^3 + 0,3t^2 + 0,5$ với x tính bằng mét, t tính bằng giây, $0 \leq t \leq 6$. Tìm thời điểm mà tốc độ của chất điểm lớn nhất.

Lời giải

Ví dụ 27. Một công ty ước tính rằng tổng lợi nhuận P (nghìn đồng) cho một sản phẩm có thể được mô hình hoá bằng hàm số $P(x) = -x^3 + 450x^2 + 52500x$, trong đó x là số lượng đơn vị sản phẩm đó được sản xuất và bán ra. Mức sản xuất nào sẽ mang lại lợi nhuận lớn nhất? Khi đó lợi nhuận lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Ví dụ 28. Lợi nhuận thu được P của một công ty khi dùng số tiền s chi cho quảng cáo được cho bởi công thức $P = P(s) = -\frac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400, s \geq 0$

Ở đây các số tiền được tính bằng đơn vị nghìn USD.

- Tìm số tiền công ty phải chi cho quảng cáo để mang lại lợi nhuận tối đa.
- Lợi nhuận thu được của công ty thay đổi thế nào khi số tiền chi cho quảng cáo thay đổi?

Lời giải

Trang 115

[illegible][illegible]

Ví dụ 33. Giá bán P (đồng) của một sản phẩm thay đổi theo số lượng Q sản phẩm ($0 \leq Q \leq 1500$) được cung cấp ra thị trường theo công thức $P = \sqrt{1500 - Q}$. Tính số lượng sản phẩm nên được cung cấp ra thị trường để doanh thu $R = PQ$ lớn nhất.

Lời giải

Ví dụ 34. Một công ty ước tính rằng chi phí C (USD) để sản xuất x đơn vị sản phẩm có thể được mô hình hoá bằng công thức $C = 800 + 0,04x + 0,0002x^2$

Tìm mức sản xuất sao cho chi phí trung bình $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ cho mỗi đơn vị hàng hoá là nhỏ nhất.

Lời giải

Ví dụ 35. Hai nguồn nhiệt đặt cách nhau s mét, một nguồn có cường độ a đặt ở điểm A và một nguồn có cường độ b đặt ở điểm B . Cường độ nhiệt tại điểm P nằm trên đoạn thẳng nối A và B được tính theo công thức $I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(s-x)^2}$ trong đó $x(m)$ là khoảng cách giữa P và A . Tại điểm nào nằm giữa A và B , nhiệt độ sẽ thấp nhất?

Lời giải

- ### Lời giải

[illegible]

The diagram illustrates the deflection of a beam. The top part shows a horizontal beam of length 30 cm, divided into three 10 cm segments by two supports. The bottom part shows the beam deflected downwards into a triangular shape with a central peak labeled 'A'. The deflection at each end is labeled with the angle θ .

Lời giải

[illegible]

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a; b]$.

1. Phương pháp.

Tìm $\max_{x \in [a,b]} f(x)$, $\min_{x \in [a,b]} f(x)$ trên đoạn, ta có thể tiến hành một cách đơn giản hơn như sau:

① Bước 1. Tính $f'(x)$ và cho $f'(x)=0$ tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc $[a;b]$.

② Bước 2. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$ và so sánh.

③ **Bước 3.** Kết luận $\max_{x \in [a;b]} f(x) = \max \{f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$

$$\min_{x \in [a;b]} f(x) = \min \{f(x_1), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

Lưu ý: Đối với bài toán tìm $\max_{x \in [a,b]} f(x)$, $\min_{x \in [a,b]} f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ta không lập bảng biến thiên

2. Bài tập minh họa.

 **Bài tập 1.** Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

1). $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$, $x \in [0; 4]$.

2). $y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 2. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

1). $y = (x+3)\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$.

2). $y = \sqrt{45 + 20x^2} + |2x - 3|$.

Lời giải.

Bài tập 3. Cho hai số thực x, y thoả mãn: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là:

A. $\min_{[2; 4]} y = 3$.

B. $\min_{[2; 4]} y = 7$.

C. $\min_{[2; 4]} y = 5$.

D. $\min_{[2; 4]} y = 0$.

Lời giải

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $M = 0$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = -2$.

Lời giải

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. 50.

B. 5.

C. 1.

D. 122.

Lời giải

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$.

B. $m = \frac{49}{4}$.

C. $m = 13$.

D. $m = \frac{51}{2}$.

Lời giải

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ trên $[0; 3]$ là

A. 2.

B. -61.

C. 3.

D. 61.

Lời giải

Câu 6. Xét hàm số $y = \frac{x-1}{2x+1}$ trên $[0; 1]$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\max_{[0;1]} y = 0$.

B. $\min_{[0;1]} y = -\frac{1}{2}$.

C. $\min_{[0;1]} y = \frac{1}{2}$.

D. $\max_{[0;1]} y = 1$.

Lời giải

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ là:

A. -3.

B. $-\frac{5}{3}$.

C. $-\frac{5}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Câu 8. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{8}{1+2x} + x$ trên đoạn $[1; 2]$ lần lượt là

A. $\frac{11}{3}; \frac{7}{2}$.

B. $\frac{11}{3}; \frac{18}{5}$.

C. $\frac{13}{3}; \frac{7}{2}$.

D. $\frac{18}{5}; \frac{3}{2}$.

Lời giải

Câu 9. Xét hàm số $y = x + 1 - \frac{3}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1;1)$.
- B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$.
- C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$.
- D. Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải

Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + e^{2x}$ trên đoạn $[0;1]$.

- A. $\max_{x \in [0;1]} y = e^2$.
- B. $\max_{x \in [0;1]} y = 2e$.
- C. $\max_{x \in [0;1]} y = 1$.
- D. 1.

Lời giải

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{3}{x-2}$ trên đoạn $[3;6]$ bằng

- A. $\frac{27}{4}$.
- B. $2\sqrt{3}$.
- C. 6.
- D. $2\sqrt{3} + 2$.

Lời giải

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 1$. Với các số thực dương a, b thỏa mãn $a < b$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ bằng

- A. $f(a)$.
- B. $f(b)$.
- C. $f(\sqrt{ab})$.
- D. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Lời giải

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;4]$ là?

- A. $M = 28, m = -4$.
- B. $M = 77, m = 1$.
- C. $M = 77, m = -4$.
- D. $M = 28, m = 1$

Lời giải

Câu 14. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính giá trị $M - m$.

A. $M - m = -\frac{9}{4}$.

B. $M - m = 3$.

C. $M - m = \frac{9}{4}$.

D. $M - m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ có giá trị là một số thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;14)$.

B. $(3;8)$.

C. $(12;20)$.

D. $(-7;8)$.

Lời giải

Câu 16. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$ lần lượt là M, m . Tính $S = M + m$.

A. $S = 6$.

B. $S = 4$.

C. $S = 7$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Câu 17. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng.

A. $\frac{52}{3}$.

B. 20 .

C. 6 .

D. $\frac{65}{3}$.

Lời giải

Câu 18. Gọi M, n theo thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[-2;0]$. Tính $P = M + m$.

A. $P = 1$.

B. $P = -5$.

C. $P = -\frac{13}{3}$.

D. $P = -3$.

Lời giải

Mức độ 12. Thông hiểu

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{5 - x^2}$ trên đoạn $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

A. 5 .

B. $\sqrt{10}$.

C. 6 .

D. Một đáp án khác.

Lời giải

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 + \sqrt{4x - x^2}$

- A. 5. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} - \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{5-x}$ bằng

- A. $\frac{9}{10}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $2\sqrt{2} - 2$. D. $7\sqrt{2} - 9$.

Lời giải

Câu 22. Hàm số $y = (4 - x^2)^2 + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là:

- A. 10. B. 12. C. 14. D. 17.

Lời giải

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$.

- A. $M = 1$. B. $M = 3$. C. $M = 5$. D. $M = 2$.

Lời giải

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$ bằng.

- A. $\sqrt{10}$. B. $-3\sqrt{10}$. C. -10 . D. $3\sqrt{10}$.

Lời giải

Câu 25. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$.

- A. $T = (3; 5)$. B. $T = [3; 5]$. C. $T = [\sqrt{2}; 2]$. D. $T = [0; \sqrt{2}]$.

Lời giải

Câu 26.

Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0; 3]$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương. Tính $S = a + b + c$.

A. 4. B. -2. C. -22. D. 5.

Lời giải

Câu 27. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2-x^2} - x$ bằng

A. $2 - \sqrt{2}$. B. 2. C. $2 + \sqrt{2}$. D. 1.

Lời giải

Câu 28. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x - 5$.

A. -20. B. -8. C. -9. D. 0.

Lời giải

Câu 29. Hàm số $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Khi đó $M.m$ bằng

A. $-3\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Câu 30. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$.

A. $\min y = 3$. B. $\min y = \frac{11}{4}$. C. $\min y = -3$. D. $\min y = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Câu 31.

Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \sin^2 x - \cos x + 1$. Khi đó giá trị của tích $M.m$ là

A. $\frac{25}{4}$. B. 0. C. $\frac{25}{8}$. D. 2.

Lời giải

Câu 32. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tính $M - m$.

A. $\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2}$. B. $\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$. C. $1 - \frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{4} - 1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

- A. $M = m + \frac{3}{2}$. B. $M = \frac{3}{2}m$. C. $M = m + 1$. D. $M = m + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Câu 34. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x + 2|$ trên đoạn $[-3; 3]$.

- A. 0. B. -1. C. 1. D. -5.

Lời giải

Câu 35. Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ cho trong hình bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tìm mệnh đề đúng?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

- A. $M = f(-1)$. B. $M = f(3)$. C. $M = f(2)$. D. $M = f(0)$.

Lời giải

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
y'		$-$	$ $	$+$	0	$-$
y		5	-2	4	-1	

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng -2.
 B. Hàm số có hai điểm cực trị.
 C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
 D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

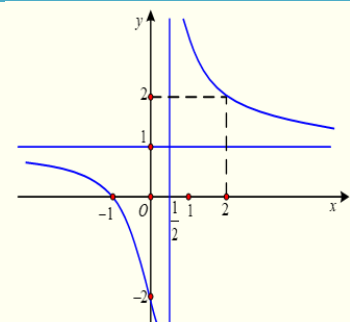
Lời giải

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên

khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

đường cong trong hình vẽ bên. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. $\max_{[1; 2]} f(x) = 2$. B. $\max_{[-2; 1]} f(x) = 0$.



C. $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

D. $\max_{[3;4]} f(x) = f(4)$.

Lời giải

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn

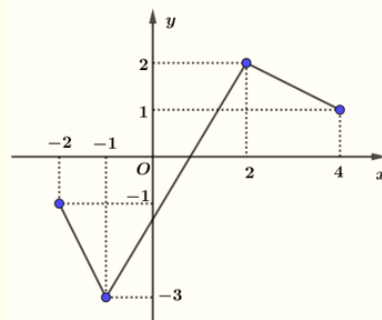
$[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max_{[-2;4]} |f(x)|$.

A. $|f(0)|$.

B. 2.

C. 3.

D. 1.



Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 39. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $8a + d$.

B. $d - 16a$.

C. $d - 11a$.

D. $2a + d$.

Lời giải

Câu 40. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$ là:

A. $\min P = \frac{7}{3}$

B. $\min P = 5$

C. $\min P = \frac{17}{3}$

D. $\min P = \frac{115}{3}$

Lời giải

Câu 41. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = 2\sqrt{2}$.

C. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $m = -\sqrt{2}$.

Lời giải

Câu 42. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ là đoạn $[a; b]$.

Tính tổng $T = a + b$.

- A.** $T = 1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = -1$.

Lời giải

Câu 43. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \cos 2x$ trên đoạn $D = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

- A.** $\max_{x \in D} f(x) = 1; \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}$. **B.** $\max_{x \in D} f(x) = \frac{3}{4}; \min_{x \in D} f(x) = -3$.
C. $\max_{x \in D} f(x) = 1; \min_{x \in D} f(x) = -3$. **D.** $\max_{x \in D} f(x) = \frac{3}{4}; \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}$.

Lời giải

Câu 44.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^3 x + 9\cos x + 6\sin^2 x - 1$ là

- A.** -2 . **B.** -1 . **C.** 1 . **D.** 2 .

Lời giải

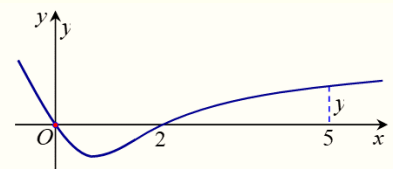
Câu 45. Giá trị nhỏ nhất của hàm số của hàm số $y = 1 + 2\sin x \cos x - \cos^2 2x$ là:

- A.** $-\frac{5}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** -1 . **D.** 0 .

Lời giải

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là:



- A. $f(0), f(5)$. B. $f(2), f(0)$.
C. $f(1), f(3)$. D. $f(2), f(5)$.

Lời giải

.....

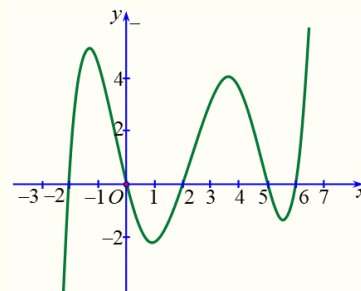
.....

.....

.....

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M = \max_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min_{[-2;6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $T = f(0) + f(-2)$. B. $T = f(5) + f(-2)$.
C. $T = f(5) + f(6)$. D. $T = f(0) + f(2)$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

DẠNG 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng nửa khoảng.

1. Phương pháp.

Tìm $\max_{x \in [a,b]} f(x)$, $\min_{x \in [a,b]} f(x)$ trên khoảng, nửa khoảng..., ta có thể tiến hành như sau:

① Bước 1.

Tính $f'(x)$ và tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc $(a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

② Bước 2. Tính giới hạn và lập bảng biến thiên.

③ Bước 3. Kết luận

§Lưu ý: Đối với bài toán tìm $\max_{x \in [a,b]} f(x)$, $\min_{x \in [a,b]} f(x)$ trên khoảng, nửa khoảng ta phải lập bảng biến thiên.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible][illegible]

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 2. Thông hiểu

Câ

x	-1	0	2	3
y'	+	0	-	0
y	0	5	1	4

- A.** $M = f(0)$.

B. $M = f(3)$.

C. $M = f(2)$.

D. $M = f(-1)$.

.....

.....

Câu 49. (THPT Ngô Quyền Ba Vì 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$		5	$-\infty$

A. $y_{CD} = 5$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$.

C. $y_{CT} = 0$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

Lời giải

Câu 50. (THPT Chuyên Nguyễn Huệ 2018) Cho hàm $y = f(x)$ xác định, liên tục $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$+$	$-$	0
y	$-\infty$	0	-2	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

C. Hàm số có đúng một cực trị.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

Lời giải

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y	1	3	-1	1

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu.

A. $\max_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{2}$.

B. $\max_{\mathbb{R}} y = -1$.

C. $\max_{\mathbb{R}} y = 1$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 3$.

Lời giải

Câu 52. (Sở GD & ĐT Thái Bình 2020)

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên khoảng $(0; 2)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. -1 .

Lời giải

Câu 53. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

A. $\min y = 3$.
($1; +\infty$)

B. $\min y = -1$.
($1; +\infty$)

C. $\min y = 5$.
($1; +\infty$)

D. $\min y = -\frac{7}{3}$.
($1; +\infty$)

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 54. Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó?

- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên là:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
		$+$	0	$-$	$+$
			$\frac{9}{20}$	$-\frac{3}{5}$	
					$+\infty$

$-\infty$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có ba cực trị.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{3}{5}$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Câu 56. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Câu 57. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2 - 4x + 6} + 4x - x^2 + 1$.

Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

A. 2.

B. 4.

C. -2.

D. -4.

Lời giải

Câu 58. Cho hàm số $y = \sqrt{x^3 - 3x}$ với $x \in [2; +\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.
- B. Hàm số có cả giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
- C. Hàm số không có cả giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
- D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Câu 59. (THPT Chuyên Phan Bội Châu 2019)

Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ với x thuộc $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -\sqrt{5}$.
- B. $\max_D f(x) = 0$; không tồn tại $\min_D f(x)$.
- C. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -1$.
- D. $\min_D f(x) = 0$; không tồn tại $\max_D f(x)$.

Lời giải

Mức độ 4. Vận dụng cao

Câu 60. Giá trị nhỏ nhất hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là

- A. 1.
- B. $\frac{23}{27}$.
- C. $\frac{1}{27}$.
- D. 5.

Lời giải

Câu 61. (THPT Quang Trung 2020) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số

$y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$

- A. $\max_D f(x) = 0$ không tồn tại $\min_D f(x)$.
- B. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -\sqrt{5}$.
- C. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -1$.
- D. $\min_D f(x) = 0$ không tồn tại $\max_D f(x)$.

Lời giải

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để hàm số $y = |x-1| + |x+3|$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Câu 63. Cho các số thực không âm x, y thay đổi. M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$. Giá trị của $8M + 4m$ bằng:

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

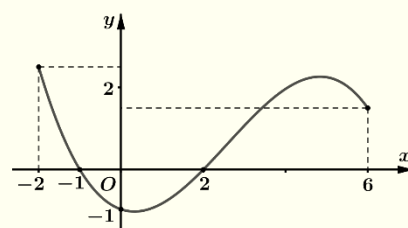
Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$.

C. $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$.

B. $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$.

D. $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max \{f(-1), f(6)\}$.



Lời giải

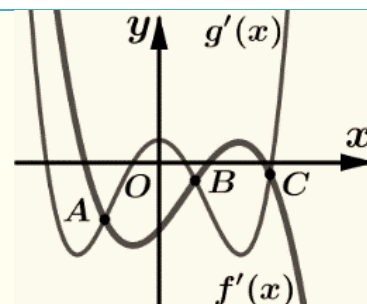
Câu 65. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a, b, c . Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$ bằng

A. $h(0)$.

B. $h(a)$.

C. $h(b)$.

D. $h(c)$.



Lời giải

.....

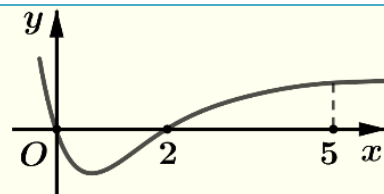
.....

.....

.....

.....

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



- A. $f(0); f(5)$. B. $f(2); f(0)$.
C. $f(1); f(5)$. D. $f(2); f(5)$.

Lời giải

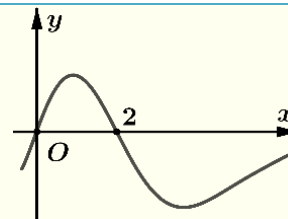
.....

.....

.....

.....

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Hỏi trong các giá trị $f(0), f(1), f(3), f(4)$ giá trị nào là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$?



- A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(3)$. D. $f(4)$.

Lời giải

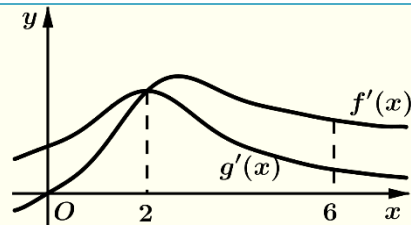
.....

.....

.....

.....

Câu 68. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x), g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là



- A. $h(6), h(2)$. B. $h(2), h(6)$. C. $h(0), h(2)$. D. $h(2), h(0)$.

Lời giải

.....

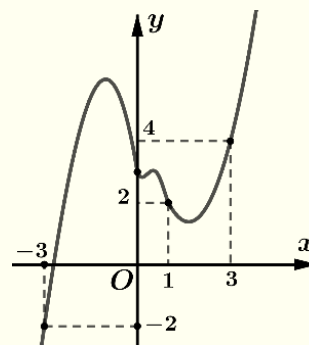
.....

.....

.....

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
 B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.
 C. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
 D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-3;3]$

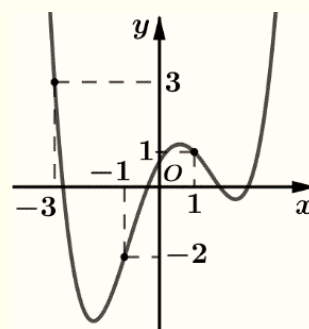


Lời giải

Câu 70. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Xét hàm $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.
 B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.
 C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.
 D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.



Lời giải

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f\left[2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right]$.

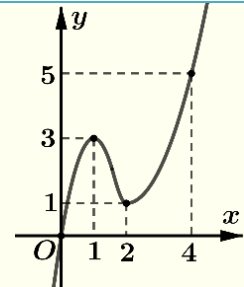
Tổng $M + m$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



Lời giải

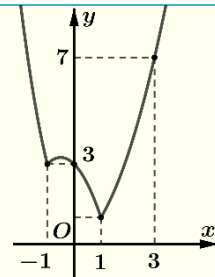
Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là hình bên. Gọi M, m theo thứ tự là GTLN – GTNN của hàm số $y = |f(x) - 2|^3 - 3(f(x) - 2)^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tích $M.m$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 54.

D. 55.

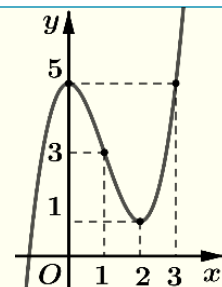


Lời giải

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Ký hiệu $g(x) = f\left(2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x}\right) + m$. Tìm điều kiện của tham số m sao cho $\max_{[0;1]} g(x) > 2 \min_{[0;1]} g(x)$.

A. $m > 4$.

B. $m < 3$.



C. $0 < m < 5$.

D. $m < 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$.

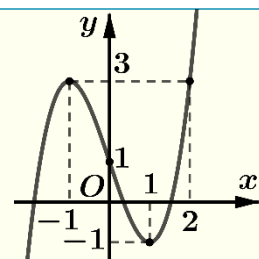
Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. $m = -13$.

B. $m = -12$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

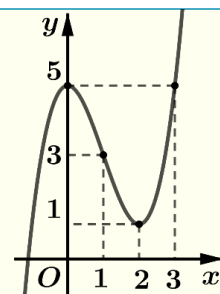
Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Ký hiệu $g(x) = f(x^3 - x^2 + x + 2) + 3m$, với m là tham số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = m^2 + 3\max_{[0;1]} g(x) + 4\min_{[0;1]} g(x) + m$

A. -150 .

B. -102 .

C. -50 .

D. 4 .



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DẠNG 3. Xác định tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thỏa điều kiện cho trước.

1. Phương pháp.

- ① **Bước 1.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- ② **Bước 2.** Áp đặt các giá trị này thỏa điều kiện đã cho.
- ③ **Bước 3.** Ta có thể khai thác tính chất sau để giải bài toán gọn hơn.

➤ Điều kiện cần để $M = \max_{x \in D} f(x)$ là $f(x_0) \leq M$.

➤ Điều kiện cần để $\min_{x \in D} f(x) = m$ là $f(x_0) \leq m$ trong đó x_0 là một giá trị thuộc D .

➤ Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $[a; b]$ thì

$$\max_{[a; b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\};$$

$$\min_{[a; b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 7. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

Lời giải

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

Lời giải

Bài tập 9.

Tìm m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{m}{2}x + 1, \forall x \in [-1; 1]$ bằng 2

Lời giải.

Bài tập 10.

Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên $[-2;0]$ bằng 2.

Lời giải.

Bài tập 11. Tìm tất cả giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1.

Lời giải

Bài tập 12. Tìm các giá trị của các tham số a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ: Vận dụng

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tổng tất cả các giá trị của nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ bằng 7.

A. 0. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 18.

Lời giải

Câu 77. Gọi m là giá trị để hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$ bằng -2 . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $3 < m < 5$. **B.** $m^2 \neq 16$. **C.** $|m| < 5$. **D.** $|m| = 5$.

Lời giải

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -2 .

A. $m = 4$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Câu 79. Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1; 2]$ bằng -2

A. $m = -3$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 4$.
D. $m = 3$.

Lời giải

Câu 80. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$. Tham số m thuộc khoảng nào thì thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$.

A. $(3; 7)$. **B.** $(2; 4]$. **C.** $(5; 8]$. **D.** $(9; 11]$.

Lời giải

Câu 81. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$, với tham số m bằng bao nhiêu thì $\min_{[2;4]} y = 3$
A. $m = 1$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = 5$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Câu 82. Số các giá trị tham số m để hàm số $y = \frac{x-m^2-1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 :
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Câu 83. Cho hàm số $y = \frac{2\sqrt{x}+m}{\sqrt{x}+1}$.
 Giá trị nguyên lớn hơn 1 của tham số m sao cho $\max_{[0;4]} y \leq 3$ thỏa mãn
A. $4 < m \leq 6$. **B.** Không có m . **C.** $1 < m < 5$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

Câu 84. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x}+m}{\sqrt{x}+1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của $m > 1$ để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3.
A. $m \in (1;3)$. **B.** $m \in (1;3\sqrt{5}-4)$. **C.** $m \in (1;\sqrt{5})$. **D.** $m \in (1;3]$.

Lời giải

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=1$.

- A.** $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** Không có giá trị m . **D.** $m=-3$.

Lời giải

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị thực khác 0 của tham số m để hàm số $y = \frac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $[-2;2]$?

- A.** $m=-2$. **B.** $m<0$. **C.** $m>0$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$.

- A.** $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>2$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải

Câu 88.

Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2.

- A.** $m=2$. **B.** $m = \frac{31}{27}$. **C.** $m > \frac{3}{2}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in (0; 1)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 90. Gọi M, m lần lượt là GTLT–GTNN của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (a + 2)x + a + 3$ (với a là tham số thực) trên đoạn $[1 - 2a; 2a - 3]$. Tính $P = \frac{m + M}{2}$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 6$.

Lời giải

Câu 91. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x^2 + 2}$ với $a \neq 0$ và a, b là các tham số thực. Biết $\max y = 6$, $\min y = -2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ bằng

- A. -3 . B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3 .

Lời giải

DẠNG 4. Xác định tham số m để hàm số $y = |f(x)|$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thỏa điều kiện cho trước.

1. Phương pháp.

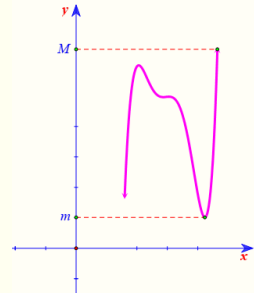
① **Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)|$ và $u = (f(x))^{2n}$.**

Bước 1. Xét hàm số $y = f(x)$.

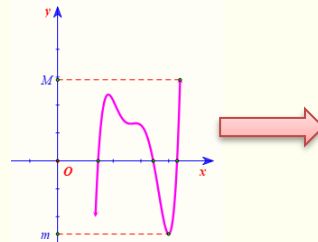
$$\text{Gọi } m = \min_{[a;b]} f(x); M = \max_{[a;b]} f(x).$$

Bước 2. Xét các khả năng

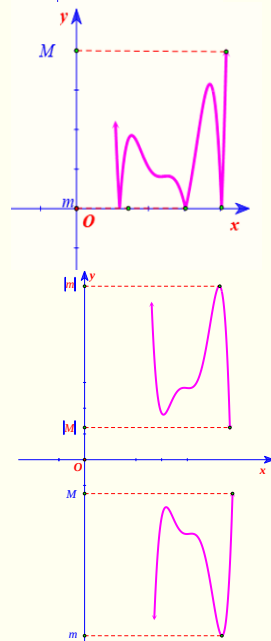
➤ Nếu $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = m \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = M \end{cases}$



➤ Nếu $M, m \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = 0 \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = \max\{|m|; |M|\} \end{cases}$



➤ Nếu $M < 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = |M| = -M \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = |m| = -m \end{cases}$



② **Đặt biệt:** ta có thể công thức nhanh

$$\text{Khi đó } \max_{[a;b]} |f(x)| = \max\{|M|, |m|\} = \frac{|M + m| + |M - m|}{2}.$$

$$\min_{[a;b]} |f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{khi } m.M \leq 0 \\ \frac{|M + m| - |M - m|}{2} & \text{khi } m.M > 0 \end{cases}$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 13. Tìm các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

Lời giải

Bài tập 14. Có bao nhiêu giá trị m để hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + m|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 4]$ bằng 6?

Lời giải

Bài tập 15. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Bài tập 16.

Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 26 .

B. 13 .

C. 14 .

D. 27 .

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 4. Vận dụng cao

Câu 92. (Chuyên ĐH Vinh 2020) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 5?

A. 2.

B. 1.

C. 3. D. 4.

Lời giải

Câu 93. (THPT Phụ Dực 2020) Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4.

B. 36.

C. 140.

D. 0.

Lời giải

Câu 94. (THPT Buôn Ma Thuột 2019) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 + 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 10. Số phần tử của S là:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Câu 95. (Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc 2019) Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

A. -1.

B. 2.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Câu 97. (THPT Nguyễn Đình Chiểu 2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| = 4$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -2.

B. 2.

C. -4.

D. 4.

Lời giải

Câu 98. (Cụm Hải Phòng 2019)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$?

A. Vô số.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Câu 99.(THPT Nguyễn Huệ 2019) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 100.(THPT Chuyên Ngoại Ngữ 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ không lớn hơn 3?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 101.(THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2.

Số phần tử của tập S là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 102.(THPT Chuyên Quang Trung 2019) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 108. B. 120. C. 210. D. 136.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 103. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

A. 108. B. 136. C. 120. D. 210.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 104. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 105. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 106. (THPT Chuyên Quang Trung 2019) Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng 2. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 0. B. 20. C. 24. D. 40.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 107. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$ có bao nhiêu số nguyên m để $\min_{x \in [-1;3]} f(x) \leq 3$.

A. 4.

B. 8.

C. 31.

D. 39.

Lời giải

Câu 108. (Sở GD Vĩnh Long 2020) Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3;2]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Câu 109. (THPT Ngô Gia Tự 2019) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

A. $(0;1)$.

B. $[-1;0]$.

C. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

D. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

Lời giải

Câu 110. (THPT Đội Cấn 2019) Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 1$.

B. $a = 2$.

C. Một giá trị khác.

D. $a = 3$.

Lời giải

DẠNG 4. Ứng dụng bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất vào toán thực tế.

1. Phương pháp

Để làm bài toán thực tế ta tiến hành 4 bước.

- ① **Bước 1.** Đặt ẩn chưa biết, kèm điều kiện của ẩn.
- ② **Bước 2.** Biểu thị các đại lượng còn lại qua ẩn vừa đặt.
- ③ **Bước 3.** Dựa vào công thức tính diện tích, thể tích, hoặc tính cạnh để thiết lập hàm.
- ④ **Bước 4.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất rồi kết luận.

2. Bài tập minh họa.

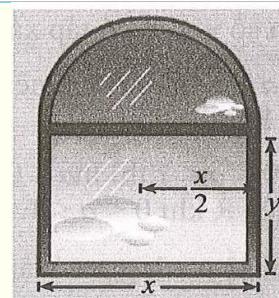
Bài tập 17. Người ta muốn làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có đáy hình vuông và thể tích là 10 lít. Diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp là bao nhiêu?

Lời giải

Bài tập 18. Chứng tỏ rằng một thùng hình trụ có thể tích V cố định cần ít vật liệu sản xuất nhất (tức là có diện tích bề mặt nhỏ nhất) khi chiều cao của thùng gấp đôi bán kính đáy.

Lời giải

Bài tập 25. Một cửa sổ gồm phần dưới là một hình chữ nhật và phần vòm có hình bán nguyệt được mô tả ở Hình vẽ. Tìm x, y để diện tích của cửa sổ lớn nhất, biết chu vi của cửa sổ là 5 m.



Lời giải

Bài tập 26. Bác Hưng có một hàng rào thép dài 240 m và muốn rào cánh đồng thành một thửa ruộng hình chữ nhật giáp một con sông thẳng. Bác không cần rào phía cạnh con sông. Hỏi thửa ruộng có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Bài tập 27. Cho hình thang cân có đáy nhỏ và hai cạnh bên bằng nhau và bằng 5. Tìm diện tích lớn nhất của hình thang cân đó.

Bài tập 28. Độ bền S của dầm gỗ hình chữ nhật tỉ lệ với tích của chiều rộng w và bình phương chiều sâu d của nó (xem hình vẽ). Tìm kích thước của dầm gỗ bền nhất có thể được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính bằng 12 inch.

[illegible]

Bài tập 29. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính 1 cm . Đặt $\hat{A} = \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$).

- Viết biểu thức tính diện tích S của tam giác ABC theo α .
- Tìm diện tích lớn nhất của tam giác ABC .

Lời giải

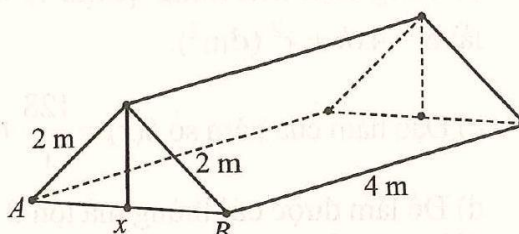
Bài tập 30. Một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp hình cầu bán kính R .

- Chứng minh rằng thể tích của khối chóp tương ứng là $V = \frac{4R^2 x^2}{3(x - 2R)}$, trong đó x là chiều cao của hình chóp.
- Với giá trị nào của x để khối chóp tương ứng có thể tích nhỏ nhất?

Lời giải

A diagram of a cone. The height is labeled y and the radius is labeled x . The slant height is labeled 3 . The height y is shown as a dashed line from the apex to the center of the base, and the radius x is shown as a dashed line from the center of the base to the edge. The slant height 3 is shown as a dashed line from the apex to the edge of the base. A right-angle symbol is shown at the center of the base where the height and radius meet.

Bài tập 32. Nhóm bạn Đức dựng trên một khu đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình vuông có độ dài cạnh 4 m như Hình vẽ 9 với hai mép tấm bạt sát mặt đất. Tính khoảng cách AB để khoảng không gian trong lều là lớn nhất.



Trang 159

a). Tính thể tích V của hình lăng trụ theo x .
b). Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.



Đáp Toán - Thầy Diên Tuấn **Tel: 0025 660 880**

The diagram shows a rectangular plot with a total width of 1,5 m and a total height of 0,9 m. A central path of width x m runs horizontally. On the left side, there are three rectangular plots, each with a width of x m and a height of x m. The area to the right of these plots and the area above and below the central path are shaded green.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for young students to practice handwriting. The left column contains ten rows of lines, and the right column also contains ten rows. There are no margins, titles, or other markings on the page.

a). Hãy biểu diễn bán kính đáy r và đường cao h của hình nón theo R và x .
b). Tính thể tích của hình nón theo R và x .
c). Tìm x để hình nón có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

[illegible][illegible]

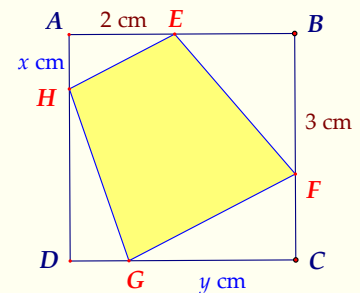
3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 111. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây hồ là 500.000 đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuyền nhân công thấp nhất. Chi phí đó là?
A. 65 triệu đồng **B.** 75 triệu đồng **C.** 85 triệu đồng **D.** 45 triệu đồng

Lời giải

Câu 112. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.** $4\sqrt{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** 7. **D.** 5.



Lời giải

D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

[illegible]

D. 46 triệu đồng.

[illegible]

Câu 115. Ông A dự định sử dụng hết $5 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01 m^3$.

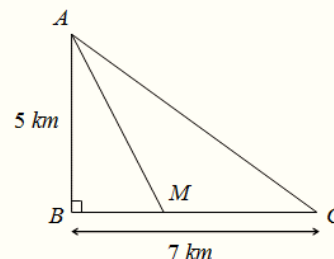
B. $0,96 m^3$.

C. $1,33 m^3$.

D. $1,51 m^3$.

Lời giải

Câu 116. Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5 \text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km . Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến địa điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h , rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h . Hỏi cần đặt vị trí của M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km để người đó đến kho nhanh nhất?



A. $5,5 \text{ km}$.

B. $2\sqrt{5} \text{ km}$.

C. $\sqrt{5} \text{ km}$.

D. $4,5 \text{ km}$.

Lời giải

The diagram shows a right-angled triangle ABC with the right angle at vertex C . The vertical side BC is labeled 6 km and the horizontal side AC is labeled 9 km . A point D is located on the side AC . A dashed line segment BD is drawn from vertex B to point D .

- ## Lời giải

[illegible]

Bài 3

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG.

1. Định nghĩa: đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

➤ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$,

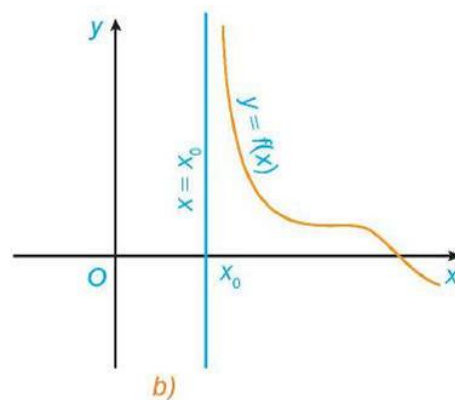
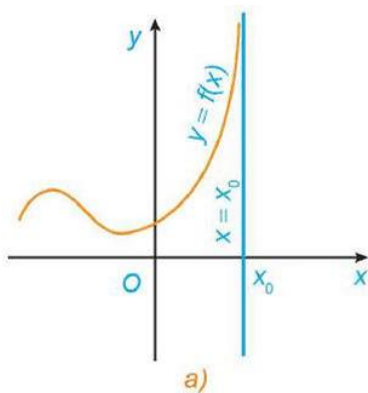
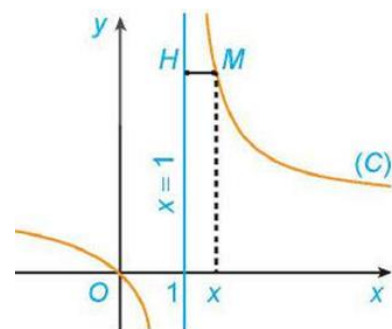
➤ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$,

➤ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$,

➤ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

2. Nhận xét:

➤ Để tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số, ta cần tính giới hạn một bên của x_0 , với x_0 thường là điều kiện biên của hàm số (hay tại x_0 thì hàm số không xác định).



➤ Kỹ năng sử dụng máy tính (tham khảo):

☞ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 + 10^{-9}$.

☞ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 - 10^{-9}$.

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$.

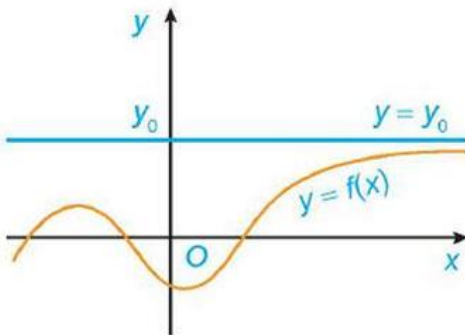
Lời giải

2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG.

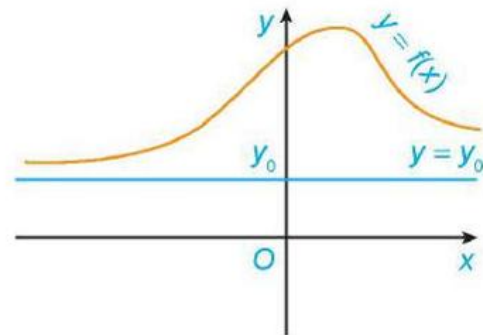
1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$...). Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay *tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu *ít nhất một trong các điều kiện* sau được thỏa mãn:

✦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$

✦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

2. Nhận xét:

Để tìm *tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số ta cần tính giới hạn của hàm số tại **vô cực**.

✦ Tìm giới hạn ở vô cực của hàm $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$; với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức không căn:

☞ Bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang $Ox: y = 0$.

☞ Bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{\text{Hệ số cao nhất của } P(x)}{\text{Hệ số cao nhất của } Q(x)} = \alpha$.

Suy ra tiệm cận ngang $y = \alpha$.

☞ Bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow$ Không có tiệm cận ngang.

✦ Kỹ năng sử dụng máy tính (**tham khảo**):

☞ Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = 10^{10}$.

☞ Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = -10^{10}$.

Ví dụ 3. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$.

Lời giải

Ví dụ 4. Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Lời giải

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

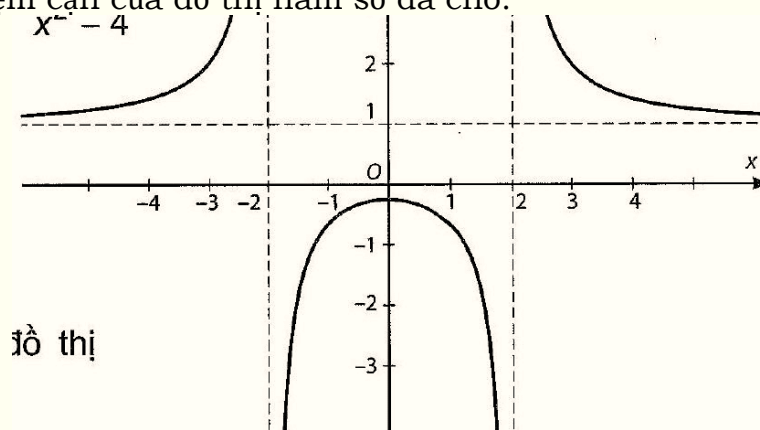
x	0	2	$+\infty$
y'		+	+
y	3	$+\infty$	$-\infty$

Hãy tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$ có đồ thị như hình bên:

Hãy chỉ ra các tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	1

Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{2 + f(x)}$.

Lời giải

.....

.....

.....

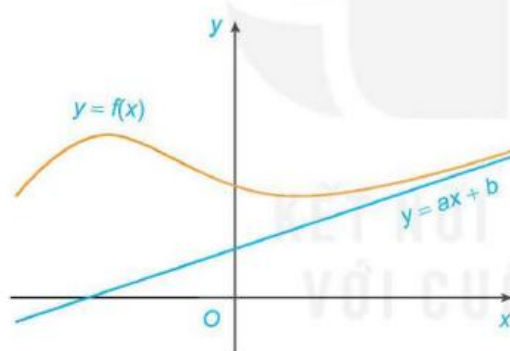
.....

III. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

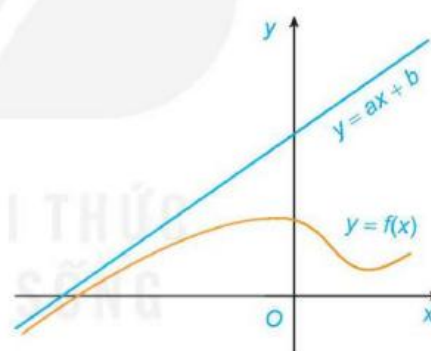
1. Định nghĩa: đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ được gọi là *đường tiệm cận xiên* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ➤ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Trong đó $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Lời giải

.....

.....

[illegible][illegible]

— 11 —

●

●

1.

D

1

2

3

4

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. The left column contains ten rows of lines, and the right column also contains ten rows of lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).

Tính tích khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc (C) đến hai đường tiệm cận của nó.

Lời giải

Ví dụ 12. Gọi I là giao điểm giữa tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$. Cho điểm K(3;5), tính hệ số góc của đường thẳng qua I và K.

Lời giải

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). Gọi tổng khoảng cách từ một điểm $(x;y) \in (C)$, với $x > 3$, tới hai đường tiệm cận của (C) là $g(x)$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Ví dụ 16. Tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên sau t tuần học được cho bởi công thức: $S(t) = \frac{100t^2}{65+t^2}$ với $t > 0$.

- a). Xem $y = S(t) = \frac{100t^2}{65+t^2}$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- b). Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó khi thời gian t càng lớn.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 17. Chi phí để làm sạch $p\%$ lượng dầu loang từ một sự cố trên biển có thể được c xấp xỉ bởi công thức $C(p) = \frac{2000p}{100-p}$ (tỉ đồng)

- a). Tính chi phí để làm sạch 95%, 96%, 97%, 98% và 99% lượng dầu loang.
- b). Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $C(p)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 18. Tổng chi phí để sản xuất x sản phẩm của một xí nghiệp được tính theo công thức $T = 20x + 100000$ (nghìn đồng)

- a). Viết công thức tính chi phí trung bình $C(x)$ của 1 sản phẩm khi sản xuất được x sản phẩm.
- b). Xem $y = C(x)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- c). Xét tính đơn điệu của hàm số $y = C(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- d). Nêu nhận xét về chi phí để tạo ra 1 sản phẩm khi x càng lớn.

Lời giải

.....	
.....	
.....	

[illegible]

📖 Ví dụ 19. Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $M(x) = \frac{T(x)}{x}$.

- a).** Xem $M(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này.
- b).** Nêu nhận xét về chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A khi x đủ lớn.

Lời giải

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

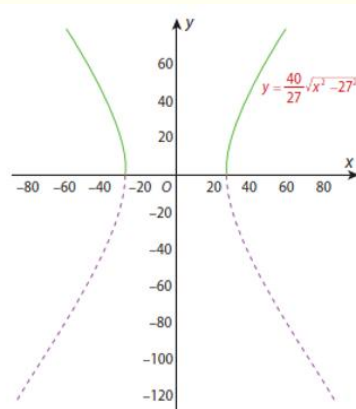
📖 Ví dụ 20. Hằng tháng, một công ty chuyên sản xuất mặt hàng A phải trả chi phí cố định là 50 triệu đồng (để thuê mặt bằng và lương nhân viên) và chi phí cho nguyên liệu là $10000x$ (đồng) với x là số lượng sản phẩm A được nhập về.

- a).** Viết công thức tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ mà công ty cần chi để sản xuất một sản phẩm.
- b).** Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $\bar{C}(x)$.

[illegible]

a). Tính nồng độ dung dịch muối trong bình sau khi thêm vào x ml dung dịch muối với nồng độ 10mg/ml .

[illegible]



Lời giải

Hình 11

Lời giải

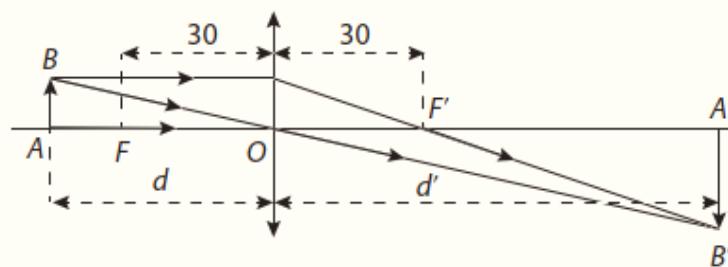
Ví dụ 24. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm như hình vẽ. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm O của thấu kính một khoảng d (cm) lớn hơn 30 cm thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$ thì ta có ảnh ảo.

Công thức của thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

a). Từ công thức thấu kính, tìm biểu thức xác định d' theo d .

b). Xem biểu thức của d' ở câu **(a)** là một hàm số theo d , kí hiệu là $h(d)$.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $h(d)$.



Lời giải

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

Dạng 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

1. Phương pháp.

a). Tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Đối với hàm phân thức: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức của x ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

➤ Tiệm cận đứng.

☞ Nếu $\begin{cases} P(x_0) \neq 0 \\ Q(x_0) = 0 \end{cases}$ thì đường thẳng: $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

➤ Tiệm cận ngang

☞ Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành độ.

☞ Nếu bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)$ thì đồ thị hàm có tiệm cận ngang là

đường thẳng: $y = \frac{A}{B}$ trong đó A, B lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$.

☞ Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang mà sẽ có tiệm cận xiên.

b). Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

☞ Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn hay bằng bậc của $Q(x)$ hoặc lớn hơn bậc của $Q(x)$ từ hai bậc trở lên thì đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

☞ Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ một bậc và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$ thì đồ thị hàm có tiệm cận xiên và ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia

$P(x)$ cho $Q(x)$ và viết $f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$, trong đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$.

☞ Suy ra đường thẳng: $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

➤ Chú ý:

Xét hàm số $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0$).

☞ Nếu $a < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

☞ Nếu $a > 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ khi $x \rightarrow +\infty$

và $y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Đồ thị hàm số $y = mx + n + p\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) có tiệm cận là đường thẳng:

$$y = mx + n + p\sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|.$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau:

a). $y = f(x) = \frac{x}{2-x};$

b). $y = f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1};$

c). $y = f(x) = x - 3 + \frac{1}{x^2}.$

Lời giải

[illegible]

 **Bài tập 2.** Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:

a). $y = f(x) = \frac{4x+3}{x-5}$.

b). $y = f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 21}{x - 4}$.

Lời giải

[illegible]

[illegible]

Bài tập 3. Tìm tiệm cận của hàm số:

1). $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ 2). $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

2). $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

[illegible]



Bài tập

Tìm tiệm cận của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, typical of notebook paper. There are no margins, text, or other markings on the page.

3. Bài tập rèn luyện.

Bài 1.

Đường thẳng $x=1$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$ không?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



Bài 2. F

Hình 1.26 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x}{3}$. Sử dụng đồ thị này, hãy:

$$\frac{2x^2}{x^2-1}$$

Sử dụng

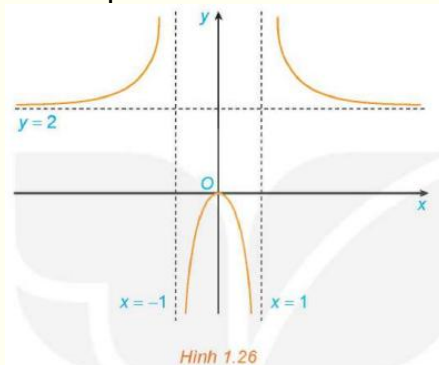
g đồ thi 1

này, hãy:

a). Viết kết quả của các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +} f(x); \lim_{x \rightarrow -} f(x).$

$$X \rightarrow -\infty$$
$$X \rightarrow +\infty$$
$$X \rightarrow +$$
$$X \rightarrow -+$$

b). Chỉ ra các tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.



Lời giải

Bài 3. Tìm các tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a). $y = \frac{3-x}{2x+1}$;

b). $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2}$.

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 1. Thông Hiểu

Câu 1. Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{3x-2}$.

A. $x = \frac{1}{3}$.

B. $x = \frac{2}{3}$.

C. $y = \frac{2}{3}$.

D. $y = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Câu 2. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình ?

A. $y = 5$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $y = 0$.

Lời giải

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C).

Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

- A. $I(-2; 2)$. B. $I(2; 2)$. C. $I(2; -2)$. D. $I(-2; -2)$.

Lời giải

Câu 4. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ là đường thẳng :

- A. $x = -2$. B. Không có tiệm cận đứng.
C. $x = -1$; $x = -2$. D. $x = -1$.

Lời giải

Câu 5. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. B. $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$. C. $y = \frac{1}{x^2 - x + 2}$. D. $y = \frac{3}{x^4 + 1}$.

Lời giải

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Lời giải

Câu 7. Đồ thị hàm số nào dưới đây có ba đường tiệm cận?

- A. $y = \frac{1-2x}{1+x}$. B. $y = \frac{1}{4-x^2}$. C. $y = \frac{x+3}{5x-1}$. D. $y = \frac{x}{x^2 - x + 9}$.

Lời giải

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{1-2x}$ có tiệm cận đứng là:

- A. $y = \frac{1}{2}$. B. $x = -\frac{1}{2}$. C. $y = -\frac{1}{2}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Câu 9. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4

Lời giải

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2 - 2}$ có đồ thị là đường cong (C). Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. (C) có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
- B. (C) có hai tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.
- C. (C) có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
- D. (C) có hai tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Câu 11. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có đường tiệm cận ngang?

- A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
- B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- C. $y = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2}$.
- D. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Lời giải

Câu 12. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$.
- B. $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$.
- C. $y = \frac{x^2}{x - 1}$.
- D. $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Lời giải

Câu 13. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

- A. 1.
- B. 2.
- C. 0.
- D. 3.

Lời giải

Câu 14. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1}$.

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 0.

Lời giải

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 2$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -2$ và $y = 2$.

Lời giải

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
- B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
- C. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
- D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-		+		0	-
y	$+\infty$		-1		$-\infty$		2

Chọn khẳng định đúng

- A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
- D. Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

Lời giải

Câu 18. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Lời giải

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{5x+3}{\sqrt{4x^2-1}}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- A. 3.
- B. 4.
- C. 1.
- D. 2.

Lời giải

Câu 20. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4}$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{6-x^2}}{x^2+3x-4}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Câu 22. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Câu 23. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Câu 24. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 25. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 27. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2+2x}}{x-1}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 28. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-\sqrt{2}}$. Các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có phương trình lần lượt là:

- A. $x = \sqrt{2}, y = 1.$ B. $x = 4, y = 1.$ C. $x = 1, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$ D. $x = 2, y = 1.$

Lời giải

Câu 30. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{bằng}$$

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Câu 31. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ có bao nhiêu tiệm cận ?

- A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Câu 32. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2018-x^2}}{x(x-2018)}$ là

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Câu 33. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}+1}{x^2-4x-5}$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận ngang và đứng?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Câu 34. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là $y = 3$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = 2f(x) - 4$ có một tiệm cận ngang là

- A. $y = 3$. B. $y = 2$. C. $y = 1$. D. $y = -4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 35. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 36. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 37. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5x^2+x+1}}{\sqrt{2x-1}-x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 38. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x}$ là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 39. Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{5+x}-1}{x^2+4x}$.

- A. $x = -4$.
 B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
 C. $x = 0$.
 D. $x = 0, x = -4$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 40. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2-5x+2}$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 41. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-5x+6}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Lời giải

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{3x+2018}{|x|+2}$ (1). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** Đồ thị hàm số (1) có hai tiệm cận ngang $y = -3$, $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.
- B.** Đồ thị hàm số (1) có đúng tiệm cận ngang $y = 3$ và không có tiệm cận đứng.
- C.** Đồ thị hàm số (1) không có hai tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng $x = -2$.
- D.** Đồ thị hàm số (1) có hai tiệm cận ngang $y = -3$, $y = 3$ và có hai tiệm cận đứng $x = -2$, $x = 2$.

Lời giải

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$-$	0	$+$	$+$	
y	$-\infty$	1	$+\infty$	-2	$+\infty$	3

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$
y	2	$+\infty$	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$.

B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận đứng là $y=2$

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 47. Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Câu 48. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Câu 49. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{|x|-2}$.

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Câu 50. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Câu 51. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm **cận** (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Câu 53. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	-1

Gọi k, l lần lượt là số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{f(x)-2018}$. Tính $k+l$.

A. $k+l=2$.

B. $k+l=3$.

C. $k+l=4$.

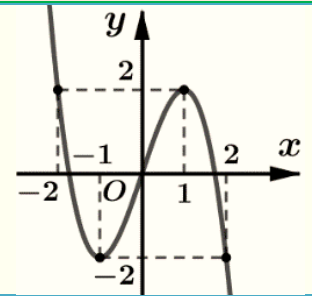
D. $k+l=5$.

Lời giải

Mức độ 4. Vận dụng cao

Câu 54. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+2}{f(x)+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.



Lời giải

.....

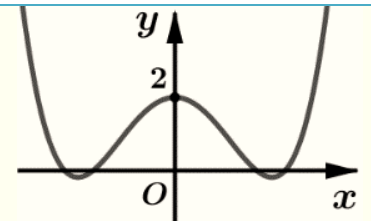
.....

.....

.....

Câu 55. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018x}{f(x)[f(x)-1]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 9.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

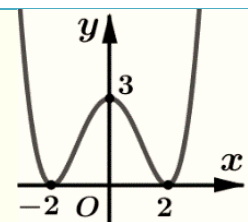
.....

.....

.....

Câu 56. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018}{f(x)} + 2019$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

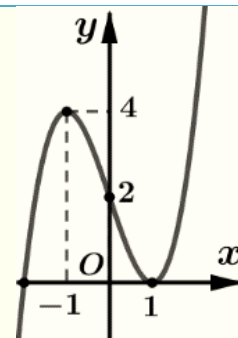
.....

.....

.....

Câu 57. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

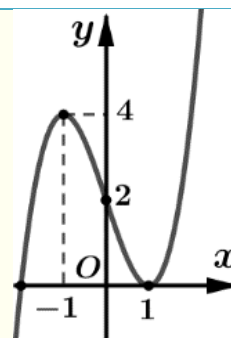
.....

.....

.....

Câu 58. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x) - 2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

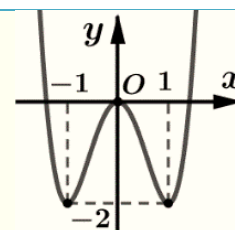
.....

.....

.....

Câu 59. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x(x-1)(x+1)^2}{f^2(x) + 2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



Lời giải

.....

.....

.....

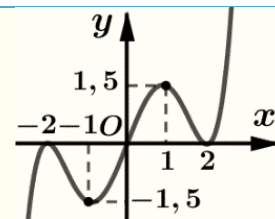
.....

.....

.....

.....

Câu 60. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^3 - x}{4f^3(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



- A.** 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

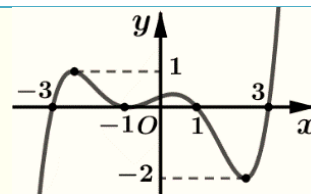
.....

.....

.....

.....

Câu 61. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f^2(x) + f(x) - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

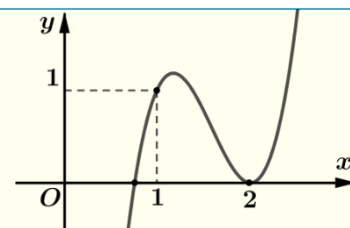
.....

.....

.....

.....

Câu 62. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải



.....

.....

.....

.....

.....

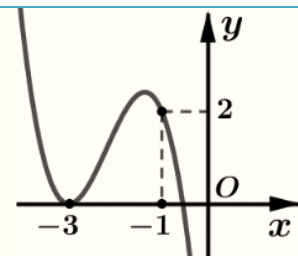
.....

.....

.....

Câu 63. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

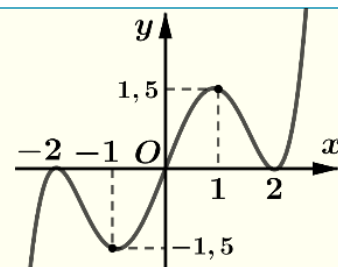
.....

.....

.....

Câu 64. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{4f^3(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

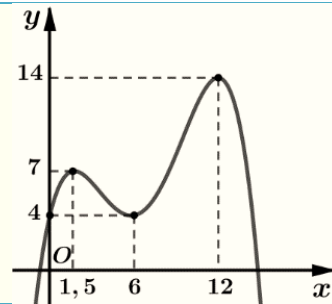
.....

.....

.....

Câu 65. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 4x\sqrt{2x+1}}{f^2(x) - 11f(x) + 28}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

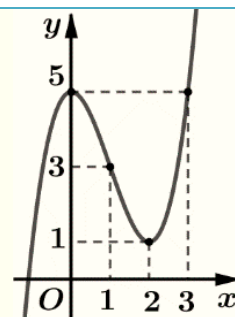
.....

.....

.....

Câu 66. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{10x+9} + \sqrt{5-2x}}{8f^2(x) - 13f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

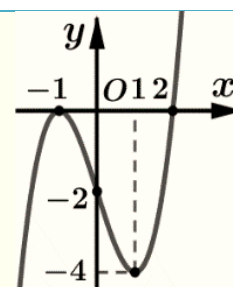
.....

.....

.....

Câu 67. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x) - m}$ có ba đường tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	4	$-\infty$	4	$-\infty$

A. $m < -5$.

B. $m = -5$.

C. $-5 < m < 4$.

D. $-5 \leq m < 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận (chỉ tính đường tiệm đứng và đường tiệm cận ngang) ?

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$-\infty$	$+\infty$	1	0

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 70. Hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, có bảng biến thiên như hình bên. Gọi k, l lần lượt là số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$. Tính $k + l$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

A. $k + l = 2$.

B. $k + l = 3$.

C. $k + l = 4$.

D. $k + l = 5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f^2(x) - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
f'	+		+
f	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 72. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{f^2(x) - 4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
f'	+	+	0	-	0	+
f			4		$+\infty$	
	$-\infty$	2		1		

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(3-x) - 2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

- Câu 74.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(3-x)-4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?
- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Câu 75.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{\log_2 f^2(x)-4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?
- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	5	2	$+\infty$	

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Câu 76.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018}{e^{f^2(x)} - e}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?
- A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	1	$-\infty$	

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có tiệm cận.

1. Phương pháp

📁 Đối với hàm phân thức : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức của x ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

👉 **Tiệm cận đứng.**

👉 Nếu $\begin{cases} P(x_0) \neq 0 \\ Q(x_0) = 0 \end{cases}$ thì đường thẳng : $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

📁 Đối với hàm số $y = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (a \neq 0)$.

👉 Nếu $a < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

👉 Nếu $a > 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty$

2. Bài tập minh họa.

📖 **Bài tập 5.** Tùy theo giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$, tìm tiệm cận của đồ thị hàm số sau: $y = \frac{x-1}{mx^3-1}$.

Lời giải.

📖 **Bài tập 6.** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+m}$ có hai tiệm cận đứng

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -3$; $y = 3$.
- C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = -3$; $x = 3$.

Lời giải

Câu 78. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. $m \neq -2$.

B. $m > -2$.

C. $m = -2$.

D. $m < -2$.

Lời giải

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$.

B. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

D. $m \neq \frac{5}{2}$.

Lời giải

Câu 80. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{1-x}$ luôn có tiệm cận ngang.

A. $\forall m \in \mathbb{R}$.

B. $\forall m \neq -2$.

C. $\forall m \neq 2$.

D. $\forall m \neq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Câu 81. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$

A. 6.

B. -6.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Câu 82.

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m^2x - m - 1}{x + 2}$ có tiệm cận đứng.

A. $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{2}{3}\right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 83. Cho hàm số $y = \frac{2x + 2m - 1}{x + m}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3;1)$

A. $m = 1$.

B. $m = -3$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 84. Cho hàm số $y = \frac{x - 2}{x^2 + mx + m}$. Số giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 85. Cho hàm số $y = \frac{ax - b}{bx + 1}$ có đồ thị (C) . Nếu (C) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ thì các giá trị của a và b lần lượt là

A. $-\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{6}$.

B. -3 và -6 .

C. $-\frac{1}{6}$ và $-\frac{1}{2}$.

D. -6 và -3 .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 86. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{1-x}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(3;1)$:

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = -4$.

Lời giải

Câu 87. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+2)x-1}{2x+3}$ có một tiệm cận ngang là $y = 2$.

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

- A.** $m > 1$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 1$ và $m = 0$.

Lời giải

Câu 89. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận ?

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Câu 90. Đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-2x+1}{2x+1}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên (hoặc ngang) khi và chỉ khi

- A.** $m = 0$. **B.** $m \neq 4$. **C.** $m \neq 8$. **D.** $m = 8$.

Lời giải

Câu 91. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(a-3)x+a+2018}{x-(b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a+b$ là

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{m(x-1)^2+4}}$ có hai tiệm cận đứng:

A. $m < 0$. **B.** $m = 0$. **C.** $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$. **D.** $m < 1$.

Lời giải

Câu 93. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có một đường tiệm cận ngang.

A. $m < 0$. **B.** $m > 3$. **C.** $m = 0$. **D.** $m > 0$.

Lời giải

Câu 94. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2x + m - \sqrt{4x^2 + x + 1}$ (với m là tham số) là

A. $y = \frac{4m+1}{4}$. **B.** $y = \frac{4m-1}{4}$. **C.** $y = \frac{2m+1}{2}$. **D.** $y = \frac{2m-1}{2}$.

Lời giải

Mức độ 3. Vận Dụng

Câu 95. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

- A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$ B. $-2 < m < 2$ C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 96. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}$ có đúng bốn đường tiệm cận.

- A. $m \in [-5; 4] \setminus \{-4\}$ B. $m \in [-5; 4]$ C. $m \in (-5; 4) \setminus \{-4\}$ D. $m \in (-5; 4] \setminus \{-4\}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 97. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+1}+x^2}{x(x-1)}$ có hai đường tiệm cận ngang.

- A. Không tồn tại m B. $m < 0$ C. $m \geq 0$ D. $m > 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Các bài toán liên quan đến tiệm cận.

1. Phương pháp

- **Bước 1.** Xác định các đường tiệm cận.
- **Bước 2.** Dựa vào các giả thiết: khoảng cách, góc, diện tích...thiết lập phương trình, hệ phương trình để tìm ẩn cần tìm.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 7. Cho hàm số $y = 2x + 1 - \frac{1}{x+2}$ có đồ thị là (C) . Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc (C) , qua M vẽ hai đường thẳng lần lượt song song với hai đường tiệm cận của (C) , hai đường thẳng này tạo với hai đường tiệm cận một hình bình hành, chứng minh hình bình hành này có diện tích không đổi.

Lời giải.

Bài tập 8. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\frac{2}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

Bài tập 9. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$, có đồ thị là (C) . Tìm tất cả các điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

Lời giải.

Bài tập 10. Tìm trên đồ thị $(C): y = \frac{x+2}{x-3}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\frac{1}{5}$ khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang.

Lời giải.

Bài tập 11. Cho hàm số: $y = \frac{2m-x}{x+m}$ có đồ thị là (C_m) . Cho $A(0;1)$ và I là tâm đối xứng. Tìm m để trên (C_m) tồn tại điểm B sao cho tam giác ABI vuông cân tại A .

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận Biết

Câu 98. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$	$+$	$-$
y	-1	2	-4	3	0

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có đường tiệm cận.
- B. Hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại bằng 4.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-5; 2)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ có cực tiểu bằng -5 .

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	2	4	-5	2	

Lời giải

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y			$+\infty$		-1
	-1			$-\infty$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$.
- C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận có phương trình $x=1$.
- D. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận có phương trình $y=-1$.

Lời giải

Câu 111. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		+	
y		$+\infty$		$-\infty$	
	3				3

- A. Phương trình $f(x)-5=0$ có hai nghiệm thực.
- B. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
- D. $\max_{x \in [3;10]} f(x) = f(10)$.

Lời giải

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
y'	-			+	0
y	$+\infty$				2
		1		$-\infty$	-3

Chọn mệnh đề **sai**?

- A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$.
- B. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.
- C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại x bằng 4.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Câu 103. Cho hàm số $m \neq -3$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$		

Đồ thị hàm số $f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng

A. $x = m$

B. $x = -3 < 0$

C. $f(|x|)$

D. 0.

Lời giải

.....

.....

.....

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 104. Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng?

A. -2.

B. -1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 105. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx+1}{2m+1-x}$ cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 3. Tìm m .

A. $m=1; m=\frac{3}{2}$.

B. $m=-1; m=-\frac{3}{2}$.

C. $m=1; m=-\frac{3}{2}$.

D. $m=-1; m=3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 106. Tọa độ điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ cách đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số một khoảng bằng 1 là

A. $(0; -1); (-2; 7)$.

B. $(-1; 0); (2; 7)$.

C. $(0; 1); (2; -7)$.

D. $(0; -1); (2; 7)$.

Lời giải

Câu 107. Cho đồ thị hai hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ và $g(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ với $a \neq \frac{1}{2}$. Tìm tất cả các giá trị thực dương của a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

- A. $a=1$. B. $a=4$. C. $a=3$. D. 6.

Lời giải

Câu 108. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx+1}{2m+1-x}$ cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 3. Tìm m .

- A. $m=1; m=\frac{3}{2}$. B. $m=-1; m=-\frac{3}{2}$.
C. $m=1; m=-\frac{3}{2}$. D. $m=-1; m=3$.

Lời giải

Câu 109. Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng?

- A. -2. B. -1. C. 0. D. 3.

Lời giải

Câu 110. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (m là tham số thực) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

A. $m = \pm 1$.

B. $m = \pm 2$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

Mức độ. Vận dụng thấp

Câu 111. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9}$ có đồ thị (C), trong đó a, b là các hằng số dương thỏa mãn $ab = 4$. Biết rằng (C) có đường tiệm cận ngang $y = c$ và có đúng 1 đường tiệm cận đứng. Tính tổng $T = 3a + b - 24c$.

A. $T = 11$.

B. $T = 4$.

C. $T = 7$.

D. $T = -11$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 112. Khoảng cách từ điểm $A(-5;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2 + 2x}$$

A. 5.

B. $\sqrt{26}$.

C. 9.

D. 1.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 113. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$. Tọa độ điểm M nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất là

A. $M(-1;0)$ hoặc $M(3;4)$.

B. $M(-1;0)$ hoặc $M(0;-2)$.

C. $M(2;6)$ hoặc $M(3;4)$.

D. $M(0;-2)$ hoặc $M(2;6)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 114. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là:

A. $\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Câu 115. Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x-2}$ có đồ thị là (C) , M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{5}$. Gọi S là tổng các hoành độ của tất cả các điểm M thỏa mãn bài toán. Tìm giá trị của S .

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Câu 116. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 0.

B. 4.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Câu 117. Cho hàm số $y = \frac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C). Điểm M nằm trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C). Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{5}$. C. 4. D. 5.

Lời giải

Câu 118. Cho đường cong (C): $y = \frac{2x+3}{x-1}$ và M là một điểm nằm trên (C). Giả sử d_1 , d_2 tương ứng là các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C), khi đó $d_1.d_2$ bằng:

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Câu 119. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Tiếp tuyến của (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B. Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng

- A. $4\sqrt{2}\pi$. B. 8π . C. 2π . D. 4π .

Lời giải

Dạng 4. Một số bài toán thực tế

1. Phương pháp

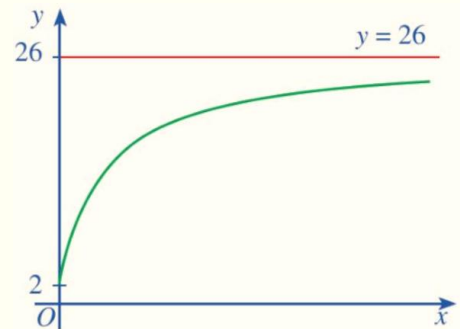
- **Bước 1 :** Xác định công thức hàm số của đại lượng cần xét (hoặc đề bài đưa ra).
- **Bước 2 :** Tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số phù hợp với yêu cầu đề bài để tìm kết quả.
- **Bước 3 :** Khi bài toán cần xác định con số “**tối đa**” theo ẩn t (thời gian), ta tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi x tiến tới vô cực, hay $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = y$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 12. Số dân của một thị trấn sau x năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$y = f(x) = \frac{26x + 10}{x + 5}$$

($f(x)$ được tính bằng nghìn người) (Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Xem $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, đồ thị của hàm số đó là đường cong màu xanh ở Hình 10. Khi $x \rightarrow +\infty$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ ngày càng “tiến gần” tới đường thẳng nào?



Hình 10

Lời giải

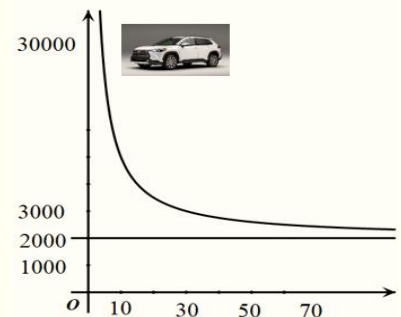
.....

.....

.....

Bài tập 13. Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là $f(t) = \frac{30000 + 2000t}{t}$ (USD).

- Sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng bao nhiêu (USD)?
- Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó ngày càng bằng bao nhiêu?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 14. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng). Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Lời giải

Bài tập 15. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200\left(5 - \frac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x \geq 1$ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

- a). Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- b). Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

Bài tập 16. Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$, coi $x \in [0; +\infty)$.

Lời giải

Bài tập 17. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x) = 60000 + 250x$. Gọi $\bar{F}(x)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm ($x \geq 0$), khi đó, hãy tính chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm.

Lời giải



.....

.....

.....

.....

Bài tập 18. Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với x người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức $P(x) = \frac{5000x}{4x+25}$. Hãy tìm số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 19. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức $S(x) = 300\left(2 + \frac{4}{x+2}\right)$ với $x \geq 1$. Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1; +\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 20. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 150x + 900$ (nghìn đồng). Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm không vượt quá t (nghìn đồng). Tìm giá trị nhỏ nhất của t .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 21. Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50000 đồng. Gọi $t (t \geq 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 22. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$

Lời giải

.....	
.....	
.....	

Bài tập 23. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40000USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 6USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x (x \geq 1)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x) = \frac{P(x)}{x}$. Xem $F(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu?

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 24. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường nào.

Lời giải

Bài tập 25. Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi $t(t \geq 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là:

Lời giải

Bài tập 26. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144m^2$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$.

- Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.
- Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Lời giải

Bài tập 27. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $200(m^2)$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$. Gọi $f(x)$ là chu vi của mảnh vườn. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Lời giải

Bài tập 28. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Lời giải

Bài tập 29. Một khu vườn hình chữ nhật tiếp giáp với bờ sông được rào lại để làm vườn trồng hoa màu; biết phía bên bờ sông không cần hàng rào. Diện tích khu vườn là $1000(m^2)$. Hàng rào ở phía song song với sông có chi phí là 36.000 (đồng) trên một m^2 , hàng rào ở hai phía còn lại (vuông góc với bờ sông) là 80.000 (đồng) trên một m^2 . Bốn trụ ở bốn góc vườn có giá là 250.000 (đồng) mỗi trụ. Gọi x là độ dài một cạnh vuông góc với bờ sông và hàm $C(x)$ mô tả chi phí của dự án. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = C(x)$ là

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

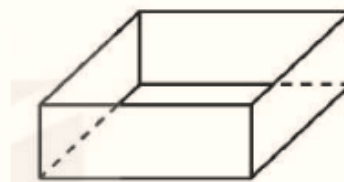
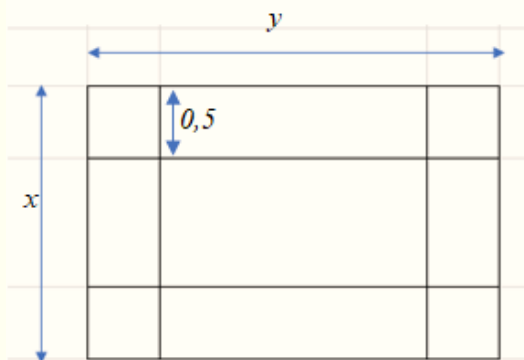
.....

.....

.....

.....

Bài tập 30. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

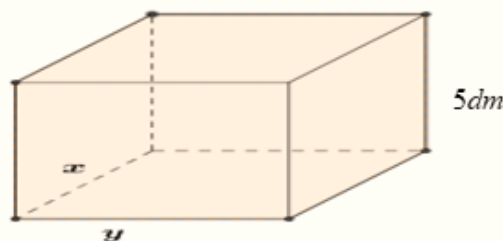
.....

.....

.....



Bài tập 31. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



Lời giải

Bài tập 32. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a). Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200+t}$.

b). Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c). Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể khi thời gian t ngày càng lớn.

Lời giải

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. The left column contains 10 rows of lines, and the right column also contains 10 rows. There are no margins or other markings on the page.

c). Nếu cứ bơm liên tục thì nồng độ muối trong bể như thế nào?

[illegible]

.....

Bài tập 35. Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng

Lời giải

Bài tập 36. Một bể chứa $2m^3$ nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là

Lời giải

Bài tập 37. Một bể chứa 1000 lít nước muối có nồng độ 0,1 (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích bể, đơn vị gam/lít). Người ta bơm nước muối có nồng độ 0,2 vào bể với tốc độ 20 lít/phút. Gọi $f(t)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là :

Lời giải

3. Câu hỏi đúng sai

Câu 120. Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)\%$.

- a). Hàm số $f(x) = \frac{100(x+200)}{x+30}$.
- b). Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng $(0; +\infty)$.
- c). Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.
- d). Giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến dương vô cực bằng 100.

Lời giải

Câu 121. Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho một lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

- a). Sau một giờ bơm thì khối lượng muối trong bể là 30(kg)
- b). Thể tích lượng nước trong bể sau thời gian t phút là $3000 + 20t$ (lít)
- c). Giả sử nồng độ muối trong nước trong bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $[0; +\infty)$ (gam/ lít) thì đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$ là đường thẳng $y = 20$.
- d). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

Lời giải

Câu 122. Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong tháng thứ x được tính theo công thức $f(x) = 50 - \frac{30}{2+x}$, trong đó $x \geq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a). Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là 40 (xe)
- b). Từ tháng thứ ba trở đi thì số lượng xe bán ra trong tháng đạt mức lớn hơn hoặc bằng 45 xe/tháng
- c). Nếu xem $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên $[1; +\infty)$ thì đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $y = 0$
- d). Khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50 xe/tháng

Lời giải

Câu 123. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đồ nước muối có nồng độ 30gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25lít/phút.

- a). Sau 10phút bơm số lượng muối trong bể là 300gam.
- b). Nếu bơm trong một giờ đồng hồ thì số lượng muối trong bể không vượt quá 2 kg.
- c). Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít là $f(t) = \frac{30t}{200+t}$).
- d). Khi t đủ lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít).

Lời giải

Câu 124. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người) (Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

- a). Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là 34 nghìn người.
- b). Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng $(0; +\infty)$.
- c). Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 26$.
- d). Dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người.
- e). Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1990 thì tốc độ tăng dân số là 0,129 nghìn người trên /năm.

Lời giải

[illegible]

Câu 125. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{300x}{100-x}$ triệu đồng, $0 \leq x < 100$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- a). Chi phí cần bỏ ra sẽ luôn tăng khi x tăng?
- b). Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí.

Lời giải

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains ten rows of these lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced and extend across the width of each respective column.

Bài 4

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ

A. LÝ THUYẾT.

1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Để khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta tiến hành các bước sau:

- ① **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- ② **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên hàm số.
 - Chiều biến thiên.
 - ☞ Tính y' .
 - ☞ Tìm các nghiệm của phương trình $y' = 0$ và các điểm tại đó y' không xác định.
 - ☞ Xét dấu y' và suy ra các khoảng biến thiên của hàm số.
 - Tìm cực trị hàm số (nếu có).
 - Tìm các giới vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và tại các điểm mà hàm số không xác định.
 - Tìm các đường tiệm cận của hàm số (nếu có).
 - Lập bảng biến thiên của hàm số.
- ③ **Bước 3.** Đồ thị.
 - Liệt kê các điểm đặc biệt (điểm cực đại, điểm cực tiểu, tâm đối xứng,...)
 - Xác định giao điểm của (C) với Ox, Oy (nếu có).
 - Vẽ đồ thị.

2. Một số hàm cơ bản

HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

1. Phương pháp

a). Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

b). Sự biến thiên

➤ Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta' = b^2 - 3ac$

- $\Delta' > 0$: Hàm số có 2 cực trị.
- $\Delta' \leq 0$: Hàm số luôn tăng hoặc luôn giảm trên $\mathbb{R}$.

➤ Đạo hàm cấp 2: $y'' = 6ax + 2b$,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

- $x = -\frac{b}{3a}$ là hoành độ điểm uốn, đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

➤ Giới hạn:

- Nếu $a > 0$ thì: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- Nếu $a < 0$ thì: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

c). Bảng biến thiên và đồ thị:

- Trường hợp $a > 0$:

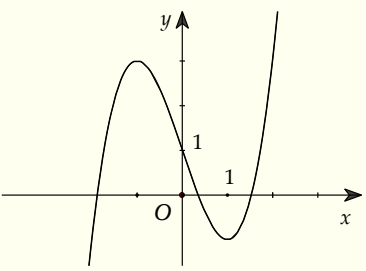
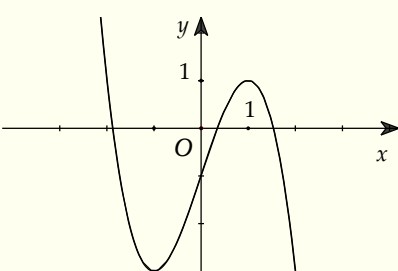
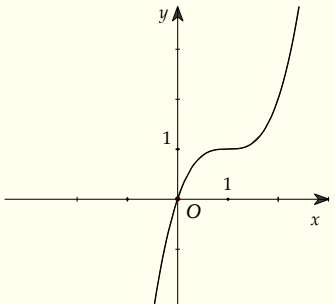
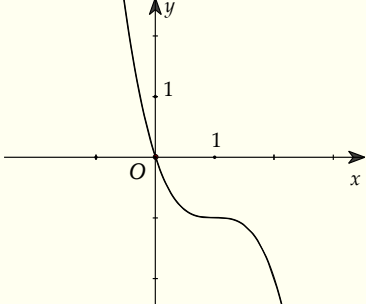
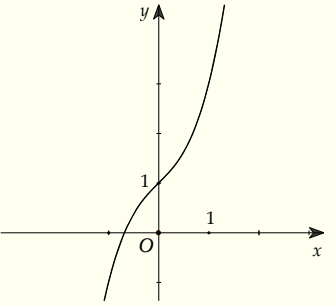
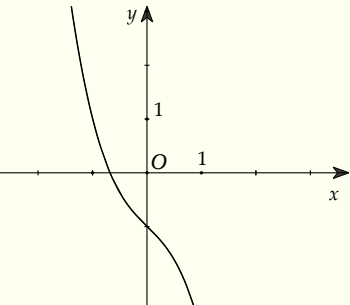
⊕ $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$: Hàm số có 2 cực trị

⊕ $\Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$: Hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

○ Trường hợp $a < 0$:

⊕ $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$: Hàm số có 2 cực trị.

⊕ $\Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \Rightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$: Hàm số luôn giảm trên $\mathbb{R}$.

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

a). $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

b). $y = -x^3 + 3x^2$.

c). $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]

2). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C'_1) tại $A(3;1)$.

2). Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

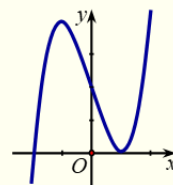
[illegible]

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. The left column contains 10 rows of lines, and the right column also contains 10 rows. There are no margins, text, or other markings on the page.

Mức độ 1. Nhận Biết

Câu 1. Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A.** $y = x^2 - 3x + 2$. **B.** $y = x^4 - x^2 + 2$.
C. $y = -x^3 - 3x + 2$. **D.** $y = x^3 - 3x + 2$.



Lời giải

.....

.....

Câu 2. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

- A.** $y = x^3 - 3x^2 + 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$.
C. $y = -x^3 - 3x^2 - 3x$. **D.** $y = x^3 + 3x^2 - 3x$.

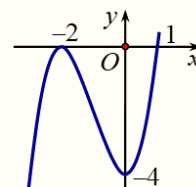
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		0	
y	$-\infty$	1	$+\infty$

Lời giải

.....

Câu 3. Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A.** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 4$.
C. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$. **D.** $y = x^3 + 3x^2 - 4$



Lời giải

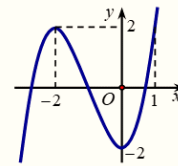
Câu 4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = 2x^3 + 6x^2 - 2$

B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$

C. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$

D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$



Lời giải

Mức độ 2. Thông Hiểu

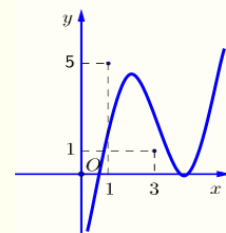
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$



Lời giải

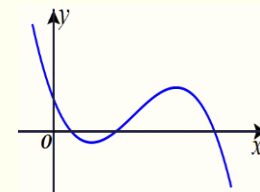
Câu 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$



Lời giải

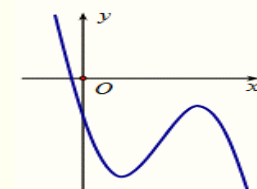
Câu 7. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số thực và $a \neq 0$) như hình vẽ. Khẳng định nào đúng

A. $b > 0, c > 0$

B. $b > 0, c < 0$

C. $b < 0, c > 0$

D. $b < 0, c < 0$



Lời giải

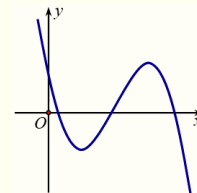
Câu 8. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

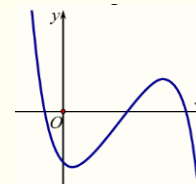
Câu 9. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

B. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

C. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$.

D. $a < 0; b < 0; c < 0; d < 0$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

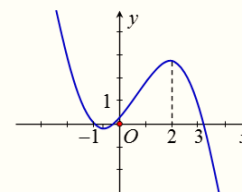
Câu 10. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ sau (đồ thị không đi qua gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.

B. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0$.

C. $a < 0; b < 0; c < 0; d > 0$.

D. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.

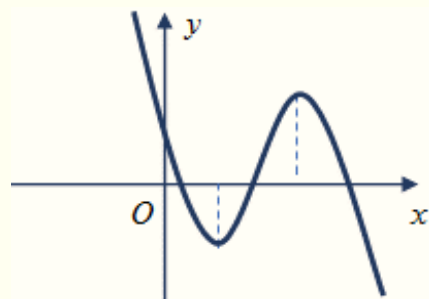
Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0; b^2 > 3ac$.

B. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0; b^2 > 3ac$.

C. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0; b^2 > 3ac$.

D. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0; b^2 > 3ac$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....



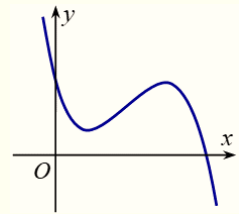
.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A.** $a > 0, c > 0, d > 0.$ **B.** $a < 0, c > 0, d > 0.$
C. $a < 0, c < 0, d < 0.$ **D.** $a < 0, c < 0, d > 0.$

Lời giải

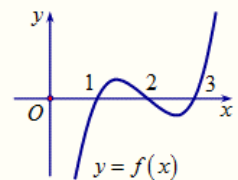
.....

.....

.....

.....

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng ?



- A.** $f(1,5) < 0 < f(2,5).$ **B.** $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0.$
C. $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0.$ **D.** $f(1,5) > 0 > f(2,5).$

Lời giải

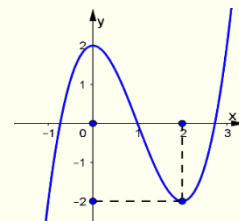
.....

.....

.....

.....

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Tính tổng $S = a + b + c + d$.



- A.** $S = 0.$ **B.** $S = 6.$
C. $S = -4.$ **D.** $S = 2.$

Lời giải

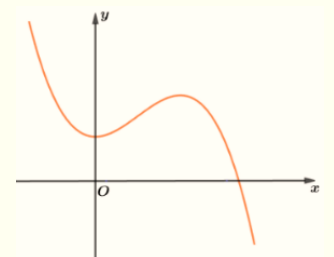
.....

.....

.....

.....

Câu 15. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

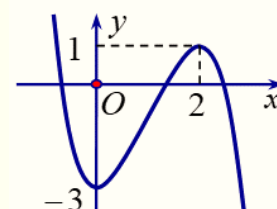


- A.** $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0.$
B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0.$
C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0.$
D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0.$

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ -3 ; hoành độ điểm cực đại là 2 và đi qua điểm $(1; -1)$ như hình vẽ. Tỉ số $\frac{b}{a}$ bằng



- A. -1 . B. 1 . C. -3 . D. 3 .

Lời giải

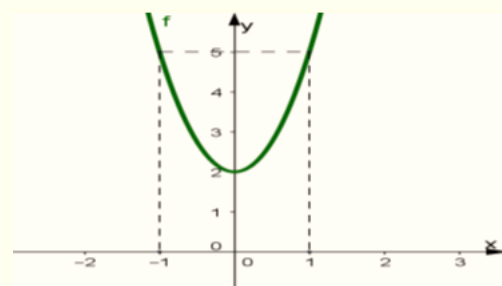
Câu 17. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình dưới

- A. Hàm số $y = -x^3 + 3x$ B. Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.
C. Hàm số $y = x^3 - 3x$. D. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Lời giải

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) đi qua
 $A(1; 4)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ.
Giá trị $f(3) - 2f(1)$ là



- A. 30 . B. 24 . C. 26 . D. 27 .

Lời giải



.....

.....

.....

.....

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

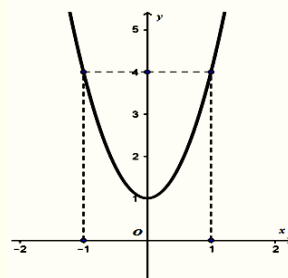
$(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

A. $H = 45$.

B. $H = 64$.

C. $H = 51$.

D. $H = 58$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

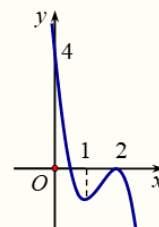
Câu 20. Cho hàm số $y = -2x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $bcd = -144$.

B. $c^2 < b^2 + d^2$.

C. $b + c + d = 1$.

D. $b + d < c$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

HÀM SỐ NHẤT BIẾN $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

1. Phương pháp

a). TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

b). Sự biến thiên

➤ Đạo hàm : $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Đặt $m = ad-bc$, ta có

☞ Nếu $m > 0$ thì hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

☞ Nếu $m < 0$ thì hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

➤ Các đường tiệm cận : $x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang.

➤ Bảng biến thiên và đồ thị :

$m > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
y'	+		+
y	$\frac{a}{c}$		$\frac{a}{c}$

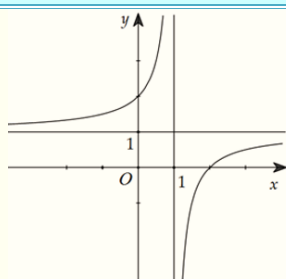
$m < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
y'	-		-
y	$\frac{a}{c}$		$\frac{a}{c}$

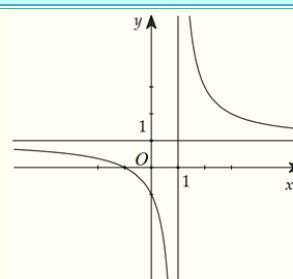
➤ Đồ thị của hàm số nhất biến gọi là một hypebol vuông góc nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

➤ Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

$D = ad-bc > 0$



$D = ad-bc < 0$



2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Lời giải

[illegible]

 Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$, trong đó m là tham số thực.

- 1).** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m=1$.
- 2).** Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

[illegible]

 **Ví dụ 6.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C_1) .

- 1).** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C'_1) của hàm số;
- 2).** Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt (C'_1) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

.....



3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông Hiểu

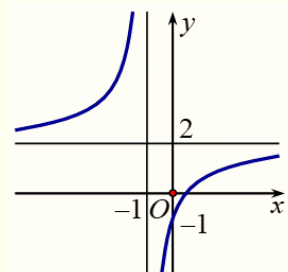
Câu 21. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

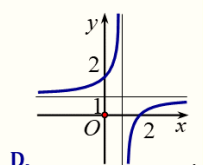
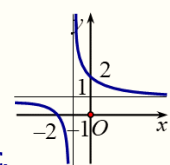
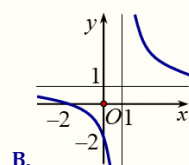
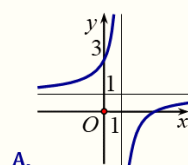


Lời giải

.....

.....

Câu 22. Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào dưới đây ?



Lời giải

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Xét các phát biểu sau đây:

i) Đồ thị hàm số nhận điểm $I(-1;1)$ làm tâm đối xứng.

ii) Hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

iii) Giao điểm của đồ thị với trục hoành là điểm $A(0;-2)$.

iv) Tiệm cận đứng là $y=1$ và tiệm cận ngang là $x=-1$.

Trong các phát biểu trên, có bao nhiêu phát biểu đúng

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

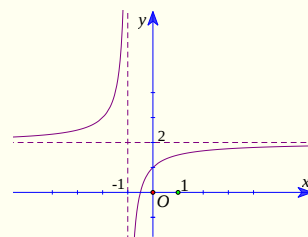
Câu 24. Đồ thị (hình bên) là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+3}{1-x}$.



Lời giải

Câu 25. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

A. $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Lời giải

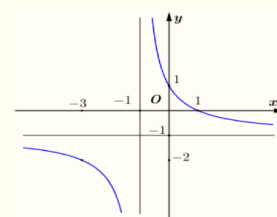
Câu 26. Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?

A. $y = \frac{-x}{x+1}$.

B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$.

D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.



Lời giải

Câu 27. Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

B. $y = \frac{x-1}{2x+2}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{x+3}{2+x}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		-	-
y	1	$+\infty$	$-\infty$

Lời giải

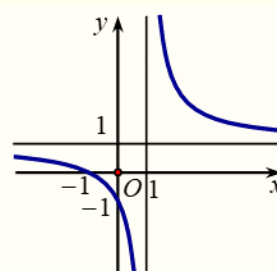
Câu 28. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{2x-2}$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{-x}{1-x}$.

D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Lời giải

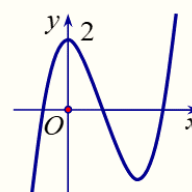
Câu 29. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

B. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

D. $y = x^4 - 2x^3 + 2$.



Lời giải

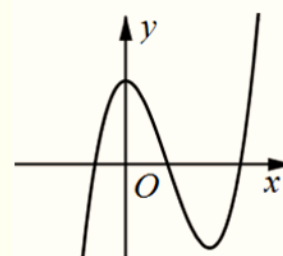
Câu 30. Đường cong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 + 3x^2 + 2$.

B. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.



Lời giải

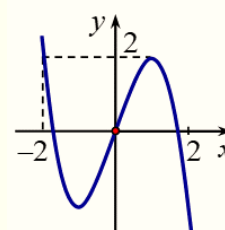
Câu 31. Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau đây

A. $y = x^3 - 3x^2$.

B. $y = -x^4 + 2x^2$.

C. $y = 1 + 3x - x^3$.

D. $y = 3x - x^3$.



Lời giải

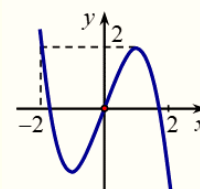
Câu 32. Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau đây

A. $y = x^3 - 3x^2$.

B. $y = -x^4 + 2x^2$.

C. $y = 1 + 3x - x^3$.

D. $y = 3x - x^3$.



Lời giải

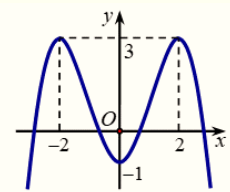
Câu 33. Đường cong trong hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = -x^4 + 8x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - 8x^2 - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -|x|^3 + 3x^2 - 1$.



Lời giải

Câu 34. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ

A. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-3}{x+2}$.

C. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

D. $y = \frac{2x-5}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới.

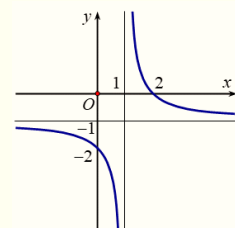
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b < 0 < a$.

B. $0 < b < a$.

C. $b < a < 0$.

D. $0 < a < b$.



Lời giải

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ

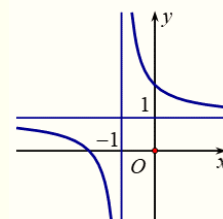
bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $b < 0 < a$.

B. $0 < a < b$.

C. $a < b < 0$.

D. $0 < b < a$.

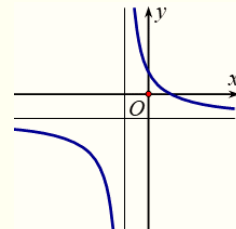


Lời giải

Câu 37. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax-1}{cx+d}$ (a, c, d : hằng số thực)

như hình vẽ. Khẳng định nào đúng

- A.** $d > 0, a > 0, c < 0$. **B.** $d > 0, a < 0, c > 0$.
C. $d < 0, a > 0, c < 0$. **D.** $d < 0, a < 0, c > 0$.

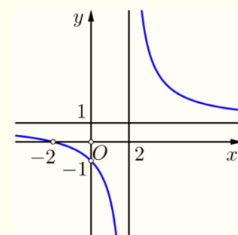


Lời giải

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{x-a}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ

bên dưới. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

- A.** $P = -3$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = 2$.

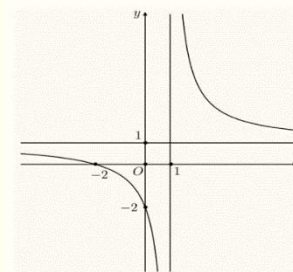


Lời giải

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ

bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a < 0; b < 0$. **B.** $0 < b < a$.
C. $b < 0 < a$. **D.** $a < b < 0$.

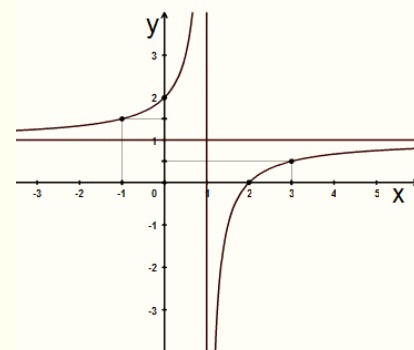


Lời giải

Câu 40. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị cho trong hình sau.

Tìm mệnh đề đúng.

- A.** $ad > bc, cd < ac$. **B.** $ad > bc, cd > ac$.
C. $ad < bc, cd < ac$. **D.** $ad < bc, cd > ac$.



Lời giải



.....

.....

.....

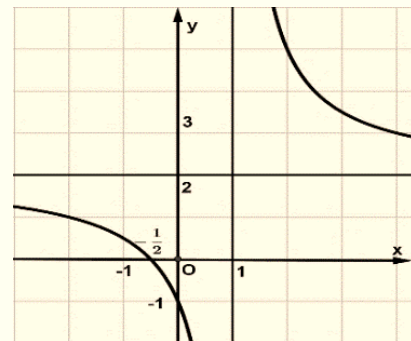
.....

Câu 41. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ với } a, b, c, d \text{ là các số thực.}$$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y' = 0, \forall x \leq 1$.
- B. $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- C. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
- D. $y' = 0$ vô nghiệm.



Lời giải

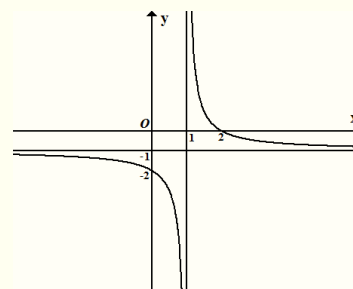
.....

.....

Câu 42. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên

với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$?

- A. $T = 12$.
- B. $T = 10$.
- C. $T = -9$.
- D. $T = -7$.



Lời giải

.....

.....

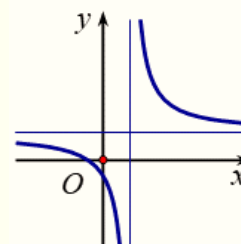
.....

.....

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$) có

đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c - ab < 0$.
- D. $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

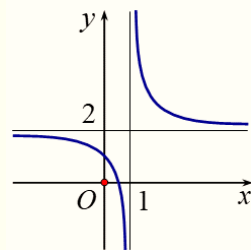
.....

.....

.....

Câu 44. Xác định a, b, c để hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?

- A. $a=2, b=1, c=-1$. B. $a=2, b=1, c=1$.
C. $a=2, b=2, c=-1$. D. $a=2, b=-1, c=1$.



Lời giải

.....

.....

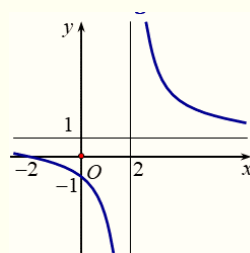
.....

.....

Câu 45. Hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ.

Giá trị của a, b, c lần lượt là

- A. 1;1;-1. B. 2,2;-1. C. 1,2;1 D. 1,-2;1.



Lời giải

.....

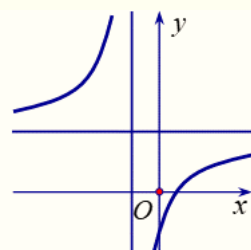
.....

.....

.....

Câu 46. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
C. $a > 0, b > 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c < 0$.



Lời giải

.....

.....

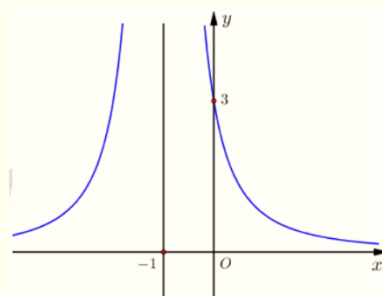
.....

.....

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ dưới đây:

Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;4)$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

- A. $f(1)=2$. B. $f(2)=\frac{11}{2}$ C. $f(1)=\frac{7}{2}$ D. $f(2)=6$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ a, b, c

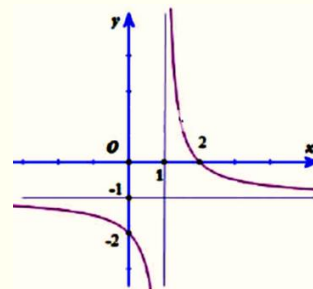
là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$ bằng:

A. $T = 12$.

B. $T = 10$.

C. $T = -7$.

D. $T = -9$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 49. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{cx-1}$ có đồ thị như hình vẽ

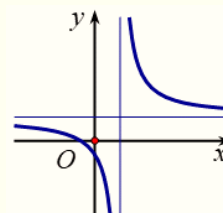
dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $c < 0; b < 0$.

B. $b < 0; c > 0$.

C. $b > 0; c > 0$.

D. $b > 0; c < 0$.



Lời giải

.....

.....

.....

Câu 50. (Tập Chí Toán Học)

Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}, d < 0$ có đồ thị như hình trên.

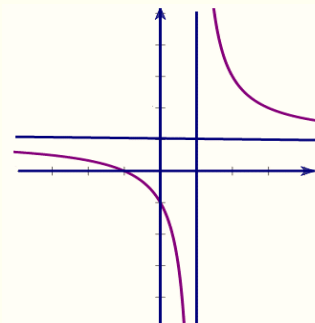
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $a > 1, b > 0, c < 1$.

B. $a > 1, b < 0, c > 1$.

C. $a < 1, b > 0, c < 1$.

D. $a > 1, b > 0, c > 1$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

Hàm số phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

1. Phương pháp

a). Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.

b). Sự biến thiên.

Thực hiện phép chia đa thức ta được $y = \lambda x + \mu + \frac{C}{mx + n}$ ($a.m.C \neq 0$).

✦ Đạo hàm: $y' = \lambda - \frac{Cm}{(mx + n)^2} = \frac{\lambda(mx + n)^2 - Cm}{(mx + n)^2}$.

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow (mx + n)^2 = \frac{Cm}{\lambda}$$

○ Nếu $\frac{Ca}{\lambda} < 0$ thì hàm số không có cực trị, hàm số tăng hoặc giảm trên từng

khoảng xác định.

○ Nếu $\frac{Ca}{\lambda} > 0$ thì hàm số có 2 cực trị.

✦ Các đường tiệm cận:

- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{n}{m}$
- Tiệm cận xiên: $y = \lambda x + \mu$.

c). Đồ thị.

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

TRƯỜNG HỢP	$a.m > 0$	$a.m < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

2. Ví dụ minh họa.

Lời giải

Lời giải

Dạng 1. Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

➡ Từ định nghĩa trị tuyệt đối

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

và $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

👉 Giữ nguyên phần đồ thị *bên phải* Oy của đồ thị (C): $y = f(x)$.

👉 Bỏ phần đồ thi *bên trái* O_y của (C) rồi lấy đối xứng phần đồ thi được giữ qua O_y

Ví dụ 9. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ hãy suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

Lời giải.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ có đồ thị (C)

1). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số;

2). Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

Lời giải.

4). Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

[illegible]

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C) .

1). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

Từ đó suy ra đồ thị của hàm số: $y = \frac{2|x|}{|x|-1}$ (C_1)

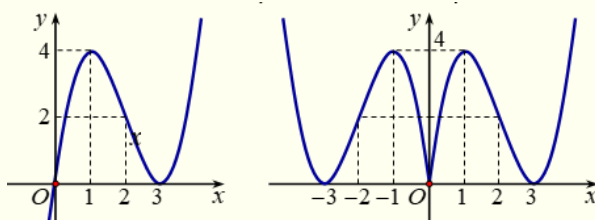
2). Biện luận theo m số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của phương trình: $(m-2)|x| - m = 0$.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 51. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



A. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

B. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

C. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

D. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

Lời giải

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $|2|x|-6|=m||x|-1|$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (0;1) \cup (4;+\infty)$.

B. $m \in (0;1) \cup (6;+\infty)$.

C. $m \in (0;2) \cup (6;+\infty)$.

D. $m \in (0;3) \cup (5;+\infty)$.

Lời giải

Câu 53. Phương trình $|x|^3 - 3x^2 - m^2 = 0$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 3 nghiệm.

B. 4 nghiệm.

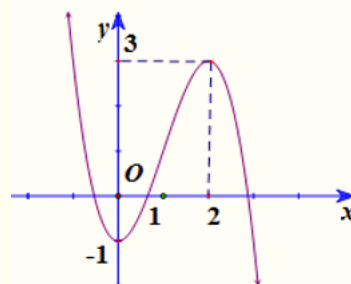
C. 2 nghiệm.

D. 6 nghiệm.

Lời giải

Câu 54. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|) - m = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.



A. $1 < m < 3$.

B. $-1 < m < 3$.

C. $-2 < m < 6$.

D. $2 < m < 6$.

Lời giải

Dạng 2. Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

1. Phương pháp.

➤ Từ định nghĩa trị tuyệt đối ta có:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$$

➤ Cách vẽ (C') từ (C) :

☞ Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $(C): y = f(x)$.

☞ Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua qua Ox .

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 13. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$ như sau:

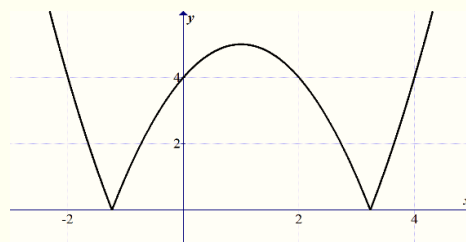
Lời giải.

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2x - 4|$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

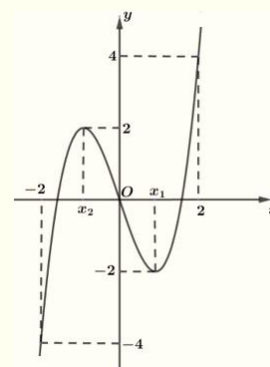
- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.



Lời giải

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ. Hỏi phương trình $|f(x) - 1| = 1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2; 2]$?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.



Lời giải

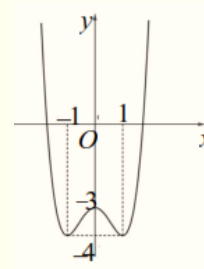
Câu 57. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ với $(a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 4.

Lời giải

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình vẽ dưới đây. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| + 1 = m$ có 6 nghiệm phân biệt?

- A. $-4 < m < -3$. B. $4 < m < 5$.
C. $m > 5$. D. $0 < m < 4$.



Lời giải

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$+\infty$		3		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)|-10=0$ là.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Câu 60. (THPT Chuyên Hạ Long 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

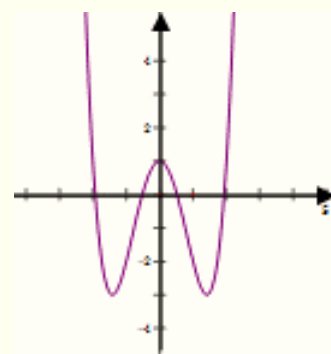
Hỏi hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.



Lời giải

Câu 61. (Chuyên Lê Thánh Tông 2019) Cho hàm số $y = \left| \frac{x+1}{x-3} \right|$ có đồ thị là (C).

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị (C) có 3 đường tiệm cận.

B. Hàm số có một điểm cực trị.

C. Đồ thị (C) cắt đường tiệm cận ngang của nó tại một điểm.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

Dạng 3. Vẽ đồ thị $y = |f(|x|)|$ **ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị** $y = f(|x|)$ **và** $y = |f(x)|$

1. Phương pháp.

➤ Cách vẽ (C'') từ (C) :

☞ Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

☞ Từ đồ thị $(C'): y = f(|x|)$ ta suy ra đồ thị $y = |f(|x|)|$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 14. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x|^3 - 3|x|$ làm như sau:

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 4. Từ đồ thị $(C'): y = u(x).v(x)$ **suy ra đồ thị** $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

1. Phương pháp.

➤ Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$

➤ Cách vẽ (C') từ (C) :

☞ Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

☞ Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

Nhận xét:

➤ Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên lấy đối xứng các điểm đặc biệt của (C) giao điểm với $Ox, Oy...$

➤ Đối với hàm phân thức thì nên lấy đối xứng các đường tiệm cận để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 15. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 16. Từ đồ thị (C): $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị (C'): $y = \frac{x}{|x-1|}$

Lời giải.

5. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 2. Thông Hiểu

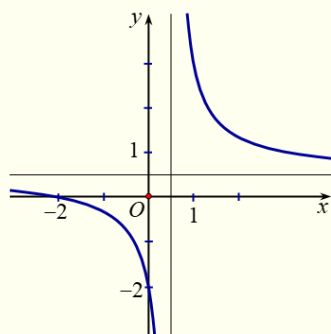
Câu 62. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

- A. $y = |x^3 + 3x|$ B. $y = |x^3| - 3|x|$
C. $y = |x^3| + 3|x|$ D. $y = |x^3 - 3x|$

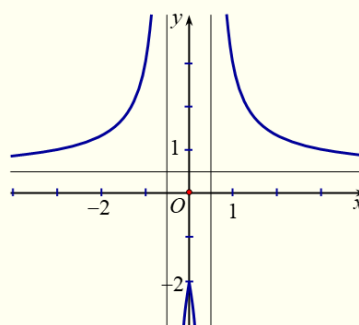


Lời giải

Câu 63. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là đồ thị của hàm số nào sau?



Hình 1

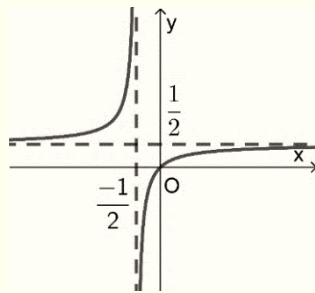


Hình 2

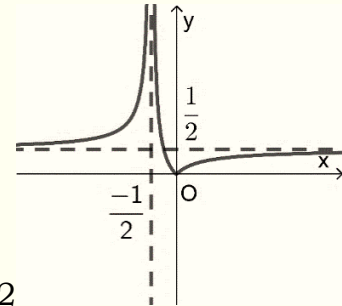
- A. $y = \frac{|x|+2}{2|x|-1}$ B. $y = \frac{x+2}{|2x-1|}$ C. $y = \frac{x+2}{2x-1}$ D. $y = \frac{|x+2|}{2x-1}$

Lời giải

Câu 64. Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$

C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$

Lời giải

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'		$-$	$+$	
y	-1	$+\infty$	0	1

Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên là hàm số nào dưới đây

A. $y = \frac{1}{x(x+1)}$

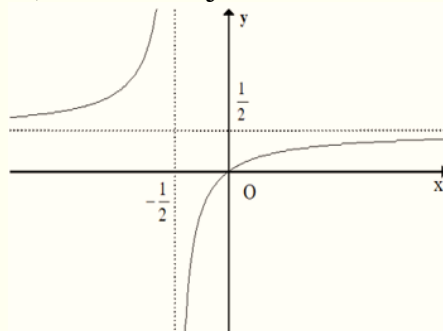
B. $y = |x|(x+1)$

C. $y = \frac{x}{|x+1|}$

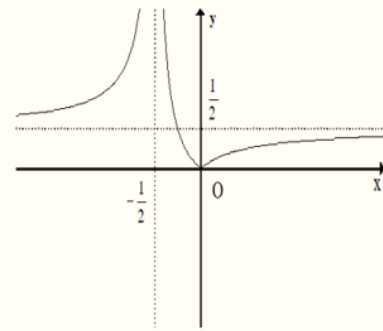
D. $y = \frac{|x|}{x+1}$

Lời giải

Câu 66. Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$

C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$

Lời giải

IV. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ.

Bài toán 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

Dạng 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

1. Phương pháp.

○ **Bước 1.** Tính $y' = f'(x)$ suy ra hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là $k = f'(x_0)$.

○ **Bước 2.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$\Delta: y - y_0 = k(x - x_0)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ① ② ③

Trong đó: Điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ được gọi là *tiếp điểm*. (với $y_0 = f(x_0)$).

$k = f'(x_0)$ là **hệ số góc** của tiếp tuyến.

○ **Nhận xét:** Để viết phương trình tiếp tuyến Δ , ta cần tìm ba thành phần x_0, y_0, k .

☞ Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0 = f(x_0)$.

☞ Nếu đề cho y_0 ta thay vào hàm số để giải ra x_0 .

2. Bài tập minh họa.

Ví dụ 17. Cho hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; 4)$.

Lời giải.

Ví dụ 18. Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3.

Lời giải.

Ví dụ 19. Cho hàm số $(C): y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0 > 0$, biết $y''(x_0) = -1$ là

Lời giải.



📖 Ví dụ 20. Cho đường cong $(C): y = f(x) = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau:

- Lời giải.**

Trang 265

Ví dụ 21. Cho đồ thị (C): $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với Ox.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Mức độ 1. Nhận Biết

Câu 67. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

- A.** $k = 0$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = \frac{1}{4}$. **D.** $k = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

.....

.....

Câu 68. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

- A.** $y = -3x - 4$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 3x - 2$. **D.** $y = 3x + 2$.

Lời giải

.....

.....

Câu 69. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A.** $x + y + 2 = 0$. **B.** $y = x + 2$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = -x + 2$.

Lời giải

.....

.....

Câu 70. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

- A.** $y = 8$. **B.** $y = -12x + 16$. **C.** $y = 12x - 24$. **D.** $y = 12x - 16$.

Lời giải

.....

.....

Câu 71. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

- A.** $y = 2x$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = 0$. **D.** $y = -2$.

Lời giải

.....

.....

Câu 72. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

- A.** $y = -9x + 7$; $y = -2$. **B.** $y = -2$. **C.** $y = 9x + 7$; $y = -2$. **D.** $y = 9x + 7$; $y = 2$.

Lời giải

Câu 73. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại điểm $M(1; 2)$.

- A.** $y = 2x + 2$. **B.** $y = 3x - 1$. **C.** $y = x + 1$. **D.** $y = 2 - x$.

Lời giải

Câu 74. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A.** $y = -x - 3$. **B.** $y = -x + 2$. **C.** $y = x - 1$. **D.** $y = x + 2$.

Lời giải

Câu 75. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5$ tại điểm có tung độ bằng -1 và hoành độ âm.

- A.** $y = 2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$. **B.** $y = -2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$.
C. $y = 2\sqrt{6}(x - \sqrt{6}) + 1$. **D.** $y = 2\sqrt{6}(x - \sqrt{6}) - 1$.

Lời giải

Câu 76. (THPT Chuyên ĐH Vinh 2018) Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -1$ là

- A.** -10 . **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $-\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 77. (THPT Chuyên Lương Thế Vinh 2018) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (H) .

Tiếp tuyến của (H) tại giao điểm của (H) với trục hoành có phương trình là:

- A.** $y = 3x$. **B.** $y = x - 3$. **C.** $y = 3x - 3$. **D.** $y = \frac{1}{3}(x - 1)$.

Lời giải

Câu 78. (THPT Xuân Trường Nam Định 2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 có phương trình là:

- A. $y = -12x - 7$. B. $y = 12x - 7$. C. $y = -12x + 17$. D. $y = 12x + 17$.

Lời giải

Câu 79. (THPT Số 4-487 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 - 3$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A có hoành độ $x = 1$ cắt đồ thị hàm số tại điểm B (B khác A). Tọa độ điểm B là

- A. $B(-3; 24)$. B. $B(-1; -8)$. C. $B(3; 24)$. D. $B(0; -3)$.

Lời giải

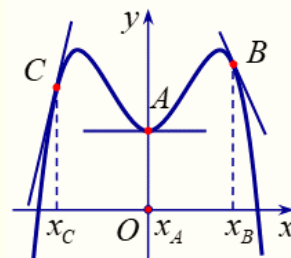
Câu 80. (THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2018) Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là

- A. $y = 20x - 35$. B. $y = -20x - 35$ và $y = 20x + 35$.
C. $y = 20x - 35$ và $y = -20x - 35$. D. $y = -20x + 35$.

Lời giải

Câu 81. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Biết rằng tại các điểm A, B, C đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f'(x_C) < f'(x_A) < f'(x_B)$. B. $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$.
C. $f'(x_A) < f'(x_C) < f'(x_B)$. D. $f'(x_A) < f'(x_B) < f'(x_C)$.



Lời giải

Câu 82. (THPT Lê Xoay Vĩnh phúc 2018) Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tính $S = a - b$.

- A. $S = \frac{1}{2}$. B. $S = 2$. C. $S = -1$. D. $S = 1$.

Lời giải

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến có hệ số góc k .

1. Phương pháp.

◦ **Bước 1.** Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính $y' = f'(x)$.

◦ **Bước 2.** Hệ số góc tiếp tuyến là $k = f'(x_0)$.

Giải phương trình này tìm được x_0 , thay vào hàm số được y_0 .

◦ **Bước 3.** Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng

$$d: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

◊ **Chú ý:**

Đối với bài toán này ta cần lưu ý một số vấn đề sau:

✓ Số tiếp tuyến của đồ thị chính là số nghiệm của phương trình : $f'(x) = k$.

✓ Cho hai đường thẳng $d_1: y = k_1x + b_1$ và $d_2: y = k_2x + b_2$. Khi đó

i) $\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$, trong đó $\alpha = (d_1, d_2)$.

ii) $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

iii) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

2. Bài tập minh họa.

Ví dụ 22. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng: $y = 2x - 2$.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 23. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y - 1 = 0$.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Lời giải.

Lời giải.

Lời giải.

Ví dụ 27. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ (C)

- a).** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2;4)$.
- b).** Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

Lời giải.

[illegible]

 **Ví dụ 28.** Cho hàm số $(C): y = \sqrt{1-x-x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C) :

- a).** Tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$.
- b).** Song song với đường thẳng $(d): x + 2y = 0$.

Lời giải.

[illegible]

Ví dụ 29. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Ví dụ 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m-2)x + 3m$ (C_m) (m là tham số).
 Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) của hàm số đã cho vuông góc với đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$.

Lời giải.

Ví dụ 31. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (*) (m là tham số).
 Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 .
 Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Lời giải.

Ví dụ 32. các điểm $A, B \in (C): y = -x^3 + 3x$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$?

Lời giải.

Bài toán 2. Tương giao của hai đồ thị hàm số

Dạng 1. Biện luận số nghiệm bằng phương pháp đồ thị.

1. Phương pháp.

- ① **Bước 1.** Ta biến đổi phương trình $F(x, m) = 0$ (1) về dạng $f(x) = g(m)$, trong đó ta đã biết đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ hoặc có thể dễ dàng vẽ được.
- ② **Bước 2.** Tính đạo hàm $f'(x)$, lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
- ③ **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị để kết luận:
Đường cong $g(m)$ cắt đồ thị đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại mấy điểm, chính là số nghiệm của phương trình $F(x, m) = 0$ (1).

2. Bài tập minh họa.

Ví dụ 33. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + m$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt.

Lời giải.

Ví dụ 34. Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Ví dụ 35. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ (1). Điều kiện của tham số m để (1) có ba nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < 1 < x_2 < x_3$ khi

Lời giải.

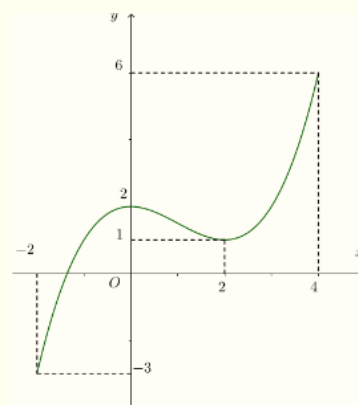
Ví dụ 36. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Lời giải.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.



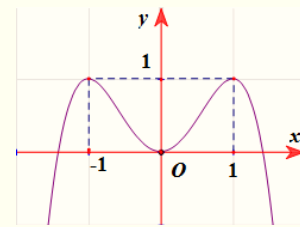
Lời giải

Câu 84. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.

Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 0.

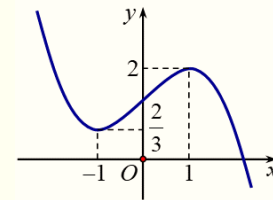


Lời giải

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

Tìm số nghiệm của phương trình $f(x + 2018) = 1$.

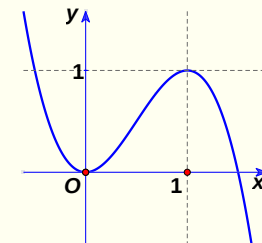
- A. 2. B. 1. C. 3.



Lời giải

Câu 86. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = x$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.



Lời giải

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$-$	$+$	$-$
y	$+\infty$	4	0	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $[-2; 4]$. B. $(-2; 4)$. C. $(-2; 4]$. D. $(-\infty; 4]$.

Lời giải

Câu 88. (THPT Chuyên KTTN 2018) Cho hàm số H có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'		$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		2		$-\infty$

$\swarrow$ -1 $\searrow$ $-\infty$ $\nearrow$ $\searrow$

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt là:

- A.** $(-2;1)$. **B.** $[-1;2)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-2;1]$.

Lời giải

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $x^3 - 3x - m + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

- A.** $-1 < m < 3$. **B.** $-1 \leq m \leq 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m < -1$ hoặc $m > 3$.

Lời giải

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

Số nghiệm của phương trình $f^2(x) - 4 = 0$ là

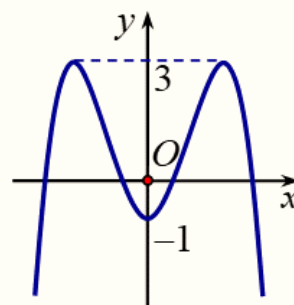
- A.** 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Câu 91. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau:

Số nghiệm của phương trình $\frac{1-f(x)}{1+f(x)} = 2$ là

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.



Lời giải

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1		3		$\frac{1}{3}$		1

Số nghiệm của phương trình $2(f(x))^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

- A. 0 B. 6 C. 2 D. 3

Lời giải

Câu 93. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		5		1		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| - 2 = 0$ là

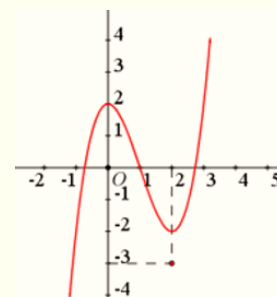
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

Câu 94. (THPT Ngô Sĩ Liên 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 6]$ có đồ thị như hình vẽ.

Số nghiệm của phương trình $f[f(x)] = -2$ là

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

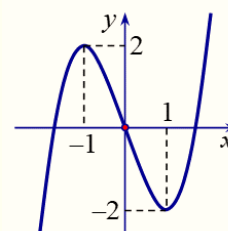


Lời giải

Câu 95. (THPT Chuyên Sơn La 2018)

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

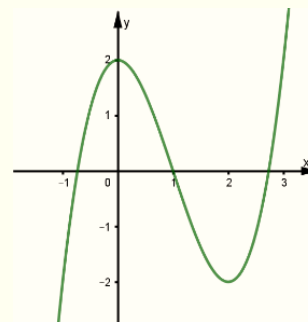
- A. 5. B. 9. C. 3. D. 7.



Lời giải

Câu 96. (THPT Quảng Xương 1 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. $m = 6$. B. $m = 7$. C. $m = 5$. D. $m = 9$.



Lời giải

Dạng 2. Biện luận số giao điểm của hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ bằng phương pháp đại số.

1. Phương pháp.

① **Bước 1.** Lập phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$ là

$$f(x) = g(x)$$

② **Bước 2.** Biến đổi về phương trình bậc 3, phương trình đa thức... và giải nghiệm

2. Bài tập minh họa.

📖 Ví dụ 37. (THPT Chuyên Hùng Vương 2020)

Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại ba điểm phân biệt M, N, P biết N nằm giữa M và P . Tính độ dài MP .

Lời giải

📖 Ví dụ 37. (THPT Chuyên Bắc Ninh 2018)

Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

- A. $m \geq -3$. B. $m \geq -2$. C. $m > -3$. D. $m > -2$.

Lời giải

Ví dụ 38. (THPT Xuân Hòa 2018) Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$.
 Tất cả giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ là

Lời giải

Ví dụ 39. (THPT Nguyễn Khuyến 2020) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $P(0;1), M, N$ thỏa tam giác OMN vuông tại O với O là gốc tọa độ.

Lời giải

Ví dụ 40. (THPT Hoàng Hoa Thám 2018) Có bao nhiêu điểm trên đồ thị hàm số $(C): y = \frac{3x+1}{x-1}$ mà khoảng cách từ mỗi điểm đó đến hai trục tọa độ bằng nhau?

Lời giải

Ví dụ 41. (THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2018) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ là

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 97. (Sở GD&ĐT Nam Định 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-14;15]$ sao cho đường thẳng $y = mx + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt.

- A. 16. B. 15. C. 20. D. 17.

Lời giải

Câu 98. (THPT Hà Huy Tập 2018) Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm m sao cho đường thẳng $d: y = x - m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB .

- A. $m = 2$. B. $m = 5$. C. $m = 6$. D. $m = 3$.

Lời giải

Câu 99. (Sở GD&ĐT Bắc Ninh 2018) Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{4x-m^2}{x-1}$ tại đúng một điểm. Tìm tích các phần tử của S .

- A. $\sqrt{5}$. B. 4. C. 5. D. 20.

Lời giải

Câu 100. (Sở GD & ĐT Bà Rịa Vũng Tàu 2020) Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với $AB = 2\sqrt{2}$ là

A. 84. B. 5. C. 50. D. 2.

Lời giải

Câu 101. (THPT Chuyên Lam Thanh Hóa 2018) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{3}$.

A. $m = 2 \pm \sqrt{10}$. B. $m = 4 \pm \sqrt{10}$. C. $m = 4 \pm \sqrt{3}$. D. $m = 2 \pm \sqrt{3}$.

Lời giải

Câu 102. Biết rằng đường thẳng $y = x + m$ (m là tham số thực) luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Độ dài AB ngắn nhất là:

A. $4\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Câu 103. (THPT Ninh Giang Hải Dương 2018) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+m}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

A. $-2 < m < 1$. B. $m < 1$. C. $-2 < m < -1$. D. $m < -1$.

Lời giải

Câu 104. (THPT Chuyên KHTN 2018) Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

A. 7. B. 6. C. 1. D. 2.

Lời giải

Bài 5

GIẢI QUYẾT CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. LÝ THUYẾT.

1. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG

Giả sử y là một hàm số của x và ta viết $y = f(x)$.

Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2 , thì sự thay đổi của x là $\Delta x = x_2 - x_1$ và sự thay đổi tương ứng của y là $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi trung bình của y đối với x trên đoạn $[x_1; x_2]$.

Giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của y đối với x tại điểm $x = x_1$.

Như vậy, đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- ① Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì:
 - $v = s'(t)$ là biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian).
 - $a(t) = v'(t) = s''(t)$ là biểu thị gia tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian)
- ② Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t thì:
 - $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- ③ Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t thì
 - $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- ④ Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì
 - $C'(x)$ là biểu thị tốc độ thay đổi tức thời của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
 - Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$.

Ví dụ 1. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số $P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}$, $0 \leq t \leq 10$, trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim bao nhiêu mmHg?

Lời giải

Ví dụ 2. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất $2m$ với vận tốc ban đầu $24,5m/s$ là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải

Ví dụ 3. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.

- Tìm các hàm vận tốc và gia tốc.
- Khi nào thì hạt chuyển động lên trên và khi nào thì hạt chuyển động xuống dưới?
- Tìm quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$.
- Khi nào hạt tăng tốc? khi nào hạt giảm tốc?

Lời giải

c). So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

[illegible][illegible]

[illegible]

2. Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm?

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains 10 rows of these lines, providing a structured space for practicing letter formation and alignment. The lines are evenly spaced and extend across the width of each respective column.



Lời giải

[illegible]

Lời giải

[illegible]

Ví dụ 9. (THPT Tiên Du_Bắc Ninh 2025) Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,075 nghìn người/năm?

Lời giải

Ví dụ 10. Xét phản ứng hoá học tạo ra chất C từ hai chất A và B : $A+B \rightarrow C$
Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A]=[B]=a(\text{mol/l})$. Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian $t(t>0)$ được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 Kt}{aKt+1}(\text{mol/l})$, trong đó K là hằng số dương (Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả, Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến, NXB Đại học Sư phạm, 2023).

a). Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
b). Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a-x)^2$.
c). Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
d). Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

Lời giải

2. MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HOÁ ĐƠN GIẢN

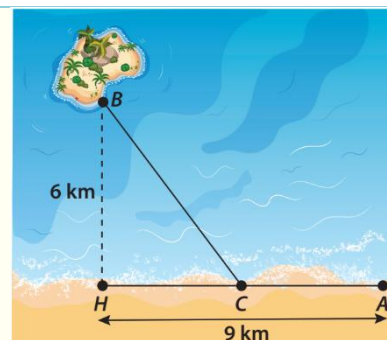
Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách **thiết lập một hàm số phù hợp** mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- ① **Bước 1.** Xác định đại lượng y mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ② **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x và biểu diễn các đại lượng khác ở bước 1 theo x .
 - Khi đó, đại lượng y sẽ là hàm số của một biến x .
 - Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
- ③ **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

Vi dụ 11. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6\text{km}$ (Hình 1.42). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50000 USD trên mỗi kilomet và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130000 USD mỗi kilomet, biết rằng $AH = 9\text{km}$. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

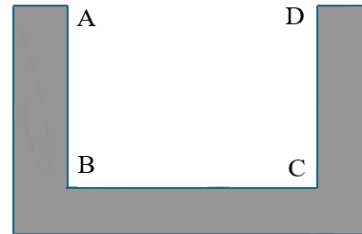


Hình 1.42

Lời giải

Trang 289

Ví dụ 13. Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $ABCD$. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $0,48m^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

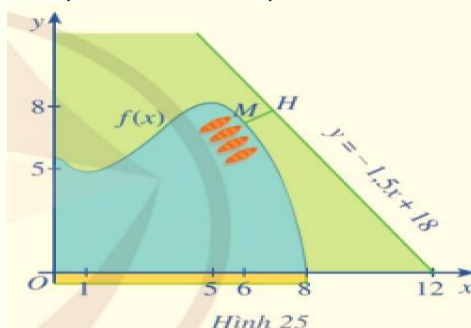
.....

.....

.....

Ví dụ 14. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa (Hình 25), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100 m.

(Nguồn A. Bigalke et al, Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2010).



- Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài bao nhiêu mét?
- Tại những điểm nào trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) thì khoảng cách theo Hình 25 phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất? Tìm khoảng cách lớn nhất đó.
- Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tìm tọa độ của điểm để xây bến thuyền này.

[illegible]

The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. The origin is labeled 0. A purple cubic curve, labeled $f(x)$ and "Hòn đảo", starts at a positive y-intercept, rises to a local maximum, and then falls, crossing the x-axis at two points. An orange straight line, labeled $y = 36 - 9x$ and "Mặt đường", has a negative slope and intersects the y-axis at 36. The intersection of the curve and the line is marked with a red dot in the first quadrant.

Trang 291

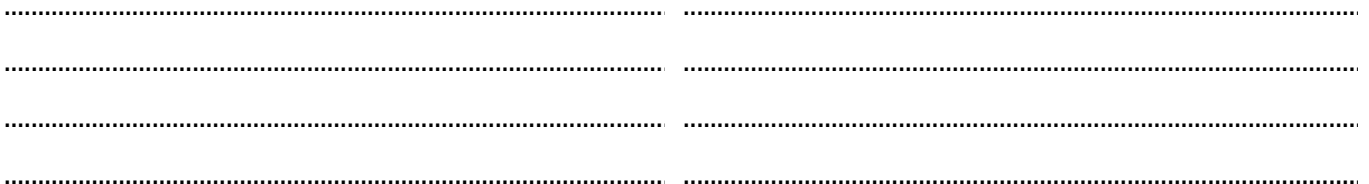
Ví dụ 16. (Sở GD&ĐT Đà Nẵng 2025) Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hoá bằng hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số. Trong đó, x ($0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$) là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học, là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

Lời giải

[illegible]

A photograph of a wooden roller coaster with red tracks and yellow support structures, set against a blue sky with white clouds. The coaster features a large loop and a steep drop. The tracks are painted red, and the wooden framework is painted yellow. The sky is bright blue with scattered white clouds. The coaster is situated in an outdoor park setting.

A wide-angle landscape photograph showing a calm lake reflecting the warm, orange and yellow light of a setting sun. The sun is positioned low on the horizon, directly between two large, rugged mountains. The mountains have steep, rocky slopes with some green vegetation. The foreground is filled with lush green grass and small shrubs. The sky transitions from a deep blue at the top to a soft purple and pink near the horizon.



📖 Ví dụ 19. (Sở GD&ĐT Ninh Bình 2025) Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100\text{ m}$; $AD = 80\text{ m}$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (không tô màu) dành cho trẻ em và H_2 (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với $AH = 40\text{ m}$; $AE = 60\text{ m}$; $AP = 20\text{ m}$ và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

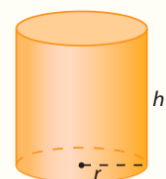
[illegible]

[illegible]

This image shows a full page of primary-ruled notebook paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. The left column contains 10 rows of lines, and the right column also contains 10 rows. There are no margins or additional markings on the page.



Bài tập 2. Người ta cần thiết kế một cái lon có dạng hình trụ có thể tích là 1 lít (Hình 1.41). Tính tỉ lệ chiều cao và bán kính đáy hình trụ này để tổng chi phí làm vỏ lon (bao gồm cả hai đáy) là nhỏ nhất.



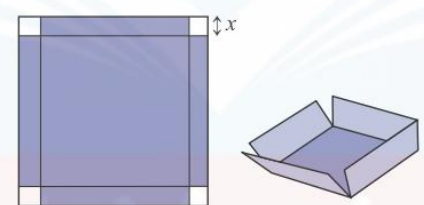
Hình 1.41

Lời giải

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal ruling lines. Each column contains ten rows of lines, creating a grid-like structure for writing. The lines are evenly spaced and extend across the width of each column. There are no margins, text, or other markings on the page.



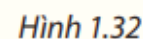
Bài tập 5. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình 11). Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.



Hình 11

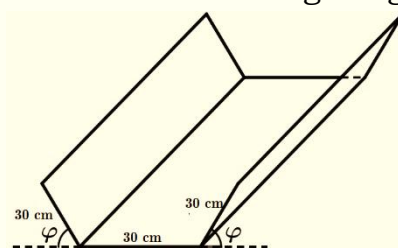
Lời giải

Bài tập 6. Một chi tiết máy có dạng khối nón với bán kính đáy là 6 cm và chiều cao là 8 cm . Người ta cần khoan từ đáy khối nón lên phía trên một khối trụ có bán kính đáy là r ($r > 0$) và có tâm của đáy trùng tâm của đáy khối nón như Hình 1.32. Xác định r sao cho phần thể tích khối trụ có được là lớn nhất.



Trang 300

Hình 1.37



Trang 301

[illegible]

Bài tập 9. Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

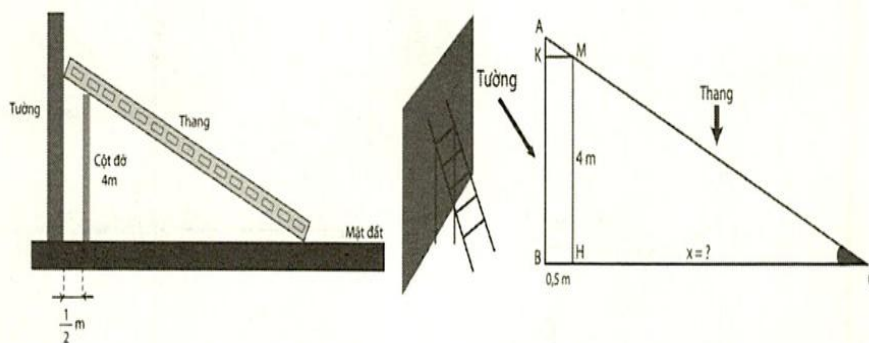
Lời giải

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains ten rows of these lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced and extend across the width of each respective column.

The diagram shows a rectangular field with vertices labeled E (top-left), D (top-right), C (bottom-right), and O (bottom-left). A curved path starts at point A on the left boundary EO and ends at point B on the bottom boundary OC. The horizontal distance from O to B is 20m. The vertical distance from A to the horizontal centerline of the pond is 40m. A green circular pond with a radius of 30m is located in the field. A straight path of width 4m connects the curved path to the pond. The distance from the center of the pond to the vertical line passing through A is 40m.

Trang 304

Bài tập 13. (THPT DTNT_Nghệ An 2025) Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao $4m$, song song và cách tường $0,5m$ kể từ gốc của cột đỡ như hình vẽ. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.



Lời giải

Bài tập 14. (Sở GD&ĐT Thái Nguyên 2025) Một hồ nước hình bán nguyệt có đường kính $AB=150m$. Một người chèo thuyền theo một đường thẳng với vận tốc $1,5$ km/h từ vị trí A đến vị trí C bất kỳ trên cung AC . Tại vị trí C người đó nghỉ 2 phút rồi tiếp tục đi bộ dọc theo cung nhỏ CB đến B , sau đó đi bộ theo đường thẳng BA để quay về A với vận tốc 3 km/h (tham khảo hình vẽ). Hỏi thời gian chậm nhất mà người đó về đến A là bao nhiêu phút? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải



Lời giải

[illegible]

.....

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. Each column contains 10 rows of lines. The entire page is white, and there are no margins or additional markings.

Lời giải.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. The left column contains ten rows of lines, and the right column also contains ten rows. There are no margins, text, or other markings on the page.

Bài tập 18. Một rạp chiếu phim có sức chứa 800 người, trung bình mỗi ngày rạp có khoảng 360 khách với giá mỗi vé là 100.000đ. Nếu giá mỗi vé giảm 10.000đ thì mỗi ngày rạp có thêm 60 khách đến xem. Hỏi cần giảm giá vé đến bao nhiêu nghìn đồng để doanh thu của rạp là lớn nhất.

Lời giải

Bài tập 19. (THPT Nguyễn Viết Xuân_Vĩnh Phúc 2025) Một công ty chuyên sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 9000 quả bóng rổ. Công ty có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 36 quả bóng rổ trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 250 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và chỉ cần có người giám sát. Chi phí trả cho người giám sát là 225 nghìn đồng mỗi giờ. Số máy móc công ty cần sử dụng để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Bài tập 20. (HSG Vũng Tàu 2025) Bác Bình có một nông trại ao nuôi cá, mỗi ngày thu hoạch được 2 tấn cá. Nếu bán cho thương lái với giá 30 nghìn đồng/kg thì hết cá, nếu giá bán cứ tăng thêm 2 nghìn đồng/kg thì số cá thừa sẽ tăng thêm 10 kg. Số cá thừa này được bán để làm thức ăn cho động vật với giá 10 nghìn đồng/kg. Hỏi bác Bình phải bán với giá bao nhiêu nghìn đồng/kg để số tiền bán cá mỗi ngày đạt doanh thu lớn nhất?

[illegible]

Bài tập 21. (THPT Trần Nguyên Hãn - Hải Phòng 2025) Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Bài tập 22. (THPT Trần Phú_Vinh Phúc 2025) Trong trung tâm thương mại Lotte thành phố Vinh Yên, có một nhà hàng bán buffet hải sản. Khi nhà hàng bán với giá 200 ngàn đồng một suất thì mỗi ngày nhà hàng bán được 100 suất. Nhà hàng dự định có đợt giảm giá bán để kích cầu trong dịp cuối năm. Theo khảo sát từ thị trường thì mỗi lần giảm giá 10 ngàn đồng một suất thì nhà hàng bán thêm được 10 suất, hỏi nhà hàng cần bán với giá mới là bao nhiêu ngàn đồng một suất để doanh thu trong một ngày là lớn nhất?

Lời giải

Bài tập 23. (Chuyên Hoàng Văn Thụ_Hòa Bình 2025) Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Singapore ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 60 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 24 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3 000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

Lời giải

Lời Giải

Lời giải

Lời giải

[illegible]

Lời giải

[illegible]



Bài tập 31. (THPT Diễn Châu 5_Nghệ An 2025) Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm ($0 < x < 2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được là $F(x) = 2000x - x^2$ (chục nghìn đồng) và tổng chi phí doanh nghiệp bỏ ra là $G(x) = x^2 + 1440x + 50$ (chục nghìn đồng). Công ty cũng phải chịu mức thuế phụ thu cho 1 đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < x < 300$). Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) là bao nhiêu sao cho nhà nước thu được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận nhiều nhất theo đúng mức thuế phụ thu đó. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 3. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025) Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, (t \geq 0)$.

- a). Hàm vận tốc là: $v(t) = y' = 3t^2 - 12, (t \geq 0)$ và hàm gia tốc là $a(t) = 6t, (t \geq 0)$.
- b). Hạt chuyển động lên trên khi $t > 2$ và hạt chuyển động xuống dưới khi $t < 2$.
- c). Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 < t < 3$ là 9 m.
- d). Hạt tăng tốc khi $t > 2$ và hạt giảm tốc $0 < t < 2$

Lời giải

Câu 4. (THPT Tiên Du Bắc Ninh 2025) Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4,5$ với $0 \leq t \leq 0,5$.

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$.

Biết 1 lít xăng có giá là 21.000 đồng.

- a). Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1,5 lít.
- b). Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy.
Số tiền người mua phải trả là 787.500 đồng.
- c). Khi xăng chảy vào bình xăng thì tốc độ tăng thể tích là lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 21.
- d). Phương trình $V'(t) = 0$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

d) Tại thời điểm $t = 2(\text{s})$ vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất.

[illegible]

d). Vận tốc ban đầu của hạt là $1(m/s)$.

[illegible]

- a.** Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao lớn nhất mà con tàu đạt được là 250 (km).
- b)** Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao con tàu đạt được khi vận tốc của con tàu lớn nhất là 139,37 (km).
- c.** Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, vận tốc lớn nhất của con tàu là $v \approx 10,33$ (km/s).
- d)** Trong 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao thấp nhất mà con tàu đạt được tại thời điểm $t \approx 25$ (s).

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

a). Vận tốc của vật sau 3 giây là $4,6 \text{ m/s}$
 b). Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài hơn 7 giây.
 c). Vận tốc của vật lúc chạm đất sắp xỉ $-40,43 \text{ m/s}$.
 d). Vật đạt độ cao lớn nhất bằng 83,4 mét tại thời điểm $t = 4$ giây.

[illegible]
$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \text{ (v được tính bằng feet/s, 1 feet = 0,3048 m).}$$

- | | |
|--|--|
| | |
| | |
| | |
| | |

[illegible]

thức $v_1(t) = 2 \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$; $v_2(t) = 4 \cos\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

- a). Tại thời điểm ban đầu vận tốc con lắc thứ nhất bằng 1.
b). Vận tốc lớn nhất của con lắc thứ hai bằng 4
c). Tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$, vận tốc của con lắc thứ hai gấp hai lần vận tốc của con lắc thứ nhất.
d). Trong thời gian 10 giây đầu tiên, con lắc thứ nhất đạt vận tốc lớn nhất hai lần.

Lời giải

[illegible]

[illegible]

Câu 11. (THPT Sào Nam_Quảng Nam 2025) Xét một chất điểm M chuyển động trên đường nằm ngang chọn O làm gốc, chiều dương từ trái sang phải. Chuyển động của M được cho bởi công thức $S(t) = t^3 - 3t^2 - 1$, với t (giây), $t \geq 0$ là khoảng thời gian tính từ lúc chất điểm bắt đầu chuyển động. Gọi OM là khoảng cách từ M đến O tính bằng (mét).

- a). Tại thời điểm $t=0$ thì $OM=1m$.
- b). Chất điểm chuyển động với vận tốc được xác định là $v=3t^2-6t+1$ (m/s)
- c). Trong khoảng thời gian 2 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động, chất điểm chuyển động sang trái.
- d). Đến giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu chuyển động, khoảng cách lớn nhất của OM là $5m$.

Lời giải

[illegible]

a). Ngày có nhiều giờ ánh sáng nhất là 13 giờ.
b). Số giờ có ánh sáng giảm liên tục trong tháng 7.
c). Cánh đồng muối B có thể hoạt động 213 ngày mỗi năm
d). Ngày thứ 70 trong năm, thành phố 10 giờ có ánh sáng.

[illegible]

d). Ngày thứ 160 có số giờ ánh sáng lớn nhất trong năm.

[illegible]

d). Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm 2 phút sau khi tiêm.

[illegible]

- a).** Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 (làm tròn đến hàng phần trăm) xấp xỉ bằng 4,85 (cm/tuần).
- b).** Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 92 cm.
- c).** Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.
- d).** Sau 4 tuần, kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. Each column contains 10 rows of lines. The entire page is white, and there are no margins or additional markings.

d). Sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân giảm dần theo thời gian.

[illegible]

d). Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng $0,5 \text{ (mg/l)}$.

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. The left column contains ten rows of lines, and the right column also contains ten rows of lines. There are no margins or additional markings on the page.

Câu 18. (Sở GD & ĐT Thái Nguyên 2025) Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ với $t \geq 0$. Nếu coi $y = f(t)$ là hàm số xác định trên $[0; +\infty)$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t .

- a). Tốc độ truyền bệnh tại thời điểm t là $f'(t) = 90t - 3t^2$.
 b). Số người bị nhiễm bệnh từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ 13 là 4752.
 c). Đến ngày thứ 45 thì không còn người nhiễm bệnh.
 d). Trong 35 ngày đầu tiên thì số người nhiễm bệnh luôn tăng.

Lời giải

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains ten rows of these dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The margins are consistent on all sides, and there are no other markings or text on the page.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal lines. Each column contains ten rows of lines, creating a grid-like structure for writing. The lines are evenly spaced and extend across the width of each column. There are no margins, text, or other markings on the page.

d). Nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

[illegible]

- d).** $C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 5$.

Lời giải

Câu 23. (Sở GD&ĐT Bắc Ninh 2025) Nhịp tim của một vận động viên chạy sau t giây

($t \geq 0$) kể từ khi rời vạch xuất phát được cho bởi công thức $P(t) = \frac{300 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 2t + 25}}{t + 25}$ (số

nhịp tim/ phút). Biết rằng, với vận động viên đó bác sĩ đã đưa ra lời khuyên không nên đẩy nhịp tim quá 175 (số nhịp tim/ phút) để tránh tình trạng quá tải cho tim.

- Nhịp tim của vận động viên đó không vượt quá $150\sqrt{2}$ (số nhịp tim/ phút).
- Trong 2 phút đầu tiên kể từ khi xuất phát, nhịp tim của vận động viên đó vẫn trong ngưỡng cho phép theo lời khuyên của bác sĩ.
- Công thức cho biết tốc độ thay đổi nhịp tim theo thời gian t là

$$P'(t) = \frac{3450 \cdot \sqrt{2}t}{(t+25)^2 \cdot \sqrt{t^2 + 4t + 50}}$$

- d).** Tốc độ thay đổi nhịp tim của vận động viên đó tại thời điểm 1,5 phút sau khi xuất phát bằng 2,63 lần (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) tốc độ thay đổi nhịp tim tại thời điểm 0,5 phút sau khi xuất phát.

Lời giải

[illegible]

- d).** Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - \frac{7}{2}x$ (triệu đồng), trong đó x là số tivi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 9,5 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

Lời giải

[illegible]

d). Doanh thu lớn nhất trong 1 tháng là 31.205.000 đồng.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. The left column contains 10 rows of lines, and the right column also contains 10 rows. There are no margins, text, or other markings on the page.

d). Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 1690000 đồng.

Trang 335

Câu 27. (Cụm trường Hưng Yên 2025) Một cơ sở sản xuất khăn đang bán mỗi chiếc khăn với giá 50000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 34000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 50000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 500 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 32000 đồng, gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là X (nghìn đồng). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Tổng doanh thu trung bình mỗi tháng cơ sở sản xuất thu được khi chưa tăng giá là 1700000000 nghìn đồng.
- Số khăn bán ra được mỗi tháng sau khi tăng giá là $34000 - 5x$ chiếc.
- Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 41 nghìn đồng.
- Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 12500 chiếc.

Lời giải



- a). Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = (-1; +\infty)$.
- b). Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- c). Bất phương trình $f(x) \geq 72$ có đúng 3 nghiệm nguyên.
- d). Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau khi tham gia một khóa học, phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ sau t tháng kết thúc khóa học được xác định bởi hàm số $y = f(t)$, trong đó $f(t)$ được tính bằng % và $0 \leq t \leq 24$. Phần trăm kiến thức sinh viên còn nhớ 50% khi $t = 7$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. The left column contains ten rows of lines, and the right column also contains ten rows of lines. There are no margins, text, or other markings on the page.



d). Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

Trang 338

d). Để chi phí hoạt động thấp nhất, công ty cần sử dụng 16 máy.

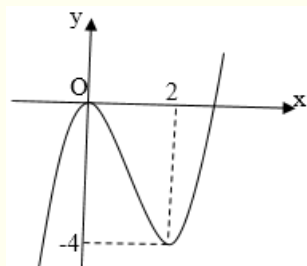
[illegible]

d). Tổng chi phí nhiên liệu để tàu chạy trên quãng đường 1 km nhỏ nhất là 43 (nghìn đồng).

Trang 339

[illegible]

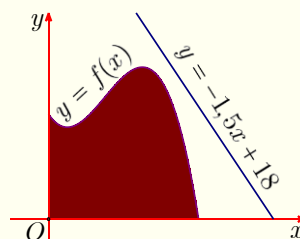
Câu 32. (Sở GD & ĐT Bạc Liêu 2025) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như vẽ



- a). Hàm số có hệ số $d > 0$.
- b). Hàm số có hệ số $a > 0$.
- c). Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $E(0; 2)$.
- d). Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($0 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = f(x) - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 200 nghìn đồng/mét. Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày là 1100 nghìn đồng.

Lời giải

Câu 33. (Sở GD & ĐT Hà Tĩnh 2025) Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh hoạ, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = -0,1x^3 + 0,9x^2 - 1,5x + 5,6$.



Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100m.

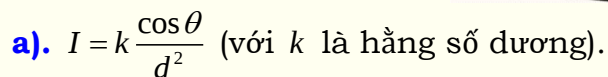
- Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài 600m.
- Trên đường đi dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox , điểm cách gốc O một đoạn 500m có khoảng cách theo phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất.
- Khoảng cách nhỏ nhất theo phương thẳng đứng từ một điểm trên đường đi dạo ven hồ đến bờ hồ đối diện là 490m.
- Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Biết tọa độ của điểm để xây bến thuyền này là $M(a;b)$. Giá trị $a+5b$ bằng 43.

[illegible]

- a). Tỷ lệ học sinh có điểm Toán từ 9 trở lên của lớp 12B5 là 80%.
- b). Học sinh xuất sắc kiểm tra môn Toán đều có điểm lớn hơn hoặc bằng 9.
- c). Những học sinh có điểm Toán dưới 9 điểm đều là học sinh loại giỏi.
- d). Có 22 học sinh kết quả xuất sắc có điểm trên 9 biết rằng tỷ lệ học sinh có điểm Toán trên 9 điểm của học sinh giỏi bằng 37,5% và trong số học sinh có điểm bằng 9 có 50% học sinh xuất sắc.

[illegible]

Câu 35. (Sở GD & ĐT Ninh Bình 2025) Một chiếc đèn được đặt trên đỉnh của một cột đèn cao h (m) để chiếu sáng một vòng xuyến giao thông đồng trục có bán kính 12 m. Cường độ ánh sáng I tại một điểm P trên vòng xuyến tỉ lệ thuận với cosin của góc θ và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách d (m) từ nguồn sáng đến điểm P (xem hình dưới đây).



$$\text{b). } \cos \theta = \frac{12}{\sqrt{h^2 + 144}}.$$

c). Nếu $I = f(h)$ thì $f'(h) = k \frac{-2h^2 + 144}{(h^2 + 144)^2 \sqrt{(h^2 + 144)^3}}$.

b). Để cường độ ánh sáng I lớn nhất thì cột đèn phải cao $6\sqrt{2}$ m.

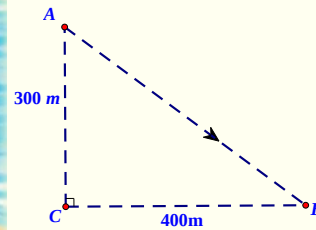
Trang 343

- ## Lời giải

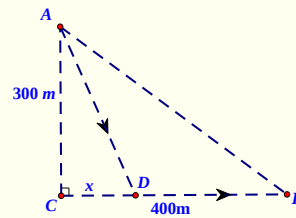
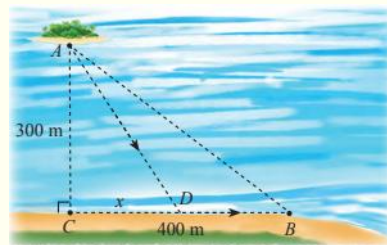
Câu 37. (THPT Lý Thường Kiệt_Hà Nội 2025) Anh B chế tạo một bể cá có dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $0,096\text{m}^3$, chiều cao $h=0,6\text{m}$, chiều rộng x , chiều dài y (với $x>0, y>0$). Anh B dùng loại kính để làm các mặt bên có giá 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm đáy có giá 100.000 đồng/ m^2 . Mọi chi phí khác xem như không đáng kể. Khi đó

- ### Lời giải

Trang 345



a). Thời gian Giáp chèo thuyền thẳng từ A đến B là là 10 phút.
b). Thời gian Giáp chèo thuyền từ A đến C rồi chạy bộ từ C đến B là là 10 phút.
c). Giả sử Giáp chèo thuyền thẳng đến điểm D nằm giữa B và C và cách C một đoạn x (m) như hình vẽ dưới đây, rồi chạy bộ đến B thì thời gian Giáp đi từ A đến B được tính bằng công thức $f(x) = \frac{1}{100} \left(\sqrt{x^2 + 90000} + 400 - x \right)$ (phút).



Lời giải

[illegible]

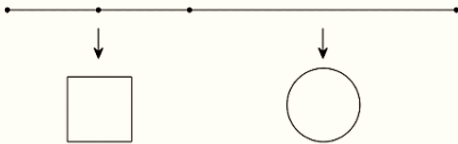
d). Khi cạnh đáy của chiếc hộp x lớn hơn 4 thì x càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for writing. There are no margins, text, or other markings on the paper.

d). Chi phí thấp nhất mà ông A trả cho công nhân làm bể nước theo yêu cầu là 3072000 đồng.

Trang 347

Câu 41. (Sở GD & ĐT Quảng Bình 2025) Một sợi dây kim loại dài 6(cm). Người ta cắt sợi dây đó thành hai đoạn. Đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($0 < x < 6$).



a). Bán kính đường tròn là $r = \frac{x}{\pi}$.

b). Diện tích hình vuông là $\left(\frac{6-x}{4}\right)^2$.

c). Tổng diện tích hai hình là $\frac{(4+\pi)x^2 - 12\pi x + 36\pi}{16\pi}$.

d). Khi $x = \frac{6\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

[illegible]

[illegible]

Câu 42. (Liên Trường Nghệ An 2025) Nhân dịp Tết Trung thu, bác Oanh làm các đèn lồng cho con. Mỗi đèn bác dùng một sợi dây đồng dài $24dm$ cắt thành 3 đoạn để uốn làm khung đèn. Đoạn thứ nhất bác uốn thành hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $x(dm)$ để làm đáy, hai đoạn còn lại có độ dài bằng nhau uốn thành các đường gấp khúc ASC và BSD . Khung đèn sau khi hoàn thiện có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và mặt ngoài của đèn được dán giấy màu để trang trí (xem các mối nối, dán là không đáng kể). Khi đó ta có:

- a).** Độ dài cạnh bên của khung đèn bằng $6 - x(dm)$.
- b).** Khi $x = 2(dm)$ thì độ dài đường cao của khung đèn là $\sqrt{14}(dm)$
- c).** Khi tất cả các cạnh bằng nhau thì diện tích giấy màu cần dùng là $9(1 + \sqrt{3})dm^2$
- d).** Thể tích phần không gian của đèn lồng lớn nhất khi $x = 2,79dm$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

[illegible]

[illegible]

Câu 43. (THPT Thạch Thành 1_Thanh Hóa 2025) Bác Lâm muốn gò một cái thùng bằng tôn dạng hình hộp chữ nhật không nắp có đáy là hình vuông và đựng đầy được 32 lít nước. Gọi độ dài cạnh đáy của thùng là $x(dm)$, chiều cao của thùng là $h(dm)$.

- a).** Thể tích của thùng là $V = x^2 \cdot h \left(dm^3 \right)$.
- b).** Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là: $S = 4xh + x^2 \left(dm^2 \right)$.
- c).** Đạo hàm của hàm số $S(x) = \frac{128}{x} + x^2$ là $S'(x) = \frac{128}{x^2} + 2x$.
- d).** Để làm được cái thùng mà tốn ít nguyên liệu nhất thì độ dài cạnh đáy của thùng là $4dm$.

Lời giải

Câu 44. (THPT Tư Nghĩa 1_Quảng Ngãi 2025) Một tấm nhôm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30cm. Người ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.

a). Thể tích khối lăng trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEG .

b). Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10$ (cm).

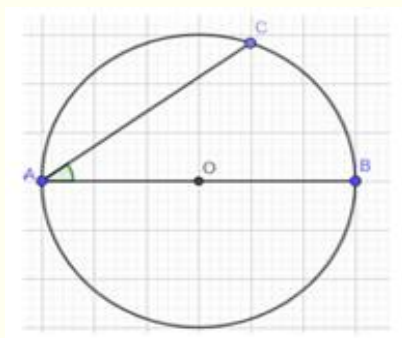
c). Diện tích của tam giác AEG bằng $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15-x)^2 \cdot (2x-15)}$.

d). Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250.

[illegible]

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. Each column contains ten rows of lines, providing a structured space for students to practice letter formation and alignment. The background is white, and the lines are black.

Câu 45. (Sở GD & ĐT Vũng Tàu 2025) Một khu du lịch sinh thái đang khai thác dịch vụ chèo thuyền và ngắm cảnh ven hồ. Hồ nước có dạng hình tròn tâm O , bán kính bằng $1km$ và tại hai vị trí A, B đối xứng nhau qua O người ta xây dựng nơi bán vé vào và nơi kết thúc thăm quan. Du khách sẽ được sử dụng dịch vụ chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí C trên bờ hồ và sẽ có xe chở ngắm cảnh từ vị trí C men theo bờ hồ đến nơi kết thúc B . Biết rằng vận tốc chèo thuyền là $100m$ mỗi phút và vận tốc xe chạy ngắm cảnh là $200m$ mỗi phút. Gọi x (radian) là số đo góc CAB $\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$.

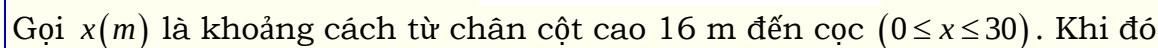


- a). Khi $x=0$ thời gian đi từ A đến B là 20 phút.
b). Quãng đường xe chở người đi ngắm cảnh là $1000x$ (mét).
c). Thời gian đi từ A đến B là $20\cos x+5x$ (phút).
d). Thời gian xe đi từ A đến B luôn ít hơn 22 phút 30 giây với mọi cách chọn từ vị trí điểm C .

Lời giải

[illegible]

Câu 46. (Cụm Chương Mỹ_Thanh Oai 2025) Có hai cây cột, một cây cao 16 m và một cây cao 24 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây, gắn vào một cọc duy nhất nổi từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột (tham khảo hình vẽ sau).



- ## Lời giải

Trang 353

[illegible]

- ## Lời giải

[illegible]